PROJEKT – PROGRAMOWANIE DYSKRETNE

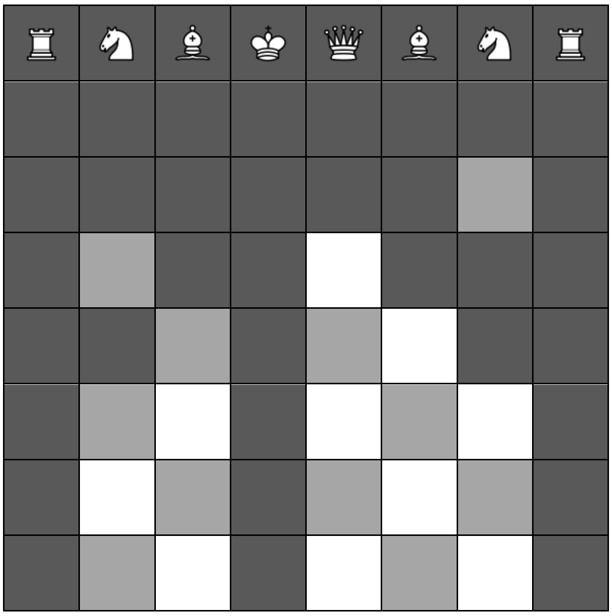
Angelika Dudzik

1. Temat

Czy zestaw figur szachowych (8, bez pionków) można poustawiać na szachownicy 8x8 tak, by każde pole było atakowane?
Jaka jest minimalna liczba figur do tego potrzebnych?
Przedstawić różne warianty ustawień figur na szachownicy.

2. Rozwiązanie

Początkowe ustawienie figur na szachownicy wygląda następująco:



Na ciemny kolor zaznaczyłam atakowane pola.

Jak widać atakowanie się jedynie 43 pola spośród 64. My chcemy tak poustawiać figury, by atakowane było każde pole i to z wykorzystaniem jak najmniejszej liczby tych figur.

3. Matematyczny opis problemu

W programie LPSolve wprowadziłam zmienne, funkcję minimalizującą liczbę figur oraz odpowiednie ograniczenia, które przedstawiam poniżej.

i) Zmienne binarne:

a_{ij} : 1, jeśli król stoi na polu (i, j); 0 w przeciwnym przypadku
b_{ij} : 1, jeśli hetman stoi na polu (i, j); 0 w przeciwnym przypadku
c_{ij} : 1, jeśli goniec stoi na polu (i, j); 0 w przeciwnym przypadku
d_{ij} : 1, jeśli goniec stoi na polu (i, j); 0 w przeciwnym przypadku
f_{ij} : 1, jeśli skoczek stoi na polu (i, j); 0 w przeciwnym przypadku
g_{ij} : 1, jeśli skoczek stoi na polu (i, j); 0 w przeciwnym przypadku
h_{ij} : 1, jeśli wieża stoi na polu (i, j); 0 w przeciwnym przypadku
k_{ij} : 1, jeśli wieża stoi na polu (i, j); 0 w przeciwnym przypadku
$i = \{1,2,3,4,5,6,7,8\};\ j = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

ii) Funkcja celu:

$\min \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij} + f_{ij} + g_{ij} + h_{ij} + k_{ij})$

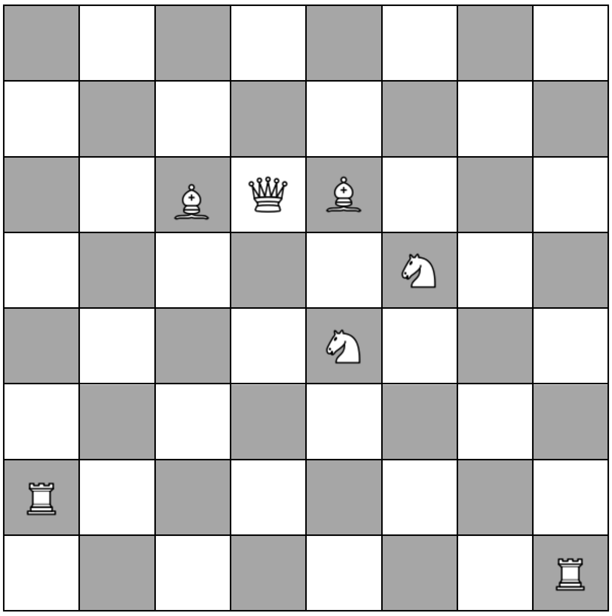
iii) Ograniczenia:

- Każda figura ma występować najwyżej raz
  $\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} a_{ij} \leq 1$
  $\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} b_{ij} \leq 1$
  $\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} c_{ij} \leq 1$
  $\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} d_{ij} \leq 1$
  $\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} f_{ij} \leq 1$
  $\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} g_{ij} \leq 1$
  $\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} h_{ij} \leq 1$
  $\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} k_{ij} \leq 1$
- Na każdym polu może stać najwyżej jedna figura
  $\forall (i, j)\colon a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij} + f_{ij} + g_{ij} + h_{ij} + k_{ij} \leq 1$
  $i = \{1,2,3,4,5,6,7,8\};\ j = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
- Każde pole ma być atakowane
  $\forall (i, j)\colon a_{m_1 n_1} + b_{m_2 n_2} + c_{m_3 n_3} + d_{m_4 n_4} + f_{m_5 n_5} + g_{m_6 n_6} + h_{m_7 n_7} + k_{m_8 n_8} \geq 1$
  $\forall (m_t, n_t)\colon pole\ (i, j) jest\ atakowane;\ t = \{1,2,3,4,5,6,7,8\};\ i = \{1,2,3,4,5,6,7,8\};\ j = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

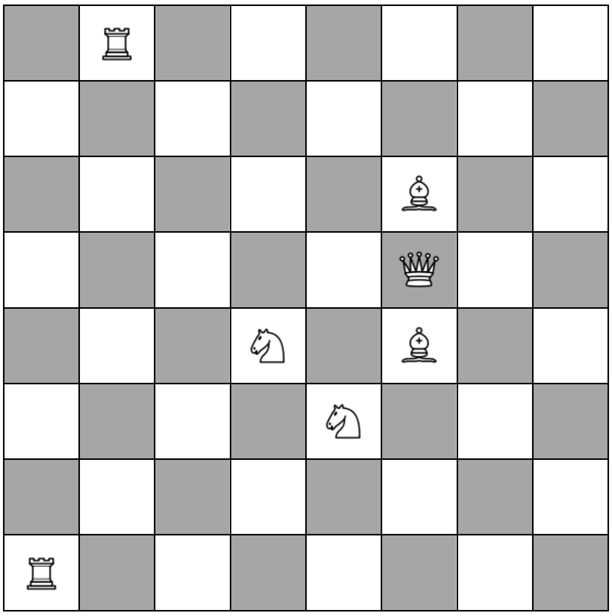
4. Wynik

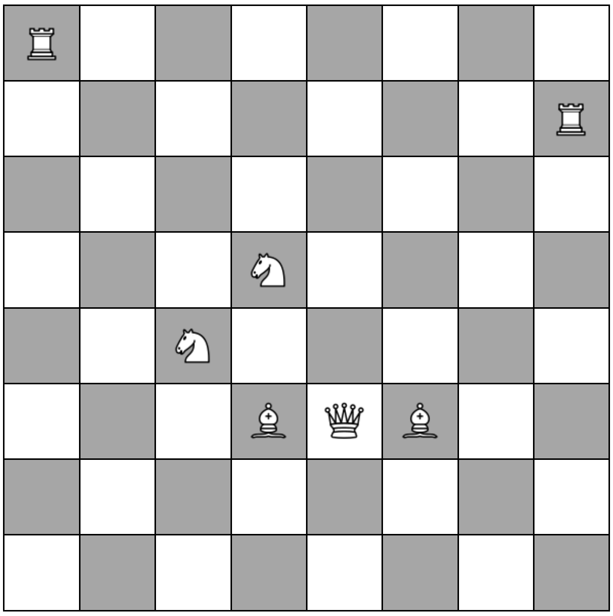
Jak się okazało, potrzeba co najmniej siedmiu figur, by każde pole szachownicy było atakowane.

