Teoría de los números II – semestre 2020-2

La clase anterior vimos el siguiente resultado

Teorema. La suma de los primeros n valores de $\tau(n)$ es:

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = n\ln(n) + O(n)$$

De este resultado se deriva el siguiente corolario

Corolario.

$\frac{\sum_{k=1}^{n} \tau(k)}{\ln(n!)} \sim 1$, cuando n tiende a infinito. Dicho en otras palabras $\sum_{k=1}^{n} \tau(k)$ es asintótica a $\ln(n!)$ cuando n tiende a infinito.

Pero antes de demostrar el corolario requerimos de dos resultados previos.

Lema 1. $\ln(n!) = n\ln(n) - n + O(\ln(n))$,

Demostración del lema 1

En la Figura 4 se muestran rectángulos de área $\ln(2), \ln(3), \dots, \ln(n)$, y la suma de todas las áreas $\sum_{k=2}^{n} \ln(k)$, es la zona sombreada.

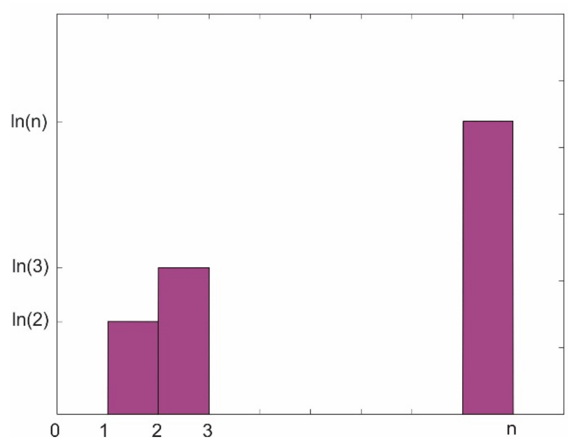

Figura 1: Rectángulos de área $\ln(2), \ln(3), \dots, \ln(n)$.

Por otro lado $\int_1^n \ln(x)dx$ es el área bajo la curva $y = \ln(x)$ desde 1 hasta n. Al sobreponer los rectángulos y la curva (véase Figura 5) se puede apreciar que

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \geq \int_{1}^{n} \ln(x)\, dx$$

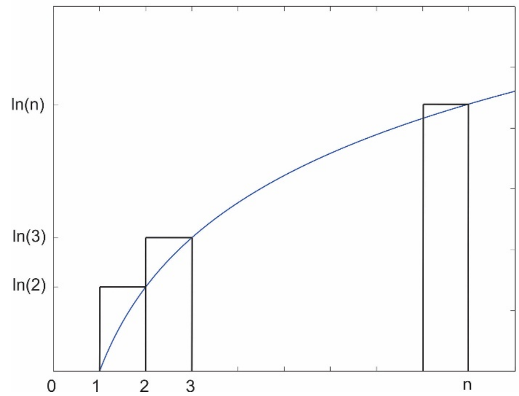

Figura 2: Área bajo la gráfica del $\ln(x)$1 hasta n comparada con área de los rectángulos de alturas $\ln(2)$, $\ln(3)$, …, $\ln(n)$.

y la diferencia $0 \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \int_{1}^{n} \ln(x) dx$ se puede visualizar en la Figura 6. Lo que está sombreado, que sobresale por encimada de $\ln(n)$ y que cabe en el rectángulo de área $\ln(n)$, da lugar a que

$$0 \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \int_{1}^{n} \ln(x) dx \leq \ln(n)$$

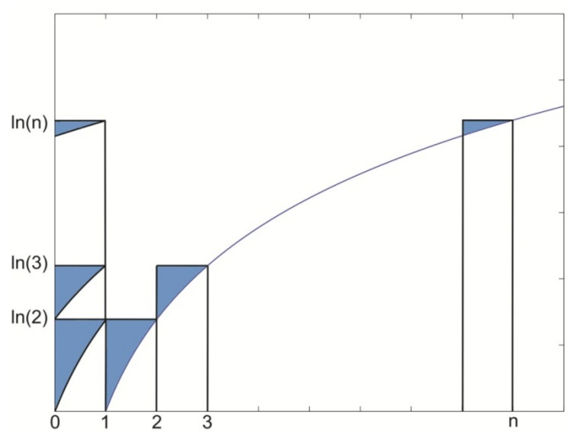

Figura 3: Área sombreada sobresaliendo por encima de la gráfica de $\ln(n)$, dada por $\sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \int_{1}^{n} \ln(x)\, dx$, y que puede ser acomodada en el rectángulo de área $\ln(n)$.

