14

Matrices - Corrigé

Exercice 1 (Calcul 1)

a) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) Le produit AB n'a pas de sens. $BA = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le produit BA n'a pas de sens.

Exercice 2 (Calcul 2)

- XY n'a pas de sens.
- ${}^tXY = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $X{}^tY = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 7$. (Matrice 1×1, que l'on peut identifier à un réel !)
- ${}^tX{}^tY$ n'a pas de sens.

Exercice 3 (Matrices qui commutent 1)

1) Pour toute matrice $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} AB = BA &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} \iff \begin{cases} d = h = g = 0 \\ e = i = a \\ f = b \end{cases} \iff B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des matrices qui commutent avec A est : $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

2) On a $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, on voit que $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI_3 + bA + cA^2$. On a donc $E = \{aI_3 + bA + cA^2,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4 (Matrices qui commutent 2)

Pour toute matrice $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} AB = BA &\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 3d & 3e & 3f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 3b & 2c \\ -d & 3e & 2f \\ -g & 3h & 2i \end{pmatrix} \iff b = c = d = f = g = h = 0 \iff B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, les matrices qui commutent avec A sont exactement les matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 5 ("Équation" matricielle)

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^3 - 2M = D$.
Alors on a $MD = M(M^3-2M) = M^4 - 2M^2 = (M^3-2M)M = DM$: D et M commutent.
Et notant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on sait donc que

$$MD = DM \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -a & 4b \\ -c & 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 4c & 4d \end{pmatrix} \iff b = c = 0.$$

Ainsi, si $M^3 - 2M = D$, M est nécessairement de la forme $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, c'est à dire une matrice diagonale !
On peut alors résoudre facilement l'équation :

$$M^3 - 2M = D \iff \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a^2-2a & 0 \\ 0 & d^2-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2-2a = -1 \\ d^2-2d = 4 \end{cases}$$

Il reste à déterminer les réels tels que $a^2 - 2a + 1 = 0$ et $d^2 - 2d - 4 = 0$.
En résolvant ces équations polynomiales, on trouve : $a = 1$ et $d = 1 \pm \sqrt{5}$.

<u>Conclusion :</u> les matrices satisfaisant $M^3 - 2M = D$ sont $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (Calcul de puissances)

1. On a $A = 2I_2 + N$ en posant $N = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculons les puissances de N :

- $N^0 = I_2$ • $N^1 = N$. • $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$ • Et donc $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0_2$.

2. Puisque $2I_2$ et N commutent $\Big((2I_2)N = 2N = N(2I_2) \Big)$, on peut appliquer la formule du binôme :
pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = (2I_2+N)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2I_2)^{n-k}N^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}I_2N^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}N^k = \binom{n}{0}2^nI_2 + \binom{n}{1}2^{n-1}N$$
$$= 2^n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n2^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 3n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

(Au passage, puisque A est une matrice triangulaire supérieure, on aurait pu prévoir que A^n est également triangulaire supérieure, et même trouver tout de suite ses coefficients diagonaux !)

Exercice 7 (Plusieurs méthodes)

1. Après calcul, on a $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2M + 3I_3$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: "$\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2,\ M^n = a_nM + b_nI_3$".
Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $M^0 = a_0M + b_0I_3$ en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$: ainsi, il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_nM + b_nI_3$.

Par suite, $M^{n+1} = M^nM = (a_nM + b_nI_3)M = a_nM^2 + b_nM$.
D'après 1., $M^2 = -2M + 3I_3$, donc : $M^{n+1} = a_n(-2M+3I_3) + b_nM = (-2a_n + b_n)M + 3a_nI_3$.
Ainsi, on obtient bien $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I_3$ en posant $\begin{cases} a_{n+1} = -2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3a_n. \end{cases}$
Ceci prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et achève la récurrence.

(b) Il y a de nombreuses façons de déterminer les expressions de a_n et b_n en fonction de n...
- On peut noter qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = -2a_{n+1} + b_{n+1} = -2a_{n+1} + 3a_n$.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc à récurrence linéaire d'ordre 2 : on peut utiliser la méthode de l'équation caractéristique.

• Autrement, on peut noter que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad a_{n+1} + b_{n+1} = (-2a_n + b_n) + 3a_n = a_n + b_n$.
Ainsi, la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = a_0 + b_0$, c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = 1$.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1 - a_n$ et donc $a_{n+1} = -2a_n + b_n = -2a_n + (1 - a_n) = -3a_n + 1$.
La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique : on peut utiliser la méthode associée.

