# Mardi 7 Janvier 2025

# Concours Blanc n°1 – Corrigé

## Exercice 1 : Encadrements et étude de fonction

Dans cet exercice, on s'intéresse à la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. (a) $f$ est définie sur le domaine $\boxed{D_f = ]-1,+\infty[\setminus\{0\} = ]-1,0[\cup]0,+\infty[}$.

   Elle y est bien-sûr $\boxed{\text{de classe } C^1 \text{ comme quotient et composée de fonctions usuelles}}$.

   (b)

```python
import numpy as np
def f(x) :
    if x > -1 and x !=0 :
        return np.log(1+x)/x
    else :
        print('Erreur')
```

   (c) On a $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = +\infty$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } -1}$.

   En revanche (limite usuelle), $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

   donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$.

   Si on appelle toujours $f$ la fonction prolongée, on a maintenant la définition :

$$\forall x \in ]-1,+\infty[, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   $f$ est à présent définie et continue sur $]-1,+\infty[$.

2. (a) • Montrons déjà que : $\forall x \in [-\frac{1}{2},+\infty[, \ \ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

   Pour cela, on introduit $g : x \mapsto \ln(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right)$ qui est bien-sûr dérivable sur $[-\frac{1}{2},+\infty[$.

   On a, pour tout $x \in [-\frac{1}{2},+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \left(1 - x + x^2\right) = \frac{1-(1+x)(1-x+x^2)}{1+x} = \frac{1-(1-x+x^2+x-x^2+x^3)}{1+x} = \frac{-x^3}{1+x}.$$

   Puisque $1+x>0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $-x^3$, c'est à dire positif pour $x<0$ et négatif pour $x>0$. De plus, on a $g(0)=0$, on obtient donc le tableau de variations :

| $x$ | $-1/2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | |

   Sur ce tableau, on lit en particulier que $\forall x \in [-\frac{1}{2},+\infty[, \ g(x) \leqslant 0$, ce qui donne l'inégalité voulue :

$$\boxed{\forall x \in [-\tfrac{1}{2},+\infty[, \ \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.}$$

- Montrons ensuite que : $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$.

Pour cela, on introduit $h : x \mapsto \ln(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$ qui est bien-sûr dérivable sur $[0,+\infty[$.

On a, pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{1-(1+x)(1-x)}{1+x} = \frac{1-(1-x^2)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geqslant 0.$$

De plus, on a $h(0) = 0$, on obtient donc le tableau de variations :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $0 \nearrow$ | |

Sur ce tableau, on lit en particulier que $\forall x \in [0,+\infty[,\ h(x) \geqslant 0$, ce qui donne l'inégalité voulue :

$$\boxed{\forall x \in [0,+\infty[,\ \ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}}.$$

- Pour finir, montrons que : $\forall x \in [-\frac{1}{2}, 0],\ \ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2x^3}{3}$.

Pour cela, on introduit $\varphi : x \mapsto \ln(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2x^3}{3}\right)$ qui est bien-sûr dérivable sur $[-\frac{1}{2}, 0]$.

On a, pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{1+x} - \left(1 - x + 2x^2\right) = \frac{1-(1+x)(1-x+2x^2)}{1+x} = \frac{1-(1-x+2x^2+x-x^2+2x^3)}{1+x}\\ &= \frac{-x^2-2x^3}{1+x} = \frac{x^2(-1-2x)}{1+x}.\end{aligned}$$

On sait que $1+x > 0$, $x^2 \geqslant 0$ et également $-1-2x \geqslant 0$ car $x \geqslant -\frac{1}{2}$. Ainsi $\varphi'(x) \geqslant 0$.
De plus $\varphi(0) = 0$, donc on obtient le tableau de variations :

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |
|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | $+$ | |
| $\varphi(x)$ | $\nearrow 0$ | |

Sur ce tableau, on lit en particulier que $\forall x \in [-\frac{1}{2}, 0],\ \varphi(x) \geqslant 0$, ce qui donne l'inégalité voulue :

$$\boxed{\forall x \in [-\tfrac{1}{2}, 0],\ \ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3}}.$$

On a bien démontré tous les encadrements spécifiés par l'énoncé.

(b) Pour montrer que $f$ est dérivable en 0, on revient à la définition de la dérivée, c'est à dire $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (si cette limite existe et est finie).
Pour tout $x \in ]-1,+\infty[\setminus\{0\}$, (rappelons que $f(0) = 1$ avec le prolongement par continuité !)

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

En utilisant les encadrements du 2.(a), on voit que :

$$\forall x \in ]0,+\infty[, \quad -\frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) - x \leqslant -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},$$
$$\forall x \in ]-\frac{1}{2},0[, \quad -\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} \leqslant \ln(1+x) - x \leqslant -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Ainsi, en divisant par $x^2$ (qui est positif), on obtient les encadrements :

$$\forall x \in ]0,+\infty[, \quad -\frac{1}{2} \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leqslant \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{x}{3}}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} -\frac{1}{2}},$$
$$\forall x \in ]-\frac{1}{2},0[, \quad \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{2x}{3}}_{\xrightarrow[x\to 0^-]{} -\frac{1}{2}} \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \leqslant \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{x}{3}}_{\xrightarrow[x\to 0^-]{} -\frac{1}{2}}.$$

D'après le théorème des gendarmes, il en résulte que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\frac{1}{2}.$$

Ceci montre bien que $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}}$.

3. On cherche à montrer qu'il existe un unique $x \in ]0,+\infty[$ tel que

$$f(x) = x \iff \frac{\ln(1+x)}{x} = x \iff \ln(1+x) = x^2 \iff \ln(1+x) - x^2 = 0.$$

Pour cela, on peut montrer que la fonction $g : x \mapsto \ln(1+x) - x^2$ s'annule une seule fois sur $]0,+\infty[$. $g$ est bien sûr dérivable et pour tout $x \in ]0,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 2x = \frac{1-(1+x)2x}{1+x} = \frac{-2x^2-2x+1}{1+x}.$$

Une étude rapide du polynôme $-2X^2 - 2X + 1$ montre qu'il a deux racines :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} < 0 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} > 0$$

On obtient donc le tableau de variations suivant (calculs de limites évidents) :

| $x$ | $0$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $g(x_2) > 0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Puisque $g(x_2) > 0$ (car $\lim\limits_{0^+} g = 0$ et $g$ est strictement croissante sur $]0, x_2]$), d'après le TVI avec stricte monotonie, il en résulte que $g$ s'annule une seule fois sur $]0,+\infty[$ (précisément : sur $]x_2,+\infty[$).

On a ainsi montré que $\boxed{f \text{ admet un unique point fixe } \alpha \text{ sur l'intervalle } ]0,+\infty[}$.

4. (a) On <u>admet</u> que $\forall x \in ]0,+\infty[, \ -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{6}$... (erreur dans l'énoncé)
Le plus simple serait en fait d'étudier $f''$ pour déduire le sens de variation de $f'$ (croissante) et déduire que $f'(0) \leqslant f'(x) \leqslant 0$...

(b) Soient $x, y \in ]0, +\infty[$. On applique l'IAF à $f$ qui est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$.
Puisqu'on a vu que : $\forall t \in ]x, y[,\ -\frac{1}{2} \leqslant f'(t) \leqslant \frac{1}{6}$,
en particulier ceci implique : $\forall t \in ]x, y[,\ |f'(t)| \leqslant \frac{1}{2}$.

L'IAF nous apprend donc effectivement que : $\boxed{|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - y|}$.

5. On définit la suite $u$ en posant : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Attention, on veut les $n$ premiers termes, c'est à dire que $u_0$ à $u_{n-1}$ !

```
import numpy as np

def vectU(n) :

    U = np.zeros(n) ; U[0] = 1

    for k in range( n-1 ) : # k = 0, 1, ..., n-2

        U[k+1] = np.log(1+U[k])/U[k] # ou f(U[k]) avec la fonction definie
                                        precdemment
    return U
```

(b) D'abord, on montrerait par récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut appliquer l'inégalité du 4.(b) :

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \quad (\text{car } u_n, \alpha \in ]0, +\infty[)$$

On a donc bien $\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|}$.

(c) A partir de l'inégalité précédente, on obtient par récurrence immédiate (à rédiger si pas clair) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

c'est à dire $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|1 - \alpha|}$.

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, par théorème des gendarmes (version "valeur absolue"),
on déduit que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha}$.

## Exercice 2 : Une équation fonctionnelle

Dans cet exercice, on cherche à déterminer toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant la relation :

$$(\star) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} \qquad (\text{et } f(x)f(y) \neq -1)$$

1. *Quelques exemples.*

   (a) Soit $f$ constante égale à $C \in \mathbb{R}$ : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C$. Alors $f$ satisfait $(\star)$ si et seulement si :

   $$C = \frac{C+C}{1+C^2} \iff C = \frac{2C}{1+C^2} \iff C(1+C^2) = 2C \iff C(C^2-1) = 0 \iff \boxed{C = 0 \text{ ou } C = \pm 1}.$$

   (b) Posons $f : x \mapsto \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on calcule :

   $$f(x)+f(y) = \frac{e^x-1}{e^x+1} + \frac{e^y-1}{e^y+1} = \frac{(e^x-1)(e^y+1)+(e^y-1)(e^x+1)}{(e^x+1)(e^y+1)} = \frac{2e^{x+y}-2}{(e^x+1)(e^y+1)}.$$

   $$1+f(x)f(y) = 1 + \frac{(e^x-1)(e^y-1)}{(e^x+1)(e^y+1)} = \frac{(e^x+1)(e^y+1)+(e^x-1)(e^y-1)}{(e^x+1)(e^y+1)} = \frac{2e^{x+y}+2}{(e^x+1)(e^y+1)}.$$

   Ainsi, en faisant le quotient des deux :

   $$\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} = \frac{2e^{x+y}-2}{2e^{x+y}+2} = \frac{e^{x+y}-1}{e^{x+y}+1} = f(x+y).$$

   On a montré que $\boxed{f \text{ satisfait la relation } (\star)}$.

2. *Propriétés générales.*

   (a) Soit $f$ satisfaisant la relation $(\star)$ et $g = -f$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

   $$g(x+y) = -f(x+y) = -\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} = \frac{-f(x)-f(y)}{1+f(x)f(y)} = \frac{-f(x)-f(y)}{1+(-f(x))(-f(y))} = \frac{g(x)+g(y)}{1+g(x)g(y)}.$$

   Donc $\boxed{g \text{ satisfait également la relation } (\star)}$.

   (b) Soit $f$ satisfaisant la relation $(\star)$. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ (fixé) tel que $f(x) = 1$.
   Alors pour tout $y \in \mathbb{R}$,

   $$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} = \frac{1+f(y)}{1+f(y)} = 1.$$

   Ainsi, $\forall y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = 1$.
   Ceci revient bien-sûr à dire $\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = 1$ : $\boxed{f \text{ est constante égale à } 1}$.

   De même, s'il existe $x \in \mathbb{R}$ (fixé) tel que $f(x) = -1$, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

   $$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} = \frac{-1+f(y)}{1-f(y)} = -1.$$

   Ainsi, $\forall y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = -1$.
   Ceci revient bien-sûr à dire $\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = -1$ : $\boxed{f \text{ est constante égale à } -1}$.

3. *Ensemble d'arrivée.*

   (a) En prenant $x = y = 0$ dans la relation $(\star)$, on obtient :

   $$f(0+0) = \frac{f(0)+f(0)}{1+f(0)f(0)} \iff f(0) = \frac{2f(0)}{1+f(0)^2} \iff f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = \pm 1 \ \ (\text{comme en 1.(a)}).$$

   Si on avait $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$, d'après 2.(b), $f$ serait une fonction constante, ce qui est exclu par l'énoncé ! Ainsi on a forcément $\boxed{f(0) = 0}$.

(b) Raisonnons par l'absurde en supposant que l'on n'ait pas $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 < f(x) < 1$.
Cela signifie qu'il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > 1$ ou $f(x_0) < -1$.

• Si il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > 1$, alors comme $f(0) = 0$ et $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car elle est dérivable), d'après le TVI, $f$ doit atteindre la valeur 1 quelque part entre 0 et $x_0$.
D'après le 1.(b), cela implique que $f$ est constante, ce qui est exclu par l'énoncé !

• Si il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) < -1$, alors comme $f(0) = 0$, d'après le TVI, $f$ doit atteindre la valeur $-1$ quelque part entre 0 et $x_0$. D'après le 1.(b), cela implique que $f$ est constante, ce qui est exclu par l'énoncé !

Ces deux cas mènent à une contradiction, c'est donc que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ -1 < f(x) < 1}$.

4. *Equation différentielle.*

(a) Pour tous $x, h \in \mathbb{R}$, d'après la relation $(\star)$, on a $f(x+h) = \dfrac{f(x)+f(h)}{1+f(x)f(h)}$ donc :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{f(x)+f(h)}{1+f(x)f(h)} - f(x)}{h} = \frac{f(x)+f(h)-(1+f(x)f(h))f(x)}{(1+f(x)f(h))h} = \frac{f(h)-f(x)^2 f(h)}{(1+f(x)f(h))h}$$

c'est à dire

$$\boxed{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(h)}{h} \times \frac{1-f(x)^2}{1+f(x)f(h)}}.$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Passons à la limite quand $h \to 0$ dans l'égalité précédente :

• Puisque $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, par définition : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(x)$.

• Puisque $f(0) = 0$, on a $\dfrac{f(h)}{h} = \dfrac{f(h)-f(0)}{h-0} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(0) = a$.

• Puisque $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f$ est continue en 0, donc $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = f(0) = 0$.

Ainsi $\dfrac{1-f(x)^2}{1+f(x)f(h)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1-f(x)^2}{1+f(x)\times 0} = 1 - f(x)^2$.

On obtient donc l'égalité $\boxed{f'(x) = a(1-f(x)^2)}$. C'est valable quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Si on avait $a = 0$, on obtiendrait $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0$.
$f$ serait donc constante, ce qui exclu par l'énoncé ! $\boxed{\text{Ainsi on a forcément } a \neq 0}$.

5. *Bijectivité.*

(a) On a vu que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a(1-f(x)^2)$.
On a supposé $a > 0$ et d'après 3.(b), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < f(x) < 1$, donc $1 - f(x)^2 > 0$.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a(1-f(x)^2) > 0$. On en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

De plus, en rappelant à nouveau que $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 < f(x) < 1$,
$f$ est <u>croissante et bornée</u> sur l'intervalle $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$.
D'après le <u>théorème de la limite monotone</u> (pour des fonctions : oui, ça existe ! Cf les chapitre sur les limites de fonctions...), on en déduit que $\boxed{f \text{ admet des limites finies "aux bords de l'intervalle"}}$, c'est à dire en $-\infty$ et en $+\infty$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en posant $x = y$ dans la relation $(\star)$, on obtient :

$$f(x+x) = \frac{f(x)+f(x)}{1+f(x)f(x)} \quad \text{c'est à dire} \quad f(2x) = \frac{2f(x)}{1+f(x)^2}.$$

Lorsque $x \to -\infty$, on obtient $\ell_1 = \dfrac{2\ell_1}{1+\ell_1^2}$. Lorsque $x \to +\infty$, on obtient $\ell_2 = \dfrac{2\ell_2}{1+\ell_2^2}$.
En résolvant (calcul déjà fait plusieurs fois !), on obtient $\ell_1, \ell_2 \in \{0, -1, 1\}$.
En se rappelant que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $f(0) = 0$, on a donc forcément

$$\boxed{\ell_1 = \lim_{x\to -\infty} f(x) = -1} \quad < \quad f(0) = 0 \quad < \quad \boxed{\ell_2 = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1}.$$

(c) $f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et admet donc le tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | $\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | $1$ |

D'après le Théorème de la bijection, on sait que $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ dans } ]-1,1[}$.
De plus, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annule pas
(elle est strictement positive d'après ce qu'on a déjà dit au 5.(a)).
On peut donc affirmer que la réciproque $f^{-1}$ est dérivable et (formule du cours) :

$$\forall x \in ]-1,1[, \ \ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{a(1-f(f^{-1}(x))^2)} = \boxed{\frac{1}{a(1-x^2)}}.$$

6. *Expression de $f^{-1}$.*

(a) $f^{-1}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ sont toutes deux définies et dérivables sur $]-1,1[$, donc $h$ l'est également. (On peut éventuellement vérifier que pour tout $x \in ]-1,1[$, on a bien $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$.)

On calcule : $\dfrac{d}{dx}\left(\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right) = \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \times \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{2}{1-x^2}$

donc : $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right) = \dfrac{1}{a(1-x^2)}$

et donc pour tout $x \in ]-1,1[$, $\ \ h'(x) = (f^{-1})'(x) - \dfrac{1}{a(1-x^2)} = \boxed{0}$.

(b) Puisque $h' = 0$ sur $]-1,1[$, on sait que $h$ est constante sur l'intervalle $]-1,1[$.
De plus on a vu que $f(0) = 0$, ce qui montre aussi que $f^{-1}(0) = 0$. (l'antécédent de 0 est 0)
Ainsi : $\ h(0) = f^{-1}(0) - \dfrac{1}{2a}\ln(1)$, c'est à dire $\boxed{h(0) = 0}$.
On en déduit que $h$ est constante égale à 0 sur $]-1,1[$, ce qui signifie :

$$\forall x \in ]-1,1[, \ h(x) = f^{-1}(x) - \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 0$$

et donc $\boxed{\forall x \in ]-1,1[, \ \ f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}$.

7. *Expression de $f$.*

On connait l'expression de l'application $f^{-1} : ]-1,1[ \to \mathbb{R}$.
Calculons celle de sa réciproque $f : \mathbb{R} \to ]-1,1[$. (Méthode connue du cours)
Pour tous $x \in ]-1,1[$ et $y \in \mathbb{R}$, on a les équivalences :

$$y = f^{-1}(x) \iff y = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \iff 2ay = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \iff e^{2ay} = \frac{1+x}{1-x} \iff (1-x)e^{2ay} = 1+x.$$

On poursuit :

$$y = f^{-1}(x) \iff e^{2ay} - xe^{2ay} = 1+x \iff e^{2ay} - 1 = x(e^{2ay}+1) \iff \frac{e^{2ay}-1}{e^{2ay}+1} = x \iff f(y) = x.$$

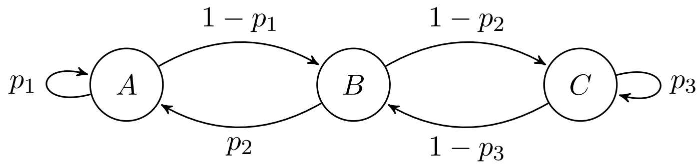
On reconnait donc l'expression $f(y) = \dfrac{e^{2ay}-1}{e^{2ay}+1}$. C'est valable pour tout $y \in \mathbb{R}$.

On a bien montré que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f(x) = \dfrac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}}$.

# Problème : Matrice de transition d'une chaîne de Markov

## Partie I - Contexte probabiliste

Un mobile se déplace aléatoirement entre trois sites, notés $A$, $B$ et $C$, selon le protocole suivant :




Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les évènements suivants :

$$A_n = \text{"Le mobile se situe en } A \text{ à l'instant } n\text{"}, \qquad B_n = \text{"Le mobile se situe en } B \text{ à l'instant } n\text{"},$$
$$C_n = \text{"Le mobile se situe en } C \text{ à l'instant } n\text{"}.$$

1. (a) A l'instant 0, le mobile se situe en $A$, donc : $\boxed{P(A_0) = 1 \text{ et } P(B_0) = P(C_0) = 0}$;
   On lit sur le schéma que $\boxed{P(A_1) = p_1,\ P(B_1) = 1 - p_1 \text{ et } P(C_1) = 0}$.

   (b) On peut expliquer en distinguant les cas, ou bien utiliser la formule des probabilités totales.
   Puisqu'à l'instant 1, le mobile se situe forcément en $A$ ou bien en $B$,
   $(A_1, B_1)$ forme un système complet d'évènements. On a donc :

$$P(A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(B_1)P_{B_1}(A_2) = p_1p_1 + (1-p_1)p_2 = \boxed{p_1^2 + (1-p_1)p_2}$$

$$P(B_2) = P(A_1)P_{A_1}(B_2) + P(B_1)P_{B_1}(B_2) = p_1(1-p_1) + (1-p_1) \times 0 = \boxed{p_1(1-p_1)}$$

$$P(C_2) = P(A_1)P_{A_1}(C_2) + P(B_1)P_{B_1}(C_2) = p_1 \times 0 + (1-p_1) \times (1-p_2) = \boxed{(1-p_1)(1-p_2)}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. A l'instant $n$, le mobile se situe soit en $A$, soit en $B$, soit en $C$.
   Ainsi $(A_n, B_n, C_n)$ forme un système complet d'évènements
   (un et un seul de ces trois évènements est forcément réalisé).
   D'après la formule des probabilités totales, on peut écrire, pour n'importe quel évènement $E$ :

$$P(E) = P(A_n)P_{A_n}(E) + P(B_n)P_{B_n}(E) + P(C_n)P_{C_n}(E).$$

   En particulier, cela permet de calculer $P(A_{n+1}), P(B_{n+1}), P(C_{n+1})$ :

$$\begin{cases} P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\ P(C_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \end{cases}$$

   En remplaçant avec les probabilités de "sauts" qu'on lit sur le schéma, cela donne :

$$\begin{cases} P(A_{n+1}) = P(A_n) \times p_1 + P(B_n) \times p_2 + P(C_n) \times 0 \\ P(B_{n+1}) = P(A_n) \times (1-p_1) + P(B_n) \times 0 + P(C_n) \times (1-p_3) \\ P(C_{n+1}) = P(A_n) \times 0 + P(B_n) \times (1-p_2) + P(C_n) \times p_3 \end{cases}$$

   On obtient donc finalement les relations :

$$\boxed{\begin{cases} P(A_{n+1}) = p_1 P(A_n) + p_2 P(B_n) \\ P(B_{n+1}) = (1-p_1)P(A_n) + (1-p_3)P(C_n) \\ P(C_{n+1}) = (1-p_2)P(B_n) + p_3 P(C_n) \end{cases}}$$

3. (a) On remarque que les relations établies en question 2. s'écrivent matriciellement :

$$\begin{pmatrix} P(A_{n+1}) \\ P(B_{n+1}) \\ P(C_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 0 \\ 1-p_1 & 0 & 1-p_3 \\ 0 & 1-p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$$

   c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{U_{n+1} = MU_n}$.
   A partir de là, on obtient par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n U_0$,
   c'est à dire effectivement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = M^n \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}$.

(b) Dans le programme suivant, on définit les matrice $M$ et $U_0$ en explicitant leurs coefficients, puis on calcule et on renvoie le produit $U_n = M^n U_0$.

```
import numpy as np
improt numpy.linalg as al

def calcul_proba(p1,p2,p3,n) :

    M = np.array([ [p1,p2,0],[1-p1,0,1-p3],[0,1-p2,p3] ])
    U0 = np.array([ [1], [0], [0] ])
    U = np.dot( al.matrix_power(M,n), U0)

    return U
```

## Partie II - Etude du mobile symétrique

Dans cette partie, on se place dans le cas d'un mobile symétrique dont toutes les probabilités de déplacement sont égales. On suppose ainsi que $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{2}$. On introduit par ailleurs la matrice $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

4. Avec les valeurs précisées dans l'énoncé, on a ici $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Il est donc facile de repérer que $M = \frac{1}{2}(J - S)$ avec $\boxed{S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

   (Attention : ce n'est pas une matrice diagonale !
   Plutôt une anti-diagonale... Pas de propriétés particulières)

5. (a) En calculant on a facilement $J^2 = 3J$, puis

$$J^3 = J^2 J = (3J)J = 3J^2 = 3(3J) = 3^2 J,$$

   et ainsi de suite... Par récurrence immédiate, on obtient : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ J^k = 3^{k-1} J}$.
   (Attention, cette formule ne fonctionne par pour $k = 0$, puisque $J^0 = I_3$)

   (b) On a $S^0 = I_3$, $S^1 = S$, et ensuite $S^2 = I_3$,
   donc $S^3 = SS^2 = SI_3 = S$,
   puis $S^4 = SS^3 = SS = S^2 = I_3$ et ainsi de suite...

   Par récurrence immédiate, on obtient $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ S^k = \begin{cases} I_3 \text{ si } k \text{ est pair} \\ S \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}}$

   (c) Un simple calcul montre que $\boxed{SJ = JS = J}$, donc $S$ et $J$ commutent.
   Par ailleurs, on a $JS^0 = JI_3 = J$,
   puis $JS^1 = JS = J$,
   puis $JS^2 = (JS)S = (J)S = J$ et ainsi de suite...
   Ainsi, par récurrence immédiate : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ JS^k = J}$.

6. (a) Puisque $M = \frac{1}{2}(J - S)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \left(\frac{1}{2}(J - S)\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (J - S)^n = \frac{1}{2^n}(J - S)^n.$$

   Pour calculer $(J - S)^n = (J + (-S))^n$, on peut utiliser la formule du binôme (possible car les matrices $J$ et $-S$ commutent) :

$$(J - S)^n = (J + (-S))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (-S)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (-1)^{n-k} S^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} J^k S^{n-k}.$$

   Puisque la formule obtenue pour $J^k$ ne fonctionne que pour $k \geqslant 1$, on isole le terme où $k = 0$ dans la somme :

$$(J - S)^n = (-1)^n S^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (3^{k-1} J) S^{n-k}$$

On rappelle enfin qu'on a toujours $JS^{n-k}=J$ (quel que soit l'exposant $n-k$) donc :

$$\begin{aligned}
(J-S)^n &= (-1)^n S^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k-1}(JS^{n-k})\\
&(-1)^n S^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k-1}J\\
&= (-1)^n S^n + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k-1}\right)J \quad \text{(en mettant } J \text{ en facteur)}
\end{aligned}$$

En revenant à notre epression $M^n = \dfrac{1}{2^n}(J-S)^n$,

on obtient donc bien : $\boxed{M^n = \dfrac{1}{2^n}\left((-1)^n S^n + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k-1}\right)J\right)}$.

(b) Pour obtenir l'expression voulue dans cette question, il reste juste à montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k-1} = \frac{2^n-(-1)^n}{3}.$$

C'est un exercice sur les sommes de réels, qui fait penser à la formule du binôme... On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k-1} &= 3^{-1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k} \quad \text{( on factorise par } 3^{-1}\text{)}\\
&= 3^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k} - (-1)^n\right) \quad \text{( on ajoute/soustrait le terme } k=0\text{)}\\
&= 3^{-1}\Big(((-1)+3)^n - (-1)^n\Big) \quad \text{( on reconnait la formule du binôme)}\\
&= \frac{1}{3}\Big(2^n - (-1)^n\Big)
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien : $\boxed{M^n = \dfrac{1}{2^n}\left((-1)^n S^n + \dfrac{2^n-(-1)^n}{3}J\right)}$.

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
On rappelle que d'après 3.(a), $U_{2n} = M^{2n}U_0$. La matrice $M^{2n}$ est ici :

$$\begin{aligned}
M^{2n} &= \frac{1}{4^n}\left(S^{2n} + \frac{4^n-1}{3}J\right) = \frac{1}{4^n}\left(I_3 + \frac{4^n-1}{3}J\right) = 4^{-n}I_3 + \frac{1-4^{-n}}{3}J\\
&= 4^{-n}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \frac{1-4^{-n}}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}4^{-n} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}4^{-n} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}4^{-n}\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}4^{-n} & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}4^{-n} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}4^{-n}\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}4^{-n} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}4^{-n} & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}4^{-n}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

L'égalité $U_{2n} = M^{2n}U_0$ donne donc :

$$\begin{pmatrix}P(A_{2n})\\P(B_{2n})\\P(C_{2n})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}4^{-n} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}4^{-n} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}4^{-n}\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}4^{-n} & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}4^{-n} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}4^{-n}\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}4^{-n} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}4^{-n} & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}4^{-n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}4^{-n}\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}4^{-n}\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}4^{-n}\end{pmatrix}$$

On obtient donc bien $\boxed{P(A_{2n}) = \dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}4^{-n} \quad \text{et} \quad P(B_{2n}) = P(C_{2n}) = \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}4^{-n}}$.

On peut faire de même avec $U_{2n+1} = M^{2n+1}U_0$, avec cette fois

$$M^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}}\left(-S + \frac{2^{2n+1}+1}{3}J\right) = -\frac{4^{-n}}{2}S + \left(\frac{1}{3}+\frac{4^{-n}}{6}\right)J$$
$$= -\frac{4^{-n}}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3}+\frac{4^{-n}}{6}\right)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{4^{-n}}{6} & \frac{1}{3}+\frac{4^{-n}}{6} & \frac{1}{3}-\frac{4^{-n}}{3}\\ \frac{1}{3}+\frac{4^{-n}}{6} & \frac{1}{3}-\frac{4^{-n}}{3} & \frac{1}{3}+\frac{4^{-n}}{6}\\ \frac{1}{3}-\frac{4^{-n}}{3} & \frac{1}{3}+\frac{4^{-n}}{6} & \frac{1}{3}+\frac{4^{-n}}{6}\end{pmatrix}$$

et on obtient alors : $\boxed{P(A_{2n+1}) = P(B_{2n+1}) = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}4^{-n} \quad \text{et} \quad P(C_{2n+1}) = \frac{1}{3}-\frac{1}{3}4^{-n}}$.

(b) On note que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_{2n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_{2n+1}) = \frac{1}{3}$.

Il en résulte (convergence des termes pairs et impairs) que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = \frac{1}{3}}$.

De même, on obtient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(C_n) = \frac{1}{3}}$.

<u>Interprétation</u> : Au bout d'un temps long, le mobile a environ une chance sur 3 de se trouver en A, en B ou en C. C'est cohérent que les trois sites aient la même probabilité d'accueil puisque les mouvements du mobile sont "symétriques" et ne privilégient aucun site en particulier.

## Partie III - Etude d'un mobile asymétrique

Dans cette partie, on se place dans le cas d'un mobile asymétrique ayant les probabilités de déplacement :

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{3}{4}, \quad p_3 = \frac{1}{2}.$$

On introduit par ailleurs le polynôme $P(X) = 4X^3 - 4X^2 - X + 1$.

8. (a) Avec les valeurs proposées par l'énoncé, la matrice est cette fois : $M = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{3}{4}&0\\ \frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\ 0&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

On souhaite calculer : $P(M) = 4M^3 - 4M^2 - M + I_3$.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
M = np.array([ [1/2,3/4,0],[1/2,0,1/2],[0,1/4,1/2] ])
A = 4*al.matrix_power(M,3) - 4*al.matrix_power(M,2) - M + eye(3)
print(A)
```

(b) On admet, comme le précise l'énoncé que $P(M) = 0$, on sait donc que :

$$\begin{aligned}4M^3 - 4M^2 - M + I_3 = 0 &\iff 4M^3 - 4M^2 - M = -I_3\\ &\iff -4M^3 + 4M^2 + M = I_3\\ &\iff (-4M^2 + 4M + I_3)M = I_3\end{aligned}$$

Ceci montre que $\boxed{M \text{ est inversible et que } M^{-1} = -4M^2 + 4M + I_3}$.

(c) On a $P(X) = 4X^3 - 4X^2 - X + 1$.
On note facilement que 1 est une racine de $P$ : on peut donc factoriser $P$ par $(X - 1)$.
En posant la division euclidienne, on trouve facilement :

$$P = (X-1)(4X^2-1) = 4(X-1)(X^2-\frac{1}{4}) = 4(X-1)(X^2-(\frac{1}{2})^2)$$

d'où finalement la factorisation : $\boxed{P = 4(X-1)(X-\frac{1}{2})(X+\frac{1}{2})}$.

$P$ a donc $\boxed{\text{3 racines simples qui sont } 1,\ \frac{1}{2} \text{ et } -\frac{1}{2}}$.

9. (a) $E_1$ est l'ensemble des matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telles que $MX = X$. Résolvons cette équation :

$$MX = X \iff \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = x \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z = y \\ \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = 0 \\ \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = 0 \\ -\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = 0 \\ -\frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ y = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \end{cases}$$

Les solutions sont donc les matrices colonnes de la forme $X = \begin{pmatrix} 3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}$ avec $z \in \mathbb{R}$.

Ainsi : $\boxed{E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}}$. On note effectivement qu'en particulier, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1$.

(b) Un simple calcul montre que $M\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc par définition, $\boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{\frac{1}{2}}}$

De même, $M\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc par définition, $\boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{-\frac{1}{2}}}$.

10. Pour tous $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on a les équivalences suivantes :

$$QX = Y \iff \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x - y + 3z = a \\ 2x - 4z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$

...et après résolution de ce système, on trouve :

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{6}a + \frac{1}{6}b + \frac{1}{6}c \\ y = -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}c \\ z = \frac{1}{12}a - \frac{1}{6}b + \frac{1}{12}c \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff X = Q^{-1}Y.$$

Ces équivalences montrent que $\boxed{Q \text{ est inversible et } Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}}$.

11. (a) On cherche une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ telle que :

$$MQ = QD \iff \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & -b & 3c \\ 2a & 0 & -4c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Il faut et il suffit de choisir $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{2}$, c'est à dire $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$.

(b) Puisque $Q$ est inversible, on a :

$$MQ = QD \Longleftrightarrow MQQ^{-1} = QDQ^{-1} \Longleftrightarrow MI_3 = QDQ^{-1} \Longleftrightarrow \boxed{M = QDQ^{-1}}$$

(c)
```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al

M = np.array([ [1/2,3/4,0],[1/2,0,1/2],[0,1/4,1/2] ])
Q = np.array([ [3,-1,3],[2,0,-4],[1,1,1] ])
D = np.dot( al.inv(Q), np.dot(M,Q) )
print(D)
```

12. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad M^n = QD^nQ^{-1}$.
- Initialisation : On a bien $M^0 = QD^0Q^{-1}$ car $\quad M^0 = I_3 \quad$ et $\quad QD^0Q^{-1} = QI_3Q^{-1} = QQ^{-1} = I_3$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $M^n = QD^nQ^{-1}$ et montrons que $M^{n+1} = QD^{n+1}Q^{-1}$.

On a vu en 11.(b) que $M = QDQ^{-1}$, donc :

$$M^{n+1} = MM^n = (QDQ^{-1})(QD^nQ^{-1}) = QD\underbrace{(Q^{-1}Q)}_{=I_3}D^nQ^{-1} = QDD^nQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}.$$

Ceci achève la récurrence.

(b) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale donc le calcul est immédiat : $\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}}$.

13. (a) On rappelle que d'après 3.(a), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, ce qui donne ici :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix} &= QD^nQ^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = QD^n \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = QD^n \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix} \\
&= Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On obtient donc finalement :

$$\boxed{P(A_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad P(B_n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad P(C_n) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}.$$

(b) On en déduit facilement que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \frac{1}{2}, \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \frac{1}{3}, \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = \frac{1}{6}}$.

Interprétation : Au bout d'un temps très long, le mobile aura environ 1 chance sur 2 de se situer en A, 1 chance sur 3 de se situer en B, et seulement 1 chance sur 6 de se situer en C.

Cette asymétrie est cohérente avec les valeurs de $p_1, p_2, p_3$ choisies dans cette partie : puisque $p_2 = \frac{3}{4}$, à chaque fois qu'il se situe en B, le mobile a 3 chance sur 4 de sauter vers A et seulement 1 chance sur 4 de sauter vers C. Le site A est donc "privilégié" lors des déplacements, et le site C a tendance à être délaissé !