МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

ОТЧЕТ ПО ЗАДАНИЮ №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определенных интегралов.»

Вариант 7 / 2 / 1

Выполнила:
студентка 102 группы
Козинцева А. А.

Преподаватель:
Кулагин А. В.

Москва,
2022

Содержание

Постановка задачи	2
Математическое обоснование	3
Результаты экспериментов	6
Структура программы и спецификация функций	7
Сборка программы (Make-файл)	9
Отладка программы, тестирование функций	10
Программа на Си и на Ассемблере	11
Анализ допущенных ошибок	12
Список цитируемой литературы	13

Постановка задачи

Требуется реализовать вычисление площади плоской фигуры, ограниченной тремя кривыми, определенными численными методами так, чтобы итоговая точность была равна 0.001. Точки пересечения кривых — вершины фигуры — по заданию должны искаться методом хорд, а площадь под графиком функции на определенном отрезке должна искаться с помощью метода прямоугольников. При этом отрезки, на которых ищутся точки пересечения кривых (то есть корни уравнения $f(x) - g(x) = 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — функции данных кривых), должны быть вычислены аналитически, как и точности eps1 и eps2, с которыми вычисляются точки пересечения кривых и интегралы от функций соответственно.

Математическое обоснование

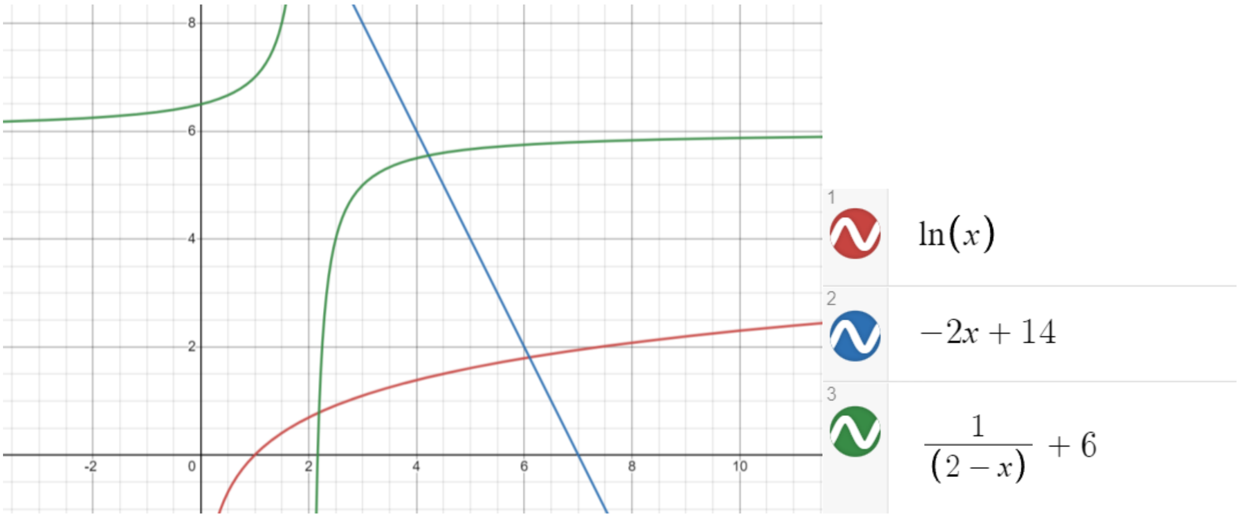

Рисунок 1: Графики заданных уравнений

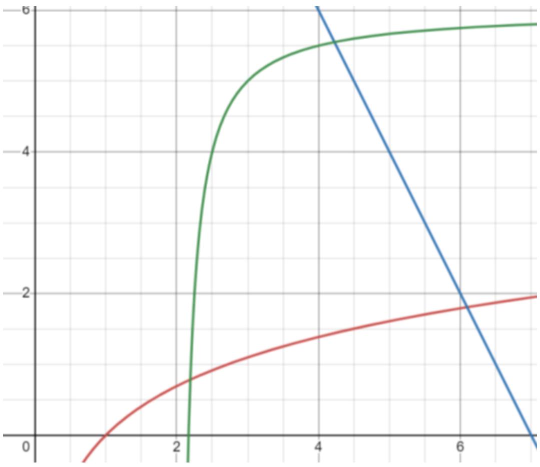

Рисунок 2: Плоская фигура, ограниченная заданными кривыми

Математическое обоснование границ отрезков, на которых ищутся точки пересечения кривых:

