21

Espaces probabilisés généraux

Introduction et motivation

Jusqu'à maintenant, nous avons étudié des expériences aléatoires avec un nombre fini d'issues possibles. Celles-ci correspondaient donc à un univers Ω fini :

- On lance un dé à 6 faces : $\Omega = [\![1,6]\!]$.
- On tire p boules avec remise dans une urne qui en contient n : $\Omega = [\![1,n]\!]^p$.
- On lance une pièce n fois consécutives : $\Omega = \{Pile, Face\}^n$.

Une expérience aléatoire pouvait ainsi être modélisée par un **espace probabilisé fini** : $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
Un évènement A étant un ensemble d'issue, c'est une partie de Ω : $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.
L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ était donc l'ensemble des évènements que l'on peut considérer.

À présent, on souhaiterait s'intéresser à des expériences aléatoires ayant une infinité d'issues possibles, c'est à dire pour lesquelles l'univers Ω est infini ! Deux exemples :

- On lance une pièce (éventuellement biaisée) une infinité de fois consécutivement :

$$\Omega = \Big\{(x_n)_{n\geqslant 1} \mid \forall n \geqslant 1,\ x_n \in \{Pile, Face\}\Big\} = \{Pile, Face\}^{\mathbb{N}^*}.$$

Par exemple, l'issue $\omega = (Pile, Pile, Pile, \ldots) \in \Omega$ correspond au fait de n'obtenir que des Piles.

- Le prochain bus arrivera dans 5 minutes maximum. On s'intéresse au temps d'attente (en minutes) :

$$\Omega = [0,5].$$

Lorsque l'univers Ω est infini, il devient en fait compliqué et souvent inutile (voire parfois impossible !) de considérer n'importe quelle partie de Ω comme un événement. L'ensemble des évènements que l'on peut considérer ne sera donc pas nécessairement $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier, mais seulement un sous-ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$!

1 Ensemble des évènements sur un univers quelconque

Définition 1 (Ensemble des évènements sur Ω)

Soit Ω un ensemble (fini ou infini) s'interprétant comme l'univers associé à une expérience aléatoire.
Un "ensemble des évènements sur Ω" est un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ satisfaisant :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. **Stabilité par passage au complémentaire :** Si $A \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$
3. **Stabilité par union dénombrable :**

Si $I \subset \mathbb{N}$ et si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Tout élément $A \in \mathcal{A}$ est alors appelé évènement.

Remarque 1

Le terme **dénombrable** signifie : fini ou "infini comme $\mathbb{N}$" (l'infini des nombres entiers).
Plus précisément, un ensemble infini E est dit dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans E : chaque élément de E peut être "étiqueté" par un entier.

Exemples : Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ ou même $[0,1]$ ne le sont pas !

Si $A_1, A_2, \ldots$ sont des éléments de $\mathcal{A}$ on pourra ainsi considérer des unions finies ou infinies :

- Avec $I = [\![1,n]\!]$: $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_n$
- Avec $I = \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$

Interprétation probabiliste de ces opérations :

$\boxed{1}$ On peut considérer l'évènement certain Ω.

$\boxed{2}$ Si A est un évènement, on peut considérer l'évènement contraire $\overline{A}$.

$\boxed{2}$ Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des évènements, on peut considérer l'évènement :

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \text{"}A_1 \text{ ou } A_2 \text{ ou } \ldots \text{ ou } A_n \text{ est réalisé"} \quad \text{(OU INCLUSIF).}$$

De manière plus générale, pour une infinité d'évènements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, on peut à présent considérer :

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \text{"L'un des } A_i \text{ (au moins) est réalisé".}$$

À partir des propriétés $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, on a aussi "gratuitement" les propriétés suivantes :

Proposition 1 (Autres opérations avec les évènements)

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble des évènements sur Ω. Alors on a :

$\boxed{1 \text{ bis}}$ $\emptyset \in \mathcal{A}$.

$\boxed{2 \text{ bis}}$ **Stabilité par "privé de" :** Si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$, alors $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

$\boxed{3 \text{ bis}}$ **Stabilité par intersection dénombrable :**

$$\text{Si } I \subset \mathbb{N} \text{ et si } (A_i)_{i\in I} \text{ est une famille d'éléments de } \mathcal{A}, \text{ alors } \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}.$$

Preuve :

$\boxed{1 \text{ bis}}$: $\emptyset = \underbrace{\overline{\Omega}}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$.

