22

Espaces vectoriels de dimension finie

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel fixé.

Rappels : Une famille $(v_1, \ldots, v_p)$ de vecteurs de E est :

• Génératrice de E lorsque tout vecteur $v \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire de $(v_1, \ldots, v_p)$:

$$\boxed{\forall v \in E,\ \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ \ v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{E = Vect(v_1, \ldots, v_p)}$$

• Libre lorsque la seule combinaison linéaire de $(v_1, \ldots, v_p)$ donnant 0_E est la combinaison triviale :

$$\boxed{\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p = 0_E \implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0}$$

• Une base de E lorsqu'elle est libre et génératrice. Cela revient à avoir l'unicité de la décomposition :

$$\boxed{\forall v \in E,\ \exists!\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ \ v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p}$$

Introduction et motivation

La notion "géométrique" de dimension est assez instinctive : une droite est de dimension 1, un plan est de dimension 2, l'espace est de dimension 3... On a donc envie d'affirmer que :

• La droite réelle $\mathbb{R} = \Big\{x,\ x \in \mathbb{R}\Big\}$ est de dimension 1.

• Le plan réel $\mathbb{R}^2 = \Big\{(x, y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\Big\}$ est de dimension 2.

• L'espace réel $\mathbb{R}^3 = \Big\{(x, y, z),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\Big\}$ est de dimension 3.

On voit au passage que cette notion encore floue de dimension correspond aussi au nombre de **degrés de liberté** : le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour définir un vecteur.
(Deux coordonnées pour définir un vecteur du plan, trois coordonnées pour définir un vecteur de l'espace...)

Dans ce chapitre, nous allons donner un sens rigoureux au concept de dimension d'un espace vectoriel et énoncer les résultats importants qui découlent directement de cette notion.

1 Notion de dimension (finie)

Définition 1 (Espace vectoriel de dimension finie)

On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice composée d'un nombre fini de vecteurs. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Exemples

• $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont de dimension finie, puisqu'ils admettent les familles génératrices :

$$\mathbb{R}^n = Vect(e_1, \ldots, e_n) \ \text{ avec } \ e_i =$$

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = Vect\Big(E_{i,j},\ (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]\Big) \ \text{ avec } \ E_{i,j} =$$

$$\mathbb{R}_n[X] =$$

• $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie, car il n'admet pas de famille génératrice finie !
Si c'était le cas, n'importe quel polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrirait comme combinaison linéaire d'une famille fixée de polynôme $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$: c'est impossible pour des raisons évidentes de degré...

1.1 Existence d'une base

Pour l'instant, un espace vectoriel de dimension finie dispose seulement d'une famille génératrice finie. Montrons qu'il dispose en fait d'une base :

Théorème 1 (Théorème de la base extraite)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie avec $E \neq \{0_E\}$.
Alors :
Autrement dit : si $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille génératrice de E, on peut la transformer en une base quitte à "retirer" certains vecteurs.

Notons que l'on a déjà mis en oeuvre ce processus d'"extraction de base" dans des cas particuliers !

Exemple

On cherche une base du SEV de $\mathbb{R}^3$: $F = \Big\{(x+y+z, x-y, 2y+z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\Big\}$. On a :

$F =$

On a ainsi déterminé une famille génératrice de F.
Mais ce n'est pas une base car elle n'est pas libre :

En retirant ce vecteur, on ne change pas le "Vect", donc : $F =$

Cette famille, extraite de la première, est génératrice et libre : c'est une base de F.

Preuve du Théorème 1 :

E étant de dimension finie, on peut introduire $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille génératrice de E.
On peut toujours supposer que $\forall i \in [\![1, p]\!],\ v_i \neq 0_E$. (quitte à retirer les vecteurs nul...)

• Si $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre, alors c'est une base de E, CQFD.

Sinon, l'un des v_i (disons v_p, quitte à changer l'ordre des vecteurs) peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres : on le retire. On sait alors que $E = Vect(v_1, \ldots, v_{p-1}, v_p) = Vect(v_1, \ldots, v_{p-1})$.
La famille $(v_1, \ldots, v_{p-1})$ est donc toujours génératrice de E.

