

Confiabilidad y Datos Censurados: la otra dimensión de la calidad.

Felipe Neira Rojas & Angel Llanos Herrera

2 de octubre de 2024

1 Resumen

En el presente informe se aborda la importancia de la confiabilidad para describir la calidad de un producto, medida como la capacidad de este para funcionar sin fallas durante un período de tiempo. Se presentan distintas medidas de confiabilidad, como la tasa de fallos, el tiempo medio de vida y la función de confiabilidad.

Cuando no es posible conocer el tiempo exacto en que un producto falla, se generan datos censurados, los cuales afectan el análisis de confiabilidad. Se detallan los conceptos de datos censurados, los tipos de censura, y la importancia de tratarlos adecuadamente para evitar sesgos en el estudio. Para ello, se presentan dos técnicas estadísticas: el análisis de Kaplan-Meier y la estimación de máxima verosimilitud (EMV).

Estas técnicas permiten estimar la función de supervivencia y predecir fallos futuros. La EMV se utiliza cuando se conoce la distribución de los datos, mientras que el análisis de Kaplan-Meier es aplicable a cualquier tipo de distribución.

Finalmente, se presentan ejemplos de aplicación de estas técnicas en estudios de confiabilidad y análisis de datos censurados, incluyendo un caso práctico realizado en RStudio.

2 Introducción

El control estadístico de procesos es una rama de la estadística que se encarga de monitorear, controlar y asegurar la calidad de productos y servicios. Su objetivo no solo es verificar que el producto cumpla con las especificaciones establecidas, sino también evaluar cuánto tiempo puede mantener estas características sin presentar fallos. Este concepto, conocido como confiabilidad, es esencial para determinar la vida útil de un producto o sistema bajo condiciones operativas específicas.

Para la medición de la confiabilidad se debe conocer el tiempo en el que un producto o servicio falla, lo que se complica mucho, debido a que monitorear los tiempos exactos de falla de lotes grandes genera costos altos. Es por esto que el

monitoreo se realiza en periodos de tiempo. Esta situación permite identificar los elementos que dejan de funcionar, sin capturar el tiempo exacto, generando información incompleta llamada datos censurados.

Es necesario considerar estos datos para que los resultados del estudio no se vean sesgados, buscando una mayor eficiencia con métodos estadísticos que incorporen la censura, como el análisis de supervivencia de Kaplan-Meier y la Estimación de Máxima Verosimilitud.

3 Desarrollo

Según Garvin (1988), existen varias formas de medir la calidad, entre ellas, varias dimensiones; Desempeño, Confiabilidad, Durabilidad, Facilidad del servicio, Estética, Características incluidas, Calidad percibida y Conformidad con los estándares. En este caso, nos enfocaremos en definir la calidad a través de la dimensión de la confiabilidad.

3.1 ¿Qué es la confiabilidad en el contexto de la calidad?

La confiabilidad es una de las dimensiones fundamentales para medir la calidad de un producto o sistema, y responde directamente a la capacidad de funcionar correctamente (resultados esperados) durante un periodo de tiempo determinado bajo condiciones definidas.

El origen de este concepto surgió en la Segunda Guerra Mundial, en donde se desarrollaban principalmente métodos con el fin de estimar la cantidad de elementos y repuestos necesarios para mantener sus equipos electrónicos en un cierto periodo de tiempo. Luego de esto, se empezó a emplear estudios de confiabilidad en sistemas espaciales y otros dispositivos tecnológicos en el comienzo de la era espacial. Otra época en donde se utilizó este método fue en la crisis del petróleo en los años 70, se realizaban estudios de confiabilidad a ciertos productos, desarrollando las herramientas estadísticas.

La confiabilidad en el contexto de la calidad responde principalmente a la pregunta de ¿Con qué frecuencia falla el producto? En otras palabras, es una medida de la frecuencia con la que un sistema o producto puede fallar, lo que afecta directamente la satisfacción del cliente.

Un producto de alta confiabilidad es aquel que tiene pocas (dependiendo del contexto) o ninguna falla dentro de su ciclo de vida esperado, garantizando su funcionalidad de manera consistente.

3.1.1 Medidas de confiabilidad: tasa de fallos, función de confiabilidad, y tasa de riesgo

Para cuantificar la confiabilidad de un producto o servicio, se pueden emplear diferentes métodos:

- **Función de confiabilidad**

La función de confiabilidad definida como $R_T(t)$ es la probabilidad de que un sistema o producto no falle antes del tiempo t . Se define como el complemento de la función de distribución acumulativa de fallos $F_T(t)$ de la variable aleatoria T como el tiempo de funcionamiento de un producto.

$$R_T(t) = 1 - F_T(t), (t > 0)$$

Donde,

$$F_T(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f_T(u) du$$

$R_T(0) = 1$, debido a que el producto al tiempo 0 debería funcionar con 100% de probabilidad

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_T(t) = 0$$

De esta función las interpretaciones pueden ser:

La proporción de productos que sigue funcionando correctamente (de acuerdo a expectativas) después del tiempo t es X .