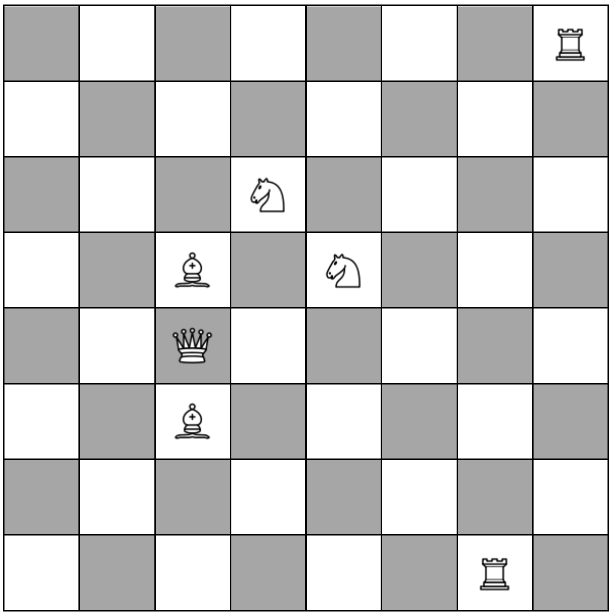
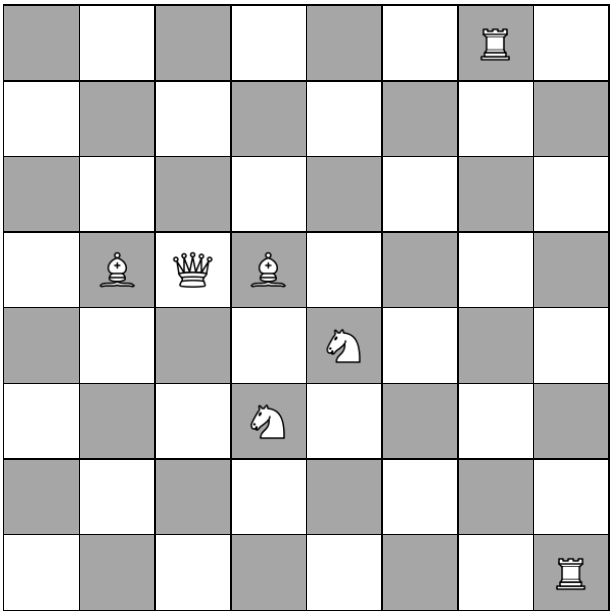
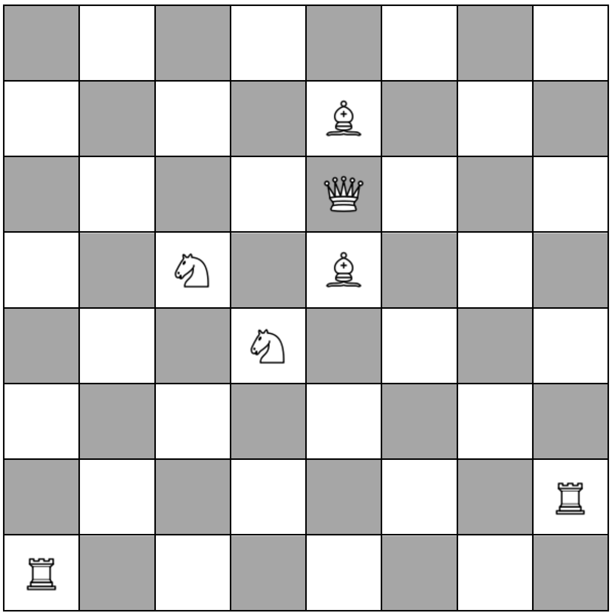
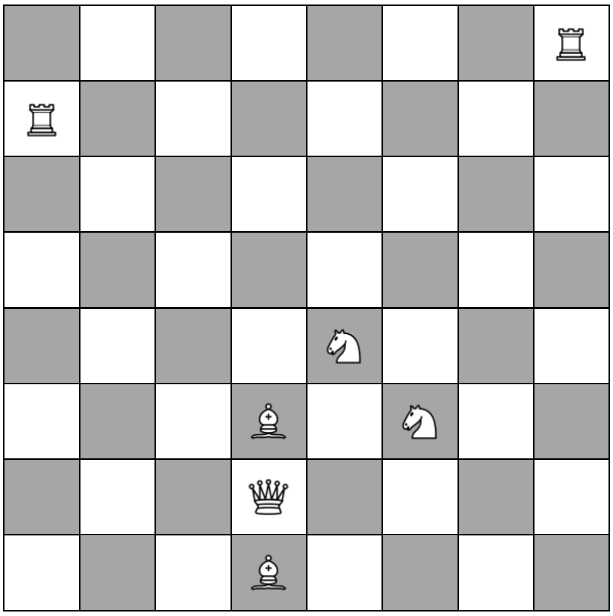
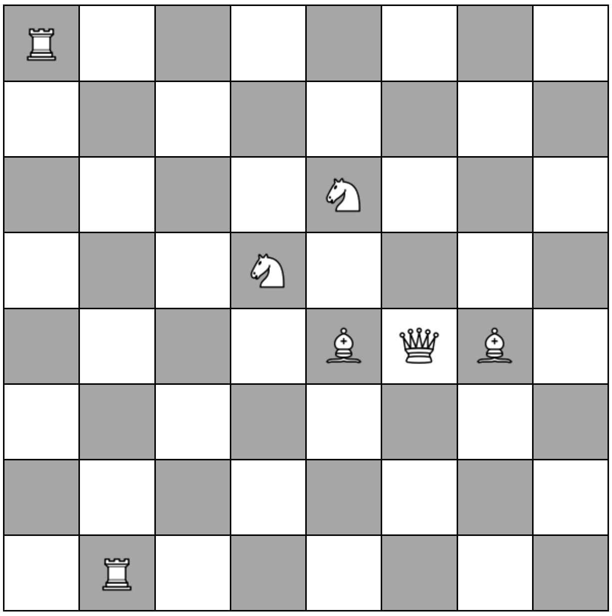
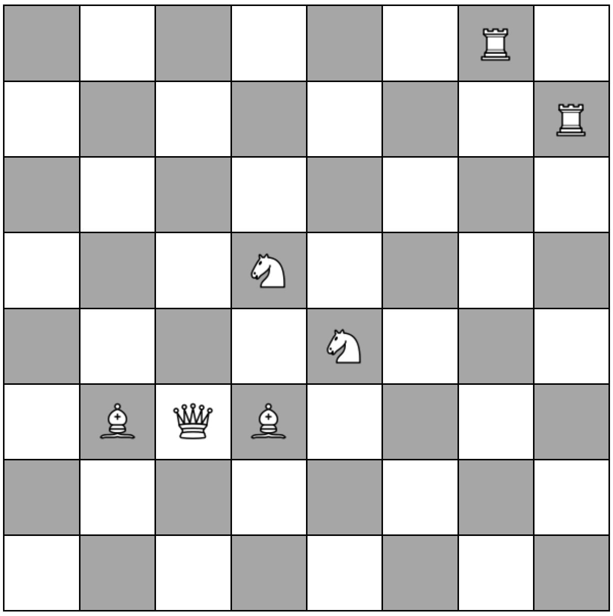
Program LPSolve znalazł następujące rozwiązanie:

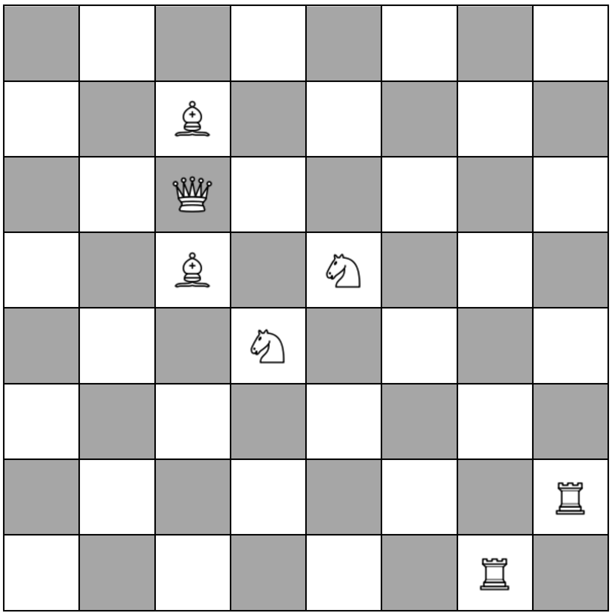
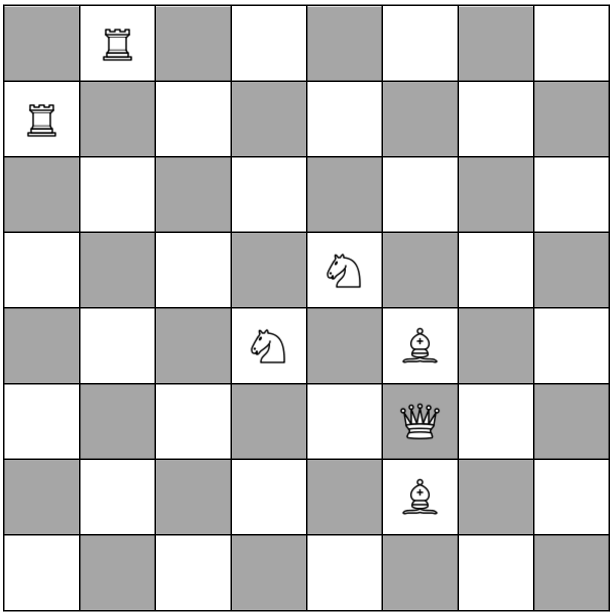
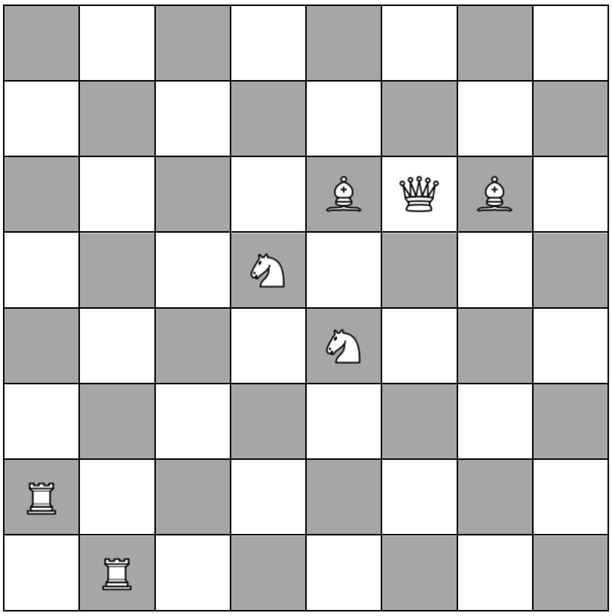
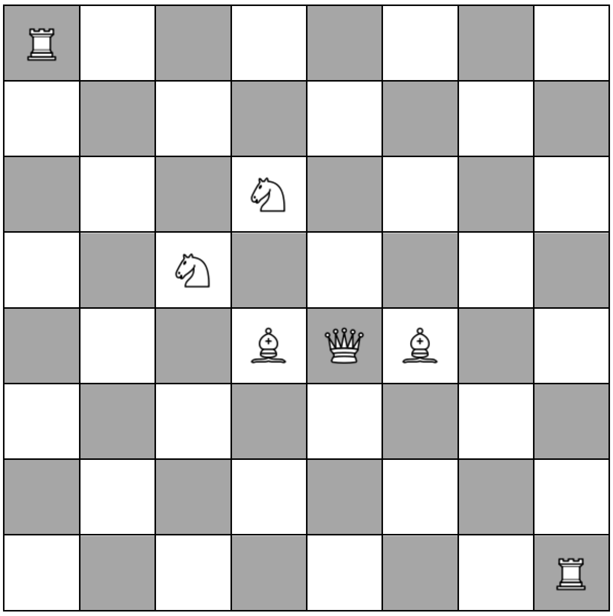
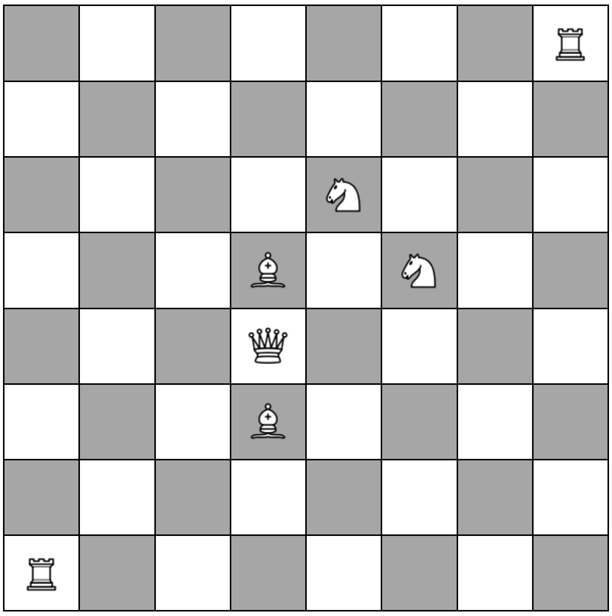
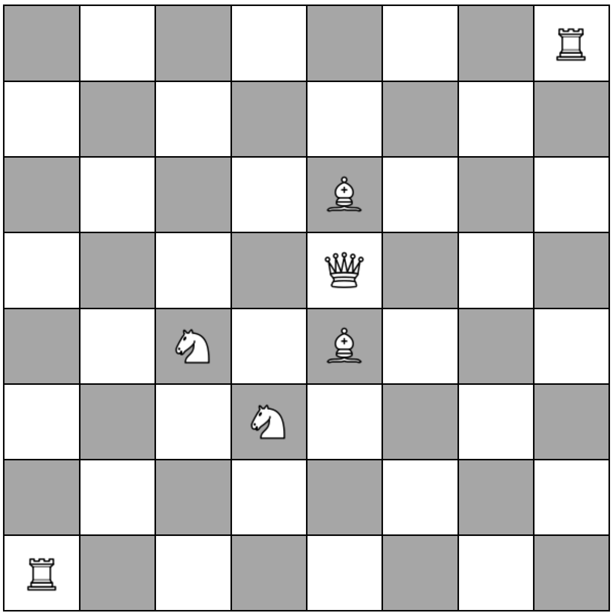


