17

Introduction aux espaces vectoriels

Motivation

Nous avons jusqu'ici rencontré de nombreux ensembles stables par addition et multiplication par un réel :

- Si f et g sont deux fonctions sur un domaine D et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f+g \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, $\lambda f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$.
- Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $P+Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda P \in \mathbb{R}[X]$.
- Si $X = (x_1, \dots, x_p)$ et $Y = (y_1, \dots, y_p)$ sont deux solutions d'un système linéaire homogène et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $X+Y$ et λX sont aussi solutions.
- Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $A+B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Nous allons unifier l'étude de tels ensembles en mettant en place une théorie générale, nécessairement abstraite pour pouvoir s'appliquer aux différents exemples ci-dessus.

Ces objets qui, selon le contexte, seront des fonctions, des polynômes, des matrices, des suites, des couples de réels, etc... seront appelés **vecteurs**.

L'ensemble E de ces vecteurs sera appelé un **espace vectoriel**.

Les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ par lesquels on multiplie seront appelés des **scalaires**.

Un tel ensemble E est ainsi muni de deux opérations : la somme qui est une loi de composition interne, et le produit par un scalaire qui est une loi de composition externe.

Définition 1 (Loi de composition interne / externe)

Soit E un ensemble.

Une loi de composition interne sur E est une application de $E \times E$ dans E.

Une loi de composition externe sur E est une application de $\mathbb{R} \times E$ dans E.

Addition : $\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$ Produit par un scalaire : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \to & E \\ (\lambda,v) & \mapsto & \lambda \cdot v \end{array}$

Dans tout ce chapitre, on utilisera en général les notations u, v, w pour désigner des vecteurs, c'est à dire des éléments d'un espace vectoriel général E.

Bien-sûr, dans les exemples, on choisira des noms plus "appropriés" pour les vecteurs :

- Un "vecteur" de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ sera plutôt noté f, g, h...
- Un "vecteur" de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ sera plutôt noté P, Q, R....
- Un "vecteur de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sera plutôt noté A, B, M, etc... !

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition et exemples fondamentaux

Définition 2 (Espace vectoriel)

On dit qu'un ensemble non-vide E est un **espace vectoriel** lorsque :

- E est muni d'une addition, notée $+$, satisfaisant :

(A1) (**Stabilité**) $\forall (u,v) \in E^2, \;\; u+v \in E$ ("+" est bien une loi de composition interne !)

(A2) (**Associativité**) $\forall (u,v,w) \in E^3, \;\; (u+v)+w = u+(v+w)$

(A3) (**Commutativité**) $\forall (u,v) \in E^2, \;\; u+v = v+u$

(A4) **(Existence d'un élément neutre)** Il existe un élément noté $0_E \in E$ tel que :

$$\forall v \in E, \;\; v + 0_E = 0_E + v = v.$$

(A5) **(Existence d'opposés)** Pour tout $v \in E$, il existe un élément noté $-v \in E$ tel que :

$$v + (-v) = (-v) + v = 0_E.$$

- E est muni d'une multiplication par un scalaire, notée $\cdot$, satisfaisant :

(M1) (**Stabilité**) $\forall (\lambda, v) \in \mathbb{R} \times E, \;\; \lambda \cdot v \in E$ ("$\cdot$" est bien une loi de composition externe !)

(M2) (**Distributivité à gauche**) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall v \in E, \;\; (\lambda+\mu)\cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

(M3) (**Distributivité à droite**) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u,v) \in E^2, \;\; \lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

(M4) (**Multiplications successives**) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall v \in E, \;\; \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \times \mu) \cdot v = \mu \cdot (\lambda \cdot v)$

(M5) (**Multiplication par l'unité**) $\forall v \in E, \;\; 1 \cdot v = v$

Les éléments de $v \in E$ sont appelés des vecteurs , les éléments $\lambda \in \mathbb{R}$ sont appelés des scalaires.

Remarques 1

- Du fait de l'associativité (A2), on pourra noter sans ambiguïté $u+v+w$.
- L'élément neutre pour l'addition 0_E est en fait unique ! On l'appelle le vecteur nul de E.
- L'addition $u+(-v)$ sera notée $u-v$: on définit la soustraction comme l'addition de l'opposé !
- Il arrivera souvent que l'on omette le point "$\cdot$" pour désigner la multiplication par un scalaire. On notera ainsi volontiers λv plutôt que $\lambda \cdot v$.

Théorème 1 (Espaces vectoriels fondamentaux)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\mathbb{R}^n} = \Big\{ \Big(x_1, x_2, \ldots, x_n \Big), \; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \Big\}$ est un espace vectoriel.
- $\boxed{\mathbb{R}[X]}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$ est un espace vectoriel.
- $\boxed{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} = \Big\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \in \mathbb{R} \Big\}$ est un espace vectoriel
- Pour toute partie $D \subset \mathbb{R}$, $\boxed{\mathcal{F}(D,\mathbb{R})}$ est un espace vectoriel.

Preuve :

On a déjà vu que ces espaces étaient munis d'une addition et d'une multiplication par un scalaire. Il suffit de vérifier que toutes les propriétés de la définition précédentes sont satisfaites. $\square$

Addition, multiplication par un scalaire, vecteur nul dans ces espaces :

$\boxed{\text{Dans } \mathbb{R}^n}$: Pour tous $u=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $v=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ et $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$u+v=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n) \quad \text{et} \quad \lambda\cdot u=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$$

Le vecteur nul est : $0_{\mathbb{R}^n}=\underbrace{(0,0,\dots,0)}_{n \text{ fois.}}$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, $(x,y,z)-2(a,b,c)=(x-2a,y-2b,z-2c)$.

$\boxed{\text{Dans } \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$: Pour tous $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B=(b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \quad \text{et} \quad \lambda\cdot A=(\lambda a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

Le vecteur nul est : $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}=0_{n,p}$ (matrice nulle de taille $n\times p$)

Exemple : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Dans } \mathbb{R}[X]}$: Pour tous $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{R}[X]$, $Q=\sum_{k=0}^{n}b_kX^k\in\mathbb{R}[X]$, et $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$P+Q=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)X^k \quad \text{et} \quad \lambda\cdot P=\sum_{k=0}^{n}\lambda a_kX^k$$

Le vecteur nul est : $0_{\mathbb{R}[X]}=$ Le polynôme nul (souvent noté 0)

Exemple : Dans $\mathbb{R}[X]$, $(3X^3-X+2)+3\cdot(2X^4+X^2-1)=6X^4+3X^3+3X^2-X-1$

$\boxed{\text{Dans } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$: Pour tous $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$u+v=(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \lambda\cdot u=(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Le vecteur nul est : $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}=$ La suite constante égale à 0 (souvent notée 0)

Exemple : Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{1}{n+1}$ et $v_n=2^n$, alors $2u+v=w$, où $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n=\frac{2}{n+1}+2^n$.

$\boxed{\text{Dans } \mathcal{F}(D,\mathbb{R})}$: Pour tous $f\in\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, $g\in\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, et $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$f+g : x\mapsto f(x)+g(x) \quad \text{et} \quad \lambda\cdot f : x\mapsto \lambda f(x)$$

Le vecteur nul est : $0_{\mathcal{F}(D,\mathbb{R})}=$ La fonction constante égale à 0 sur D (souvent notée 0)

Exemple : Si $\forall x\in[0,1]$, $f(x)=x^2$ et $g(x)=e^x$, alors $\forall x\in[0,1]$, $(f-g)(x)=x^2-e^x$.

1.2 Propriétés additionnelles

A partir de la Définition 2 d'espace vectoriel, on a automatiquement les propriétés suivantes :

Proposition 1 ("Produit" nul)

Soit E un espace vectoriel. Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in E$, on a l'équivalences :

$$\lambda \cdot v = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } v = 0_E.$$

Preuve :

- Montrons le sens réciproque $\Longleftarrow$:

\- Vérifions que $\underline{0 \cdot v = 0_E}$. Comme $0 = 0 + 0$, d'après (M2) : $0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$.
En ajoutant l'opposé $-(0 \cdot v)$ de chaque côté, on obtient $0_E = 0 \cdot v$.

