Teoría de los números II – semestre 2020-2

Armónicos de orden k

Para el caso de los armónicos de orden k, definimos a $\zeta(k)$ como:

$$\zeta(k) = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots$$

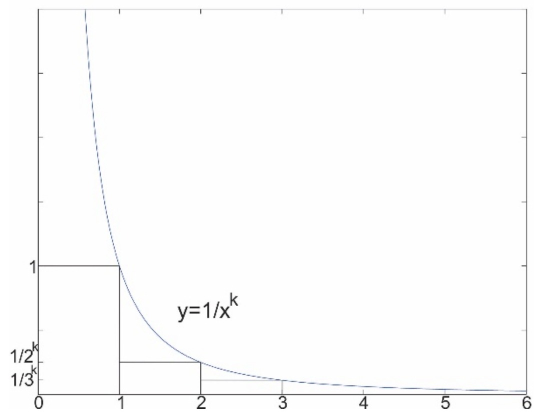

Figura 13: La gráfica de $y = 1/x^k$ y los rectángulos de área $1, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{3^k}$ ….

Nuevamente $\zeta(k) - H_n^{(k)}$ es el área de los rectángulos de área $\frac{1}{n^k}$ con $n = 1,2, \ldots$, menos una cantidad finita de ellos $H_n^{(k)}$.

El área bajo la gráfica de $y = \frac{1}{x^k}$ esta dada por:

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^k} dx = \lim_{B\to\infty} \int_n^B \frac{1}{x^k} dx = \lim_{B\to\infty} \left(\frac{1}{-k+1} \cdot \frac{1}{x^{k-1}} \right) \Bigg|_n^B = \lim_{B\to\infty} \left(\frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} - \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{B^{k-1}} \right)$$
$$= \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{n^{k-1}}$$

De igual manera $\int_n^\infty \frac{1}{x^k} dx$ es cercano a $\zeta(k) - H_n^{(k)}$, y la diferencia está en los sobrantes (las partes sombreadas) que se ilustran en la Figura 14.

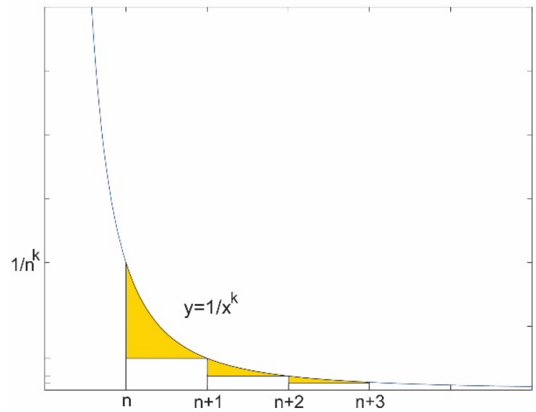

Figura 14: La parte sombreada muestra lo que le sobra a$\int_n^\infty \frac{1}{x^k}$ para ser$\zeta(k) - H_n^{(k)}$

Igual que antes, a los excedentes los podemos ubicaren el rectángulo de área $\frac{1}{n^k}$, véase Figura 15.

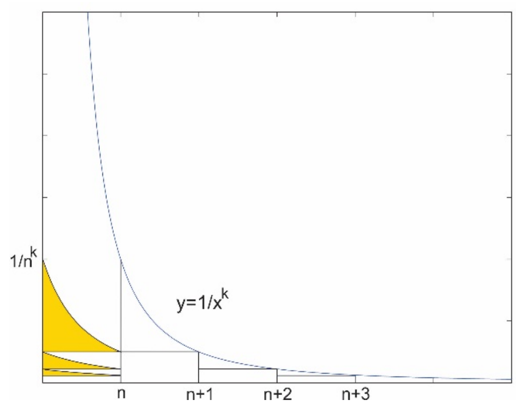

Figura 15:La parte sombreada se puede acomodar en el rectángulo de área $1/n^k$.

Por lo tanto se puede enuncias que

$$\zeta(k) - H_n^{(k)} = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} - O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

o

$$H_n^{(k)} = -\frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{n^{k-1}} + \zeta(k) + O\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Con las aproximaciones deducidas para $H_n^{(2)}$ ahora podemos regresar al cálculo de promedios de funciones aritméticas, como ya se había adelantado antes. Enseguida analizaremos a la función $\sigma(n)$ (que es la suma de los divisores de *n*).

Teorema:

Para toda *n* en los enteros positivos

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = \zeta(2)\frac{n^2}{2} + O(n\ln(n)).$$

Pero también podemos verlo desde la idea de conocer el promedio de una suma finita de las funciones sigma, y es que se puede plantear la equivalencia

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = \zeta(2)\frac{n}{2} + O(\ln(n)).$$

Demostración:

Para la demostración nos podemos ayudar del ejemplo numérico que hemos usado antes, aquél donde los divisores de un entero se representan con puntos con coordenadas enteras, pero ahora no se contarán los puntos, lo que se hará es sumar la segunda coordenada de esos pares de enteros (c, d).

