Samedi 8 Novembre 2025

Devoir Sur Table n°2 – Corrigé

Exercice 1 : Récurrence linéaire d'ordre 2 "à discriminant négatif"

1.
```
import numpy as np
def suite_u(theta,n) :
    u = 1 # valeur de u0
    v = 0 # valeur de u1
    for k in range(1,n+1) : # ou range(n) : on fait n passages
        w = 2 * np.cos(theta) * v - u # calcul de la prochaine valeur
        u = v # mise a jour de u
        v = w # mise a jour de v
    return u
```

2. L'équation caractéristique associée à la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2\cos(\theta)u_{n+1} - u_n \quad (\star)$$

est : $x^2 = 2\cos(\theta)x - 1$, c'est à dire $\boxed{x^2 - 2\cos(\theta) + 1 = 0}$.
On calcule le discriminant associé : $\Delta = 4\cos(\theta)^2 - 4 = 4(\cos(\theta)^2 - 1) = -4(1 - \cos(\theta)^2)$.
En se rappelant que $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$, on a $\boxed{\Delta = -4\sin(\theta)^2 < 0}$ car l'énoncé suppose $\sin(\theta) \neq 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
   - Vérifions que la suite v satisfait la relation $(\star)$, c'est à dire que $v_{n+2} = 2\cos(\theta)v_{n+1} - u_n$, i.e :

$$\cos((n+2)\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta).$$

D'après la formule d'additivité $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, on trouve ici :

$$\cos((n+2)\theta) = \cos\Big((n+1)\theta + \theta\Big) = \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \sin((n+1)\theta)\sin(\theta),$$

$$\cos((n\theta) = \cos\Big((n+1)\theta + (-\theta)\Big) = \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) + \sin((n+1)\theta)\sin(\theta).$$

En sommant ces deux égalités, on trouve

$$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)$$

ce qui donne l'égalité voulue : $\cos((n+2)\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$.
   - On procéde de même pour la suite w. On doit cette fois montrer que

$$\sin((n+2)\theta) = 2\cos(\theta)\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta).$$

D'après la formule d'additivité $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$, on trouve ici :

$$\sin((n+2)\theta) = \sin\Big((n+1)\theta + \theta\Big) = \cos((n+1)\theta)\sin(\theta) + \sin((n+1)\theta)\cos(\theta),$$

$$\sin((n\theta) = \sin\Big((n+1)\theta + (-\theta)\Big) = -\cos((n+1)\theta)\sin(\theta) + \sin((n+1)\theta)\cos(\theta).$$

En sommant ces deux égalités, on trouve

$$\sin((n+2)\theta) + \sin(n\theta) = 2\cos(\theta)\sin((n+1)\theta)$$

ce qui donne l'égalité voulue : $\sin((n+2)\theta) = 2\cos(\theta)\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta)$.
Ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Conclusion : $\boxed{\text{on a bien montré que les suites } v \text{ et } w \text{ satisfont la relation } (\star)}$.

4. On cherche des valeurs de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta).$$

Il faut déjà que cette égalité soit vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui donne le système d'équation :

$$\begin{cases} \lambda \cos(0) + \mu \sin(0) = u_0 \\ \lambda \cos(\theta) + \mu \sin(\theta) = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda \cos(\theta) + \mu \sin(\theta) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda &= 1 \\ \mu &= -\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}. \end{cases}$$

Il faut donc, déjà, poser les valeurs $\boxed{\lambda = 1 \text{ et } \mu = -\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}}$.