$\boxed{2 \text{ bis}}$: Si $A, B \in \mathcal{A}$, on a $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \overline{\overline{A} \cup B} \in \mathcal{A}$.

$\boxed{3 \text{ bis}}$: Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i = \overline{\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}} \in \mathcal{A}$. $\square$

Interprétation probabiliste de l'intersection :

$\boxed{3 \text{ bis}}$ Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des évènements, on peut considérer l'évènement :

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \text{"}A_1 \text{ et } A_2 \text{ et } \ldots \text{ et } A_n \text{ sont réalisés"}$$

De manière plus générale, pour une infinité d'évènements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, on peut à présent considérer :

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \text{"Tous les } A_i \text{ sont réalisés".}$$

Exemples

Pour un univers Ω fixé, plusieurs choix sont a priori possibles pour l'ensemble des évènements $\mathcal{A}$!
Donnons quelques exemples :

- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ est un "ensemble des évènements" sur Ω. (On choisit souvent cela lorsque Ω est fini !)
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est un "ensemble des évènements" sur Ω (Pas très intéressant...)
- Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors : $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est un "ensemble des évènements" sur Ω.
- Si $\Omega = [\![1, 6]\!]$ (expérience de lancer de dé) alors

$$\mathcal{A} = \Big\{\emptyset, \{6\}, \{2,4\}, \{1,3,5\}, \{2,4,6,\}, \{1,3,5,6\}, \{1,2,3,4,5\}, \Omega\Big\} \text{ est un "ensemble des évènements" sur } \Omega.$$

En pratique : lorsque l'univers Ω est infini, il est très rare que l'on décrive explicitement l'ensemble des évènements $\mathcal{A}$ considéré ! On se contentera souvent d'admettre que certains évènements intéressants $A_1, A_2, \dots$ appartiennent bien à $\mathcal{A}$. On sait alors que l'on peut considérer tous les évènements construits comme union, intersection, complémentaire de ceux-ci.

Exercice 1

On lance une pièce une infinité de fois consécutivement. (On peut donc considérer $\Omega = \{Pile, Face\}^{\mathbb{N}^*}$).

On admet qu'il existe un ensemble des évènements $\mathcal{A}$ adéquat, de sorte que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k =$ "Obtenir Pile au k-ème lancer" appartient à $\mathcal{A}$. Exprimer les évènements :

- $A =$ "N'obtenir que des Faces à partir du 10-ème lancer"
- $B =$ "Obtenir au moins un Pile"
- $C_k =$ "Obtenir Pile pour la première fois au k-ème lancer". (pour $k \in \mathbb{N}^*$)
- $D =$ "On obtient le premier Pile après un nombre pair de lancers".

- $A = \overline{A_{10}} \cap \overline{A_{11}} \cap \dots = \displaystyle\bigcap_{k=10}^{+\infty} \overline{A_k} \in \mathcal{A}$.
- $B = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $C_k = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k = \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A_i}\right) \cap A_k \in \mathcal{A}$.
- $D = C_2 \cup C_4 \cup C_6 \cup \dots = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} C_{2k} \in \mathcal{A}$.

Pour finir, maitenant que l'on dispose d'unions infinies d'ensembles, on peut aussi généraliser la notion de système complet d'évènements à une infinité d'évènements :

Définition 2 (Système complet d'évènements)

Soit Ω un univers et $\mathcal{A}$ un "ensemble des évènements" sur Ω.

Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}$.
(Il peut donc y avoir un nombre fini ou infini d'évènements !)

On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un **système complet d'événements** (S.C.E) lorsque :

$\boxed{1}$ Ils sont **deux à deux incompatibles** : $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

$\boxed{2}$ Leur réunion donne Ω tout entier : $\Omega = \displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$.

Cela revient à dire : Quelle que soit l'issue de l'expérience, un et un seul des A_i est réalisé.