Ahora consideremos que

$$\sum_{k=2}^{n} \ln(k) = \ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n) = \ln(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n) = \ln(n!)$$

y como sabemos también que $\int_1^n \ln(x)dx = n\ln(n) - n + 1$, entonces llegamos a que

$$0 \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \int_1^n \ln(x)dx \leq \ln(n)$$

Es equivalente a

$$0 \leq \ln(n!) - (n\ln(n) - n + 1) \leq \ln(n),$$

por lo tanto $0 \leq \ln(n!) - (n\ln(n) - n) \leq \ln(n) + 1$, y esto a su vez implica que

$$0 \leq \ln(n!) - (n\ln(n) - n) \ll \ln(n) + 1$$

Pero como[1] $\ln(n) + 1 \ll \ln(n)$ así, por transitividad de $\ll$, $0 \leq \ln(n!) - (n\ln(n) - n) \ll \ln(n)$ y como $0 \leq \ln(n!) - (n\ln(n) - n)$, entonces

$$|\ln(n!) - (n\ln(n) - n)| \ll \ln(n),$$

y finalmente tenemos $\ln(n!) = n\ln(n) - n + O\big(\ln(n)\big)$, que es lo que se quería demostrar.

Lema 2. $\frac{\ln(n!)}{n\ln(n)} = 1,$ cuando $n \to \infty$.

Demostración del lema 2

Así, retomando que $|\ln(n!) - (n\ln(n) - n)| \ll \ln(n)$ sabemos que existen C y N tales que $0 \leq \ln(n!) - (n\ln(n) - n) \leq C \cdot \ln(n)$ para toda $n > N$.

Multiplicando la desigualdad por $\frac{1}{n\ln(n)}$ se obtiene

$$0 \leq \frac{\ln(n!)}{n\ln(n)} - \left(1 - \frac{n}{n\ln(n)}\right) \leq C\frac{\ln(n)}{n\ln(n)}.$$

Simplificando

$$0 \leq \frac{\ln(n!)}{n\ln(n)} - \left(1 - \frac{1}{\ln(n)}\right) \leq C\frac{1}{n},$$

[1] Se puede encontrar una C fija tal que $\ln(n) + 1 \leq C\ln(n)$, para toda n.

y de esto se infiere que $\frac{\ln(n!)}{n\ln(n)} = 1 - \frac{1}{\ln(n)} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, pero cuando $n \to \infty$, $\frac{1}{\ln(n)}$ y $\frac{1}{n}$ tiende n a cero. Así $\frac{\ln(n!)}{n\ln(n)}$ es 1 cuando $n \to \infty$ lo que prueba el lema 2.

Demostración del corolario

Dividiendo la igualdad del teorema anterior entre $n\ln(n)$ obtenemos

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\tau(k)}{n\ln(n)} = \frac{n\ln(n)}{n\ln(n)} + \frac{1}{n\ln(n)}O(n) = 1 + O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$$

pero, cuando $n \to \infty$, $\frac{1}{\ln(n)} \to 0$, entonces $\frac{\sum_{k=1}^{n}\tau(k)}{n\ln(n)} = 1$, es decir, $\sum_{k=1}^{n}\tau(k) \sim n \cdot \ln(n)$, y

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\tau(k)}{n\ln(n)} = 1$$

Pero del resultado anterior $\ln(n!) \sim n\ln(n)$, y como $\sim$ es una relación de equivalencia se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n}\tau(k) \sim \ln(n!),$$

y finalmente

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\tau(k)}{\ln(n!)} = 1$$

Finalmente mejoraremos la aproximación de $\sum_{k=1}^{n}\tau(k)$ utilizando las aproximaciones para números armónicos.

Teorema:

$$\sum_{k=1}^{n}\tau(k) = n\ln(n) + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$$

Donde γ es la constante de Euler.

Demostración:

Iniciamos contando los puntos (c, d) como en un ejemplo numérico que se vio antes, para el promedio de $\tau(k)$, ver Figura 1 de este capítulo, pero ahora se hará en general. Al contarlos obtenemos $\tau(k)$ para cada $k \in \{1,2, \dots, n\}$.