Attention, ce n'est pas terminé ! Il faut encore montrer (par récurrence double) que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta).$$

- Initialisation : Par choix de λ et μ, l'égalité est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on ait

$$u_n = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta) \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \lambda \cos((n+1)\theta) + \mu \sin((n+1)\theta).$$

C'est à dire

$$u_n = \lambda v_n + \mu w_n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \lambda v_{n+1} + \mu w_{n+1}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2\cos(\theta) u_{n+1} - u_n \ \text{ (car } u \text{ satisfait } (\star)) \\ &= 2\cos(\theta)(\lambda v_{n+1} + \mu w_{n+1}) - (\lambda v_n + \mu w_n) \ \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \lambda(2\cos(\theta) v_{n+1} - v_n) + \mu(2\cos(\theta) w_{n+1} - w_n) \\ &= \lambda v_{n+2} + \mu w_{n+2}. \ \text{ (car } v \text{ et } w \text{ satisfont } (\star)) \end{aligned}$$

Ainsi on a bien obtenu $u_{n+2} = \lambda \cos((n+2)\theta) + \mu \sin((n+2)\theta)$, ce qui achève la réccurence.

Exercice 2 : Décomposition polynomiale

1. - Factorisation de $P_1 = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.
   On remarque que 1 est une racine évidente : $P_1(1) = 0$.
   Il en résulte que P_1 est divisible par $(X - 1)$: on peut écrire $P_1 = (X - 1)Q$ avec Q de degré 2.
   Après calculs (à détailler un minimum sur la copie), on trouve $Q = X^2 - 5X + 6$.
   Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 5^2 - 4 \times 6 = 1 > 0$: il admet les deux racines 2 et 3.
   Ainsi $Q = (X - 2)(X - 3)$. Pour finir : $\boxed{P_1 = (X - 1)(X - 2)(X - 3)}$.

   Factorisation de $P_2 = X^3 - 7X^2 + 14X - 8$.
   On remarque que 1 est une racine évidente : $P_2(1) = 0$.
   Il en résulte que P_2 est divisible par $(X - 1)$: on peut écrire $P_2 = (X - 1)Q$ avec Q de degré 2.
   Après calculs, on trouve $Q = X^2 - 6X + 8$. $\Delta = 6^2 - 4 \times 8 = 4 > 0$: deux racines 2 et 4.
   Ainsi $Q = (X - 2)(X - 4)$. Pour finir : $\boxed{P_2 = (X - 1)(X - 2)(X - 4)}$.

   Factorisation de $P_3 = X^3 - 8X^2 + 19X - 12$.
   On remarque que 1 est une racine évidente : $P_3(1) = 0$.
   Il en résulte que P_3 est divisible par $(X - 1)$: on peut écrire $P_3 = (X - 1)Q$ avec Q de degré 2.
   Après calculs, on trouve $Q = X^2 - 7X + 12$. $\Delta = 7^2 - 4 \times 12 = 1 > 0$: deux racines 3 et 4.
   Ainsi $Q = (X - 3)(X - 4)$. Pour finir : $\boxed{P_3 = (X - 1)(X - 3)(X - 4)}$.

   Factorisation de $P_4 = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$.
   Moins évident, on repère que 2 est racine : $P_4(2) = 8 - 9 \times 4 + 26 \times 2 - 24 = 8 - 36 + 52 - 24 = 60 - 60 = 0$.
   Il en résulte que P_4 est divisible par $(X - 2)$: on peut écrire $P_4 = (X - 2)Q$ avec Q de degré 2.
   Après calculs, on trouve $Q = X^2 - 7X + 12$.
   C'est le même polynôme que pour P_3 : $Q = (X - 3)(X - 4)$. Pour finir : $\boxed{P_4 = (X - 2)(X - 3)(X - 4)}$.

