Teoría de los números II – semestre 2020-2

El siguiente resultado nos proporciona información por intervalos de las imágenes de $\tau(n)$, la ventaja de esto es que sí nos permite visualizar explícitamente los resultados dentro de una función continua. Para llegar a esto, el uso de los números armónicos es fundamental, ellos simplifican la demostración de teorema que ahora enunciamos.

Teorema. La suma de los primeros n valores de $\tau(n)$ es:

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = n\ln(n) + O(n)$$

o de manera equivalente

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \ln(n) + O(1).$$

Demostración:

Para adentrarnos más en la ubicación de los divisores de un entero primero damos un ejemplo numérico [Stopple 2003] y posteriormente pasamos a la demostración general. Sabemos que por cada divisor d de k podemos tener que $\frac{k}{d} = c$ donde c también es un divisor de k. Más aún, podemos ubicar a los enteros c y d como un punto (c, d) en el plano, cuyas coordenadas son las de un punto en la gráfica de la función $x \cdot y = n$, y si consideramos a k = 8, entonces tenemos que los puntos marcados sobre la hipérbola son los enteros que cumplen con la ecuación $x \cdot y = k$, ver Figura 1.

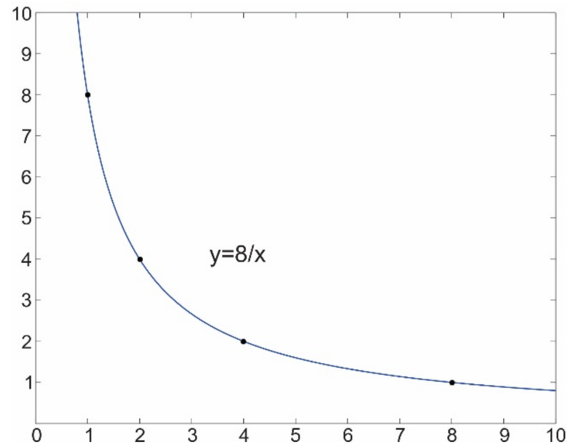

Figura 1: Gráfica de $y = {}^{8}/_{x}$**, resaltando los puntos (*c*,*d*), con *c* y *d* divisores de 8**

Ahora, hagamos lo mismo para $k = 1,2,\dots,7$ y coloquemos los puntos (c,d)de la misma manera que en $k = 8$, como se muestra en la Figura 2.

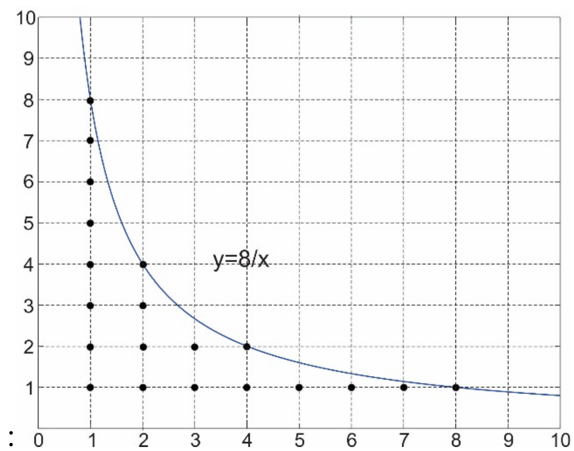

Figura 2: Los puntos $(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$**, con *c* y *d* divisores de** $\boldsymbol{n} = \mathbf{1},\mathbf{2},\dots,\mathbf{8}$**.**

Al visualizarlos podemos notar que son los mismos que están sobre las hipérbolas $y = \frac{1}{x},\ y = \frac{2}{x}\ ,\dots, y = \frac{8}{x}$ y ellos a la vez son los que se contabilizan en la suma:

$$\sum_{k=1}^{8} \tau(k) = \tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(8),$$

es decir, se están contando los pares de enteros (c,d) con $c \cdot d \leq n$, sin considerar los ejes. Por otro lado, si se consideran los cuadrados de área unitaria de la figura 2 asociados a los puntos resaltados, de tal forma que a cada punto le asociamos el cuadro donde él se ubica en la esquina superior izquierda, entonces el área total de los cuadros que están bajo la curva $y = \frac{8}{x}$ y sobre ella es $\int_1^8 \frac{8}{x} dx = 8\ln(8)$. Pero se tiene que considerar un aspecto adicional de los cuadrados que están sobre la curva, y es que entre ellos existen los que tienen una parte de su área que no está asociada a uno de los puntos señalados, y también están los que sí se asocian a un punto pero que su área rebaza a la curva $y = \frac{8}{x}$ estos sectores de áreas los podemos ver sombreados en la Figura 3.

