

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

Facultad de Ingeniería



Modelado de dispositivos Piezoeléctricos con forma de vigas en voladizo utilizando PINNs

Trabajo de graduación presentado por Angel Leonel Higueros Cifuentes
para optar al grado académico de Licenciado en Ingeniería en Ciencias de
la Computación y Tecnologías de la Información

Guatemala,
2024

Vo.Bo.:

(f) _____

Tribunal Examinador:

(f) _____

(f) _____

(f) _____

Fecha de aprobación: Guatemala _____ , de _____ del 2024

Tabla de contenido

<i>Dedicatoria</i>	<i>vii</i>
<i>Reconocimiento</i>	<i>viii</i>
<i>Lista de cuadros</i>	<i>ix</i>
<i>Lista de figuras</i>	<i>xi</i>
<i>Resumen</i>	<i>xv</i>
<i>Abstract</i>	<i>xvii</i>
<i>I. Introducción</i>	<i>1</i>
<i>II. Justificación</i>	<i>5</i>
<i>III. Objetivos</i>	<i>3</i>
<i>IV. Marco teórico</i>	<i>21</i>
A. Materiales Piezoeléctricos	21
a. Definición y Principios Básicos	21
b. Propiedades del Lead Zirconate Titanate (PZT)	21
B. Aplicaciones de los Materiales Piezoeléctricos	20
a. Usos Industriales	20
b. Desafíos y Oportunidades	20
C. Inteligencia Artificial y Aprendizaje Automático en el Modelado de Materiales	21
D. Modelado de Materiales Piezoeléctricos	21
a. Modelos Tradicionales.....	21
b. Avances en Modelado con Inteligencia Artificial	22
E. <i>Physic Informed Neural Networks</i> (PINNs)	22
a. Fundamentos de PINNs	22
b. Entradas y Salidas	23
c. Capas Ocultas	23
d. Funciones de Activación	23
f. Función de Pérdida (Loss Function)	23
g. Optimización	24
h. Aplicaciones de PINNs en Materiales Piezoeléctricos	24
F. Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) en el Modelado de PZT	24
a. Introducción a las EDPs en Piezoelectricidad	24
b. Resolución de EDPs mediante PINNs.....	24

c. Ecuaciones Utilizadas en el Modelado.....	25
a. Heat equation	25
a. Navier Stokes equation	25
b. Indirect piezoelectric equation	26
V. Metodología.....	48
A. Desarrollo del Modelo de Redes Neuronales	48
B. Estudio de las PINNs y Ecuaciones Diferenciales Parciales mediante la PDE de Calor	47
C. Implementación de la PINN para las Ecuaciones de Navier-Stokes.....	47
D. Creación de una PINN para la Piezoelectricidad Indirecta	47
E. Evolución del Modelo desde la Ecuación de Calor hasta la Piezoelectricidad Indirecta	48
F. Validación del Modelo	49
VI. Resultados.....	47
A. PINN <i>heat equation</i>	47
B. PINN <i>navier stokes</i>	64
C. PINN <i>piezoelectric indirect</i>	67
VII. Discusión	64
A. Evolución del Desarrollo del Modelo	64
B. Implementación de las Ecuaciones de Navier-Stokes.....	64
C. Modelado de la Piezoelectricidad Indirecta.....	64
VIII. Conclusiones	64
IX. Recomendaciones.....	70
X. Bibliografía	73
X. Anexos	76

Dedicatoria

A mi familia que me han dado su apoyo incondicional todos estos años, a mi padre y madre que me dieron todo, mis abuelos, tía, hermanos, que inspiraron para poder seguir adelante.

A mis amigos, quienes han hecho posible este logro, en especial a Fredy y Marina. A cada uno de ustedes, gracias por estar siempre presentes, celebrando conmigo cada pequeño logro y brindándome su apoyo en los momentos difíciles. Su amistad es un tesoro que me ha dado fuerzas para seguir adelante.

A mis asesores: A Gabriel y Luke, por compartir su conocimiento, por su guía invaluable y por apoyarme en cada momento. Su paciencia, comprensión y dedicación fueron esenciales para alcanzar esta meta.

A Alicia que siempre ha creído en mí, animándome, apoyándome y motivándome para terminar este trabajo. Gracias por cada recordatorio, cada platica, por ayudarme a practicar. Gracias por todo.

A todos ustedes, mi más sincero agradecimiento. Este trabajo es un reflejo del apoyo y amor que me han brindado.

Reconocimiento

Quiero expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas las personas que, de una manera u otra, han contribuido al desarrollo y culminación de este trabajo de graduación.

En primer lugar, agradezco a la Universidad del Valle de Guatemala, institución que no solo me brindó los conocimientos académicos necesarios, sino también un entorno adecuado para crecer personal y profesionalmente. Es un honor haber formado parte de su comunidad y haber recibido el apoyo constante durante mi formación.

A mis asesores, Gabriel y Luke, por compartir su experiencia y conocimientos de forma tan generosa. Su orientación, paciencia y guía invaluable han sido pilares fundamentales a lo largo de este proyecto. Sus consejos y compromiso me inspiraron a profundizar en mi investigación y a mantener la calidad y el rigor necesarios para alcanzar este resultado.

A mi director de carrera, cuyo liderazgo y apoyo han sido una fuente constante de motivación y confianza. Su compromiso con la excelencia académica ha dejado una marca imborrable en mi trayectoria.

Finalmente, a todas las personas que, de alguna manera, contribuyeron a que este logro fuera posible, extendiendo mi más sincero reconocimiento. Gracias por su apoyo, consejos y aliento incondicional que me acompañaron en cada paso de este camino.

Lista de cuadros

Cuadro 1: Comparación de los tiempos de cálculo.....	48
Cuadro 2: Comparación del error cuadrático medio entre métodos	64

Lista de figuras

Figura 1: Distribución de puntos de datos utilizados para el entrenamiento del modelo	47
Figura 2: Evolución de la pérdida durante el entrenamiento de la PINN	47
Figura 3: Comparación de las soluciones de la ecuación de calor para la PINN y el FDM	48
Figura 4: Distribución de los puntos de datos utilizados para el entrenamiento del modelo.....	65
Figura 5: Evolución de la pérdida durante el entrenamiento de la PINN	66
Figura 6: Solución de la ecuación de Navier-Stokes mediante la PINN (ψ , p , u , v) .	67
Figura 6: Evolución de la pérdida durante el entrenamiento de la PINN	68
Figura 6: Distribución del campo eléctrico predicho por la PINN para diferentes cargas mecánicas.	68

Resumen

pon aquí
redes neuronales
= neural networks

Este trabajo se enfoca en el modelado de dispositivos piezoeléctricos con forma de vigas en voladizo, utilizando Physics Informed Neural Networks (PINNs). Los materiales piezoeléctricos, especialmente el *Lead zirconate titanate* (PZT), son fundamentales en diversas aplicaciones tecnológicas gracias a su capacidad para convertir energía mecánica en eléctrica y viceversa. Sin embargo, los métodos tradicionales de modelado presentan limitaciones en precisión y eficiencia, especialmente cuando se enfrentan a condiciones iniciales y de frontera complejas.

Por ello, se propone desarrollar modelos más precisos y eficientes que puedan predecir el comportamiento de estos materiales bajo distintas condiciones. El objetivo principal es diseñar e implementar una PINN que modele el comportamiento de dispositivos piezoeléctricos en forma de vigas en voladizo, utilizando Python y Tensor Flow. *

Para esto se siguió con la siguiente metodología:

la ecuación de calor

Se recopiló información sobre las propiedades del PZT y sus condiciones operativas. Se implementó una PINN básica que, comenzando con la ~~temperatura~~, incorporó ecuaciones diferenciales parciales cada vez más complejas hasta ~~incluir la~~ la pizeoelectricidad directa. El modelo fue entrenado y validado comparando con datos experimentales y métodos numéricos tradicionales, y se optimizó su arquitectura y parámetros para mejorar precisión y generalización.

se aplicó a
que modelan

Los resultados demuestran que las PINNs pueden modelar con alta precisión el comportamiento de materiales piezoeléctricos, siendo más eficientes que los métodos numéricos tradicionales, además exactitud y coherencia física. La PINN desarrollada ~~mostró las~~ complejas interacciones entre tensiones mecánicas y campos eléctricos en el PZT, incluso bajo condiciones de frontera complicadas, representando un avance significativo en el modelado de estos materiales. Este enfoque permite desarrollar modelos más precisos y eficientes, facilitando el diseño y optimización de dispositivos piezoeléctricos en diversas aplicaciones industriales.

???

La integración de principios físicos en redes neuronales profundas no solo mejora la eficiencia de estos dispositivos, sino que también abre nuevas oportunidades para innovaciones tecnológicas.

la
modelización
de

* el lenguaje de programación Python y el marco de trabajo (framework) basado en el mismo Tensorflow.

Abstract *in the form of*

This work focuses on modeling piezoelectric devices ~~shaped as~~ cantilever beams using Physics-Informed Neural Networks (PINNs). Piezoelectric materials, especially Lead Zirconate Titanate (PZT), are fundamental in various technological applications due to their ability to convert mechanical energy into electrical energy and vice versa. However, traditional modeling methods have limitations in precision and efficiency, especially when dealing with complex initial and boundary conditions.

To address this, we propose developing more precise and efficient models that can predict the behavior of these materials under different conditions. The main objective is to design and implement a PINN that models the behavior of piezoelectric devices in the form of cantilever beams, using Python and TensorFlow.

