МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

ОТЧЕТ ПО ЗАДАНИЮ №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определенных интегралов.»

Вариант 4 / 4 / 1

Выполнила:
студентка 102 группы
Кыштымова А. Ю.

Преподаватель:
Кулагин А. В.

Москва,
2021

Содержание

Постановка задачи

В данной работе требовалось реализовать вычисление площади плоской фигуры, ограниченной тремя кривыми, определенными численными методами так, чтобы итоговая точность была равна 0.001. Точки пересечения кривых — вершины фигуры — по заданию должны были искаться комбинированным методом (методом хорд и касательных), а площадь под графиком функции на определенном отрезке должна была искаться с помощью метода прямоугольников. При этом отрезки, на которых ищутся точки пересечения кривых (то есть корни уравнения $f(x) - g(x) = 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — функции данных кривых), должны были быть вычислены аналитически, как и точности eps1 и eps2, с которыми вычисляются точки пересечения кривых и интегралы от функций соответственно.

Математическое обоснование

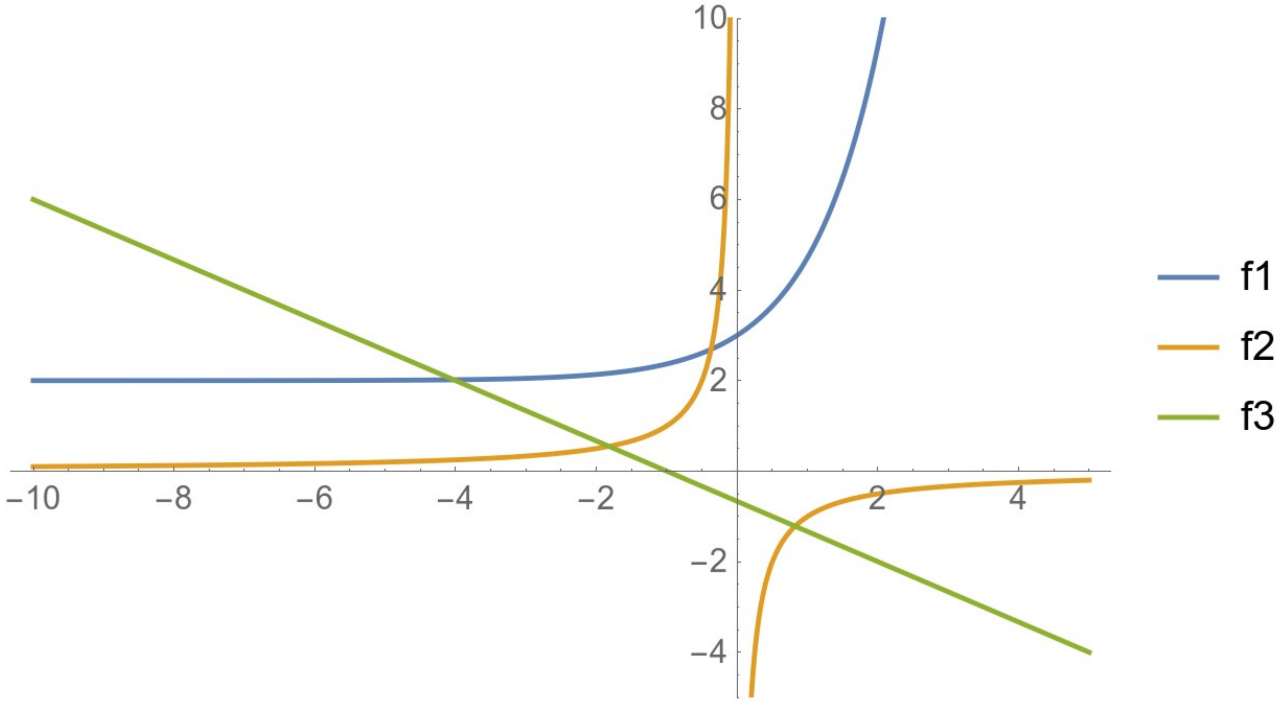

Рисунок 1: Графики заданных уравнений