Exemples

- On lance une pièce indéfiniment. Notons, comme dans l'Exercice 1,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad C_k = \text{"Obtenir Pile pour la première fois au } k\text{-ème lancer"}.$$

Rajoutons $C_0 =$ "Ne pas obtenir de Pile".
Alors : $(C_i)_{i\in\mathbb{N}} = (C_0, C_1, C_2, \dots)$ est un système complet d'évènements.
(**car** il y a toujours un et un seul de ces évènements qui se réalise...)

- On lance une pièce indéfiniment. Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i =$ "Obtenir exactement i Piles".

Rajoutons $A_\infty =$ "Obtenir une infinité de Piles".
Alors $(A_\infty, A_0, A_1, A_2, ...)$ est un système complet d'événements.

2 Espace probabilisé général

2.1 Probabilité sur un univers quelconque

Rappel : Dans le cas d'un univers Ω fini, une probabilité P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ satisfaisait la propriété d'additivité :

$$\text{Si } A_1, \dots, A_n \text{ sont deux à deux incompatibles,} \qquad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

On va maintenant demander ce que cette propriété soit valable non seulement pour une union finie mais aussi pour une union infinie (dénombrable) d'évènements ! On parle de σ-additivité.

Définition 3 (Probabilité sur $\mathcal{A}$, espace probabilisé)

Soit Ω un univers (fini ou infini) et $\mathcal{A}$ un "ensemble des évènements" sur Ω.

Une probabilité sur $\mathcal{A}$ est une application $\boxed{P : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(A) \end{array}}$ satisfaisant les propriétés :

$\boxed{1}$ **$\sigma-$additivité :** Pour $I \subset \mathbb{N}$, si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'évènements deux à deux incompatibles,

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i)}$$

$\boxed{2}$ **Proba de l'évènement certain :** $\boxed{P(\Omega) = 1}$

Lorsque Ω est un ensemble (fini ou infini), $\mathcal{A}$ un "ensemble des évènements" sur Ω et P une probabilité sur $\mathcal{A}$, on dit que le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un **espace probabilisé.**

Remarque 2

Dans le cas d'une famille infinie d'ensemble $(A_i)_{i\in I}$ la somme $\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i)$ est une somme infinie !
Pour que celle-ci soit bien définie, il faut que la série associée soit convergente...

Preuve du fait que $\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i)$ est bien définie :

Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements deux à deux incompatibles.

- Si I est une partie finie de $\mathbb{N}$, la somme $\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i)$ est finie, donc bien définie !
- Soit I une partie infinie de $\mathbb{N}$: disons $I = \{i_1, i_2, \dots, \} = \{i_n, \ \ n \geqslant 1\}$.

On doit montrer que la somme $\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i) = P(A_{i_1}) + P(A_{i_2}) + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_{i_n})$ est bien définie, c'est à dire que la série $\sum P(A_{i_n})$ converge. Or, pour tout $N \geqslant 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} P(A_{i_n}) = P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_{i_n}\right) \quad (\text{car } A_{i_1}, \dots, A_{i_N} \text{ sont 2 à 2 incompatibles}) \quad \text{donc } \sum_{n=1}^{N} P(A_{i_n}) \leqslant 1.$$

Ainsi la série $\sum P(A_{i_n})$ est à termes positifs et majorée (par 1), donc elle converge.

$\square$

Par suite, on a toutes les propriétés habituelles pour le calcul des probabilités.

Proposition 2 (Propriétés d'une probabilité)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Pour tous évènements $A, B \in \mathcal{A}$,

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ • $P(\emptyset) = 0$ • $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$ • $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Sur un univers fini, on avait vu qu'une probabilité P était entièrement déterminée par la donnée des probabilité des évènements élémentaires $P(\{\omega\})$ pour $\omega \in \Omega$. (cf. Chapitre #11, Théorème 1)
C'est toujours le cas sur un univers infini dénombrable :

Théorème 1 (Probabilité sur un univers dénombrable)

Soit Ω un univers infini dénombrable : on peut donc écrire $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$.

Soient $p_1, p_2, \ldots$ des réels positifs tels que la série $\sum p_n$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$.