2. On pourrait développer l'égalité

$$\begin{aligned}-X^2+9X-14 &= a(X^3-6X^2+11X-6)+b(X^3-7X^2+14X-8)\\ &\quad +c(X^3-8X^2+19X-12)+d(X^3-9X^2+26X-24)\end{aligned}$$

et identifier les coefficients devant X^3, X^2, X et 1 pour obtenir un système de 4 équations aux 4 inconnues a, b, c, d... C'est un bon exercice ! Mais c'est un travail tout de même un peu laborieux.
Plus simplement, par analyse-synthèse :

• Analyse : Supposons qu'on dispose de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$Q = aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned}Q(X) =& a(X-1)(X-2)(X-3)+b(X-1)(X-2)(X-4)\\ &+c(X-1)(X-3)(X-4)+d(X-2)(X-3)(X-4).\end{aligned}$$

En évaluant cette égalité en 1, 2, 3 et 4, on trouve :

$$Q(1) = -6d,\ Q(2) = 2c,\ Q(3) = -2b,\ Q(4) = 6a.$$

En se rappelant que $Q(X) = -X^2+9X-14$, on peut calculer ces valeurs, ce qui donne :

$$-6 = -6d,\ 0 = 2c,\ 4 = -2b,\ 6 = 6a$$

d'où les valeurs : $\boxed{a = 1,\ b = -2,\ c = 0,\ d = 1}$.

• Synthèse : On vérifie que ces valeurs conviennent effectivement, c'est à dire qu'on a bien

$$Q = P_1 - 2P_2 + P_4$$

c'est à dire

$$-X^2+9X-14 = (X^3-6X^2+11X-6)-2(X^3-7X^2+14X-8)+(X^3-9X^2+26X-24).$$

Un simple calcul mental permet de vérifier cette égalité.

• Conclusion : On a montré que $(a, b, c, d) = (1, -2, 0, 1)$ est l'unique quadruplet de valeurs tel qu'on ait la décomposition $Q = aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4$.

3. Il s'agit, dans cette question, d'appliquer l'analyse-synthèse précédente à $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ quelconque.

   (a) Analyse : On suppose qu'on dispose de $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $Q = aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4$.
   Dans ce cas, on a

   $$\begin{aligned}Q(X) =& a(X-1)(X-2)(X-3)+b(X-1)(X-2)(X-4)\\ &+c(X-1)(X-3)(X-4)+d(X-2)(X-3)(X-4)\end{aligned}$$

   et en valuant cette égalité en 1, 2, 3 et 4, on trouve :

   $$Q(1) = -6d,\ Q(2) = 2c,\ Q(3) = -2b,\ Q(4) = 6a.$$

   Il en résulte que $\boxed{a = \dfrac{Q(4)}{6},\ b = \dfrac{-Q(3)}{2},\ c = \dfrac{Q(2)}{2},\ d = \dfrac{-Q(1)}{6}}$

   (b) Synthèse : On choisit pour a, b, c, d les valeurs que l'on vient de trouver.
   On veut vérifier que les polynômes Q et $\widetilde{Q} = aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4$ sont effectivement les mêmes.
   Par construction, on a choisi a, b, c, d de sorte que ces deux polynômes coïncident en 4 valeurs :

   $$Q(1) = \widetilde{Q}(1),\ Q(2) = \widetilde{Q}(2),\ Q(3) = \widetilde{Q}(3),\ Q(4) = \widetilde{Q}(4).$$

   Or ils sont tous les deux de degré inférieur ou égal à 3.
   ($Q \in \mathbb{R}_3[X]$ d'après l'énoncé et puisque P_1, P_2, P_3, P_4 sont de degré 3, on a bien-sûr $\deg(\widetilde{Q}) \leqslant 3$).
   Il en résulte qu'il sont égaux.
   Avec ce choix de a, b, c, d, on a donc bien : $\boxed{Q = aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4}$

4. Cherchons un polynôme $R \in \mathbb{R}_3[X]$ satisfaisant

$$R(1) = 0,\ R(2) = -1,\ R(3) = 1,\ R(4) = 2.$$

D'après 3., un tel polynôme peut forcément se décomposer sous la forme $R = aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4$ avec :

$$a = \frac{R(4)}{6} = \frac{1}{3},\ b = \frac{-R(3)}{6} = -\frac{1}{6},\ c = \frac{R(2)}{2} = -\frac{1}{2},\ d = \frac{-R(1)}{2} = 0.$$

Ainsi, l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 3 satisfaisant ces égalités est : $\boxed{R = \frac{1}{3}P_1 - \frac{1}{6}P_2 - \frac{1}{2}P_3}$.