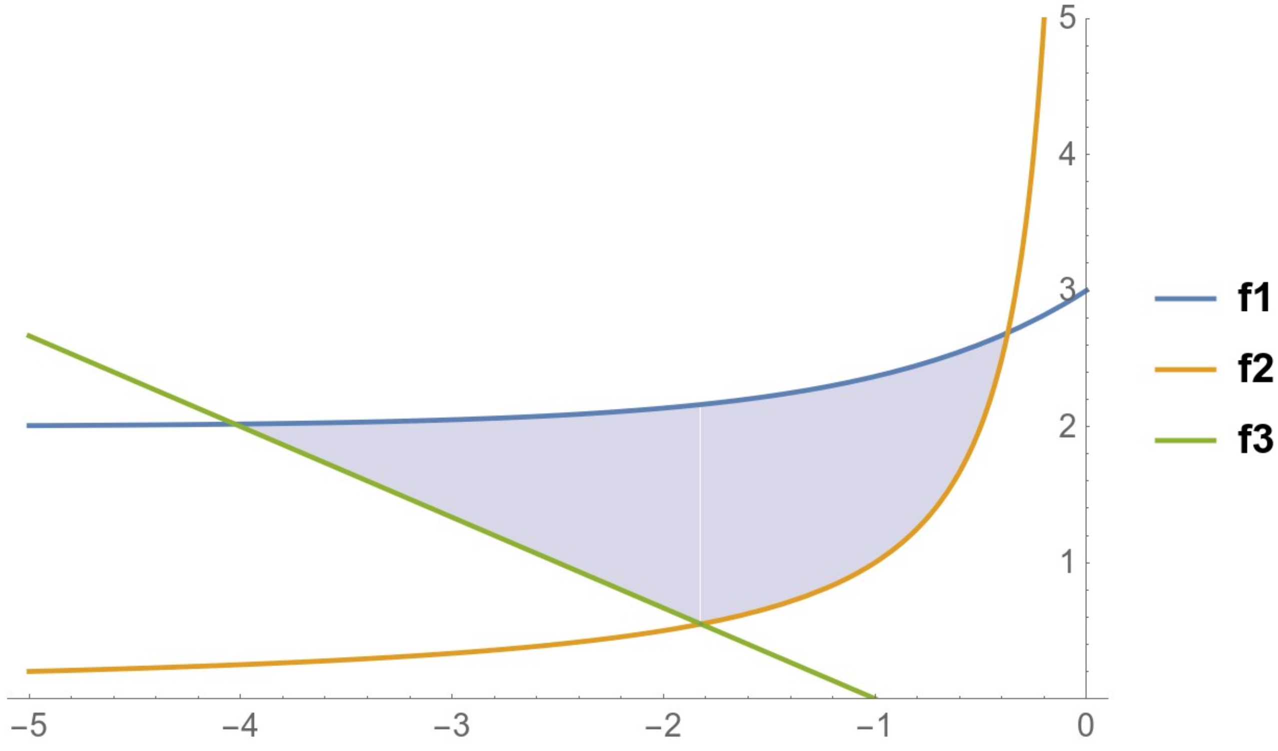

Рисунок 2: Плоская фигура, ограниченная заданными кривыми

Математическое обоснование границ отрезков, на которых ищутся точки пересечения кривых:

Очевидно, что на $(-\infty;0)$ функции непрерывны. Нужные нам точки пересечения кривых находятся там же. Все следующие рассуждения будут относиться именно к этому промежутку (и могут быть неверны при x>=0, но возможные корни в этой области нам не нужны).

Производные функций находятся элементарно и равны $f1'(x)=e^x$, $f2'(x)=\frac{1}{x^2}$, $f3'(x)=\frac{-2}{3}$.

Для начала заметим, что точки пересечения f2 и f3 можно легко найти, домножим уравнение $\frac{-1}{x}+\frac{2(x+1)}{3}=0$ на x и решив квадратное уравнение. Его корнями являются числа $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\approx 0{,}8229$ и $\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\approx -1.8229$. По графику видно, что нам нужен только отрицательный корень, а границы отрезка для поиска этого корня можно определить как -2 и -1.5. То, что функция y(x) = f2(x)-f3(x) принимает в этих точках разные знаки, можно легко проверить подстановкой.

