Postulado de Bertrand

Para todo real $x \geq 1$ existe un primo en el intervalo x y $2x$.

Demostración

Para la demostración se considera al coeficiente binomial $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!}$ y lo que interesa es construir cotas para $\binom{2n}{n}$ que nos acerquen a su valor.

Para $n \geq 5$ demostramos que

$$\frac{1}{2n} 2^{2n} < \binom{2n}{n} < \frac{1}{4} 2^{2n}.$$

En primer lugar lo haremos con

$$\frac{1}{2n} 2^{2n} < \binom{2n}{n}.$$

Sabemos que $$\binom{2n}{n} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots\cdots n(n+1) \cdots\cdots 2n \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots\cdots\cdots n \cdot n}$$

Y al multiplicar por $2n$ se tiene que

$$2n \binom{2n}{n} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots\cdots n(n+1) \cdots\cdots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots\cdots\cdots n \cdot n}$$

Nótese que hay $2n$ factores y el más pequeño es 2, por lo tanto

$$2n \binom{2n}{n} > 2^{2n} .$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2n} 2^{2n} < \binom{2n}{n},$$

y con esto se tiene la primera parte de las desigualdades.

Falta demostrar que $\binom{2n}{n} < \frac{1}{4} 2^{2n}$, y en este caso se trabajará con inducción.

Así, para $n = 5$

$$\binom{2n}{n} = 252 < 256 = \frac{1}{4} 2^{10}.$$

Ahora, supongamos que se cumple para $n = k$

$$\binom{2k}{k} < \frac{1}{4} 2^{2k}.$$

El paso que sigue es ver que se cumple para $n = k + 1$. Para llegar a esto se multiplica la desigualdad anterior por $\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+1)}$, y obtenemos esto

$$\binom{2k}{k}\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+1)} < \frac{1}{4}2^{2k}\frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+1)},$$

se puede ver que el lado izquierdo es igual a $\binom{2(k+1)}{k+1}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\binom{2(k+1)}{k+1} &< \frac{1}{4}2^{2k}\frac{(2k+1)}{(k+1)}\cdot 2\\ &= \frac{1}{4}2^{2k+1}\frac{(2k+1)}{(k+1)}\\ &< \frac{1}{4}2^{2k+2}\end{aligned}$$

a esta desigualdad se llega cuando se considera que $\frac{(2k+1)}{(k+1)} = \frac{\left(2+\frac{1}{k}\right)}{\left(1+\frac{1}{k}\right)}$ tiende a 2 cuando k es grande, por lo tanto $\binom{2(k+1)}{k+1} < \frac{1}{4}2^{2(k+1)}$.

Con esto demostramos que

$$\frac{1}{2n}2^{2n} < \binom{2n}{n} < \frac{1}{4}2^{2n}. \quad ----(1)$$

--- - -------------------- ----------------- ------------------- --------------.

Ahora pasamos a construir más elementos que serán requeridos para tratar de proponer otra estimación de $\binom{2n}{n}$. Para esto haremos lo que sigue.

Consideremos un intervalo de la forma $(10, b] = A$ donde $b \geq 10$; enseguida se construyen intervalos que cubran todo A, pero cada uno de estos inicia en una x y termina en $2x$. Los intervalos se determinan de la siguiente manera:

Sea $b \geq 10$, $a_1 = \left[\frac{b}{2}\right]$, $a_1 = \left[\frac{b}{2^2}\right]$, $a_1 = \left[\frac{b}{2^3}\right]$, $a_1 = \left[\frac{b}{2^4}\right]$, … … ., $a_1 = \left[\frac{b}{2^k}\right]$, ….

donde $\left[\frac{b}{2^i}\right]$ es el entero inmediato mayor que $\frac{b}{2^i}$

por lo tanto $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \cdots \geq a_k$ … ….

Y de esto se tiene que

$$a_k < \frac{b}{2^k} + 1 = 2\left(\frac{b}{2^{k+1}}\right) + 1 \leq 2a_{k+1} + 1,$$

por lo tanto

$$a_k < 2a_{k+1}.$$

Ahora consideramos a m como el mayor entero (inmediato) tal que $a_m \geq 5$ y por lo tanto $a_{m+1} < 5$, y con esto $2a_{m+1} < 10$.

Por otro lado, se sabe que $a_1 \geq \frac{b}{2}$ y en consecuencia $2a_1 \geq b$, entonces los intervalos

$$[a_1 \quad 2a_1]$$

$$[a_2 \quad 2a_2]$$

$$[a_3 \quad 2a_3]$$

$$.$$

$$.$$

$$[a_{m-1} \quad 2a_{m-1}]$$

$$[a_m \quad 2a_m],$$

Cubren totalmente al intervalo $(10, b]$, y se puede considerar que los intervalos se traslapen.

--------------- ---------------- ------------------- ---------------.

