

1. (30%) Use the demodulated signal in matrix form on page 64 of Chapter 3 to show that the received signal Y_k with insufficient CP is given by

$$Y_k = H_k X_k + \sum_{k'=0}^{N-1} \left[\mathbf{F} \mathbf{H}_{ISI} \mathbf{F}^{-1} \right]_{k+1, k'+1} X_{k'}^{(-)} - \sum_{k'=0}^{N-1} \left[\mathbf{F} \mathbf{H}_{ICI} \mathbf{F}^{-1} \right]_{k+1, k'+1} X_{k'} + N_k,$$

where \mathbf{H}_{ISI} is a $N \times N$ upper triangular Toeplitz matrix with first row being

$$[0, \dots, 0, h[L_h-1], \dots, h[N_g+1]], \text{ and } \mathbf{H}_{ICI} = \mathbf{H}_{ISI} \mathbf{J}^{N_g}.$$

$$\begin{aligned} Y &= \mathbf{F} \Gamma \mathbf{G} u + \mathbf{F} \Gamma \mathbf{G}^{(-)} u^{(-)} + N \\ &= \mathbf{F} \Gamma \mathbf{G} \Theta \mathbf{F}^{-1} X + \mathbf{F} \Gamma \mathbf{G}^{(-)} \Theta \mathbf{F}^{-1} X^{(-)} + N \\ &= \mathbf{F} \mathbf{H}_{e, cp} \mathbf{F}^{-1} X + \mathbf{F} \mathbf{H}_{e, cp}^{(-)} \mathbf{F}^{-1} X^{(-)} + N \end{aligned}$$

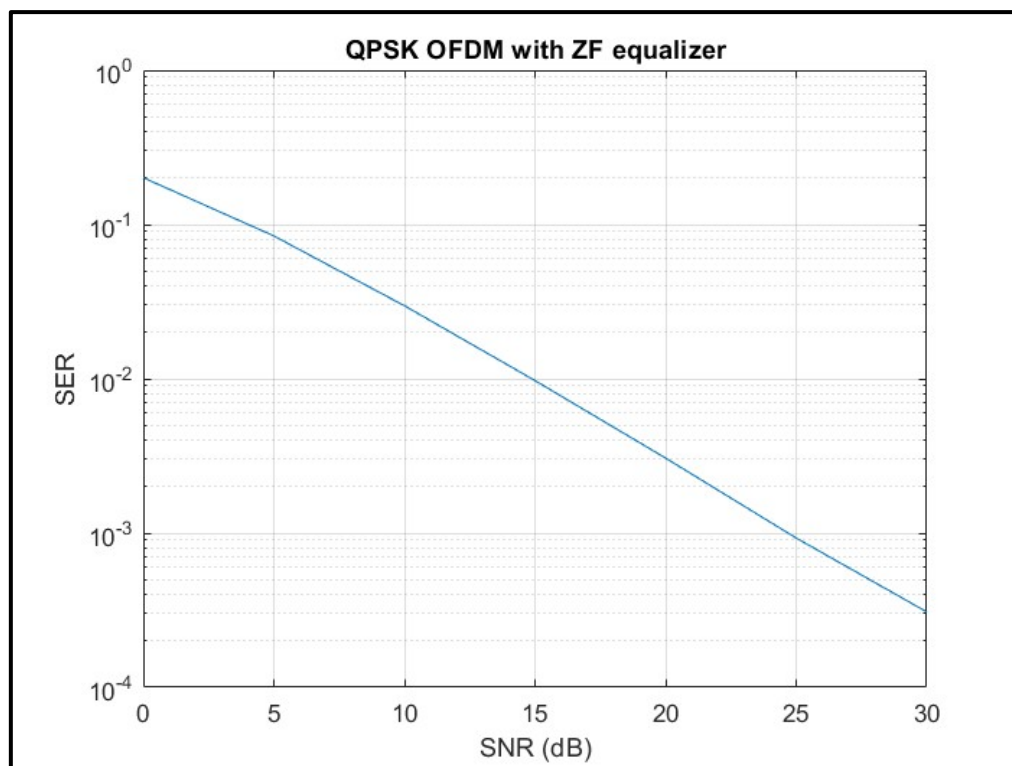
$$(i) \mathbf{H}_{e, cp} = \mathbf{H}_e - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & h[L_h-1] & h[L_h-2] & \cdots & h[N_g+1] & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & h[L_h-1] & \cdots & h[N_g+2] & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & & & 0 & \cdots & h[L_h-1] & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & 0 & & & \end{bmatrix} = \mathbf{H}_e - \mathbf{H}_{ISI} \mathbf{J} = \mathbf{H}_e - \mathbf{H}_{ICI}$$

$$(ii) \mathbf{H}_{e, cp}^{(-)} = \mathbf{H}_{ISI}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y &= \mathbf{F} \mathbf{H}_{e, cp} \mathbf{F}^{-1} X + \mathbf{F} \mathbf{H}_{e, cp}^{(-)} \mathbf{F}^{-1} X^{(-)} + N \\ &= \mathbf{F} (\mathbf{H}_e - \mathbf{H}_{ICI}) \mathbf{F}^{-1} X + \mathbf{F} \mathbf{H}_{ISI} \mathbf{F}^{-1} X^{(-)} + N \\ &= \underbrace{\mathbf{F} \mathbf{H}_e \mathbf{F}^{-1}}_{\text{diagonal}} X + \mathbf{F} \mathbf{H}_{ISI} \mathbf{F}^{-1} X^{(-)} - \mathbf{F} \mathbf{H}_{ICI} \mathbf{F}^{-1} X + N \end{aligned}$$

