Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра Систем Управления и Информатики Группа P3340

Лабораторная работа №8 “Экспериментальное построение областей устойчивости линейной системы на плоскости двух параметров”

Вариант - 1

Выполнил ____ (подпись)
(фамилия, и.о.)

Проверил ____ (подпись)
(фамилия, и.о.)

"____" __________ 20____г. Санкт-Петербург, 20____г.

Работа выполнена с оценкой ____

Дата защиты "____" __________ 20____г.

Задание

Цель работы

Ознакомление с экспериментальными методами построения областей устойчивости линейных динамических систем и изучение влияния на устойчивость системы ее параметров.

Исходные данные

Линейная система третьего порядка, структурная схема которой представлена на рисунке 1:

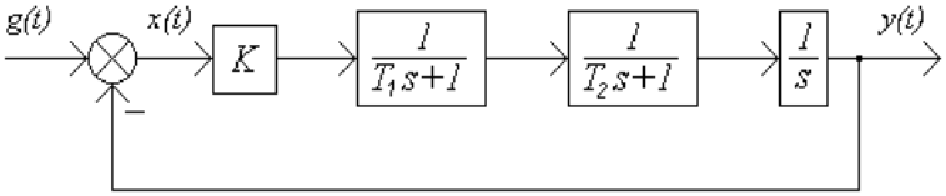

Рисунок 1 — Структурная схема линейной системы третьего порядка

При этом для варианта определено значение $T_1 = 0.5c$.

1 Порядок выполнения лабораторной работы

Построим схему моделирования линейной системы третьего порядка в пакете Simulink:

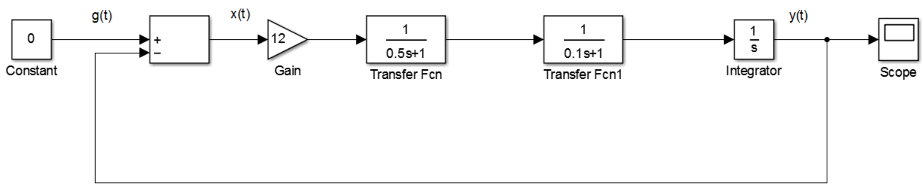

Рисунок 2 — Схема моделирования линейной системы третьего порядка

Для определения типа устойчивости примем $g(t) = 0$ и $y(0) = 1$. Для определения корней характеристического уравнения запишем уравнение связи между входным воздействием и выходной переменной:

$$(g-y)\frac{K}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = y \tag{1}$$

При условии, что $g(t) = 0$ и $T_1 = 0.5c$, получим:

$$y\frac{K}{s(0.5s+1)(T_2 s+1)} + y = 0 \tag{2}$$

$$s(0.5s+1)(T_2 s+1)y + Ky = 0 \tag{3}$$

$$0.5T_2 s^3 y + (T_2 + 0.5)s^2 y + sy + Ky = 0 \tag{4}$$

Это эквивалентно следующему дифференциальному уравнению:

$$0.5T_2 y^{(3)} + (T_2 + 0.5)y^{(2)} + y^{(1)} + Ky = 0 \tag{5}$$

Характеристическое уравнение будет иметь следующий вид:

$$0.5T_2 y^{(3)} + (T_2 + 0.5)y^{(2)} + y^{(1)} + Ky = 0 \tag{6}$$

Характеристическое уравнение будет иметь следующий вид:

$$0.5T_2 s^3 + (T_2 + 0.5)s^2 + s + K = 0 \tag{7}$$

В схеме моделирования установим $T_2 = 0.1$ и подберем такое значение , при котором система будет находится на границе устойчивости. Как видно из графика переходного процесса, представленного на рисунке 2, при $K = 12$ система находится на границе устойчивости:

На рисунке 3 изображён график выходного сигнала системы, имеющий колебательный характер:

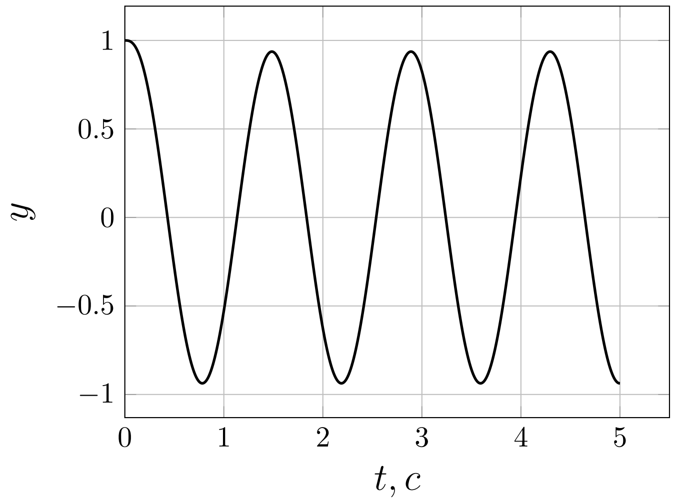

Рисунок 3 — Результаты моделирования при $K = 12$, $T_2 = 0.1$

В пакете Mathcad найдем корни характеристического уравнения при $T_2 = 0.1$ и $K = 12$:

$$v = \begin{pmatrix} K \\ 1 \\ T_2 + 0.5 \\ 0.5 - T_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$polyroots(v) = \begin{pmatrix} -12 \\ -4.472i \\ 4.472i \end{pmatrix} \tag{9}$$

Как видим, присутствуют отрицательные вещественные и чисто мнимые корни, что говорит о том, что система находится на границе устойчивости.