Après calcul, on trouve $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1-(-3)^n}{4}}$.

Ensuite, $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = 3a_n = \dfrac{3-3(-3)^n}{4} = \dfrac{3+(-3)^{n+1}}{4}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \dfrac{3+(-3)^n}{4}$.

Puisque cette formule fonctionne aussi pour $n = 0$, on a finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \dfrac{3+(-3)^n}{4}}$.

Pour conclure, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = a_n M + b_n I_3 = \frac{1-(-3)^n}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{3+(-3)^n}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Vous pouvez simplifier chaque coefficient si vous le souhaitez...)

3.(a) On a vu que $M^2 = -2M + 3I_3$, i.e $M^2 + 2M - 3I_3 = 0_3$.
Autrement dit, on a $P(M) = 0_3$ avec $P = X^2 + 2X - 3 \in \mathbb{R}[X]$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par P s'écrit :

$$X^n = P(X)Q(X) + R(X) \ \text{ avec } \ \deg(R) < deg(P) = 2.$$

Ainsi, $\deg(R) \leqslant 1$, on peut donc écrire $R(X) = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer. On a donc

$$X^n = P(X)Q(X) + aX + b.$$

Après calcul, les racines de $P = X^2 + 2X - 3$ sont 1 et -3. Ainsi, en évaluant l'égalité précédente en 1 et en -3 :

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ (-3)^n = -3a + b \end{cases}$$

On résout ce système pour trouver $a = \dfrac{1-(-3)^n}{4}$ et $b = \dfrac{3+(-3)^n}{4}$.

Conclusion : le reste est $\boxed{R(X) = \dfrac{1-(-3)^n}{4}X + \dfrac{3+(-3)^n}{4}}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité polynomiale : $\quad X^n = P(X)Q(X) + R(X)$
et on en déduit l'égalité matricielle : $\quad M^n = P(M)Q(M) + R(M)$.
Puisque $P(M) = 0_3$, on obtient finalement

$$M^n = R(M) = \frac{1-(-3)^n}{4}M + \frac{3+(-3)^n}{4}I_3.$$

On retrouve bien la même expression qu'en 2.(b) !

Exercice 8 (Matrices et récurrence linéaire 1)

1.(a) En posant $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $AX_n = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6u_n - v_n \\ u_n + 4v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$.
1.(b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.
• Initialisation : $A^0 X_0 = I_2 X_0 = X_0$. On a donc bien $X_0 = A^0 X_0$.
• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $X_n = A^n X_0$.
D'après 1.(a), $X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1}X_0$, ce qui achève la récurrence.

2.(a) On peut écrire $A = 5I_2 + J$ en posant $J = A - 5I_2 = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.(b) On calcule les puissances de J :

• $J^0 = I_2$ • $J^1 = J$ • $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0_2$ • Et donc $\forall k \geqslant 2,\ J^k = 0_2$.

Puisque $5I_2$ et J commutent, on peut appliquer la formule du binôme : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (5I_2 + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (5I_2)^{n-k} J^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^{n-k} I_2 J^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^{n-k} J^k = \binom{n}{0} 5^n I_2 + \binom{n}{1} 5^{n-1} J.$$

On trouve donc

$$A^n = 5^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n5^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n + n5^{n-1} & -n5^{n-1} \\ n5^{n-1} & 5^n - n5^{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a vu que $X_n = A^n X_0$, ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n + n5^{n-1} & -n5^{n-1} \\ n5^{n-1} & 5^n - n5^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n + 2n5^{n-1} \\ -5^n + 2n5^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5^n + 2n5^{n-1} = (1 + \frac{2}{5}n)5^n$ et $v_n = -5^n + 2n5^{n-1} = (-1 + \frac{2}{5}n)5^n$.

Exercice 9 (Matrices et récurrence linéaire 2)

1. Cherchons la bonne matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à poser : on veut, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} = AU_n \iff \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,u_{n+1} + b\,u_n \\ c\,u_{n+1} + d\,u_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n \\ u_{n+1} = c\,u_{n+1} + d\,u_n. \end{cases}$$

Il suffit pour cela de choisir les coefficients $a = 3, b = -2$ et $c = 1, d = 0$. On pose donc $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Par récurrence immédiate, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n U_0$.