Для нахождения точек пересечения кривых необходимо найти корень уравнения f(x) - g(x) = 0. Будем использовать метод хорд нахождения корня уравнения, для корректной работы которого необходимо, чтобы функция была непрерывна во всех точках отрезка, значения функции на концах отрезка должны быть разных знаков, а производная функции на всем отрезке не должна менять знак.

Производные исходных функций (с их помощью найти производную функции f(x) - g(x) не составит труда) находятся элементарно и равны: $f1'(x) = 1 / x$, $f2'(x) = -2$, $f3'(x) = 1 / (2-x)^2$

1)Пересечение f1 и f2.
ln(x) - (-2x+14) = 0
Непрерывна на промежутке (0;+∞). На всём этом промежутке производная 1/x +2 положительна. (Это означает, что точка пересечения единственна.) Значит подойдут любые отрезки из этого промежутка, у которых значения функции на концах разных знаков.
Например, ln(1) - (-2+14)= -12< 0, а ln(30) + 2*30-14 > 0. Получаем отрезок [1;30].

2)Пересечение f2 и f3.
(-2x+14) – (1 / (2-x) +6) = 0
Непрерывна всюду, кроме точки 2. На всём этом промежутке производная -2 - 1/(2-x)2 отрицательна. Значит подойдёт отрезок со значениями разных знаков на концах либо из промежутка (-∞; 2) , либо из промежутка (2;+∞). Зная приблизительное строение графиков всех трёх функций, можем сделать вывод, что искомая точка принадлежит второму промежутку. Значит подойдут любые отрезки из этого промежутка, у которых значения функции на концах разных знаков.
Например, значение f2(5)-f3(5) положительно, а в точке 20 отрицательно. Получаем отрезок [5;20].

3)Пересечение f1 и f3.
ln(x) - (1 / (2-x) +6) = 0
Непрерывна на промежутках (0;2) и (2;+ ∞). Решив уравнение 1/x -1/(2-x)2 найдём критические точки, определим знаки производной функции в полученных интервалах. Функция возрастает на промежутке (0;1) и убывает на (1;2), при этом -7 - значение в точке 1. Остается рассмотреть промежуток (2;+ ∞). Тут функция убывает до точки 4, далее возрастает. Зная приблизительное строение графиков всех трёх функций, можем сделать вывод, что искомая точка принадлежит первому промежутку. Значит подойдут любые отрезки из этого промежутка, у которых значения функции на концах разных знаков.
Например, в точках 2.1 и 3 функция принимает значения разных знаков. Получаем отрезок [2.1;3].

Выбор eps1 и eps2:

Для начала обозначим, как определяется точность.

При нахождении корня считается, что корень найден с точностью eps1, если от найденного корня до настоящего расстояние меньше eps1. Найдя такие a и b, что знаки функции (у которой мы ищем корень) в них разные, мы понимаем, что настоящий корень лежит где-то между ними, и отдален от точки a не более чем на eps1, если a - b <= eps1.

При нахождении интеграла мы используем правило Рунге. Пусть I(n) — интеграл, полученный при разбиении отрезка на n частей, I(2n) — интеграл, полученный при разбиении отрезка на 2n частей. Если мы считаем интеграл методом средних прямоугольников, то правило Рунге гласит, что погрешность величины I(2n) равна |I(2n) — I(n)| / 3. Значит, достаточно посчитать интеграл два раза и сравнить |I(2n) — I(n)| с 3*eps2. Если получившаяся величина больше или равна 3*eps2, то вычислить |I(4n) — I(2n)| и так далее.

