Sorbonne Université

2I006 : Algorithmique appliquée et structures de données

Projet :

Sorting Robot

Kamil Rzeszutko
Angelo Ortiz

Licence d'Informatique
Année 2017/2018

Table des matières

Introduction

Présentation

Le projet mini projet consiste en la résolution du problème du robot trieur... L'objectif de ce travail est de sensibiliser les étudiants au choix de la structure de données la plus adéquate dans le cadre d'un projet défini, ici, la gestion efficace d'un conteneur de données, au travers des mesures de temps de calcul et de la mémoire utilisée pour une telle mise en place.

Aperçu

...

L'organisation du code

Le répertoire correspondant à ce projet comporte plusieurs sous-répertoires que l'on expliquera en détail ci-dessous.

bin

Ce dossier contient les fichiers exécutables des test des fonctions implémentées.

data

Ce dossier contient les résultats des différents tests de performance des algorithmes implémentés.

img

Ce dossier contient les courbes de comparaison obtenues à partir des données du dossier **data**.

include

Ce dossier contient les fichiers d'en-tête répartis en deux sous-dossiers **lib** et **src**, chacun contenant les fichiers associés au fichiers source des répertoires du même nom.

lib

Ce dossier contient les fichiers source fournis

Makefile

Ce fichier automatise la compilation des sources

obj

Ce dossier contient les fichiers objet correspondant aux fichiers sources et aux fichiers exécutables

report

Ce dossier contient ce document et les fichiers LaTeX nécessaires pour sa bonne mise en forme

scripts

Ce dossier contient les commandes à transmettre à *gnuplot* pour obtenir des courbes à partir des données brutes

solutions

Ce dossier contient les solutions obtenues, i.e. les chaînes de caractères définissant les mouvements du robot trieur, pour les différentes fonctions de résolution

src

Ce dossier contient les fichiers source des fonctions de base et des fonctions de résolution du problème du robot trieur que l'on a implémenté

tests

Ce dossier contient les fichiers source des tests de fonctionnement et de performance.

Première partie
Algorithme au plus proche

Dans cette première partie, on vous présente l'analyse faite pour chacune des versions implémentées de l'algorithme au plus proche, à savoir les versions naïve, circulaire, par couleur et par AVL.

1 Version naïve

Plus court chemin

Soient les deux cases (i, j) et (k, l) dans une grille à m lignes et n colonnes. Soit la fonction $\texttt{dist}((i, j), (k, l)) = |k - i| + |l - j|$. Soit la propriété suivante $P(r), r \geq 0$:

— Le chemin VH qui consiste à se déplacer de $|k - i|$ cases verticalement vers (k, j), puis de $|l - j|$ cases horizontalement vers (k, l), et

— le chemin HV qui consiste à se déplacer de $|l - j|$ cases horizontalement vers (i, l), puis de $|k - i|$ cases verticalement vers (k, l),

sont des plus courts chemins, où $r = \texttt{dist}((i, j), (k, l)) \geq 0$.

Montrons cette propriété par récurrence faible sur $r \geq 0$.

Preuve

Base : Pour $r = 0$, $(k, l) = (i, j)$. On se déplace de 0 case verticalement et horizontalement. Ainsi, on reste dans la même case. Donc, la propriété est vérifiée pour $r = 0$.

Induction : Supposons que la propriété soit vérifiée pour un $0 \leq r \leq m+n-3$ fixé. Montrons que la propriété est aussi vérifiée pour $r + 1$.

Soient $p = |k - i|, q = |j - l| \in \mathbb{N}$, tels que $r + 1 = p + q$. Puisque $r + 1 \geq 1$, au moins l'une des variables est non nulle. Supposons sans perte de généralité que $p > 0$, i.e. $p - 1 \geq 0$.

Trois cas sont possibles :

1. $i = 0$:
   Tout d'abord, $p = |k - 0| = k$. Puis, pour aller de la case $(0, j)$ vers la case (k, l) avec un premier déplacement vertical d'une case, il faut passer par la case $(1, j)$. On a que $|k - 1| = p - 1$ et, en conséquence, $\texttt{dist}((1, j), (k, l)) = (p - 1) + q = r$. Par hypothèse de récurrence, $P(r)$ est vérifiée. De ces deux faits, le chemin se déplaçant de $|k|$ cases verticalement vers (k, j), puis de $|l-j|$ cases horizontalement vers (k, l) est un plus court chemin.
2. $i = m - 1$:
   Tout d'abord, $p = |k - (m - 1)| = m - k - 1$. Puis, pour aller de la case $(m - 1, j)$ vers la case (k, l) avec un premier déplacement vertical d'une case, il faut passer par la case $(m - 2, j)$. On a que $|k - (m - 2)| = (m - 2) - k = p - 1$ et, en conséquence, $\texttt{dist}((m - 2, j), (k, l)) = (p - 1) + q = r$. Par hypothèse de récurrence, $P(r)$ est vérifiée. De ces deux faits, le chemin se déplaçant de $|k - (m - 1)|$ cases verticalement vers (k, j), puis de $|l - j|$ cases horizontalement vers (k, l) est un plus court chemin.
3. $0 < i < m - 1$:
   Pour aller de la case (i, j) vers la case (k, l) avec un premier déplacement vertical d'une case, il faut passer par la case (h, j), où $h \in \{i - 1, i + 1\}$, telle que $0 \leq h < m$ et $|k - h| = p - 1$. On a alors que $\texttt{dist}((h, j), (k, l)) = (p - 1) + q = r$. Par hypothèse de récurrence, $P(r)$ est vérifiée. Donc, en particulier, le chemin se déplaçant de $|k - h|$

