Teoría de los números II – semestre 2020-2

En las clases anteriores se vio cómo acotar a H_n y también cómo encontrar valores muy cercanos a él. Las aproximaciones se hicieron con el uso de la función $\ln(n)$ y con la constante de Euler. Ahora se dará lugar a estudiar cómo se pueden usar estas propiedades de los armónicos para evaluar otras funciones aritméticas, que generalmente son muy inestables, y por lo mismo no es fácil describir su comportamiento en determinados intervalos. En el primer caso se trata de acotar la función suma de divisores, es decir, la función aritmética $\sigma(n)$ usada en la teoría de números.

Teorema

$$\sigma(n) \ll n\ln(n).$$

Demostración

La ruta de la prueba será demostrar primero que $\sigma(n) \leq n\ln(n) + n$, para toda n, y de esto se tendrá que $\sigma(n) \ll n\ln(n) + n$. En segundo lugar, si mostramos que $n\ln(n) + n \ll n\ln(n)$, entonces por la transitividad de $\ll$, obtendremos que $\sigma(n) \ll n\ln(n)$.

1) Ahora pasamos a la primera parte, demostrar que $\sigma(n) \leq n\ln(n) + n$, para toda n, y para esto se requiere considerar las siguientes propiedades de los divisores de un entero.

Dado un número n y un divisor d de n, entonces $\frac{n}{d}$ también es un divisor de n.[1]Esto nos dice que para los divisores $d_1 = 1, d_2, d_3, \dots, d_m = n$ de n se tienen sus complementos

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{d_2}, \frac{n}{d_3}, \dots, \frac{n}{n},$$

que finalmente son los mismos divisores d_i pero escritos de diferente manera y en otro orden. Con estos elementos se propone que

---

[1]Por ejemplo, tomemos si $n = 8$, sus divisores son $d = 1,2,4,8$, pero también se pueden ver cómo $\frac{8}{1} = 8$, $\frac{8}{2} = 4$, $\frac{8}{4} = 2$, $\frac{8}{8} = 1$.

$$\sigma(n)=\sum_{d|n} d=\sum_{d|n}\frac{n}{d}, \text{ y esto implica que } \sigma(n)=\sum_{d|n}\frac{n}{d}$$

y como la suma corre en d, entonces $\sigma(n)=n\sum_{d|n}\frac{1}{d}$ y de esto $\frac{\sigma(n)}{n}=\sum_{d|n}\frac{1}{d}$.

Y si consideramos una suma que no esté restringida a correr sólo en los divisores de n, sino que puede desarrollarse para todos los enteros menores o iguales que n, entonces se tiene que

$$\frac{\sigma(n)}{n}=\sum_{d|n}\frac{1}{d}\leq\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}=H_n.$$

Para el lado derecho de la expresión anterior podemos aplicar las cotas obtenidas anteriormente, es decir, que $H_n-1<\ln(n)$, o lo que es equivalente $H_n<\ln(n)+1$. Así, llegamos a que:

$$\frac{\sigma(n)}{n}=\sum_{d|n}\frac{1}{d}\leq\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}=H_n\leq\ln(n)+1$$

y por tanto $\frac{\sigma(n)}{n}\leq\ln(n)+1$, o de manera equivalente $\sigma(n)\leq n\ln(n)+n$, que es lo que se quería demostrar, en la parte inicial. En consecuencia $\sigma(n)\ll n\ln(n)+n$

2) Ahora pasamos a la segunda parte de la demostración, que es la de probar que$n\ln(n)+n\ll n\ln(n)$. Recordemos que para este caso tenemos que encontrar una constantes C y una N tales que $n\ln(n)+n\leq n\ln(n)\cdot C$, para toda $n>N$.

Así, considérese que para $n\geq 3$ se tiene que $1\leq\ln(n)$, y de esto que $n\leq n\ln(n)$, pero después de sumar en ambos lados $n\ln(n)$ se obtiene que:

$$n\ln(n)+n\leq 2\,n\ln(n).$$

Si suponemos que para el lado derecho $2n\ln(n)\leq Cn\ln(n)$ para alguna C, entonces $0\leq C\,n\ln(n)-2n\ln(n)$, y por tanto $0\leq(C-2)n\ln(n)$. De esto último tenemos que para $C=3$ siempre se cumple, considerando que[2] $n\geq 3$. Con esto último tenemos que $2n\ln(n)\ll n\ln(n)$, y por lo tanto $n\ln(n)+n\ll n\ln(n)$, que es lo que se quería demostrar para la segunda parte.

[2]Aquí tenemos que C = 3 y N = 3son las constantes requeridas.

Finalmente, por la transitividad de las dos partes[3] llegamos a que $\sigma(n) \ll n\ln(n)$.♦

CDMX 15 de abril de 2020

[3] Es decir, $\sigma(n) \ll n\ln(n) + n$ y $n\ln(n) + n \ll n\ln(n)$.