Problème : Etude approfondie d'une suite récurrente

Dans ce problème, on s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{u_n + 2}$.

A cette fin, on introduit la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\},\ f(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$.

I - Convergence de la suite

1. (a) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x+1}{x+2}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\},\ f'(x) = \frac{3(x+2) - (3x+1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} > 0.$$

Il en résulte le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	3	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	3

Les limites à gauche et à droite en -2 s'établissent avec un calcul standard.
Détaillons les limites en $\pm\infty$: pour tout $x \neq -2$,

$$f(x) = \frac{3x+1}{x+2} = \frac{x(3 + \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{2}{x})} = \frac{3 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 3.$$

(b) Cherchons les points fixes de f, c'est à dire les solutions de l'équation $f(x) = x$.
Pour tout $x \neq -2$, on a les équivalences :

$$f(x) = x \iff \frac{3x+1}{x+2} = x \iff 3x + 1 = x(x+2) \iff x^2 - x - 1 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$.
On dispose donc des deux solutions $\boxed{\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ (avec $\alpha < \beta$).

2. (a) Classiquement, on peut vérifier que l'intervalle $[0, 3]$ est stable par f.
On note que f est strictement croissante sur $[0, 3]$, que $f(0) = \frac{1}{2} \in [0, 3]$ et $f(3) = \dfrac{10}{5} = 2 \in [0, 3]$.
Ainsi, $f([0, 3]) = [\frac{1}{2}, 2] \subset [0, 3]$. Autrement dit, $\underline{\forall x \in [0, 3],\ f(x) \in [0, 3]}$.
Puisque $u_0 = 1 \in [0, 3]$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$,
il en résulte (par récurrence immédiate) que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 3]}$.

(b) On a $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = \dfrac{4}{3}$ donc $u_1 > u_0$.
On conjecture ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Vérifions rapidement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$.
- L'initialisation vient d'être faite.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{n+1} > u_n$.

Puisque f est strictement croissante sur $[0,3]$ et que $u_n, u_{n+1} \in [0,3]$, il en résulte $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ c'est à dire $u_{n+2} > u_{n+1}$, ce qui achève la récurrence.

On a ainsi montré que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est (strictement) croissante}}$.

3. D'après 2.(a) et 2.(b), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 3, donc converge vers un certain réel $\ell \in \mathbb{R}$, que l'on cherche à déterminer.
En passant à la limite dans l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 3$, on peut déjà affirmer que $0 \leqslant \ell \leqslant 3$.
On passe à la limite dans l'égalité $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ pour obtenir $\ell = f(\ell)$ (car f est continue).
Ainsi, la limite ℓ est un point fixe de f, c'est à dire, d'après 1.(b), $\ell = \alpha$ ou bien $\ell = \beta$.
Puisque $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, cette valeur est exclue.
Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

4.
```python
def suite_u(n) :
    u = 1 # valeur de u_1
    for k in range(n) : # ou range(1,n+1) : n passages de boucle
        u = (3*u+1)/(u+2)
    return u
```

II - Vitesse de convergence et approximation

5. Soient $x, y \geqslant 1$ fixés. On calcule :

$$f(x) - f(y) = \frac{3x+1}{x+2} - \frac{3y+1}{y+2} = \frac{(3x+1)(y+2) - (3y+1)(x+2)}{(x+2)(y+2)} = \frac{5(x-y)}{(x+2)(y+2)}.$$

Ainsi

$$\left|f(x) - f(y)\right| = \frac{5|x-y|}{|x+2||y+2|} = \frac{5}{|x+2||y+2|}|x-y|.$$

Puisque $x, y \geqslant 1$, on a $|x+2||y+2| = (x+2)(y+2) \geqslant (1+2)(1+2) = 9$.
Ainsi, $\boxed{|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{5}{9}|x-y|}$. Ceci est valable quels que soient $x, y \geqslant 1$.