Итоговая точность должна быть равна 0.001, то есть полученный результат должен отличаться от настоящего не более чем на эту величину. Рассмотрим, как eps1 и eps2 влияют на конечный результат:

Предположим, что мы идеально подобрали точки пересечения кривых. Так как итоговый результат вычисляется как I2 + I3 - I1 (где I1, I2, I3 — интегралы от функций f1, f2, f3 на соответствующих отрезках, чьи концы определяются как точки пересечения этой кривой с другими), то в таком случае полученный результат будет отличаться от настоящего не более чем на 3*eps2.

Пусть root12 = x12 + eps1, root13 = x13 + eps1, root23 = x23 + eps1, где + eps1 означает, что вычисленный root может отличаться от настоящего корня x не более чем на eps1. Для удобства можно поставить дополнительное ограничение. Всего у нас есть три точки пересечения, значит, три таких «кусочка». Получаем:

$3*eps1^2 + 3*eps2 < 0.001$

Возьмём, например, eps1 = 0.0001, eps2 = 0.0001. Подходящая точность найдена.

Результаты экспериментов

Кривые	x	y
1 и 2	6.0962	1.8076
2 и 3	4.2248	7.5504
1 и 3	2.1917	0.7847

Таблица 1: Координаты точек пересечения

Функция	От	До	Значение интеграла
$f\ 1 = \ln(x)$	2.1917	6.0962	5.3955
$f\ 2 = -2x+14$	4.2248	6.0962	6.8849
$f\ 3 = 1 / (2-x) + 6$	2.1917	4.2248	9.7469

Таблица 2: Значения интегралов функций

Результатом (площадью фигуры, ограниченной заданными кривыми) является 11.2363, что приблизительно равно 11.236.

Структура программы и спецификация функций

```
#define NUMBER_OF_KEYS 4

const char* keys[NUMBER_OF_KEYS] = {"-help","-points",
"-iterations", "-area","-test_integral","-test_root"};

int key_value[NUMBER_OF_KEYS] = {0};
```

Количество ключей, массив с хранящимися в нем ключами, массив для отметки того, какие ключи активированы.

Значения ключей:

`-help`

Выводит все находящиеся в массиве keys ключи.

`-points`

С помощью вызова функции root выводит значения найденных корней.

`-iterations`

С помощью вызова функции root выводит число итераций цикла, понадобившееся для нахождения корня.

`-test_integral`

`-test_root`

Вызывают функции для тестирования.

`-area`

Выводит ответ(искомую площадь).

```
extern double f1 (double x)
extern double f2 (double x)
extern double f3 (double x)

extern double df1(double x)
extern double df2(double x)
extern double df3(double x)
```

Функции, написанные в ассемблерном файле.

`double root(double f(double), double g(double), double df(double), double dg(double), double a, double b, double eps)`

Возвращает найденную методом хорд асбциссу точки пересечения кривых f(x) и g(x) на отрезке от a до b с точностью eps. С ключом –points выводит значение найденного корня, с ключом -iterations выводит число итераций, понадобившихся для того, чтобы найти ответ с заданной точностью.

`double integral(double f(double), double a, double b, double eps)`

Возвращает интеграл от функции f(x) на отрезке от a до b с точностью eps.

`int main(int argc, char* argv[])`

1. Обработка поступивших в командной строке ключей. Если присутствует ключ `-help`, вывод всех существующих ключей. Если присутствует ключ `–test_integral(root)`, запуск соответствующего тестирования.
2. Поиск точек пересечения кривых. При наличии ключей `-points` и `-iterations` выводит соответствующие значения.
3. Вычисление интегралов заданных функций на нужных промежутках.
4. Вычисление и вывод результата — искомой площади фигуры, ограниченной заданными кривыми.

