La función ζ de Riemann

Julio César Pardo Dañino

Facultad de Ciencias

7 de mayo de 2020

La extensión analítica de la función ζ

La extensión analítica

Finalizaremos nuestro estudio con una introducción muy básica a la extensión analítica de la función ζ. También daremos algunos resultados que se deben a ella y hablaremos de manera breve sobre la famosa hipótesis de Riemann

La extensión analítica de la función ζ

La extensión analítica

Recordemos que definimos la función ζ de Riemann como

La extensión analítica de la función ζ

La extensión analítica

Recordemos que definimos la función ζ de Riemann como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{para} \qquad \Re(s) > 1$$

La extensión analítica de la función ζ

La extensión analítica

Recordemos que definimos la función ζ de Riemann como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{para} \qquad \Re(s) > 1$$

uno de los primeros objetivos de Riemann fue ver si esta función se podía extender a todo el plano complejo. Esto lo lleva a demostrar el siguiente teorema.

La extensión analítica de la función ζ

Teorema (Riemann)

La función ζ es una función meromorfa en todo $\mathbb{C}$, con un único polo simple en $s = 1$, y satisface la ecuación funcional

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^s \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s)$$

donde Γ es la extensión de la función $\Gamma(s) = \int_0^\infty \exp(-x) x^{s-1} dx$ para $\Re(s) > 0$

La extensión analítica de la función ζ

La extensión analítica

- **Analicemos a detalle este teorema**

La extensión analítica de la función ζ

La extensión analítica

- **Analicemos a detalle este teorema**
- La función ζ definida por $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ es una función bien definida para todo $\Re(s) > 1$, al extenderla a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, quiere decir que ζ puede tomar valores en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, sin embargo **no quiere decir** que para todo $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, se cumpla que $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, esta igualdad **únicamente se da cuando** $\Re(s) > 1$.

La extensión analítica de la función ζ

La extensión analítica

- **Analicemos a detalle este teorema**
- La función ζ definida por $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ es una función bien definida para todo $\Re(s) > 1$, al extenderla a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, quiere decir que ζ puede tomar valores en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, sin embargo **no quiere decir** que para todo $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, se cumpla que $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, esta igualdad **únicamente se da cuando** $\Re(s) > 1$.
- Al decir que ζ es meromorfa, se entiende que es analítica (derivable en el sentido de variable compleja) en todo $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

La extensión analítica de la función ζ

La extensión analítica

- **Analicemos a detalle este teorema**

La extensión analítica de la función ζ

La extensión analítica

- **Analicemos a detalle este teorema**
- Que ζ tiene un polo en $s = 1$, quiere decir que en dicho punto ζ tiene una singularidad ($\zeta(1) = \infty$) que puede ser removida al multiplicar la ζ por $s - 1$.

La extensión analítica de la función ζ

La extensión analítica

- **Analicemos a detalle este teorema**
- Que ζ tiene un polo en $s = 1$, quiere decir que en dicho punto ζ tiene una singularidad ($\zeta(1) = \infty$) que puede ser removida al multiplicar la ζ por $s - 1$.
- La ecuación funcional mostrada, ayuda a relacionar valores de la función ζ ya extendida en términos de la función $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ definida para todo $\Re(s) > 1$. Por ejemplo, podemos notar que gracias a esta ecuación funcional tenemos una fórmula explicita para calcular valores de la función ζ extendida tales que $\Re(s) < 0$

La extensión analítica de la función ζ

Valores especiales de la función ζ

Recordemos que anteriormente relacionamos la función ζ con el número π de la siguiente forma

La extensión analítica de la función ζ

Valores especiales de la función ζ

Recordemos que anteriormente relacionamos la función ζ con el número π de la siguiente forma

Teorema (Euler)

Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}\,(2\pi)^{2n}\,B_{2n}}{2\,(2n)!}$$

Siendo B_n el n-ésimo número de Bernoulli.

La extensión analítica de la función ζ

Valores especiales de la función ζ

A partir de la ecuación funcional,se puede obtener una gama de valores especiales para la función ζ extendida, dados por el siguiente resultado

La extensión analítica de la función ζ

Valores especiales de la función ζ

A partir de la ecuación funcional,se puede obtener una gama de valores especiales para la función ζ extendida, dados por el siguiente resultado

Teorema

Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

$$\zeta(1-n) = \frac{(-1)^{n-1} B_n}{n}$$

Siendo B_n el n-ésimo número de Bernoulli.