cases verticalement vers (k, j), puis de $|l-j|$ cases horizontalement vers (k, l) est un plus court chemin.

On fait de même pour $q > 0$ avec un traitement non plus sur les lignes, mais sur les colonnes de la grille, et on obtient que le chemin se déplaçant de $|l-j|$ cases horizontalement vers (i, l), puis de $|k-i|$ cases verticalement vers (k, l) est un plus court chemin

Conclusion :

$$\left.\begin{array}{l} P(0) \text{ vraie} \\ \forall r \in \{0, \ldots, m+n-3\}, [P(r) \implies P(r+1)] \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall r \in \{0, \ldots, m+n-2\}, \\ \text{les chemins } VH \text{ et } HV \\ \text{sont des plus courts chemins.} \end{array}$$

Fonctions auxiliaires

- La fonction `estCaseNoire` nous permet de savoir si une case est noire, i.e. si elle porte une pièce de même couleur.
- La fonction `estPieceNoire` nous permet de savoir si une pièce est non noire, i.e. si sa couleur est différente de -1.
- La fonction `robotPortePiece` nous permet de savoir si le robot porte une pièce, i.e. si la couleur de la "pièce" du robot est différente de -1.
- La fonction `couleurPieceRobot` nous permet de savoir dans le cas où le robot porte une pièce, sa couleur.

Analyse de la complexité

Pour l'analyse de la complexité des quatre implémentations, on commence par les morceaux de code communs aux toutes. Dans le pire cas, il n'y a aucune case noire dans la grille, i.e. il y a $O(n^2)$ pièces à traiter, ce qui apparaît sous la forme d'une boucle `while` dans le code fourni, en l'occurrence la boucle principale des fonctions. De plus, la recherche d'une pièce non noire aux alentours du robot est faite au tout début de l'algorithme et à chaque fois que l'on ferme un circuit : cela dépend fortement du nombre de cycles dans la grille. Par conséquent, ceci n'est pas pris en compte pour l'analyse de la complexité et celle-ci se réduit à la recherche de pièces. Par ailleurs, on a un paramètre $\alpha = \left\lceil \frac{nm}{c} \right\rceil$, où m, n et c correspondent respectivement au nombre de lignes, de colonnes et de couleurs de la grille. Ici, $\alpha = \left\lceil \frac{n^2}{c} \right\rceil$.

Les deux premières implémentations de l'algorithme au plus proche ont une complexité en $O(n^4)$. Pour chaque pièce on cherche la case la plus proche dont la couleur coïncide avec la sienne. L'implémentation naïve de l'algorithme fait une recherche sur toute la grille, ce qui est de l'ordre de $\Theta(n^2)$. Quant à la deuxième, la recherche est circulaire et on a donc une complexité en $O(n^2)$.

Il est impératif de remarquer que la recherche circulaire est plus rapide au fur et à mesure que le paramètre α augmente.

On a comparé les temps d'exécution des versions naïve et circulaire pour des grilles carrées de taille variable : la première version met

Les expérimentations ont été faites avec un nombre de couleurs égal à $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, ce qui donne $\alpha \approx 2n$. Comme dit précédemment, ce paramètre est important pour la durée effective de la recherche circulaire. C'est pourquoi on a obtenu des meilleurs résultats pour la deuxième version alors que la complexité pire-cas est la même pour toutes les deux.

2 Version circulaire

Analyse de la complexité

...

3 Version par couleur

Analyse de la complexité

L'analyse de la complexité de l'implémentation par couleur de l'algorithme au plus proche se fera en deux parties. Dans un premier temps, on détermine une borne supérieure de la complexité. En effet, le robot porte une pièce à presque tout moment du jeu et cherche alors la case de même couleur la plus proche de lui. On a un accès en $\Theta(1)$ à la liste chaînée correspondant à la couleur de la pièce et on est obligé de parcourir toute la liste car il n'y a pas d'ordre défini lors de l'insertion. Soit l la longueur de la liste chaînée. On a donc que la complexité de la recherche de ladite case est en $\Theta(l)$. Or on a $l \leq n^2$. On en déduit que le traitement d'une pièce est de l'ordre de $O(n^2)$, ce qui donne une complexité en $O(n^4)$ pour cette version. Nonobstant, on a négligé un facteur clé de cette version : le paramètre α représentant le nombre maximal de pièces d'une même couleur et ainsi celui des cases de même couleur.

