1

Logique, symboles, raisonnement mathématique

Exercice 1 (Traduction)

1. $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) > -5x+2$. Négation : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant -5x+2$.
2. $\exists x \in [0,1],\ f(x) = 0$. Négation : $\forall x \in [0,1],\ f(x) \neq 0$.
3. $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,1],\ f(x) = C$. Négation : $\forall C \in \mathbb{R},\ \exists x \in [0,1],\ f(x) \neq C$.
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$. Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant 4$. Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ v_n > 4$.
6. $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant C$. Négation : $\forall C \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ v_n > C$.

Exercice 2 ("Inversion" de quantificateurs)

1. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$: Vrai pour certaines fonctions (les fonctions surjectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$...)
$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$: Jamais vrai.
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)$: Toujours vrai.
$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$: Signifie que f est constante.

2. La première affirmation ($\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x \leqslant k$) est fausse.
Il n'existe pas de réel $k \in \mathbb{R}$ fixé tel que, pour n'importe quel $x \in \mathbb{R}$, $e^x \leqslant k$: en effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc on aura nécessairement $e^x > k$ pour un x "assez grand".
La seconde affirmation ($\forall x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{R},\ e^x \leqslant k$) est vraie.
Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on peut trouver un réel k tel que $e^x \leqslant k$: il suffit de choisir par exemple $k = e^x + 1$.

Exercice 3 (Implications)

1. $\mathcal{A} \Longleftarrow \mathcal{B}$
2. La proposition $\mathcal{A}$ n'a de sens que si $x > 0$. En supposant que $x > 0$: $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$.
3. $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$.
4. $\mathcal{A} \Longleftarrow \mathcal{B}$.
5. $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$.
6. $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$.
7. $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$.

Exercice 4 (Quelques équivalences)

1. On a les équivalences suivantes :

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 \Longleftrightarrow x^2+y^2+2xy = x^2+y^2-2xy \Longleftrightarrow 4xy = 0 \Longleftrightarrow xy = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0).$$

2. Montrons cette équivalence par double implication.
• Commençons par l'implication triviale. Si on suppose que $a = b = c = 0$, alors évidemment :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^2 + bx + c = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0.$$

On a ainsi montré l'implication : $(a = b = c = 0) \Longrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0)$.

• Inversement, supposons que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0$ et montrons que $a = b = c = 0$.
On sait que : $\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c = 0$.
En particulier, pour $x = 0$, on obtient $c = 0$.
Puisque c est nul, on sait donc à présent que : $\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx = 0$.
En particulier, pour les valeurs $x = 1$ et $x = -1$ (mais on peut bien-sûr choisir d'autres valeurs), on obtient :

$$a + b = 0 \ \text{ et } \ a - b = 0.$$

On peut facilement résoudre ce système linéaire à deux équations pour obtenir $a = 0$ et $b = 0$.
On a bien obtenu $a = b = c = 0$-.
On a ainsi montré l'implication : $(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0) \Longrightarrow (a = b = c = 0)$.

Conclusion : Un polynôme est nul si et seulement si chacun de ses coefficients est nul.

3. On peut à nouveau montrer l'équivalence par double implication. Mais on peut également aller un peu plus vite en utilisant la question 2. On a en effet les équivalences suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = Q(x) \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) - Q(x) = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (a-\alpha)x^2 + (b-\beta)x + (c-\gamma) = 0.$$

Introduisons le polynôme du second degré R, défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = (a-\alpha)x^2 + (b-\beta)x + (c-\gamma)$.
Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = Ax^2 + Bx + C$, avec $A = a - \alpha$, $B = b - \beta$, $C = c - \gamma$.
(Il s'agit en fait de $R = P - Q$).
On a ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = Q(x) \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = 0$.
En utilisant le résultat du 2., le polynôme R est nul si et seulement si chacun de ses coefficients est nul :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = 0 \Longleftrightarrow A = B = C = 0. \Longleftrightarrow a - \alpha = 0,\ b - \beta = 0,\ c - \gamma = 0 \Longleftrightarrow a = \alpha,\ b = \beta,\ c = \gamma.$$

Conclusion : on a les équivalences :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = Q(x) \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ R(x) = 0 \Longleftrightarrow (a = \alpha,\ b = \beta,\ c = \gamma).$$

On a bien montré le résultat voulu.

