# DEMOSTRACIÓN VALOR MÁXIMO DE LA FUNCIÓN ENTROPIA

Sea $H = -\sum p_i \log_2(p_i)$ con la restricción de $\sum_i p_i = 1$ (ya que son probabilidades)

$$L(p_1, \ldots, p_n, \lambda) = -\sum p_i \log_2(p_i) - \lambda\left(\sum p_i - 1\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = \left(-\log_2(p_i) - \frac{p_i}{p_i \ln 2}\right) - \lambda = 0$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\log_2(p_i) = \underbrace{-\lambda - 1/\ln 2}_{C \text{ constante para todo } i}$$

$$\log_2(p_i) = C$$

$$p_i = 2^C$$

luego $p_i = p$ (constante)

Ahora, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ es $\sum_{i=1}^{n} p = n\,p = 1$

$$p = 1/n$$

Así, hemos encontrado el punto crítico $p$ para la entropía

Substituyendo en la función de entropía el punto crítico

$$H\left(\tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}\right) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\log_2(1/n)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(-\log_2(n)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\log_2(n)$$

$$= \frac{1}{n}\log_2(n)\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \frac{1}{n}\log_2(n)\, n$$

$$= \log_2(n)$$

luego, $\log_2(n)$ es el valor máximo para la función de entropía.