\- Vérifions que $\underline{\lambda \cdot 0_E = 0_E}$. Comme $0_E = 0_E + 0_E$, d'après (M3) : $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$.
En ajoutant l'opposé $-(\lambda \cdot 0_E)$ de chaque côté, on obtient $0_E = \lambda \cdot 0_E$.

- Montrons le sens direct : $\Longrightarrow$. Supposons $\lambda \cdot v = 0_E$. Alors :

\- Soit $\lambda = 0$.

\- Soit $\lambda \neq 0$ et alors, d'après (M5), (M4) et le point précédent :

$$v = 1 \cdot v = (\lambda^{-1} \times \lambda) \cdot v = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^{-1} \cdot 0_E = 0_E.$$

□

Corollaire 1

Soit E un espace vectoriel. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in E$, on a les équivalences suivantes :

- $\lambda \cdot v = \mu . v \iff \lambda = \mu \text{ ou } v = 0_E.$
- $\lambda \cdot u = \lambda \cdot v \iff \lambda = 0 \text{ ou } u = v.$

Preuve ("méthode" à retenir) :

- $\lambda \cdot v = \mu \cdot v \iff \lambda \cdot v - \mu \cdot v = 0_E \iff (\lambda - \mu) \cdot v = 0_E \iff \lambda - \mu = 0 \text{ ou } v = 0_E.$
- $\lambda \cdot u = \lambda \cdot v \iff \lambda \cdot u - \lambda \cdot v = 0_E \iff \lambda \cdot (u - v) = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } u - v = 0_E.$

□

Proposition 2 (Propriétés liées à l'opposé)

Soit E un espace vectoriel. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites :

(a) L'élément neutre 0_E est unique.

(b) Chaque élément de E admet un unique opposé.

(c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in E, \quad (-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$

Preuve :

(a) Supposons qu'il existe un autre élément neutre $0'_E$. Alors d'après (A4) avec $v = 0_E$ et $v = 0'_E$:

$$0_E + 0'_E = 0_E \text{ et } 0_E + 0'_E = 0'_E, \text{ d'où } 0_E = 0'_E.$$

(b) Soit $v \in E$. Supposons qu'il admet deux opposés v_1 et v_2. Alors :

$$v + v_1 = 0_E \text{ donc } v + v_1 + v_2 = v_2 \text{ donc } \underbrace{(v + v_2)}_{0_E} + v_1 = v_2 \text{ donc } v_1 = v_2.$$

(c) On vérifie que $(-\lambda) \cdot v$ est l'opposé de $\lambda \cdot v$. D'après (M2) :

$$(-\lambda) \cdot v + \lambda \cdot v = (-\lambda + \lambda) \cdot v = 0 \cdot v = 0_E. \quad \text{Ainsi } (-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v).$$

On vérifie que $\lambda \cdot (-v)$ est aussi l'opposé de $\lambda \cdot v$. D'après (M3) :

$$\lambda) \cdot (-v) + \lambda \cdot v = \lambda \cdot (-v + v) = \lambda \cdot 0_E = 0_E. \quad \text{Ainsi } \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v).$$

□

1.3 Notion de combinaison linéaire de vecteurs

Dans cette section, on considère E un espace vectoriel fixé.

Définition 3 (Famille de vecteurs de E)

Une famille finie de E est une liste $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ de vecteurs de E.
On dit que $p \in \mathbb{N}^*$ est le "cardinal" de cette famille.

Attention !

Autrement dit $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_p) \in E^p$ est un p-uplet d'élément de E, et non une partie de E.
En particulier, il peut tout à fait y avoir des répétitions dans cette liste de vecteurs.

Exemples

- Une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $\big((1,-1),\ (2,0),\ (0,1)\big)$
- Une famille de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\big((1,2,3),\ (0,0,-1)\big)$
- Une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}[X]$: $\big(1,\ 2X+1,\ 3X^4-2X^2+1\big)$
- Une famille de 2 vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\Big(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Big)$

Définition 4 (Combinaison linéaire)

Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle **combinaison linéaire de la famille** $(v_1, \ldots, v_p)$ tout vecteur $v \in E$ de la forme :

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i \qquad \text{avec } (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont appelés les coefficients de cette combinaison linéaire.
On dit parfois plus simplement que v est "combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots v_p$".

Remarque 2

Puisqu'un espace vectoriel est stable par addition et multiplication par un scalaire, toute combinaison linéaire de vecteurs de E est toujours un élément de E !
On peut ainsi dire qu'un espace vectoriel est "stable par combinaisons linéaires".

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$: le vecteur $v = (-5,2)$ est une combinaison linéaire de $v_1 = (1,2)$ et $v_2 = (3,0)$ car : $\quad (-5,2) = (1,2) - 2 \cdot (3,0)$
- Dans $\mathbb{R}^3$: $(1,0,6)$ est une combinaison linéaire de $\big((1,1,1),(0,-1,2),(0,0,1)\big)$ car :

$$(1,0,6) = (1,1,1) + (0,-1,2) + 3 \cdot (0,0,1)$$

Dessin :

- Dans $\mathbb{R}[X]$: $(X-3)^2$ est une combinaison linéaire de la famille $(1, X, X^2)$, car :

$$(X-3)^2 = X^2 - 6X + 9 = 1 \cdot X^2 - 6 \cdot X + 9 \cdot 1$$

- Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: la fonction cosh : $x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (cosinus hyperbolique) est une combinaison linéaire des vecteurs $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto e^{-x}$: $\quad \cosh = \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} g$.

2 Sous-espaces vectoriels

Dans toute cette partie, on considère E un espace vectoriel fixé.

2.1 Définition, caractérisations, exemples.

Définition 5 (Sous-espace vectoriel de E)

On dit qu'une partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E lorsque :

(a) $F \neq \emptyset$ **(Non vide)**

(b) $\forall (u,v) \in F^2,\ u+v \in F$ **(Stable par addition)**

(c) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall v \in F,\ \lambda \cdot v \in F.$ **(Stable par multiplication par un scalaire)**

Remarque 3

Un espace vectoriel E contient toujours au moins deux sous-espaces vectoriels : E et $\{0_E\}$.
On les appelle parfois les sous-espaces vectoriels "triviaux".

Ces "trois conditions" à vérifier peuvent être réduites à deux conditions, pour une rédaction plus succincte :

Méthode : (Caractérisation pratique d'un sous-espace vectoriel)

Une partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

$\boxed{1}$ $0_E \in F$

$\boxed{2}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (u,v) \in F^2,\quad u + \lambda \cdot v \in F$

On pourra donc rédiger ainsi :

- On a bien $0_E \in F$ (car ...)
- Soient $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $u + \lambda v \in F$...

Preuve de l'équivalence entre (a), (b), (c) et $\boxed{1}$,$\boxed{2}$:

- Supposons (a), (b) et (c).

- D'après (a), $F \neq \emptyset$. On peut donc introduire $v \in F$.
Puis, d'après (c) avec $\lambda = 0$, on a $0 \cdot v \in F$, c'est à dire $0_E \in F$. On a bien montré $\boxed{1}$.

- Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après (c) on a $\lambda \cdot v \in E$.
Puis, d'après (b), $\underbrace{u}_{\in E} + \underbrace{\lambda \cdot v}_{\in E} \in E$. On a bien montré $\boxed{2}$.

- Supposons $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$.

- D'après $\boxed{1}$, $0_E \in F$ donc $F \neq \emptyset$. On a bien montré (a).

- D'après $\boxed{2}$ avec $\lambda = 1$: $\forall (u,v) \in F^2,\ u + v \in F$. On a bien montré (b).

- D'après $\boxed{2}$ avec $u = 0_E$: $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall v \in F,\ \lambda \cdot v \in F$. On a bien montré (c). □

Remarques 4

- On peut aussi remplacer la condition $\boxed{2}$ par : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (u,v) \in F^2,\ \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F.$
et l'équivalence tient toujours.
- De manière générale, on voit que la Définition 5 garantit que :

$$\boxed{\text{Un sous-espace vectoriel } F \text{ est "stable par combinaisons linéaires".}}$$

Autrement dit, toute combinaison linéaire de vecteurs de F reste un élément de F !