Exercice 5 (Une suite récurrente)

Pour tout $n \geqslant 1$, posons $\mathcal{P}(n)$: "v_n est bien défini et $v_n > 0$".
Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- Initialisation : On a $v_1 = 1 > 0$, d'où $\mathcal{P}(1)$.
- Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On a v_n bien défini et $v_n > 0$. En particulier $v_n \neq 0$, donc $v_{n+1} = 2v_n + \dfrac{1}{v_n}$ est bien défini.
De plus $v_n > 0$ donc $2v_n > 0$ et $\dfrac{1}{v_n} > 0$, et donc $v_{n+1} = 2v_n + \dfrac{1}{v_n} > 0$. On a bien montré $\mathcal{P}(n+1)$.
Ceci achève la récurrence.

Exercice 6 (Une décomposition)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: " $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2,\ (3+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ ".
Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : On peut écrire $(3+\sqrt{2})^0 = a_0 + b_0\sqrt{2}$ avec $a_0 = 1 \in \mathbb{Z}$ et $b_0 = 0 \in \mathbb{Z}$. Ceci montre $\mathcal{P}(0)$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

D'après $\mathcal{P}(n)$, on dispose de $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $(3+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Il en résulte que :

$$(3+\sqrt{2})^{n+1} = (3+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})^n = (3+\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2}) = 3a_n+3b_n\sqrt{2}+a_n\sqrt{2}+2b_n = (3a_n+2b_n)+(a_n+3b_n)\sqrt{2}.$$

Ainsi, en posant $a_{n+1} = 3a_n + 2b_n \in \mathbb{Z}$ et $b_{n+1} = a_n + 3b_n \in \mathbb{Z}$, on a $(3+\sqrt{2})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2}$.
On a bien montré $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

Exercice 7 (Divisibilité par 3)

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

- Initialisation : $4^0 - 1 = 0$ est bien divisible par 3.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $4^n - 1$ est divisible par 3, montrons que $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3.

Par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{Z}$ (et même $k \in \mathbb{N}$) tel que $4^n - 1 = 3k$.
On en déduit que $4^{n+1} - 4 = 4 \times 3k = 12k$, puis $4^{n+1} - 1 = 12k + 3$, c'est à dire $4^{n+1} - 1 = 3(4k+1)$.
On a ainsi écrit $4^{n+1} - 1 = 3k'$ avec $k' = 4k + 1 \in \mathbb{Z}$.
Ceci montre que $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3, ce qui achève la récurrence.

Exercice 8 (Une suite à récurrence linéaire double)

1. Après calcul, on voit que $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 8$... On peut donc conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = 2^n$".

Montrons par récurrence (double) que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : On a $u_0 = 1 = 2^0$ et $u_1 = 2 = 2^1$, d'où $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$.

• Hérédité : Soit $n \geqslant 1$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
On suppose donc que $u_{n-1} = 2^{n-1}$ et $u_n = 2^n$.
Or, d'après l'énoncé, on sait que $\forall k \geqslant 2,\ u_k = 3u_{k-1} - 2u_{k-2}$.
En particulier, on a $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$. Ainsi :

$$u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1} = 3 \times 2^n - 2 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^n - 2^n = (3-1) \times 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

Ceci montre $\mathcal{P}(n+1)$ est achève la récurrence.

Exercice 9 (Une suite particulière)

On a d'après l'énoncé $w_1 = 1$.
On calcule ensuite : $\quad w_2 = \dfrac{(w_1)^2}{1} = \dfrac{1}{1} = 1, \quad w_3 = \dfrac{(w_1)^2 + (w_2)^2}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1, \quad$ etc.
On conjecture donc naturellement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = 1$. Démontrons cette conjecture par récurrence forte.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$: "$w_n = 1$".

• Initialisation : On a bien $w_1 = 1$, c'est à dire que $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.
• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Supposons $\mathcal{P}(k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ (c'est à dire qu'on suppose $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \dots, \mathcal{P}(n)$) et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
On a ainsi supposé que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ w_k = 1$. On calcule alors :

$$w_{n+1} = \frac{(w_1)^2 + (w_2)^2 + \ldots + (w_n)^2}{n} = \frac{\overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{n \text{ termes}}}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

On a bien montré que $w_{n+1} = 1$, c'est à dire $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence forte.

Exercice 10 (Valide ou non ?)

1. Non, il faut écrire $a \in E$.
2. Oui : $\{a\}$ est une partie de E, donc un élément de $\mathcal{P}(E)$.
3. Non, il faut écrire $E \cap F = \{c\}$.
4. Non, il faut écrire $E \cap G = \emptyset$.