Alors il existe une unique probabilité P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que $\forall n \geqslant 1, \ \ P(\{\omega_n\}) = p_n$.
Précisément, cette probabilité est donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(A) = \sum_{n \text{ tel que } \omega_n \in A} p_n$$

Preuve :

La même que dans le cas fini, sauf que les ensemble/unions/sommes peuvent être infinis... □

Exercice 2

On considère l'univers $\Omega = \mathbb{N}$ avec l'ensemble des évènements $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

On munit $(\Omega, \mathcal{A})$ d'une probabilité P satisfaisant : $\forall n \in \mathbb{N}, \ P(\{n\}) = \dfrac{a}{2^n}$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la valeur de la constante a.
2. On choisit un entier "au hasard", selon la probabilité P.
   Quelle est la probabilité que cet entier soit pair ?

1. Pour que P soit une probabilité, on doit avoir :

$$P(\mathbb{N}) = 1 \iff P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{n\}\right) = 1 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{n\}) = 1 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{2^n} = 1 \iff a \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

puique $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{1-1/2} = 2$, il faut que $2a = 1$, c'est à dire $a = \frac{1}{2}$.

2. On veut calculer $P(A)$, où $A = \{2n, \ n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (ensemble des entiers pairs).

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{2n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{2n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a \frac{1}{2^{2n}} = a \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = a \frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

2.2 Théorème de la limite monotone

Énonçons à présent quelques résultats permettant de calculer un bon nombre de probabilités d'union/d'intersection infinies d'évènements.

Théorème 2 (Théorème de la limite monotone)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements.

- **Union croissante :** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est à dire si $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$,

$$\text{alors} \qquad P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

- **Intersection décroissante :** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, c'est à dire si $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$,

$$\text{alors} \qquad P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Remarques 3

- Bien-sûr cela tient toujours pour des unions/intersections démarrant à l'indice $n = 1$ ou $n = 2$...
- Rappelons l'interprétation de l'inclusion d'évènements :

$$\boxed{A_n \subset A_{n+1} \text{ signifie que } \text{"la réalisation de } A_n \text{ implique celle de } A_{n+1}\text{"}}$$

On a bien-sûr l'inverse pour une famille décroissante d'évènements.

Preuve du Théorème 2 :

- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille croissante d'évènements.

On pose $\quad B_0 = A_0 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = A_n \setminus A_{n-1}$.

Dessin :

On voit que les $(B_n)_{n\geqslant 0}$ sont 2 à 2 disjoints et que $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. On en déduit, par σ-additivité :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} P(B_n).$$

Or : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} P(B_n) = P(A_0) + \sum_{n=1}^{N} P(A_n \setminus A_{n-1}) = P(A_0) + \sum_{n=1}^{N} (P(A_n) - P(A_{n-1})) = P(A_N)$

d'où $\displaystyle P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P(A_N) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille décroissante d'évènements.

Il en résulte que $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille croissante d'évènements, donc en lui appliquant le résultat précédent :

$$P\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} P(\overline{A_n}) = \lim(1 - P(\overline{A_n})) = \lim P(A_n).$$

$\square$

Exercice 3

On lance une pièce équilibrée indéfiniment.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n =$ "Obtenir au moins une fois Face au cours n premiers lancers".

1. Calculer $P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la probabilité d'obtenir Face au moins une fois.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{A_n} =$ "Obtenir uniquement des Piles au cours de n premiers lancers".
Il est donc clair que $P(\overline{A_n}) = \dfrac{1}{2^n}$ et donc $P(A_n) = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

2. Notons $A =$ "Obtenir Face au moins une fois" : on a en fait $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$.

De plus, il s'agit d'une union <u>croissante</u> : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n \subset A_{n+1}$.
(si A_n est réalisé, alors A_{n+1} est réalisé)

Donc :

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} (1 - \frac{1}{2^n}) = 1.$$

Remarque 4

Notons que $P(A) = 1$, mais A n'est pas pour autant l'évènement certain $A = \Omega$!
(En effet $\overline{A} =$ "Obtenir uniquement des Piles" $= \{(Pile, Pile, Pile, \dots)\}$ donc $\overline{A} \neq \emptyset$.)

Définition 4 (Évènement presque sûr)

Un événement $A \in \mathcal{A}$ est dit **presque sûr** lorsque $P(A) = 1$.
On dira aussi que "A se réalise presque sûrement".