Exercice 1

1. Montrer que $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x - 3y + z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $G = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, P'(1) = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

1.
- D'abord on a $(0,0,0) \in F$ car : $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 0 = 0$.
- Soient $v_1 = (x_1, y_1, z_1) \in F$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $v = v_1 + \lambda v_2 \in F$.

Par définition $v = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2) = (x, y, z)$
avec $x = x_1 + \lambda x_2$, $y = y_1 + \lambda y_2$, $z = z_1 + \lambda z_2$.
Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
2x - 3y + z &= 2(x_1 + \lambda x_2) - 3(y_1 + \lambda y_2) + (z_1 + \lambda z_2) \\
&= 2x_1 + 2\lambda x_2 - 3y_1 - 3\lambda y_2 + z_1 + \lambda z_2 \\
&= \underbrace{(2x_1 - 3y_1 + z_1)}_{=0 \text{ car } v_1 \in F} + \lambda \underbrace{(2x_2 - 3y_2 + z_2)}_{=0 \text{ car } v_2 \in F} = 0
\end{aligned}$$

On a bien montré que $v \in F$.

Conclusion : F est un SEV de $\mathbb{R}^3$.

2.
- D'abord le polynôme nul appartient à G car pour $P = 0$ on a bien $P'(1) = 0$.
- Soient $P \in F$, $Q \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $P + \lambda Q \in F$.

On a :

$$(P + \lambda Q)'(1) = (P' + \lambda Q')(1) = \underbrace{P'(1)}_{=0 \text{ car } P \in G} + \lambda \underbrace{Q'(1)}_{=0 \text{ car} Q \in G} = 0.$$

On a bien montré que $P + \lambda Q \in G$.
Conclusion : G est un SEV de $\mathbb{R}[X]$.

Citons quelques exemples fondamentaux de sous-espaces vectoriels (se convaincre que se sont bien des SEV !) :

Exemples

- $\boxed{\text{L'ensemble des solutions } (x_1, \dots, x_n) \text{ d'un système linéaire homogène}}$ à n inconnues est toujours un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple : $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0 \text{ et } x - 2y = 0\right\}$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leqslant n\}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

(**Attention :** L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$!)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet les sous-espaces vectoriels suivants :

- $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ ensemble des $\boxed{\text{matrices triangulaires supérieures}}$,
- $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$ ensemble des $\boxed{\text{matrices triangulaires inférieures}}$,
- $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ ensemble des $\boxed{\text{matrices diagonales}}$.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ensemble des $\boxed{\text{matrices symétriques}}$.
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ensemble des $\boxed{\text{matrices anti-symétriques}}$.

(**Attention :** L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles n'est pas un SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$!)

- Si I est un intervalle, $\boxed{C(I, \mathbb{R}),\ D(I, \mathbb{R}),\ C^1(I, \mathbb{R})}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Remarque 5

On a vu que tout sous-espace vectoriel de E contient automatiquement 0_E.
Ainsi, si $0_E \notin F$, alors F ne peut pas être un sous-espace vectoriel de E !

Exemples

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n\}$ n'est pas un SEV de $\mathbb{R}[X]$ car il ne contient pas le polynôme nul.
- $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas un SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car il ne contient pas la matrice nulle.
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 3 = 1\}$ n'est pas un SEV de $\mathbb{R}^3$ car il ne contient pas $(0, 0, 0)$.
- Attention, $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y^2 = 0\}$ contient bien $(0, 0)$, mais ce n'est pas un SEV de $\mathbb{R}^2$!
  Par exemple : on a $v = (-1, 1) \in G$ mais $-v = (1, -1) \notin G$.

Bien-sûr, l'intérêt de parler de sous-espace vectoriel est le suivant :

Proposition 3 ("Un SEV est un EV !")

Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Les restrictions des opérations "+" et "$\cdot$" à F confèrent à F une structure d'espace vectoriel.

Autrement dit, un sous-espace vectoriel de E est lui-même un espace vectoriel, avec les mêmes "règles" d'addition et de multiplication par un scalaire que dans E.

Preuve :

On doit vérifier les différentes propriétés de la Définition 2 pour F.
Les stabilités (A1) et (M1) découlent de la définition de sous-espace vectoriel.
Les autres propriétés (associativité, commutativité, etc...) sont vraies pour des éléments de E, donc restent vraies en particulier pour des éléments de F (puisque $F \subset E$). $\square$

Intérêt pratique : Pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on ne vérifiera jamais toutes les propriétés (A1)-(A5), (M1)-(M5) de la Définition 2 (ce serait pénible !). On se contentera en général de montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E connu ($\mathbb{R}^n, \mathbb{R}[X], \mathcal{M}_{n,p}(R)$, etc...)

Exercice 2

Montrer que l'ensemble des suites réelles convergentes est un espace-vectoriel.

Notons cet ensemble : $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists \ell \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell\right\}$. On a bien-sûr $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- La suite nulle appartient à E (car elle converge vers 0).
- Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $w = u + \lambda v \in E$:

Puisque les suites u et v convergent, on sait que w, donnée par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + \lambda v_n$ converge aussi ! (vers $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$).
Donc $w \in E$.
Conclusion : E est un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, c'est donc un espace-vectoriel.

Terminons avec une dernière propriété générale :

Proposition 4 (Intersection de sous espaces vectoriels)

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve de la Proposition 4 :

Soient F_1, F_2 deux SEV de E. Montrons que $F_1 \cap F_2$ est un SEV de E :
- $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$, donc $0_E \in F_1 \cap F_2$.
- Soient $u \in F_1 \cap F_2$, $v \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $u + \lambda v \in F_1 \cap F_2$.

Puisque $u, v \in F_1$ qui est un SEV de E : $u + \lambda v \in F_1$.
Puisque $u, v \in F_2$ qui est un SEV de E : $u + \lambda v \in F_2$.
Ainsi on a bien $u + \lambda v \in F_1 \cap F_2$. □

Exemple

On a vu que $G = \Big\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(1) = 0\Big\}$ est un SEV de $\mathbb{R}[X]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut affirmer que $G_n = \Big\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P'(1) = 0\}$ est aussi un SEV de $\mathbb{R}[X]$, car $G_n = G \cap \mathbb{R}_n[X]$ (et $\mathbb{R}_n[X]$ est un SEV de $\mathbb{R}[X]$).

Attention !

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, leur union $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E en général... (Chercher des contre-exemples !)

2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Définition 6 (Sous-espace vectoriel engendré par $(v_1, \ldots, v_p)$)

Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de E.

On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** $(v_1, \ldots, v_p)$, et on note $Vect(v_1, \ldots, v_p)$, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $(v_1, \ldots, v_p)$. Autrement dit :

$$Vect(v_1, \ldots, v_p) = \Big\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i \,, \ \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \Big\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve du fait que c'est un SEV :

- On peut écrire $0_E = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_p$, c'est donc que $0_E \in Vect(v_1, \ldots, v_p)$.
- Soient $u, v \in Vect(v_1, \ldots, v_p)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il existe donc des coefficients $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$$u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{i=1}^{p} \mu_i v_i.$$

Vérifions que $u + \lambda v \in Vect(v_1, \ldots, v_p)$: on peut écrire :

$$u + \lambda v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i + \lambda \sum_{i=1}^{p} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{(\lambda_i + \lambda \mu_i)}_{= \lambda_i' \in \mathbb{R}} v_i.$$

On a bien écrit $u + \lambda v$ comme combinaison linéaire de $(v_1, \ldots, v_p)$.
C'est donc que $u + \lambda v \in Vect(v_1, \ldots, v_p)$. □

Remarque 6

Notons que l'ordre des vecteurs $(v_1, \ldots, v_p)$ n'importe pas pour déterminer $Vect(v_1, \ldots, v_p)$.
Exemple : $Vect(u, v, w) = Vect(v, u, w) = Vect(w, u, v)$ etc...

