4

Nombres réels, fonctions numériques

Bornes supérieure / inférieure

Exercice 1 (Calculs de sup et inf)
Déterminer les éventuelles bornes sup/inf des parties de $\mathbb{R}$ suivantes. S'agit-il de max/min ?

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}, \qquad B = \left\{1 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\},$$
$$C = \{xe^{-x},\ x > 0\},\ D = \left\{\frac{2xy}{x^2+y^2},\ (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2\right\}$$

Exercice 2 (Exercice d'abstraction)
Soient A et B deux parties non-vides de $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall x \in A, \forall y \in B,\ x \leqslant y.$$
Montrer que A est majorée, B est minorée, et $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

Valeur absolue, partie entière

Exercice 3 (Disjonctions de cas)
En distinguant les valeurs prises par $x \in \mathbb{R}$, ré-exprimer $|4x+2| - |2-5x|$ sans valeurs absolues.

Exercice 4 ((In)équations)
Résoudre, dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :
(a) $|x-3| \geqslant 4$ (b) $|x^2-1| \leqslant 3$
(c) $|2x-4| = |x+3|$ (d) $|\frac{1}{x} - 3| \leqslant 2$

Exercice 5 (Partie entière)
1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
Montrer que ces inégalités peuvent être strictes.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ a-t-on $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$?

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer les solutions de $\lfloor kx \rfloor = n$.

Études de fonctions

Exercice 6 (Fonctions "quasi-usuelles")
Déterminer en un coup d'oeil :
- Le domaine de définition.
- L'allure de la courbe représentative.

(a) $f : x \mapsto \ln(x+2)$ (b) $g : x \mapsto x(x-1)$
(c) $h : x \mapsto e^{-x} + 1$ (d) $u : x \mapsto |x-2| - 1$
(e) $v : x \mapsto \dfrac{1}{x+3}$. (f) $w : x \mapsto (x-1)^{1/3}$

Exercice 7 (Étude "sans dériver")
Sans dériver, déterminer :
- Le domaine de définition.
- La parité/périodicité (éventuelle).
- Le tableau de variation complet.
- Les éventuelles bornes sup/inf, max/min.
- L'allure de la courbe représentative.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$ (b) $g(x) = \tan(2x)$
(c) $h(x) = \arctan(x^2-1)$ (d) $u(x) = x^{-1/4} - 4x^{1/4}$

(e) $v(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$

Exercice 8 ((In)équations)
Résoudre les (in)équations suivantes :
(a) $2 \leq \lfloor 2x+1 \rfloor \leq 4$ (b) $(x)^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
(c) $\tan(x) > 1$. (d) $1 < \arctan(x) \leqslant \dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 9 ("Exposant variable")
1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \to \mathbb{R}_+^*$, $v : I \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables. On pose :
$$\forall x \in I,\ f(x) = (u(x))^{v(x)}$$
Exprimer la dérivée f' en fonction de u, v, u' et v'. (on admet, à ce stade, que f est dérivable)

2. Application : étudier la fonction $x \mapsto (1+x)^x$ et tracer sa courbe représentatrice.

Exercice 10 (La plus petite période)
On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x - \lfloor x \rfloor) \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.
1. Vérifier que f est 4-périodique.
2. On souhaite montrer que 4 est la plus petite période de f.
(a) Montrer que si $p > 0$ est une période, alors $p \in \mathbb{N}$. (on pourra considérer $f(p)$)
(b) Conclure.

Fonctions trigonométriques

Exercice 11 (Antécédents par cos, sin, tan)
Déterminer les ensembles suivants :
- $\cos^{-1}(\{0\})$, $\cos^{-1}(\{1\})$, $\cos^{-1}(\{-1\})$
- $\sin^{-1}(\{0\})$, $\sin^{-1}(\{1\})$, $\sin^{-1}(\{-1\})$
- $\tan^{-1}(\{0\})$, $\tan^{-1}(\{1\})$, $\tan^{-1}(\{-1\})$

Exercice 12 ((In)équations)
Déterminer l'ensemble des solutions des (in)équations suivantes :
(a) $\cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ (b) $\sin(2x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$
(c) $\cos(3x+1) = 0$

Exercice 13 (Des formules de trigo)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Établir les formules suivantes :

- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
- $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$ • $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$
- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

Exercice 14 ($\cos \circ \arctan$)

Pour $x \in \mathbb{R}$, simplifier $\cos(\arctan(x))$.

Un peu de théorie

Exercice 15 (Décomposition paire + impaire)

Dans cet exercice, on note :

- $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$.

En raisonnant pas analyse-synthèse, montrer :

$\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \exists !\, (g, h) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I},\quad f = g + h.$

Exercice 16 (Périodique et monotone)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction p-périodique (avec $p > 0$). Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(x + np)$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \leqslant y$.
Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x + np \geqslant y$.

3. Déduire de questions précédentes que si f est périodique et monotone, alors elle est constante.