Exemple

Si on lance une pièce indéfiniment, l'évènement "Obtenir Face au moins une fois" est presque sûr.
Autrement dit, on obtient Face au moins une fois **presque** sûrement.

Le Théorème de la limite monotone (Théorème 2) a la conséquence très pratique suivante :

Théorème 3 (Conséquence du Théorème de la limite monotone)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements (quelconque !)
Alors on a :

- $P\left(\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)$
- $P\left(\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right)$

Remarques 5

- Cela tient toujours pour des unions/intersections démarrant à l'indice $n = 1$ ou $n = 2$...
- Ici, la famille d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas besoin d'être croissante ou décroissante !

Pour calculer la probabilité d'une union/intersection infinie, on peut donc d'abord calculer la probabilité de l'union/intersection finie, puis passer à la limite.

Preuve du Théorème 3 :

On pose : $\forall N \in \mathbb{N},\ B_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n$.

Il est clair (ou vérifiez-le !) que la famille $(B_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{N=0}^{+\infty} B_N$.
En appliquant le Théorème de la limite monotone à $(B_N)_{N\in\mathbb{N}}$, on a ainsi :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{N=0}^{+\infty} B_N\right) = \lim_{N\to+\infty} P(B_N) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right).$$

L'autre point se montre de même en posant cette fois $B_N = \bigcap_{n=0}^{N} A_k$. □

Exercice 4

On lance une pièce équilibrée indéfiniment. On pose B = "Obtenir uniquement des Faces".
Calculer $P(B)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note F_k = "Obtenir Face au k-ème lancer".

Ainsi, : $B = \bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k$.

D'après la conséquence du thm de la limite monotone :

$$P(B) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right)$$

Par indépendance, $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right) = P(F_1) \times P(F_2) \times P(F_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

d'où $P(B) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Remarque 6

Notons que $P(B) = 0$, mais B n'est pas pour autant l'évènement impossible $\emptyset$!

Définition 5 (Évènement négligeable)

Un événement $B \in \mathcal{A}$ est dit **négligeable** lorsque $P(B) = 0$.

3 Conditionnement et indépendance

3.1 Probabilités conditionnelles et formules classiques

Définition 6

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) \neq 0$.

Pour tout événement $B \in \mathcal{A}$ on pose $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

$P_A : \mathcal{A} \to [0,1]$ est une probabilité sur $\mathcal{A}$, appelée probabilité conditionnelle "sachant A".

Toutes les propriétés de la probabilité conditionnelle vues dans le cadre d'un espace probabilisé fini restent vraies dans le cas général. Notons que le Théorème de la limite monotone et ses conséquences s'appliquent aussi en remplaçant P par P_A (puisque P_A est aussi une probabilité !)

Rappelons les trois formules utiles mettant en jeu les probabilités conditionnelles.

Proposition 3 (Formule des probabilités totales (généralisée))

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'évènements (fini ou infini !)

Pour tout évènement $B \in \mathcal{A}$, $\quad P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} P(A_i) P_{A_i}(B)$.

(avec la convention $P_{A_i}(B) = 0$ si jamais $P(A_i) = 0$ dans cette formule)

Preuve rapide :

Puisque $(A_i)_{i \in I}$ est un SCE, $\quad B = \Omega \cap B = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$ et cette union est disjointe.

Par σ-additivité : $P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} P(A_i) P_{A_i}(B)$. $\quad$ (car $P(A \cap B) = P(A) P_A(B)$) $\square$

Remarque 7

Notons que le système complet d'évènements peut à présent être composé d'une infinité d'évènements : dans ce cas les sommes $\sum_{i \in I}$ sont des sommes infinies.

Proposition 4 (Formule de Bayes)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Soient A et B deux évènements de probabilité non nulle. Alors : $\quad P_B(A) = \dfrac{P(A) P_A(B)}{P(B)}$.

Proposition 5 (Formule des probabilités composées)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soient $A_1, \ldots, A_n$ des évènements tels que $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Remarque 8

La formule des probabilités composées est la même qu'avant : **elle ne fonctionne que pour une intersection finie d'évènements** ! Pour la probabilité d'une intersection infinie, on utilisera le Théorème de la limite monotone ou sa conséquence...