• Si $(v_1, \ldots, v_{p-1})$ est libre, alors c'est une base de E, CQFD.

Sinon, on poursuit le même raisonnement : on peut retirer un vecteur tout en conservant une famille génératrice... Ce processus a bien une fin : dans le pire des cas on retire $p-1$ vecteur et on obtient la famille (v_1) qui est automatiquement libre (puisque $v_1 \neq 0_E$).
Au final, on a bien extrait de la famille de départ une base de E. $\square$

Corollaire 1 (Existence d'une base en dimension finie)

Tout espace vectoriel E de dimension finie admet une base (composée d'un nombre fini de vecteurs).

Remarque 1

Évidemment, il n'y a pas unicité d'une base d'un espace vectoriel E lorsqu'il en existe !
Exemple : $\mathcal{B} = \Big((1,0), (0,1)\Big)$ et $\mathcal{B}' = \Big((1,1), (1,2)\Big)$ sont deux bases distinctes de $\mathbb{R}^2$.

1.2 Dimension d'un espace vectoriel

Pour aborder la notion de dimension d'un espace vectoriel, on a besoin du résultat préliminaire suivant (qui est également important en soi : on y reviendra dans la partie suivante) :

Proposition 1 (Card. d'une famille génératrice VS Card. d'une famille libre)

Soient $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille génératrice de E et $\mathcal{L} = (w_1, \dots, w_q)$ une famille libre de E.

Alors on a nécessairement c'est à dire

Preuve :

- Puisque $\mathcal{G}$ est génératrice, chaque vecteur w_j peut s'écrire comme combinaison linéaire des v_i :

pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, il existe $(a_{1,j}, \dots, a_{p,j}) \in \mathbb{R}^p$ tel que $w_j = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} v_i$.

- Puisque $\mathcal{L}$ est libre, on sait que l'équation $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j w_j = 0_E$ (d'inconnue $(\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{R}^q$)

doit admettre l'unique solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_q) = (0, \dots, 0)$. Or cette équation se ré-écrit :

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j w_j = 0_E \iff \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{p} a_{i,j} v_i \right) = 0_E \iff \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{q} a_{i,j} \lambda_j \right) v_i = 0_E \quad (\star)$$

Si jamais $p < q$, le système linéaire homogène $(S) \left\{ \begin{array}{lcl} a_{1,1}\lambda_1 + a_{1,2}\lambda_2 + \ldots + a_{1,q}\lambda_q & = & 0 \\ a_{2,1}\lambda_1 1 + a_{2,2}\lambda_2 + \ldots + a_{2,q}\lambda_q & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{p,1}\lambda_1 + a_{p,2}\lambda_2 + \ldots + a_{p,q}\lambda_q & = & 0 \end{array} \right.$

a strictement plus d'inconnues que d'équations : il admet donc forcément une infinité de solutions.
(après application du pivot de Gauss, il reste des inconnues auxiliaires...)
On peut ainsi introduire une solution non-nulle $(\lambda_1, \dots, \lambda_q) \neq (0, \dots, 0)$ de (S).

Par définition du système (S), on a alors : $\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \sum_{j=1}^{q} a_{i,j} \lambda_j = 0$.

$(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ est donc une solution non-nulle de $(\star)$, ce qui contredit le fait que la famille $\mathcal{L}$ est libre !

C'est absurde : on a donc bien $p \geqslant q$. □

En conséquence, on a le résultat suivant :

Théorème 2 (Théorème de la dimension)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, avec $E \neq \{0_E\}$.

Alors :

Preuve :

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_q)$ deux bases de E.

- Puisque $\mathcal{B}$ est une famille génératrice et $\mathcal{B}'$ est une famille libre, on a $Card(\mathcal{B}) \geqslant Card(\mathcal{B}')$.
- Puisque $\mathcal{B}'$ est une famille génératrice et $\mathcal{B}$ est une famille libre, on a $Card(\mathcal{B}') \geqslant Card(\mathcal{B})$.