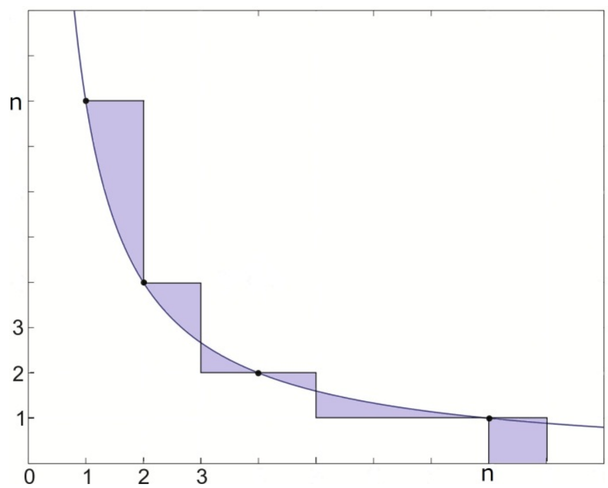

Figura 3.

Nótese que las áreas que rebasan, en conjunto no pueden ser mayores que 8, o en el los términos que estamos usando es $O(8)$, y se debe a que la función $y = \frac{8}{x}$ es continua y estrictamente decreciente, entonces las áreas no se traslapan y se pueden alojar en el rectángulo de base uno y altura ocho.

Finalmente tenemos que $\sum_{k=1}^{8} \tau(k) = 8\ln(8) + O(8)$, o de forma equivalente $\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8} \tau(k) = \ln(8) + O(1)$, que es el promedio de la suma.

Después del caso particular que nos lleva al resultado de una forma un tanto heurística, pasamos a una manera más general.

Primero contamos los divisores de cada k y luego sumamos los totales

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d|k} 1,$$

o lo que es lo mismo

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{d|k} 1 = \sum_{\substack{c,d \\ c\cdot d \leq n}} 1$$

Como se pudo ver en el ejemplo, d recorre todos y cada uno de los divisores de los enteros menores o iguales que$n$. Pero antes de continuar con la demostración es importante describir el uso de los números armónicos en esta demostración.

Al igual que antes es útil ver a los divisores de n como n/d , y de esta forma es más fácil notar que $\left[\frac{n}{d}\right] = n\left(\frac{1}{d}\right) + O(1)$. Ahora, la suma de los divisores d menores o iguales a n, tienen a la expresión $n \cdot H_n + O(n)$, y a partir de aquí se pueden usar las propiedades ya demostradas de H_n, en el teorema 2 del capítulo anterior, para dar lugar al resultado que se busca. Enseguida continuamos con la demostración.

Dado que $c \cdot d \leq n$, $c \leq \frac{n}{d}$ y también $d \leq n$, podemos ver a $\sum_{\substack{c,d \\ c\cdot d \leq n}} 1$ como

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum_{\substack{c,d \\ c\cdot d \leq n}} 1 = \sum_{d \leq n} \sum_{c \leq \frac{n}{d}} 1$$

Esto se ve mejor en el ejemplo numérico y en la Figura2. La suma interior de la parte derecha de la igualdad significa que por cada divisor d de $k = 1,2, \ldots, n$ menor o igual an se hace $\frac{n}{d}$ y se cuentan todos los enteros c menores o iguales a $\frac{n}{d}$, en caso de que este sea entero. Esto último es representado por la función$\left[\frac{n}{d}\right]$, (entiéndase por $\left[\frac{n}{d}\right]$ la parte entera de $\frac{n}{d}$), así que podríamos escribir sólo a

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum_{d \leq n} \left[\frac{n}{d}\right].$$

Pero la parte decimal de $\frac{n}{d}$ no pasa de 1, así que $\left[\frac{n}{d}\right] = \frac{n}{d} + O(1)$ por lo que ahora tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = \sum_{d \leq n} \left[\frac{n}{d}\right] = \sum_{d \leq n} \left(\frac{n}{d} + O(1)\right) = n \sum_{d \leq n} \frac{1}{d} + \sum_{d \leq n} O(1) = nH_n + O(n)$$

Por cada término $\frac{n}{d}$ hay un error alrededor de 1, y como son n, entonces al sumarlos el error es menor o igual a n, esto es $O(n)$. Además, ya se demostró que $H_n = \ln(n) + O(1)$, por lo tanto si sustituimos a H_n en la igualdad anterior se obtiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = n\big(\ln(n) + O(1)\big) + O(n)$$

$$= n\ln(n) + O(n) + O(n) = n\ln(n) + 2O(n) = n\ln(n) + O(n)$$

la última igualdad es posible porque al 2 lo podemos integrar junto con el término n de la gran O. Con esto termina la demostración.

CDMX 21 de abril de 2020