3.2 Indépendance

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ général, les définitions d'indépendance mutuelle, indépendance 2 à 2, ainsi que les propriétés liées à celle-ci, restent valables. La nouveauté est que l'on peut considérer une famille infinie d'évènements indépendants.

Définition 7 (Indépendance deux à deux, indépendance mutuelle)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $I \subset \mathbb{N}$ (fini ou infini) et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements.

- On dit que ces événements sont **deux à deux indépendants** lorsque :

$$\forall (i,j) \in I^2, \ \ (i \neq j) \Longrightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

- On dit que ces évènements sont **mutuellement indépendants** lorsque :

$$\text{Pour tout ensemble } \underline{\text{fini}}\ J \subset I, \quad P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j).$$

Remarques 9

- Rappelons que ces deux notions ne sont pas équivalentes : si les $(A_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants (considérer $J = \{i, j\}$), en revanche la réciproque n'est pas vraie...
- Cas typique d'indépendance mutuelle : Si on répète une infinité de fois la même épreuve sans modification des conditions (lancer de pièce, de dé, etc...) et si pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, l'évènement A_i concerne **uniquement la i-ème épreuve**, alors on peut affirmer (sans démonstration) que les évènements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants !

Attention !

L'indépendance mutuelle ne permet de considérer que des intersections et des produits **finis** ! Pour une intersection infinie, on utilisera la conséquence du Théorème de la limite monotone :

$$P\left(\bigcap_{j=0}^{+\infty} A_j\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{j=0}^{n} A_j\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{j=0}^{n} P(A_j).$$

Proposition 6 (Indépendance et évènements contraires (admis))

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $I \subset \mathbb{N}$ (fini ou infini) et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements.

Pour tout $i \in I$, on pose $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$.

Si les $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux indépendants (resp. mutuellement indépendants),
alors les $(B_i)_{i\in I}$ sont deux à deux indépendants (resp. mutuellement indépendants).

Exercice 5

Une urne contient r boules rouges, v boules vertes et b boules blanches.
On note $N = r + v + b$ le nombre total de boules. On effectue une infinité de tirages avec remise.
Calculer la probabilité de A = "Tirer la première boule verte avant la première boule rouge".

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note les évènements :

R_k = "Boule rouge au k-ème tirage" $\quad V_k$ = "Boule verte au k-ème tirage"
B_k = "Boule blanche au k-ème tirage"

Pour tirer la première boule verte avant la première boule rouge, il faut avoir tirer uniquement des boules blanches avant la première boule verte.

Ainsi : $A = V_1 \cup (B_1 \cap V_2) \cup (B_1 \cap B_2 \cap V_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap V_4) \cup \ldots$

c'est à dire : $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1} \cap V_i)$.

Cette union étant disjointe (les évènements sont 2 à 2 incompatibles !),

$$P(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1} \cap V_i)$$

Par indépendance mutuelle, pour tout $n \geqslant 1$,

$$P(B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1} \cap V_i) = P(B_1) \times \ldots \times P(B_{i-1}) \times P(V_i) = \left(\frac{b}{N}\right)^{i-1} \frac{v}{N},$$

d'où

$$P(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{b}{N}\right)^{i-1} \frac{v}{N} = \frac{v}{N} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{b}{N}\right)^{i-1} = \frac{v}{N} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{b}{N}\right)^{i} = \frac{v}{N} \frac{1}{1-\frac{b}{N}} = \frac{v}{N-b} = \frac{v}{v+r}.$$

$\Big($ Somme d'une série géométrique avec $x = \dfrac{b}{N} \in]0,1[$. $\Big)$

Méthode : Récapitulatif pour les unions/intersections infinies.

- Pour calculer $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$:

  $\boxed{1}$ Si les évènements A_n sont <u>deux à deux incompatibles</u> : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

  $\boxed{2}$ Si la famille d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>croissante</u> : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

  $\boxed{3}$ Sinon : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)$.

  On se ramène donc à la probabilité d'une union finie $P\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)$.

  (il peut être plus simple de passer au complémentaire, ou bien se laisser guider par l'énoncé...)

