La función ζ de Riemann

Julio César Pardo Dañino

Facultad de Ciencias

5 de mayo de 2020

La función ζ y las funciones aritméticas

Relaciones con las funciones aritméticas

Vimos que la función ζ guarda una estrecha relación con la aritmética, ya que en ella aparecen de manera natural la sucesión de números primos a través del producto de Euler. Ahora veremos que también la podemos relacionar con las funciones aritméticas μ, φ, τ, y σ, dando así una fuerte conexión con la teoría de números.

La función ζ y las funciones aritméticas

Serie de Dirichlet

Iniciamos introduciendo la siguiente definición formal (no tomando en cuenta la convergencia).

La función ζ y las funciones aritméticas

Serie de Dirichlet

Iniciamos introduciendo la siguiente definición formal (no tomando en cuenta la convergencia).

Definición (Serie de Dirichlet)

Sea $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ una función aritmética, su serie de Dirichlet asociada es

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

La función ζ y las funciones aritméticas

Serie de Dirichlet

Iniciamos introduciendo la siguiente definición formal (no tomando en cuenta la convergencia).

Definición (Serie de Dirichlet)

Sea $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ una función aritmética, su serie de Dirichlet asociada es

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

Observación

Notemos que en términos de funciones generadoras, podemos decir que la función generadora de Dirichlet F genera a la sucesión $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$

La función ζ y las funciones aritméticas

Ejemplo

Veamos quien es la función generadora de la función aritmética idénticamente 1, esto es $1(n) = 1$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}^+$.

La función ζ y las funciones aritméticas

Ejemplo

Veamos quien es la función generadora de la función aritmética idénticamente 1, esto es $1(n) = 1$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}^+$.

Función ζ

Es claro que tenemos

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

así en realidad $F = \zeta$, la cual sabemos que converge para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(s) > 1$.

La función ζ y las funciones aritméticas

Serie de Dirichlet

Este ejemplo nos muestra como aparece de manera natural la función ζ en términos de series de Dirichlet.

La función ζ y las funciones aritméticas

Serie de Dirichlet

Este ejemplo nos muestra como aparece de manera natural la función ζ en términos de series de Dirichlet.

Veamos a continuación un resultado que nos ayudará a relacionar la función ζ con las funciones aritméticas.

La función ζ y las funciones aritméticas

Serie de Dirichlet

Este ejemplo nos muestra como aparece de manera natural la función ζ en términos de series de Dirichlet.
Veamos a continuación un resultado que nos ayudará a relacionar la función ζ con las funciones aritméticas.

Teorema

Sean $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$ dos funciones aritméticas, sea $h = f * g$ (donde h es su convolución de Dirichlet) y sean F, G, H sus respectivas series de Dirichlet, entonces $H = FG$, esto es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(k)}{k^s} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(m)}{m^s} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} \right) \tag{1}$$

La función ζ y las funciones aritméticas

Demostración.

Multiplicando las series F y G, obtenemos

La función ζ y las funciones aritméticas

Demostración.

Multiplicando las series F y G, obtenemos

$$F(s)G(s) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(m)}{m^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}\right) = \sum_{m,n\geq 1} \frac{f(m)g(n)}{(mn)^s}$$

La función ζ y las funciones aritméticas

Demostración.

Multiplicando las series F y G, obtenemos

$$F(s)G(s) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(m)}{m^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}\right) = \sum_{m,n\geq 1} \frac{f(m)g(n)}{(mn)^s}$$

este producto se expresa como una doble suma, la cual recorre todos los productos mn, así lo podemos ver como

La función ζ y las funciones aritméticas

Demostración.

Multiplicando las series F y G, obtenemos

$$F(s)G(s) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(m)}{m^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}\right) = \sum_{m,n\geq 1} \frac{f(m)g(n)}{(mn)^s}$$

este producto se expresa como una doble suma, la cual recorre todos los productos mn, así lo podemos ver como

$$F(s)G(s) = \sum_{m,n\geq 1} \frac{f(m)g(n)}{(mn)^s} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{mn=k} \frac{f(m)g(n)}{k^s}\right)$$

La función ζ y las funciones aritméticas

(Continuación).

puesto que k^s no está en el recorrido de la suma, la podemos factorizar; así considerando esto y reescribiendo la suma tenemos

La función ζ y las funciones aritméticas

(Continuación).

puesto que k^s no está en el recorrido de la suma, la podemos factorizar; así considerando esto y reescribiendo la suma tenemos

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \left(\sum_{mn=k} f(m)g(n) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \left(\sum_{m|k} f(m)g(k/m) \right)$$

La función ζ y las funciones aritméticas

(Continuación).

puesto que k^s no está en el recorrido de la suma, la podemos factorizar; así considerando esto y reescribiendo la suma tenemos

