$f(x,y) = x^2+y^2$ subject to the constraint $x+y=1$

$g(x,y) = x^2+y^2 = 1$

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2+y^2 - \lambda(x+y-1)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2x \ (1)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2y \ (2)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -x-y+1 = 0 \ (3)$

Igualando (1) y (2) obtenemos

$2x = 2y$

$x = y$

Luego, reemplazando $x=y$ en (3)

$-y-y+1=0 \rightarrow -2y=-1$

$y = 1/2$

Como $x=y$, nuestro punto crítico $(1/2, 1/2)$ y evaluamos en la función

$f(1/2, 1/2) = (1/2)^2 + (1/2)^2 = 1/4 + 1/4 = 2(1/4) = 1/2$

Para determinar si el punto que encontramos es un máximo, mínimo o punto de silla, utilizamos el criterio de la segunda derivada

$D(1/2, 1/2) = f_{xx}(1/2,1/2)\, f_{yy}(1/2,1/2) - [f_{xy}(a,b)]^2$

$= (2)(2) - (0)^2 = 4$

Como $D(1/2,1/2) > 0$ y $f_{xx}(1/2,1/2) > 0$, entonces $(1/2,1/2)$ es un mínimo local