- Pour calculer $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$:

  $\boxed{1}$ Si la famille d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>décroissante</u> : $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

  $\boxed{2}$ Sinon : $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right)$.

  On se ramène donc à la probabilité d'une intersection finie $P\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right)$ *:*

  - *Si les A_n sont <u>mutuellements indépendants</u>,* $P\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right) = \prod_{n=0}^{N} P(A_n)$.
  - *Sinon on peut utiliser la formule des probabilités composées...*

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Manipuler des unions/intersections infinies et leur interprétation probabiliste.
- Exprimer un évènement comme union/intersection/complémentaire d'autres.
- Montrer qu'une famille d'évènements forme un système complet d'évènements.
- Utiliser les propriétés déjà connues (probas conditionnelles, indépendance...)
- Utiliser le Théorème de la limite monotone et ses conséquences.

Pour suivre

- Calculer $P(A)$ à partir de la donnée des probabilités $P(\{\omega\})$ pour $\omega \in \Omega$.
- Utiliser le vocabulaire "presque sûr" et "négligeable".

Pour les ambitieux

- Bien connaître la définition théorique d'une probabilité.
- Manipuler théoriquement la définition d'un "ensemble des évènements".

Complément : Quasi-S.C.E

Maintenant que l'on rencontre des évènements "presque-sûrs" mais pas certains, "négligeables" mais pas impossibles, on peut aussi étendre la notion de système complet d'évènements :

Définition 8 (Quasi-système complet d'évènements)

On dit qu'une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'évènements est un **quasi-système complet d'événements** lorsque :

$\boxed{1}$ Ils sont **deux à deux incompatibles** : $\forall (i,j)\in I^2,\ \ i\neq j \Rightarrow A_i\cap A_j=\emptyset$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i)=1.$

La condition $\boxed{2}$ est équivalente à dire : $\displaystyle P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=1$ ou encore : $\displaystyle P\left(\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}\right)=0.$

En français, cela signifie : Un et un seul des évènements A_i est presque-sûrement réalisé.

Preuve pour les conditions équivalentes à $\boxed{2}$:

Puisque l'union $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ est disjointe, $\displaystyle P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=\sum_{i\in I} P(A_i)$. On a donc les équivalences suivantes :

$$\sum_{i\in I} P(A_i)=1 \Longleftrightarrow P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=1 \Longleftrightarrow P\left(\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}\right)=0 \Longleftrightarrow P\left(\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}\right)=0.$$ $\square$

Remarque 10

Pour un SCE, on demande : $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i=\Omega$. Pour un quasi-SCE, on demande seulement $\displaystyle P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=1.$

Exemple

On lance une pièce équilibrée indéfiniment.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note : $A_n=$ "Obtenir Pile pour la première fois au n-ème lancer".
Alors la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme un quasi-système complet d'évènements.

En effet : Un et un seul des évènements A_i est presque-sûrement réalisé.

Ou encore parce que $\displaystyle N=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\overline{A_n}=$ "Obtenir uniquement des faces" est négligeable : $P(N)=0$.

Proposition 7 (Formule des probabilités totales pour un quasi-S.C.E)

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ un quasi-système complet d'évènements.

Pour tout évènement $B\in\mathcal{A}$, $\displaystyle P(B)=\sum_{i\in I} P(A_i\cap B)=\sum_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B).$

(avec la convention $P_{A_i}(B)=0$ si jamais $P(A_i)=0$ dans cette formule)

Preuve (à reproduire au cas-par-cas car hors-programme) :

On définit l'évènement $\displaystyle N=\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$. En ajoutant N à la famille $(A_i)_{i\in I}$, on a un (vrai) S.C.E !

En effet, $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cup N=\Omega$ par définition, et cette union est disjointe.
D'après la formule des probabilités totales avec ce S.C.E $((A_i)_{i\in I}, N)$ on obtient :

$$P(B)=\sum_{i\in I} P(A_i\cap B)+P(N\cap B).$$

Or on sait que $P(N)=P\left(\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}\right)=P\left(\bigcap_{i\in I}\overline{A_i}\right)=0$, donc bien-sûr $P(N\cap B)=0$. $\square$