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$: $Vect\Big((1,0),(0,1)\Big) = \{\lambda(1,0)+\mu(0,1),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\} = \{(\lambda,\mu),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.

- Dans $\mathbb{R}^3$:

$Vect\Big((1,-1,0),(2,1,1)\Big) = \Big\{\lambda(1,-1,0)+\mu(2,1,1),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\Big\} = \Big\{(\lambda+2\mu,-\lambda+\mu,\mu),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\Big\}$.

- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $Vect\Big(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\Big) = \Big\{a\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)+b\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\ \ a,b\in\mathbb{R}\Big\} = \Big\{\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&b\end{smallmatrix}\right),\ \ a,b\in\mathbb{R}\Big\} = D_2(\mathbb{R})$.

- Dans $\mathbb{R}[X]$: $Vect(1,X,X^2) = \Big\{a+bX+cX^2,\ a,b,c\in\mathbb{R}\Big\} = \mathbb{R}_2[X]$.

On peut voir $Vect(v_1,\ldots,v_p)$ comme "le plus petit" sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $v_1,\ldots,v_p$:

Proposition 5 (Espace vectoriel contenant une famille)

Si un espace vectoriel F contient les vecteurs $v_1,\ldots,v_p$, alors $Vect(v_1,\ldots,v_p)\subset F$.

Preuve :

C'est évident puisqu'un espace vectoriel F est "stable par combinaison linéaire" :
s'il contient les vecteurs $v_1,\ldots,v_p$ alors il doit contenir tous les vecteurs de la forme $v=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i v_i$. $\square$

Exercice 3

Montrer que $Vect\Big((1,2),(0,3)\Big) = Vect\Big((1,0),(0,1)\Big)$.

Notons $F = Vect\Big((1,2),(0,3)\Big)$ et $G = Vect\Big((1,0),(0,1)\Big)$.

- On a $(1,2) = (1,0)+2\cdot(0,1)$ donc $(1,2)\in Vect\Big((1,0),(0,1)\Big)$ i.e $\underline{(1,2)\in G}$.
- On a $(0,3) = 0\cdot(1,2)+3(0,1)$ donc $(0,3)\in Vect\Big((1,0),(0,1)\Big)$ i.e $\underline{(0,3)\in G}$.

Comme G est un espace-vectoriel, on en déduit que $Vect\Big((1,2),(0,3)\Big)\subset G$, i.e $F\subset G$.

Inversement,
- On a $(1,0) =$ .... donc $(1,0)\in F$.
- On a $(0,1) =$ .... donc $(0,1)\in F$ (faites-le !)

Comme F est un espace vectoriel, on en déduit que $Vect\Big((1,0),(0,1)\Big)\subset F$, i.e $G\subset F$.

Conclusion : $F=G$.

Remarque 7

Ainsi, des familles de vecteurs différentes peuvent très bien engendrer le même sous-espace vectoriel !

Théorème 2 ("Simplification d'un Vect")

Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteur de E.
L'espace vectoriel $Vect(v_1, v_2, \dots, v_p)$ reste inchangé par les opérations suivantes :

(a) Changer l'ordre des vecteurs de la famille.

(b) Multiplier un vecteur par une constante non nulle :
$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*,\ Vect(\lambda v_1, v_2, \dots, v_p) = Vect(v_1, v_2, \dots, v_p)$.

(c) Additionner à un vecteur un autre vecteur de la famille, multiplié par une constante :
$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ Vect(v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_p) = Vect(v_1, v_2, \dots, v_p)$.

(d) Retirer de la famille un vecteur qui est combinaison linéaire des autres :
Si $v_1 \in Vect(v_2, \dots, v_p)$, $\quad Vect(v_1, v_2, \dots, v_p) = Vect(v_2, \dots, v_p)$.

En particulier, on peut toujours supprimer le vecteur nul : $\quad Vect(0_E, v_2, \dots, v_p) = Vect(v_2, \dots, v_p)$

Preuve rapide :

(a) Propriété déjà évoquée en Remarque 6. Pour toutes les autres, on procède par double inclusion :

(b) • Soit $x \in Vect(\lambda v_1, v_2, \dots, v_p)$. Alors x s'écrit sous la forme :

$$x = \lambda_1(\lambda v_1) + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p = (\lambda_1 \lambda) v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p \in Vect(v_1, v_2, \dots, v_p).$$

• Inversement, soit $x \in Vect(v_1, v_2, \dots, v_p)$. Alors x s'écrit sous la forme :

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p = \frac{\lambda_1}{\lambda}(\lambda v_1) + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p \in Vect(\lambda v_1, v_2, \dots, v_p).$$

(c) • Soit $x \in Vect(v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_p)$. Alors x s'écrit sous la forme :

$$x = \lambda_1(v_1 + \lambda v_2) + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p = \lambda_1 v_1 + (\lambda_1 \lambda + \lambda_2) v_2 + \ldots + \lambda_p v_p \in Vect(v_1, v_2, \dots, v_p).$$

• Inversement, soit $x \in Vect(v_1, v_2, \dots, v_p)$. Alors x s'écrit sous la forme :

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p = \lambda_1(v_1 + \lambda v_2) + (\lambda_2 - \lambda_1 \lambda) v_2 + \ldots + \lambda_p v_p \in Vect(v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_p).$$

(d) On suppose que $v_1 \in Vect(v_2, \dots, v_p)$, donc on peut l'écrire sous la forme : $v_1 = \sum_{i=2}^{p} \mu_i v_i$.

• Soit $x \in Vect(v_1, v_2, \dots, v_p)$. Alors x s'écrit sous la forme :

$$x = \lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i v_i = \lambda_1 \left(\sum_{i=2}^{p} \mu_i v_i \right) + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i v_i = \sum_{i=2}^{p} (\lambda_1 \mu_i + \lambda_i) v_i \in Vect(v_2, \dots, v_p).$$

• Inversement, soit $x \in Vect(v_2, \dots, v_p)$. Alors x s'écrit sous la forme :

$$x = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i v_i = 0 \cdot v_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i v_i \in Vect(v_1, v_2, \dots, v_p).$$

□

Remarque 8

Les propriétés (a), (b), (c) rappellent les **"opérations élémentaires"** sur les lignes d'un système ou d'une matrice : $\quad L_i \leftrightarrow L_j, \quad L_i \leftarrow \lambda L_i \quad$ et $\quad L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

On pourra ainsi utiliser une suite d'opérations similaire au **pivot de Gauss** pour "simplifier des Vect", en retirant au fur et à mesure les vecteurs "redondants" !

Méthode : "Simplifier un Vect"

En partant de $Vect(v_1, \dots, v_p)$:

- Effectuer des "opérations élémentaires" (changer, au besoin, l'ordre des vecteurs)
- Dès que l'on repère qu'un vecteur est combinaison linéaire des autres, on peut le supprimer.
- En particulier, on peut toujours supprimer le vecteur nul.

Exercice 4

1. Simplifier le SEV de $\mathbb{R}^3$: $F = Vect\Big((1,1,-1),(0,0,0),(-1,-1,1),(0,2,1),(1,-1,-2),(1,3,0)\Big)$ (jusqu'à ce qu'on ne puisse plus "retirer" de vecteurs.)

2. Déterminer plus simplement le SEV de $\mathbb{R}[X]$: $Vect(X+X^3, 1, X, X^2+1, X^3)$.

1. • Déjà on peut retirer le vecteur nul : $F = Vect\Big((1,1,-1),(-1,-1,1),(0,2,1),(1,-1,-2),(1,3,0)\Big)$

• On a $(-1,-1,1) = -(1,1,-1)$: il est donc combinaison linéaire des autres vecteurs.
On peut le retirer : $F = Vect\Big((1,1,-1),(0,2,1),(1,-1,-2),(1,3,0)\Big)$

• Pour simplifier d'avantage, on peut aligner les vecteurs verticalement "comme une matrice", et effectuer le Pivot de Gauss :

$$F = Vect\begin{pmatrix}(1,1,-1)\\(0,2,1)\\(1,-1,-2)\\(1,3,0)\end{pmatrix} = Vect\begin{pmatrix}(1,1,-1)\\(0,2,1)\\(0,-2,-1)\\(0,2,1)\end{pmatrix}$$

On voit déjà à ce stade que l'on peut retirer $(0,-2,-1)$ et $(0,2,1)$, qui sont combinaisons linéaires des autres vecteurs. Ou alors on poursuit le "pivot" :

$$F = Vect\begin{pmatrix}(1,1,-1)\\(0,2,1)\\(0,0,0)\\(0,0,0)\end{pmatrix} = Vect\begin{pmatrix}(1,1,-1)\\(0,2,1)\end{pmatrix}$$

Finalement : $F = Vect\Big((1,1,-1),(0,2,1)\Big)$.

