9

Limites de fonctions

Dans ce chapitre, f désignera une fonction numérique.

1 Limite d'une fonction en un point

1.1 Limite finie en un point

Définition 1 (Limite finie en un point)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : D \to \mathbb{R}$ avec $\underline{D = I \text{ ou } D = I \setminus \{x_0\}}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que f a pour limite ℓ en x_0 lorsque :

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou bien $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

Dessin :

Interprétation : $f(x)$ peut devenir aussi proche que l'on veut de ℓ, pourvu que x soit assez proche de x_0 !
Quel que soit un seuil $\varepsilon > 0$ fixé (aussi petit soit il), on peut toujours trouver un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in D, \ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Notons que la valeur de ce δ dépend en général de ε (pour plus de clarté, on pourrait le noter δ_ε).

Remarque 1

On a l'équivalence : $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \qquad\qquad\qquad\qquad}$

Exercice 1

En vérifiant la définition, montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$.

Remarque 2

Bien-sûr, comme pour les suites, on ne sera presque jamais amené à calculer une limite en vérifiant cette définition. On préfèrera utiliser les règles de calculs, les limites usuelles, les encadrements, etc...

Proposition 1 (Unicité de la limite en un point)

Si $f : D \to \mathbb{R}$ admet une limite finie en x_0, alors cette limite est unique.

Preuve rapide :
Même preuve que pour l'unicité de limite d'une suite !
Si $\ell_1 < \ell_2$, $f(x)$ ne peut pas "se rapprocher" à la fois de ℓ_1 et de ℓ_2 quand x tend vers x_0... $\square$

Remarques 3

- $\boxed{\text{Si } f \text{ admet une limite en } x_0 \text{ } \underline{\text{et si } f \text{ est définie en } x_0}\text{, alors, nécessairement, } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).}$

La **limite** de f en x_0 est nécessairement égale à la **valeur** de f en x_0.
On dira dans ce cas que f est *continue en* x_0 . (cf. chapitre suivant)

- Une fonction f peut avoir une limite (finie) en x_0 même si f n'est pas définie en x_0 !

On dira dans ce cas que f est *prolongeable par continuité en* x_0. (cf chapitre suivant)

<u>Exemple simple :</u> Considérons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$. Alors f n'est pas définie en 0, mais $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Dessin :

- Une fonction f peut ne pas admettre de limite en x_0 (qu'elle soit ou non définie en x_0).

De nombreuses situations sont possibles dans ce cas...

Dessin :

1.2 Limite infinie en un point

Définition 2 (Limite infinie en un point)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : D \to \mathbb{R}$ avec $\underline{D = I \setminus \{x_0\}}$.

• On dit que f tend vers $+\infty$ en x_0 lorsque :

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou bien $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$

• On dit que f tend vers $-\infty$ en x_0 lorsque :

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ ou bien $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$

Dessin :

Remarque 4

Si f admet une limite infinie en x_0, f ne peut pas être définie en x_0 !

Proposition 2 (Rappels : deux limites infinies usuelles)

• $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) =$ • Si $n \in \mathbb{N}^*$ est pair, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} =$

Dessin :

1.3 Limite à droite, limite à gauche

Définition 3 (Limites à droite et à gauche)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : D \to \mathbb{R}$ avec $\underline{D = I \text{ ou } D = I \setminus \{x_0\}}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

• On dit que f admet une limite à gauche en x_0 égale à ℓ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D \cap \qquad\qquad ,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

• On dit que f admet une limite à gauche en x_0 égale à $+\infty$ lorsque :

$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D \cap \qquad\qquad ,\ f(x) > A$$

• On dit que f admet une limite à gauche en x_0 égale à $-\infty$ lorsque :

$$\forall A < 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D \cap \qquad\qquad ,\ f(x) < A$$

Si f admet une limite à gauche en x_0, elle est notée $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ ou bien $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$.

• On dit que f admet une limite à droite en x_0 égale à ℓ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D \cap \qquad\qquad ,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

• On dit que f admet une limite à droite en x_0 égale à $+\infty$ lorsque :

$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D \cap \qquad\qquad ,\ f(x) > A$$

• On dit que f admet une limite à droite en x_0 égale à $-\infty$ lorsque :

$$\forall A < 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D \cap \qquad\qquad ,\ f(x) < A$$

Si f admet une limite à droite en x_0, elle est notée $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ou bien $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$.

Remarque 5

• Bien-sûr, si f est définie seulement "à gauche de x_0", la notion de limite à gauche en x_0 coïncide avec la notion de limite (tout court). De même pour la limite à droite.