La extensión analítica de la función ζ

Un error difundido

El resultado anterior y **la equivocación** de considerar que la función ζ extendida es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ nos lleva a un error muy difundido.

La extensión analítica de la función ζ

Un error difundido

El resultado anterior y **la equivocación** de considerar que la función ζ extendida es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ nos lleva a un error muy difundido. Si consideramos $n = 2$, el resultado anterior nos dice que

La extensión analítica de la función ζ

Un error difundido

El resultado anterior y **la equivocación** de considerar que la función ζ extendida es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ nos lleva a un error muy difundido. Si consideramos $n = 2$, el resultado anterior nos dice que

$$\zeta(1-2) = \zeta(-1) = \frac{(-1)^{2-1} B_2}{2} = -\frac{1}{12}$$

La extensión analítica de la función ζ

Un error difundido

El resultado anterior y **la equivocación** de considerar que la función ζ extendida es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ nos lleva a un error muy difundido. Si consideramos $n = 2$, el resultado anterior nos dice que

$$\zeta(1-2) = \zeta(-1) = \frac{(-1)^{2-1} B_2}{2} = -\frac{1}{12}$$

ahora, si cometemos **la equivocación** de considerar que la función ζ extendida es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, tendríamos que $\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} n$, lo que nos lleva a la clara **contradicción**

La extensión analítica de la función ζ

Un error difundido

El resultado anterior y **la equivocación** de considerar que la función ζ extendida es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ nos lleva a un error muy difundido. Si consideramos $n = 2$, el resultado anterior nos dice que

$$\zeta(1-2) = \zeta(-1) = \frac{(-1)^{2-1} B_2}{2} = -\frac{1}{12}$$

ahora, si cometemos **la equivocación** de considerar que la función ζ extendida es igual a $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, tendríamos que $\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} n$, lo que nos lleva a la clara **contradicción**

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$$

La extensión analítica de la función ζ

Los ceros triviales de la función ζ

Un resultado sobre los números de Bernoulli, nos dice que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos que $B_{2n+1} = 0$.

La extensión analítica de la función ζ

Los ceros triviales de la función ζ

Un resultado sobre los números de Bernoulli, nos dice que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos que $B_{2n+1} = 0$. Esto combinado al teorema anterior nos indica que

La extensión analítica de la función ζ

Los ceros triviales de la función ζ

Un resultado sobre los números de Bernoulli, nos dice que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos que $B_{2n+1} = 0$. Esto combinado al teorema anterior nos indica que

$$\zeta(1-(2n+1)) = \frac{(-1)^{(2n+1)-1} B_{2n+1}}{2n+1} = 0 \qquad \text{para todo} \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

La extensión analítica de la función ζ

Los ceros triviales de la función ζ

Un resultado sobre los números de Bernoulli, nos dice que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos que $B_{2n+1} = 0$. Esto combinado al teorema anterior nos indica que

$$\zeta(1 - (2n + 1)) = \frac{(-1)^{(2n+1)-1} B_{2n+1}}{2n + 1} = 0 \qquad \text{para todo} \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

de lo que concluimos que $\zeta(-2n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

La extensión analítica de la función ζ

Los ceros triviales de la función ζ

Un resultado sobre los números de Bernoulli, nos dice que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos que $B_{2n+1} = 0$. Esto combinado al teorema anterior nos indica que

$$\zeta(1-(2n+1)) = \frac{(-1)^{(2n+1)-1} B_{2n+1}}{2n+1} = 0 \qquad \text{para todo} \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

de lo que concluimos que $\zeta(-2n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Los números $s = -2n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ son conocidos como los ceros triviales de la función ζ.

La extensión analítica de la función ζ

Los ceros no triviales de la función ζ

Recordemos el producto de Euler

La extensión analítica de la función ζ

Los ceros no triviales de la función ζ

Recordemos el producto de Euler

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} \qquad \Re(s) > 1$$

La extensión analítica de la función ζ

Los ceros no triviales de la función ζ

Recordemos el producto de Euler

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} \qquad \Re(s) > 1$$

de él, se deduce que ζ no tiene ceros en el semiplano $\Re(s) > 1$.