(On voit qu'on ne peut pas simplifier davantage car aucun de ces deux vecteurs n'est combinaison linéaire de l'autre).

2. Déjà, on peut retirer $X+X^3$ qui est combinaison linéaire de X et X^3 :
$Vect\Big(X+X^3, 1, X, X^2+1, X^3\Big) = Vect\Big(1, X, X^2+1, X^3\Big) = Vect\Big(1, X, X^2, X^3\Big)$

Notons que, par définition : $Vect\Big(1, X, X^2, X^3\Big) = \Big\{a + bX + cX^2 + dX^3,\ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\Big\} = \mathbb{R}_3[X]$.

Ainsi, $Vect\Big(X+X^3, 1, X, X^2+1, X^3\Big) = \mathbb{R}_3[X]$.

3 Familles génératrices, familles libres, bases

Dans toute cette section, on considère E un espace vectoriel fixé.

3.1 Familles génératrices

Définition 7 (Famille génératrice d'un espace vectoriel)

On dit qu'une famille $(v_1, \dots, v_p)$ de vecteurs de E est **une famille génératrice de** E (ou bien qu'elle "engendre" E) lorsque : $Vect(v_1, \dots, v_p) = E.$

L'"intérêt" d'avoir une famille génératrice est le suivant :

Proposition 6 (CNS pour une famille génératrice)

La famille $(v_1, \dots, v_p)$ est génératrice de E si et seulement si :

Tout vecteur $v \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire de $(v_1, \dots, v_p)$.

c'est à dire : $\forall v \in E,\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ \ v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p.$

Preuve :

$$(v_1, \dots, v_p) \text{ est génératrice de } E \iff E = Vect(v_1, \dots, v_p) \iff E = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}$$
$$\iff \forall v \in E,\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i.$$ $\square$

Exemples

Dans $\mathbb{R}^2$:

- Tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire :
$(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1).$
N'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^2$ s'écrit donc comme combinaison linéaire de $(0, 1)$ et $(1, 0)$.
Ceci montre que $\mathbb{R}^2 = Vect\Big((1, 0), (0, 1)\Big)$ et donc $\Big((1, 0), (0, 1)\Big)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Dessin :

- Tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire :
$(x, y) = (2x - y) \cdot (1, 1) + (-x + y) \cdot (1, 2)$
donc $\Big((1, 1), (1, 2)\Big)$ est aussi une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.
Autrement, on peut remarquer que :

$$\begin{aligned} Vect\Big((1, 1), (1, 2)\Big) &= Vect\Big((1, 1), (0, 1)\Big) \\ &= Vect\Big((1, 0), (0, 1)\Big) = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Dessin :

Exemple

Dans $\mathbb{R}^n$: Tout vecteur $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot (1, 0, \dots, 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0, \dots 0) + \dots + x_n \cdot (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Donc en notant, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\quad e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{i-ème coordonnée}}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

on voit que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est un famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Exemple

Notons que $\mathbb{R}_n[X] = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; \deg(P) \leqslant n\right\} = \left\{a_0 1 + a_1 X + \ldots + a_n X^n,\ (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\right\}$
$= Vect(1, X, , X^2, \ldots, X^n)$.

Ainsi $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

Méthode : Montrer qu'une famille est génératrice d'un espace vectoriel E

Pour montrer qu'une famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est génératrice d'un espace vectoriel E, on peut :

$\boxed{1}$ Introduire $v \in E$ quelconque et montrer qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ t.q $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_p v_p$. (Cela revient à résoudre un système linéaire d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.)

$\boxed{2}$ En "simplifiant le Vect" à l'aide d'opérations élémentaires, montrer que $Vect(v_1, \ldots, v_p) = E$.

Exercice 5

Montrer que la famille $\Big((1,0,1), (1,1,1), (0,1,-1)\Big)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

- Méthode 1 :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque. Montrons que l'on peut trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x, y, z) = a(1,0,1) + b(1,1,1) + c(0,1,-1).$$

Cette égalité équivaut à :

$$(x,y,z) = (a+b, b+c, a+b-c) \iff \begin{cases} a+b & = x \\ \quad b+c & = y \\ a+b-c & = z \end{cases} \iff \begin{cases} a+b & = x \\ \quad b+c & = y \\ \quad\quad -c & = z-x \end{cases}$$

On voit que ce système admet une solution (et même une unique solution !).
Il existe donc bien de tels réels a, b, c. Conclusion : la famille est génératrice.

- Méthode 2 : Transformer $Vect\Big((1,0,1), (1,1,1), (0,1,-1)\Big)$ avec des opérations élémentaires, jusqu'à aboutir à $Vect\Big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\Big)$ (faites-le !)

On sait que $(e_1, e_2, e_3) = \Big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\Big)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
On peut donc conclure que :

$$Vect\Big((1,0,1), (1,1,1), (0,1,-1)\Big) = Vect\Big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\Big) = \mathbb{R}^3$$

Méthode : Déterminer une famille génératrice d'un espace vectoriel E

$\boxed{1}$ Si l'ensemble E est donné "sous forme explicite", reconnaitre qu'il s'agit d'un ensemble de combinaisons linéaires, et l'écrire comme un "Vect" : on en déduit une famille génératrice.

$\boxed{2}$ Si l'ensemble E est donné "sous forme implicite", le ré-exprimer sous forme explicite. Appliquer alors le point 1.

(On cherchera souvent à obtenir **une famille génératrice avec le moins de vecteurs possibles**)

Exercice 6

1. Montrer que $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un SEV de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une famille génératrice.
2. Donner une famille génératrice de l'ensemble des solutions du système homogène suivant :
$$F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } x - y + z = 0\big\}$$
3. Montrer que $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X]\ |P(1) = 0\}$ est un SEV de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déterminer une famille génératrice.

1. $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

C'est donc bien un SEV de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une famille génératrice est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

2. On sait que F est un SEV de $\mathbb{R}^3$ car c'est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène ! Ensemble sous forme implicite...

$$\begin{cases} x + 2y - z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - z &= 0 \\ -3y + 2z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -2y + z = -2y - \frac{3}{2}y = -\frac{7}{2}y \\ z &= -\frac{3}{2}y \end{cases}$$

Ainsi on a explicité l'ensemble des solutions :

$$F = \big\{(-\tfrac{7}{2}y, y, -\tfrac{3}{2}y),\ y \in \mathbb{R}\big\} = \big\{y(-\tfrac{7}{2}, 1, -\tfrac{3}{2}),\ y \in \mathbb{R}\big\} = Vect\Big((-\tfrac{7}{2}, 1, -\tfrac{3}{2})\Big) = Vect\Big((-7, 2, -3)\Big).$$

F est donc généré par un seul vecteur : $(-7, 2, -3) \in F$. (On dira que c'est une "droite vectorielle")

3. Ensemble G sous forme implicite : explicitons-le ! Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} P(1) = 0 &\iff (X-1) \text{ divise } P \iff \exists Q \in \mathbb{R}_2[X],\ P = (X-1)Q \quad (\text{car } \deg(Q) = \deg(P) - 1 \leqslant 2) \\ &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ P = (X-1)(aX^2 + bX + c). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} G &= \Big\{(X-1)(aX^2 + bX + c),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\Big\} = \Big\{a(X-1)X^2 + b(X-1)X + c(X-1),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\Big\} \\ &= Vect\Big((X-1)X^2, (X-1)X, X-1\Big) \end{aligned}$$

G est donc bien un SEV de $\mathbb{R}[X]$ et une famille génératrice est : $\Big((X-1)X^2, (X-1)X, X-1\Big)$.