<u>Exemple :</u> On a naturellement $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Proposition 3 (Rappels : quelques limites usuelles à gauche et à droite)

• Si $n \in \mathbb{N}^*$ est impair, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \qquad$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} =$

• Si $x_0 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (pour un $k \in \mathbb{Z}$), $\lim\limits_{x \to x_0{}^-} \tan(x) = \qquad$ et $\lim\limits_{x \to x_0{}^+} \tan(x) =$

Dessin :

Théorème 1 (Lien entre limite à gauche / à droite / "tout court")

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit x_0 un point de I qui n'est pas une extrémité de I.
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec $\underline{D = I \text{ ou } D = I \setminus \{x_0\}}$.

$\boxed{1}$ Si f admet une limite (finie ou infinie) en x_0, alors elle admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et

$\boxed{2}$ Réciproquement :

- <u>Cas $D = I \setminus \{x_0\}$</u> : Si f admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 (finies ou infinies) et alors f admet une limite en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0} f(x) =$$

- <u>Cas $D = I$</u> : Si f admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 (finies ou infinies) et alors f admet une limite en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0} f(x) =$$

Exemple

Si $k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x \to k^-} \lfloor x \rfloor =$ et $\lim_{x \to k^+} \lfloor x \rfloor =$ Ainsi la limite en k de $\lfloor \cdot \rfloor$

Illustrons quelques situations possibles dans le cas où les limites à gauche et à droite existent et sont finies :

<u>Cas $D = I \setminus \{x_0\}$:</u>

Dessin :

<u>Cas $D = I$:</u>

Dessin :

2 Limite d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition 4 (Limite finie ou infinie en $\pm\infty$)

• Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où D contient un intervalle de la forme $]C, +\infty[$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ lorsque :

On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ lorsque :

On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ lorsque :

Cette limite (finie ou infinie est notée) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ou bien $\lim\limits_{+\infty} f$.

• Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où D contient un intervalle de la forme $]-\infty, C[$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ lorsque :

On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ lorsque :

On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ lorsque :

Cette limite (finie ou infinie est notée) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ou bien $\lim\limits_{-\infty} f$.

Illustration dans le cas $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$:

Dessin :

Bien-sûr, on a à nouveau unicité de la limite, lorsqu'elle existe.

Proposition 4 (Unicité de la limite en l'infini)

Si f admet une limite (finie ou infinie) en $+\infty$ ou $-\infty$, alors cette limite est unique.

Proposition 5 (Rappels : quelques limites usuelles finies en l'infini)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} =$
- Plus généralement, pour tout réel $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha =$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x =$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) =$

Proposition 6 (Rappels : quelques limites usuelles infinies en l'infini)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) =$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) =$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n =$
- Plus généralement, pour tout réel $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha =$ En particulier $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} =$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} & \text{si } n \text{ est pair} \\ & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor =$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \lfloor x \rfloor =$

Remarque 6

Bien-entendu, certaines fonctions n'admettent pas de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Exemples : cos et sin.

3 Calculs de limites

Dans la suite, on aura parfois besoin que certains propriétés soient vérifiées "localement", au voisinage de certains points.

Définition 5 (Voisinage)

- Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a tout intervalle contenant a et dont a n'est pas une extrémité.
- On appelle voisinage de $+\infty$ tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ ou $[A, +\infty[$.
- On appelle voisinage de $-\infty$ tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ ou $]-\infty, A]$.

Si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on dit qu'une propriété $\mathcal{P}(x)$ est vraie "au voisinage de a"
lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Exemple

- On a $x^2 \leqslant |x|$ au voisinage de 0.
- On a $\ln(x) \leqslant x$ au voisinage de $+\infty$

3.1 Limites usuelles

Les limites usuelles suivantes permettent de lever la plupart des indéterminées.

Théorème 2 (Croissances comparées en $+\infty$)

Pour tous $a, b, c > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{cx}}{x^a} =$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^a}{(\ln x)^b} =$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{cx}}{(\ln x)^a} =$

Théorème 3 (Limites usuelles en 0) (admises pour le moment)

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} =$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} =$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} =$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} =$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} =$
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} =$ En particulier, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} =$

3.2 Opérations sur les limites

Dans les tableaux suivant, on considère des limites en a, avec $a \in \mathbb{R}$ ou bien $a = \pm\infty$.

Limite d'une somme :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x))$						

Limite d'un produit :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$									

Limite d'un quotient : (si $g(x) \neq 0$ "au voisinage de a")

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$\ell \neq 0$	0	0
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	0^-	0^+	0^-	0^+	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$								

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\ell < 0$ ou 0^-	$\ell > 0$ ou 0^+	$\ell < 0$ ou 0^-	$\ell > 0$ ou 0^+	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$					

Remarque 7

- Ici, 0^+ signifie : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et $f(x) > 0$ "au voisinage de 0".
- Ici, 0^- signifie : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et $f(x) < 0$ "au voisinage de 0".

Comme pour les limites de suites, on fera également bon usage de la **factorisation** pour lever d'éventuelles indéterminées. Dans une somme, il est souvent utile de factoriser par "le plus grand terme".

