Trabalho 1 - Otimização Não Linear

Angélica Alves Viana

Setembro 2019

1. Prove matematicamente as seguintes afirmações:

   Obs: Para todos os itens abaixo foram consideradas as funções em $\mathbb{R}$

   a) Se g é convexa, então $exp(g(x))$ é convexa.

   R: *Se g é convexa significa dizer que $g''(x) \geq 0$. Considerando essa condição, iremos provar que $exp(g(x))$ é convexa, ou seja, $exp''(g(x)) \geq 0$ também.*
   Primeiramente, calcularemos $exp'(g(x))$ usando a regra da cadeia

$$exp'(g(x)) = exp(g(x)).g'(x) \tag{1}$$

   Agora, calcularemos $exp''(g(x))$ usando a regra do produto. Assim,

$$exp''(g(x)) = [exp(g(x)).g'(x)]' \tag{2}$$

$$= exp(g(x)).g'(x).g'(x) + exp(g(x)).g''(x) \tag{3}$$

$$= exp(g(x)).g'(x)^2 + exp(g(x)).g''(x) \tag{4}$$

   Como a função exponencial é positiva em todo o seu domínio, $g'(x)^2$ é um valor não negativo e $g''(x) \geq 0$ pela suposição da convexidade de g, então $exp''(g(x)) \geq 0$, ou seja, $exp(g(x))$ é convexa.

   b) Se g é côncava e positiva, então $log(g(x))$ é côncava.

   R: *Se g é côncava significa dizer que $g''(x) \leq 0$ e se é positiva, $g(x) > 0$. para provar que $log(g(x))$ é côncava, provaremos que $log''(g(x)) \leq 0$. Primeiramente, calcularemos $log'(g(x))$ utilizando a regra da cadeia*

$$log'(g(x)) = \frac{1}{g(x)}.g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \tag{5}$$

   Agora, calcularemos $log''(g(x))$ utilizando a regra do quociente.

$$log''(g(x)) = \frac{g''(x).g(x) - g'(x).g'(x)}{g(x)^2} \tag{6}$$

$$= \frac{g''(x).g(x) - g'(x)^2}{g(x)^2} \tag{7}$$

Como $g''(x) \leq 0$ e $g(x) > 0$ então $g''(x).g(x) \leq 0$. Sabemos que $g'(x)^2$ e $g(x)^2$ são sempre valores não negativos, o resultado do quociente apresentado na equação (7) nos permite inferir que $log''(g(x)) \leq 0$. Portanto, $log(g(x))$ é côncava.

c) Se g é côncava e positiva, então $\frac{1}{g(x)}$ é convexa.

***R:** Se g é côncava, então $g''(x) \leq 0$ e se é positiva, então $g(x) > 0$. Provaremos que $\frac{1}{g(x)}$ é convexa mostrando que $f''(x) \geq 0$. Em que $f(x) = \frac{1}{g(x)}$.*

Primeiramente, calcularemos $f'(x)$ utilizando a regra da cadeia.

$$f'(x) = \left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -g(x)^{-2}.g'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \tag{8}$$

Calculando $f''(x)$ através da regra do quociente, tem-se

$$f''(x) = \left[-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right]' \tag{9}$$

$$= -\left(\frac{g''(x).g(x)^2 - g'(x).2.g(x).g'(x)}{g(x)^4}\right) \tag{10}$$

$$= \left(\frac{2.g(x).g'(x)^2 - g''(x).g(x)^2}{g(x)^4}\right) \tag{11}$$

Como $g'(x)^2$, $g(x)^2$ e $g(x)^4$ são sempre valores não negativos e por suposição do enunciado $g(x) > 0$ e $g''(x) \leq 0$, teremos como resultado do quociente da equação (11) um valor não negativo, ou seja, $f''(x) \geq 0$. Portanto, $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ é convexa.

d) Se g é convexa e não negativa e $p \geq 1$, então $g(x)^p$ é convexa.

***R:** Se g é convexa, então $g''(x) \geq 0$ e se é não negativa, então $g(x) \geq 0$. Seja $f(x) = g(x)^p$. Primeiramente iremos calcular $f'(x)$, que utilizando a regra da cadeia resulta em*

$$f'(x) = (g(x)^p)' = p.g(x)^{p-1}.g'(x) \tag{12}$$

Agora, calculando-se a derivada segunda pela regra do produto

$$f''(x) = (g(x)^p)'' = p.[g(x)^{p-1}.g'(x)]' \tag{13}$$

$$= p.[(p-1).g(x)^{p-2}.g'(x).g'(x) + g(x)^{p-1}.g''(x)] \tag{14}$$

Há dois casos possíveis a se considerar. O primeiro se $p = 1$ e o segundo se $p > 1$. Se $p = 1$, o primeiro termo da soma é zerado devido ao termo $(p - 1)$ e o resultado de $f''(x) = g''(x)$, ou seja, $f''(x) \geq 0$, portanto para $p = 1$, $g(x)^p$ é convexa. Já para $p > 1$ a equação (14) sempre resultará em um valor não negativo também, ou seja, $g(x)^p$ é convexa sob as condições estabelecidas no enunciado.