3.2 Familles liées, familles libres

Si $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille de vecteur de E, il existe toujours une combinaison linéaire de ces vecteurs qui donne le vecteur nul : la **combinaison linéaire triviale** qui consiste à poser $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$:

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_p = 0_E.$$

Définition 8 (Famille liée / Famille libre)

- On dit qu'une famille $(v_1, \ldots, v_p)$ de vecteurs de E est une **famille liée** lorsqu'il existe une combinaison linéaire non-triviale de ces vecteurs qui donne le vecteur nul.

Autrement dit, la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est liée si et seulement si :

$$\exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0, \ldots, 0), \quad \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p = 0_E.$$

- On dit qu'une famille $(v_1, \ldots, v_p)$ de vecteurs de E est une **famille libre** lorsqu'elle n'est pas liée : seule la combinaison linéaire triviale peut donner le vecteur nul.

Autrement dit, la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre si et seulement si :

$$\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \Big(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0\Big)$$

Attention !

Dans la définition de famille liée : $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0, \ldots, 0)$ signifie qu'au moins un des λ_i est non nul (et non pas que chaque coefficient λ_i est non nul !)

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\big((0,1,2),(1,1,0)\big)$ est libre.

En effet, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda(0,1,2) + \mu(1,1,0) = \underbrace{(0,0,0)}_{0_{\mathbb{R}^3}} \iff (\mu, \lambda+\mu, 2\lambda) = (0,0,0) \iff \begin{cases} \mu &= 0 \\ \lambda + \mu &= 0 \\ 2\lambda &= 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = 0.$$

La seule combinaison linéaire donnant $(0,0,0)$ est donc la combinaison triviale.

- Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\big((0,1,2),(1,1,0),(2,3,2)\big)$ est liée.

En effet, pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1(0,1,2) + \lambda_2(1,1,0) + \lambda_3(2,3,2) = (0,0,0) \iff (\lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3, 2\lambda_1 + 2\lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 &= -\lambda_2 - 3\lambda_3 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 &= -2\lambda_3 \end{cases}$$

En choisissant par exemple $\lambda_3 = 1$, on a la solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, -2, 1)$.

On obtient ainsi une combinaison non-triviale donnant le vecteur nul :

$$-(0,1,2) - 2(1,1,0) + (2,3,2) = (0,0,0). \quad \text{La famille est donc liée.}$$

L'"intérêt" d'avoir une famille libre est le suivant :

Proposition 7 (CNS pour une famille libre)

Une famille $(v_1, \dots, v_p)$ de vecteurs de E est libre si et seulement si :

Il y a unicité de la décomposition en combinaison linéaire.

Autrement dit, pour tous $(\lambda_1, \dots, \lambda) \in \mathbb{R}^p$ et $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, v_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda'_i\, v_i \implies \Big(\forall i \in [\![1,p]\!],\ \lambda_i = \lambda'_i\Big)$$

(On peut "identifier les coefficients")

Preuve :

- Supposons que la famille soit libre. Montrons l'unicité de la décomposition en combinaison linéaire.

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda) \in \mathbb{R}^p$ et $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_p) \in \mathbb{R}^p$. On suppose que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, v_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda'_i\, v_i$.

On a donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, v_i - \sum_{i=1}^{p} \lambda'_i\, v_i = 0_E$, c'est à dire : $\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \lambda'_i) v_i = 0_E$.

Or la famille est libre, donc seule la combinaison linéaire triviale peut donner le vecteur nul.
On en déduit : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i - \lambda'_i = 0$, donc $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = \lambda'_i$.

- Supposons l'unicité de la décomposition en combinaison linéaire. Montrons que la famille est libre.

Supposons qu'on ait $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, v_i = 0_E$.

Dans ce cas, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, v_i = \sum_{i=1}^{p} 0\, v_i$. Par unicité de la décomposition, on obtient : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = 0$.

Ainsi, la seule combinaison linéaire de $(v_1, \dots, v_p)$ donnant le vecteur nul est la combinaison linéaire triviale : on a montré que la famille est libre.

$\square$

Donnons une autre caractérisation, peut-être plus intuitive, de la notion de famille liée/libre :

Proposition 8 (Famille liée et "vecteur redondant")

La famille $(v_1, \dots, v_p)$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs de la famille peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres. Autrement dit, $(v_1, \dots, v_p)$ est liée si et seulement si :

$$\exists i_0 \in [\![1,p]\!], \quad v_{i_0} \in Vect(v_1, \dots, v_{i_0-1}, v_{i_0+1}, \dots, v_p)$$

À l'inverse, la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre si et seulement si aucun vecteur ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

Preuve :

- Supposons $(v_1, \dots, v_p)$ liée : il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, non tours nuls, tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = 0_E$.

Au moins l'un des coefficients est non nul, disons $\lambda_{i_0} \neq 0$ pour un $i_0 \in [\![1,p]\!]$.
On a donc :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = 0_E \iff \lambda_{i_0} v_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \lambda_i v_i = 0_E \iff \lambda_{i_0} v_{i_0} = -\sum_{i \neq i_0} \lambda_i v_i \iff v_{i_0} = -\sum_{i \neq i_0} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} v_i \quad (\text{car } \lambda_{i_0} \neq 0)$$

Ainsi le vecteur v_{i_0} est bien combinaison linéaire des autres.

- Supposons qu'il existe $i_0 \in [\![1,p]\!]$ tel que v_{i_0} s'écrive comme combinaison linéaire des autres :

$$v_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \lambda_i v_i \quad \text{avec des coefficients } \lambda_1, \dots, \lambda_{i_0-1}, \lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}.$$

Ceci se ré-écrit : $\displaystyle\sum_{i \neq i_0} \lambda_i v_i - v_{i_0} = 0_E$, c'est à dire :

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i_0-1} v_{i_0-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} \cdot v_{i_0} + \lambda_{i_0+1} v_{i_0+1} + \dots + \lambda_p v_p = 0_E.$$

On a donc une combinaison linéaire non-triviale qui donne le vecteur nul : $(v_1, \dots, v_p)$ est liée. □

Exemple
Pour montrer que la famille $\Big((0,1,2),(1,1,0),(2,3,2)\Big)$ étudiée précédemment est liée,
on aurait simplement pu remarquer que : $(0,1,2) = (2,3,2) - 2(1,1,0).$

Remarques 9

- En particulier : une famille qui contient le vecteur nul est liée,
une famille qui contient deux fois le même vecteur est liée.

- Le cas d'une famille liée est exactement le cas où on peut "simplifier le Vect" en retirant un vecteur :
si v_{i_0} s'écrit comme combinaison linéaire des autres :
$$Vect(v_1, \dots, v_p) = Vect(v_1, \dots, v_{i_0-1}, v_{i_0+1}, \dots, v_p)$$
(on peut retirer v_{i_0} et conserver le même sous espace-vectoriel engendré)

- À l'inverse, lorsqu'une famille est libre, aucun vecteur ne s'écrit comme combinaison linéaire des autres, et on ne peut donc pas "simplifier le Vect" davantage (retirer un vecteur) !

Proposition 9 (Cas particulier des familles à 1 ou 2 vecteurs)

- Une famille à un seul vecteur (v_1) est libre si et seulement si $v_1 \neq 0_E$.

- Une famille à deux vecteurs (v_1, v_2) est liée si et seulement ces vecteurs sont **colinéaires**
(i.e "proportionnels") : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ v_1 = \lambda v_2$ ou $v_2 = \lambda v_1$.
Ainsi, une famille de deux vecteurs non-colinéaires est libre.

Preuve :
- Par définition, dire que la famille (v_1) est libre, c'est dire : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda \cdot v_1 = 0_E \Longrightarrow \lambda = 0)$.
C'est vrai si et seulement si $v_1 \neq 0_E$ (cf. Proposition 1)

- Avec la caractérisation de la Proposition 6, la famille (v_1, v_2) est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres : c'est bien dire que v_1 et v_2 sont colinéaires. □

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^4$: $\Big((1,2,3,4),(0,2,1,1)\Big)$ est libre car les deux vecteurs sont clairement non-colinéaires.

- Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: la famille $\Big(\cos,\ \sin\Big)$ est libre, car ces deux fonctions ne sont pas proportionnelles !
(Exercice : pourquoi ?)

Attention !

Pour montrer qu'une famille de 3 vecteurs ou plus est libre, il n'est pas suffisant de vérifier que les vecteurs sont deux à deux non-colinéaires !
Exemple : La famille $\Big((0,1,2),(1,1,0),(2,3,2)\Big)$ est composée de vecteurs non-colinéaires,
pourtant on a vu qu'elle était liée.

Méthode : Montrer qu'une famille est libre / liée

Pour montrer qu'une famille $(v_1, \dots, v_p)$ est **liée**, on peut :

$\boxed{1}$ Repérer qu'un vecteur s'écrit comme combinaison linéaire des autres.
(en particulier si la famille contient le vecteur nul, ou deux fois le même vecteur...)

$\boxed{2}$ Démontrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_E$.
Pour cela, on pose l'égalité $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_E$, on identifie les coefficients, et on raisonne par équivalences pour trouver les solutions $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.
Cela revient en général à résoudre un système linéaire homogène ! (cf. Exemples page précédente)

Pour montrer qu'une famille $(v_1, \dots, v_p)$ est **libre** :

- Pour une famille d'un seul vecteur, annoncer que ce vecteur est non nul.
- Pour une famille de deux vecteurs, vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.
- Pour une famille d'au moins 3 vecteurs : introduire $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_E$ et montrer qu'on a nécessairement $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

Pour cela, on pose l'égalité $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_E$, on identifie les coefficients, et on raisonne par équivalences : cela revient à résoudre un système linéaire homogène d'inconnues $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$!
(cf. Exemples page précédente)

Dans les espaces vectoriels $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il peut être nécessaire de raisonner autrement.
(On peut choisir des valeurs de $n \in \mathbb{N}$ ou de $x \in \mathbb{R}$ particulières pour obtenir un système à résoudre, on peut aussi exploiter les limites, dériver, etc...)

(On cherchera souvent à obtenir **une famille libre avec le plus de vecteurs possibles**)

Exercice 7

Montrer que les familles suivantes sont libres :

1. Dans $\mathbb{R}^4$: $\Big((1,0,2,0), (0,1,2,1), (1,1,0,-1)\Big)$
2. Dans $\mathbb{R}[X]$: $\Big(2X,\ X+1,\ 3X^2 - 2X + 1\Big)$
3. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: (f_1, f_2, f_3), où $f_k : x \mapsto \cos(kx)$.

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Supposons $a(1,0,2,0) + b(0,1,2,1) + c(1,1,0,-1) = (0,0,0,0)$ et montrons que $a = b = c = 0$.

$$a(1,0,2,0) + b(0,1,2,1) + c(1,1,0,-1) = (0,0,0,0) \iff (a+b, b+c, 2a+2b, b-c) = (0,0,0,0)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} a \quad +c & = 0 \\ b+c & = 0 \\ 2a+2b \quad & = 0 \\ b-c & = 0 \end{array}\right. \iff [...] \iff \left\{\begin{array}{rl} a \quad +c & = 0 \\ b+c & = 0 \\ c & = 0 \end{array}\right.$$

On voit que ce système homogène est de Cramer, donc admet l'unique solution : $a = b = c = 0$.
La famille est donc libre.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Supposons $a \cdot 2X + b(X+1) + c(3X^2 - 2X + 1) = \underbrace{0}_{\text{polynôme nul}}$ et montrons que $a = b = c = 0$.

$$a \cdot 2X + b(X+1) + c(3X^2 - 2X + 1) = 0 \iff 3cX^2 + (a+b-2c)X + b + c = 0$$

Or un polynôme est nul si et seulement si tous ces coefficients sont nuls :

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} 3c & = 0 \\ a+b-2c & = 0 \\ b+c & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} c = 0 \\ a+b = 0 \\ b = 0 \end{array}\right. \iff a = b = c = 0.$$

La famille est donc libre.

3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons que $af_1 + bf_2 + cf_3 = \underbrace{0}_{\text{fonction nulle}}$ et montrons que $a = b = c = 0$.

L'égalité $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$ signifie : $\forall x \in \mathbb{R},\ af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) = 0$.
c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x) + b\cos(2x) + c\cos(3x) = 0$.

On ne peut pas vraiment "identifier les coefficients" et raisonner par équivalences ici !

En évaluant en $x = 0$: $a + b + c = 0$.
En évaluant en $x = \frac{\pi}{2}$: $-b = 0$.
En évaluant en $x = \frac{\pi}{3}$: $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - c = 0$.

À partir de ces 3 équations, on obtient facilement $a = b = c = 0$. La famille est donc libre.

Un dernier résultat souvent utile pour des familles de polynômes :

Proposition 10 (Famille de polynômes de degrés distincts)

Dans $\mathbb{R}[X]$: toute famille $(P_1, P_2, \ldots, P_p)$ constituée de polynômes non nuls, de degrés deux à deux distincts est libre.

Preuve :

Soit $(P_1, \ldots, P_p)$ une famille de polynômes non-nuls de degrés deux à deux distincts.
Quitte à changer l'ordre des polynômes, on peut supposer $0 \leqslant \deg(P_1) < \deg(P_2) < \ldots < \deg(P_p)$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que la famille $(P_1, \ldots, P_p)$ soit liée :
il existe donc des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_p P_p = 0$.

Au moins l'un des λ_i est non nul : choisissons $i_0 \in [\![1, p]\!]$ le plus grand indice possible tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$.

Ainsi : $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_{i_0-1} P_{i_0-1} + \underbrace{\lambda_{i_0}}_{\neq 0} P_{i_0} + \underbrace{\lambda_{i_0+1}}_{=0} P_{i_0+1} + \ldots + \underbrace{\lambda_p}_{=0} P_p = 0$

On obtient donc : $\underbrace{\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_{i_0-1} P_{i_0-1}}_{\text{degré} < \deg(P_{i_0})} + \underbrace{\lambda_{i_0} P_{i_0}}_{\text{degré } = deg(P_{i_0})} = 0$.

Or on voit que le degré de ce polynôme est $\deg(P_{i_0}) \geqslant 0$: il ne peut pas être nul. Contradiction ! ☐

Exemple

La famille $\left(3,\ 2X - 1,\ 3X^3 - X^2 + 2,\ X^4 + X^2\right)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$, car constituée de polynômes de degrés deux à deux distincts.

Attention !

La Proposition 10 n'est pas une équivalence. Autrement dit, on peut tout à fait avoir une famille libre constituée de polynômes qui ne sont pas de degrés distincts !

Exemple : Vérifier que la famille de polynômes $\left(X^2, (X-1)^2, (X+1)^2\right)$ est libre.
(Pourtant tous ces polynômes sont de même degré).

3.3 Bases

Rappelons qu'une famille $(v_1, \dots, v_p)$ est génératrice de E lorsque n'importe quel vecteur $v \in E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de ces vecteurs : $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$.

Exemple

La famille $\Big((1,0),(0,1),(1,1)\Big)$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ (vérifiez-le).

Ainsi, n'importe quel vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme combinaison linéaire :

$$(x,y) = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) + \lambda_3(1,1) \quad \text{avec} \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

Mais il n'y a pas unicité de cette décomposition !

Par exemple, le vecteur $(2,3) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire : $\quad (2,3) = 2 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1) + 0 \cdot (1,1)$

mais il peut aussi s'écrire : $\quad (2,3) = 1 \cdot (1,0) + 2 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,1)$.

Pour garantir en plus l'unicité de la décomposition, on a vu qu'il fallait travailler avec une famille libre. Ce constat justifie naturellement l'introduction de la notion de base :

Définition 9 (Base)

Une famille $(v_1, \dots, v_p)$ est une **base de** E lorsque : c'est une famille génératrice de E <u>et</u> libre.