The following methodology was adopted:

We collected information on the properties of PZT and its operating conditions. A basic PINN was implemented that, starting with temperature, incorporated increasingly complex partial differential equations up to direct piezoelectricity. The model was trained and validated by comparing it with experimental data and traditional numerical methods, and its architecture and parameters were optimized to improve precision and generalization.

The results demonstrate that PINNs can model the behavior of piezoelectric materials with high precision, being more efficient than traditional numerical methods, and exhibiting both accuracy and physical consistency. The developed PINN showcased the complex interactions between mechanical stresses and electric fields in PZT, even under complicated boundary conditions, representing a significant advancement in *advance* modeling these materials. This approach allows for the development of more precise and efficient models, facilitating the design and optimization of piezoelectric devices in various industrial applications.

Integrating physical principles into deep neural networks not only enhances the efficiency of these devices but also opens new opportunities for technological innovations.

*El inglés bien, solo cámbialo conforme
vayas revisando el castellano-*

I. Introducción

Los materiales piezoeléctricos, como el *Lead zirconate titanate* (PZT), son sumamente importantes para diversas aplicaciones en la ingeniería, gracias a su capacidad única para convertir energía mecánica en eléctrica y viceversa (Klister, 2024). Esta propiedad los hace esenciales en la fabricación de sensores, actuadores y dispositivos de conversión de energía utilizados en campos tan variados como la medicina, la electrónica y la industria aeroespacial. Sin embargo, modelar con precisión el comportamiento de estos materiales con distintas condiciones iniciales y de frontera de manera eficiente sigue siendo una tarea complicada (Uchino, 1997)..

Año !?

Los métodos tradicionales de modelado, basados en ecuaciones diferenciales parciales y técnicas numéricas como el método de elementos finitos, presentan limitaciones en la precisión y eficiencia (Napoles E., S.F). Estos métodos pueden requerir una gran cantidad de recursos computacionales y a menudo no logran capturar completamente las complejas interacciones entre las tensiones mecánicas y los campos eléctricos en materiales piezoeléctricos, especialmente en geometrías complejas o bajo condiciones de frontera complicadas (Akdogan, 2008).

En este contexto, las *Physics Informed Neural Networks* (PINNs) surgen como una alternativa bastante interesante para abordar estos desafíos (Chen et al., 2007). Las PINNs integran principios físicos directamente en el entrenamiento de las redes neuronales profundas, permitiendo que el modelo aprenda no solo de los datos, sino también de las leyes fundamentales que gobiernan el sistema. Esto ofrece la posibilidad de desarrollar modelos más precisos y eficientes que puedan predecir el comportamiento de los materiales piezoeléctricos bajo diversas condiciones.

Este estudio se enfoca en el diseño e implementación de una PINN para modelar dispositivos piezoeléctricos con forma de vigas en voladizo, utilizando Python y Tensor Flow como herramientas principales. Al incorporar las ecuaciones que describen la piezoelectricidad en la arquitectura de la red neuronal, se busca capturar de manera más fiel las complejas interacciones físicas presentes en el PZT. El objetivo es desarrollar un modelo capaz de predecir con exactitud el comportamiento eléctrico y mecánico de estos dispositivos, superando las limitaciones de los métodos tradicionales y facilitando el diseño y optimización de aplicaciones industriales.

Este estudio busca aportar al campo del modelado de materiales piezoeléctricos una metodología innovadora que combine los avances en inteligencia artificial y aprendizaje profundo con los principios fundamentales de la física. Al abordar los desafíos actuales en la predicción del comportamiento de estos materiales, se espera contribuir al desarrollo de dispositivos piezoeléctricos más eficientes, impulsando así nuevas oportunidades en tecnología e ingeniería.

④ ??

Hag algo
extraño con
la numeración.

II. Justificación

El estudio de los materiales piezoeléctricos, y en particular del PZT, reviste una importancia significativa debido a su amplio espectro de aplicaciones en diversas áreas de la tecnología (VETEC, 2022). Estos materiales son fundamentales en la fabricación de sensores, actuadores, y dispositivos de conversión de energía, utilizados en campos como la medicina, la electrónica, y la industria aeroespacial. Ser capaces de calcular su comportamiento en situaciones donde no se disponga de todos los datos necesarios es esencial para optimizar su uso y mejorar los métodos actuales, que muchas veces son tardíos y poco eficientes.

La capacidad de modelar y predecir el comportamiento de los materiales piezoeléctricos bajo diferentes condiciones iniciales permitirá avanzar en el diseño y la fabricación de dispositivos más eficientes y sofisticados (Zhou et al., 2023). Por ejemplo, en aplicaciones médicas, los sensores piezoeléctricos precisos pueden mejorar el monitoreo y diagnóstico de enfermedades, mientras que en la electrónica, pueden contribuir al desarrollo de dispositivos más pequeños y con mayor rendimiento (Akdogan, 2008).

El uso de inteligencia artificial y PINNs ofrece una oportunidad única para abordar estos desafíos de manera innovadora y eficaz. Al combinar los principios de la física con las capacidades de aprendizaje de las redes neuronales, podemos desarrollar modelos más precisos y adaptables que reflejen el comportamiento de los materiales piezoeléctricos en una variedad de condiciones (Karniadakis et al., 2021). Esto no sólo mejorará nuestra comprensión fundamental de estos materiales, sino que también abrirá nuevas oportunidades para su aplicación en tecnologías emergentes y soluciones innovadoras en diversas industrias. Además, la integración de estos avances tecnológicos promete impulsar un futuro en el que los dispositivos piezoeléctricos sean aún más integrales y avanzados en su funcionamiento y aplicaciones (Zhao et al., 2020)

no está
claro cual
medida de
rendimiento
se usa en
electrónica

III. Objetivos

General

minúscula

Diseñar e implementar una *Physics Informed Neural Network* para dispositivos Piezoeléctricos con forma de vigas en voladizo utilizando Python y Tensor Flow •

Específicos

1. Desarrollar un modelo de redes neuronales capaz de modelar el comportamiento de materiales piezoeléctricos bajo ciertas condiciones iniciales y de contorno.
2. Analizar el sistema de generación de voltaje de dispositivos piezoeléctricos y extrapolar los resultados de valores de voltaje para sistemas con escasez de datos.
3. Validar el modelo desarrollado mediante comparaciones con datos experimentales y pruebas adicionales en condiciones controladas.

IV. Marco teórico

?? { A continuación, se presentan los fundamentos de los materiales piezoeléctricos y su relevancia en la ingeniería moderna.

A. Materiales Piezoeléctricos

{ A continuación, se presentan los fundamentos de los materiales piezoeléctricos y su relevancia en la ingeniería moderna.

a. Definición y Principios Básicos

Reescribe, Repte mucho lo mismo. { El efecto piezoeléctrico se refiere a la capacidad de ciertos materiales sólidos para producir una carga eléctrica cuando se les aplica una tensión mecánica. Esta tensión altera la estructura microscópica del material, generando dipolos donde se acumula una diferencia de potencial (Kistler Group, 2024). Los materiales piezoeléctricos son aquellos que tienen la capacidad de generar una diferencia de potencial eléctrico cuando se les aplica una tensión mecánica, y viceversa. Este fenómeno, conocido como piezoelectricidad, fue descubierto por los hermanos Pierre y Jacques Curie en 1880 (J. Stoner, 2023). Desde entonces, estos materiales han sido objeto de extensas investigaciones debido a su capacidad única de ~~Inter~~ convertir energía mecánica y eléctrica, lo que los hace extremadamente útiles en una amplia gama de aplicaciones tecnológicas (Anton, 2014).

La piezoelectricidad se basa en la estructura cristalina de ciertos materiales, que carecen de un centro de simetría. Cuando se les aplica una fuerza mecánica, los centros de carga positiva y negativa en los cristales se desplazan, generando un campo eléctrico. De manera inversa, la aplicación de un campo eléctrico provoca una deformación mecánica en el material. Esta bidireccionalidad del efecto piezoeléctrico es fundamental para su uso en sensores y actuadores (B. Jiménez, 1995).

b. Propiedades del Lead Zirconate Titanate (PZT)

El *Lead Zirconate Titanate* (PZT) es uno de los materiales piezoeléctricos más estudiados y utilizados debido a sus excepcionales propiedades. El PZT es un material cerámico que se puede sintetizar para tener propiedades piezoeléctricas óptimas, como un alta constante piezoeléctrica y una gran estabilidad térmica (F. Jean y C. Courtois, 2021). Estas características lo hacen ideal para su uso en una variedad de dispositivos, incluyendo transductores, actuadores, y sistemas de generación de energía.

El PZT puede ser ajustado mediante la modificación de su composición química para obtener diferentes valores de constante dieléctrica, constante piezoeléctrica, y factor de acoplamiento, permitiendo su adaptación a diversas aplicaciones. (Zhou, H. Tang, y H. A Sodano, 2023) Además, su capacidad para mantener su rendimiento a altas temperaturas y bajo condiciones extremas lo posiciona como un material versátil y de gran importancia tecnológica.

B. Aplicaciones de los Materiales Piezoeléctricos

A continuación, se presentan las diversas aplicaciones industriales de los materiales piezoeléctricos y los desafíos asociados a su uso.

a. Usos Industriales

Los materiales piezoeléctricos encuentran aplicaciones en diversas industrias debido a su capacidad para convertir energía mecánica en energía eléctrica y viceversa. En la medicina, por ejemplo, los transductores ultrasónicos hechos de PZT son fundamentales en la imagenología médica, permitiendo la visualización interna del cuerpo humano sin necesidad de procedimientos invasivos. (repsol, S.F) En electrónica, los sensores piezoeléctricos son utilizados para detectar vibraciones, presiones, y otros cambios mecánicos, convirtiéndolos en señales eléctricas que pueden ser medidas y analizadas (kistler, S.F)

Arregla
citas

En la industria aeroespacial, los actuadores piezoeléctricos se utilizan en sistemas de control de vuelo y en dispositivos de supresión de vibraciones.

