Programme de khôlles ECG1-B

Semaine 26

Applications linéaires et matrices, Taylor et DL

• Énoncés / notions à connaitre :

Applications linéaires en dimension finie

— Théorème du rang pour une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Conséquence sur la non-injectivité/surjectivité lorsque $dim(E) \neq \dim(F)$.
— Rang d'une application linéaire : $rg(f) = \dim(Im(f))$. Calcul pratique du rang.
Conséquence sur l'injectivité/surjectivité/bijectivité.
— Lorsque $\dim(E) = \dim(F)$, injectivité, surjectivité et bijectivité d'une application linéaire sont équivalentes.
— Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base.
— Matrice de passage $P_{B,B'}$ d'une base à une autre.
— Matrice d'une application linéaire f dans deux bases.
Correspondance bijective entre applications linéaires et matrices.
Lecture de $Ker(f)$ et $Im(f)$ à partir d'une matrice.
Propriétés classiques de calcul : $Mat(f+\lambda g) = Mat(f)+\lambda Mat(g)$, $Mat(g\circ f) = Mat(g)Mat(f)$, $Mat(f^k) = Mat(f)^k$, $Mat(P(f)) = P(Mat(f))$
— Lien entre bijectivité de f et inversibilité de sa matrice. $Mat(f^{-1}) = Mat(f)^{-1}$.
— Rang d'une matrice. Rang de la transposée.
Lien avec le rang de l'application linéaire associée.
Rang d'une matrice carrée et inversibilité.

Formules de Taylor et DLs

— Notion de dérivées sucessives d'une fonction. Notations D^n, C^n, C^∞.
— Linéarité de la dérivée. Formule de Leibniz pour calculer $(fg)^{(n)}$.
— Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n en a pour f de classe C^∞.
Notion de polynôme de Taylor à l'ordre n en a (souvent noté P_n).
— Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n en a pour f de classe C^∞.
— Notion de développement limités à l'ordre n en a.
Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe C^∞.
— Conséquence de la parité / l'imparité sur le DL en 0.
— Développements limités de fonctions usuels. Combinaison linéaire, produit de développement limités. Changement de variable dans un développement limité.

• Démonstrations à connaitre :

— Formule de Leibniz (Théorème 1)
— Formule de Taylor avec reste intégral (Théorème 2)
— Inégalité de Taylor-Lagrange (Théorème 3)