Teoría de los números II – semestre 2020-2

La clase pasada se vio el siguiente teorema

Teorema (1)

$H_n - 1 < \ln(n) < H_{n-1}$ para toda $n > 1$ en los enteros positivos.

Con esto tenemos los elementos suficientes para enunciar la primera aproximación del n-ésimo armónico. Antes de seguir adelante con las aproximaciones es importante mencionar que los resultados contemplarán un margen de error, es decir, el valor obtenido para H_n no estará en términos de un número racional, éste será una aproximación con elementos más manejables, que contemplan el uso de un margen de error, que más adelante se intentará exhibir que tiende a cero cuando n es grande, en el orden de H_n.

Para obtener las aproximaciones que queremos se hará uso de lo que se conoce como la **gran O**. En nuestro caso la usaremos como un elemento de acercamiento que nos permitirá calcular que tan próximas se encuentran dos funciones a partir de cierto intervalo. Para esto consideremos dos funciones$f(x)$ y $g(x)$, con las que se puede establecer la relación $f(x) = g(x) + O(h(x))$. Se dice que $f(x)$ es igual a $g(x)$más gran la O de $h(x)$, donde $O(h(x))$ es el margen de error. Ahora, para nuestro caso particular, una de las funciones es $f(x) = H_n$ y la otra $g(x) = \ln(n)$, y para que la comparación se de en términos de una igualdad se requiere a $O(h(x))$.

Para un uso más adecuado de $O(h(x))$ usaremos lo que se conoce como notación de Laudau.[1]

---

[1]La notación de Landau se refiere al símbolo $\ll$, se lee como *menor menor que* y define una relación entre dos funciones de la siguiente manera:
Dadas $f(x)$ y $g(x)$, $f(x) \ll g(x)$ si existen C y una x_0 tal que:

$$f(x) \leq C\, g(x), \text{ para toda } x > x_0.$$

Con esta notación ahora podemos comparar en términos de una igualdad a $f(x)$ con $g(x)$, pero a ésta última sumándole $O(h(x))$. Dicho de otra manera, si $f(x)$ y $g(x)$ tienen una magnitud semejante, entonces

La conveniencia de trabajar con aproximaciones de este tipo para H_n es la de visualizar el comportamiento de H_n a través de la comparación con una función tan conocida como lo es el $\ln(n)$.

Ahora proponemos el siguiente teorema que da lugar a la primera proximación para H_n.

Teorema (2)

$H_n = \ln(n) + O(1)$ para $n \geq 1$.

Observación

Esta expresión nos dice que H_n es cercana a $\ln(n)$ excepto por un error que es cercano a uno, y es evidente que para n pequeña el error $O(1)$ es grande.

Antes de exponer la demostración es adecuado mencionar qué es lo que se quiere desarrollar, en el contexto de la gran O. Ya se mencionó que se quiere demostrar que $H_n = \ln(n) + O(1)$, y esto significa que $|H_n - \ln(n)| \ll 1$, lo que conlleva a que existan C y N, tales que $|H_n - \ln(n)| \ll C \times 1$, para toda $n > N$. Aquí, podemos omitir el valor absoluto porque $H_{n-1} < H_n$, y además, $\ln(n) < H_{n-1}$,entonces, tenemos que $\ln(n) < H_{n-1} < H_n$, por lo que $\ln(n) < H_n$ y $0 < H_n - \ln(n)$.En consecuencia, sólo se tiene que demostrar que existe una C y N tal que $H_n - \ln(n) \leq C \times 1$, para toda $n > N$.

Demostración.

Sabemos que $H_{n-1} < H_n$ y por el teorema 1, $H_n - 1 < \ln(n) < H_{n-1}$, entonces de ambas expresiones obtenemos $H_n - 1 < \ln(n) < H_{n-1} < H_n$, y en consecuencia

$$H_n - 1 < \ln(n) < H_n$$

después de restar H_n se obtiene

$$-H_n + H_n - 1 < -H_n + \ln(n) < H_n - H_n$$

---

el $\ll$ funciona como un orden en el conjunto de las funciones y se denota por $|f(x) - g(x)| \ll h(x)$, lo que significa que $f(x) = g(x) + O\big(h(x)\big)$.

y, por lo tanto, $-1 < -H_n + \ln(n) < 0$, o de manera equivalente $0 < H_n - \ln(n) < 1$. Así, para $C \geq 1$ y para toda $n > 0$ se tiene que $H_n - \ln(n) \leq C \times 1$, y así se llega a que $|H_n - \ln(n)| \ll 1$, para dar lugar a que $H_n = \ln(n) + O(1)$. ♦

De esta manera se puede ver que el margen de error oscila en una constante que es uno, y se puede decir que el error no tiene grandes modificaciones aunque la *n* cambie.

La siguiente clase veremos una mejor aproximación para H_n, que tiene la característica de que el margen de error tiende a cero cuando *n* es grande, y además la igualdad para H_n contará con una constante que no tiene relación con la gran O. Cabe decir que la demostración recurre a elementos geométrico, lo que nos permitirá visualizar la relación entre H_n y $\ln(n)$.

CDMX 30 de marzo de 2020