Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Teoría de los Números II

Tarea 1

Ángel Iván Gladín García
No. cuenta: 313112470
angelgladin@ciencias.unam.mx

23 de Marzo 2020

Prueba del Teorema de los números pentagonales de Euler

En clase vimos que los númeors pentagonales se pueden ver como,

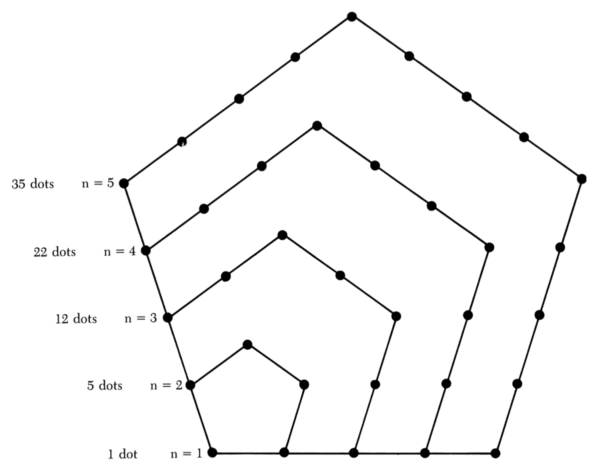

Figure 14–1 Pentagonal numbers.

Figura 1: Vemos que el número de los puntos adentro y en el n-ésimo pentágono es $\frac{n(3n-1)}{2}$. Por lo que los números $1, 5, 12, \ldots, \frac{n(3n-1)}{2}, \ldots$ son llamados números pentagonales.

Usando el *Producto Triple de Jabobi* que enuncia lo siguiente:

Teorema 1. *Si $z \neq 0$ y $|q| < 1$, entonces,*

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1 - q^{2n+2})(1 + zq^{2n+1})(1 + z^{-1}q^{2n+1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n$$

Teorema 2 (Números pentagonales)**.**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n\frac{3n-1}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n) \ \textit{donde } |q| < 1.$$

Demostración. Sustituyendo q por $q^{\frac{3}{2}}$ y z por $-\sqrt{q}$ en lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z^2)\left(1+\frac{q^{2n-1}}{z^2}\right)\\
&=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{\frac{3(2n-1)}{2}}(-\sqrt{q}))\left(1+\frac{q^{\frac{3(2n-1)}{2}}}{-\sqrt{q}}\right)(1-q^{3n})\\
&=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{\frac{6n-3+1}{2}})(1-q^{\frac{6n-3+1}{2}})(1-q^{3n})\\
&=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{3n-1})(1-q^{3n-2})(1-q^{3n})\\
&=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n})
\end{aligned}$$

Por la misma sustitución,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=\infty}^{\infty}q^{n^2}z^{2n}&=\sum_{n=\infty}^{\infty}q^{\frac{3n^2}{2}}(-\sqrt{q})^n\\
&=\sum_{n=\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}\\
&=\sum_{n=\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{(3n-1)n}{2}}
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad es obtenida invirtiendo el índice de la suma y factorizando el exponente. Por el Producto Triple de Jabobi son iguales. $\square$