2.(a) Montrons par réccurence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists a_n \in \mathbb{R},\ A^n = a_n \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

• Initialisation : On a $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient bien $A^0 = a_0 \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ en posant $a_0 = 1$.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $A^n = a_n \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n A &= \left(a_n \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a_n \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a_n \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2a_n \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient donc bien $A^{n+1} = a_{n+1} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ en posant $a_{n+1} = 2a_n$.

2.(b) Puisque $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 2a_n$ (suite géométrique), on obtient $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 2^n$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = 2^n \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 \end{pmatrix}.$$

3. On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$, ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc $u_n = (2^n - 1)u_1 + (-2^n + 2)u_0$.

Exercice 10 (Matrices nilpotentes)

1.(a) Par exemple $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (on a $N^2 = 0_2$).

1. (b) Par exemple $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (on a $N^2 = 0_3$) ou bien $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (on a $N^3 = 0_3$).

2. (a) Soient $N, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrice nilpotentes : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $N^p = 0_n$ et $M^q = 0_n$. Si on suppose que N et M commutent, on a $(NM)^p = \underbrace{N^p}_{=0_n} M^p = 0_n$, donc NM est nilpotente.

2.(b) Soient $N, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrice nilpotentes : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $N^p = 0_n$ et $M^q = 0_n$. Si on suppose que N et M commutent, on peut appliquer la formule du binôme :

$$(N + M)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} N^k M^{p+q-k}.$$

Dans cette somme :
- Si $k \geqslant p$, on a $N^k = 0_n$.
- Si $k < p$, on a $p + q - k > q$ et donc $M^{(p+q-k)} = 0_n$.

Ainsi, tous les termes de la somme sont nuls ! On obtient $(N + M)^{p+q} = 0_n$, donc $N + M$ est nilpotente.

3. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente : il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0_n$.
Si jamais N était inversible, alors on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N^k serait également inversible (un produit de matrices inversibles étant inversible). En particulier, on aurait N^p inversible, c'est à dire 0_n inversible.
Mais la matrice nulle n'est pas inversible : c'est absurde !

Conclusion : N n'est pas inversible.

Exercice 11 (Calcul d'inverse 1)

Après calcul, on trouve : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 (Calcul d'inverse 2)

Après calcul, on trouve : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 (Calcul d'inverse 3)

Après calcul, on trouve : $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1/3 & 1 & -4/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$.

Le système se ré-écrit :

$$M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right) \iff \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = M^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right) \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1/3 & 1 & -4/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10/3 \\ -11/3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système admet l'unique solution $(x, y, z) = (-6, \frac{-10}{3}, \frac{-11}{3})$.

Exercice 14 (Calcul d'inverse 4)

1. Après calcul, on obtient $B^3 - 3B^2 + 3B = I_3$.

2. Cette égalité se ré-écrit $B(B^2 - 3B + 3I_3) = I_3$. Ceci montre que B est inversible et $B^{-1} = B^2 - 3B + 3I_3$. On peut ainsi calculer les coefficients de B^{-1} si on le souhaite.

3. Après calcul avec la méthode standard, on obtient : $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 (Condition d'inversibilité ?)

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La matricce $A - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si le sustème homogène associé est de Cramer, c'est à dire que l'équation $(A - \lambda I_3)X = 0$ admet une unique solution (qui est alors $X = 0$).
Pour tout $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, on résout ce système avec le pivot de Gauss :

$$(A-\lambda I_3)X = 0 \iff \left\{\begin{array}{cccc} (1-\lambda)x & +2y & -z & =0 \\ -2x & +(-3-\lambda)y & +3z & =0 \\ x & +y & (-2-\lambda)z & =0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{cccc} x & +y & (-2-\lambda)z & =0 \\ -2x & +(-3-\lambda)y & +3z & =0 \\ (1-\lambda)x & +2y & -z & =0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{cccc} x & +y & (-2-\lambda)z & =0 \\ & (-1-\lambda)y & +(-1-2\lambda)z & =0 \\ & (1+\lambda)y & +(1-\lambda-\lambda^2)z & =0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{cccc} x & +y & (-2-\lambda)z & =0 \\ & (-1-\lambda)y & +(-1-2\lambda)z & =0 \\ & & (-3\lambda-\lambda^2)z & =0 \end{array}\right.$$

Ce système trangulaire est de Cramer si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non-nuls.
Ceci donne facilement les conditions $\lambda \neq -1$, $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -3$.

Conclusion : la matrice $(A - \lambda I_3)$ est inversible si et seulement si $\lambda \neq -1$, $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -3$.