La extensión analítica de la función ζ

Los ceros no triviales de la función ζ

Recordemos el producto de Euler

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \qquad \Re(s) > 1$$

de él, se deduce que ζ no tiene ceros en el semiplano $\Re(s) > 1$.
Ahora, como Γ no tiene ceros, de la ecuación funcional de la función ζ y descontando los ceros triviales, tenemos que $s \in \mathbb{C}$ es un cero de ζ si y solo si $1 - s$ lo es,

La extensión analítica de la función ζ

Los ceros no triviales de la función ζ

Recordemos el producto de Euler

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \qquad \Re(s) > 1$$

de él, se deduce que ζ no tiene ceros en el semiplano $\Re(s) > 1$.
Ahora, como Γ no tiene ceros, de la ecuación funcional de la función ζ y descontando los ceros triviales, tenemos que $s \in \mathbb{C}$ es un cero de ζ si y solo si $1 - s$ lo es, en consecuencia el semiplano $\Re(s) < 0$ no tiene ceros.

La extensión analítica de la función ζ

Los ceros no triviales de la función ζ

Recordemos el producto de Euler

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \qquad \Re(s) > 1$$

de él, se deduce que ζ no tiene ceros en el semiplano $\Re(s) > 1$.
Ahora, como Γ no tiene ceros, de la ecuación funcional de la función ζ y descontando los ceros triviales, tenemos que $s \in \mathbb{C}$ es un cero de ζ si y solo si $1 - s$ lo es, en consecuencia el semiplano $\Re(s) < 0$ no tiene ceros.
En conclusión tenemos que todos los ceros no triviales de ζ cumplen que $0 \leq \Re(s) \leq 1$

La extensión analítica de la función ζ

Los ceros no triviales de la función ζ

Recordemos el producto de Euler

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \qquad \Re(s) > 1$$

de él, se deduce que ζ no tiene ceros en el semiplano $\Re(s) > 1$.
Ahora, como Γ no tiene ceros, de la ecuación funcional de la función ζ y descontando los ceros triviales, tenemos que $s \in \mathbb{C}$ es un cero de ζ si y solo si $1 - s$ lo es, en consecuencia el semiplano $\Re(s) < 0$ no tiene ceros.
En conclusión tenemos que todos los ceros no triviales de ζ cumplen que $0 \leq \Re(s) \leq 1$ y más aún, estos ceros están distribuidos simétricamente con respecto a la recta vertical $\Re(s) = 1/2$.

La extensión analítica de la función ζ

La hipótesis de Riemann

Es aquí donde Riemann conjetura su célebre hipótesis:

La extensión analítica de la función ζ

La hipótesis de Riemann

Es aquí donde Riemann conjetura su célebre hipótesis: **todos los ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ cumplen que $\Re(s) = 1/2$.**

La extensión analítica de la función ζ

La hipótesis de Riemann

Es aquí donde Riemann conjetura su célebre hipótesis: **todos los ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ cumplen que** $\Re(s) = 1/2$.
Hadamard, demostró que la función ζ no tiene ceros no triviales tales que $\Re(s) = 1$ y consecuentemente tampoco tiene ceros no triviales tales que $\Re(s) = 0$.

La extensión analítica de la función ζ

La hipótesis de Riemann

Es aquí donde Riemann conjetura su célebre hipótesis: **todos los ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ cumplen que $\Re(s) = 1/2$.**

Hadamard, demostró que la función ζ no tiene ceros no triviales tales que $\Re(s) = 1$ y consecuentemente tampoco tiene ceros no triviales tales que $\Re(s) = 0$. Esto nos indica que todos los ceros no triviales de ζ cumplen que $0 < \Re(s) < 1$

La extensión analítica de la función ζ

La hipótesis de Riemann

Es aquí donde Riemann conjetura su célebre hipótesis: **todos los ceros no triviales de la función** $\zeta(s)$ **cumplen que** $\Re(s) = 1/2$.