Из того, что f3 строго убывает, а f1 строго возрастает, можем выяснить, что пересекаются они только раз. Грубую оценку границ отрезка, на котором следует искать корень, можно выполнить следующим образом: $e^{-6}+2<1+2<\frac{10}{3}$ (x=-6), $e^{-3}+2>2>\frac{4}{3}$ (x=-3). Таким образом, в точке x=-6 f1 < f3, в точке x=-3 f1 > f3.

Из графика очевидно, что f1 и f2 пересекаются только раз. Концами отрезка для поиска корня функции f1(x)-f2(x) можно выбрать -0.5 и -0.2, так как $e^{-0.5}+2>2$, $e^{-0.2}+2<5$.

Из-за особенностей выбранного метода нахождения корня функции, который зависит от знака выражения y'(x)y''(x) (где y(x) — функция, у которой мы ищем корень y(x) = 0), удобнее, чтобы для всех трех функций, у которых мы ищем корень, этот знак был одинаковым. Поэтому уравнения для нахождения точек пересечения кривых принимают следующий вид:

Для кривых 1 и 2: y(x) = f1(x)-f2(x) (y'(x) < 0, y''(x) < 0)

Для кривых 1 и 3: y(x) = f3(x)-f1(x) (y'(x) < 0, y''(x) < 0)

Для кривых 2 и 3: y(x) = f2(x)-f3(x) (y'(x) > 0, y''(x) > 0)

Выбор eps1 и eps2:

Для начала обозначим, как определяется точность.

При нахождении корня считается, что корень найден с точностью eps1, если от найденного корня до настоящего расстояние меньше eps1. Найдя такие a и b, что знаки функции (у которой мы ищем корень) в них разные, мы понимаем, что настоящий корень лежит где-то между ними, и точка (a+b)/2 отдалена от него не более чем на eps1, если a-b <= 2*eps1.

При нахождении интеграла мы используем правило Рунге. Пусть I(n) — интеграл, полученный при разбиении отрезка на n частей, I(2n) — интеграл, полученный при разбиении отрезка на 2n частей. Если мы считаем интеграл методом средних прямоугольников, то правило Рунге гласит, что погрешность величины I(2n) равна |I(2n) — I(n)|/3. Значит, достаточно посчитать интеграл два раза и сравнить |I(2n)-I(n)| с 3*eps2. Если получившаяся величина больше или равна 3*eps2, то вычислить |I(4n)-I(2n)|, и так далее.

Итоговая точность должна быть равна 0.001, то есть полученный результат должен отличаться от настоящего не более чем на эту величину. Рассмотрим, как eps1 и eps2 влияют на конечный результат:

Предположим, что мы идеально подобрали точки пересечения кривых. Так как итоговый результат вычисляется как I1-I2-I3 (где I1, I2, I3 — интегралы от функций f1, f2, f3 на соответствующих отрезках, чьи концы определяются как точки пересечения этой кривой с другими), то в таком случае полученный результат будет отличаться от настоящего не более чем на 3*eps2.

Пусть root12 = x12 + eps1, root13 = x13 + eps1, root23 = x23 + eps1, где + eps1 означает, что вычисленный root может отличаться от настоящего корня x не более чем на eps1. Интегралы, вычисленные с идеальной точностью, будут отличаться от настоящих интегралов не более чем на eps1*(|f1(x)-f2(x)| + |f1(x)-f3(x)| + |f2(x)-f3(x)|). Чтобы не вычислять значения этих модулей после нахождения корня, для удобства можно поставить дополнительное ограничение на точность нахождения корня — не только «горизонтальное» (насколько отличаются a и b, концы отрезка, на котором находится настоящий корень), но и «вертикальное» (насколько отличаются y(a) и y(b)). Пусть эта величина равна k*eps1, тогда лишний «кусочек» площади под функцией (после того, как мы вычли интегралы друг из друга) будет иметь площадь не более eps1*(k*eps1). Всего у нас есть три точки пересечения, значит, три таких «кусочка». Получаем:

$3*k*eps1^2 + 3*eps2 < 0.001$

Взяв, например, eps1 = 0.0001, eps2 = 0.0001, мы можем взять k = 10 (судя по графику, величина |y(a)-y(b)| < 10*|a-b| в точках, близких к корню, для любой из трех y(x)).

