Devoir Maison n°1 - Corrigé

1. • D'abord, la fonction f est impaire : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)e^{2-|-x|} = -xe^{2-|x|} = -f(x)$.
   • Etudions la fonction sur $\mathbb{R}_+$.
   Pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = xe^{2-x}$ et donc $f'(x) = e^{2-x} - xe^{2-x} = (1-x)e^{2-x}$.
   On obtient alors facilement le tableau de variations suivant sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

   Pour la limite en $+\infty$, c'est simplement de la "croissance comparée" : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{2-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^2\dfrac{x}{e^x} = 0$.
   Par imparité (et donc symétrie centrale), on en déduit le tableau de variations sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$+\infty$

   On lit sur ce tableau que f atteint son minimum en -1 et son maximum en 1. On a donc :

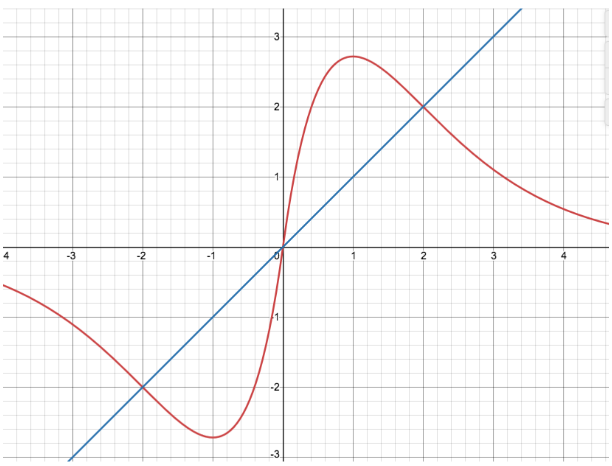
$$\inf(f) = \min(f) = f(-1) = -e, \qquad \sup(f) = \max(f) = f(1) = e.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = x \iff xe^{2-|x|} = x &\iff x = 0 \text{ ou } e^{2-|x|} = 1 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 2 - |x| = 0 \iff x = 0 \text{ ou } |x| = 2 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \pm 2. \end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{f \text{ admet 3 points fixes : } -2, 0 \text{ et } 2}$.

3. (a) Le graphe ressemble à ça :



(b) Sur ce graphe, on lit que : $\boxed{f(x) < x \iff x \in]-2,0[\cup]2,+\infty[}$

et $\boxed{f(x) > x \iff x \in]-\infty,-2[\cup]0,2[}$.

4. (a) Sur le graphe (ou le tableau de variations) on lit les ensembles suivants :

$$\boxed{f(\mathbb{R}) = [-e,e] \quad f([0,1]) = [0,e] \quad f([-1,2]) = [-e,e] \quad f([1,+\infty[) =]0,e].}$$

(b) f est strictement décroissante sur l'intervalle $[1,e]$, on a donc facilement :

$$f([1,e]) = \{f(x),\ x \in [1,e]\} = [f(e), f(1)] = [f(e), e].$$

Pour vérifier que $f([1,e]) \subset [1,e]$, il faut donc montrer que $[f(e),e] \subset [1,e]$, c'est à dire vérifier que $f(e) \geqslant 1$. Or on a :

$$f(e) = e \times e^{2-e} = e^{3-e} > 1 \quad \text{car } 3 - e > 0 \text{ (puisque } e \simeq 2,7)$$

Ainsi, $f([1,e]) \subset [1,e]$, c'est à dire que $\boxed{\text{l'intervalle } [1,e] \text{ est stable par } f}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $u_0 \in [1,e]$.

5. Si on suppose que $u_0 = 2$, alors puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ et que $f(2) = 2$, par récurrence immédiate on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2$. Ainsi $\boxed{\text{la suite est constante égale à } 2}$.

On ajoute à présent l'hypothèse $u_0 \neq 2$.

6. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1,e] \setminus \{2\}$.

<u>Initialisation :</u> Par hypothèse de l'énoncé, on a $u_0 \in [1,e]$ et $u_0 \neq 2$, donc $u_0 \in [1,e] \setminus \{2\}$.

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in [1,e] \setminus \{2\}$ et montrons que $u_{n+1} \in [1,e] \setminus \{2\}$.