Además, tiene aplicaciones en sistemas de generación de energías, filtrado de frecuencia, los dispositivos piezoeléctricos pueden actuar como filtros, permitiendo solo el paso de frecuencias específicas (repsol, S.F).

} Esta oración
no se lee
bien.

b. Desafíos y Oportunidades

A pesar de las ventajas significativas que ofrecen los materiales piezoeléctricos, existen varios desafíos en su uso y optimización. Uno de los principales retos es la dificultad para predecir su comportamiento bajo diferentes condiciones (Gonzalez, C., 2014). Los métodos tradicionales de modelado, basados en aproximaciones y simplificaciones matemáticas, no logran capturar con precisión los fenómenos complejos que ocurren en estos materiales (Gonzalez, C., 2014). Esto puede resultar en un diseño no óptimo de dispositivos, afectando su rendimiento y eficiencia.

Un
segundo
reto es

Por lo mismo existe la necesidad de desarrollar modelos más precisos y eficientes utilizando enfoques innovadores que no se vean afectados por las limitaciones de los métodos tradicionales. Dando como resultado, las técnicas basadas en inteligencia artificial, en especial, las PhysioInformed Neural Networks (PINNs), se presentan como una solución muy atractiva.

} No sé si
esta
oración
se lee
bien.

C. Inteligencia Artificial y Aprendizaje Automático en el Modelado de Materiales

A continuación, se presentan los conceptos fundamentales de inteligencia artificial y cómo se aplican en el modelado de materiales piezoeléctricos.

a. Inteligencia Artificial (IA)

La inteligencia artificial es un campo de la informática que busca desarrollar sistemas capaces de realizar tareas que normalmente requieren inteligencia humana. En el contexto del modelado de materiales, la IA permite crear modelos que pueden aprender y adaptarse a partir de datos, mejorando la precisión y eficiencia en la predicción del comportamiento de los materiales bajo diversas condiciones.

b. Aprendizaje Automático (*Machine Learning*, ML)

El aprendizaje automático es una rama de la IA que se centra en el desarrollo de algoritmos que permiten a las computadoras aprender de los datos y hacer predicciones o tomar decisiones sin ser programadas explícitamente para ello. En el modelado de materiales piezoeléctricos, el ML permite capturar relaciones complejas entre variables, mejorando la capacidad de predecir el comportamiento del material.

c. Deep Learning, y Redes Neuronales Artificiales (ANN)

El aprendizaje profundo es una subárea del aprendizaje automático que utiliza redes neuronales artificiales ^{complejas} con múltiples capas para aprender representaciones de datos a altos niveles de abstracción. Las redes neuronales artificiales son estructuras computacionales inspiradas en el cerebro humano, compuestas por neuronas artificiales interconectadas que procesan información y aprenden patrones complejos.

D. Modelado de Materiales Piezoeléctricos

A continuación, se presentan los métodos tradicionales y avanzados para el modelado de materiales piezoeléctricos.

a. Modelos Tradicionales

El modelado del comportamiento de los materiales piezoeléctricos se ha basado en las ecuaciones que relacionan las tensiones mecánicas, las deformaciones, los campos eléctricos y las densidades de carga en el material. Estas ecuaciones,

derivadas de la teoría de la elasticidad y la electrostática, permiten predecir cómo un material piezoelectrico se verá afectado ~~por~~ las fuerzas externas y los campos eléctricos.

por?

Esta metodología se une con ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) que describen la dinámica del sistema bajo análisis. Sin embargo, la solución de estas ecuaciones para sistemas complejos, especialmente en tres dimensiones o bajo condiciones de frontera complicadas, puede ser muy difícil y requerir una cantidad de recursos computacionales muy significativa.

suele ser imposible

analíticamente.

Por lo tanto, se emplea herramientas computacionales para su resolución aproximada.

Citas??

b. Avances en Modelado con Inteligencia Artificial

La inteligencia artificial ha comenzado a transformar el campo del modelado de materiales, permitiendo la creación de modelos que pueden aprender directamente de datos experimentales y simular fenómenos físicos. Las Physic-Informed Neural Networks (PINNs) son una clase de redes neuronales que integran principios físicos, lo que las hace especialmente adecuadas para modelar sistemas de ecuaciones diferenciales parciales (Raissi., 2019).

No hace falta reponer el acronimo todo el tiempo.

Las PINNs usan la capacidad de las redes neuronales para aproximar funciones complejas. Esto se logra incorporando las EDPs directamente en la función de pérdida durante el entrenamiento de la red, lo que obliga a la red a aprender soluciones que sean físicamente coherentes.

E. Physic-Informed Neural Networks (PINNs)

A continuación, se presentan los conceptos y fundamentos de las PINNs y su aplicación en el modelado de materiales piezoelectricos

a. Fundamentos de PINNs

Las

~~Las Physic-Informed Neural Networks~~ (PINNs) son una herramienta en el modelado de fenómenos físicos complejos. Las PINNs combinan lo adaptable de las redes neuronales con ecuaciones diferenciales parciales. Este enfoque permite modelar sistemas físicos donde la recolección de datos puede ser difícil o costosa, y donde las soluciones numéricas tradicionales pueden ser poco eficientes.

Una PINN se entrena minimizando una función de pérdida que no solo incluye el error entre la predicción de la red y los datos observados, sino también el error en las ecuaciones diferenciales que describen el sistema físico. Esto se logra incorporando las EDPs directamente en la función de pérdida durante el entrenamiento de la red, lo que obliga a la red a aprender soluciones que sean físicamente coherentes.

o incluso sin ellos datos, apoyandose solo en las EDPs.

Cifalón!

b. Entradas y Salidas

En el contexto del modelado de materiales piezoeléctricos, las entradas de la PINN pueden ser variables como las coordenadas espaciales (x, y, z) y temporales (t) . Las salidas son las cantidades de interés, como el desplazamiento mecánico u , la temperatura T , el potencial eléctrico ϕ o las tensiones mecánicas σ .

c. Capas Ocultas

Las capas ocultas son las encargadas de aprender las representaciones intermedias de los datos. A través de múltiples capas y neuronas, la red puede capturar relaciones no lineales complejas presentes en los fenómenos piezoeléctricos.

d. Funciones de Activación

Las funciones de activación introducen no linealidad en la red neuronal. Funciones comunes incluyen la tangente hiperbólica (\tanh), ReLU y sigmoide. En las PINNs, la elección de la función de activación puede influir en la capacidad de la red para aproximar soluciones suaves de las EDPs.

e. Latin Hypercube Sampling

El *Latin Hypercube Sampling* (LHS) es una técnica de muestreo estadístico utilizada para generar muestras aleatorias de variables de entrada en espacios multidimensionales. Se basa en dividir el rango de cada variable en intervalos equiprobables y luego combinar aleatoriamente estos intervalos para formar un conjunto de muestras que cubren uniformemente el espacio de entrada (McKay, Beckman y Conover, 1979).

Algunas de sus características son:

- Cobertura uniforme del ^eespacio
- Eficiencia en ~~Altas~~ dimensiones
- Reducción de ~~la~~ ^ovarianza estadística

f. Función de Pérdida (Loss Function)

La función de pérdida en las PINNs es una combinación del error entre las predicciones de la red y los datos observados (L_{datos}) y el error residual de las ecuaciones diferenciales ($L_{física}$).

Insuficiente
detalle
(ID)

ID

No vea
aquí.
No se
sabe nada
del proceso
de aprendizaje.

ID

Matemáticamente se define de la siguiente manera

$$(Perdida = L_{datos} + \lambda L_{fisica}) \quad (1)$$

donde λ es un coeficiente que balancea la importancia entre los datos y las leyes físicas.

g. Optimización

El entrenamiento de la PINN implica ajustar los pesos y sesgos de la red para minimizar la función de pérdida. Se utilizan algoritmos de optimización como el descenso de gradiente estocástico (SGD) o Adam.

NO los has
definido.

h. Aplicaciones de PINNs en Materiales Piezoeléctricos

Al aplicar PINNs para modelar el PZT, es posible capturar de manera más precisa la interacción entre las tensiones mecánicas y los campos eléctricos, así como predecir el comportamiento del material bajo condiciones de frontera complejas o en situaciones donde los datos son limitados. Esto representa un avance significativo en la capacidad de diseñar y optimizar dispositivos piezoeléctricos.

F. Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDPs) en el Modelado de PZT

A continuación, se presentan las ecuaciones fundamentales utilizadas en el modelado del PZT y cómo se integran en las PINNs.

a. Introducción a las EDPs en Piezoelectricidad

Estas ecuaciones son expresiones matemáticas que relacionan funciones multivariantes y sus derivadas parciales, describiendo cómo cambian en el espacio y el tiempo. En el contexto de la piezoelectricidad, las EDPs son esenciales para modelar la relación entre la deformación mecánica del material y el campo eléctrico generado.

b. Resolución de EDPs mediante PINNs

La solución de EDPs en sistemas piezoeléctricos tradicionalmente requiere técnicas numéricas como el método de elementos finitos (FEM) o el

Los
datos
limitados
que son?

otra vez/
esta sección
carece de
ejemplos.