6. Montrons par récurrence que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_n - \beta| \leqslant \left(\dfrac{5}{9}\right)^n$.
- Initialisation : Vérifions que $|u_0 - \beta| \leqslant 1$.

On a $u_0 - \beta = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ donc $|u_0 - \beta| = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant 1$.
En effet :

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant 1 \iff \sqrt{5} - 1 \leqslant 2 \iff \sqrt{5} \leqslant 3 \iff 5 \leqslant 3^2, \quad \text{ce qui est bien vrai.}$$

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $|u_n - \beta| \leqslant \left(\frac{5}{9}\right)^n$ et montrons que $|u_{n+1} - \beta| \leqslant \left(\frac{5}{9}\right)^{n+1}$.

Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et que $\beta = f(\beta)$ (c'est un point fixe de f) :

$$|u_{n+1} - \beta| = |f(u_n) - f(\beta)| \leqslant \frac{5}{9}|u_n - \beta| \quad \text{d'après la question 5., car } u_n, \beta \geqslant 1.$$

Par hypothèse de récurrence, $|u_n - \beta| \leqslant \left(\dfrac{5}{9}\right)^n$ donc on obtient $|u_{n+1} - \beta| \leqslant \dfrac{5}{9} \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n = \left(\dfrac{5}{9}\right)^{n+1}$, ce qui achève la récurrence.

7. (a) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On cherche ici un rang $n \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n - \beta| < \varepsilon$.
On vient de voir que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \beta| \leqslant \left(\frac{5}{9}\right)^n$, donc il suffit de choisir n tel que $\left(\frac{5}{9}\right)^n < \varepsilon$.
On veut donc :

$$\left(\frac{5}{9}\right)^n < \varepsilon \iff n \ln\left(\frac{5}{9}\right) < \ln(\varepsilon) \iff n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(5/9)} \quad \text{(attention, } \ln(5/9) < 0)$$

Le premier entier strictement plus grand que $\dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(5/9)}$ est : $\boxed{n = \left\lfloor \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(5/9)} \right\rfloor + 1}$.

(b) L'idée est de calculer les valeurs de la suite u jusqu'à ce rang que l'on vient d'identifier. On renvoie alors la valeur u_n, qui est une approximation de β à ε près.

```
import numpy as np
def approximation(eps) :
    n = np.floor( np.log(eps) / np.log(5/9) ) + 1
    for k in range(n) :
        u = (3*u+1)/(u+2)
    return u
```

III - Expression explicite de u_n

8. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.

- Initialisation : On a $u_0 = 1 = \dfrac{1}{1} = \dfrac{a_0}{b_0}$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$. Alors :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 2} = \frac{3\frac{a_n}{b_n} + 1}{\frac{a_n}{b_n} + 2} = \frac{3a_n + b_n}{a_n + 2b_n}. \quad \text{(on multiplie par } b_n \text{ au numérateur et au dénominateur)}$$

D'après la définition des suites a et b, on reconnait exactement $u_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$,
ce qui achève la récurrence.

9. (a) Supposons que $\lambda \in \mathbb{R}$ soit un point fixe de f, c'est à dire que $f(\lambda) = \lambda$, ou encore $\dfrac{3\lambda + 1}{\lambda + 2} = \lambda$.
Vérifions alors que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \lambda a_{n+1} + b_{n+1} \\ c_{n+1} &= \lambda(3a_n + b_n) + (a_n + 2b_n) \\ c_{n+1} &= (3\lambda + 1)a_n + (\lambda + 2)b_n. \end{aligned}$$