Como todos los puntos (c, d) están sobre hipérbolas y éstas son simétricas con respecto a la recta $y = x$, entonces basta contar los puntos que están sobre la recta $y = x$y los que están bajo ella. En Figura7 está la representación del caso general.

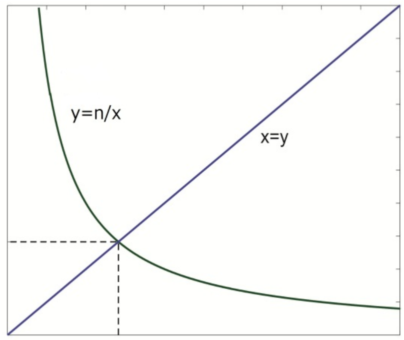

Figura 4: La identidad se intersecta con la hipérbola$y = {}^{n}/_{x}$ en el punto $(\sqrt{n}, \sqrt{n})$.

Dado que $y = x$ y $y = \frac{n}{x}$ son iguales en $x = \sqrt{n}$, entonces algunos de los puntos que queremos contar y que están sobre la recta $y = x$ van desde el $(1,1), (2,2)$ hasta el $([\sqrt{n}], [\sqrt{n}])$, esto implica que hay $[\sqrt{n}\,]$ de ellos, pero a la vez $[\sqrt{n}] \leq n$, entonces podríamos considerarlos dentro del error de aproximación $O(\sqrt{n})$ y así los dejamos de tomar en cuenta.

Considerando los divisores de *n* en su forma $\frac{n}{d}$, y debido a la aparición de $H_{\sqrt{n}}$, utilizaremos el hecho de que $H_t = \ln(t) + \gamma + O\left(\frac{1}{t}\right)$ para $t \in \mathbb{R}$.

Prosiguiendo con la demostración, recordemos que ya habíamos tomado en cuenta los puntos que están sobre $y = x$, pero aún falta ver qué ocurre con los que están debajo de ella. Para esto, por cada $d = 1, d = 2,$ hasta$d = [\sqrt{n}]$ contamos$\left[\frac{n}{d}\right] - d$ puntos[2] yal final multiplicamos por 2 para considerar los puntos que están por encima de $y = x$, esto es:

[2]Para convencerse de esto ayudarse del ejemplo numérico antes mencionado.

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = 2 \sum_{d \le \sqrt{n}} \left(\left[\frac{n}{d}\right] - d \right) + O(\sqrt{n})$$
$$= 2 \sum_{d \le \sqrt{n}} \left[\left(\frac{n}{d} + O(1) \right) - d \right] + O(\sqrt{n})$$
$$= 2 \sum_{d \le \sqrt{n}} \frac{n}{d} + 2 \sum_{d \le \sqrt{n}} O(1) - 2 \sum_{d \le \sqrt{n}} d + O(\sqrt{n})$$

Para simplificar la última expresión veamos que pasa con las sumas $2\sum_{d\le\sqrt{n}} O(1)\ y\ \sum_{d\le\sqrt{n}} d.$ La primer identidad $\sum_{d\le\sqrt{n}} O(1)$ es una suma de a lo más $\sqrt{n}$ errores con tamaño $O(1)$, así que al sumarlos el error no pasa de $\sqrt{n}$, es decir, tendríamos de aquí un error $O(\sqrt{n})$.

Y para $\sum_{d\le\sqrt{n}} d$, veamos que para $t \in \mathbb{R}$ se cumple que $\sum_{k\le t} k = \frac{t^2}{2} + O(t)$.[3] El área que representa $\int_0^t x dx = \frac{t^2}{2}$ y el área que representa $\sum_{k\le t} k$ se ven en la Figura 8.