Ainsi $Card(\mathcal{B}) = Card(\mathcal{B}')$, c'est à dire $p = q$. □

Définition 2 (Dimension d'un espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Ce nombre de vecteurs, commun à toutes les bases de E est appelé
et noté

Remarque 2

Par convention, l'espace vectoriel trivial $E = \{0_E\}$ est de dimension
C'est le seul espace vectoriel de dimension

Exemples

- Puisque $\mathbb{R}^2$ admet la base $\Big((0,1),(0,1)\Big)$, composée de 2 vecteurs, on a $\dim(\mathbb{R}^2) =$
  On sait du coup que toute autre base de $\mathbb{R}^2$ comporte aussi deux vecteurs !
- Puisque $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet la base $\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)$, composée de 4 vecteurs, on a $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) =$ Toute autre base $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comporte aussi 4 vecteurs.

Définition 3 (Droite/Plan vectoriel)

- Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé
- Un espace vectoriel de dimension 2 est appelé

Exemples

- $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\} =$

Le vecteur forme à lui seul une base de F, donc $\dim(F) = 1$. F est ainsi une droite vectorielle.

- $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} =$

La famille est une base de G, donc $\dim(G) = 2$. G est ainsi un plan vectoriel.

Proposition 2 (Dimension des espaces vectoriels usuels)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\mathbb{R}^n) =$
- Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) =$ En particulier, $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) =$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) =$

Preuve :

- La base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est composée de n vecteurs.
- La base canonique $\Big(E_{i,j},\ (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]\Big)$ $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est composée de $n \times p$ vecteurs.
- La base canonique $(1, X, X^2 \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est composée de $n+1$ vecteurs. $\square$

Remarque 3

Ces dimensions sont intuitives si on les interprète comme des "**degrés de liberté**". On a besoin de :

- n paramètres réels pour définir un vecteur $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
- $n \times p$ paramètres réels pour définir une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- $n+1$ paramètres réels pour un polynôme $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{R}_n[X]$.

Attention !

Cette vision de la dimension en termes de "degrés de liberté" est utile pour prévoir la dimension d'un espace vectoriel, mais ne constitue en aucun cas une preuve rigoureuse !

Si l'on ne sait pas déterminer une base, une autre manière de déteminer la dimension d'un espace vectoriel est de montrer qu'il est isomorphe à un espace dont la dimension est connue.

Rappel : Deux espaces vectoriels E et F sont dit isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme de E dans F, c'est à dire une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective.

Théorème 3 (Isomorphie et dimension)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors on a l'équivalence :

$$E \text{ et } F \text{ sont isomorphes} \quad \Longleftrightarrow$$

Preuve :

$\square$

Corollaire 2

Tout espace vectoriel E de dimension n est isomorphe à

Exemple

Puisque $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$, on sait que $\mathbb{R}_n[X]$ est isomorphe à (On l'a d'ailleurs déjà vu...)

S P O I L E R . . .

Nous reviendrons plus en détail sur les applications linéaires entre espaces vectoriels de dimension finie dans un chapitre suivant.

Exercice 1

Suites à récurrence linéaire d'ordre 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'ensemble de suites :

$$E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Construire un isomorphisme $f : E \to \mathbb{R}^2$, et en déduire $dim(E)$.

Théorème 4 (Card. d'une famille génératrice/libre VS Dimension)

Soit E un espace vectoriel de dimension n. $\quad (n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*)$.

- Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E, alors
  Contraposée : une famille composée de $n-1$ vecteurs ou moins ne peut pas être génératrice.
- Si $\mathcal{L}$ est une famille libre de E, alors
  Contraposée : une famille composée de $n+1$ vecteurs ou plus est nécessairement liée.

Preuve :

$\square$

Exemples

- La famille $\Big((1,2,3),(1,-1,1)\Big)$ ne peut pas être génératrice de $\mathbb{R}^3$,
  car
- Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\Big((1,-1,1),(1,2,3),(0,-3,2),(1,-4,3)\Big)$ est forcément liée,
  car

Attention !