On voudrait trouver une constante $q \in \mathbb{R}$ telle que $c_{n+1} = q \times c_n$, c'est à dire :

$$(3\lambda + 1)a_n + (\lambda + 2)b_n = q(\lambda a_n + b_n).$$

On peut remarquer ici que la valeur $q = \lambda + 2$ convient !
En effet, puisque $\dfrac{3\lambda + 1}{\lambda + 2} = \lambda$, on a $(3\lambda + 1) = (\lambda + 2)\lambda$, et donc :

$$c_{n+1} = (3\lambda + 1)a_n + (\lambda + 2)b_n = (\lambda + 2)\lambda\, a_n + (\lambda + 2)b_n = (\lambda + 2)(\lambda a_n + b_n) = (\lambda + 2)c_n.$$

Ainsi, $\boxed{\text{lorsque } \lambda \text{ est un point fixe de } f \text{, la suite } (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } (\lambda + 2)}$.

(b) On définit les suites : $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = \alpha a_n + b_n$ et $w_n = \beta a_n + b_n$.
Autrement dit, ces suites correspondent à la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ précédente, avec le choix $\lambda = \alpha$ ou $\lambda = \beta$. Puisque ces valeurs sont justement des points fixes de f, d'après 9.(a), il en résulte que :

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\alpha + 2$,
La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\beta + 2$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times (\alpha+2)^n = (\alpha+1)(\alpha+2)^n \quad \text{et} \quad w_n = w_0 \times (\beta+2)^n = (\beta+1)(\beta+2)^n.$$

On a obtenu les expressions : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (\alpha+1)(\alpha+2)^n \ \text{ et } \ w_n = (\beta+1)(\beta+2)^n}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On vient de voir que :

$$\begin{cases} v_n &= (\alpha+1)(\alpha+2)^n \\ w_n &= (\beta+1)(\beta+2)^n \end{cases} \quad \text{c'est à dire} \quad \begin{cases} \alpha a_n + b_n &= (\alpha+1)(\alpha+2)^n \quad (L_1) \\ \beta a_n + b_n &= (\beta+1)(\beta+2)^n \quad (L_2) \end{cases}$$

On voit ceci comme un système de 2 équations à 2 inconnues (a_n et b_n) que l'on peut résoudre. La soustraction des deux lignes $(L_2)-(L_1)$, donne l'expression de a_n :

$$(\beta-\alpha)a_n = (\beta+1)(\beta+2)^n - (\alpha+1)(\alpha+2)^n$$

d'où : $\boxed{a_n = \dfrac{\beta+1}{\beta-\alpha}(\beta+2)^n - \dfrac{\alpha+1}{\beta-\alpha}(\alpha+2)^n}$. On peut alors déduire de (L_1) l'expression de b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= (\alpha+1)(\alpha+2)^n - \alpha a_n \\ &= (\alpha+1)(\alpha+2)^n - \alpha\left(\frac{\beta+1}{\beta-\alpha}(\beta+2)^n - \frac{\alpha+1}{\beta-\alpha}(\alpha+2)^n\right) \\ &= (\alpha+1)(\alpha+2)^n - \frac{\alpha(\beta+1)}{\beta-\alpha}(\beta+2)^n + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta-\alpha}(\alpha+2)^n \\ &= \left(\frac{(\beta-\alpha)(\alpha+1)}{\beta-\alpha} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta-\alpha}\right)(\alpha+2)^n - \frac{\alpha(\beta+1)}{\beta-\alpha}(\beta+2)^n \\ &= \frac{\beta(\alpha+1)}{\beta-\alpha}(\alpha+2)^n - \frac{\alpha(\beta+1)}{\beta-\alpha}(\beta+2)^n \end{aligned}$$

d'où : $\boxed{b_n = -\dfrac{\alpha(\beta+1)}{\beta-\alpha}(\beta+2)^n + \dfrac{\beta(\alpha+1)}{\beta-\alpha}(\alpha+2)^n}$.