Dans l'étape suivante, on tient compte de ce paramètre dans l'analyse et on remarque qu'il remplace n^2 dans le paragraphe ci-dessus. De ce fait, on obtient que la complexité de la recherche dans la liste chaînée est en $O(\alpha)$, ce qui donne finalement une complexité en $O(\alpha n^2)$ pour la version par couleur de l'algorithme.

N.B. L'insertion de chacune des n^2 cases dans la liste chaînée correspondante est en $\Theta(1)$, ce qui donne une complexité de l'insertion en $\Theta(n^2)$. On remarque ainsi que les complexités données ci-dessus l'emportent à l'égard de celle de l'initialisation des listes.

4 Version par AVL

Analyse de la complexité

La dernière version de cette algorithme répose sur l'utilisation des arbres AVL. On a rangé les cases dans une matrice d'arbres : chaque ligne correspond à une couleur distincte et chaque colonne correspond à une ligne de la grille du jeu. Etant donné que l'on travaille avec une matrice, l'accès à un certain arbre est en $\Theta(1)$. Cependant, la recherche de la case la plus proche dans une ligne donnée est en $O(h(T))$, où $h(T)$ est la hauteur de l'arbre T correspondant. On sait d'ailleurs que $h(T) \leq \lceil \log_2 n(T) \rceil$, où $n(T)$ est le nombre de nœuds dans l'arbre T. Or on a $n(T) = \min(n, \alpha)$. Ceci nous donne une complexité en $O(\log \min(n, \alpha))$. On en déduit que la recherche sur les n lignes de la grille est en $O(n \log \min(n, \alpha))$. On obtient finalement une complexité en $O(n^3 \log \min(n, \alpha))$ pour cette dernière implémentation de l'algorithme au plus proche.

N.B. L'insertion de chacune des n^2 cases dans l'arbre AVL correspondant est en $O(\log \min(n, \alpha))$, ce qui donne une complexité de l'insertion en $O(n^2 \log \min(n, \alpha))$. On remarque ainsi que la complexité donnée ci-dessus l'emporte à l'égard de celle de l'initialisation des arbres.

Comme mentionné ci-dessus, les expérimentations ont été faites avec $\alpha \approx 2n$, ce qui transforme les complexités données précédemment en $O(n^3)$ pour la version par couleur et $O(n^3 \log n)$ pour la version par AVL. C'est pourquoi on a obtenu des meilleurs résultats pour la première de ces deux versions.

Les résultats empiriques ne collent pas à l'analyse de la complexité

Deuxième partie

Résolution par graphes

Dans cette deuxième partie, on vous détaille le fonctionnement des procédures de résolution du problème du robot trieur à l'aide des graphes.

5 Méthode par circuits

Préliminaires

Étant donné une instance de grille G, on définit un graphe orienté $H = (V, A)$, dénoté **graphe des déplacements** de la grille, de la manière suivante :

— l'ensemble des sommets V correspond aux cases (i, j) de la grille G,

— l'ensemble des arcs A correspond à des arcs allant du sommet-case (i, j) au sommet-case (i', j') tels que la case (i, j) est non noire et qu'elle contient une pièce ayant la même couleur que celle du fond de la case (i', j').

Il est à noter qu'un arc représente une succession de déplacements sur la grille. En effet, le robot doit traverser toutes les cases composant le trajet représenté par un arc.

La strucutre de données implémentant le graphe H répose sur une matrice de sommets pour avoir un accès en $O(1)$ à tous les sommets et des listes d'adjacence pour représenter les arcs adjacents à un sommet donné.

Principe

Cet algorithme de résolution par graphes se base sur la recherche de circuits. En effet, si on compte la liste de tous les circuits présents dans le graphe H associé à la grille G, résoudre le problème du robot trieur se réduit au parcours séquentiel de ces circuits. Cependant, le chemin suivi ne correspondra pas en général au plus court chemin, ce qui était le cas dans la partie précédente.

Implémentations

On a mis en œuvre cette méthode à l'aide de trois fonctions résolvant le problème du robot trieur.