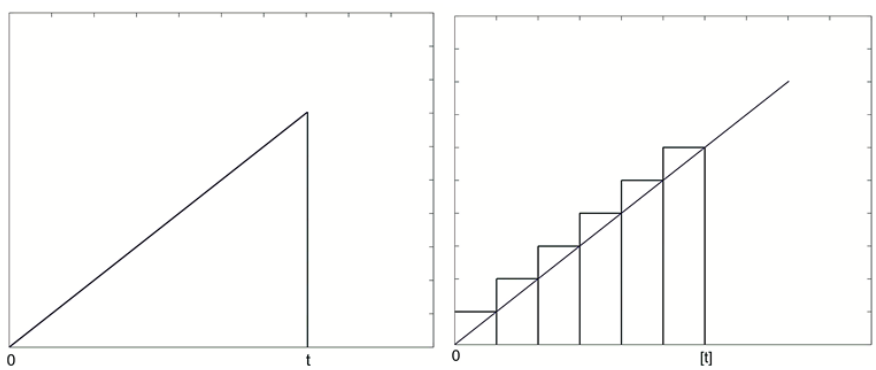

Figura 5: El área que representa $\int_0^t x\,dx = \frac{t^2}{2}$ y el área que representa $\sum_{k\le t} k$.

$\sum_{k\le t} k$ sería igual a $\int_0^t x\,dx$ si lo que le sobra[4] (ver izquierda de la Figura 9) fuera igual a lo que no alcanza a cubrir (ver derecha de la Figura 9), pero el área de lo que le sobra

[3]Esta es una generalización de la suma de los *n* primeros enteros, es decir, es la suma de los primeros *k* enteros hasta un *t* real.

[4]El área sombreada en la Figura 9 en la izquierda de la misma, es $\frac{[t]}{2}$, porque tenemos $[t]$ triángulos de área $\frac{1}{2}$.

es$\frac{[t]}{2}$ y el área que no alcanza a cubrir es a lo más t, y como$\frac{[t]}{2} < t$, entonces$0 \leq \sum_{k \leq t} k - (t) \leq \int_0^t x\, dx$, y de aquí que $0 \leq \sum_{k \leq t} k - \int_0^t x\, dx \leq t$, por lo tanto:

$$\sum_{k \leq t} k = \frac{t^2}{2} + O(t)$$

Sabiendo cuanto es la suma de los primeros k enteros hasta un número real t, tenemos que $\sum_{d \leq \sqrt{n}} d = \frac{n}{2} + O(\sqrt{n})$. Sustituyendo en la ecuación

$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = 2\sum_{d \leq \sqrt{n}} \frac{n}{d} + 2\sum_{d \leq \sqrt{n}} O(1) - 2\sum_{d \leq \sqrt{n}} d + O(\sqrt{n})$ los valores de

$\sum_{d \leq \sqrt{n}} O(1)$y $\sum_{d \leq \sqrt{n}} d$ que acabamos de obtener:

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = 2nH_{\sqrt{n}} - 2\left(\frac{n}{2} + O(\sqrt{n})\right) + O(\sqrt{n}) = 2n\left(\ln(\sqrt{n}) + \gamma + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) - n + 2O(\sqrt{n})$$

$$= 2n\ln(\sqrt{n}) + 2n\gamma + 2nO\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - n + O(\sqrt{n})$$

$$= 2n\frac{\ln(n)}{2} + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n}) + 2nO\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n\ln(n) + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$$

La última igualdad es consecuencia de la definición de la gran O.

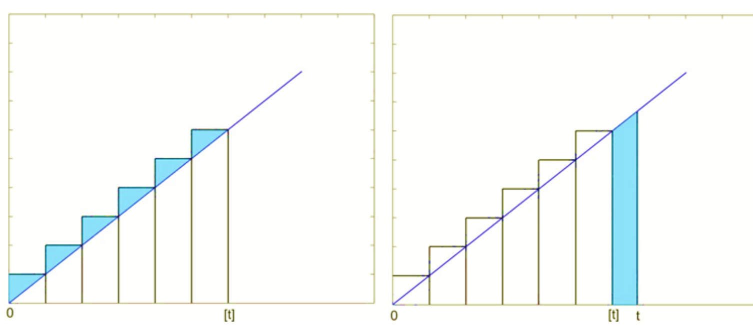

Figura 6: En el lado izquierdo, la parte sombreada tiene área $\frac{[t]}{2}$y en el lado derecho de la figura, la parte sombreada tiene a lo más área igual a *t*.

Así terminamos la otra aproximación de$\sum_{k=1}^{n} \tau(k)$ y esto nos permitió adentramos en otra modalidad del uso de los armónicos.

CDMX 22 de abril de 2020