Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Teoría de los números II

Tarea 4 ***Armónicos y Promedios***

Ángel Iván Gladín García
No. cuenta: 313112470
angelgladin@ciencias.unam.mx

27 de Mayo de 2019

1. Demostrar que para la función $\tau(n)$, que es la función cantidad de divisores, se cumple que

$$\tau(n) \ll n^{\frac{1}{3}}$$

Demostración. Consideremos como primer caso potencias de un número primo fijo, $n = p^t$. Como $\tau(p^t) = t+1$ es menor que $p^{t/3}$ cuando t crece porque $p^{t/3} = \exp(t\log(p)/3)$ crece exponencialmente en t. Así.

$$t+1 \ll t \quad \text{y} \quad t \ll \exp(t\log(p)/3) \quad \text{y así,} \quad t+1 \ll \exp(t\log(p)/3)$$

Supongamos que $p > e^3$ está fijo, así $\log(p) > 3$. $t+1$ y $\exp(t\log(p)/3)$ son iguales a 1 cuando $t = 0$. Para ver cual crece más rápido, cómparemos sus derivadas cuando $t = 0$,

$$\frac{d}{dt}(t+1)\Big|_{t=0} = 1,$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\exp(t\log(p)/3))\Big|_{t=0} &= \left(\frac{\log(p)}{3}\exp(t\log(p)/3)\right)\Big|_{t=0}\\ &= \frac{\log(p)}{3} > 1\end{aligned}$$

Entonces la exponenvias crece más rápido cuando $t = 0$, así

$$\tau(p^t) = t+1 \leq p^{t/3} \quad \text{para toda } t,$$

y para todos los primos $p \geq 23$. Así, $\tau(n) \leq n^{1/3}$, siempre y cuando n solo por primos $p \geq 23$.
Esto sigue dejando a los primos $p = 2, 3, 5, \ldots, 19$. Para cada uno de esos primos, determinados que la función $(t+1)p^{-t/3}$ tiene un máximo en $t = 3/\log(p), 1$, el valor máximo es una contante $C(p)$. Así

$$t+1 \leq C(p)p^{t/3} \quad \text{para toda } t, \quad \text{para } p = 2, 3, \ldots, 19.$$

Pongamos $C(p) = 1$ para $p > 19$ y sea C el producto de todas las constante $C(p)$. Ahora para $n = \prod_i p_i^{t_i}$

$$\tau(\prod_i p_i^{t_i}) = \prod_i (t_i+1) \leq \prod_i C(p_i)p_i^{t_i/3} \leq C\prod_i p_i^{t_i/3} = Cn^{1/3}$$

□

2. Demostrar que no puede suceder que

$$\tau(n) \ll \ln(n)$$

Demostración. Consideremos a n de la forma $2^m \cdot 3^m$, entonces $\tau(n) = (m+1)^2$.

Ahora $n = 6^m$, entonces $m = \log(n)/\log(6)$ y así $\tau(n) = (\log(n)/\log(6)+1)^2$. Cambiemos las varibles con $x = \log(n)$. Ahora lo que queremos mostrar que para cualquier C, la desigualdad

$$\left(\frac{x}{\log(6)} + 1\right)^2 \leq Cx$$

es falsa, expandiendo los términos se tiene,

$$\frac{x^2}{\log(6)^2} + \left(\frac{2}{\log(6) - C}\right) x + 1 \leq 0$$

Y como la parte derecha de la desigualdad tiende a infinito, no se cumple que $\tau(n) \ll \ln(n)$. $\square$

3. Demostrar que $\ln(n) < H_n < \ln(n) + 1$

Demostración. En clase se demotró la siguiente desigualdad

$$H_n - 1 < \log(n) < H_{n-1} \text{ para toda } n \geq 1 \tag{1}$$

La cual es usada para el siguiente teorema

$$H_n = \log(n) + O(1) \text{ para toda } n \geq 1 \tag{2}$$

Dando como consecuencia lo siguiente,

$$0 < H_n - \log(n) < 1 \tag{3}$$

Pero si tomamos (3) sumando $\log(n)$ en cada término de la desigualdad, se sigue,

$$\begin{gathered} 0 < H_n - \log(n) < 1 \\ \log(n) < H_n < \log(n) + 1 \end{gathered}$$

$\square$

4. Demostrar que $n! \ll n\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Demostración. Citando un lema visto en clase que establece,

$$\log(n!) = n\log(n) - n + O(\log(n)) \tag{4}$$

Teniendo como consecuencia que,

$$\log(n!) - (n\log(n) - n) \ll \log(n) \tag{5}$$

Más aún, por O sabemos que para alguna C se tiene que

$$|\log(n!) - (n\log(n) - n)| \leq C\log(n) \tag{6}$$

Pero haciendo algunas observaciones en $n\log(n) - n$,

$$\begin{aligned} n\log(n) - n &= \log(n^n) - n && \text{Potencia en logarítmo } \log_b(x^p) = p\log_b x \\ &= \log(n^n) - \log(e^n) \\ &= \log((n/e)^n) && \text{Cociente en logarítmo } \log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y \end{aligned}$$

Sustituyedo $n\log(n) - n$ en (6) se tiene,

$$|\log(n!) - \log((n/e)^n)| \leq C\log(n) \tag{7}$$

Lo cual por definición de valor absoluto se sigue que,

$$-C\log(n) \leq \log(n!) - \log((n/e)^n) \leq C\log(n) \tag{8}$$

Tomando $\log(n!) - \log((n/e)^n) \leq C\log(n)$ tal que,

$$e^{\log(n!)-\log((n/e)^n)} \leq e^{\log n^C} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{n!}{(n/e)^n} \leq n^C \tag{9}$$

Teniendo así,

$$n! \leq n^C(n/e)^n \tag{10}$$

Y tomando $C = 1$ implica que $n! \ll n\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

□

5. Demostrar sin usar puntos en una retícula, es decir, de manera totalmente algebraica que:

$$\sum_{k=1}^{n}\tau(k) = n\log(n) + O(n)$$

Demostración. Sabemos que

$$\sum_{k=1}^{n}\tau(k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{d|k}1 = \sum_{\substack{c,d\\cd\leq n}}1.$$

Tomando así todos los divisores de todos los enteros menores o iguales a n que son exactactamente todas las parejas de enteros (c,d) con $cd \leq n$.

Pero si $cd \leq n$, entonces $d \leq n$ y $c \leq n/d$, así,

$$\sum_{k=1}^{n}\tau(k) = \sum_{d\leq n}\sum_{c\leq n/d}1$$

Tenemos que $\sum_{c\leq n/d}1$ cuenta cuandos enteros c son menores o iguales a n/d. Esto es $[n/d]$ la parte entera del número racional n/d. Y cuando redondeamos un número cambia por un error menor que 1, así $[n/d] = n/d + O(1)$. Teniendo así,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\tau(k) &= \sum_{d\leq n}[n/d] = \sum_{d\leq n}\{n/d + O(1)\}\\ &= \sum_{d\leq n}n/d + \sum_{d\leq n}O(1) = nH_n + O(n)\end{aligned}$$

Donde nH_n viene de la definición de números harmónicos. Y $O(n)$ porque el error es a lo más 1 y corre de $d \leq n$ con n diferentes errores. Como tenemos un error a los más n, entonces,

$$\sum_{k=1}^{n} = n\{\log(n) + O(1)\} + O(n) = n\log(n) + O(n)$$

□