→ No mencionas PINNs
aquí

(FDM)

método de diferencias finitas. Sin embargo, estos métodos pueden ser computacionalmente costosos y difíciles de aplicar en sistemas con condiciones complejas.

Nota

c. Ecuaciones Utilizadas en el Modelado

A continuación, se presentan las ecuaciones parciales diferenciales que se utilizaron para el estudio de las PINNs.

a. Heat equation

(Ecuación de calor)

La ecuación de calor describe la distribución de temperatura en un material a lo largo del tiempo y ~~es esencial para considerar los efectos térmicos en el PZT~~. Está dada por [2] ??

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

donde:

define x, z

$k = k(x, z, T)$ Conductividad Térmica

$C_p = C_p(x, z, T)$ Calor específico

$\rho = \rho(x, z, T)$ Densidad del material

$T = T(x, z, t)$ Temperatura

t Tiempo

a. Navier Stokes equation

Las ecuaciones de Navier-Stokes son un conjunto fundamental de ecuaciones diferenciales parciales que describen el movimiento de fluidos viscosos. Estas ecuaciones representan la conservación de la cantidad de movimiento y se derivan de las leyes de Newton aplicadas a un medio

constituye un buen caso de prueba para la PINN

continuo. Para un fluido incompresible y newtoniano, las ecuaciones de Navier-Stokes se expresan como:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + \underbrace{(v * \nabla) * v}_{\text{es producto interior?}} = -\nabla p + \underbrace{\mu \nabla^2 v}_{(2) ??} + f \quad (3)$$

donde:

ρ	Densidad del fluido
v	Velocidad
t	Tiempo
p	p resión
μ	Viscosidad dinámica
∇	Operador nabra
f	F uerza

argumentos de las funciones

Estas ecuaciones son esenciales en la mecánica de fluidos y permiten modelar una amplia gama de fenómenos, desde el flujo del aire alrededor de un avión hasta el movimiento de líquidos en tuberías (White, 2006).

b. Indirect piezoelectric equation

La piezoelectricidad es una propiedad de ciertos materiales que les permite generar una carga eléctrica en respuesta a una tensión mecánica aplicada y, de manera inversa, experimentar una deformación mecánica cuando se les aplica un campo eléctrico. Este fenómeno se debe a la falta de simetría en la estructura cristalina de los materiales piezoeléctricos, lo que provoca una redistribución de las cargas eléctricas internas bajo deformación mecánica (Cady, 1964).

Este se describe mediante un conjunto de ecuaciones constitutivas que relacionan las tensiones mecánicas (σ), las deformaciones (ϵ), el campo eléctrico (E) y el desplazamiento eléctrico (D).

La ecuación? Los tensores?

Este párrafo tiene que estar en la intro

V. Metodología

Para lograr los objetivos propuestos, se siguió una metodología enfocada en el desarrollo y validación de modelos basados en Physics-Informed Neural Networks (PINNs) para resolver diferentes ecuaciones diferenciales parciales (EDPs). El proceso se dividió en las siguientes etapas:

A. Desarrollo del Modelo de Redes Neuronales

Para el desarrollo del modelo de predicción del comportamiento de materiales piezoeléctricos, se utilizarán técnicas de redes neuronales profundas. Específicamente, se emplea la biblioteca Tensor Flow en Python para diseñar y entrenar un modelo de Physics-Informed Neural Network (PINN). Este modelo será capaz de capturar las relaciones no lineales entre las variables de entrada y salida, así como de incorporar conocimientos físicos y matemáticos relevantes para el comportamiento ? piezoeléctrico.

El modelo PINN se compone de las siguientes partes principales:

a. **Arquitectura de la Red Neuronal**

Consiste en una red neuronal profunda con múltiples capas ocultas y neuronas por capa. La arquitectura fue adaptada para cada uno de los problemas, considerando la complejidad y las características específicas de las ecuaciones a resolver.

b. Funciones de Activación

Se emplearon funciones de activación adecuadas para facilitar el entrenamiento y mejorar la capacidad de la red para aproximar soluciones suaves de las EDPs

c. Función de Pérdida (Loss Function)

La función de pérdida combina el error residual de las ecuaciones diferenciales y el error en las condiciones de frontera, permitiendo que la red neuronal aprenda soluciones que satisfacen las leyes físicas y las condiciones impuestas.

B. Estudio de las PINNs y Ecuaciones Diferenciales Parciales mediante la PDE de Calor

EDP

Implementación inicial de una PINN utilizando la ecuación de calor como caso de estudio para comprender el comportamiento y las capacidades de las PINNs.

a. Arquitectura

Se utilizó una red neuronal con 9 capas ocultas y 20 neuronas por capa, empleando la función de activación tangente hiperbólica (tanh).

b. Entrada y Salida

Las entradas son las coordenadas espaciales (x,y) y la salida es la temperatura T en esos puntos.

→ y el tiempo, no?

C. Implementación de la PINN para las Ecuaciones de Navier-Stokes

Aumento de la complejidad del modelo con la creación de una PINN que resuelva las ecuaciones de Navier-Stokes, simulando un sistema físico más avanzado.

a. Arquitectura

Se implementó una red neuronal con 9 capas ocultas y 40 neuronas por capa, utilizando la función de activación Swish para mejorar la convergencia y manejo de no linealidades.

b. Entrada y Salida

Las entradas son las coordenadas espaciales (x,y) y las salidas son el potencial de corriente ψ y la presión p.

el estado de la

D. Creación de una PINN para la Piezoelectricidad Indirecta

Desarrollo de una PINN específicamente diseñada para modelar la piezoelectricidad indirecta, evaluando su precisión y eficiencia.

a. Arquitectura

Se diseñó una red neuronal con 12 capas ocultas y 50 neuronas por capa, empleando la función de activación Swish.

b. Entrada y Salida

La entrada es la coordenada espacial x, y , las salidas son el desplazamiento mecánico u y el potencial eléctrico ϕ .

E. Evolución del Modelo desde la Ecuación de Calor hasta la Piezoelectricidad Indirecta

El desarrollo del modelo siguió una estrategia incremental, comenzando con problemas más simples y avanzando hacia problemas más complejos.

a. Implementación de la PINN para la Ecuación de Calor:

Se inició con la ecuación de calor en dos dimensiones para establecer la metodología y familiarizarse con el uso de PINNs. Este problema permitió validar la efectividad de la PINN al compararla con soluciones obtenidas mediante métodos numéricos tradicionales, como el método de diferencias finitas.

b. Implementación de la PINN para las Ecuaciones de Navier-Stokes:

Una vez comprobada la PINN en el problema de la ecuación de calor, se incrementó la complejidad al abordar las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible en dos dimensiones. Este paso implicó manejar ecuaciones no lineales y acopladas, lo que requirió ajustes en la arquitectura de la red y en las técnicas de cálculo de derivadas.

c. Desarrollo de la PINN para la Piezoelectricidad Indirecta:

Finalmente, se implementó la PINN para resolver las ecuaciones de piezoelectricidad indirecta en una viga en voladizo de material PZT. Este modelo consideró el acoplamiento entre los campos mecánico y eléctrico, incorporando las ecuaciones constitutivas y las condiciones de frontera específicas del problema. La experiencia adquirida en los pasos anteriores fue fundamental para abordar este modelo más complejo.

Esta
sección
está muy
bien

F. Validación del Modelo

La validación de los modelos desarrollados se realizó mediante la comparación de los resultados obtenidos con soluciones analíticas o numéricas conocidas.

a. Ecuación de Calor:

Se compararon las soluciones obtenidas con la PINN con las soluciones generadas mediante el método de diferencias finitas (FDM). La comparación incluyó la evaluación de la distribución de temperatura en el dominio y el cálculo del error cuadrático medio (MSE) entre ambas soluciones.

b. Ecuaciones de Navier-Stokes:

Los resultados de la PINN se compararon con soluciones de referencia con resultados obtenidos mediante métodos numéricos tradicionales (FDM). Se evaluaron los campos de velocidad y presión, así como el comportamiento del flujo en el dominio considerado.

c. Piezoelectricidad Indirecta:

La validación del modelo se realizó comparando las predicciones de la PINN con soluciones numéricas reportadas en estudios previos sobre vigas piezoeléctricas. Se analizó la distribución del desplazamiento y el potencial eléctrico a lo largo de la viga, verificando la consistencia con el comportamiento físico esperado.

NO hay
Comparación
con FDM →

No hay
Comparación
con FDM

VI. Resultados

Los resultados obtenidos de las PINNs en el modelado de distintas ecuaciones diferenciales parciales.

A. PINN *heat equation*

En la Figura 1 se muestra la distribución de los puntos de datos utilizados para el entrenamiento del modelo, donde se presentan los puntos de fronteras y los puntos de colación utilizados en la construcción del modelo. Los puntos de colación se generaron utilizando el método *Latin Hypercube Sampling*, proporcionando una distribución uniforme que permite capturar de manera correcta la dinámica del problema en el dominio. En la Figura 2 se presenta la evolución de la pérdida a lo largo de las épocas del entrenamiento de la PINN.

