Clase # 6 de Análisis 3

Equipo clases a LaTeX

20 de noviembre de 2020

Índice

1. Notación

Supongamos $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$D_1(D_1 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = f_{11} \qquad D_1(D_2 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = f_{21}$$

$$D_2(D_2 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = f_{22} \qquad D_2(D_1 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = f_{12}$$

2. Teorema

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in S$. Supongamos que en una vecindad de (x_0, y_0), existen y son continuas f, f_1, f_2, f_{12}. Entonces f_{21} existe y ademas $f_{21}(x_0, y_0) = f_{12}(x_0, y_0)$

3. Definicion

Diferenciabilidad para campos escalares.

$f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0$ punto interior de S, $\mathcal{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset S$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que $||\mathbf{y}|| < r$ de manera que $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} \in \mathcal{B}_{\mathbf{x}_0}(r)$

Entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ si existe una transformación lineal (en este caso un funcional lineal) $T_{\mathbf{x}_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y una función escalar $E : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_0) + T_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{y}) + ||\mathbf{y}||E(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \tag{1}$$

Siempre que $||\mathbf{y}|| < r$, donde $E(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \to 0$ cuando $||\mathbf{y}|| \to 0$

La transformación lineal $T_{\mathbf{x}_0}$ se llama diferencial de f en $\mathbf{x}_0$

A (1) se le llama formula de Taylor de primer orden.

4. Teorema

Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ con diferencial $T_{\mathbf{x}_0}$, entonces existe la derivada $D_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y tenemos $T_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{y}) = D_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0)$. Ademas si $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ entonces:

$$D_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(\mathbf{x}_0) y_k$$

5. Definicion

Gradiente de un campo escalar:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} D_1 f(\mathbf{x}_0) \\ D_2 f(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ D_n f(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

Al final, la formula de Taylor de primer orden queda:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)\mathbf{y} + ||\mathbf{y}||E(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$$

6. Teorema

Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$.

7. Ejercicios

1. *Sea* $f(x,y) = x^3y^2 + x^4\sin(y) + \cos(xy),$ *Determinar:*

$$\begin{array}{cc} a) f_2(x,y) & d) f_{122}(x,y) \\ b) f_{21}(x,y) & e) f_{22}(x,y) \\ c) f_{212}(x,y) & f) f_{222}(x,y) \end{array}$$