La réciproque du Théorème 4 n'est pas vraie : dans une espace vectoriel E de dimension n,

- Une famille composée de n vecteurs ou plus n'est pas forcément génératrice !
- Une famille composée de n vecteur ou moins n'est pas forcément libre !

Exemples

- La famille $\mathcal{F} = \Big((1,2,3),(-1,-2,-3),(1,1,1),(-1,-1,-1)\Big)$ possède plus de 3 vecteurs,
  pourtant elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$!

$\Big($ $Vect(\mathcal{F}) = Vect\Big((1,2,3),(1,1,1)\Big)$ et la famille $\Big((1,2,3),(1,1,1)\Big)$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$! $\Big)$

• Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\Big((1,-1,1),(-1,1,-1)\Big)$ possède moins de 3 vecteurs, pourtant elle est liée !

Exercice 2

Démontrer par l'absurde que l'espace vectoriel $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.

2.2 Familles de cardinal n en dimension n

Théorème 5 (Le cas d'égalité "Card. = dim"...)

Soit E un espace vectoriel de dimension n. $\quad (n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*)$.

• Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E avec $Card(\mathcal{G}) = n$, alors

• Si $\mathcal{L}$ est une famille libre de E avec $Card(\mathcal{L}) = n$, alors

Autrement dit : si une famille $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ est composée de $n = dim(E)$ vecteurs,

Preuve :

• Soit $\mathcal{G} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E, où $n = dim(E)$.
Supposons que $\mathcal{G}$ ne soit pas une base : c'est donc que $\mathcal{G}$ n'est pas libre, elle est liée.
Ainsi l'un des vecteurs, disons e_n, peut être exprimé comme combinaison linéaire des autres.
Il en résulte que $E = Vect(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n) = Vect(e_1, \ldots, e_{n-1})$.
Ainsi, la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est toujours génératrice de E. Or c'est impossible d'après le Théorème 4, puisqu'elle contient strictement moins de n vecteurs ! Contradiction : $\mathcal{G}$ est donc une base de E.

• Soit $\mathcal{L} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E, où $n = dim(E)$.
Supposons que $\mathcal{L}$ ne soit pas une base : c'est donc que $\mathcal{L}$ n'est pas génératrice.
Ainsi il existe un vecteur $v \in E$ qui ne s'écrit pas comme combinaison linéaire de $(e_1, \ldots, e_n)$.
Il en résulte que la famille $(e_1, \ldots, e_n, v)$ est toujours libre.
Vérifions-le rapidement : si $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1} v = 0_E$, alors on a nécessairement $\lambda_{p+1} = 0$.
(car sinon on aurait $v = -\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{\lambda_{p+1}} e_i$, or v n'est pas combinaison linéaire des e_i !)
Par suite, $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p = 0_E$ et donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$. (car la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre)
Ainsi la famille $(e_1, \ldots, e_n, v)$ est libre dans E. Or c'est impossible d'après le Théorème 4, puisqu'elle contient strictement plus de n vecteurs ! Contracition : $\mathcal{L}$ est donc une base de E.

$\square$

Ainsi, si une famille $\mathcal{F}$ a déjà le "bon nombre de vecteurs" (autant que la dimension de E),
pour montrer que $\mathcal{F}$ est une base de E, il suffit de montrer qu'elle est libre **ou bien** qu'elle est génératrice.
On a alors automatiquement les deux !

Méthode : Montrer qu'une famille est une base de E

On suppose que l'on travaille dans un espace vectoriel E de dimension $n = \dim(E)$ connue.
Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ de n vecteurs est une base de E :

- On justifie que $\mathcal{F}$ est une famille libre. (C'est souvent le plus facile !). Puis :

  "$\mathcal{F}$ est une famille libre de cardinal $\underline{n = \dim(E)}$, donc c'est une base de E"

- Alternativement, on justifie que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice. Puis :

  "$\mathcal{F}$ est une famille génératrice de cardinal $\underline{n = \dim(E)}$, donc c'est une base de E"

Exercice 3

1. Montrer que $\Big((1,5),(23,-12)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\mathcal{F} = \Big(2, 2X-3, 3X^2+2X, X^3-2X^2+2\Big)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Le raisonnement employé ici pour la famille de polynômes se généralise facilement :