Теперь подберем такие значения и T_2, при которых система будет неустойчива. Для облегчения оставим прежнее значение $T_2 = 0.1$. Рисунок 4 показывает, что система при $K = 15$ будет неустойчива:

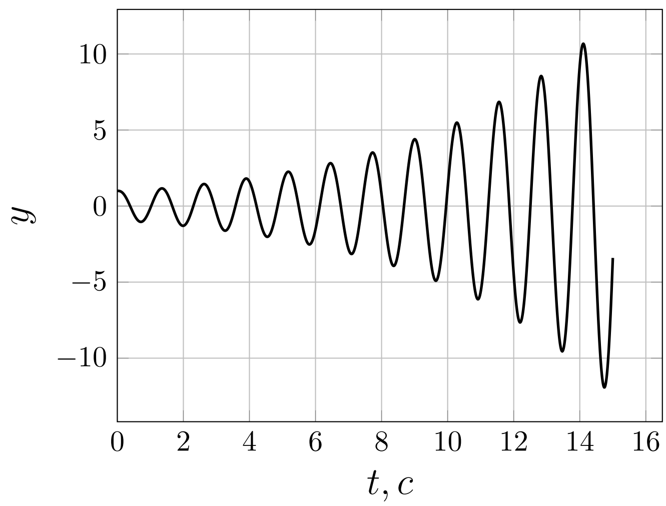

Рисунок 4 — Результаты моделирования при $K = 15$, $T_2 = 0.1$

В пакете Mathcad найдем корни характеристического уравнения при $T_2 = 0.1$ и $K = 15$:

$$v = \begin{pmatrix} K \\ 1 \\ T_2 + 0.5 \\ 0.5 - T_2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$polyroots(v) = \begin{pmatrix} -12.348 \\ 0.174 + 4.926i \\ 0.174 - 4.926i \end{pmatrix} \tag{11}$$

Как видно, присутствуют отрицательные вещественные комплексно-сопряженные корни с положительной единственной частью, что говорит о наличии в выходной переменной бесконечно возрастающей синусоидальной составляющей.

Теперь подберем такие значения и T_2, при которых система будет устойчива. Для облегчения опять оставим прежнее значение $T_2 = 0.1$. Рисунок 5 показывает, что система при $K = 10$ будет устойчива.

В пакете Mathcad найдем корни характеристического уравнения при $T_2 = 0.1$ и $K = 10$:

$$v = \begin{pmatrix} K \\ 1 \\ T_2 + 0.5 \\ 0.5 - T_2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$polyroots(v) = \begin{pmatrix} -11.747 \\ -0.127 - 4.124i \\ -0.127 + 4.124i \end{pmatrix} \tag{13}$$

Как видно, вещественные части всех корней отрицательные, что говорит о выполнения условия устойчивости. График устойчивого переходного процесса представлен на рисунке 5.

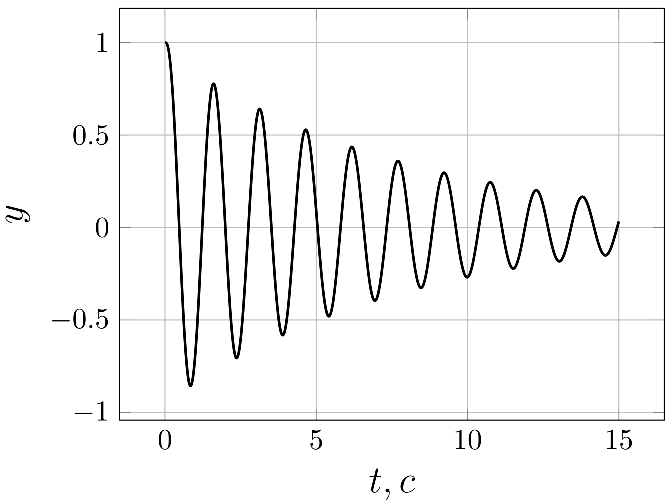

Рисунок 5 — Результаты моделирования при $K = 10$, $T_2 = 0.1$

Изменяя T_2 в диапазоне от 0.1 с до 5 и подбирая , составим таблицу, необходимую для построения границы устойчивости. Подобранные с помощью математического моделирования данные приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Точки построения смоделированной границы устойчивости

T_2,с	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5
K	12	7	5.35	4.5	4	3	2.7	2.5	2.4	2.3	2.3	2.25	2.2

На рисунке 6 представлен график смоделированной границы устойчивости.

