

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра      Систем Управления и Информатики      Группа Р3340

Лабораторная работа №8  
“Экспериментальное построение областей  
устойчивости линейной системы на плоскости  
двух параметров”  
Вариант - 7

Выполнил \_\_\_\_\_ (подпись)  
(фамилия, и.о.)

Проверил \_\_\_\_\_ (подпись)  
(фамилия, и.о.)

" \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г.      Санкт-Петербург,      20 \_\_\_\_ г.

Работа выполнена с оценкой \_\_\_\_\_

Дата защиты " \_\_\_\_ " \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ г.

## Задание

### Цель работы

Ознакомление с экспериментальными методами построения областей устойчивости линейных динамических систем и изучение влияния на устойчивость системы ее параметров.

### Исходные данные

Линейная система третьего порядка, структурная схема которой представлена на рисунке 1:

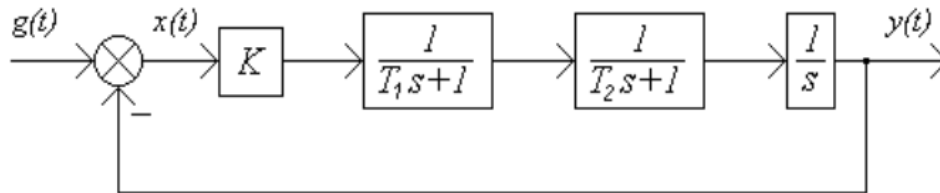


Рисунок 1 — Структурная схема линейной системы третьего порядка

При этом для варианта определено значение  $T_1 = 0.5с$ .

# 1 Порядок выполнения лабораторной работы

Построим схему моделирования линейной системы третьего порядка в пакете Simulink:

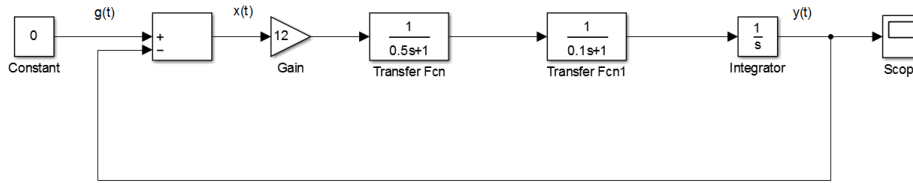


Рисунок 2 — Схема моделирования линейной системы третьего порядка

Для определения типа устойчивости примем  $g(t) = 0$  и  $y(0) = 1$ . Для определения корней характеристического уравнения запишем уравнение связи между входным воздействием и выходной переменной:

$$(g - y) \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = y \quad (1)$$

При условии, что  $g(t) = 0$  и  $T_1 = 0.5c$ , получим:

$$y \frac{K}{s(0.5s + 1)(T_2 s + 1)} + y = 0 \quad (2)$$

$$s(0.5s + 1)(T_2 s + 1)y + Ky = 0 \quad (3)$$

$$0.5T_2 s^3 y + (T_2 + 0.5)s^2 y + sy + Ky = 0 \quad (4)$$

Это эквивалентно следующему дифференциальному уравнению:

$$0.5T_2 y^{(3)} + (T_2 + 0.5)y^{(2)} + y^{(1)} + Ky = 0 \quad (5)$$

Характеристическое уравнение будет иметь следующий вид:

$$0.5T_2 y^{(3)} + (T_2 + 0.5)y^{(2)} + y^{(1)} + Ky = 0 \quad (6)$$

Характеристическое уравнение будет иметь следующий вид:

$$0.5T_2 s^3 + (T_2 + 0.5)s^2 + s + K = 0 \quad (7)$$

В схеме моделирования установим  $T_2 = 0.1$  и подберем такое значение  $K$ , при котором система будет находиться на границе устойчивости. Как видно из графика переходного процесса, представленного на рисунке 2, при  $K = 12$  система находится на границе устойчивости:

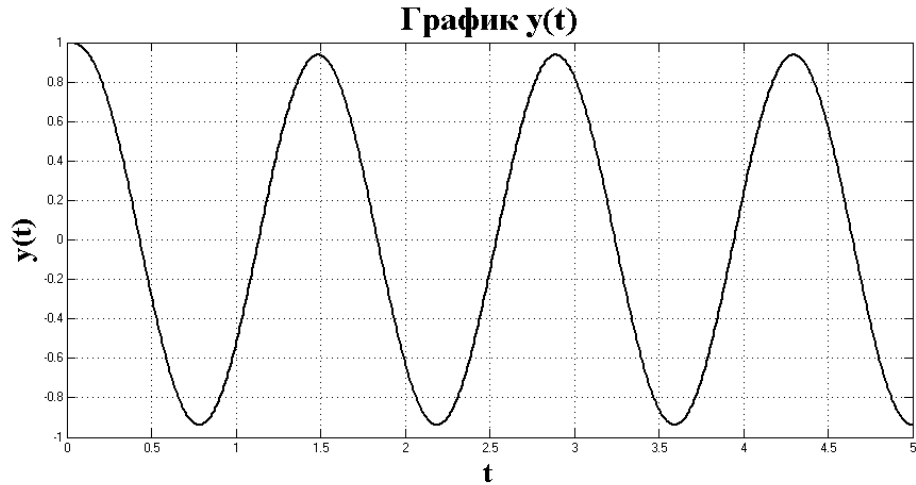


Рисунок 3 — График переходного процесса при  $T_2 = 0.1$  и  $K = 12$

В пакете Mathcad найдем корни характеристического уравнения при  $T_2 = 0.1$  и  $K = 12$ :

$$v = \begin{pmatrix} K \\ 1 \\ T_2 + 0.5 \\ 0.5 - T_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -12 \\ -4.472i \\ 4.472i \end{pmatrix} \quad (9)$$

Как видим, присутствуют отрицательные вещественные и чисто мнимые корни, что говорит о том, что система находится на границе устойчивости.

Теперь подберем такие значения  $K$  и  $T_2$ , при которых система будет неустойчива. Для облегчения оставим прежнее значение  $T_2 = 0.1$ . Рисунок 4 показывает, что система при  $K = 15$  будет неустойчива:

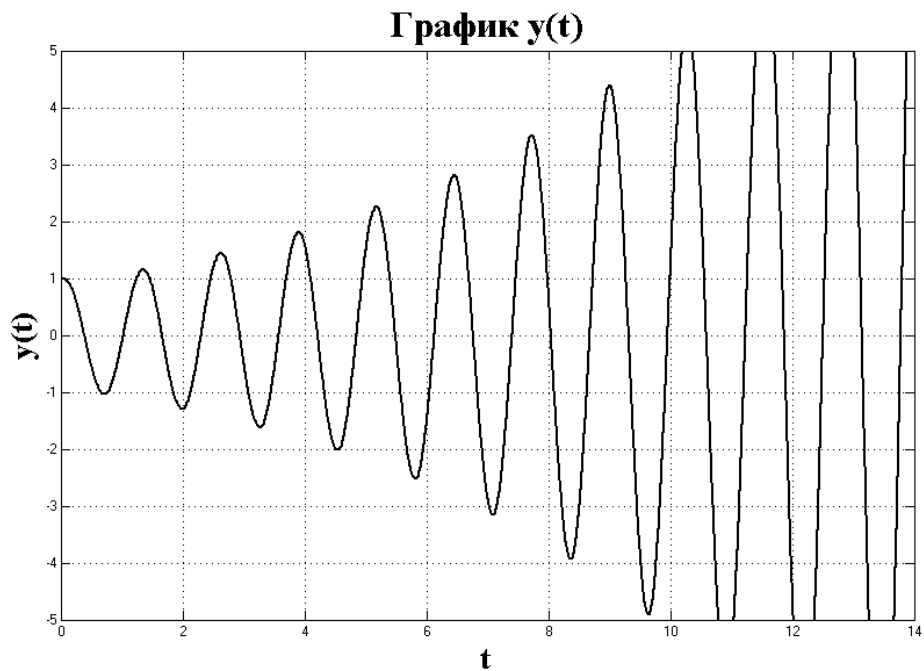


Рисунок 4 — График переходного процесса при  $T_2 = 0.1$  и  $K = 15$

В пакете Mathcad найдем корни характеристического уравнения при  $T_2 = 0.1$  и  $K = 15$ :

$$v = \begin{pmatrix} K \\ 1 \\ T_2 + 0.5 \\ 0.5 - T_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -12.348 \\ 0.174 + 4.926i \\ 0.174 - 4.926i \end{pmatrix} \quad (11)$$

Как видно, присутствуют отрицательные вещественные комплексно-сопряженные корни с положительной единственной частью, что говорит о наличии в выходной переменной бесконечно возрастающей синусоидальной составляющей.

Теперь подберем такие значения  $T_2$ , при которых система будет устойчива. Для облегчения опять оставим прежнее значение  $T_2 = 0.1$ . Рисунок 5 показывает, что система при  $K = 10$  будет устойчива.

В пакете Mathcad найдем корни характеристического уравнения при  $T_2 = 0.1$  и  $K = 10$ :

$$v = \begin{pmatrix} K \\ 1 \\ T_2 + 0.5 \\ 0.5 - T_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -11.747 \\ -0.127 - 4.124i \\ -0.127 + 4.124i \end{pmatrix} \quad (13)$$

Как видно, вещественные части всех корней отрицательные, что говорит о выполнении условия устойчивости.

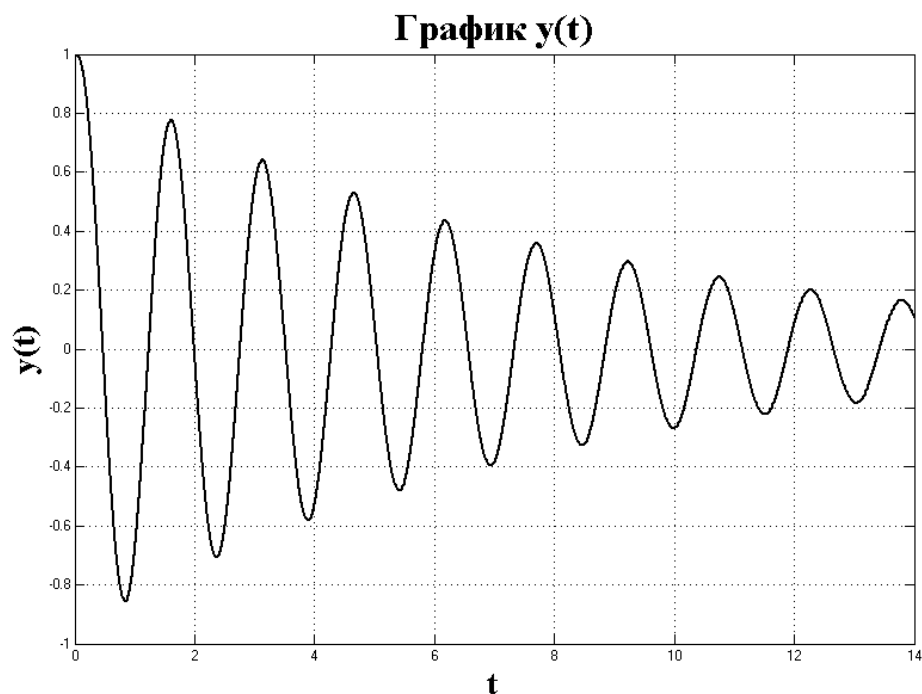


Рисунок 5 — График переходного процесса при  $T_2 = 0.1$  и  $K = 10$

Изменяя  $T_2$  в диапазоне от 0.1 с до 5 и подбирая  $K$ , составим таблицу, необходимую для построения границы устойчивости:

Таблица 1 – Точки построения экспериментальной границы устойчивости

$T_{2,c}$	$K$
0.1	12
0.2	7
0.3	5.35
0.4	4.5
0.5	4
1	3
1.5	2.7
2	2.5
2.5	2.4
3	2.3
3.5	2.3
4	2.25
5	2.2

В пакете Mathcad построим экспериментальную границу устойчивости:

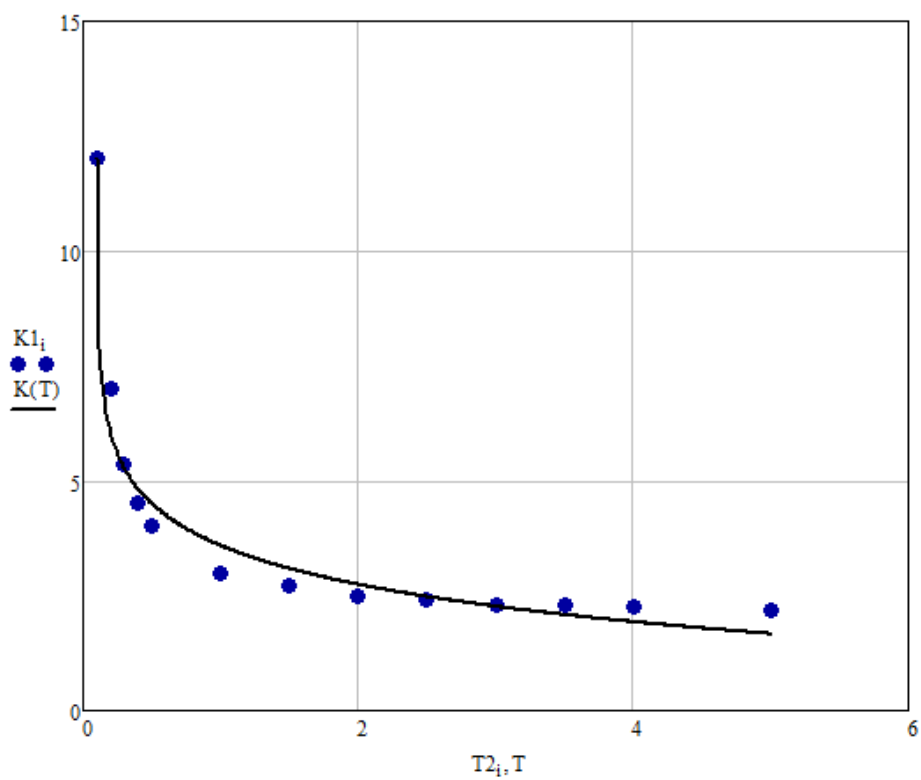


Рисунок 6 – График экспериментальной границы устойчивости

Матрица Гурвица для системы третьего порядка выглядит следующим образом:

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Подставляя коэффициенты характеристического уравнения, получим:

$$M = \begin{bmatrix} T_2 + 0.5 & K & 0 \\ 0.5T_2 & 1 & 0 \\ 0 & T_2 + 0.5 & K \end{bmatrix} \quad (15)$$

Тогда миноры Гурвица:

$$\Delta_1 = T_2 + 0.5 \quad (16)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} T_2 + 0.5 & K \\ 0.5T_2 & 1 \end{vmatrix} = T_2 + 0.5 - 0.5KT_2 \quad (17)$$

$$\Delta_3 = a_3\Delta_2 = K(T_2 + 0.5 - 0.5KT_2) \quad (18)$$

По критерию Гурвица запишем условие нейтральной устойчивости системы:

$$\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 = 0 \\ a_3 > 0 \end{cases} \quad (19)$$