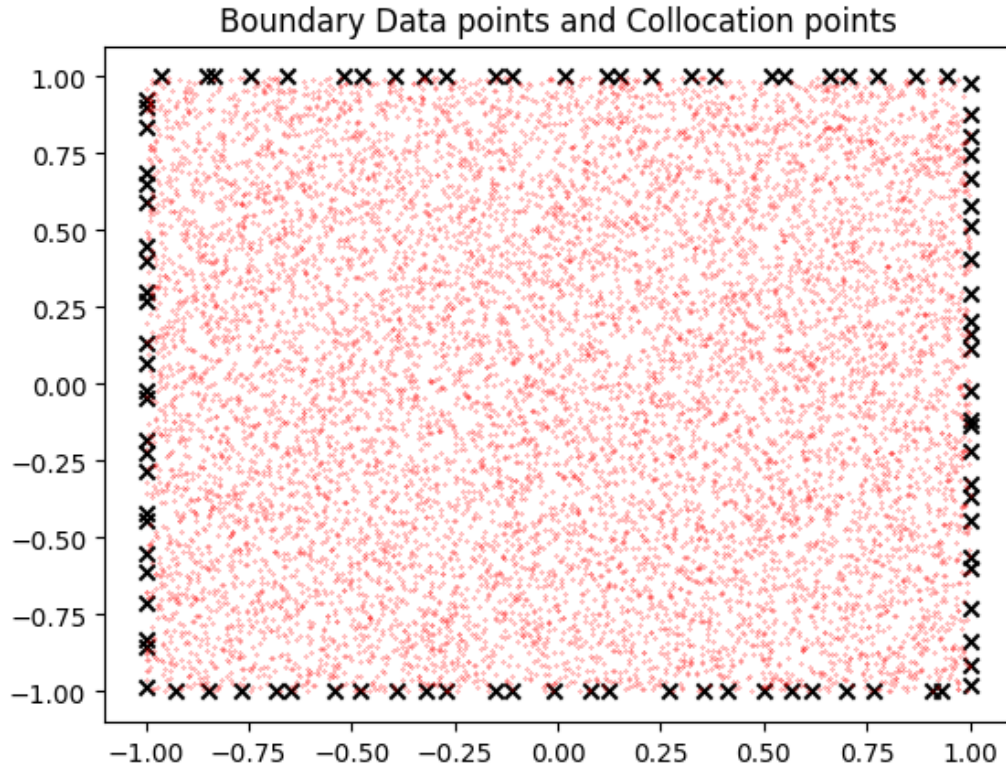


Figura 1: Distribución de puntos de datos utilizados para el entrenamiento del modelo

???

por qué es blanco?

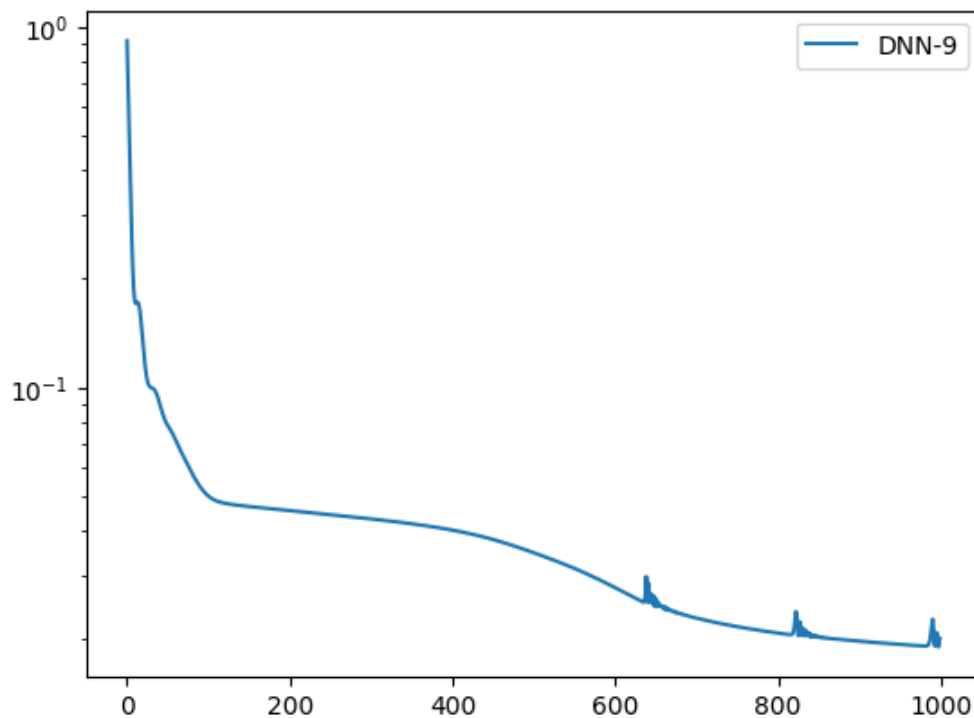


Figura 2: Evolución de la pérdida durante el entrenamiento de la PINN

En la Figura 3 se presentan los resultados de la solución de la ecuación de calor para ambos métodos. En la esquina superior izquierda, se muestra la solución obtenida mediante la PINN, y en la esquina superior derecha se muestra la solución obtenida con el método de Diferencias Finitas (FDM). Ambas soluciones presentan una distribución de temperatura similar; sin embargo, se observa que la solución de la PINN tiene una mayor suavidad, ~~reflejando más precisión~~. Los valores extremos, en los cuales las condiciones de frontera se imponen de forma explícita, son capturados de manera adecuada por ambas técnicas.

Explica los dibujos inferiores.

ya que
no depende de
una discretización.

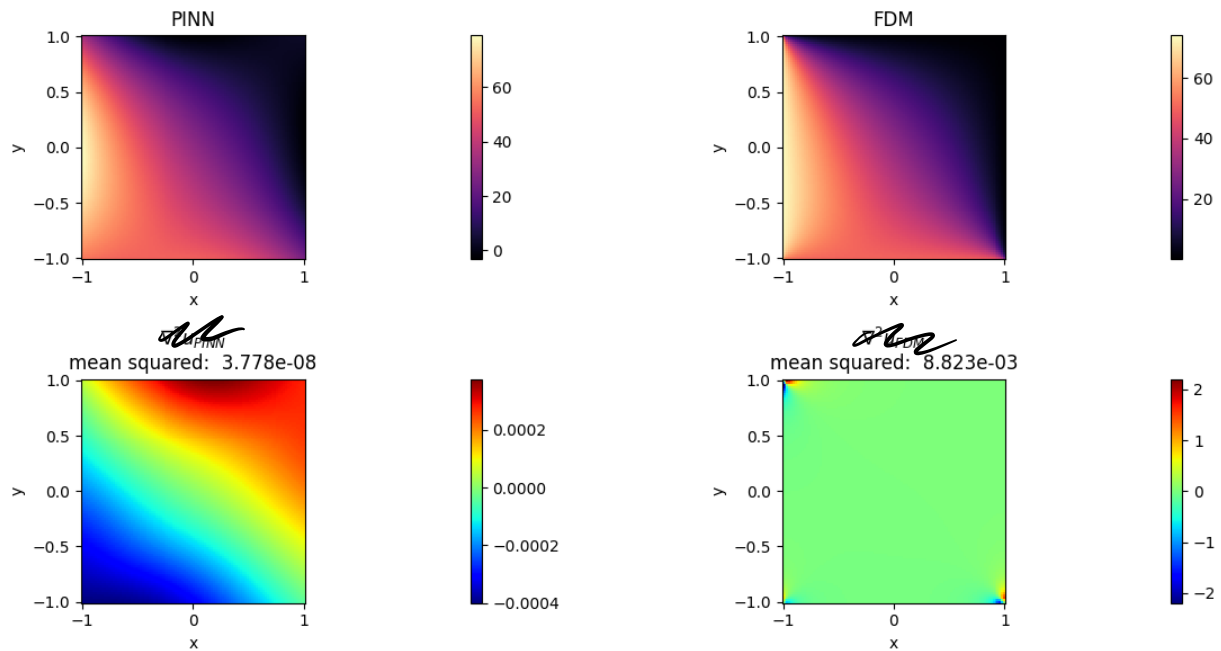


Figura 3: Comparación de las soluciones de la ecuación de calor para la PINN y el FDM

En cuanto a los tiempos de cálculo, se registraron 101.12 segundos para el entrenamiento completo del modelo PINN, mientras que la solución obtenida mediante FDM tomó 10.36 segundos. Estos resultados se presentan en la Tabla 1. Aunque el método de Diferencias Finitas fue más eficiente en términos de tiempo de cálculo, la precisión de la solución obtenida con la PINN fue considerablemente superior, destacándose en la capacidad de reducir la magnitud de los errores.

Cuadro 1: Comparación de los tiempos de cálculo

Método	Tiempo de Cálculo (segundos)
PINN	101.12
FDM	10.36

→ menciona que se puede aplicar la PINN a problemas con condiciones iniciales distintas.

???

for qué en blanco?

$$\nabla^2 u = \text{hessiano de } u$$

Para realizar una comparación más detallada, se presenta en la Tabla 2, el error cuadrático medio de los gradientes ($\nabla^2 u$) para la PINN y el FDM.

$$\hookrightarrow \|\nabla u_{PINN} - \nabla u_{FDM}\|^2 \text{ ? ?}$$

Cuadro 2: Comparación del error cuadrático medio entre métodos

Método	Error cuadrático medio ($\nabla^2 u$)
PINN	3.778×10^{-8}
FEM	8.823×10^{-3}

B. PINN ^Navier ^Stokes

Se presentan los resultados obtenidos del modelado de la ecuación de Navier-Stokes utilizando *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs). Estos resultados muestran cómo la PINN logra aproximar las soluciones del problema de manera coherente con las leyes de la física.