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \left(\sum_{mn=k} f(m)g(n) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \left(\sum_{m|k} f(m)g(k/m) \right)$$

la suma anterior es justamente la definición de la convolución de Dirichlet de f y g, por lo que concluimos

La función ζ y las funciones aritméticas

(Continuación).

puesto que k^s no está en el recorrido de la suma, la podemos factorizar; así considerando esto y reescribiendo la suma tenemos

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}\left(\sum_{mn=k} f(m)g(n)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}\left(\sum_{m|k} f(m)g(k/m)\right)$$

la suma anterior es justamente la definición de la convolución de Dirichlet de f y g, por lo que concluimos

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f*g)(k)}{k^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(k)}{k^s} = H(s)$$

La función ζ y las funciones aritméticas

(Continuación).

puesto que k^s no está en el recorrido de la suma, la podemos factorizar; así considerando esto y reescribiendo la suma tenemos

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \left(\sum_{mn=k} f(m)g(n) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \left(\sum_{m|k} f(m)g(k/m) \right)$$

la suma anterior es justamente la definición de la convolución de Dirichlet de f y g, por lo que concluimos

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f * g)(k)}{k^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(k)}{k^s} = H(s)$$

lo que buscábamos probar. $\blacksquare$

La función ζ y las funciones aritméticas

Observación

El resultado anterior nos dice que la convolución de Dirichlet se comporta bien bajo la series de Dirichlet. Un resultado análogo se puede ver en términos de convolución de funciones (en sentido integral) y la transformada de Fourier.

La función ζ y las funciones aritméticas

Observación

El resultado anterior nos dice que la convolución de Dirichlet se comporta bien bajo la series de Dirichlet. Un resultado análogo se puede ver en términos de convolución de funciones (en sentido integral) y la transformada de Fourier.

Serie de Dirichlet

Veamos a continuación como este resultado implica la conexión entre las funciones aritméticas y la función ζ.

La función ζ y las funciones aritméticas

La función μ de Moebius

Veamos como ζ se relaciona con la función μ.

La función ζ y las funciones aritméticas

La función μ de Moebius

Veamos como ζ se relaciona con la función μ. Para esto, recordemos μ es la inversa de Dirichlet de la función idénticamente 1, esto es $\mu * 1 = u$.

La función ζ y las funciones aritméticas

La función μ de Moebius

Veamos como ζ se relaciona con la función μ. Para esto, recordemos μ es la inversa de Dirichlet de la función idénticamente 1, esto es $\mu * 1 = u$. Así, pasando a series de Dirichlet, obtenemos

La función ζ y las funciones aritméticas

La función μ de Moebius

Veamos como ζ se relaciona con la función μ. Para esto, recordemos μ es la inversa de Dirichlet de la función idénticamente 1, esto es $\mu * 1 = u$. Así, pasando a series de Dirichlet, obtenemos

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u(k)}{k^s}$$

La función ζ y las funciones aritméticas

La función μ de Moebius

Veamos como ζ se relaciona con la función μ. Para esto, recordemos μ es la inversa de Dirichlet de la función idénticamente 1, esto es $\mu * 1 = u$. Así, pasando a series de Dirichlet, obtenemos

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u(k)}{k^s}$$

como por definición $u(1) = 1$ y $u(k) = 0$ para todo $k > 1$, tenemos

La función ζ y las funciones aritméticas

La función μ de Moebius

Veamos como ζ se relaciona con la función μ. Para esto, recordemos μ es la inversa de Dirichlet de la función idénticamente 1, esto es $\mu * 1 = u$. Así, pasando a series de Dirichlet, obtenemos

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u(k)}{k^s}$$

como por definición $u(1) = 1$ y $u(k) = 0$ para todo $k > 1$, tenemos

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^s}\right)\zeta(s) = 1$$

La función ζ y las funciones aritméticas

La función μ de Moebius

Lo que reescribimos como

La función ζ y las funciones aritméticas

La función μ de Moebius

Lo que reescribimos como

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\right) \qquad \text{si} \qquad \Re(s) > 1$$

La función ζ y las funciones aritméticas

La función φ de Euler

Veamos como ζ se relaciona con la función φ.

La función ζ y las funciones aritméticas

La función φ de Euler

Veamos como ζ se relaciona con la función φ. Para esto, recordemos φ se expresa como $\varphi * 1 = \mathrm{Id}$, donde $\mathrm{Id}(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

La función ζ y las funciones aritméticas

La función φ de Euler

Veamos como ζ se relaciona con la función φ. Para esto, recordemos φ se expresa como $\varphi * 1 = \mathrm{Id}$, donde $\mathrm{Id}(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Así, pasando a series de Dirichlet, obtenemos

La función ζ y las funciones aritméticas

La función φ de Euler

Veamos como ζ se relaciona con la función φ. Para esto, recordemos φ se expresa como $\varphi * 1 = \mathrm{Id}$, donde $\mathrm{Id}(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Así, pasando a series de Dirichlet, obtenemos