Rappelons que $u_{n+1} = f(u_n)$.

On a vu que $[1,e]$ est stable par f : $f([1,e]) \subset [1,e]$. Ceci signifie que $\forall x \in [1,e],\ f(x) \in [1,e]$.

De fait, puisque $u_n \in [1,e]$, on a $f(u_n) \in [1,e]$, c'est à dire $\boxed{u_{n+1} \in [1,e]}$.

De plus, si on avait $u_{n+1} = 2$, on aurait $f(u_n) = 2$: u_n serait un antécédent de 2 par f.

Or on lit sur le graphe que le seul antécédent de 2 par f dans l'intervalle $[1,e]$ est 2.

Puisqu'on a supposé $u_n \neq 2$, c'est impossible.

Ainsi $\boxed{u_{n+1} \neq 2}$. On a donc montré que $u_{n+1} \in [1,e] \setminus \{2\}$, ce qui achève la récurrence.

(b) Puisque $u_0 \in [1,e] \setminus \{2\}$, on a soit $u_0 \in [1,2[$, soit $u_0 \in]2,e]$.

- <u>Supposons que $u_0 \in [1,2[$.</u>

Rappelons que pour $x \in [1,2[$, on a $f(x) > x$ (cf question 3.(b)).

On a donc $u_1 = f(u_0) > u_0$. Ainsi $\boxed{u_1 > u_0}$.

Ensuite, puisque $u_0 \in [1,2[$, on a $u_1 = f(u_0) \in f([1,2[)$, c'est à dire $u_1 \in]2,e]$ (cf graphe).

Rappelons que pour $x \in]2,e]$, on a $f(x) < x$ (cf question 3.(b)).

On a donc $u_2 = f(u_1) < u_1$. Ainsi $\boxed{u_2 < u_1}$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante ni décroissante : elle n'est pas monotone !

En poursuivant ce raisonnement, on comprend même facilement que

$$u_1 > u_0, \quad u_2 < u_1, \quad u_3 > u_2, \quad u_4 < u_3, \quad \textit{etc.}$$

- <u>Supposons que $u_0 \in]2,e]$.</u> Le raisonnement est le même.

Pour $x \in]2,e]$, on a $f(x) < x$. On a donc $u_1 = f(u_0) < u_0$. Ainsi $\boxed{u_1 < u_0}$.

Ensuite, puisque $u_0 \in]2,e]$, on a $u_1 = f(u_0) \in f(]2,e])$, c'est à dire $u_1 \in [1,2[$.

Pour $x \in [1,2[$, on a $f(x) > x$. On a donc $u_2 = f(u_1) > u_1$. Ainsi $\boxed{u_2 > u_1}$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante ni décroissante : elle n'est pas monotone !

En poursuivant ce raisonnement, on comprend même facilement que

$$u_1 < u_0, \quad u_2 > u_1, \quad u_3 < u_2, \quad u_4 > u_3, \quad \textit{etc.}$$

7. On considère les suites des termes pairs et impairs définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

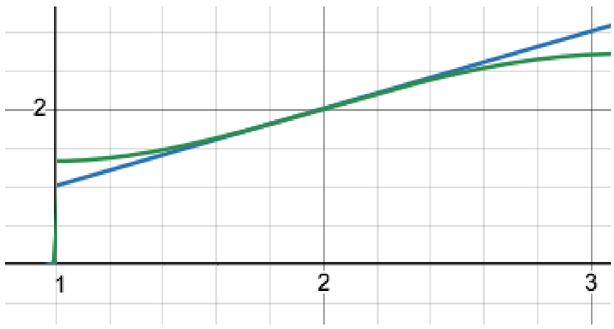
$$v_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f(f(v_n)) = \boxed{(f \circ f)(v_n)}.$$

$$w_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = f(f(w_n)) = \boxed{(f \circ f)(w_n)}.$$

(b) On a déjà vu que $f([1, e]) \subset [1, e]$.
De plus, puisque f est strictement décroissante sur $[1, e]$.
Par composition, l'application $(f \circ f)$ est strictement croissante sur $[1, e]$.
On a donc le tableau de variations :

x	1		2		e
$(f \circ f)(x)$	$f(f(1))$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$f(f(e))$

Puisque $f(f([1, e])) \subset [1, e]$, on a nécessairement $f(f(1)) > 1$ et $f(f(e)) < e$.
Le graphe de $f \circ f$ sur $[1, e]$ (en vert) ressemble donc au dessin suivant :



En particulier, on lit sur ce dessin que : $\boxed{\forall x \in [1, 2[,\ (f \circ f)(x) > x \quad \text{et} \quad \forall x \in]2, e],\ (f \circ f)(x) < x}$.