2. L'équation $AX = -3X$ se réécrit $(A - (-3)I_3)X = 0$. C'est donc le système précédent avec $\lambda = -3$!
En reprenant le système triangulaire avec $\lambda = -3$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & +y & z & =0 \\ & 2y & +5z & =0 \\ & & 0 & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccc} x & +y & +z & =0 \\ & 2y & +5z & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cc} x & = \frac{3}{2}z \\ y & = -\frac{5}{2}\,z. \end{array}\right.$$

Ainsi, l'ensemble des matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ solutions de $AX = -3X$ est : $\left\{ \begin{pmatrix} (3/2)z \\ -(5/2)z \\ z \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}$.

3. L'équation $AX = 2X$ se réécrit $(A - 2I_3)X = 0$.
Or on a vu que la matrice $A - 2I_3$ est inversible (cela correspond au cas $\lambda = 2$).
Ainsi, on sait que l'équation $(A - 2I_3)X = 0$ admet l'unique solution $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 16 (Une décomposition)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée. Montrons qu'il existe un unique couple (A, B) tel que :

$$\boxed{1}\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est symétrique}, \qquad \boxed{2}\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est antisymétrique}, \qquad \boxed{3}\ M = A + B.$$

Analyse : Supposons un instant qu'il existe bien un tel couple (A, B). Que peut-on en dire ?

On a $\boxed{M = A + B}$.
On en déduit : ${}^tM = {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.
Puisque A est symétrique, ${}^tA = A$. Puisque B est antisymétrique, ${}^tB = -B$.
Ainsi, on obtient $\boxed{{}^tM = A - B}$.

On en déduit : $M + {}^tM = 2A$ et donc $A = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$. De même, $M - {}^tM = 2B$ et donc $B = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.
Si un couple (A, B) solution existe, c'est donc celui-là !

Synthèse : Posons les matrices $A = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $B = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$. Vérifions que (A, B) est solution.

- Vérifions $\boxed{1}$: ${}^tA = {}^t\left(\frac{1}{2}(M + {}^tM)\right) = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = \frac{1}{2}(M + {}^tM) = A$.

Ainsi ${}^tA = A$: A est donc bien symétrique !

- Vérifions $\boxed{2}$: ${}^tB = {}^t\left(\frac{1}{2}(M - {}^tM)\right) = \frac{1}{2}({}^tM - {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -\frac{1}{2}(M - {}^tM) = -B$.

Ainsi ${}^tB = -B$: B est donc bien antisymétrique !

- Enfin, vérifions $\boxed{3}$: $A + B = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM) = \frac{1}{2}(M + M) = M$. On a donc bien $M = A + B$.

Conclusion : Toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Précisément, cette décomposition est :

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\text{antisymétrique}}.$$

Exercice 17 (Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

Notons $(a_{i,j})$ les coefficients de la matrice A. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ fixé, notons $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ayant tous ses coefficients nuls, sauf un 1 sur la i-ème ligne et la j-ème colonne.

En posant les produits matriciels, on peut faire les constats suivants, pour tout (i,j) :

• Le produit $E_{i,j}A$ donne une matrice dont toutes les lignes sont nulles,
sauf la i-ème ligne qui est remplie avec la j-ème ligne de A.
• Le produit $AE_{i,j}$ donne une matrice dont toutes les colonnes sont nulles,
sauf la j-ème colonne qui est remplie avec la i-ème colonne de A.

Ainsi, l'égalité $E_{1,1}A = AE_{1,1}$ nous apprend que tous les coefficients de la première ligne et de la première colonne de A sont nuls, sauf éventuellement le coefficient diagonal $a_{1,1}$.
De même, l'égalité $E_{2,2}A = AE_{2,2}$ nous apprend que tous les coefficients de la deuxième ligne et de la deuxième colonne de A sont nuls, sauf éventuellement le coefficient diagonal $a_{2,2}$...

En poursuivant ainsi, on voit que A est nécessairement une matrice diagonale. Ensuite :

L'égalité $E_{1,2}A = AE_{1,2}$ nous apprend que $a_{1,1} = a_{2,2}$.
De même, l'égalité $E_{1,3}A = AE_{1,3}$ nous apprend que $a_{1,1} = a_{3,3}$...

En poursuivant ainsi, on voit que tous les coefficients diagonaux de A sont égaux.

Au final, A est donc bien une matrice de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{R}$.