En la Figura 4 se muestra la distribución de los puntos de datos utilizados para el entrenamiento del modelo, donde se presentan los puntos de frontera y los puntos de colación utilizados en la construcción del modelo. Los puntos de colación se generaron utilizando el método *Latin Hypercube Sampling*, proporcionando una distribución uniforme que permite capturar adecuadamente la dinámica del problema en el dominio. En la Figura 5 se presenta la evolución de la pérdida a lo largo de las épocas del entrenamiento de la PINN.

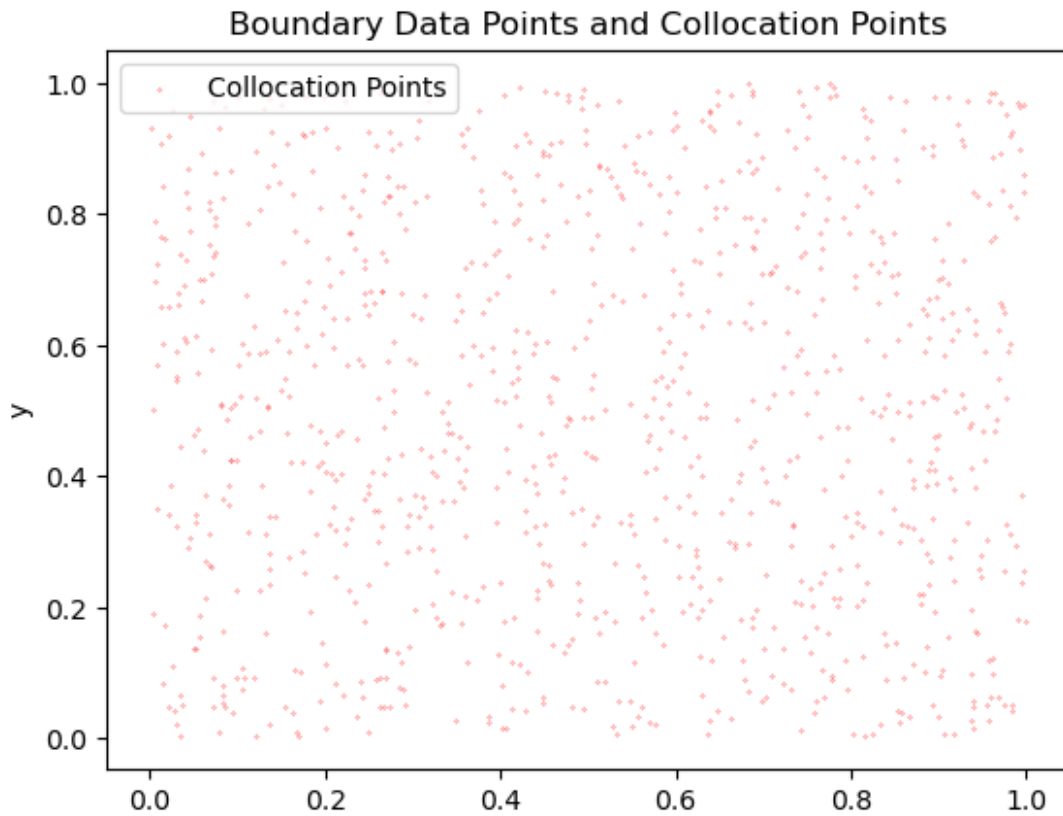


Figura 4: Distribución de los puntos de datos utilizados para el entrenamiento del modelo

6

En la Figura 7 se presentan los resultados de la solución de la ecuación de Navier-Stokes mediante la PINN. Los paneles muestran la función de corriente (ψ), la presión (p), y los componentes de velocidad (u , v). Los resultados evidencian que la PINN es capaz de aprender las características principales del flujo dentro de una cavidad, logrando una aproximación que respeta las condiciones físicas impuestas.

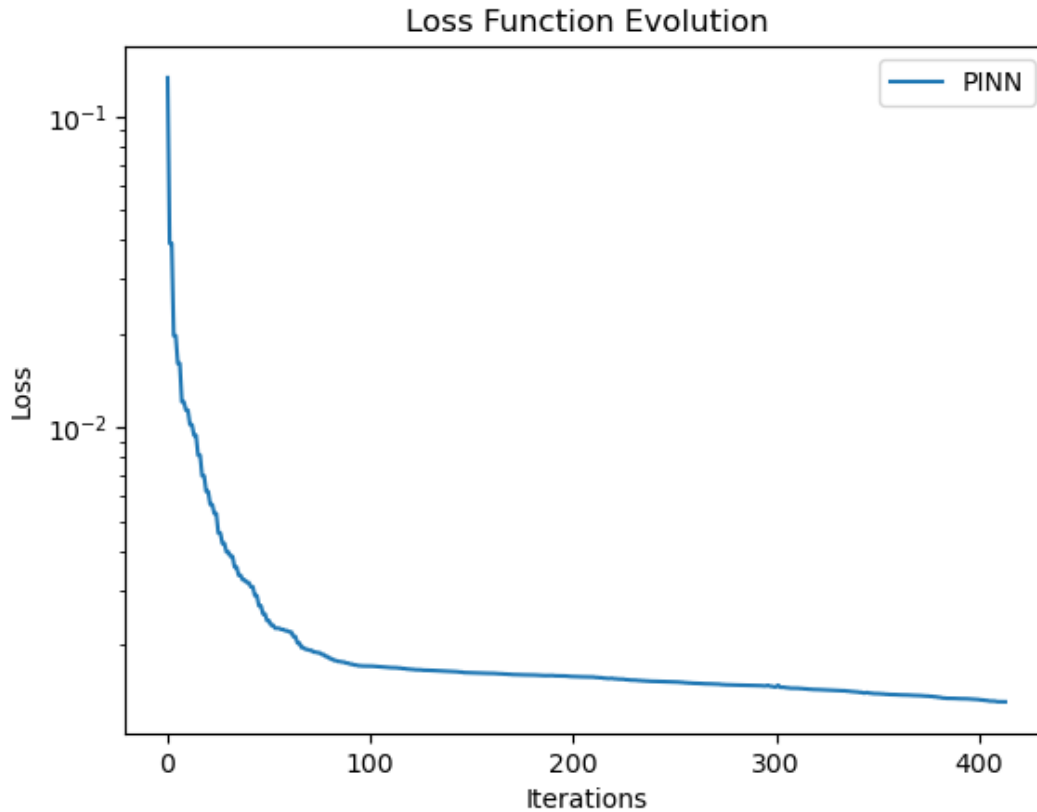


Figura 5: Evolución de la pérdida durante el entrenamiento de la PINN

En la Figura 6, se presenta la distribución de la función de corriente (ψ), la presión (p), la velocidad en el eje x (u), y la velocidad en el eje y (v). Cada uno de estos resultados muestra cómo la *PINN* es capaz de capturar los patrones esperados de circulación y distribución de presión dentro del dominio. La función de corriente evidencia el comportamiento de remolinos que se forma debido al confinamiento del fluido, mientras que los campos de velocidad muestran un flujo coherente con los datos teóricos para este tipo de problema.

Repetido

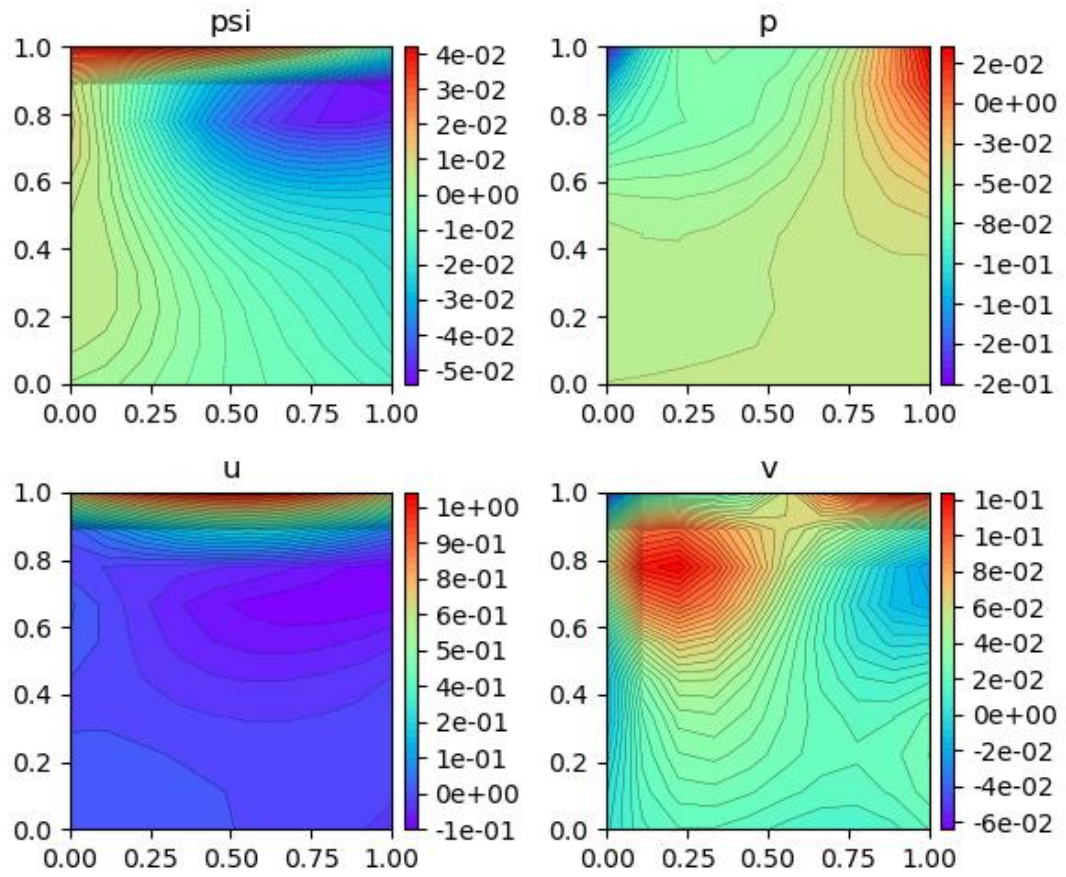


Figura 6: Solución de la ecuación de Navier-Stokes mediante la PINN (psi, p, u, v)

C. PINN *piezoelectric indirect*

En la Figura 7 se presenta la evolución de la pérdida a lo largo de las épocas del entrenamiento de la PINN. Se puede observar cómo la pérdida disminuye de manera significativa durante las primeras 1000 épocas.

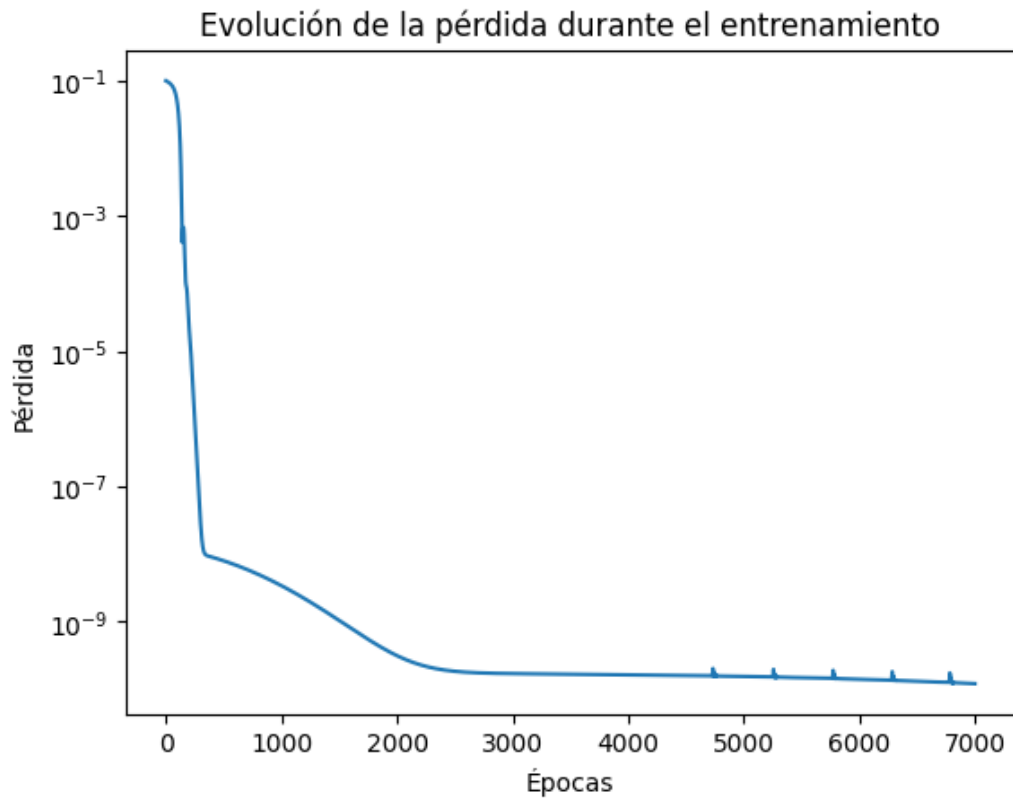


Figura 6: Evolución de la pérdida durante el entrenamiento de la PINN

En la Figura 8 se presenta la distribución del campo eléctrico generado por la PINN para distintas cargas mecánicas aplicadas a la viga. Las simulaciones muestran un comportamiento lógico a lo esperado, donde el campo eléctrico se concentra en las regiones de mayor deformación, lo cual coincide con los principios físicos de la piezoelectricidad.

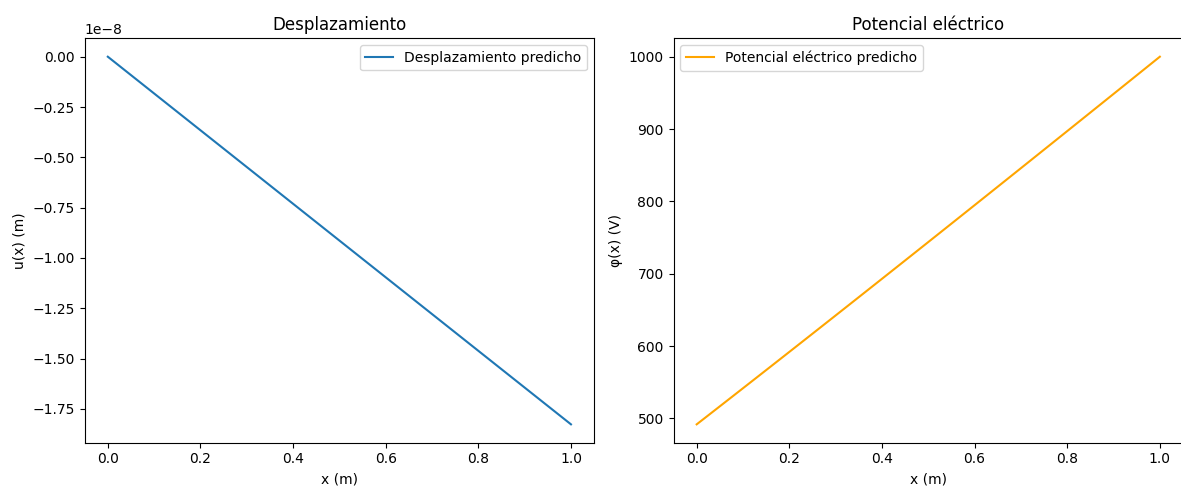


Figura 6: Distribución del campo eléctrico predicho por la PINN para diferentes cargas mecánicas.

VII. Discusión

A continuación, se presentan la discusión sobre resultados del estudio de las PINNs.

A. Evolución del Desarrollo del Modelo

Inicialmente, se decidió implementar una PINN para resolver la ecuación de calor debido a su simplicidad y la posibilidad de validar los resultados contra soluciones conocidas, como el método de Diferencias Finitas (FDM). En esta etapa, se utilizó la función de activación \tanh , que mostró ser eficaz. La red neuronal se estructuró con 5 capas ocultas y 20 neuronas por capa, lo cual permitió una representación adecuada del comportamiento de la temperatura. La pérdida disminuyó significativamente desde un valor inicial lo que indica un ajuste adecuado al sistema.

La comparación con el FDM mostró la capacidad de las PINNs para generar soluciones coherentes, especialmente en dominios con condiciones de frontera complejas. El error cuadrático medio de la PINN fue considerablemente menor en comparación con el obtenido por el FDM (ver Tabla 2). Aunque el FDM fue más eficiente en términos de tiempo de cálculo (10.36 segundos en comparación a los 101.12 segundos del entrenamiento de la PINN), la precisión de la PINN y su capacidad para representar de forma más precisa las dinámicas físicas del sistema la posicionan como una herramienta más adecuada para problemas donde la exactitud es fundamental.

En la Figura 3 se compara la solución de la ecuación de calor obtenida mediante la PINN y el FDM. La PINN muestra una mayor exactitud en la solución, lo cual resulta esencial para garantizar la consistencia física del modelo, particularmente en regiones donde las derivadas de la solución son críticas para el comportamiento del sistema.

y el hecho de reusar la red para problemas distintos sin tener que re-entrenar

B. Implementación de las Ecuaciones de Navier-Stokes

Luego de validar el modelo con la ecuación de calor, se aumentó la complejidad del sistema mediante la implementación de la ecuación de Navier-Stokes. Este modelo es representativo de sistemas físicos que implican dinámica

77.2

de fluidos e interacción con fuerzas externas. Para realizar esto, se mantuvo la función de activación tanh, pero se incrementó la complejidad de la arquitectura de la red a 9 capas ocultas con 40 neuronas por capa. Estos cambios buscaron mejorar la capacidad del modelo para capturar la dinámica de los vórtices y los fenómenos de presión y velocidad dentro del fluido.

La PINN fue capaz de capturar los patrones esperados del flujo, mostrando una buena aproximación en las regiones del dominio donde los cambios eran suaves. Sin embargo, en zonas con discontinuidades o cambios abruptos, como las esquinas del dominio, el modelo mostró algunas limitaciones, probablemente debido a la naturaleza de la red.

La comparación con métodos numéricos tradicionales mostró que la PINN presenta ventajas importantes en términos de la representación suave de los campos de velocidad y presión. Estos aspectos son fundamentales para problemas en los que la precisión de las derivadas tiene un papel fundamental, como es el caso de la dinámica de fluidos. Además, la capacidad de representar fenómenos físicos complejos de una manera consistente refuerza las ventajas de utilizar las PINNs en este tipo de problemas.

C. Modelado de la Piezoelectricidad Indirecta

El siguiente paso fue desarrollar una PINN para modelar el comportamiento de la piezoelectricidad indirecta en materiales PZT con forma de vigas en voladizo. En este punto, se realizaron modificaciones adicionales a la arquitectura de la red, incrementando el número de capas ocultas a 12, con 50 neuronas por capa. Además, se experimentó con diferentes funciones de activación, como ReLU sin embargo tanh continuó mostrando un rendimiento superior en términos de convergencia de la pérdida. La Figura 7 muestra la evolución de la pérdida, la cual disminuyó de manera considerable, especialmente durante las primeras 1000 épocas.