Exercice 2

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^3+2x^2-x+1)$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\ln(x))$ 3. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin(x)}{x+\sqrt{x}}$

3.3 Composition de limites

Théorème 4 (Limite d'une fonction composée)

Soient a, b, $c\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.
Soit f une fonction définie "au voisinage" de a et g une fonction définie "au voisinage" de b.

Si $\lim\limits_{x\to} f(x)=$ et si $\lim\limits_{x\to} g(x)=$, alors $\lim\limits_{x\to} g(f(x))=$

Exemple

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(2+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{y\to2}\ln(y)=\ln(2)\quad\text{(car ln est continue en 2).}$$

Comme dans l'exemple précédent, les calculs de limites mettant en jeu une composition se ramène souvent à poser un "changement de variable".

Méthode : "Changement de variable" dans un calcul de limite

Pour déterminer une limite de la forme $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))$:

$\boxed{1}$ Poser "$y=f(x)$" et noter que lorsque $x\to a$, on a $y\to b$.

$\boxed{2}$ En déduire que $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=\lim\limits_{y\to b} g(y)$.

Exercice 3

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{2x}$. 2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

3. Croissances comparées en 0 : montrer que $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x)=0}$

4. Croissance comparées en $-\infty$: montrer que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0}$

(On pourra retenir ces deux derniers résultats)

Théorème 5 (Limites et suites)

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.
Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) =$

Exercice 4

Démontrer par l'absurde que les fonctions cos et sin n'admettent pas de limite en $+\infty$.

Théorème 6 (Passage à la limite dans une inégalité (large !))

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soient f et g satisfaisant $f(x) \leqslant g(x)$ "au voisinage de a".
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$, alors on a :

Remarque 8

Pour pouvoir utiliser ce théorème, il faut avoir justifié au préalable l'existence des limites !

Attention !

Il est possible de passer à la limite uniquement dans des inégalités larges !
Si on a $f(x) < g(x)$ au voisinage de a, on ne peut pas conclure que $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
(En revanche, comme en particulier $f(x) \leqslant g(x)$, on pourra conclure $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$)

Exemple : Posons, pour tout $x > 0$, $f(x) = 0$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$.
On a $f(x) < g(x)$ pour tout $x > 0$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
(L'inégalité stricte n'est pas préservée à la limite)

4 Théorèmes de convergence

4.1 Théorème des gendarmes

Théorème 7 (Théorème des gendarmes)

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soient f, g et h satisfaisant $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ "au voisinage de a".
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Corollaire 1 (Théorème des gendarmes, version "valeur absolue")

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et soient f et h satisfaisant $|f(x) - \ell| \leqslant h(x)$ "au voisinage de a".
Si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Comme pour les suites, il existe un résultat équivalent pour les limites infinies.

Théorème 8 (Théorème des gendarmes, version "limite infinie")

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soient f et g satisfaisant $f(x) \leqslant g(x)$ "au voisinage de a".
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

4.2 Théorème de la limite monotone.

Théorème 9 (Théorème de la limite monotone)

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On considère une fonction f sur l'intervalle $I =]a, b[$.
- Supposons $\boxed{f \text{ croissante}}$ sur l'intervalle $I =]a, b[$.

- **À l'intérieur de** I **:** f admet en tout point $x_0 \in]a, b[$ une limite finie à droite et à gauche, et on a

- **Bord gauche de** I **:** f admet une limite à droite en a. Plus précisément :
  - Si f est minorée sur $]a, b[$, cette limite est finie : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) =$
  - Sinon, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) =$
- **Bord droit de** I **:** f admet une limite à gauche en b. Plus précisément :
  - Si f est majorée sur $]a, b[$, cette limite est finie : $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) =$
  - Sinon, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) =$

- Supposons $\boxed{f \text{ décroissante}}$ sur l'intervalle $I =]a, b[$.

- **À l'intérieur de I :** f admet en tout point $x_0 \in]a, b[$ une limite <u>finie</u> à droite et à gauche, et on a

- **Bord gauche de I :** f admet une limite à droite en a. Plus précisément :
  - Si f est majorée sur $]a, b[$, cette limite est finie : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) =$
  - Sinon, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) =$

- **Bord droit de I :** f admet une limite à gauche en b. Plus précisément :
  - Si f est minorée sur $]a, b[$, cette limite est finie : $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) =$
  - Sinon, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) =$

Dessin :

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Connaître les définitions de limite avec des quantificateurs.
- Déterminer la limite d'expressions explicites
  (à l'aide des limites usuelles et des règles de calcul).
- Utiliser le théorème des gendarmes pour déterminer une limite.
- Passer correctement à la limite dans une inégalité.

Pour suivre

- Poser des "changements de variables" pour se ramener à des limites usuelles.
- Démontrer l'existence ou la non-existence d'une limite en étudiant
  les limites à gauche et à droite.
- Utiliser le théorème de la limite monotone pour justifier l'existence d'une limite.

Pour les ambitieux

- Manipuler la définition de la limite "avec des ε" quand c'est nécessaire.