Tarea II: Funciones Aritméticas
Teoría de los números I
Fecha de entrega: viernes, 12/mar/2019

Los números entre los paréntesis denota el puntaje de ese ejercicio. Hay un total de 33 puntos.

Ejercicio 1. (4) Sea $\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} n^{-s}$ la función zeta de Riemann. Prueba las siguientes identidades (ignora cuestiones de convergencia)

1. $$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

2. $$\zeta(s)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$$

3. $$\zeta(s)\zeta(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s}$$

4. Usa la irracionalidad de $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ para probar que hay una infinidad de números primos.

Ejercicio 2. (4) Funciones multiplicativas.

1. (1) Prueba que $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es multiplicativa si y solamente si $f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdots f(p_s^{\alpha_s})$ para cualesquiera p_i primos y $\alpha_i \geq 0$.

2. (1) Sean f y g funciones multiplicativas, prueba que $f = g$ si y solamente si $f(p^\alpha) = g(p^\alpha)$ para todo primo p y para toda $\alpha > 0$. Esto quiere decir que las funciones multiplicativas estan completamente determinadas por sus valores en las potencias de los primos.

3. (1) Si f y g son funciones multiplicativas, prueba que $fg(n) := f(n)g(n)$ y $\frac{1}{f}(n) := \frac{1}{f(n)}$ son multiplicativas. ¿Será $f \circ g$ una función multiplicativa? Justifica tu respuesta con una prueba o un contraejemplo.

4. (1) Si f es una función muliplicativa, prueba que la función
$$g(n) := \sum_{d|n} f(d)$$
es multiplicativa también (no usen el producto de Dirichlet).

Ejercicio 3. (5) Función contadora de divisores.

1. (2) Prueba que $\tau(n) \neq \mathcal{O}\big((\log n)^k\big)$ para toda k y que $\tau(n) = \mathcal{O}(\sqrt{n})$.

2. (1) Demuestra que $\tau(n)$ es impar $\iff n$ es un cuadrado.

3. (1)
$$\prod_{d|n} d = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$$

4. (1) Prueba que para toda $k > 1$, existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $\tau(n) + \tau(m) = k$.

Ejercicio 4. (3) La función φ de Euler.

1. (1) Demuestra que $\varphi(n)$ es par para toda $n > 1$.

2. (1) Prueba que
$$\sum_{\substack{k=1 \\ (n,k)=1}}^{n} k = \frac{n}{2}\varphi(n)$$
donde la suma corre sobre el conjunto $\{1 \leq k \leq n \mid (n,k) = 1\}$.

3. (1) Prueba que $\varphi(n)\varphi(m) = \varphi\big((n,m)\big)\varphi\big([n,m]\big)$ para toda $n, m > 0$. ¿Es válida esta fórmula si sustituimos φ por cualquier función multiplicativa? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 5. (2) Para toda $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ se cumple que
$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$
Usa esta fórmula para probar que hay una infinidad de números primos.

Ejercicio 6. (4) Números perfectos.

1. (1) Un entero $n > 0$ es *perfecto* si $\sigma(n) = 2n$. Prueba que n es perfecto si y solamente si
$$\sum_{d \mid n} \frac{1}{d} = 2.$$

2. (1) Prueba que si n es perfecto y par, entonces es una suma consecutiva de potencias de 2.

3. (2) Prueba que si $2^p - 1$ es primo (véase el ejercicio **??**), entonces $2^{p-1}(2^p - 1)$ es perfecto. Conversamente, prueba que si n es un número perfecto par, entonces $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ donde $2^p - 1$ es un número primo. ¿Hay números perfectos impares?

Ejercicio 7. (6) Suma de divisores.

1. (1) Demuestra que $\sigma(n)$ es impar si y solamente si $n = m^2$ ó $n = 2m^2$ para alguna $m \in \mathbb{Z}$.

2. (2) Prueba que $\sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(n) \leq n^2$ para toda $n > 1$.

3. (1) Prueba que
$$\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d \mid n} \frac{1}{d}.$$

4. (2) Concluye que
$$\frac{\sigma(1)}{1} + \frac{\sigma(2)}{2} + \cdots + \frac{\sigma(n)}{n} \leq 2n$$
(Hint: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \cdots = \frac{\pi^2}{6} < 2$)

Ejercicio 8. (5) Fija un polinomio $f(x)$ con coeficientes enteros y define
$$\psi_f(n) := \#\{1 \leq k \leq n \mid (f(k), n) = 1\}.$$
Prueba las siguientes afirmaciones:

1. (3) ψ_f es multiplicativa.

2. (1) $\psi_f(p^\alpha) = p^{\alpha-1}\psi_f(p)$ para todo primo p y para toda $\alpha \geq 0$.

3. (1)
$$\psi_f(n) = n \prod_{\substack{p \mid n \\ p \text{ primo}}} \frac{\psi_f(p)}{p}$$