# Teoría de los números II – semestre 2020-2

Enseguida mostraremos que el Teorema 3 no solamente es válido para $n \in \mathbb{N}$, sino que también para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Este hecho será usado en el proceso de describir el comportamiento de funciones aritméticas.

Definición. Sea $t \in \mathbb{R}$ definimos

$$H_t = H_{[t]}$$

**Teorema 4.**

$H_t = \ln(t) + \gamma + O\left(\frac{1}{t}\right)$, con $t \in \mathbb{R}$.

**Demostración**:

Sabemos que:

$$H_t = \ln[t] + \gamma + O\left(\frac{1}{[t]}\right)$$

Pero, antes demostremos lo siguiente:

$$\ln[t] = \ln(t) + O\left(\frac{1}{[t]}\right)$$

para finalmente sustituirlo en la expresión de arriba.

Por una parte $\int_{[t]}^{t} \frac{1}{x} dx = \ln(t) - \ln[t] \geq 0$ es el área bajo la curva$y = \frac{1}{x}$. Ver Figura 1.5.

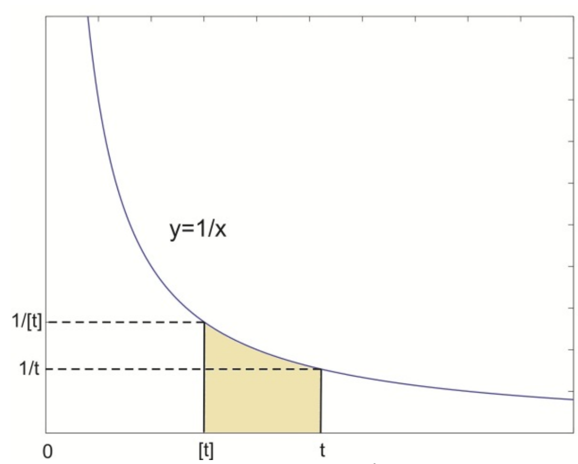


**Figura 1.1. Área bajo la gráfica de $y = {}^{1}/_{x}$, en el intervalo $[[t], t]$.**

Por otra parte la distancia de $[t]$ a $t$ es menor que1,así que un rectángulo de base $t-[t]$ y altura $\frac{1}{[t]}$ tendría área a lo mas de $\frac{1}{[t]}$, como se ve en la Figura 1.6.

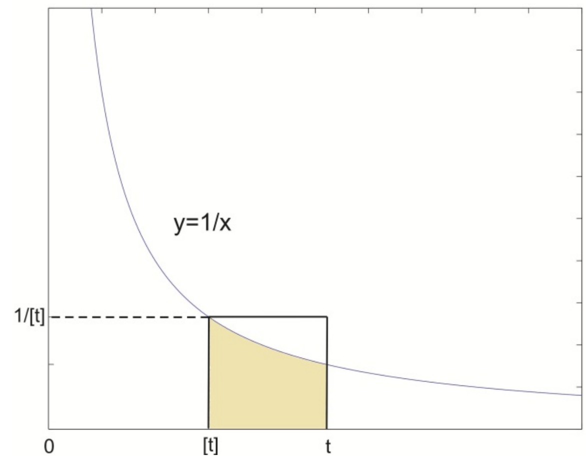


**Figura 1.2: El área bajo la gráfica de $y = {}^{1}/_{x}$ , es menor a la del rectángulo de altura ${}^{1}/_{[t]}$.**

Asíque $0 < \ln(t) - \ln[t] \leq \ln\frac{1}{[t]}$ para toda$[t] \geq 1$, entonces$\ln[t] = \ln(t) + O\left(\frac{1}{[t]}\right)$. Sustituyendo esto en$H_{[t]}$:

$$H_t = H_{[t]} = \ln(t) + O\left(\frac{1}{[t]}\right) + \gamma + O\left(\frac{1}{[t]}\right) = \ln(t) + \gamma + 2O\left(\frac{1}{[t]}\right) = \ln(t) + \gamma + O\left(\frac{1}{[t]}\right)$$

pero que$H_t = \ln(t) + \gamma + O\left(\frac{1}{[t]}\right)$se cumpla, implica que:

$$|H_t - (\ln(t) + \gamma)| \ll \frac{1}{[t]}$$

Pero $\frac{1}{[t]} \ll \frac{1}{t}$, ya que existen$C = 2$ y $N = 1$ tales que $\frac{1}{[t]} \leq 2 \cdot \frac{1}{t}$, para toda$t \geq 1$,por loque$|H_t - (\ln(t) + \gamma)| \ll \frac{1}{[t]} \ll \frac{1}{t}$, por lo tanto $|H_t - (\ln(t) + \gamma)| \ll \frac{1}{t}$, esto es, $H_t = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{t}\right)$. ♦

A pesar de que la segunda aproximación que construimos para el $n$-ésimo armónico ya tiene un buen grado de aproximación, considerando que $1/n$ se hace pequeño muy rápido, resulta que es posible contemplar la posibilidad de que el margen de error se puede mejorar para que así la aproximación sea mejorcon valores pequeños de $n$. Para esto presentamos las siguientes aproximaciones, de las cuales sacaremos algunas conclusiones a partir de cálculos numéricos.

**Aproximación Tipo A**

Al observar la Tabla 1

| $n$ | $H_n$ | $\mathrm{L}n(n) + \gamma + 1/(2n)$ |
|---|---|---|
| 10 | 2.9289682539682539683 | 2.9298007578955785446 |
| $10^2$ | 5.1873775176396202608 | 5.1873858508896242286 |
| $10^3$ | 7.4854708605503449127 | 7.4854709438836699127 |
| $10^4$ | 9.7876060360443822642 | 9.7876060368777155967 |
| $10^5$ | 12.090146129863427947 | 12.090146129871761281 |

**Tabla 1**

vemos que la expresión$\left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n}\right)$se acerca muy rápido al valor racional del *n*-ésimo armónico, es decir, para valores pequeños de *n* la aproximación ya es muy certera.Entonces, es apropiado analizar la posibilidad de que exista una función $h(n)$ tal que:

$$\left|H_n - \left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n}\right)\right| \ll h(n)$$

y a su vez implicaría que existen $C$ y $N$ tales que:

$\left|H_n - \left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n}\right)\right| \ll C \cdot h(n)$, para toda $n > N$, cuando$n \to \infty$.

De los datos de la Tabla 1, se percibe que el valor absoluto de la diferencia $H_n - \left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n}\right)$ se puede expresar de esta manera:

| $n$ | $\left\|H_n - \left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n}\right)\right\|$ |
|---|---|
| 10 | $8.325\times10^{-4}$ |
| $10^2$ | $8.333\times10^{-6}$ |
| $10^3$ | $8.333\times10^{-8}$ |
| $10^4$ | $8.333\times10^{-10}$ |

| | |
|---|---|
| $10^5$ | $8.333\times10^{-12}$ |

Con estos datos podemos ver que los valores de $\left|H_n - \left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n}\right)\right|$ se comportan aproximadamente como una función de la forma $\frac{k}{n^m}$, con $m$ en los naturales. Después de probar para algunos valores de $m$ y de $C$, encontramos que con $C = \frac{1}{11}, h(n) = \frac{1}{n^2}$ y $N = 10$ se podría satisfacer la desigualdad deseada. Esto es, si tomamos esos valores obtenemos que $\frac{1}{11\cdot n^2}$ es más grande que $\left|H_n - \left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n}\right)\right|$, según los valores de la Tabla anterior, como se muestra en la que sigue:

| $n$ | $\dfrac{1}{11\cdot n^2}$ |
|---|---|
| 10 | $9.09\times10^{-4}$ |
| $10^2$ | $9.09\times10^{-6}$ |
| $10^3$ | $9.09\times10^{-8}$ |
| $10^4$ | $9.09\times10^{-10}$ |
| $10^5$ | $9.09\times10^{-12}$ |

Como $\frac{1}{11\cdot n^2}$ y $\left|H_n - \left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n}\right)\right|$ son funciones decrecientes, entonces tenemos la certeza que:

$$\left|H_n - \left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n}\right)\right| \leq \frac{1}{11\cdot n^2},\ \text{para}\ n > 10$$

Así, con base en lo anterior podemos decir que:

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En conclusión, se propone un margen de error $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ que tiende a cero rápidamente, y esta aproximación de $H_n$ es mejor que la anterior

$$H_n = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Todo esto a través de los cálculos que nos sugerían los datos de tabla 1.

