La función ζ de Riemann

Julio César Pardo Dañino

Facultad de Ciencias

29 de abril de 2020

De Euler a Riemann

Un poco de historia

Iniciaremos contando un poco del origen de esta famosa función y su estrecha relación con los números primos. La cual inicia por los estudios de Euler sobre la serie armónica generalizada, hasta llegar a la famosa hipótesis de Riemann, la cual se vincula con la distribución de los números primos.

De Euler a Riemann

Las contribuciones de Euler

- En 1735, Euler resuelve el problema de Basilea, el cual consiste en encontrar la suma exacta de los inversos de los cuadrados de los enteros positivos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

De Euler a Riemann

Las contribuciones de Euler

- En 1735, Euler resuelve el problema de Basilea, el cual consiste en encontrar la suma exacta de los inversos de los cuadrados de los enteros positivos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- Desde Euclides (año 300 a. C.) se sabe que la sucesión de números primos es infinita. En 1737 Euler demostró que la serie

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$$

(donde $\mathbb{P}$ es el conjunto de números primos) diverge, lo cual conduce a otra demostración de la existencia de infinitos números primos.

De Euler a Riemann

Las contribuciones de Euler

- En 1749, Euler observa lo siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \qquad s > 1$$

De Euler a Riemann

Las contribuciones de Euler

- En 1749, Euler observa lo siguiente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \qquad s > 1$$

- La anterior observación será el comienzo de las investigaciones de Riemann en esta dirección.

De Euler a Riemann

La función cantidad de números primos

- Legendre y Gauss se interesaron por el problema de establecer la cantidad de números primos que hay en un intervalo $[1, x]$ con $x \in \mathbb{R}$ y $x \geq 1$, así definieron la función $\pi(x)$, que denota la cantidad de números primos menores o iguales a x.

De Euler a Riemann

La función cantidad de números primos

- Legendre y Gauss se interesaron por el problema de establecer la cantidad de números primos que hay en un intervalo $[1, x]$ con $x \in \mathbb{R}$ y $x \geq 1$, así definieron la función $\pi(x)$, que denota la cantidad de números primos menores o iguales a x.
- Legendre conjeturaba que para valores suficientemente grandes $\pi(x)$ es aproximadamente igual a $\frac{x}{\ln(x) - 1.08366}$.

De Euler a Riemann

La función cantidad de números primos

- Legendre y Gauss se interesaron por el problema de establecer la cantidad de números primos que hay en un intervalo $[1, x]$ con $x \in \mathbb{R}$ y $x \geq 1$, así definieron la función $\pi(x)$, que denota la cantidad de números primos menores o iguales a x.
- Legendre conjeturaba que para valores suficientemente grandes $\pi(x)$ es aproximadamente igual a $\frac{x}{\ln(x)-1.08366}$.
- Independientemente, Gauss en 1792, afirmaba que $\pi(x)$ se diferencia relativamente poco de la integral $\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$. Esta integral es usualmente denotada por $\mathrm{li}(x)$

De Euler a Riemann

La función cantidad de números primos

- Las hipótesis de Legendre y Gauss se expresan como

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \qquad \pi(x) \sim \mathrm{li}(x)$$

De Euler a Riemann

La función cantidad de números primos

- Las hipótesis de Legendre y Gauss se expresan como

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \qquad \pi(x) \sim \mathrm{li}(x)$$

- Utilizando integración por partes para li, vemos que

$$\mathrm{li}(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2(t)} \sim \frac{x}{\ln(x)}$$

de aquí que ambas conjeturas son equivalentes.

De Euler a Riemann

El teorema de los números primos

- En 1851 Chebyshev demuestra las desigualdades $3/8\ln(2) \leq \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} \leq 6\ln(2)$ y deduce que si existe el límite de $\frac{\pi(x)}{x/\ln(x)}$ cuando $x \to \infty$ entonces debe ser la unidad, esto es

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} = 1$$

Al demostrar la existencia de este límite se tendría la equivalencia asintótica $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$.

De Euler a Riemann

El teorema de los números primos

- En 1851 Chebyshev demuestra las desigualdades $3/8\ln(2) \leq \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} \leq 6\ln(2)$ y deduce que si existe el límite de $\frac{\pi(x)}{x/\ln(x)}$ cuando $x \to \infty$ entonces debe ser la unidad, esto es

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} = 1$$

  Al demostrar la existencia de este límite se tendría la equivalencia asintótica $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$.
- Esta conjetura es la que conocemos como el teorema de los números primos.

De Euler a Riemann

La función ζ de Riemann

- En su memoria de 1859, Riemann estudia lo que llamaría función $\zeta(s)$ definida por la serie armónica generalizada

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{con} \qquad \mathrm{Dom}(\zeta) = \{s \in \mathbb{C} \ : \ \Re(s) > 1\}$$

De Euler a Riemann

La función ζ de Riemann

- En su memoria de 1859, Riemann estudia lo que llamaría función $\zeta(s)$ definida por la serie armónica generalizada

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{con} \qquad \mathrm{Dom}(\zeta) = \{s \in \mathbb{C} \ : \ \mathfrak{R}(s) > 1\}$$

- Utilizando métodos de variable compleja, Riemann demuestra que la función ζ se puede extender al dominio $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, teniendo una única singularidad en $s = 1$ coincidiendo con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ justamente en $\{s \in \mathbb{C} \ : \ \mathfrak{R}(s) > 1\}$

De Euler a Riemann

La función ζ de Riemann

- La conexión fundamental entre la función $\zeta(s)$ y los números primos está dada por:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \qquad s > 1$$

la relación encontrada por Euler.