Proposition 3 (Bases "échelonnées" de $\mathbb{R}_n[X]$)

Soient $P_0, \ldots, P_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que :
Alors $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Preuve :

$\square$

Pour finir, on a vu (Théorème 1) que de toute famille génératrice de E, on pouvait extraire une base.
On peut aussi énoncé le procédé "inverse" (qui nous sera utile, ponctuellement, par la suite) :

Théorème 6 (Théorème de la base incomplète)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie avec $E \neq \{0_E\}$.
Alors :
Autrement dit : si $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille libre de E, il existe des vecteurs $v_{p+1}, \ldots, v_n \in E$ tels que $(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n)$ soit une base de E.

Preuve :

Notons $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$. Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille libre de E : on a donc nécessairement $p \leqslant n$.

- Si la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est génératrice, c'est une base de E, CQFD.
- Sinon, il existe un vecteur $v_{p+1} \in E$ qui ne s'écrit pas comme combinaison linéaire de $(v_1, \ldots, v_p)$.

Il en résulte que $(v_1, \ldots, v_{p+1})$ est toujours une famille libre. (cf preuve du Théorème 5)

On poursuit ainsi ce processus en ajoutant des vecteurs... Lorsque l'on a ajouté $n-p$ vecteurs, on obtient une famille libre $(v_1, \ldots, v_n)$ de cardinal $n = \dim(E)$: c'est donc une base de E ! $\square$

Application du Théorème 5 : Preuve de la méthode de l'équation caractéristique

Exercice 4

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$ et $E = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \right\}$.

Rappel : on a montré dans l'Exercice 1 que E est un espace vectoriel de dimension 2.

1. Soit $q \in \mathbb{R}^*$ et v la suite géométrique : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = q^n$.
   Montrer l'équivalence : $v \in E \iff q$ est racine de l'équation $\boxed{x^2 - ax - b = 0\ (\star)}$.

2. (a) On suppose que l'équation $(\star)$ admet deux racines distinctes q_1 et q_2.
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (q_1)^n$ et $w_n = (q_2)^n$. Montrer que (v, w) est une base de E.
   En déduire la "forme générale" de n'importe quelle suite $u \in E$.

(b) On suppose que l'équation $(\star)$ admet une racine double q.
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = q^n$ et $w_n = nq^n$. Montrer que (v, w) est une base de E.
   En déduire la "forme générale" de n'importe quelle suite $u \in E$.

2.3 Rang d'une famille finie de vecteurs

Le rang est un outil très pratique, notamment pour déterminer si une famille est libre/génératrice.

Définition 4 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit E un espace vectoriel $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille finie de vecteurs de E.
Le **rang** (noté rg) de cette famille est la dimension de l'espace vectoriel qu'elle engendre :

Exemple

Calculons le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $\Big((1,1,1),(0,1,2),(1,0,-1)\Big)$ à l'aide de la définition.
Ce rang est égal à la dimension de $F = Vect\Big((1,1,1),(0,1,2),(1,0,-1)\Big)$, or :

$F = Vect\Big((1,1,1),(0,1,2),(1,0,-1)\Big) =$

Ainsi, F admet une base composée de 2 vecteurs, donc
On conclut que

Interprétation : Le rang d'une famille $(v_1, \ldots, v_p)$ peut aussi se comprendre comme

ce qu'on peut aussi exprimer (plus "familièrement") comme

Preuve de cette interprétation :

□

Avec cette interprétation en tête, on a les résultat suivants.

Théorème 7 (Rang et famille libre / génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de E.

1. On a toujours $rg(v_1, \ldots, v_p) \leqslant$ avec égalité si et seulement si la famille est **libre** :

$$\boxed{rg(v_1, \ldots, v_p) = p \iff \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

(et donc, si $rg(v_1, \ldots, v_p) < p$,)

2. On a toujours $rg(v_1, \ldots, v_p) \leqslant$ avec égalité si et seulement si la famille est **génératrice** :

$$\boxed{rg(v_1, \ldots, v_p) = \dim(E) \iff \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

(et donc, si $rg(v_1, \ldots, v_p) < \dim(E)$,)

Preuve :

$\boxed{1}$ $r = rg(v_1, \dots, v_p)$ est le cardinal de la plus grande famille libre que l'on peut extraire de $(v_1, \dots, v_p)$.
On a donc forcément $r \leqslant p$, et le cas $r = p$ est le cas où la famille "complète" $(v_1, \dots, v_p)$ est libre !

