Samedi 9 Novembre 2024

Devoir Sur Table n°2 – Durée : 4h

L'utilisation de la calculatrice, des feuilles/notes de cours ou d'exercices est interdite.
La présentation, la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation de la copie.
Les résultats non encadrés/soulignés/surlignés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1 : Etude d'une suite récurrente

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+1}$.

On considère alors la suite définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Proposer une fonction Python qui prend en entrée un entier `n` et renvoie la valeur de u_n.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [2,3]$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. On précisera son sens de variation.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée α, donc on déterminera la valeur exacte.
4. (a) Montrer que pour tous $x, y \in [2, +\infty[\quad |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{5}{9}|x-y|$
   (b) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{5}{9}\right)^n |2-\alpha|$.
   (c) A partir de cette inégalité, retrouver le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Problème : Formule de Bâle via les polynômes de Tchebychev

Dans ce problème, on cherche à démontrer le résultat suivant (connu sous le nom de "formule de Bâle") :

$$\underbrace{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\ldots}_{\text{somme "infinie"}} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{c'est à dire, plus rigoureusement,} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Les trois premières parties du problème sont indépendantes.
La partie IV fait appel aux notions démontrées dans les parties précédentes.

Partie I - Etude de (s_n) et (s'_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\quad s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad$ et également $\quad s'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$,

1. Proposer une fonction Python qui prend en entrée un entier `n` et renvoie la valeur de la somme s_n.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = s_n + \frac{1}{n}$. Montrer que les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

On en déduit en particulier que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel, que l'on note ℓ dans toute la suite.

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \quad s_{2n} = \frac{1}{4}s_n + s'_n$.
   (b) En déduire que la suite $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ' que l'on exprimera en fonction de ℓ.

Partie II - Polynômes de Tchebychev

On définit la suite de polynôme $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$T_0(X) = 1, \quad T_1(X) = X, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2}(X) = 2X\,T_{n+1}(X) - T_n(X).$$

4. Déterminer les polynômes T_2 et T_3.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.
   Quelle est l'expression du coefficient dominant de T_n pour $n \geqslant 1$? (preuve non exigée)
6. Compléter la fonction suivante pour que l'appel de `tcheby(n,x)` pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ quelconques renvoie la valeur de $T_n(x)$. **On recopiera l'intégralité du programme sur sa copie.**

```
def tcheby(n,x) :
    a = 1 ; b = x
    for k in range( ... ) :
        c = ...
        a = ...
        b = ...
    return ...
```

7. (a) Montrer que la suite $(T_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
   En déduire la valeur de $T_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n'(1) = n^2$.
8. (a) Démontrer la formule : $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$.
   (b) Etablir que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
9. Déduire de ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme T_n n'admet que des racines simples et peut se factoriser sous la forme :

$$T_n(X) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos(\theta_k)\right), \quad \text{avec} \quad \forall k \in [\![1, n]\!],\ \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}.$$

Partie III - Décomposition de $\frac{P'}{P}$ pour un polynôme à racines simples

Dans cette partie, on souhaite démontrer le résultat suivant : si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré $n \geqslant 1$ admettant n racines simples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, alors,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}, \quad \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - \alpha_k}. \quad (\star)$$

10. *Etude d'un exemple.* On pose $P(X) = 2X^3 - 2X^2 - 18X + 18$.
    Factoriser le polynôme P, en déduire qu'il admet 3 racines simples $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ que l'on déterminera, puis vérifier que la formule $(\star)$ est vraie dans ce cas particulier.

On se propose de démontrer la formule $(\star)$ dans le cas général, par récurrence sur $n = \deg(P)$.

11. Etablir la formule $(\star)$ dans le cas d'un polynôme P de degré 1.
    Indication : Ecrire $P(X) = aX + b$ avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$ ...
12. Soit $n \geqslant 1$ fixé. On suppose que $(\star)$ est vraie pour tout polynôme de degré n avec n racines simples.
    Soit P de degré $n+1$ admettant $n+1$ racines simples : il se factorise donc sous la forme
    $P(X) = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(X - \alpha_k)$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ distincts. Démontrer la formule $(\star)$ pour P.
    Indication : Ecrire $P(X) = (X - \alpha_{n+1}) \times Q(X)$ ...

Partie IV - Le grand final !

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On reprend toutes les notations introduites dans les parties précédentes.

13. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\cos(\theta_k),\, k \in [\![1,n]\!]\}, \quad \dfrac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - \cos(\theta_k)}$.

    (b) En déduire la valeur : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\cos(\theta_k)} = n^2$

    (c) On admet la formule classique suivante : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$.

    En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta_k}{2}\right)}$.

    (d) Justifier la formule suivante : $\forall \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ \dfrac{1}{\tan^2(\theta)} = \dfrac{1}{\sin^2(\theta)} - 1$.

    En déduire la valeur : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\theta_k}{2}\right)} = 2n^2 - n$.

14. On dispose de l'encadrement : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[,\ \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$. (facile à constater sur un graphe)

    Démontrer alors que : $\dfrac{(2n-1)\pi^2}{16n} \leqslant s_n' \leqslant \dfrac{\pi^2}{8}$.

    Indication : Encadrer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\theta_k/2)^2}$ ...

15. En déduire la valeur de la limite ℓ', puis finalement celle de la limite ℓ et conclure.

$\star\star\star$ Fin du sujet $\star\star\star$