**Aproximación Tipo B**

De manera análoga ahora tenemos el conjunto de datos de la Tabla 2

| $n$ | $H_n$ | $\ln(n) + \gamma + 1/(2n) - 1/(12n^2)$ |
|---|---|---|
| 10 | 2.9289682539682539683 | 2.9289674245622452113 |
| $10^2$ | 5.1873775176396202608 | 5.1873775175562908953 |
| $10^3$ | 7.4854708605503449127 | 7.4854708605503365793 |
| $10^4$ | 9.7876060360443822642 | 9.7876060360443822633 |
| $10^5$ | 12.090146129863427947 | 12.090146129863427934 |

**Tabla 2**

Nótese que en la tabla se aprecia que la aproximación que proporciona la fórmula $\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}$del $n$-ésimo armónico tiene una exactitud magnífica de 9 decimales desde $n = 10^2$ , mientras que la fórmula anterior de la aproximación **Tipo A** es de cuatro decimales.

Entonces, como en el caso anterior trataremos de encontrar una función $h(n)$ y constantes C y N, tales que:

$$\left|H_n - \left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}\right)\right| \leq C \cdot h(n), \text{ para toda } n > N.$$

En la tabla que siguese muestran algunos valores de

$$\left|H_n - \left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}\right)\right|,$$

encontrados con base en los datos de la Tabla 2:

| $n$ | $\left\lvert H_n - \left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}\right)\right\rvert$ |
|---|---|
| 10 | $8.29\times10^{-7}$ |
| $10^2$ | $8.33\times10^{-11}$ |
| $10^3$ | $8.33\times10^{-15}$ |
| $10^4$ | $8.33\times10^{-19}$ |
| $10^5$ | $8.33\times10^{-23}$ |

Con estos datosy con los cálculos hechos para el ejercicio anterior podemos proponer a la funciónh$h(n) = \frac{1}{n^5}$, junto con$C = \frac{1}{11}$ $y\ n > 10$.

Así, con base en estos elementos podemos hacer la siguiente tabla

| $n$ | $\frac{1}{11 \cdot n^5}$ |
|---|---|
| 10 | $9.09\times10^{-7}$ |
| $10^2$ | $9.09\times10^{-11}$ |
| $10^3$ | $9.09\times10^{-15}$ |
| $10^4$ | $9.09\times10^{-19}$ |
| $10^5$ | $9.09\times10^{-23}$ |

Y como también $\left\lvert H_n - \left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}\right)\right\rvert$ y $\frac{1}{11 \cdot n^5}$ son decrecientes, por lo tanto

$$\left\lvert H_n - \left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}\right)\right\rvert \leq \frac{1}{11 \cdot n^5}, \text{para toda } n > 10.$$

Por lo tanto se llega a que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$, y ésta es la nueva aproximación para el *n*-ésimo armónico según los datos de la tabla 2.

Para terminar este apartado mencionaremos que Leonhard Euler aportó los elementos necesarios (*Institutiones Calculi Differentialis* (1755 Parte II, cap. VI)) para que fuera posible elaborar una igualdad semejante a

.

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \tfrac{1}{2n} - \tfrac{1}{12n^2} + O(\tfrac{1}{n^5})$$

Ésta es $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - [\ldots]$, o enunciada de otra manera como:

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{n^k}$$

donde $B_k$ es el $k$-ésimo número de Bernoulli.[1]

Esta igualdad no es una aproximación tan manejable como la construida en el **Tipo B**, pero lo sobresaliente es que nos proporciona una relación directa con los números de Bernoulli.

CDMX 3 de abril de 2020

[1] Los número de Bernoulli son los coeficientes $B_k$de la expansión en una serie de Taylor de la función, es $G(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ decir, $G(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \dfrac{x^n}{n!}$, para $|x| < 2\pi$.