Тогда $3*(10*10^{-8}+10^{-4}) < 10^{-3}$, ч.т.д. Подходящая точность найдена и доказана.

Результаты экспериментов

Кривые	x	y
1 и 2	-0.3718	2.6895
2 и 3	-1.8229	0.5486
1 и 3	-4.0267	2.0178

Таблица 1: Координаты точек пересечения

Функция	От	До	Значение интеграла
$f1=e^x+2$	-4.0267	-0.3718	7.9815
$f2=\frac{-1}{x}$	-1.8229	-0.3718	1.5898
$f3=-2\frac{(x+1)}{3}$	-4.0267	-1.8229	2.8279

Таблица 2: Значения интегралов функций

Результатом (площадью фигуры, ограниченной заданными кривыми) является I1-I2-I3 = 3.5638, что приблизительно равно 3.564.

Структура программы и спецификация функций

```
#define NUMBER_OF_KEYS 4
const char* keys[NUMBER_OF_KEYS] = {"-help",
                                    "-abscissas",
                                    "-iterations",
                                    "-test"};
int key_value[NUMBER_OF_KEYS] = {0};
```

Количество ключей, массив с хранящимися в нем ключами, массив для отметки того, какие ключи активированы. Последний сделан глобальной переменной, чтобы была возможность обращаться к нему из функции root, не передавая значения ключей как параметры функции.

Значения ключей:

`-help`

Выводит все находящиеся в массиве keys ключи, завершает работу программы.

`-abscissas`

При вызове функции root выводит значение найденного корня.

`-iterations`

При вызове функции root выводит число итераций цикла, понадобившееся для нахождения корня.

`-test`

Функция для тестирования, после которой идет нужное число аргументов: номер функции (один номер для integral, два номера для root), левый конец отрезка, правый конец отрезка, точность. Например, `-test root 1 2 -1 -0.1 0.001` вычисляет значение функции `root(f1, f2, t1, t2, -1, -0.1, 0.001)` и выводит его. Число итераций также можно получить, указав `-iterations` до `-test`. Аналогично, `-test integral 3 –1.5 1.5 0.001` вычислит и выведет значение `integral(f3, -1.5, 1.5, 0.001)`. После выполнения вышенаписанного программа завершает свою работу.

```
extern double f1 (double x)
extern double f2 (double x)
extern double f3 (double x)
```

Функции, написанные в ассемблерном файле. Возвращают значения f1(x), f2(x) и f3(x) соответственно.

```
extern double t1 (double x)
extern double t2 (double x)
extern double t3 (double x)
```

Функции, написанные в ассемблерном файле. Возвращают значения f1'(x), f2'(x), f3'(x) соответственно.

```
double root(double f(double), double g(double),
         double tan_f(double), double tan_g(double),
         double a, double b, double eps1)
```

Возвращает найденную методом хорд и касательных асбциссу точки пересечения кривых f(x) и g(x) (корень функции y(x) = f(x)-g(x)) на отрезке от a до b с точностью eps1 (найденный корень отличается от настоящего не более чем на eps). С ключом -abscissas выводит значение найденного корня, с ключом -iterations выводит число итераций, понадобившихся для того, чтобы найти ответ с заданной точностью.

```
double integral(double f(double), double a, double b,
double eps2)
```

Возвращает интеграл от функции f(x) на отрезке от a до b с точностью eps2 (найденное значение отличается от настоящего значения интеграла на заданном отрезке не более чем на eps2).

```
int main(int argc, char* argv[])
```

1. Обработка поступивших в командной строке ключей. Если присутствует ключ `-help`, вывод всех существующих ключей и завершение работыю Если присутствует ключ `-test`, запуск соответствующего тестирования, вывод полученного значения и завершение работы.
2. Поиск точек пересечения кривых. При наличии ключей `-abscissas` и `-iterations` выводит соответствующие значения.
3. Вычисление интегралов заданных функций на нужных промежутках.
4. Вычисление и вывод результата — искомой площади фигуры, ограниченной заданными кривыми.