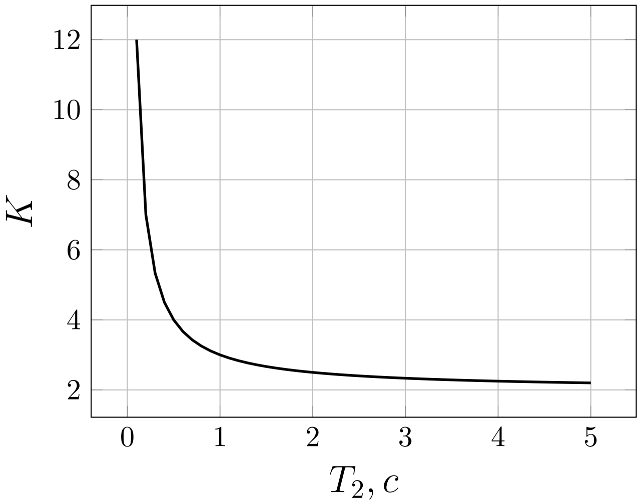

Рисунок 6 — График смоделированной границы устойчивости

Матрица Гурвица для системы третьего порядка выглядит следующим образом:

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Подставляя коэффициенты характеристического уравнения, получим:

$$M = \begin{bmatrix} T_2 + 0.5 & K & 0 \\ 0.5T_2 & 1 & 0 \\ 0 & T_2 + 0.5 & K \end{bmatrix} \tag{15}$$

Тогда миноры Гурвица:

$$\Delta_1 = T_2 + 0.5 \tag{16}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} T_2 + 0.5 & K \\ 0.5T_2 & 1 \end{vmatrix} = T_2 + 0.5 - 0.5KT_2 \tag{17}$$

$$\Delta_3 = a_3\Delta_2 = K(T_2 + 0.5 - 0.5KT_2) \tag{18}$$

По критерию Гурвица запишем условие нейтральной устойчивости системы:

$$\begin{cases} \Delta_1 & > & 0 \\ \Delta_2 & = & 0 \\ a_3 & > & 0 \end{cases} \tag{19}$$

или

$$\begin{cases} T_2 + 0.5 > 0 \\ T_2 0.5 - 0.5KT_2 = 0 \\ K > 0 \end{cases} \tag{20}$$

Таблица 2 – Точки построения теоретической границы устойчивости

T_2,с	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5
K	12	7	5.33	4.5	4	3	2.66	2.5	2.4	2.33	2.28	2.25	2.2

Отсюда:

$$\begin{cases} T_2 > -0.5 \\ K = 2 + \dfrac{1}{T_2} \\ K > 0 \end{cases} \tag{21}$$

Составим таблицу, необходимую для построения теоретической границы устойчивости. Данные для теоретической границы устойчивости приведены в таблице 2.

На рисунке 7 представлена теоретическая граница устойчивости.

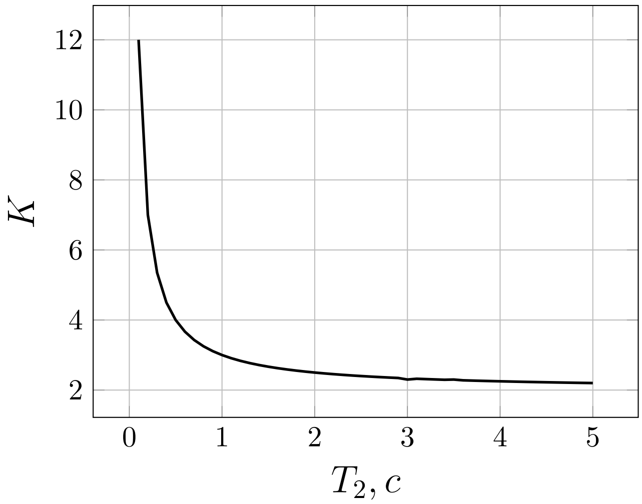

Рисунок 7 — График теоретической границы устойчивости

Вывод

В ходе лабораторной работы было произведено математическое моделирование границы устойчивости на плоскости двух параметров (T_2 и K) системы третьего порядка путем анализа переходных процессов системы. Анализ смоделированной границы устойчивости позволяет сделать вывод о ее гиперболическом характере, т.е. об обратной пропорциональности параметров системы T_2 и K. Адекватность смоделированной границы устойчивости проверяется построением теоретической границы через критерий устойчивости Гурвица. Сравнение таблиц построения смоделированной и теоретической границ устойчивости а также анализ их графиков говорит о правильности проведенного в работе моделирования.