Samedi 8 Novembre 2025

Devoir Sur Table n°2 – Durée : 4h

L'utilisation de la calculatrice, des feuilles/notes de cours ou d'exercices est interdite.
La présentation, la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation de la copie.
<u>Les résultats non encadrés/soulignés/surlignés ne seront pas pris en compte.</u>

Exercice 1 : Récurrence linéaire d'ordre 2 "à discriminant négatif"

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, tel que $\sin(\theta) \neq 0$.
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, et la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2\cos(\theta)u_{n+1} - u_n \quad (\star)$$

1. Compléter la fonction Python suivante pour que, à la donnée d'un $\theta \in \mathbb{R}$ (noté `theta`) et d'un $n \in \mathbb{N}$, elle renvoie la valeur du réel u_n. **On recopiera l'intégralité du programme sur sa copie.**

```
import numpy as np
def suite_u(theta,n) :
    u = ...
    v = ...
    for k in .......... :
        w = ...
        u = ...
        v = ...
    return ...
```

2. Vérifier que l'équation caractéristique associée à la relation $(\star)$ a un discriminant strictement négatif. (On est donc dans le cas "hors-programme" de la méthode de l'équation caractéristique...)
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = \cos(n\theta)$ et $w_n = \sin(n\theta)$.
   Démontrer que les suites v et w satisfont chacune la relation $(\star)$.
   Indication : On pourra noter que $(n+2)\theta = (n+1)\theta + \theta$ et $n\theta = (n+1)\theta - \theta$.
4. En déduire que, pour des valeurs de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ que l'on déterminera, on a l'expression :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta).$$

Exercice 2 : Décomposition polynomiale

On définit les 4 polynômes suivants :

$$P_1(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6, \quad P_2(X) = X^3 - 7X^2 + 14X - 8,$$
$$P_3(X) = X^3 - 8X^2 + 19X - 12, \quad P_4(X) = X^3 - 9X^2 + 26X - 24.$$

1. Déterminer la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de chacun de ces 4 polynômes.
2. On pose $Q(X) = -X^2 + 9X - 14$.
   Montrer qu'il existe un unique quadruplet de valeurs $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $Q = aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4$.
   On déterminera les valeurs numériques de a, b, c, d.
3. On souhaite à présent généraliser ce résultat à n'importe quel polynôme de degré inférieur ou égal à 3. Soit donc $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ fixé quelconque.
   (a) <u>Analyse :</u> On suppose qu'on dispose de $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $Q = aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4$.
   Exprimer les réels a, b, c, d en fonction de Q. On pourra évaluer en des valeurs bien choisies.
   (b) <u>Synthèse :</u> Soient a, b, c, d les valeurs déterminées à l'issue de l'analyse.
   Justifier que les polynômes Q et $aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4$ sont bien égaux.
4. Application : Justifier qu'il existe un unique polynôme $R \in \mathbb{R}_3[X]$ satisfaisant
$$R(1) = 0,\ R(2) = -1,\ R(3) = 1,\ R(4) = 2.$$
   Donner l'expression de ce polynôme en fonction de P_1, P_2, P_3, P_4.

Problème : Etude approfondie d'une suite récurrente

Dans ce problème, on s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+1}{u_n+2}$.

A cette fin, on introduit la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\},\ f(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$.

I - Convergence de la suite

1. (a) Etablir le tableau de variation complet de la fonction f sur son domaine de définition.
   On détaillera en particulier le calcul de $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$.

   (b) Montrer que f admet deux points fixes, que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$,
   et dont on précisera les valeurs.

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

   (b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone (on précisera son sens de variation).

3. Montrer finalement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite.

4. Proposer une fonction Python qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de u_n.

II - Vitesse de convergence et approximation

5. Démontrer que pour tous $x, y \geqslant 1$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{5}{9}|x-y|$.

6. Déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \beta| \leqslant \left(\dfrac{5}{9}\right)^n$.

7. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On dit qu'un réel x est une approximation de β à ε près lorsque $|x-\beta| < \varepsilon$.

   (a) A partir de quel rang $n \in \mathbb{N}$ peut-on être certain que u_n est une approximation de β à ε près ?
   On exprimera ce rang (entier) en fonction de ε, et en utilisant la fonction partie entière.

   (b) Proposer alors une fonction Python qui prend en entrée un réel $\varepsilon > 0$ (qu'on pourra appeler `eps`)
   et qui, à l'aide de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, renvoie une approximation de β à ε près.
   On rappelle que l'instruction `np.floor` permet de calculer la partie entière.

III - Expression explicite de u_n

On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $a_0 = b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n, \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n. \end{cases}$

8. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.

On cherche à présent à déterminer l'expression de a_n et de b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

9. (a) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, on définit la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \lambda a_n + b_n$.
   Montrer que si le réel λ est un point fixe de f, alors la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   On précisera sa raison en fonction de λ.
   Indication : Chercher un $q \in \mathbb{R}$ bien choisi de sorte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = q\, c_n$.

   (b) On définit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \alpha a_n + b_n$ et $w_n = \beta a_n + b_n$ (où α, β sont les réels introduits en 1.(b)).
   Déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de v_n et w_n en fonction de n, α et β.

   (c) En déduire finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions :

$$a_n = \frac{\beta+1}{\beta-\alpha}(\beta+2)^n - \frac{\alpha+1}{\beta-\alpha}(\alpha+2)^n \quad \text{et} \quad b_n = -\frac{\alpha(\beta+1)}{\beta-\alpha}(\beta+2)^n + \frac{\beta(\alpha+1)}{\beta-\alpha}(\alpha+2)^n.$$

10. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 que l'on précisera.
    Retrouver, par ce biais, l'expression de a_n obtenue en 9.(c).
    Indication : On pourra remarquer que les racines de l'équation caractéristique sont $\alpha+2$ et $\beta+2$.
    On évitera, autrement, d'utiliser les valeurs numériques de α et β, au risque d'embourber les calculs...

11. Déterminer, en justifiant, les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{(\beta+2)^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{(\beta+2)^n}$ en fonction de α et β.

    En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{1}{\alpha}$ et justifier que l'on retrouve bien la limite établie en question 3.