Version naïve

Dans un premier temps, on décidé de faire une recherche de circuits simple. Pour chaque sommet dont la case associée est non noire, on recherche le sommet correspondant à la case en haut à gauche ayant la même couleur que celle de sa pièce. Compte tenu du fait que l'ordre des sommets-case dans les listes d'adjacence suit l'ordre de la recherche dans une matrice à deux dimensions, à savoir un parcours par lignes commençant par la première, cette première recherche des circuits est très rapide. Ce gain est nuancé par le nombre de pas utilisés par le robot pour rendre noire la grille du jeu dans le cas où il y a plusieurs pièces par couleurs, i.e. $\alpha > 1$. En effet, le robot essaie systématiquement de se déplacer vers le coin supérieur gauche de la grille tant pour refermer un circuit que pour en commencer un nouveau.

Version améliorée

Dans un deuxième temps, on a modifié légèrement la méthode précédente : la recherche du circuit suivant n'est plus naïve. Cela se traduit par la recherche dans la liste de circuits pas encore parcourus du circuit dont le premier sommet-case est le plus proche de la position courante du robot trieur. Ce changement comporte un compromis en lui-même dans la mesure où le robot réalise des trajets plus courts, mais que le temps d'exécution pour ce faire augmente.

Version générale

On a voulu finalement améliorer la recherche des circuits et l'ajouter à la version précédente. Puisque la grille contient autant de cases que des pièces, le graphe H a la particularité que tous les sommets appartiennent à exactement un circuit à la fin d'une recherche de circuits. On exploite donc ce fait et se permet de faire la modification suivante dans la recherche des circuits : pour chaque sommet, on fera une recherche du successeur le plus proche au lieu de prendre celui en haut à gauche. De la même manière que pour la version améliorée, cette modification entraîne un compromis : la recherche de circuits devient alors plus longue, mais le robot finit sont parcours de la grille en moins de pas qu'auparavant.

6 Vecteur avec une case par couleur

Fonctionnement

...

Troisième partie

Comparaison et performances

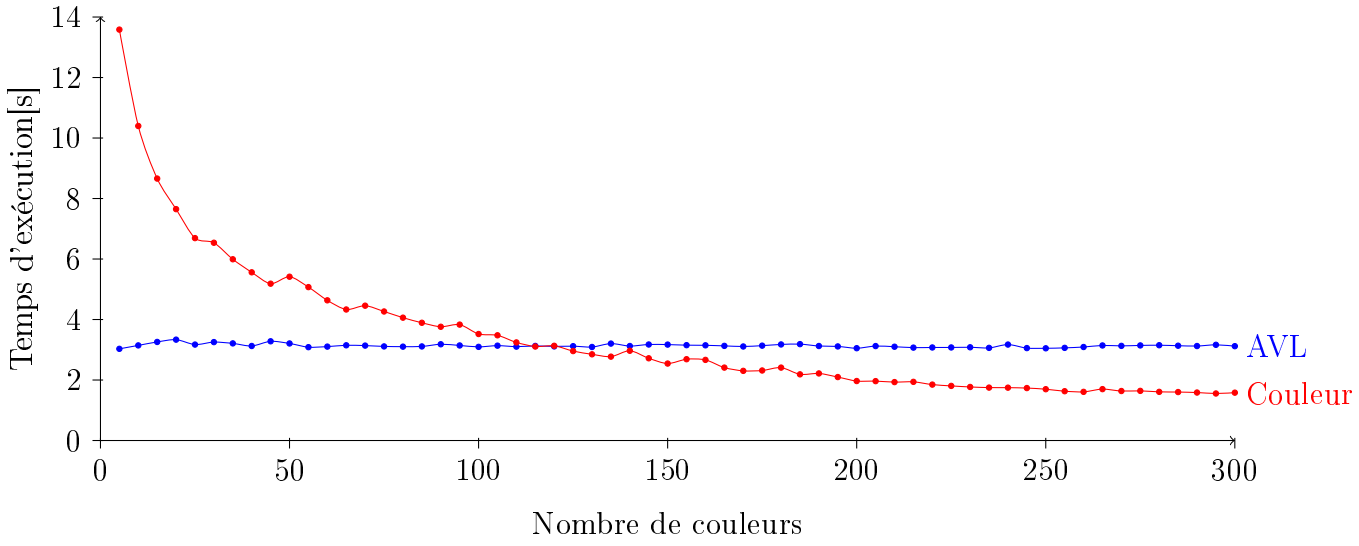
Dans cette troisième partie, on vous preésente les résultats des différents test de performance réalisés.

7 Taille de la grille variable

On a comparé les performances des toutes les fonctions implémentés résolvant le problème du robot trieur pour des grilles de taille variable.

8 Nombre de couleurs variable

On a ensuite analysé l'impact du nombre de couleurs dans la grille, i.e. du paramètre α, sur le temps d'exéxcution des algorithmes utilisant des structures de données additionnelles.



9 Vecteur avec une case par couleur

On a finalement testé nos algorithmes pour le cas particulier d'une grilleréduite à un vecteur avec autant de cases que de couleurs.

Conclusion

...