Teoría de los números II – semestre 2020-2

Números armónicos de segundo orden.

A continuación presentamos la definición de los números armónicos de segundo orden, así como algunas relaciones análogas a las de los números armónicos de primer orden vistas en las clases anteriores.

Los números armónicos de segundo orden son:

$$H_1^{(2)} = 1$$

$$H_2^{(2)} = 1 + \frac{1}{2^2}$$

$$H_3^{(2)} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$$

$$\vdots$$

$$H_n^{(2)} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Y como ya se hizo en el capítulo anterior, lo primero que nos interesa es conocer una aproximación de $H_n^{(2)}$. En los de primer orden usamos la constante de Euler para construir aproximaciones cada vez más precisas, ahora, para los de segundo orden usaremos a $\zeta(2)$,[1] y posteriormente en la generalización aparecerán las constantes $\zeta(3), \dots, \zeta(k)$.

Teorema. Existe un número real $\zeta(2)$ tal que:

$$H_n^{(2)} = -\frac{1}{n} + \zeta(2) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

[1] $\zeta(2)$es un valor de la función zeta de Riemann.

Demostración:

Por una parte el área bajo la curva $y = \frac{1}{x^2}$ a partir de $x = 1$ esta dada por la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{B\to\infty} \int_1^{B} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{B\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^B = \lim_{B\to\infty} \left(1 - \frac{1}{B}\right) = 1$$

En la Figura 10 se muestra la gráfica de $y = \frac{1}{x^2}$ y debajo de ella a los rectángulos de área1, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, ….

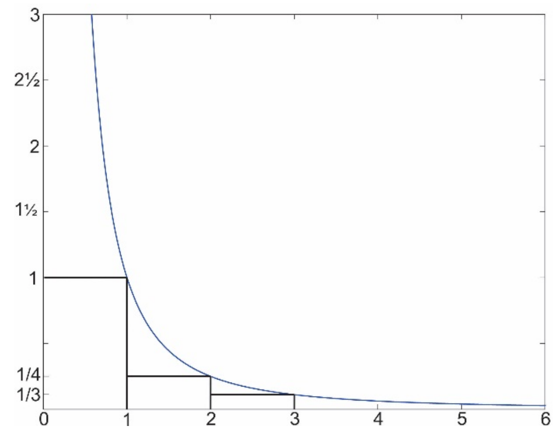

Figura 1: La gráfica de $y = \frac{1}{x^2}$y los rectángulos de área 1,$\frac{1}{2^2}$,$\frac{1}{3^2}$, ….

Se percibe directamente que la suma de las áreas de los rectángulos de área $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{3^2}$, ... es menor que el área bajo la curva de $y = \frac{1}{x^2}$ a partir de $x = 1$ y por tanto es menor que1. Así, se define $\zeta(2)$ como:

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots,$$

por otra parte, lo que se quiere demostrar es equivalente a que

$$\zeta(2) - H_n^{(2)} = \frac{1}{n} - O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

El lado derecho representa el área de todos los rectángulos con área $\frac{1}{n^2}$ excepto los primeros n. Tal área es aproximadamente la que está bajo la curva $y = \frac{1}{x^2}$, desde $x = n$ en adelante, y está dada por la integral

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{B\to\infty}\int_n^B \frac{1}{x^2}dx = \lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_n^B = \lim_{B\to\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{B}\right) = \frac{1}{n},$$

$\int_n^\infty \frac{1}{x^2}dx$se aproxima a $\zeta(2) - H_n^{(2)}$, pero tiene pequeños excedentes, como se ve en la Figura11.

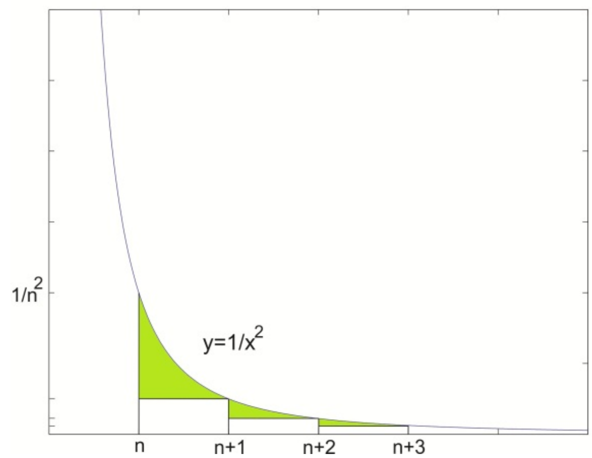

Figura 2: La parte sombreada es lo que se excede$\int_n^\infty \frac{1}{x^2}dx$ sobre$\zeta(2) - H_n^{(2)}$.

Alojando los sectores sobrantes en el rectángulo de área$\frac{1}{n^2}$, como se ve en la Figura12,

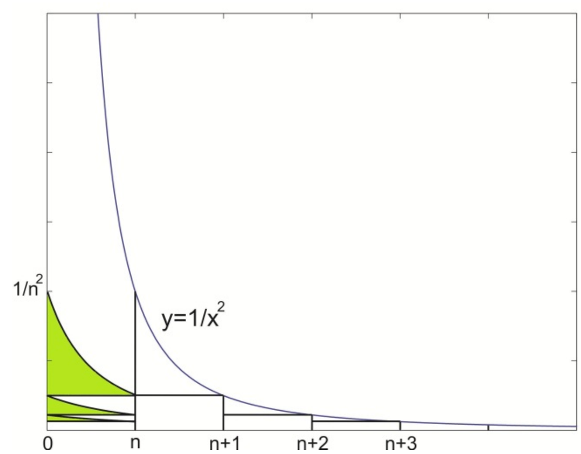

Figura 3:Las partes sombreadas se puede acomodar en el rectángulo de área$1/n^2$

se consigue que el área de los excedentes no sea más grande que $\frac{1}{n^2}$, es decir, el margen de error del área bajo la curva y de los rectángulos no es mayor que $\frac{1}{n^2}$.

Así, para que$\zeta(2) - H_n^{(2)}$sea cercano a$\int_n^\infty \frac{1}{x^2} dx$se tiene que considerar un margen de error muy cercano a $\frac{1}{n^2}$. Por lo tanto, $\zeta(2) - H_n^{(2)} = \frac{1}{n} - O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, y en consecuencia

$$H_n^{(2)} = -\frac{1}{n} + \zeta(2) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

CDMX 23 de abril de 2020