10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_{n+1} + a_n + 2b_n.$$

Or, $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ donc on peut écrire $b_n = a_{n+1} - 3a_n$. Ainsi :

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + a_n + 2(a_{n+1} - 3a_n) \text{ donc } \boxed{a_{n+2} = 5a_{n+1} - 5a_n}.$$

Déduisons-en l'expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$. L'équation caractéristique associée est :

$$x^2 = 5x - 5 \text{ c'est à dire } x^2 - 5x + 5 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 25 - 4 \times 5 = 5 > 0$. On a les deux racines :

$$q_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2 = \alpha + 2 \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2 = \beta + 2.$$

On sait donc que la forme générale de a_n sera la suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda(\alpha+2)^n + \mu(\beta+2)^n \quad \text{avec } \lambda, \mu \text{ des réels à déterminer.}$$

Pour trouver λ et μ, on note que $a_0 = 1$ et $a_1 = 3a_0 + b_0 = 4$, et on résout le système :

$$\begin{cases} \lambda(\alpha+2)^0 + \mu(\beta+2)^0 &= 1 \\ \lambda(\alpha+2)^1 + \mu(\beta+2)^1 &= 4 \end{cases} \quad \text{c'est à dire} \quad \begin{cases} \lambda + \mu &= 1 \\ \lambda(\alpha+2) + \mu(\beta+2) &= 4. \end{cases}$$

On peut procéder par substitution en remplaçant λ par $1-\mu$ dans la deuxième ligne et en déduisant la valeur de μ. Après résolution (faites-le !), on trouve :

$$\mu = \frac{\beta+1}{\beta-\alpha} \quad \text{puis} \quad \lambda = -\frac{\alpha+1}{\beta-\alpha}.$$

Au final, $\boxed{a_n = -\dfrac{\alpha+1}{\beta-\alpha}(\alpha+2)^n + \dfrac{\beta+1}{\beta-\alpha}(\beta+2)^n}$, ce qui est bien l'expression donnée en 9.(c).

11. En utilisant l'expression donnée en 9.(c), on obtient :

$$\frac{a_n}{(\beta+2)^n} = \frac{\beta+1}{\beta-\alpha} - \frac{\alpha+1}{\beta-\alpha}\left(\frac{\alpha+2}{\beta+2}\right)^n.$$

Il faut remarquer ici que $0 < \dfrac{\alpha+2}{\beta+2} < 1$. En effet, $\alpha+2>0$, $\beta+2>0$ et $\alpha<\beta$.

On sait alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha+2}{\beta+2}\right)^n = 0$. Il en résulte que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{(\beta+2)^n} = \dfrac{\beta+1}{\beta-\alpha}}$.

De la même façon, on a :

$$\frac{b_n}{(\beta+2)^n} = -\frac{\alpha(\beta+1)}{\beta-\alpha} + \frac{\beta(\alpha+1)}{\beta-\alpha}\left(\frac{\alpha+2}{\beta+2}\right)^n$$

et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_n}{(\beta+2)^n} = -\dfrac{\alpha(\beta+1)}{\beta-\alpha}}$

Pour terminer, on a vu en question 8. que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$. Ainsi :

$$u_n = \frac{\frac{a_n}{(\beta+2)^n}}{\frac{b_n}{(\beta+2)^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\frac{\beta+1}{\beta-\alpha}}{-\frac{\alpha(\beta+1)}{\beta-\alpha}} = -\frac{1}{\alpha}.$$

On obtient ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{1}{\alpha}}$.

On avait pourtant vu en question 3. que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$. En fait ceci est cohérent car $-\dfrac{1}{\alpha} = \beta$.

On peut vérifier cela :

- Soit par un calcul direct avec les valeurs :

$$-\frac{1}{\alpha} = -\frac{2}{1-\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \beta,$$

- Soit plus élégamment en se rappelant que α et β sont les deux racines du polynôme X^2-X-1 (cf. 1.(b)) et que, par conséquent, les produit des ces deux racines doit être égal à $\dfrac{-1}{1}$.

On a ainsi $\alpha\times\beta = -1$ et donc $\beta = -\frac{1}{\alpha}$.

On retrouve donc bien la limite établie en question 3. : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta}$.