O bien, la probabilidad de que un producto siga funcionando correctamente (de acuerdo a expectativas) después del tiempo t es X .

- **Función de riesgo o tasa de fallas**

La probabilidad de que un producto falle a lo largo del tiempo t se evalúa con la función de riesgo o tasa de fallas en el tiempo t :

$$h_T(t) = \frac{f_T(t)}{R_T(t)}, (t > 0)$$

Donde,

$f_T(t)$, función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria T .

$R_T(t)$, función de confiabilidad en el tiempo t de la variable aleatoria T .

- **Tiempo Medio de Vida**

Esta función representa el tiempo promedio de durabilidad de un producto. Existen 2 fórmulas de cálculo.

Primeramente tenemos la fórmula de esperanza o valor esperado ya conocida,

$$E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt$$

en donde $f(t)$ corresponde a la función de densidad de probabilidad. Sin embargo, esta función funciona de mejor manera con distribuciones simétricas, por lo que cuando conocemos datos con una distribución asimétrica debemos aplicar la función cuantil (en el valor 50).

3.2 ¿Qué son los datos censurados?

Los datos censurados son aquellos en los que no es posible conocer con precisión el valor exacto de una variable de interés, pero se tiene información parcial sobre ella. Este tipo de datos aparece principalmente en estudios de análisis de supervivencia y confiabilidad debido al objetivo de analizar el tiempo hasta que ocurre un evento de falla, defecto o muerte.

3.2.1 Tipos de censura

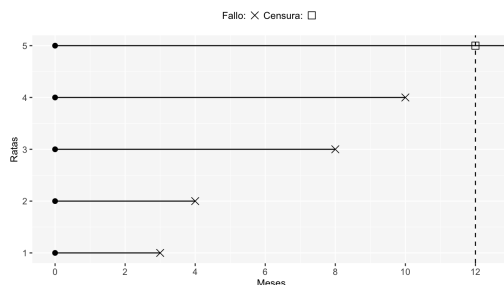
- **Censura a la derecha**

Existen dos tipos de censura por la derecha: tipo I y tipo II. La censura por la derecha tipo I ocurre cuando se establece un tiempo de seguimiento fijo al inicio del estudio. Si al finalizar este periodo no se ha observado el evento de interés en una unidad experimental, se considera que está censurada. Por otro lado, en la censura tipo II, se define previamente un número máximo de eventos a observar. Una vez alcanzado este límite, se detiene el estudio y las unidades que aún no han experimentado el evento se consideran censuradas.

Considerando un ejemplo para tipo I.

Un investigador de la facultad de ciencias realiza un estudio en 5 ratas de laboratorio y ha determinado que la duración de este será de un año y medirá el tiempo (en meses) en que cada rata fallece. Al cabo del año se obtuvieron los siguientes resultados: 3, 4, 8+, 10, 12+

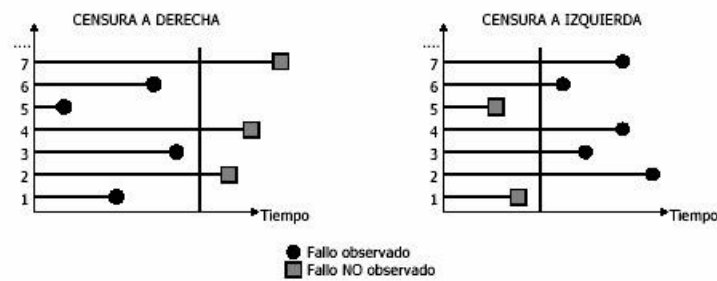
Estos datos indican que una rata murió a los 3 meses, otra a los 4, luego 8, 10 y la última permaneció con vida hasta el final de la investigación, por lo tanto, es un dato censurado.



- **Censura a la izquierda**

Ocurre cuando la unidad de análisis se estudia en un periodo de tiempo especificado. Si esta unidad ya presentó un fallo, se registra el evento, pero no se conoce el tiempo exacto en dónde fallo.