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi(m)}{m^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Id}(k)}{k^s}$$

La función ζ y las funciones aritméticas

La función φ de Euler

Veamos como ζ se relaciona con la función φ. Para esto, recordemos φ se expresa como $\varphi * 1 = \mathrm{Id}$, donde $\mathrm{Id}(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Así, pasando a series de Dirichlet, obtenemos

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi(m)}{m^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Id}(k)}{k^s}$$

utilizando la definición de Id y de la función ζ, tenemos

La función ζ y las funciones aritméticas

La función φ de Euler

Veamos como ζ se relaciona con la función φ. Para esto, recordemos φ se expresa como $\varphi * 1 = \mathrm{Id}$, donde $\mathrm{Id}(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Así, pasando a series de Dirichlet, obtenemos

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi(m)}{m^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Id}(k)}{k^s}$$

utilizando la definición de Id y de la función ζ, tenemos

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi(m)}{m^s}\right)\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{s-1}} = \zeta(s-1)$$

La función ζ y las funciones aritméticas

La función φ de Euler

Lo que reescribimos como

La función ζ y las funciones aritméticas

La función φ de Euler

Lo que reescribimos como

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}\right) \qquad \text{si} \qquad \Re(s) > 2$$

La función ζ y las funciones aritméticas

La función τ

Veamos como ζ se relaciona con la función τ.

La función ζ y las funciones aritméticas

La función τ

Veamos como ζ se relaciona con la función τ. Para esto, recordemos que τ por definición es $1 * 1 = \tau$.

La función ζ y las funciones aritméticas

La función τ

Veamos como ζ se relaciona con la función τ. Para esto, recordemos que τ por definición es $1 * 1 = \tau$. Así, pasando a series de Dirichlet, obtenemos

La función ζ y las funciones aritméticas

La función τ

Veamos como ζ se relaciona con la función τ. Para esto, recordemos que τ por definición es $1 * 1 = \tau$. Así, pasando a series de Dirichlet, obtenemos

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau(k)}{k^s}$$

La función ζ y las funciones aritméticas

La función τ

Veamos como ζ se relaciona con la función τ. Para esto, recordemos que τ por definición es $1 * 1 = \tau$. Así, pasando a series de Dirichlet, obtenemos

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau(k)}{k^s}$$

utilizando la definición de la función ζ, tenemos

La función ζ y las funciones aritméticas

La función τ

Veamos como ζ se relaciona con la función τ. Para esto, recordemos que τ por definición es $1 * 1 = \tau$. Así, pasando a series de Dirichlet, obtenemos

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau(k)}{k^s}$$

utilizando la definición de la función ζ, tenemos

$$\zeta(s)\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau(k)}{k^s}$$

La función ζ y las funciones aritméticas

La función τ

Lo que reescribimos como

La función ζ y las funciones aritméticas

La función τ

Lo que reescribimos como

$$\zeta(s)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} \qquad \text{si} \qquad \Re(s) > 1$$

La función ζ y las funciones aritméticas

La función σ

Finalmente, veamos como ζ se relaciona con la función σ.

La función ζ y las funciones aritméticas

La función σ

Finalmente, veamos como ζ se relaciona con la función σ. Para esto, recordemos que σ por definición es $\mathrm{Id} * 1 = \sigma$.

La función ζ y las funciones aritméticas

La función σ

Finalmente, veamos como ζ se relaciona con la función σ. Para esto, recordemos que σ por definición es $\mathrm{Id} * 1 = \sigma$. Así, pasando a series de Dirichlet, obtenemos

La función ζ y las funciones aritméticas

La función σ

Finalmente, veamos como ζ se relaciona con la función σ. Para esto, recordemos que σ por definición es $\mathrm{Id} * 1 = \sigma$. Así, pasando a series de Dirichlet, obtenemos

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{k^s}$$

La función ζ y las funciones aritméticas

La función σ

Finalmente, veamos como ζ se relaciona con la función σ. Para esto, recordemos que σ por definición es $\mathrm{Id} * 1 = \sigma$. Así, pasando a series de Dirichlet, obtenemos

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{k^s}$$

utilizando la definición de la función ζ, tenemos

La función ζ y las funciones aritméticas

La función σ

Finalmente, veamos como ζ se relaciona con la función σ. Para esto, recordemos que σ por definición es $\mathrm{Id} * 1 = \sigma$. Así, pasando a series de Dirichlet, obtenemos

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{k^s}$$

utilizando la definición de la función ζ, tenemos

$$\zeta(s-1)\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{k^s}$$

La función ζ y las funciones aritméticas

La función τ

Lo que nos implica que

La función ζ y las funciones aritméticas

La función τ

Lo que nos implica que

$$\zeta(s-1)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} \qquad \text{si} \qquad \Re(s) > 2$$