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{d|k} d = \sum_{\substack{(c,d)\\ c\cdot d\leq n}} d$$

Como $c \cdot d \leq n$, entonces$d \leq \frac{n}{c}$, $c \leq n$, así que

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{d|k} d = \sum_{\substack{(c,d)\\ c\cdot d\leq n}} d = \sum_{c\leq n}\sum_{d\leq\frac{n}{c}} d$$

Haciendo un alto en la demostración diremos que en esta ocasión los números armónicos aparecerán naturalmente luego de introducir la expresión $\sum_{k\leq t} k = \frac{t^2}{2} + O(t)$ en la anterior serie de desigualdades. Haciendo esto, $\sum_{k=1}^{n} \sigma(k)$ se podrá poner en términos de números armónicos de segundo orden y números armónicos. Enseguida los detalles de esto.

Retomando la demostración introduciremos $\sum_{k\leq t} k = \frac{t^2}{2} + O(t)$ en la suma interna de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)=\sum_{c\leq n}\sum_{d\leq\frac{n}{c}}d=\sum_{c\leq n}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{c^2}+O\left(\frac{n}{c}\right)\right)=\frac{n^2}{2}\sum_{c\leq n}\frac{1}{c^2}+\sum_{c\leq n}O\left(\frac{n}{c}\right)=\frac{n^2}{2}\sum_{c\leq n}\frac{1}{c^2}+O\left(n\sum_{c\leq n}\frac{1}{c}\right)$$

Esta última igualdad se debe a que la suma de n errores, cada uno acotado por una constante k veces $\frac{n}{c}$, está acotada por $kn\sum_{c\leq n}\frac{1}{c}$.

Y por lo demostrado anteriormente para los números armónicos de segundo orden se puede proponer que

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)=\frac{n^2}{2}\sum_{c\leq n}\frac{1}{c^2}+O\left(n\sum_{c\leq n}\frac{1}{c}\right)=\frac{n^2}{2}\left(\zeta(2)-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+O(nH_n)$$

$$=\zeta(2)\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}O\left(\frac{1}{n^2}\right)+O(nH_n)=\zeta(2)\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+O(1)+O(n\ln(n))$$

La última igualdad se debe a que $nH_n \ll n\ln(n)$, puesto que$H_n \leq 1\cdot\ln(n)$, para toda $n>2$ y si multiplicamos de ambos lados por $n>0$, entonces $nH_n\leq n\cdot\ln(n)$, para todo *n*> 2, y como$-\frac{n}{2}+1\ll n\ln(n)$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)=\zeta(2)\frac{n^2}{2}+O(n\ln(n))$$

Un resultado inmediato es el siguiente.

Corolario 1

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)\sim\sum_{k=1}^{n}\zeta(2)k.$$

Y al igual que el teorema este resultado se puede visualizar en términos de los promedios de ambas sumas.

Demostración:

Usando la igualdad del teorema anterior y dividiéndola entre$\zeta(2)\frac{n^2}{2}$ tenemos que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)}{\zeta(2)\frac{n^2}{2}}=\frac{\zeta(2)\frac{n^2}{2}}{\zeta(2)\frac{n^2}{2}}+\frac{O(n\ln(n))}{\zeta(2)\frac{n^2}{2}},$$

de aquí que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \sigma(k)}{\zeta(2)\frac{n^2}{2}} = 1 + \frac{2}{\zeta(2)} \cdot O\left(\frac{n\ln(n)}{n^2}\right)$$

y como

$$\frac{n\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

entonces

$$1 + \frac{2}{\zeta(2)} \cdot O\left(\frac{n\ln(n)}{n^2}\right) = 1$$

por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) \sim \zeta(2)\frac{n^2}{2}$$

Por otro lado, al multiplicar a $\sum_{k=1}^{n} k$ por $\zeta(2)$, que es lo que cambia en la suma, se tiene que $\sum_{k=1}^{n} \zeta(2)k = \zeta(2)\frac{n(n+1)}{2} = \zeta(2)\frac{n^2}{2} + O(n)$

Por lo tanto $\sum_{k=1}^{n} \zeta(2)k \sim \zeta(2)\frac{n^2}{2}$. Y por la transitividad de $\sim$, concluimos que

$$\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) \sim \sum_{k=1}^{n} \zeta(2)k.$$

Finalmente llegamos a la equivalencia de lo que puede ser el valor promedio de la suma de hasta n sumandos de la función sigma, y lo interesante es que el resultado queda en términos de un valor de la función zeta de Riemann.

CDMX 24 de abril de 2020