Teoría de los números II – semestre 2020-2

Promedios

En las clases anteriores se estudiaron algunas formas para aproximar ciertas funciones aritméticas, como fue el caso de $\sigma(n)$, y se hizo a partir del uso de otras más simples o ya conocidas, y con esto se pretendía que el margen de error para que se diera la igualdad fuera muy *pequeño*. Sin embargo, sucede que para funciones como $\tau(n)$,[1] no es fácil poder plantear una aproximación con base en una función simple, y esto se debe a que $\tau(n)$ es una función muy irregular, pues sucede que ésta puede tener como valor al dos, cuando n es un primo, pero si el siguiente, el $n+1$, es un número compuesto con muchos divisores, entonces el valor de $\tau(n+1)$ dará un gran salto.

Así, frente a la dificultad de poder modelar el comportamiento de la función, y ante la inquietud por conocer más de $\tau(n)$, optamos por el estudio de los promedios, esto es, analizar el promedio de conjuntos finitos de valores en la imagen de este tipo de funciones, y esto sí nos permitirá conocer ciertas características de esta clase de funciones tan inestables.

Con el fin de suavizar esos saltos y así aproximar a manera de promedio una función con otra para compararlas, a continuación se enuncia una definición.

Definición. $f(n)$ es asintótica a $g(n)$, si $\frac{f(n)}{g(n)}$ es 1 cuando $n \to \infty$ y se escribe como $f(n) \sim g(n)$.

Para ejemplificar la definición usemos la relación ya conocida $H_n = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$, que ya se ha usado.

---

[1] Recordemos que esta es la función aritmética que nos indica la cantidad de divisores de un número. Por ejemplo, los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, 12, entonces $\sigma(12) = 6$, pero si el número en cuestión es primo, como el 13, donde sólo el 1 es su divisor, entonces $\tau(k) = 1$.

Al restar $\ln(n)$ de ambos lados se obtiene:

$$H_n - \ln(n) = \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

y al dividir cada lado entre γ

$$\frac{H_n - \ln(n)}{\gamma} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

aquí γ es absorbida por el término de la gran O, que es $\frac{1}{n}$, y a la vez éste término tiende a cero cuando $n \to \infty$, entonces el error se hace tan pequeño como se quiera cuando n se hace grande. Finalmente $\frac{H_n - \ln(n)}{\gamma} \to 1$, cuando $n \to \infty$, esto es $H_n - \ln(n) \sim \gamma$.

La siguiente clase, veremos un resultado que nos proporciona información por intervalos de las imágenes de $\tau(n)$, la ventaja de esto es que nos permite visualizar explícitamente los resultados dentro de una función continua. Para llegar a esto, el uso de los números armónicos es fundamental.

CDMX 20 de abril de 2020