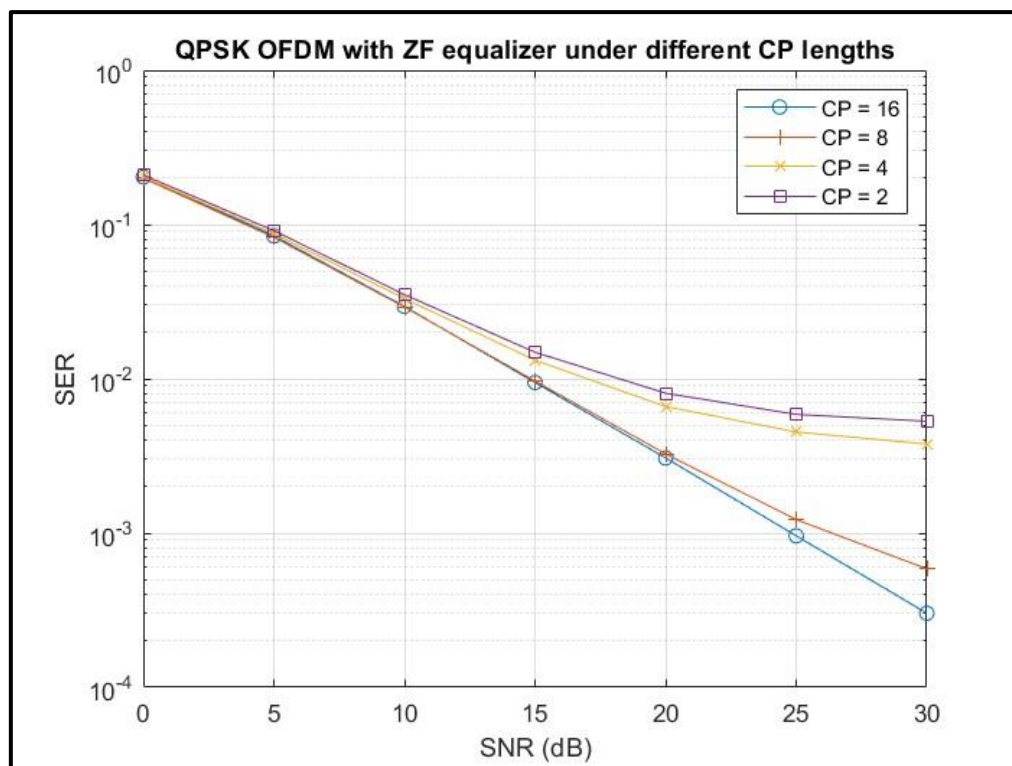
$$\Rightarrow Y_k = H_k X_k + \sum_{k'=0}^{N-1} [\mathbf{F} \mathbf{H}_{ISI} \mathbf{F}^{-1}]_{k+1, k'+1} X_{k'}^{(-)} - \sum_{k'=0}^{N-1} [\mathbf{F} \mathbf{H}_{ICI} \mathbf{F}^{-1}]_{k+1, k'+1} X_{k'} + N_k$$

I. Plot the SER curve for $\text{SNR}_i = 0 : 5 : 30$ dB using 1000 packets.



- A. $N_g = 16, L_h = 10 \Rightarrow N_g \geq L_h - 1 \Rightarrow CP$ 可以把 ISI 完全消除
- B. $F \cdot H_e \cdot F^{-1} = \text{diagonal matrix}, H_e = \Gamma \cdot G \cdot \Theta$ ，這樣 256 個 subcarrier 就可以轉成 256 個平行通道
- C. $Y_k = H_k X_k \Rightarrow \frac{Y_k}{H_k} = \hat{X}_k \Rightarrow$ 接收端使用 zero-forcing equalizer
- D. single packet 期間為 slow fading，再加上 OFDM 的每個 subcarrier 通道為 flat fading，所以可把 H_k 視為 constant，那這樣 SER 趨勢就會和沒有 fading (only AWGN) 的趨勢差不多，因為只差一個常數項比例
- E. QPSK(no fading) 的 SER，會隨 SNR 增加而指數下降，取 log 後呈直線下降的趨勢

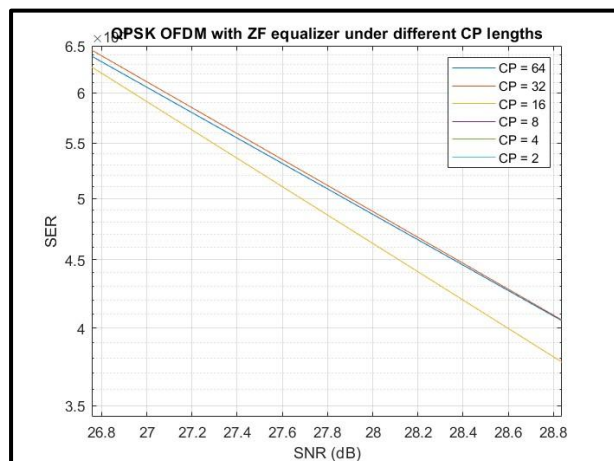
II. Repeat (a) with different CP lengths: $N_g = 16, 8, 4$ and 2.