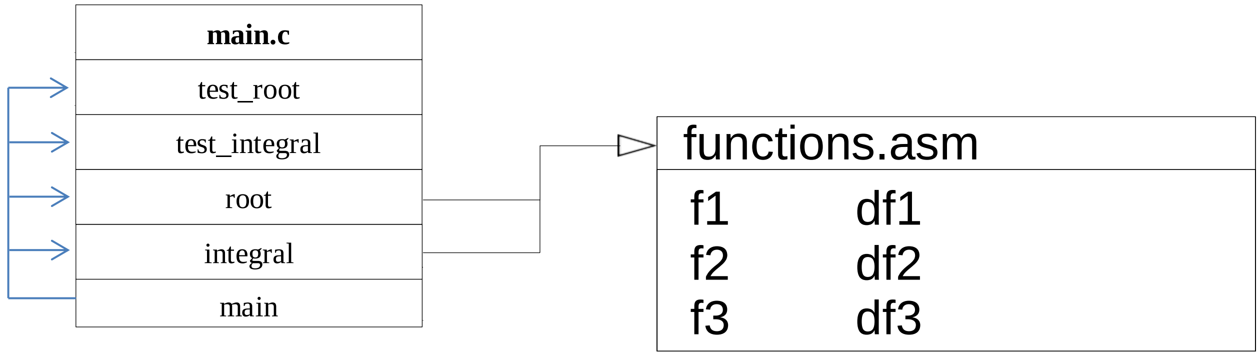

Рисунок 3: Связи между компонентами программы

Сборка программы (Make-файл)

Текст Make-файла:

```
all: main.o functions.o
  gcc -m32 -o program main.o functions.o -lm

main.o: main.c
  gcc -m32 -std=c99 -c -o main.o main.c

functions.o: functions.asm
  nasm -f elf32 -o functions.o functions.asm

clean:
  rm -rf *.o
```

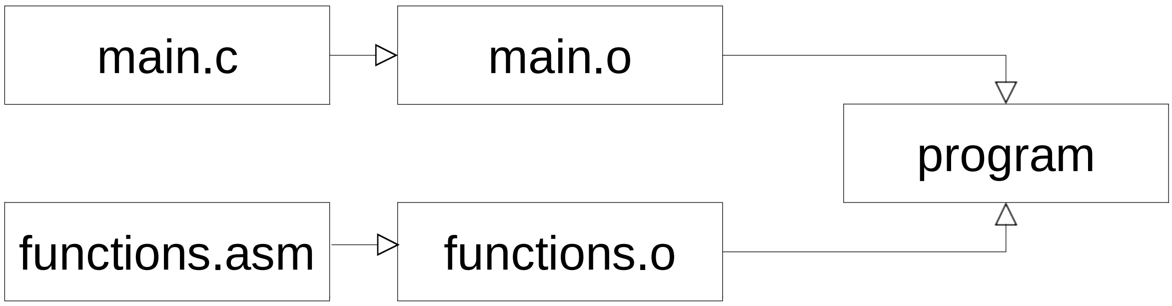

Рисунок 4: Зависимости между модулями программы

Отладка программы, тестирование функций

Функция 1	Функция 2	a	b	eps	Настоящий корень	Найденный корень
$f\,1$	$f\,2$	5	10	0.001	6.096169	6.096
$f\,2$	$f\,3$	3	11	0.001	4.224744	4.225
$f\,1$	$f\,3$	2.01	4	0.001	2.191743	2.192

Таблица 3: Тестирование функции root

Функция	a	b	eps	Настоящее значение	Найденное значение
$f\,1$	7	10	0.0001	6.40448	3.718282
$f\,2$	5	7	0.001	4	4
$f\,3$	4	10	0.01	34,61371	34,62

Таблица 4: тестирование функции integral

Программа на Си и на Ассемблере

Исходные тексты программы имеются в архиве, который приложен к этому отчету.

Анализ допущенных ошибок

В процессе работы ошибок допущено не было.

Список цитируемой литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Москва: Наука, 1985