(c) • <u>Supposons que $u_0 \in [1, 2[$.</u>
On a alors $v_0 = u_0 \in [1, 2[$.
Puisque $v_0 \in [1, 2[$, on lit sur le graphe précédent que $(f \circ f)(v_0) \in [1, 2[$ et $(f \circ f)(v_0) > v_0$.
Autrement dit, $v_1 \in [1, 2[$ et $v_1 > v_0$.
En composant de nouveau par $(f \circ f)$, on peut poursuivre le raisonnement :

$$v_2 \in [1, 2[\text{ et } v_2 > v_1 \quad \text{puis} \quad v_3 \in [1, 2[\text{ et } v_3 > v_2 \quad \text{etc.}$$

Par récurrence immédiate (à écrire si ce n'est pas clair) : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in [1, 2[,$ et $v_{n+1} > v_n$.
Ainsi $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}}$.

Un raisonnement similaire s'établit pour $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
On a $w_0 = u_1$. Puisque $u_0 \in [1, 2[$, $u_1 = f(u_0) \in]2, e]$. Ainsi $w_0 \in]2, e]$.
Ensuite, puisque $w_0 \in]2, e]$, on lit sur le graphe précédent que $(f \circ f)(w_0) \in]2, e]$ et $(f \circ f)(w_0) < w_0$.
Autrement dit, $w_1 \in]2, e]$ et $w_1 < w_0$.
En composant de nouveau par $(f \circ f)$, on peut poursuivre le raisonnement :

$$w_2 \in]2, e] \text{ et } w_2 < w_1 \quad \text{puis} \quad w_3 \in]2, e] \text{ et } w_3 < w_2 \quad \text{etc.}$$

Par récurrence immédiate (à écrire si ce n'est pas clair) : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \in]2, e],$ et $w_{n+1} < w_n$.
Ainsi $\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante}}$.

• <u>Supposons que $u_0 \in]2, e]$.</u>
Le raisonnement est similaire mais cette fois $v_0 \in]2, e]$ et $w_0 \in [1, 2[$.
On aura donc $\boxed{(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ strictement décroissante et } (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ strictement croissante}}$.

Pour finir, on propose d'étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de Python.

8. (a)
```python
import numpy as np
def f(x) :
    y = x * np.exp( 2 - abs(x) )
    return y
```

(b)
```python
def suiteU(a,n) :
    u = a # valeur initiale : u = u_0
    for k in range(n) : # ou range(1,n+1) : il faut faire n passages de boucle
        u = f(u) # on calcule le terme suivant
    return u # on renvoie la valeur de u a l'issue des n passages de boucle
```

(c) On tape l'instruction suivante dans la console : `print([suiteU(1.5,k) for k in range(8)])`
Le résultat affiché est le suivant : `[1.5, 2.47, 1.54, 2.43, 1.577, 2.41, 1.59, 2.38]`
On reconnait ici que pour $u_0 = 1.5$, on a :

$$u_0 = 1.5 \quad u_1 = 2.47 \quad u_2 = 1.54 \quad u_3 = 2.43 \quad u_4 = 1.57 \quad u_5 = 2.41 \quad u_6 = 1.59 \quad u_7 = 2.38$$

Ainsi $\quad u_0 < u_2 < u_4 < u_6 \quad$ et $\quad u_1 > u_3 > u_5 > u_7$.
On retrouve le fait que lorsque $u_0 \in [1, 2[$, $\boxed{\text{la suite des termes pairs est strictement croissante}}$ et $\boxed{\text{la suite des termes impairs est strictement décroissante}}$.

(d) On peut raisonnablement conjecturer que $\boxed{\text{lorsque } u_0 \in [1, e],\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2}$.
C'est un cas classique d'une suite récurrente qui converge vers un "point fixe de f".