Postulado de Bertrand

EL camino de la demostración de **Paul Erdös.**

1) La idea está en acotar el coeficiente binomial $\binom{2n}{n}$, este es el camino que seguirá la demostración y se llegará a que la cota final cae en una contradicción si no existe por lo menos un primo entre n y $2n$.

Para llegar a esta conclusión es necesario recorrer los siguientes puntos

2) Demostrar que para $n \geq 5$ se cumple que

$$\frac{1}{2n} 2^{2n} < \binom{2n}{n} < \frac{1}{4} 2^{2n}.$$

3) Se demostrará que para un intervalo $(10, b]$ con $b \geq 10$ se pueden construir intervalos que lo cubren y que sean de la forma:

$$\begin{gathered} [a_1 \quad 2a_1] \\ [a_2 \quad 2a_2] \\ [a_3 \quad 2a_3] \\ . \\ . \\ [a_{m-1} \quad 2a_{m-1}] \\ [a_m \quad 2a_m], \end{gathered}$$

se puede considerar que los intervalos se traslapen cuando cubran a $(10, b]$.

4) Se verá que el producto de los primos en el intervalo $(10, b]$ se puede acotar con base en el producto de los primos en cada intervalo mencionado en 3), es decir, se probará que:

$$\prod_{10<p\leq b} p \leq \prod_{a_1<p\leq 2a_1} p \cdot \prod_{a_2<p\leq 2a_2} p \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \prod_{a_m<p\leq 2a_m} p$$

y se llegará a que

$$\prod_{10<p\leq b} p < 2^{2b}.$$

5) Ahora, damos un giro diferente a la demostración y nos dirigimos a construir una cota para $\binom{2n}{n}$ con base en el producto de los primos que lo dividen. El producto se construye con base en nuevo conjunto de intervalos entre 1 y $2n$. Esto es, demostraremos que

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{p\leq\sqrt{2n}} p^r \cdot \prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n<p\leq 2n} p$$

Erdös nos propone estos intervalos que capturan a todos los primos para acotar a $\binom{2n}{n}$ ya explicaremos lo de la potencia del primo en el primer factor y véase que los intervalos

$$p \leq \sqrt{2n}; \qquad \sqrt{2n} < p \leq \tfrac{2}{3}n; \qquad n < p \leq 2n$$

cubren a todos los primos entre 1 y $2n$, pero noten que no está el intervalo $\frac{2}{3}n < p \leq n$,

pues resulta que se demuestra que en ese intervalo no existen primos, ya lo demostraremos.

6) A partir de la expresión en 5)

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{p\leq\sqrt{2n}} p^r \cdot \prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n<p\leq 2n} p\,,$$

y usando los resultados de 1), 2), 3) y principalmente 4) se llegará a que

$$2^{\frac{2}{3}n} < (2n)^{\sqrt{2n}+1}$$

pero si pasa que no hay primos en el factor

$$\prod_{n<p\leq 2n} p$$

entonces la desigualdad anterior ya no se cumple a partir de cierto valor de n, y esto no puede pasar, por lo tanto, sí tiene que existir por lo menos un primo en el intervalo $n < p \leq 2n$ y con esto terminaríamos la demostración.