Teoría de los números II – semestre 2020-2

En las aproximaciones generadas para la suma del n-ésimo armónico aparece la constante γ de Euler. Enseguida extenderemos la idea del uso de una constante para obtener la suma de una sucesión $\{d_n\}$ de números que representan sectores de áreas sobre una curva f, que es positiva y estrictamente decreciente. Consideremos que f es una función estrictamente decreciente y positiva en el intervalo $[1, \infty)$; por otro lado la sucesión $\{d_n\}$ es de los n-números que representan las áreas que sobrepasan la curva (véase que en la Figura 1.7 los d_n son los sectores sombreados), que son parte de los rectángulos que cubren el área bajo la curva de f en el intervalo [1, n]. Entonces, definimos

$$d_n = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx, \text{ para } n = 2,3,4, \dots . \qquad (1)$$

Se nota que $d_{n+1} > d_n$, y además las partes sombreadas pueden ser nuevamente concentradas en una zona de altura $f(1)$ y base unitaria (véase la Figura 1.7). Como f es estrictamente decreciente entonces no existe traslape de las zonas sombreadas cuando se agrupan en la zona antes mencionada. Y al comparar las áreas de cada una de las d_i se tiene que $d_n < d_{n+1} < f(1)$, entonces se ve que $\{d_n\}$es una sucesión creciente que a la vez converge a un límite $C(f)$, por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = C(f)$$

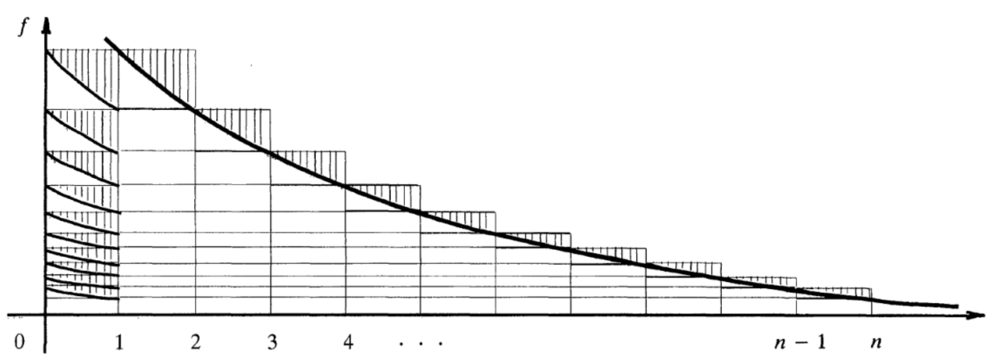

Figura 1.7 . Representacion grafica de la sucesión $\{d_n\}$.

Aquí nos podemos referir a $C(f)$como una constante de carácter general asociada a cada funciónf.La interpretación geométrica de este resultado es que $C(f)$es la suma de todas las partes sombreadas que sobrepasan a la función f en el intervalo$[1,\infty)$. Véase en la Figura 1.7 que estas partes sombreadas cumplen con$0 < C(f) < f(1)$; por otro lado, $(C(f) - d_n)$ representa la suma de las áreas sombreadas en el intervalo $[n,\infty)$, y estas áreas nuevamente se pueden trasladar a la izquierda dentro de un rectángulo de altura$f(n)$), y con esto se llega a que:

$$0 < C(f) - d_n < f(n), \qquad n = 2,3,4,\ldots. \qquad (2)$$

Con todo esto podemos enunciar lo siguiente:

Si *f* es una función estrictamente decreciente sobre [1, ∞), entonces existe una constante positiva C(*f*) <*f*(1) y una sucesión {E$_f$(n)}, donde 0 <E$_f$(n) <*f*(n), tal que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_{1}^{n} f(x)\,dx + C(f) + E_f(n), \qquad n = 2,3,\ldots. \qquad (3)$$

Nótese que esta ecuación nos indica que la diferencia entre la suma y la integral es igual a una constante que dependerá de cómo sea f, más una cantidad positiva $E_f(n)$, que es menor al último término de la suma. Entonces, si $f(n)$tiende a cero cuando *n* tiende a infinito, entonces $E_f(n)$también tiende a cero.

Para demostrar la proposición enunciada definimos la igualdad:

$$E_f(n) = f(n) - (C(f) - d_n),$$

entonces la ecuación (3) es una consecuencia de la definición (1), y las desigualdades

$$0 < E_f(n) < f(n)$$

surgen de (2).

Finalmente si $f(n)$tiende a cero y *n* tiende a infinito, entonces de (3) se tiene que

$$C(f) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n} f(x)\,dx\right)$$

Esta constante es un caso general de lo que conocemos como la constante de Euler asociada a una función f.

Un caso particular, cuando $f(x) = \frac{1}{x}$ entonces $C(f)$ es la constante γ de Euler que ya conocimos, y que usamos antes en la aproximación de H_n.

CDMX 13 de abril de 2020