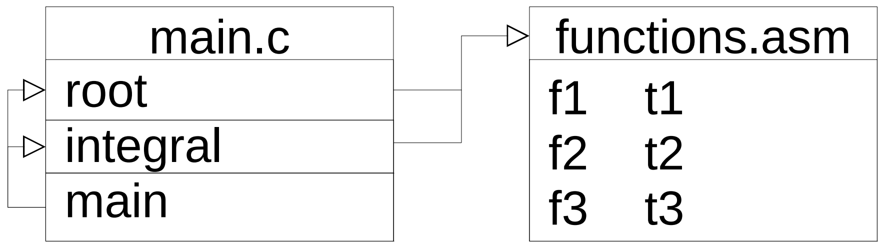

Рисунок 3: Связи между компонентами программы

Сборка программы (Make-файл)

Текст Make-файла:

```
all: main.o functions.o
  gcc -m32 -o program main.o functions.o -lm

main.o: main.c
  gcc -m32 -std=c99 -c -o main.o main.c

functions.o: functions.asm
  nasm -f elf32 -o functions.o functions.asm

clean:
  rm -rf *.o
```

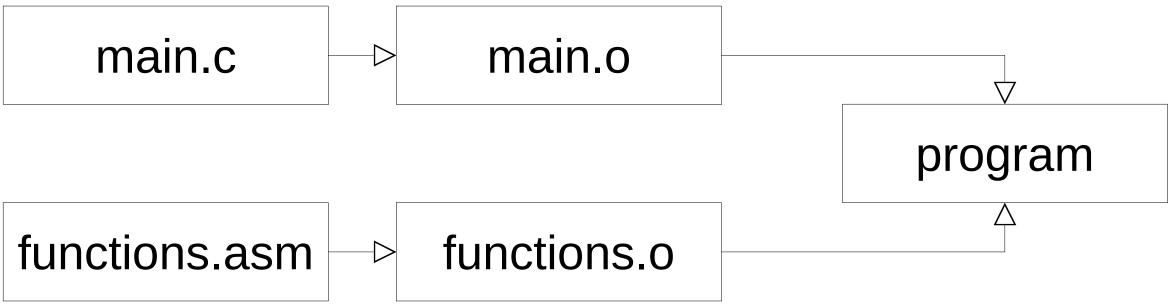

Рисунок 4: Зависимости между модулями программы

Отладка программы, тестирование функций

Функция 1	Функция 2	a	b	eps	Настоящий корень	Найденный корень
$f2=\frac{-1}{x}$	$f3=-2\frac{(x+1)}{3}$	-10	-1	0.00001	$\frac{-1-\sqrt{7}}{2}\approx-1{,}822876$	-1.82288
$f3=-2\frac{(x+1)}{3}$	$f2=\frac{-1}{x}$	0.5	2	0.000001	$\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\approx 0{,}822876$	0.822876
$f2=\frac{-1}{x}$	$f1=e^x+2$	-1	-0.1	0.01	Примерно 0.37 (можно проверить вручную)	-0.37

Таблица 3: Тестирование функции root

Функция	Интеграл	a	b	eps	Настоящее значение	Найденное значение
$f1=e^x+2$	e^x+2x+C	0	1	0.000001	$e+1\approx 3{,}718282$	3.718282
$f2=\frac{-1}{x}$	$-\ln\lvert x\rvert+C$	5	10	0.000001	$\ln\frac{1}{2}\approx-0{,}693147$	-0.693147
$f3=-2\frac{(x+1)}{3}$	$-x\frac{(x+2)}{3}+C$	-1.2	3.6	0.000001	-7,04	-7.040000

Таблица 4: тестирование функции integral

Программа на Си и на Ассемблере

Исходные тексты программы имеются в архиве, который приложен к этому отчету.

Анализ допущенных ошибок

Ошибок не замечено.

Список цитируемой литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 - Москва: Наука, 1985

[2] Березин И. С., Жидков Н.П. Методы вычислений, 3 изд., Т. 1 - Москва, 1966