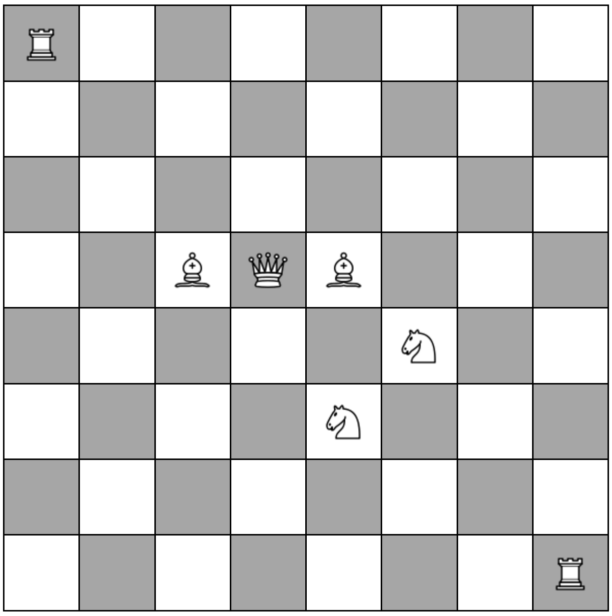
Istnieją jednak jeszcze inne warianty rozwiązania, np.:







W powyższych rozwiązaniach gońce za każdym razem stoją na polach w tym samym kolorze. W rzeczywistości natomiast nigdy do tego nie dojdzie. Możemy zatem wprowadzić jeszcze modyfikację gwarantującą, że gońce będą stały na polach w odmiennych kolorach.

5. Modyfikacja

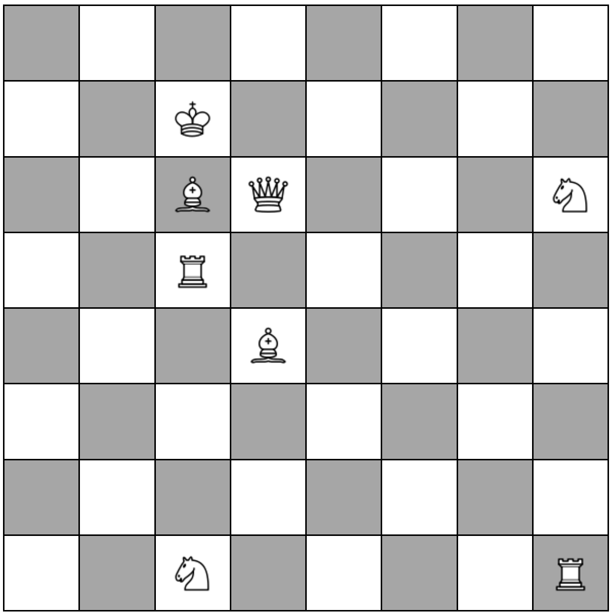
Zmienne i funkcja celu się nie zmienią.
Do wcześniejszych ograniczeń trzeba jednak dołożyć jeszcze te, które zagwarantują ustawienie gońców na polach w odmiennych kolorach.

- Dodatkowe ograniczenia:
  $c_{ij} + d_{ij} \leq 1 \ \forall(i,j): i + j = 2n \equiv 0(mod\ 2)$
  $c_{ij} + d_{ij} \leq 1 \ \forall(i,j): i + j \equiv 1(mod\ 2)$

6. Wynik po wprowadzeniu modyfikacji

Po dołożeniu powyższych ograniczeń potrzeba już ośmiu figur, by każde pole szachownicy było atakowane.

Program LPSolve znalazł następujące rozwiązanie:



Inne przykładowe warianty rozwiązania: