

1. (20%) Assume there are Q users, each user's transmitted symbol is s and $\mathbb{E}\{ss^H\} = \mathbf{I}$, and

\mathbf{n} is independent and identically distributed (i.i.d.) additive Gaussian noise. The received

signal chip sampled over the k th symbol is

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k),$$

where $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_Q]$: channel matrix,

$\mathbf{A} = \text{diag}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_Q]$: power control factor,

$\mathbf{s}(k) = [s_1(k), s_2(k), \dots, s_Q(k)]^T$: transmit symbol.

Based on the Minimum Mean Square Error (MMSE) detector design criterion on p. 29 of

Chapter 2, please derive the Wiener solution expressed in \mathbf{R}_{xx} and \mathbf{r}_{xs} which are signal

correlation matrix and cross-correlation vector, respectively.

(i) $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{s}}(k) = \mathbf{D}_{MS}^H \mathbf{x}(k)$,

$$\mathbf{D}_{MS} = \arg \min_{\mathbf{D}} E \{ \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k) - \mathbf{D}^H \mathbf{x}(k)\|^2 \}$$

(ii) $E \{ \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k) - \mathbf{D}^H \mathbf{x}(k)\|^2 \}$

$$= E \{ \text{tr} [(\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k) - \mathbf{D}^H \mathbf{x}(k)) (\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k) - \mathbf{D}^H \mathbf{x}(k))^H] \}$$

$$= \text{tr} [E \{ \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k)\|^2 \} - E \{ \mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k) \mathbf{x}^H(k) \mathbf{D} \} - E \{ (\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k) \mathbf{x}^H(k) \mathbf{D})^H \} + E \{ \|\mathbf{D}^H \mathbf{x}(k)\|^2 \}]$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}\mathbf{A}^H & \mathbf{A} E \{ \mathbf{s}(k) [\mathbf{H}\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k) + \mathbf{n}(k)]^H \} \mathbf{D} & (\mathbf{r}_{xs} \mathbf{D})^H & \mathbf{D}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{D} \\ & = \mathbf{A}\mathbf{A}^H \mathbf{H}^H \mathbf{D} & = \mathbf{D}^H E \{ (\mathbf{H}\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k) + \mathbf{n}(k)) (\mathbf{H}\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k) + \mathbf{n}(k))^H \} \mathbf{D} \\ & = \mathbf{r}_{xs} \mathbf{D} & = \mathbf{D}^H [\mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{A}^H \mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}] \mathbf{D} \end{aligned}$$

(iii) Let $\frac{\partial}{\partial \mathbf{D}} E \{ \|\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k) - \mathbf{D}^H \mathbf{x}(k)\|^2 \} = 0$

$$\Rightarrow \mathbf{R}_{xx} \mathbf{D} - \mathbf{r}_{xs} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_{MS} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xs}, \quad \begin{cases} \mathbf{R}_{xx} = \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{A}^H \mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \\ \mathbf{r}_{xs} = \mathbf{A}\mathbf{A}^H \mathbf{H}^H \end{cases}$$

For single user detection (detect user 1)

(i) $\hat{s}_1(k) = \mathbf{d}_{MS}^H \mathbf{x}(k)$, $\mathbf{d}_{MS} = \arg \min_{\mathbf{d}} E \{ \|\mathbf{s}_1(k) - \mathbf{d}^H \mathbf{x}(k)\|^2 \}$

(ii) $E \{ \|\mathbf{s}_1(k) - \mathbf{d}^H \mathbf{x}(k)\|^2 \}$

$$= E \{ (\mathbf{s}_1(k) - \mathbf{d}^H \mathbf{x}(k)) (\mathbf{s}_1(k) - \mathbf{d}^H \mathbf{x}(k))^H \}$$

$$= \sigma_1^2 - \mathbf{r}_{xs} \mathbf{d} - (\mathbf{r}_{xs} \mathbf{d})^H + \mathbf{d}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{d} = \mathbf{d}^H E \{ (\mathbf{H}\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k) + \mathbf{n}(k)) (\mathbf{H}\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k) + \mathbf{n}(k))^H \} \mathbf{d}$$

$$= E \{ \mathbf{s}_1(k) \mathbf{x}^H(k) \} \mathbf{d} = \mathbf{d}^H [\mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{A}^H \mathbf{H}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}] \mathbf{d}$$

$$= E \{ \mathbf{s}_1(k) [\mathbf{H}\mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}(k) + \mathbf{n}(k)]^H \} \mathbf{d} = \sigma_1^2 \mathbf{h}_1 \mathbf{d}$$

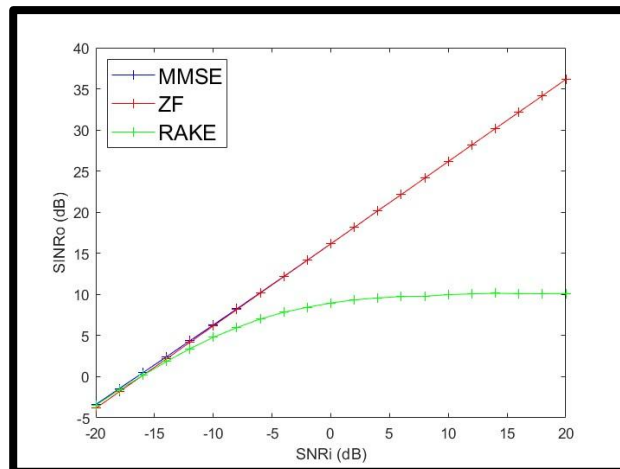
$$\sum_{i=1}^Q \sigma_i^2 \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H$$

(iii) Let $\frac{\partial}{\partial \mathbf{D}} E \{ \|\mathbf{s}_1(k) - \mathbf{d}^H \mathbf{x}(k)\|^2 \} = 0$

$$\Rightarrow \mathbf{R}_{xx} \mathbf{d} - \mathbf{r}_{xs} = 0 \Rightarrow \mathbf{d}_{MS} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xs}, \quad \begin{cases} \mathbf{R}_{xx} = \sum_{i=1}^Q \sigma_i^2 \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \\ \mathbf{r}_{xs} = \sigma_1^2 \mathbf{h}_1 \end{cases}$$

II. (a) Plot SINRo (output SINR in dB) of the detectors as a function of SNRi (from -20 to 20 dB with an increment of 2 dB) with SIRi = 0 dB and Q = 8.

```
Q = 8; % number of active users
L = 5; % number of paths (fingers)
N = 48; % random code length
```



【COMMENT】

1. 因為 spreading code 和 fading gain 每次都是隨機產生的，所以重複做了 5000 次模擬並取平均，才能得到較為客觀的 SINRo。

2. **RAKE**：隨著 SNRi 上升，SINRo 跟著上升的幅度大幅趨緩。

也就是說，其他 user 的 SNR 增加(interference 增加)，RAKE 效果便大幅降低。

<原因> RAKE 只做 match filter($\times H^H$)最大化 SNR，不會對 MAI 進行處理。

$$As(k) \xrightarrow{\text{channel}} HAs(k) \xrightarrow{\text{RAKE receiver}} H^H HAs(k) = GAs(k)$$

$$G = H^H H = \begin{bmatrix} h_1^H h_1 & \cdots & h_1^H h_Q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_Q^H h_1 & \cdots & h_Q^H h_Q \end{bmatrix}$$

❖ 對角線元素 $h_i^H h_i$ = processing gain = spreading seq. 長度。

❖ 非對角線元素 $h_i^H h_j$ = 不同 user 之間的干擾 $\neq 0$ 。

user 數量很大時，很難做到所有 spreading seq. 互相正交。

即使做到互相正交，經過 multipath 後，不同延遲還是會破壞正交性，所以

$h_i^H h_j$ 不可能全部為 0，代表 MAI 不會被消除。

3. **ZF**：在 SNRi 低時，效果不佳，因為會放大 noise。

<原因> ZF 直接用 $\times H^{-1}$ 消除所有 interference。

$$As(k) \xrightarrow{\text{channel}} HAs(k) \xrightarrow{\text{ZF receiver}} H^{-1} HAs(k) = As(k)$$

when $H \rightarrow \text{singular}$, $H^{-1} \rightarrow \infty \Rightarrow H^{-1}n(k) \rightarrow \infty$

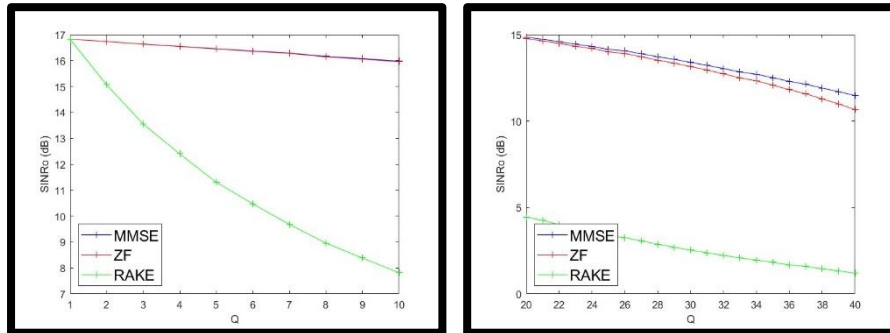
4. **MMSE**：依據通道情況調配，同時壓低雜訊及干擾，以達到最佳效果。

在高 SNR 時，MMSE \rightarrow ZF，可以直接使用 ZF 把干擾消乾淨就好，不用再同時權衡雜訊及干擾。

5. 通常會先用 RAKE 最大化 SNR，再用 ZF 或 MMSE 做二次處理，消除 MAI。

II. (b) Plot SINRo (output SINR in dB) of the detectors as a function of Q (from 1 to 10) with SNRi = 0 dB and SIRi = 0 dB.

```
L = 5; % number of paths (fingers)
N = 48; % random code length
trial = 5000; % number of Monte Carlo runs
SNR = 0;
NPW = 10^(-SNR/10);
QQ = 1:1:10; % number of active users
```



【COMMENT】

1. **RAKE**：如前所述，不處理 MAI，所以 $Q \uparrow \Rightarrow I \uparrow \Rightarrow \text{SINRo} \downarrow \downarrow$ 。

2. **ZF& MMSE**：有處理 MAI，所以 $Q \uparrow$ 時仍表現良好。

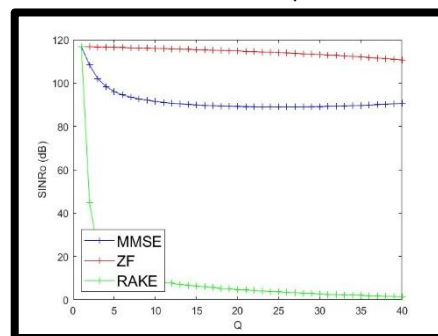
此題參數設定為 $\text{SNR}=0\text{dB}$ (沒有很大)，所以當 Q 持續增加時，可明顯看到 MMSE 表現優於 ZF，因為 MMSE 同時處理了 I 和 N ，而 ZF 只處理了 I 。

3. 當 $\text{SNR}=100\text{dB}$ (把 SNR 調超大) 時，可看到 ZF 明顯優於 MMSE。

ZF& MMSE：如(a)所提到的，當 SNR 超大時，可直接忽略 N ，利用 ZF 專心把 I 消除乾淨即可，不用再用 MMSE 同時消除 N 和 I 。

RAKE：如(a)所提到的，SNR 增加(interference 大幅增加)，SINRo 大幅降低。

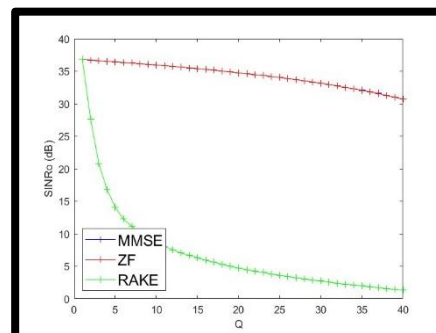
```
L = 5; % number of paths (fingers)
N = 48; % random code length
trial = 5000; % number of Monte Carlo runs
SNR = 100;
NPW = 10^(-SNR/10);
QQ = 1:1:40; % number of active users
```



4. **結論**：通常會先用 RAKE 最大化 SNR，再用 ZF 或 MMSE 做二次處理，消除 MAI。

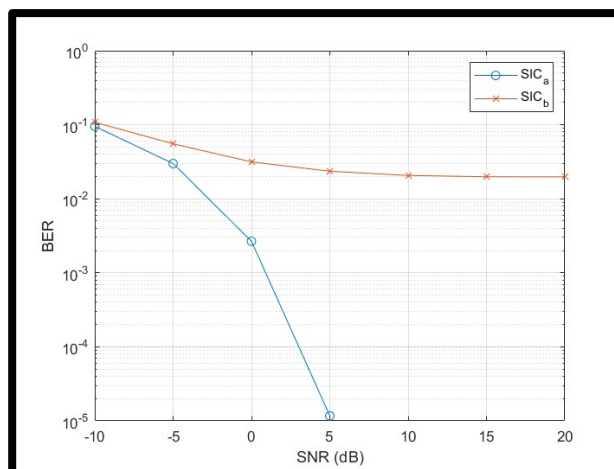
SNR 大時 \rightarrow 用 ZF，SNR 小時 \rightarrow 用 MMSE。可以 $\text{SNR}=20\text{dB}$ 為分界，因為從模擬結果所示， $\text{SNR}=20\text{dB}$ 時，ZF 和 MMSE 效果幾乎相同。

```
L = 5; % number of paths (fingers)
N = 48; % random code length
trial = 5000; % number of Monte Carlo runs
SNR = 20;
NPW = 10^(-SNR/10);
QQ = 1:1:40; % number of active users
```



III. (a)(b) Perform SIC detection on the three users in the order of descending(a)/ ascending(b) power levels. Plot the average bit error rate of the three users as a function of input SNR1 (from -10 to 20 dB with an increment of 5 dB).

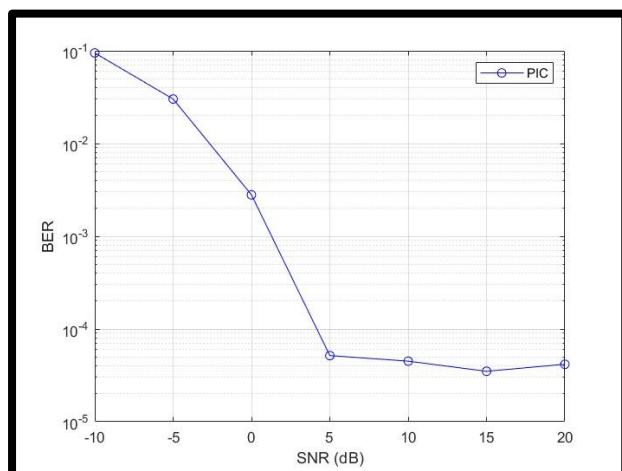
```
Q=3; % number of active users
L=5; % number of paths (fingers)
N=48; % random code length
```



【COMMENT】

1. **SIC_a**：接收訊號中，**強的先解**，解完再解下一個。
SIC_b：接收訊號中，**弱的先解**，解完再解下一個。
2. 強的訊號比較容易解成功，所以從強的先解，造成 error propagation 的機率降低，整體的 BER 也會跟著降低。
 從模擬結果來看，BER of SIC_a < BER of SIC_b，代表**SIC_a效果較佳**。
3. **SNR 很小時**：不管先解強的還是弱的，都容易解錯(SNR 都很小)，所以SIC_a和SIC_b的 BER 差距沒有那麼大，因為不論甚麼順序解讀，整體錯誤率都很高，但SIC_a效果還是比SIC_b好。
SNR 很大時：強的訊號很容易被解出來，並準確的從原本接收訊號中去除，再解下一個。所以SIC_a和SIC_b的 BER 差距直接拉開，差異明顯。

III. (c) Perform PIC detection on the three users. Plot the average bit error rate of the three users as a function of input SNR1 (from -10 to 20 dB with an increment of 5 dB).



【COMMENT】

1. PIC：

- Q 個 user 訊號一起解，得到 $\hat{s}_1^{(m)}(k), \dots, \hat{s}_Q^{(m)}(k)$
- $\hat{s}_1^{(m)}(k), \dots, \hat{s}_Q^{(m)}(k)$ 重建成 $\hat{x}_1^{(m)}(k), \dots, \hat{x}_Q^{(m)}(k)$
- 利用 $\hat{x}_1^{(m)}(k), \dots, \hat{x}_Q^{(m)}(k)$ 重建出每個 user 的干擾訊號，例如 user1 的干擾訊號是 $\sum_{i \neq 1} \hat{x}_i^{(m)}(k)$
- 利用重建出的每個 user 的干擾訊號，從接收訊號中扣掉，得到較為乾淨的每個 user 的訊號，再回到 a. 來解出 $\hat{s}_1^{(m)}(k), \dots, \hat{s}_Q^{(m)}(k)$ ，一直重複 a. to d.

2. SNR 很小時：所有 user 訊號都容易解錯，整體 BER 也會比較大。

SNR 很大時：因為 PIC 是所有 user 一起解，此題設定不同 user 的 SNR 不同(no power control)，所以在解較弱訊號的使用者時，因為沒有先消除強的訊號(干擾)後才解，會造成較大的錯誤率，效果比 SIC_a 差。

III. (d) Compare the results in (a)-(c). Which detection scheme is the best for such a scenario? Why?

【COMMENT】

1. 如(a)(b)所述，SIC_a(強的先解)永遠比SIC_b(弱的先解)好，後續只比較SIC_a和PIC。

2. SIC 和 PIC 比較

	架構	Delay	Power Control
SIC _a	簡易	LONG 一次 stage 解一個 user， Q 個 user 就需要 Q 次 stages →更容易有 error propagation	因為一個個 user 解讀， 能較好解出 weak user → 不用 power control
PIC	複雜	SHORT 一次解全部的 user， 只需要約 2-4 個 stages 就能把所有 user 的訊號清的足夠乾淨	因為所有 user 一起解讀， Rx 接收到的各 user 能量要差不多，避免 near-far effect → 需要 power control

3. 場景應用

場景	SIC/PIC	原因
有 power control	PIC	SIC 有更多的 error propagation
沒有 power control	SIC	PIC 在解較弱訊號時，沒有先消除強的訊號才解，會有較大的錯誤率
只有一條 path	PIC	SIC 在單一 path 下，error propagation 會更明顯，因為無法用其他 path 來消除干擾