Ahora pasamos a reconocer el producto de los primos entre 10 y b, con base en los intervalos a_i hasta $2a_i$, y es de esta manera

$$\prod_{10<p\leq b} p \leq \prod_{a_1<p\leq 2a_1} p \cdot \prod_{a_2<p\leq 2a_2} p \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \prod_{a_m<p\leq 2a_m} p\,,$$

se tiene que para cada uno de los factores de la derecha y usando la desigualdad (1), se obtiene que

$$\prod_{n<p\leq 2n} p < \binom{2n}{n} < \frac{1}{4} 2^{2n} = 2^{2(n-1)}.$$

Por lo tanto, el producto de los primos entre 10 y b queda acotado así:

$$\prod_{10<p\leq b} p < 2^{2(a_1-1)} \cdot 2^{2(a_2-1)} \cdot 2^{2(a_3-1)} \ldots\ldots. 2^{2(a_m-1)}$$

$$= 2^{2(a_1-1+a_2-1+a_3-1+\cdots+a_m-1)}$$

Pero $a_1 - 1 < \frac{b}{2}$, $a_2 - 1 < \frac{b}{2^2}$, ..., $a_m - 1 < \frac{b}{2^m}$, entonces

$$\prod_{10<p\leq b} p < 2^{2\left(\frac{b}{2}+\frac{b}{2^2}+\cdots+\frac{b}{2^m}\right)} = 2^{2b\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)}$$

pero $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^m}$ tiende a 1, por lo tanto

$$\prod_{10<p\leq b} p < 2^{2b} --------(2).$$

El paso que sigue es ubicar los intervalos entre 1 y 2n, donde se encuentran los primos que dividen a $\binom{2n}{n}$, esto es necesario para la estimación del mismo coeficiente binomial. La ruta para ubicarlos inicia con el teorema de Lagrange[1] que nos lleva a que $\binom{2n}{n}=\frac{2n!}{n!n!}$ contiene al factor primo p exactamente

$$\sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor\right)$$

veces, además cada sumando no puede ser mayor que uno, y se debe a que

$$\left(\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor\right)<\frac{2n}{p^k}-2\left(\frac{n}{p^k}-1\right)=2,$$

y como el sumando es un entero, entonces es uno.

Además, los sumandos se anulan siempre que $p^k>2n$, de aquí que si $p>\sqrt{2n}$ entonces $p^2>2n$, que nos indica que p^2 no divide a $\binom{2n}{n}$, y en particular los primos $p>\sqrt{2n}$ aparecen en $\binom{2n}{n}$ no más de una vez.

Por otro lado cuando $n\geq 3$, entonces los primos p en el intervalo

$$\frac{2}{3}n<p\leq n$$

no dividen a $\binom{2n}{n}$, y es porque si $2n<3p\leq 3n$, entonces $2n<3p$, y sólo p y $2p$, y ningún otro múltiplo de p puede dividir a $(2n)!$.

De lo anterior y con base en la descomposición en primos de $\binom{2n}{n}$ retomamos el objetivo que es acotar a $\binom{2n}{n}$, que es el corazón de la demostración de Erdös. Entonces podemos asumir que

[1] El teorema de Lagrange enuncia: si p es primo, entonces $\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{p^i}\right\rfloor$ es el exponente de p en la factorización en primos de $n!$.

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} p^r \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p \,,$$

pero como $p^r \leq 2n$, entonces

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p \,,$$

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p \,,$$

y de (1) se tiene que

$$2^{2n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}+1} \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p \,,$$

Ahora para $50 \leq n$ se tiene que $100 \leq 2n$, entonces $10 \leq \sqrt{2n}$, entonces usamos (2) que dice que $\prod_{10 < p \leq b} p < 2^{2b}$, para obtener que

$$\prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p < 2^{2\left(\frac{2}{3}n\right)} = 2^{\left(\frac{4}{3}n\right)}$$

entonces

$$2^{2n} < (2n)^{\sqrt{2n}+1} \cdot 2^{\left(\frac{4}{3}n\right)} \cdot \prod_{n < p \leq 2n} p \,.$$

Si consideramos que no hay primos entre n y $2n$ entonces

$$2^{2n} < (2n)^{\sqrt{2n}+1} \cdot 2^{\left(\frac{4}{3}n\right)},$$

o lo que es equivalente

$$2^{\frac{2}{3}n} < (2n)^{\sqrt{2n}+1} \;.$$

Pero esta última desigualdad no puede ser válida para n suficientemente grande, por ejemplo, para $n = 5000$ se tiene que

$$2^{\frac{2}{3}5000} = 2.7121 \cdot 10^{1003} > (10000)^{\sqrt{10000}+1} = 1 \cdot 10^{404}$$

Lo que es una contracción y ésta se dio al suponer que no hay primos entre n y $2n$, por lo que podemos concluir que por lo menos existe un primo entre n y $2n$, porque de no ser así entonces existe un choque conceptual con el producto de los primos y sus potencias que dividen a $\binom{2n}{n}$ y que lo acotan.