Hadamard, demostró que la función ζ no tiene ceros no triviales tales que $\Re(s) = 1$ y consecuentemente tampoco tiene ceros no triviales tales que $\Re(s) = 0$. Esto nos indica que todos los ceros no triviales de ζ cumplen que $0 < \Re(s) < 1$

En 1914, Hardy demostró que ζ tiene una infinidad de ceros tales que $\Re(s) = 1/2$

La extensión analítica de la función ζ

La función ζ y el teorema de los números primos

Hemos mencionado la relación de la función ζ con los números primos a través del producto de Euler, pero esta conexión se hace más evidente al hablar de el teorema de los números primos.

La extensión analítica de la función ζ

La función ζ y el teorema de los números primos

Hemos mencionado la relación de la función ζ con los números primos a través del producto de Euler, pero esta conexión se hace más evidente al hablar de el teorema de los números primos. Recordemos que la función $\pi(x)$ denota la cantidad de números primos menores o iguales a $x \in \mathbb{R}$.

La extensión analítica de la función ζ

La función ζ y el teorema de los números primos

Hemos mencionado la relación de la función ζ con los números primos a través del producto de Euler, pero esta conexión se hace más evidente al hablar de el teorema de los números primos. Recordemos que la función $\pi(x)$ denota la cantidad de números primos menores o iguales a $x \in \mathbb{R}$. El teorema de los números primos dice lo siguiente

La extensión analítica de la función ζ

La función ζ y el teorema de los números primos

Hemos mencionado la relación de la función ζ con los números primos a través del producto de Euler, pero esta conexión se hace más evidente al hablar de el teorema de los números primos. Recordemos que la función $\pi(x)$ denota la cantidad de números primos menores o iguales a $x \in \mathbb{R}$. El teorema de los números primos dice lo siguiente

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln(x)}{x} = 1$$

La extensión analítica de la función ζ

La función ζ y el teorema de los números primos

La demostración del teorema de los números primos tiene una estrecha relación con la función ζ.

La extensión analítica de la función ζ

La función ζ y el teorema de los números primos

La demostración del teorema de los números primos tiene una estrecha relación con la función ζ. De hecho, Hadamard y de la Vallée-Poussin demostraron, independientemente en 1896 que la ley de distribución de los números primos es equivalente a la afirmación de que la función ζ no tiene ceros tales que $\Re(s) = 1$,

La extensión analítica de la función ζ

La función ζ y el teorema de los números primos

La demostración del teorema de los números primos tiene una estrecha relación con la función ζ. De hecho, Hadamard y de la Vallée-Poussin demostraron, independientemente en 1896 que la ley de distribución de los números primos es equivalente a la afirmación de que la función ζ no tiene ceros tales que $\Re(s) = 1$, y en consecuencia obtienen el teorema de los números primos.

La extensión analítica de la función ζ

La función ζ y el teorema de los números primos

La demostración del teorema de los números primos tiene una estrecha relación con la función ζ. De hecho, Hadamard y de la Vallée-Poussin demostraron, independientemente en 1896 que la ley de distribución de los números primos es equivalente a la afirmación de que la función ζ no tiene ceros tales que $\Re(s) = 1$, y en consecuencia obtienen el teorema de los números primos.

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$$

La extensión analítica de la función ζ

La función ζ y el teorema de los números primos

Aunque se tiene la equivalencia asintótica, falta medir el orden del error $\pi(x) - \frac{x}{\ln(x)}$.

La extensión analítica de la función ζ

La función ζ y el teorema de los números primos

Aunque se tiene la equivalencia asintótica, falta medir el orden del error $\pi(x) - \frac{x}{\ln(x)}$. Y es aquí donde entra la famosa hipótesis de Riemann,

La extensión analítica de la función ζ

La función ζ y el teorema de los números primos

Aunque se tiene la equivalencia asintótica, falta medir el orden del error $\pi(x) - \frac{x}{\ln(x)}$. Y es aquí donde entra la famosa hipótesis de Riemann, ya que de ser cierta, el error se puede acotar de la mejor manera posible, concrétamente se tendría que

La extensión analítica de la función ζ

La función ζ y el teorema de los números primos

Aunque se tiene la equivalencia asintótica, falta medir el orden del error $\pi(x) - \frac{x}{\ln(x)}$. Y es aquí donde entra la famosa hipótesis de Riemann, ya que de ser cierta, el error se puede acotar de la mejor manera posible, concrétamente se tendría que

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln(x)} + O\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)$$