$\boxed{2}$ $r = rg(v_1, \dots, v_p)$ est le cardinal de la plus grande famille libre que l'on peut extraire de $(v_1, \dots, v_p)$.
Disons que cette famille extraite est $(v_1, \dots, v_r)$ (quitte à changer l'ordre des vecteurs).
Comme $(v_1, \dots, v_r)$ est une famille libre de vecteurs de E, on a forcément $r \leqslant \dim(E)$ (Théorème 4).

- Si $r = \dim(E)$, alors $(v_1, \dots, v_r)$ est une famille libre de cardinal $r = \dim(E)$, donc c'est une base de E. En particulier, $(v_1, \dots, v_r)$ est une famille génératrice de E, et donc $(v_1, \dots, v_p)$ également.
- Si $r < \dim(E)$ alors par définition du rang, $\dim(Vect(v_1, \dots, v_p)) < \dim(E)$.
On ne peut donc pas avoir $Vect(v_1, \dots, v_p) = E$: la famille $(v_1, \dots, v_p)$ n'est pas génératrice de E.□

Le rang est ainsi un nouvel outil pratique pour déterminer si une famille est libre / génératrice ou non !
Le calcul du rang d'une famille de vecteurs peut par ailleurs se faire de façon assez "automatique".

Rappel : Un espace vectoriel engendré $Vect(v_1, \dots, v_p)$ reste inchangé par les opérations suivantes :
(a) Changer l'ordre des vecteurs de la famille
(b) Multiplier un vecteur par une constante non nulle.
(c) Additionner à un vecteur un autre vecteur de la famille, multiplié par une constante.
(d) Retirer de la famille un vecteur qui est combinaison linéaire des autres (en particulier le vecteur nul).

Puisque, par définition, $rg(v_1, \dots, v_p) = \dim(Vect(v_1, \dots, v_p))$, le rang d'une famille de vecteur reste également inchangé par les "opérations élémentaires" (a), (b), (c), (d) !

Méthode : Calcul pratique du rang d'une famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_p)$

Pour calculer $rg(v_1, \dots, v_p)$, on applique des opérations élémentaires pour "simplifier" petit à petit la famille de vecteurs. Cette suite d'opérations s'apparente souvent à un "pivot de Gauss".

- Dès qu'on repère un vecteur qui est combinaison linéaire des autres, on peut le retirer.
(En particulier, on peut toujours retirer le vecteur nul).
- Lorsque l'on parvient à une famille de vecteurs qui est "manifestement" **libre**,
son rang est égal au nombre de vecteurs de la famille. (Théorème 7, $\boxed{1}$).

Exercice 5

1. Dans $\mathbb{R}^3$, calculer le rang de la famille $\mathcal{F} = \Big((1,2,3),(1,1,1),(1,3,5),(1,0,1)\Big)$.
Est-elle libre ? Génératrice de $\mathbb{R}^3$?
2. Dans $\mathbb{R}^4$, calculer le rang de la famille $\mathcal{G} = \Big((1,1,1,1),(0,1,2,1),(1,-1,1,1),(1,2,1,2)\Big)$.
Est-elle libre ? Génératrice de $\mathbb{R}^4$?

3 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

Proposition 4 (Dimension d'un S.E.V)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et :

Preuve (que l'on peut admettre) :

D'abord, si $F = \{0_E\}$, alors F est de dimension finie et $\dim(F) = 0 \leqslant n = \dim(E)$.
Supposons donc $F \neq \{0_E\}$.
On construit une base de F en adaptant la méthode du Théorème de la base incomplète (Thm 6) :
Soit $v_1 \in F$ avec $v_1 \neq 0_E$.