Exercice 11 (Traduction ensembliste 1)

1. Implicite : $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 3k\}$. Explicite : $\{3k, k \in \mathbb{Z}\}$.
2. Implicite : $\{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 \in \mathbb{N}\}$. Explicite : $\{\sqrt{k}, k \in \mathbb{N}\}$.
3. Implicite : $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a + b = 1\}$. Explicite : $\{(a, 1-a), a \in \mathbb{R}\}$ ou bien $\{(1-b, b), b \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 12 (Traduction ensembliste 2)

(a) $\Big\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\Big\}$
(b) $\Big\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b\Big\}$
(c) $\Big\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c\Big\}$
(d) $\Big\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n\Big\}$
(e) $\Big\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = C\Big\}$
(f) $\Big\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n\Big\}$

Exercice 13 (Ensembles et logique)

a) $(x \leqslant 2$ et $x \geqslant -1)$ ou $x > 3 \iff x \in [-1, 2]$ ou $x \in]3, +\infty[\iff x \in [-1, 2] \cup]3, +\infty[$.
b) $x > 4$ et $(x \leqslant 6$ ou $x \geqslant 2) \iff x \in]4, +\infty[$ et $x \in]-\infty, 6] \cup [2, +\infty[$
$\iff x \in]4, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R} \iff x \in]4, +\infty[$.

Exercice 14 (Réunion de n ensembles)

a) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} [0, i] = [0, n], \quad \bigcap_{i=1}^{n} [0, i] = [0, 1].$ b) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} [i, i+1[= [1, n+1[, \quad \bigcap_{i=1}^{n} [i, i+1[= \emptyset.$

c) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \Big]\frac{1}{i}, i\Big] = \Big]\frac{1}{n}, n\Big], \quad \bigcap_{i=1}^{n} \Big]\frac{1}{i}, i\Big] = \emptyset.$

Exercice 15 (Différence symétrique)

1. $A\Delta B$ correspond à "ce qui est dans A ou dans B, mais pas les deux".

2. $A\Delta A = (A\cup A)\setminus(A\cap A) = A\setminus A = \emptyset$.
$A\Delta E = (A\cup E)\setminus(A\cap E) = E\setminus A = \overline{A}$.
$A\Delta\emptyset = (A\cup\emptyset)\setminus(A\cap\emptyset) = A\setminus\emptyset = A$.

3. (a) En notant que $A\setminus B = A\cap\overline{B}$, on a ici :

$$\begin{aligned}A\Delta B &= (A\cup B)\setminus(A\cap B) = (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B}) = (A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\\ &= (A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{B})\\ &= \emptyset\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\cup\emptyset = (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B).\end{aligned}$$

3.(b) En utilisant la formule du 3.(a),

$$\overline{A}\Delta\overline{B} = (\overline{A}\ \cap\overline{\overline{B}})\cup(\overline{\overline{A}}\cap\overline{B}) = (\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) = (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B) = A\Delta B.$$

3.(c) En utilisant la formule du 3.(b),

$$\begin{aligned}\overline{A\Delta B} &= \overline{(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)} = \overline{(A\cap\overline{B})}\cap\overline{(\overline{A}\cap B)} = (\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\\ &= (\overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(B\cap A)\cup(B\cap\overline{B})\\ &= \emptyset\cup(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap B)\cup\emptyset = (\overline{A}\cap B)\cup(A\cap B).\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\overline{A}\Delta B = (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{\overline{A}}\cap B) = (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap B)$. On a donc bien $\overline{A\Delta B} = \overline{A}\Delta B$.

4. Montrons l'équivalence $A\Delta B = \emptyset \iff A = B$.

• Supposons $A\Delta B = \emptyset$ et montrons que $A = B$.
On a $A\Delta B = \emptyset$, c'est à dire $(A\cup B)\setminus(A\cap B) = \emptyset$. Ceci signifie que $(A\cup B)\subset(A\cap B)$. Ainsi :

$$A\subset(A\cup B)\subset(A\cap B)\subset B \qquad \text{et} \qquad B\subset(A\cup B)\subset(A\cap B)\subset A.$$

Ainsi $A\subset B$ et $B\subset A$, d'où $A = B$.

• Inversement, supposons $A = B$ et montrons que $A\Delta B = \emptyset$.
D'après la question 2., $A\Delta B = A\Delta A = \emptyset$, d'où le résultat.

On a bien montré l'équivalence voulue !