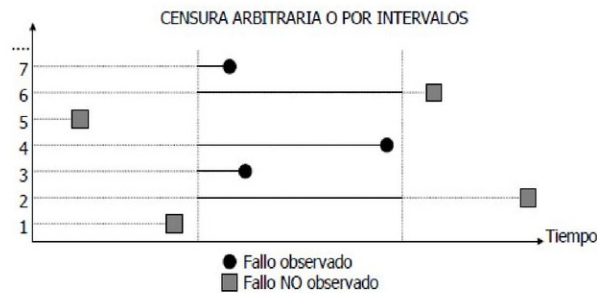
Para obtener un ejemplo gráfico de estas dos censuras, podemos observar el siguiente gráfico.



- **Censura por intervalos**

Ocurre cuando la unidad de análisis se estudia en un intervalo de tiempo, por lo que las unidades que siguen en funcionamiento fuera del intervalo de tiempo especificado se encuentran censuradas.

Gráficamente, podemos visualizar este tipo de censura con la siguiente imagen.



3.2.2 Tratamiento de datos censurados

Estos datos son comunes porque no siempre es posible observar el evento de interés en todos los individuos, unidades o productos durante el tiempo de estudio t . Sin embargo, estas observaciones parciales si pueden aportar información, por lo que es importante incorporarlas de manera adecuada. Excluir, eliminar o tomarla como datos, al igual que las demás, puede llevar a estimaciones sobre T sesgadas e ineficientes.

3.3 Modelos estadísticos para datos censurados

Ignorar la censura en el proceso de estudio de confiabilidad nos puede llevar a tomar conclusiones erróneas sobre la unidad a estudiar y los procesos en que está involucrada. Es por esto que es necesario poder estimar parámetros y funciones, para poder obtener conclusiones más precisas de la confiabilidad, considerando una posible censura de los datos.

Los modelos estadísticos ayudan a estimar la función de supervivencia (probabilidad que un producto falle en un cierto tiempo) o también predecir tiempos de fallos futuros, etc.

Existen modelos estadísticos de estimación paramétricos, en donde es necesario conocer la distribución de los datos para poder realizar las estimaciones, y los modelos no paramétricos, en donde no se requiere de ninguna hipótesis de distribución de datos. Sin embargo, es necesario comprobar el supuesto de independencia entre los tiempos de vida y tiempos de censura, debido a que modelos de supervivencia paramétricos y no paramétricos asumen la independencia entre estos. Comprobar este supuesto asegura que la censura no esté relacionada con el tiempo de ocurrencia del evento, permitiendo estimaciones correctas.

3.3.1 Análisis de supervivencia con máxima verosimilitud

El análisis de máxima verosimilitud es un método estadístico ampliamente utilizado para estimar los parámetros de un modelo probabilístico. En el contexto del análisis de confiabilidad, este método permite obtener estimaciones precisas de los parámetros de una distribución de datos conocida, logrando maximizar la probabilidad de observar los datos reales bajo ese modelo. Además, el Análisis de Máxima Verosimilitud permite estimar la función de supervivencia de los datos.

Primeramente, se define la función de supervivencia:

Cuando X es una variable aleatoria discreta.

$$S(x) = P(X > x) = \sum_{x_j > x} p(x_j)$$

Cuando X es una variable aleatoria continua.

$$S(x) = P(X > x) = \int_x^{\infty} f(t) dt$$

Los estimadores de Máxima Verosimilitud para análisis de supervivencia se pueden separar por tipos de censura.

Donde, se utiliza un tiempo exacto del evento en una observación, y entrega información sobre la probabilidad de que ocurra el evento en ese tiempo, lo que es aproximadamente igual a la función de densidad de la variable aleatoria X en ese tiempo.

Tiempo de vida exacto: (x)

Para censura a la derecha, lo que sabemos es que el tiempo de evento es mayor que ese tiempo, por lo tanto, se puede conseguir esta información con la función de supervivencia evaluada en el tiempo de inicio del estudio.

Observaciones con censura a la derecha: $S(C_r)$

Para censura a la izquierda, lo que sabemos es que el evento ya ha ocurrido en ese tiempo, por lo que, podemos conseguir esta información con función de distribución acumulada evaluada en el tiempo de inicio del estudio.

Observaciones con censura a la izquierda: $1 - S(C_l)$

Finalmente, para censura por intervalos, solo sabemos que el evento ocurrió dentro de un intervalo de tiempo, por lo tanto, podemos conseguir esta información con la probabilidad de que el tiempo de evento se encuentre dentro de ese intervalo.

