Teoría de los números II

Semestre 2020-2
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Profesor: Julio César Guevara Bravo
Ayudante: Julio César Pardo Dañino

México, C.U.

25 de marzo de 2020

1. Tarea 2 (Fecha de entrega: 6/abril/2020)

1. Sean f y g dos funciones aritméticas y multiplicativas, demuestra que $f * g$ es multiplicativa.

2. Sea $f \neq 0$ una función aritmética multiplicativa, demuestra que existe su inversa respecto a la convolución de Dirichlet y es multiplicativa.

3. Decimos que una función aritmética es completamente multiplicativa si para cualesquiera $m, n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que $f(mn) = f(m)f(n)$.
   Demuestra que si f es una función aritmética multiplicativa, entonces es completamente multiplicativa si y solo si $f^{-1} = f\mu$. (Donde f^{-1} es la inversa respecto a la convolución de Dirichlet)

4. Sea $m \in \mathbb{Z}^+$, demuestra que la función $f(n) = (n, m)$ es multiplicativa.

5. Sea $m \in \mathbb{Z}^+$, demuestra que la función

$$f(n) = \frac{\varphi(mn)}{\varphi(m)} \qquad \text{es multiplicativa}$$

6. Denotamos $\lfloor . \rfloor$ como la parte entera de cualquier número real. Sea $f(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor - \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor$, demuestra que f es multiplicativa.

7. Demuestra que

$$\sum_{d|n} \frac{|\mu(d)|}{\varphi(d)} = \frac{n}{\varphi(n)}$$

8. Demuestra que

$$\sum_{d|n} \tau(d)^3 = \left(\sum_{d|n} \tau(d) \right)^2$$

9. Sea f una función aritmética, demuestra que existe g una función aritmética y multiplicativa tal que:

$$\sum_{k=1}^{n} f((k,n)) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

10. Sea $n \in \mathbb{Z}^{+}$, definimos $rad(n)$ el radical de n como la función multiplicativa que satisface que $rad(p^{\alpha}) = p$ para todo p número primo y $\alpha \geq 1$. Demuestra que

$$rad(n) = \sum_{d|n} \varphi(d) \ |\mu(d)|$$