- Si la famille (v_1) est génératrice de F, alors (v_1) est une base de F.
- Sinon, on peut trouver un autre vecteur $v_2 \in F$ qui n'est pas combinaison linéaire de v_1.
  Il en résulte que la famille (v_1, v_2) est libre.

On reprend alors le même raisonnement avec la famille (v_1, v_2) :

- Si la famille (v_1, v_2) est génératrice de F, alors c'est une base de F.
- Sinon, on peut trouver un vecteur $v_3 \in F$ qui n'est pas combinaison linéaire de (v_1, v_2).
  Il en résulte que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

On reprend alors le même raisonnement avec la famille (v_1, v_2, v_3)...

Ce processus finit forcément par s'arrêter à un moment, puisqu'on ne peut pas construire de famille libre de vecteurs de E ayant plus de $\dim(E)$ vecteurs !

Au final, on a construit une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p)$ de F : F est donc de dimension finie p.
Comme $\mathcal{B}$ est une famille libre de E, on a $p \leqslant \dim(E)$, c'est à dire $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. $\square$

Théorème 8 (S.E.V de dimension totale)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim(F) = \dim(E)$. Alors

Preuve :

$\square$

Exemples

- Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont :
  - S.E.V de dimension 0 :
  - S.E.V de dimension 1 :
  - S.E.V de dimension 2 :

- Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont :
  - S.E.V de dimension 0 :
  - S.E.V de dimension 1 :
  - S.E.V de dimension 2 :
  - S.E.V de dimension 3 :

Un point de vocabulaire (a priori hors programme, mais d'emploi courant dans des exercices).

Définition 5 (Hyperplan)

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$.
Tout sous-espace vectoriel de E de dimension est appelé

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, les hyperplans sont les droites vectorielles.
- Dans $\mathbb{R}^3$, les hyperplans sont les plans vectoriels.

Illustration : dimensions de quelques sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(À savoir retrouver rapidement)

- On a vu que l'espace vectoriel des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension $\boxed{\dim\Big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\Big) = n^2}$

En effet : la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est donnée par : $\Big(E_{i,j},\ (i,j) \in [\![1,n]\!]\Big)$.

Cette base est constituée de $n \times n = n^2$ vecteurs.

Exemple

Toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ s'écrit (unique décomposition dans la base) :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aE_{1,1} + bE_{1,2} + cE_{1,3} + dE_{2,1} + eE_{2,2} + fE_{2,3} + gE_{3,1} + hE_{3,2} + iE_{3,3}.$$

- Le sous-espace vectoriel des **matrices diagonales** $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est de dimension $\boxed{\dim\Big(\mathcal{D}_n(\mathbb{R})\Big) = \quad}$

En effet : une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est donnée par :

Cette base est constituée de

Exemple

Toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ s'écrit (unique décomposition dans la base) :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} =$$

- Le sous-espace vectoriel des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est de dimension $\boxed{\dim\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\right) = \qquad\qquad}$

En effet : une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est donnée par :

Cette base est constituée de

Exemple

Toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ s'écrit (unique décomposition dans la base) :

$$\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} =$$

- Le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est de dimension $\boxed{\dim\left(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right) = \qquad\qquad}$

En effet : une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est donnée par :

Cette base est constituée de

Exemple

Toute matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ s'écrit (unique décomposition dans la base) :

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} =$$

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Connaître la définition de la dimension d'un espace vectoriel.
- Connaître la dimension des espace vectoriels usuels.
- Déterminer la dimension d'un espace en déterminant une base.
- Savoir lier le cardinal d'une famille libre/génératrice à la dimension.
- Montrer qu'une famille ayant "le bon nombre de vecteurs" est une base. (Théorème 5 et méthode associée)

Pour suivre

- Savoir et exploiter le fait que deux espaces isomorphes ont la même dimension.
- Calculer le rang d'une famille de vecteurs (et en déduire des choses).
- Savoir extraire une base d'une famille génératrice.

Pour les ambitieux

- Savoir compléter une famille libre en une base (de manière pratique).
- Retrouver facilement la dimension des SEV classiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Bien comprendre toutes les preuves du cours.