Observaciones con censura por intervalos: $S(L) - S(R)$

Y la función de verosimilitud se puede construir a partir de los componentes mencionados.

$$L = \prod_{i \in D} f(x_i) \prod_{i \in R} S(C_r) \prod_{i \in L} [1 - S(C_l)] \prod_{i \in I} [S(L_i) - S(R_i)]$$

Donde,

D : Conjunto de tiempos de muerte

R : Conjunto de observaciones con censura a la derecha

L : Conjunto de observaciones con censura a la izquierda

I : Conjunto de observaciones con censura por intervalos

Ahora bien, la función de verosimilitud por:

Censura a la derecha.

$$L = \prod_{i=1}^n [f(t_i)]^{\delta_i} [S(t_i)]^{1-\delta_i}$$

Donde,

$f(t_i)$: función densidad del tiempo de vida observado

$S(t_i)$: función de supervivencia

δ_i : variable indicadora (0 si el evento fue censurado, 1 si no)

Censura a la izquierda

$$L = \prod_{i=1}^n [1 - S(t_i)]^{\delta_i} [S(t_i)]^{1-\delta_i}$$

Donde,

$1 - S(t_i)$: Probabilidad de que el evento haya ocurrido antes del tiempo t_i

$S(t_i)$: función de supervivencia

δ_i : variable indicadora (0 si el evento fue censurado, 1 si no)

Censura por intervalos

$$L = \prod_{i=1}^n [S(L_i) - S(R_i)]^{\delta_i}$$

Donde,

$S(L_i) - S(R_i)$: Probabilidad de que el evento ocurra en el intervalo $[L_i, R_i]$

δ_i : variable indicadora (0 si el evento fue censurado, 1 si no)

Como sabemos, el estimador de máxima verosimilitud se obtiene maximizando estas funciones de verosimilitud. Lo cual dependerá de la forma de las distribuciones $f(t)$ y $S(t)$.

Las distribuciones más comunes para $f(t)$ y $S(t)$ son Weibull, Exponencial, Gamma, Normal, Pareto, entre otras. Debido a la naturaleza de este tipo de datos.

3.3.2 Análisis de Kaplan-Meier

El análisis de Kaplan-Meier es un método estadístico no paramétrico, que nos ayuda a poder estimar la función de supervivencia de los datos, sin antes asumir la distribución de los datos. Esto quiere decir que, a diferencia del análisis de máxima verosimilitud, este método se adapta a cualquier tipo de dato. Además, este método ayuda a estimar la función de confiabilidad teniendo en cuenta los datos observados y los datos censurados.

La fórmula del estimador de Kaplan Meier está dada por la siguiente función

$$\hat{C}(t_{(i)}) = \prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{f(j)}{n(j)}\right)$$

En dónde,

$\hat{C}(t_{(i)})$: Estima la función de supervivencia.

$1 - \frac{f(j)}{n(j)}$: Probabilidad de que la unidad sobreviva en el tiempo t , dado que sobrevivió el periodo anterior.

f_j : Unidades que fallaron en el tiempo j .

n_j : Unidades de riesgo, la resta del total de unidades con las unidades que ya fallaron en los periodos estudiados.

¿Qué modelo estadístico utilizar?

Como ya sabemos, los dos métodos planteados tienen el fin de estimar la función de supervivencia cuando existen datos censurados dentro del estudio, sin embargo, se utilizan en distintos casos. El análisis de Máxima Verosimilitud entrega un análisis robusto de la función estimada y sus parámetros cuando se conoce la distribución exacta de los datos. Por otro lado, el análisis de Kaplan-Meier es un método más flexible debido a que se puede aplicar a datos que sigan cualquier distribución. Además, permite también realizar comparaciones de supervivencia entre grupos.

3.4 Relación entre la Confiabilidad y datos censurados

Como estudiamos en la sección 3, la confiabilidad es una dimensión que permite medir la calidad, evaluando la cantidad de tiempo que un producto funciona correctamente. Esta dimensión se mide a través de distintos estudios estadísticos, en dónde en un cierto periodo de tiempo se monitorea el funcionamiento de la unidad de estudio, sin conocer el momento exacto en dónde este dejó de funcionar. Esto es conocido como dato censurado.

El análisis de datos censurados es importante para poder completar datos faltantes, evitando sesgos en el estudio, y así, obtener información útil del tiempo de vida de la unidad de estudio. Por lo tanto, es necesario utilizar técnicas estadísticas para obtener estimaciones precisas de la vida media, tasa de fallos y la probabilidad de supervivencia.

