Clase # 7 de Análisis 3

Equipo clases a LaTeX

20 de noviembre de 2020

Índice

1. Teorema

Condición suficiente de diferenciabilidad

Sea $f : S \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, S abierto, $\vec{x} \in S$. $D_1 f, \cdots, D_n f$ existen y son continuas en $B(\vec{x}, r) \subset S$. Entonces f es diferenciable en $\vec{x}$

2. Teorema

Regla de la cadena

Consideremos $f : S \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, S abierto, $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \mapsto S$, y $g(t) = f(\vec{r}(t))$, $t \in I$. Sea $t \in I$ donde $\vec{r}\,'(t)$ existe y supongamos que f es diferenciable en $\vec{r}(t)$, entonces existe $g'(t)$ y tenemos que

$$g'(t) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

donde $\vec{x} = \vec{r}(t)$.

3. Ejercicios

1. *Halle el vector gradiente si*

   a) $f(x,y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$.

   b) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2$.

2. *Calcule la derivada direccional de* $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ *en* $(1,1,0)$ *en la dirección de* $\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

3. *Hallar los puntos (x,y) y las direcciones para las que la derivada direccional de* $f(x,y) = 3x^2 + y^2$ *tiene valor máximo, si (x,y) pertenece a la circunferencia* $x^2 + y^2 = 1$.

4. *Supóngase que f es diferenciable en cada punto de* $B(\vec{x}, r)$. *Demuestre:*

   a) Si $\nabla f(\vec{y}) = \vec{0}$ para todo $\vec{y} \in B(\vec{x}, r)$ entonces f es constante en $B(\vec{x}, r)$.

   b) Si $f(\vec{y}) \leqslant f(\vec{x})$ para todo $\vec{y} in B(\vec{x}, r)$ entonces $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$.

5. *Hallar la derivada direccional de* $f(x,y) = x^2 - x + 2$ *a lo largo de* $y = x^2 - x + 2$ *en el punto (1,2). Use regla de la cadena.*

6. *Sea f un campo escalar no constante diferenciable en todo el plano y c una constante. Supongamos que la ecuación* $f(x,y) = c$ *describe una curva* $\mathcal{C}$ *que tiene tangente en cada uno de sus puntos. Demuestre que f tiene las siguientes propiedades en cada punto de* $\mathcal{C}$

   a) ∇f es un vector normal a $\mathcal{C}$.

   b) La derivada direccional de f a lo largo de $\mathcal{C}$ es cero.

   c) La derivada direccional de f tiene su valor máximo en la dirección del vector normal a $\mathcal{C}$.

7. *Sea* $f : S \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, S *es abierto,* f *es diferenciable en* S. *Sea* c *una constante y consideremos la superficie de nivel* $\mathcal{H} = \{\vec{y} \in S\,;\, f(\vec{y}) = c\}$. *Sea* $\vec{a} in \mathcal{H}$. *Demuestre que la ecuación del plano tangente a la superficie* $\mathcal{H}$ *satisface la ecuación*

$$\nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

8. *Sea* $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. *Compruebe que* $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ *en (0,0) ¿Tiene la superficie* $z = f(x,y)$ *plano tangente en (0,0)?*

4. Solución