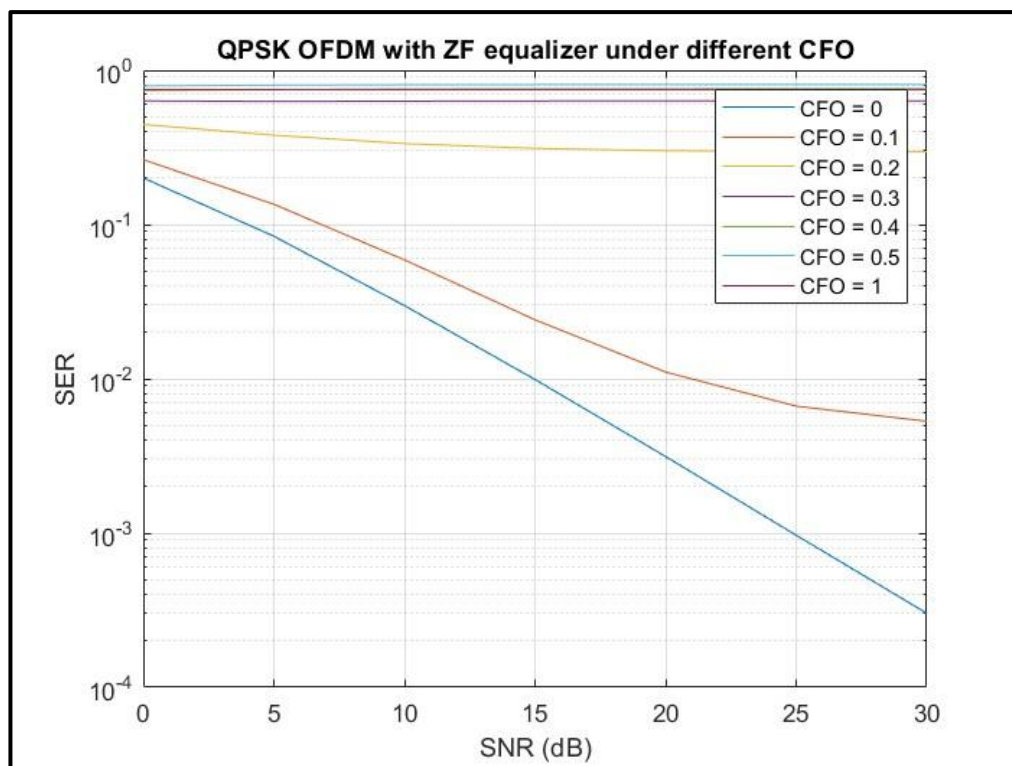
- A. $N_g < L_h - 1 \Rightarrow$ CP 長度不夠 $\Rightarrow F \cdot H_e \cdot F^{-1} \neq \text{diagonal matrix} \Rightarrow$ 產生 ISI+ICI
- B. ZF 只是做 $\frac{1}{H_k}$ ，因此無法把 ISI 完整消除，SER 增加
- C. CP 越短，ISI 越多，SER 越大
- D. 但把 CP 長度不斷加大，發現 SER 反而有可能會增加，因為 CP 是一種 redundancy，會浪費 power 與頻寬，導致實際有效 data 得到的實質 Tx 功率降低

$$\text{for example: } SNR = \frac{E_s}{N_0} \cdot \frac{N_{data}}{N_{FFT} + N_g}$$

下圖為折線圖放大其中一部分的樣子，可看到 CP 增加，SER 也是有可能變大



III. Repeat (a) with different frequency offsets: $f_{\text{offset}}T = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ and 1.0 .



- A. CFO=0, subcarrier 間沒有頻率偏移, 維持正交性, 能很好的 detect 原始訊號
- B. CFO!=0, 有頻率偏移, subcarrier 彼此間不再正交, 出現 ICI 的問題, SER 上升
- C. CFO=1, subcarrier 的 null 會成功對到 peak, 有正交, 但是等於我取到的訊號是其他 subcarrier 上的訊號, 完全錯誤, 救不回來
- D. 通常會用 data-aided 的方法, 例如 pilot 或 training symbols, 插入到傳輸訊號中, 讓 Rx 可估計 CFO 並自行修正錯誤
- E. 可以看到頻率偏移會對 OFDM 造成影響, 所以 Doppler 效應會降低 OFDM 效能, 假如傳輸/接收端移動速度持續提高, 將不再適用 OFDM