или

$$\begin{cases} T_2 + 0.5 > 0 \\ T_2 + 0.5 - 0.5KT_2 = 0 \\ K > 0 \end{cases} \quad (20)$$

Отсюда:

$$\begin{cases} T_2 > -0.5 \\ K = 2 + \frac{1}{T_2} \\ K > 0 \end{cases} \quad (21)$$

Составим таблицу, необходимую для построения теоретической границы устойчивости:

Таблица 2 – Точки построения теоретической границы устойчивости

$T_{2,c}$	K
0.1	12
0.2	7
0.3	5.33
0.4	4.5
0.5	4
1	3
1.5	2.66
2	2.5
2.5	2.4
3	2.33
3.5	2.28
4	2.25
5	2.2

Построим теоретическую границу устойчивости:

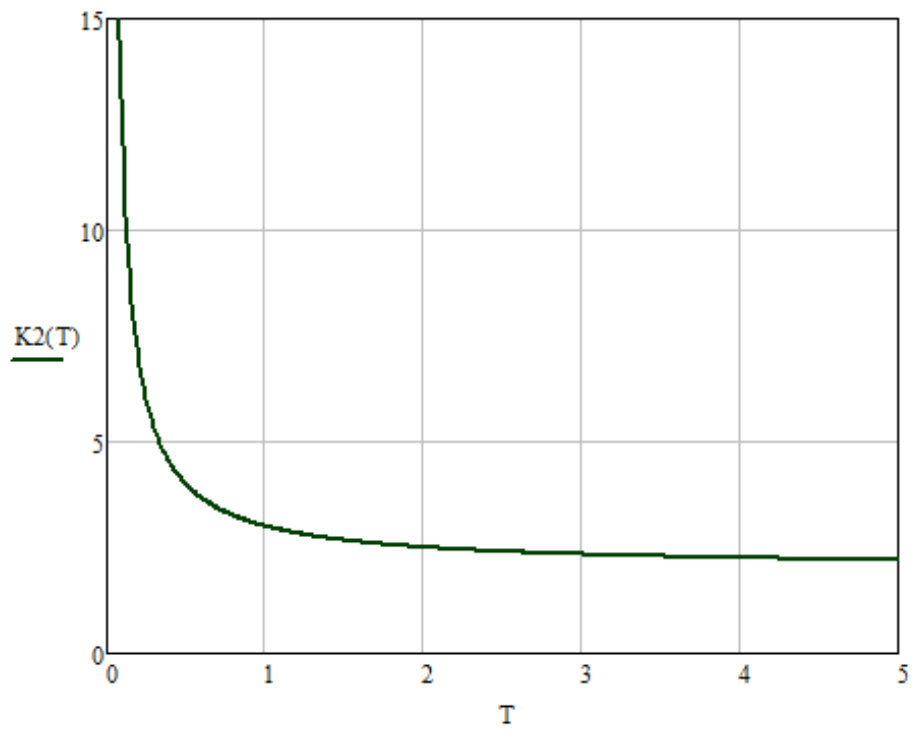


Рисунок 7 — График теоретической границы устойчивости



## Выводы

В ходе проведения данной лабораторной работы было произведено экспериментальное построение границы устойчивости на плоскости двух параметров ( $T_2$  и ) системы третьего порядка путем анализа переходных процессов системы при нулевом входном воздействии и ненулевом начальном условии. Анализ экспериментально полученной границы устойчивости позволяет сделать вывод о ее гиперболическом характере, т.е. об обратной пропорциональности параметров системы  $T_2$  и . Экспериментальное построение проверяется построением теоретической границы через критерий устойчивости Гурвица. Сравнение таблиц построения экспериментальной и теоретических границ устойчивости а также анализ их графиков говорит о правильности проведенного в работе моделирования.