4 Aplicación

4.1 Ejemplo áreas de aplicación

El análisis de confiabilidad es realizado en distintas áreas conocidas donde ya se aplica estudios estadísticos. Algunos ejemplos de estos casos son:

- En el ámbito de la salud se pueden realizar estudios de confiabilidad y evaluación de vida útil a medicamentos y dispositivos, como prótesis, órtesis o implantes.
- En la industria automotriz y de transporte se puede medir el tiempo de vida de distintos componentes, ya sean motores, luces, baterías, etc.
- En la industria de videojuegos se puede evaluar la tasa de fallos de los elementos virtuales, ya sean páginas web, aplicaciones o formas de pago.
- Estos mismos casos se repiten en cualquier ámbito, en dónde comúnmente se suele evaluar el tiempo de vida de algún producto a comercializar o a utilizar para procesos de producción.

4.2 Estudio de caso: Implementación del análisis de confiabilidad y tratamiento de datos censurados

4.2.1 Ejercicio 1 (EMV)

Una empresa de telefonía móvil quiere evaluar la eficiencia de tres servicios técnicos diferentes (A, B y C) a los cuales envía sus celulares para reparaciones. Se dispone de datos sobre el tiempo que cada celular funciona correctamente después de ser reparado, y se desea analizar si hay diferencias en la durabilidad de los celulares según el servicio técnico.

El periodo de interés del estudio es desde 2020 a 2023 (36 meses)

4.2.2 Objetivo

Analizar el tiempo que un celular funciona correctamente después de una reparación y evaluar si el servicio técnico influye en la durabilidad.

4.2.3 Preguntas

1. ¿Cuál es la tasa de fallas acumulada para cada servicio técnico?
2. ¿Cuál es la mediana de durabilidad de los celulares después de ser reparados, según el servicio técnico?
3. ¿Existen diferencias significativas en la durabilidad de los celulares según el servicio técnico?

4.2.4 Resolución

<https://github.com/angellds3/AnalisisDeSupervivencia/tree/main/Analisis%20de%20supervivencia%20EMV>



4.2.5 Ejercicio 2

Una empresa de telecomunicaciones desea predecir el tiempo hasta que un cliente se dé de baja de la compañía. El tiempo que un cliente ha sido parte de esta se encuentra en la variable *tenure*, y el indicador de si el cliente ha abandonado está en la variable *Churn* (1 si el cliente se dio de baja, 0 si sigue activo). Los clientes que no se han dado de baja son ejemplos de datos censurados, ya que desconocemos cuánto tiempo más permanecerán como clientes.

4.2.6 Objetivo

El objetivo de este ejercicio es utilizar el análisis de Kaplan-Meier, para estimar la función de supervivencia del tiempo hasta el abandono de clientes en una empresa de telecomunicaciones

4.2.7 Preguntas

1. ¿Cuál es la tasa de abandono acumulado?
2. ¿Cuál es la función de supervivencia estimada utilizando el análisis de Kaplan-Meier para el tiempo hasta el abandono de los clientes?
3. ¿Cuál es el tiempo medio de permanencia de los clientes en el servicio antes de hacer el abandono?

4.2.8 Resolución

<https://github.com/angelllds3/AnalisisDeSupervivencia/tree/main/Analisis%20de%20supervivencia%20KAPLAN%20MEIER>



5 Conclusión

Como hemos visto, la confiabilidad es un factor crucial para evaluar la calidad de un producto. Sin embargo, su estudio presenta desafíos, especialmente cuando se requiere información precisa sobre el tiempo de vida útil, lo que hace necesario el uso de técnicas estadísticas que incorporen los datos censurados en el análisis. Entre estas técnicas, destacan el análisis de Kaplan-Meier y la estimación de máxima verosimilitud (EMV), que permiten manejar datos incompletos de manera efectiva, evitando sesgos y mejorando la calidad de las decisiones. Mientras que la EMV es adecuada para datos con distribuciones conocidas, el análisis de Kaplan-Meier ofrece un enfoque flexible aplicable a cualquier tipo de distribución.

Es fundamental aplicar estas técnicas estadísticas para reflejar con precisión la realidad de la organización y así obtener conclusiones que respalden una toma de decisiones eficiente, tanto a corto como a largo plazo.

6 Referencias

- Garvin, D.A. (1988): Managing Quality, Nueva York: The Free Press.
- Montgomery, D. C. (2004). Control estadístico de la calidad (3.^a ed.). Limusa Wiley.
- San José, B., Pérez, E., Madero, R. (2009). Métodos estadísticos en estudios de supervivencia. Anales de Pediatría Continuada, 7(1), 55-59. [https://doi.org/10.1016/S1696-2818\(09\)70453-6](https://doi.org/10.1016/S1696-2818(09)70453-6)
- Moore, D. F. (2016). Applied survival analysis using R. Springer International Publishing.