e) Se g é convexa, então $-log(-g(x))$ é convexa em $\{x|g(x) < 0\}$

R: *Se g é convexa, então $g''(x) \geq 0$. Considerando que $g(x) < 0$, provaremos que $-log(-g(x))$ é convexa através da demonstração de que $f''(x) \geq 0$, onde $f(x) = -log(-g(x))$.*

Sabendo que pela propriedade de logaritmos $-log(-g(x)) = log(-g(x)^{-1})$. Iremos calcular inicialmente $log'(-g(x)^{-1})$ utilizando a regra da cadeia como nos itens anteriores.

$$log'(-g(x)^{-1}) = \frac{1}{-g(x)^{-1}}.g(x)^{-2}.g'(x) \tag{15}$$

$$= -\left(\frac{g(x).g'(x)}{g(x)^2}\right) = -\frac{g'(x)}{g(x)} \tag{16}$$

Calculando-se a derivada segunda de $log(-g(x)^{-1})$ utilizado a regra do quociente, tem-se

$$log''(-g(x)^{-1}) = -\left[\frac{g''(x).g(x) - g'(x).g'(x)}{g(x)^2}\right] \tag{17}$$

$$= \frac{g'(x)^2 - g''(x).g(x)}{g(x)^2} \tag{18}$$

Pelas suposições do enunciado, temos que $g''(x).g(x) \leq 0$, que com o sinal negativo da fórmula resulta em um valor não negativo que somado a $g'(x)^2$ e dividido por $g(x)^2$, que são valores não negativos, dá um valor não negativo. Ou seja, $log''(-g(x)^{-1}) \geq 0$, portanto $log(-g(x)^{-1})$ é convexa.

2. Prove matematicamente que

   a) $detX$ é log-côncava em S^n_{++}

   R:

   $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é convexa se e somente se a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = f(x + tv), \ \ \mathbf{dom}\, g = \{t | x + tv \in \mathbf{dom}\, f\} \tag{19}$$

   É convexa (em t) para algum $x \in \mathbf{dom}\, f$, $v \in \mathbb{R}^n$. Podemos checar a convexidade de uma função através da checagem da convexidade de funções de uma variável.

   Uma função f é log-côncava, se $log(f)$ é côncava e $f(x) > 0$.

   Utilizaremos esse fato juntamente com a definição de log-convexidade para provar o enunciado desse item. Primeiramente, definimos: $g(t) = log\, det(\mathbf{X} + t\mathbf{V})$, tal que $\mathbf{X} + t\mathbf{V}$ é uma matriz definida positiva. Se $\mathbf{X}$ é definida positiva, existe $\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}$ tal que $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}$. Temos então

$$g(t) = log\, det(\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}} + t\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}) \tag{20}$$

$$= log\, det(\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}(I + t\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}}V\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}})\mathbf{X}^{\frac{1}{2}}). \tag{21}$$

   Utilizando a propriedade de determinates, $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$, segue que

$$g(t) = log(det(\mathbf{X})det(I + t\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}}V\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}})) \tag{22}$$

$$= log\, det(\mathbf{X}) + log\, det(I + t\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}}V\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}}) \tag{23}$$

   Observe que $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}+t\mathbf{V}$ são definidas positivas, então $\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}}$ e $I+t\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}}V\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}}$ também são. Assuma que os autovalores de $\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}}V\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}}$ são λ_1, λ_2, ..., λ_d, então

$$log\, det(I + t\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}}V\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}}) = log\prod_{i=1}^{d}(1 + t\lambda_i) = \sum_{i=1}^{d} log(1 + t\lambda_i) \tag{24}$$

   Combinando este resultado com (23) tem-se

$$g(t) = log\, det(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{d} log(1 + t\lambda_i). \tag{25}$$

   Calculando-se a derivada de primeira ordem de $g(t)$, obtem-se

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\lambda_i}{1 + t\lambda_i} \tag{26}$$

Note que a derivada de segunda ordem de $-g(t)$ é

$$-g''(t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{{\lambda_i}^2}{(1+t\lambda_i)^2} \geq 0. \tag{27}$$

Assim, $-g(t)$ é convexa, portanto -f($\mathbf{X}$) também é convexa. Logo, f($\mathbf{X}$) é côncava.

b)$\frac{detX}{trX}$ é log-côncava em S^n_{++}

R: Utilizaremos novamente a definição apresentada em (19) para solucionar esse item. Como $f(\mathbf{X}) = \frac{det\,\mathbf{X}}{tr\,\mathbf{X}}$ é definida positiva, basta provar que $log\,f(\mathbf{X})$ é côncava para provar que f é log-côncava. Pela propriedade de logarítimos $log\ \frac{f}{z}\ =\ log\ f\ -\ log\ z.$ Diante disso, provaremos que $logdet\mathbf{X} - logtr\mathbf{X}$ é côncava. Primeiramente, definiremos $h(t) = g(t) - s(t)$. Em que $g(t)$ corresponde a função (20) do item anterior. E $s(t)$ é a função apresentada abaixo.

$$s(t) = log\,tr(X + t\mathbf{V}) \tag{28}$$

Novamente, como $\mathbf{X}$ é definida positiva, Dessa forma,

$$s(t) = log\,tr(\mathbf{X}(I + t\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}}V\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}})) \tag{29}$$

Utilizaremos a decomposição de autovalores $\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}}V\mathbf{X}^{-\frac{1}{2}} = Q \wedge Q^T$. Assim,

$$s(t) = log\,tr(\mathbf{X}.\mathbf{Q}(\mathbf{I} + t\wedge)\mathbf{Q}^T) \tag{30}$$

$$s(t) = log\,tr(\mathbf{Q}^T\mathbf{X}\mathbf{Q}(\mathbf{I} + t\wedge)) \tag{31}$$

$$s(t) = log\ \sum_{i=1}^{d}(\mathbf{Q}^T\mathbf{X}\mathbf{Q})_{ii}(1 + t\lambda_i) \tag{32}$$

Calculando-se a derivada primeira de $s(t)$ tem-se

$$s'(t) = \frac{\sum_{i=1}^{d}(\mathbf{Q}^T\mathbf{X}\mathbf{Q})_{ii}\lambda_i}{\sum_{i=1}^{d}(\mathbf{Q}^T\mathbf{X}\mathbf{Q})_{ii}(1 + t\lambda_i)} \tag{33}$$

E a derivada segunda de $s(t)$ é

$$s''(t) = -\frac{\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{d} (\mathbf{Q}^T \mathbf{X} \mathbf{Q})_{ii} \lambda_i\right]^2}{\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{d} (\mathbf{Q}^T \mathbf{X} \mathbf{Q})_{ii} (1 + t\lambda_i)\right]^2} \tag{34}$$

Observando as equações (27) e (33) podemos concluir que

$$-g''(t) \geq -s''(t) \geq 0 \tag{35}$$

Ou seja,

$$g''(t) \leq s''(t) \leq 0 \tag{36}$$

A partir disso podemos concluir que

$$h''(t) = g''(t) - s''(t) \leq 0 \tag{37}$$

Portanto, a função $h(t)$ é côncava, ou seja, $f(\mathbf{X}) = \frac{detX}{trX}$ é log-côncava.

3. Resolva o exemplo 3.43, pág 107.

Função de rendimento. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e denota o valor nominal ou alvo de um conjunto de parâmetros de um produto fabricado. A variação no processo de fabricação faz com que os parâmetros do produto, quando fabricados, tenham o valor $x+w$, em que $w \in \mathbb{R}^n$ é um vetor aleatório que representa a variação de fabricação, e geralmente é assumido como tendo média zero. O rendimento do processo de fabricação, como uma função dos valores nominais dos parâmetros, é dado por

$$Y(x) = prob(x + w \in S), \tag{38}$$

Em que S $\subseteq$ R denota o conjunto de valores de parâmetros aceitáveis para o produto, isto é, as especificações do produto. Se erro de fabricação é log-côncavo (por exemplo, Gaussiano) e o conjunto de especificações do produto é convexo, então a função de rendimento é log-côncava.

Para provar isso, note que a função

$$y(u) = \begin{cases} 1, \; se\, u \in S \\ 0, \; se\, u \notin S \end{cases}$$

é log-côncava, pois $log''y(u) \leq 0$, para todo $u \in \mathbf{dom}\, y$ e $y(u) \geq 0$. Note que o 0 entra na desigualdade, pois conforme pode ser visto na definição da seção 3.5.1 do livro *Convex Optimization* nesse caso diremos que y

é log-côncava se a função do valor extendido de $log\, y$ é côncava. Pelo resultado de integração abaixo é possível concluir que

$$\int y(x+w)p(w)d(w) = prob(x+w \in S) \tag{39}$$

é log-côncava. Em que p representa a densidade de probabilidade log-côncava do erro de fabricação w.

Isso implica que a região de rendimento α, definida como o conjunto de parâmetros nominais para os quais o rendimento excede α, é convexa. Por exemplo, a região de rendimento de 95%.

$$\{x|Y(x) \geq 0.95\} = \{x|log\, Y(x) \geq log\, 0.95\}$$

é convexa, desde que seja um conjunto supernível da função côncava $logY$. Esta definição é dada na seção 3.1.6 do livro *Complex Optimization* e é descrita da seguinte forma:

- Se f é convexa, então seu conjunto α-supernível, dado por $\{x \in \mathbf{dom}\, f | f(x) \geq \alpha\}$, é um conjunto convexo.