Exemples

- La famille $\Big((1,0),(0,1),(1,1)\Big)$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas libre (car $(1,1) = (1,0)+(0,1)$).
Ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.
- La famille $\Big((1,0),(0,1)\Big)$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ et est libre (2 vecteurs non-colinéaires).
C'est une base de $\mathbb{R}^2$!
- La famille $\Big((1,-1),(2,2)\Big)$ est une autre base de $\mathbb{R}^2$. (vérifiez-le)

En mettant bout à bout les CNS des familles génératrices et libres (Propositions 6 et 7) on obtient :

Théorème 3 (CNS pour une base)

Une famille $(v_1, \dots, v_p)$ est une base de E <u>si et seulement si</u> :

Tout vecteur $v \in E$ s'écrit <u>de manière unique</u> comme combinaison linéaire de $(v_1, \dots, v_p)$.

c'est à dire :

$$\forall v \in E, \ \exists ! \, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \ \ v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (uniques !) sont alors appelés coordonnées de v dans la base $(v_1, \dots, v_p)$.

On peut les noter dans la "matrice colonne des cordonnées de v dans la base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p)$" :

$$Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}).$$

Preuve :

On a vu précédemment que :

$$(v_1, \dots, v_p) \text{ est génératrice de } E \iff \forall v \in E, \ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \ \ v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

$$(v_1, \dots, v_p) \text{ est libre } \iff \text{Il y a unicité de la décomposition en combinaison linéaire.}$$

En réunissant ces deux conditions :

$$(v_1, \dots, v_p) \text{ est une base de } E \iff \forall v \in E, \ \exists ! \, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \ \ v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \qquad \square$$

Donnons quelques $\boxed{\text{exemples fondamentaux de bases dans les espaces usuels}}$:

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^n$: En notant, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\quad e_i = (0,\ldots,0,\underbrace{1}_{\text{i-ème coordonnée}},0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$

  la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

  $\boxed{\text{On l'appelle la } \textbf{base canonique de } \mathbb{R}^n.}$

En effet : On a déjà vu que c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. Vérifiez qu'elle est libre !

- Dans $\mathbb{R}_n[X]$: La famille $\quad (1, X, X^2, \ldots, X^n) \quad$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

  $\boxed{\text{On l'appelle la } \textbf{base canonique de } \mathbb{R}_n[X].}$

En effet : On a déjà vu que c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$. Elle est libre car c'est une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts.

- Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: En notant, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$,

  $E_{i,j} =$ matrice dont tous les coeffs. sont nuls, sauf un 1 sur la i-ème ligne et la j-ème colonne.

  la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

  $\boxed{\text{On l'appelle la } \textbf{base canonique de } \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).}$

En effet : On remarque que pour tout $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on peut écrire : $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}E_{i,j}$.
C'est donc une famille génératrice ! De plus, il est clair que cette décomposition est unique.
En fait, si des scalaires $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ satisfont $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j}E_{i,j} = 0_{n,p}$, cela revient à dire que la matrice $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est nulle, c'est à dire que tous les scalaires $\lambda_{i,j}$ sont nuls. C'est donc une famille libre !

Par exemple : La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est : $\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)$.

En particulier : La base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est : $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$

Méthode : Questions liées aux bases

- **Montrer qu'une famille de vecteurs $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E :**

$\boxed{1}$ On peut montrer que c'est une famille génératrice et libre (cf. méthodes associées).

$\boxed{2}$ On peut introduire $v \in E$ quelconque et montrer qu'il existe un unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_p e_p.$$

Cela revient à résoudre un système linéaire d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

- **Déterminer une base d'un espace vectoriel E :**

\- Dabord déterminer une famille génératrice (cf. méthode associée).

\- Si cette famille est également libre (c'est très souvent le cas !) alors c'est une base.
Sinon, "simplifier le Vect" en supprimant des vecteurs jusqu'à obtenir une famille libre.

- **Déterminer les coordonnées d'un vecteur $v \in E$ dans une base $(e_1, \ldots, e_p)$:**

Déterminer l'unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p$.
Cela revient à résoudre un système linéaire d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Exercice 8

1. (a) Montrer que $\mathcal{B}=\Big(2,\ -X+1,\ 2X^2-2X+1\Big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) Donner la matrice des coordonnées de $P=X^2+2X-3\in\mathbb{R}_2[X]$ dans :
La base canonique $\mathcal{B}_0=(1,X,X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
La base $\mathcal{B}$.

2. Déterminer une base du plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x-2y+z=0$:

$$F=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x-2y+z=0\Big\}.$$

1. (a) • $\mathcal{B}$ est une famille libre, car les polynômes sont de degrés distincts.

• Montrons que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$Vect\Big(2,-X+1,2X^2-2X+1\Big)=Vect\Big(1,-X+1,2X^2-2X+1\Big)=Vect\Big(1,-X,2X^2-2X\Big)$$

$$=Vect\Big(1,X,X^2-X\Big)=Vect\Big(1,X,X^2\Big)=\mathbb{R}_2[X]\quad\text{d'où le résultat.}$$

Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

1.(b) P s'écrit : $P=-3\cdot 1+2\cdot X+1\cdot X^2$ donc ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_0=(1,X,X^2)$ sont :

$$Mat_{\mathcal{B}_0}(P)=\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Comme $\mathcal{B}=(2,-X+1,2X^2-2X+1)$ est aussi une base de $\mathbb{R}_2[X]$, on sait qu'il existe un unique $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$P=a\cdot 2+b\cdot(-X+1)+c\cdot(2X^2-2X+1).$$

Déterminons ces coordonnées :

$$P=2a+b(-X+1)+c(2X^2-2X+1)\iff X^2+2X-3=(2c)X^2+(-b-2c)X+(2a+b+c)$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rl}2c&=1\\-b-2c&=2\\2a+b+c&=-3\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rl}c&=\frac12\\b&=-2c-2=-1-2=-3\\2a&=-3-b-c=-3+3-\frac12=-\frac12\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rl}c&=\frac12\\b&=-3\\a&=-\frac14\end{array}\right.$$

Ainsi, P s'écrit : $P=-\frac14\cdot 2-3\cdot(-X+1)+\frac12(2X^2-2X+1)$
donc ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}=(2,-X+1,2X^2-2X+1)$ sont :

$$Mat_{\mathcal{B}}(P)=\begin{pmatrix}-\frac14\\-3\\\frac12\end{pmatrix}$$

2. On pourrait vérifier que F est bien un SEV de $\mathbb{R}^3$. En fait on va montrer que c'est un "Vect", donc cela montrera au passage que c'est un SEV !

On l'écrit sous forme explicite : $F=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x=2y-z\Big\}=\Big\{(2y-z,y,z),\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\Big\}$.

Ainsi : $F=\Big\{y(2,1,0)+z(-1,0,1),\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\Big\}=Vect\Big((2,1,0),(-1,0,1)\Big)$.

F est donc un SEV de $\mathbb{R}^3$, dont une famille génératrice est $\Big((2,1,0),(-1,0,1)\Big)$.

De plus cette famille est libre, car composée de deux vecteurs non-colinéaires.

Une base de F est donc : $\Big((2,1,0),(-1,0,1)\Big)$.

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Connaître les espaces vectoriels usuels et les règles de calculs dans ces espaces.
- Montrer et repérer qu'un vecteur est combinaison linéaire d'autres vecteurs.
- Montrer qu'un ensemble est un SEV d'un espace vectoriel usuel.
- Comprendre et manipuler $Vect(v_1, \dots, v_p)$.
- Déterminer une famille génératrice d'un espace vectoriel.
- Montrer qu'une famille est libre ou liée.
- Connaître les bases canoniques des espaces vectoriels usuels.

Pour suivre

- Modifier un "Vect" avec des opérations élémentaires
  (Pour modifier ou simplifier une famille génératrice)
  (Pour supprimer des vecteurs jusqu'à obtenir une famille libre)
- Montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel.
- Déterminer la matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base.

Pour les ambitieux

- Connaître la définition théorique d'un espace vectoriel (liste de propriétés).
- Maîtriser toutes les preuves du cours.