Una de las principales dificultades encontradas fue la alta variabilidad en la función de pérdida, lo cual afectaba la estabilidad del entrenamiento. Para solucionar este problema, se incorporó un balance adaptativo que ajustaba dinámicamente el peso de cada término de la pérdida, asegurando que la red no priorizara excesivamente un tipo de condición sobre otro. Esto permitió alcanzar una convergencia más estable y un modelo más equilibrado.

En la Figura 8 se presenta la distribución del campo eléctrico generado por la PINN bajo diferentes cargas mecánicas. Aunque los resultados aún no alcanzan el nivel de precisión esperado, muestran un patrón similar al esperado, lo que sugiere que la PINN ha capturado los principios fundamentales de la piezoelectricidad, estableciendo una arquitectura adecuada para seguir experimentando con distintas funciones de activación, balanceo de pesos y otras técnicas para llegar al resultado esperado.

VIII. Conclusiones

- a) Este estudio, logró cumplir con el objetivo principal de desarrollar una *Physics Informed Neural Network* (PINN) para modelar el comportamiento de la piezoelectricidad en materiales piezoeléctricos con forma de vigas en voladizo. A lo largo del proceso se probaron distintas configuraciones de redes neuronales y funciones de activación para determinar cuál de ellas se adecuaba mejor al problema.
- b) La función de activación que mostró mejores resultados en términos de convergencia y estabilidad fue tanh. A pesar de que se experimentó con funciones de activación alternativas como ReLU, tanh demostró ser la más adecuada para capturar las relaciones no lineales inherentes al comportamiento del material piezoeléctrico, principalmente debido a su capacidad para proporcionar suavidad en las derivadas, lo cual es fundamental en el estudio de fenómenos físicos.
- c) Se cumplió el diseñar y entrenar una red neuronal que fue capaz de predecir el comportamiento de PINNs. Aunque, en el caso de piezoelectricidad, el modelo aún presenta algunas limitaciones en precisión, se logró construir una base sólida que muestra la validez del enfoque de las PINNs para este tipo de problemas. Las técnicas implementadas para reducir la variabilidad en la pérdida, como el balance adaptativo y la regularización, han sido claves para mejorar la estabilidad del modelo.
- d) Además, se comprobó que las PINNs son una herramienta poderosa para el estudio de fenómenos físicos multivariantes complejos, especialmente cuando las condiciones de frontera son difíciles de definir o varían considerablemente. La capacidad de las PINNs para incorporar directamente las ecuaciones diferenciales en su proceso de aprendizaje las hace una opción superior frente a métodos tradicionales como el método de elementos finitos (FDM), particularmente cuando se busca eficiencia y exactitud.

} Estas técnicas podrían discutirse en la metodología

IX. Recomendaciones

A partir de los resultados obtenidos y las conclusiones de este trabajo, se proponen las siguientes recomendaciones para futuros trabajos y mejoras en el modelado de dispositivos piezoeléctricos utilizando Physics-Informed Neural Networks (PINNs):

a. Ajuste de Hiperparámetros:

Realizar una optimización más exhaustiva de los hiperparámetros del modelo, incluyendo el número de capas ocultas, número de neuronas por capa, y funciones de activación. El uso de algoritmos genéticos podría ayudar a encontrar configuraciones óptimas.

b. Funciones de Activación Adaptativas

Investigar el uso de funciones de activación adaptativas, como la Adaptive Piecewise Linear Unit (APLU) o la Adaptive Activation Function (AAF), que permiten que la red aprenda la función de activación más adecuada durante el entrenamiento.

c. Balanceo Dinámico de la Función de Pérdida:

Implementar técnicas de balanceo dinámico que ajusten automáticamente los pesos de los términos en la función de pérdida, para que la red aprenda de manera equilibrada las condiciones de frontera y las ecuaciones diferenciales.

d. Uso de Algoritmos de Optimización Avanzados

Explorar optimizadores más complejos como L-BFGS, AdamW o Ranger, que pueden ofrecer ventajas en la convergencia y estabilidad del entrenamiento.

e. **Funciones de Peso Adaptativas**

Investigar el uso de funciones de peso adaptativas en la función de pérdida que permitan focalizar el aprendizaje en áreas del dominio donde el error es mayor o donde ocurren fenómenos físicos críticos.

X. Bibliografía

Estas
citas
no sirven un
formato
válido

MathWorks. (s/f). Deflection of Piezoelectric Actuator - MATLAB & Simulink. Recuperado de <https://www.mathworks.com/help/pde/ug/deflection-of-a-piezoelectric-actuator.html>

Lululxvi. (s/f). About me. Recuperado de <https://lululxvi.github.io/>

Lugroup. (s/f). Home. Recuperado de <https://lugroup.yale.edu/>

DeepXDE. (s/f). DeepXDE — DeepXDE 1.11.1.dev6+g44f9324 documentation. Recuperado de <https://deepxde.readthedocs.io/en/latest/>

Steve Brunton. (2019, 29 de abril). Physics Informed Machine Learning: High Level Overview of AI and ML in Science and Engineering [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=JoFW2uSd3Uo&ab_channel=SteveBrunton

Global Science Press. (s/f). On the Convergence of Physics Informed Neural Networks for Linear Second-Order Elliptic and Parabolic Type PDEs. Recuperado de https://global-sci.org/intro/article_detail/cicp/18404.html

NVIDIA. (s/f). Darcy Flow with Physics-Informed Fourier Neural Operator. Recuperado de https://docs.nvidia.com/deeplearning/modulus/modulus-sym/user_guide/neural_operators/darcy_pino.html

Herramientas de Análisis Dinámico y Diseño (s/f). Cantilever Beam Deflection & Stress Calculations. Recuperado de <https://lampz.tugraz.at/hadley/memm/mechanics/cbeam.php#:~:text=For%20a%20cantilever%20beam%20that,0atx=Lx>

De Barcelona Departament de Química Inorgànica I Orgànica, U., False, Lourdes, M. I. V. M., & True. (2016, 17 noviembre). Materiales piezoeléctricos derivados del (Bi_{0,5}Na_{0,5})TiO₃-BaTiO₃ : preparación y estudio de las propiedades funcionales. <https://www.tesisenred.net/handle/10803/400829#page=1>

Uso de materiales piezoeléctricos en ingeniería de precisión y en cosecha de energía. (2022). VETEC Revista Académica de Investigación, Docencia y Extensión de las Ciencias Veterinarias, 3.

Kistler Group, «Efecto piezoeléctrico», Kistler, 2024. <https://www.kistler.com/ES/es/efecto-piezoelectrico/C00000136>(accedido 15 de junio de 2024).

J. Stoner, «Materiales piezoeléctricos: la fuente de energía desconocida más común», Securities.io, 2 de febrero de 2023. <https://www.securities.io/es/Los-materiales-piezoel%C3%A9ctricos-son-la-fuente-de-energ%C3%ADa-desconocida-m%C3%A1s-com%C3%BAn/>

B. Jimenez, «Materiales piezoeléctricos: formas de presentación, ventajas y desventajas en las aplicaciones», BOLETÍN DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE Cerámica y Vidrio, vol. 34, pp. 272-276, 1995, [En línea]. Disponible en: <https://boletines.secv.es/upload/199534272.pdf>

Cady, W.G. (1964). *Piezoelectricity: An Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystals*. Dover Publications.

Ikeda, T. (1990). *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford University Press.

McKay, M. D., Beckman, R. J., & Conover, W. J. (1979). "A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code." *Technometrics*, 21(2), 239-245.

T. Charlo González, M. Pardo, y R. Surga, «SIMULACIÓN BIDIMENSIONAL DE LA ECUACIÓN DE CALOR», *Revista Interdisciplinar de Estudios En Ciencias Básicas E Ingenierías*, feb. 2014.

Anton, S. R., & Sodano, H. A. (2007). A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003–2006). *Smart Materials and Structures*, 16(3), R1.

Anton, S. R., Erturk, A., & Inman, D. J. (2014). Advances in energy harvesting using piezoelectric materials: state of the art and challenges. *Applied Mechanics Reviews*, 66(4), 040803.

Chen, W. H., Yang, J., & Lee, C. K. (2007). Piezoelectric energy harvesting using a clamped circular plate: Experimental study. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 18(4), 307-316.

Akdogan, E. K. (Eds.). (2008). *Piezoelectric and Acoustic Materials for Transducer Applications*. Springer Science & Business Media.

Uchino, K. (1997). *Piezoelectric Actuators and Ultrasonic Motors*. Springer Science & Business Media.

Zhao, X., Meng, Z., Li, Z., & Chen, Z. (2020). Physics-informed neural networks for solving multiscale equations in mechanics. *Computers & Mathematics with Applications*, 80(4), 889-903.

Zhou, H., Tang, Y., & Sodano, H. A. (2023). Piezoelectric materials for tailored mechanical energy conversion: A review. *Nano Energy*, 104, 107889

E. Napoles, *UNA INTRODUCCIONAL ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS: APLICACIONES Y EJEMPLOS.*

↖ fecha de publicación y editorial

X. Anexos

Codigo fuente heat equation: <https://github.com/angelhigueros/pinns-with-nn/blob/main/heat-equation.ipynb>

Codigo fuente navier stokes: <https://github.com/angelhigueros/pinns-with-nn/blob/main/navier-stokes.ipynb>

Codigo fuente piezoelectric indirect <https://github.com/angelhigueros/pinns-with-nn/blob/main/piezoelectric-indirect.ipynb>