De Euler a Riemann

La hipótesis de Riemann

- Riemann estaba interesado en el estudio de los ceros de la función ζ. Decimos que $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ es un cero de ζ, si $\zeta(s) = 0$.

De Euler a Riemann

La hipótesis de Riemann

- Riemann estaba interesado en el estudio de los ceros de la función ζ. Decimos que $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ es un cero de ζ, si $\zeta(s) = 0$.
- Existen una infinidad de ceros de la función ζ, entre ellos se puede demostrar que si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\zeta(-2n) = 0$, estos son los llamados ceros triviales de la función ζ. Todo cero diferente a estos, es conocido como cero no trivial.

De Euler a Riemann

La hipótesis de Riemann

- Riemann estaba interesado en el estudio de los ceros de la función ζ. Decimos que $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ es un cero de ζ, si $\zeta(s) = 0$.
- Existen una infinidad de ceros de la función ζ, entre ellos se puede demostrar que si $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\zeta(-2n) = 0$, estos son los llamados ceros triviales de la función ζ. Todo cero diferente a estos, es conocido como cero no trivial.
- Riemann logra demostrar que existen infinitos ceros no triviales de la función ζ, que cumplen $\Re(s) = 1/2$. Y así enuncia su famosa conjetura, conocida como la hipótesis de Riemann, la cual establece que todos los ceros no triviales de la función ζ cumplen que $\Re(s) = 1/2$.

De Euler a Riemann

La distribución de los números primos

- La existencia del límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln(x)}{x} = 1$$

la demostraron Hadamard y de la Vallée Poussin independientemente uno de otro en 1896, mediante las ideas desarrolladas por Riemann relacionadas con la función $\zeta(s)$.

De Euler a Riemann

La distribución de los números primos

- La existencia del límite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln(x)}{x} = 1$$

  la demostraron Hadamard y de la Vallée Poussin independientemente uno de otro en 1896, mediante las ideas desarrolladas por Riemann relacionadas con la función $\zeta(s)$.

- Con ello quedaba completamente demostrada la ley asintótica de distribución de los números primos. Pero queda por lo tanto un resto $\pi(x) - \frac{x}{\ln(x)}$ que hay que precisar.

De Euler a Riemann

Riemann y los números primos

- Riemann observó que el orden de la diferencia $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ depende de la ubicación de los ceros de la función $\zeta(s)$ en la llamada franja crítica $0 < \Re(s) < 1$.

De Euler a Riemann

Riemann y los números primos

- Riemann observó que el orden de la diferencia $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ depende de la ubicación de los ceros de la función $\zeta(s)$ en la llamada franja crítica $0 < \Re(s) < 1$.
- La conexión entre la hipótesis de Riemann y los números primos se debe a que de ser cierta, el resto se puede acotar de la mejor manera posible, concrétamente se tendría que

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln(x)} + O\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)$$

La función ζ

Una buena definición

Antes de presentar las propiedades básicas de la función ζ, veremos que la función ζ de Riemann está bien definida en cierto dominio.

La función ζ

Convergencia

Veamos para que valores $s \in \mathbb{C}$ la serie armónica generalizada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

está bien definida

La función ζ

Convergencia

Veamos para que valores $s \in \mathbb{C}$ la serie armónica generalizada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

está bien definida

Para esto, consideramos en primera instancia $s \in \mathbb{R}$ y la siguiente integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^s} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1-s}}{1-s} + \frac{1}{s-1}$$

es claro que esta converge únicamente cuando $s > 1$

La función ζ

Convergencia

Utilizando el criterio de la integral, tenemos que para $s > 1$, la serie armónica generalizada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge.

La función ζ

Convergencia

Utilizando el criterio de la integral, tenemos que para $s > 1$, la serie armónica generalizada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge. Ahora, tomamos $s \in \mathbb{C}$, de la forma $s = \sigma + it$ con $\sigma, t \in \mathbb{R}$, así tenemos:

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{\left|n^{\sigma+it}\right|} = \frac{1}{|n^\sigma|\left|n^{it}\right|} = \frac{1}{n^\sigma}$$

La función ζ

Convergencia

La observación anterior nos indica que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}$$

por lo cual la serie anterior converge si $\Re(s) = \sigma > 1$

La función ζ

Convergencia

La observación anterior nos indica que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}$$

por lo cual la serie anterior converge si $\Re(s) = \sigma > 1$
Puesto que la convergencia absoluta, implica convergencia usual, concluimos que la serie armónica generalizada converge si $\Re(s) = \sigma > 1$. Lo cual nos lleva a la siguiente definición

La función ζ

Definición (Riemann)

Definimos la función ζ como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad con \qquad Dom(\zeta) = \{s \in \mathbb{C} \ : \ \mathfrak{R}(s) > 1\}$$