

Devoir Sur Table n°3 – Durée : 4h

L'utilisation de la calculatrice, des feuilles/notes de cours ou d'exercices est interdite.

La présentation, la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation de la copie.

Les résultats non encadrés/soulignés/surlignés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1 : Etude d'une suite implicite

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \frac{x}{x-1}(x^n - 1)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
 - (a) Donner le domaine de définition de f_n et justifier qu'elle y est continue.
 - (b) Montrer que f_n est prolongeable par continuité sur \mathbb{R} . On continuera de noter f_n ce prolongement. Préciser ainsi la nouvelle définition de la fonction f_n sur \mathbb{R} tout entier.
2. Définir une fonction Python nommée `f` qui prend en entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $x \in \mathbb{R}$ et renvoie la valeur de $f_n(x)$. On distinguera les cas selon la valeur de x .
3. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$.
 - (b) Proposer alors une nouvelle façon de définir la fonction `f` en Python (cf. question 2.)
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution dans $[0, 1]$, que l'on notera u_n .
 - (b) On donne le programme Python suivant (la fonction `f` ayant été définie précédemment) :

```
def suite(n) :
    x = 0
    while f(n,x) < 1 :
        x += 0.001
    return x
```

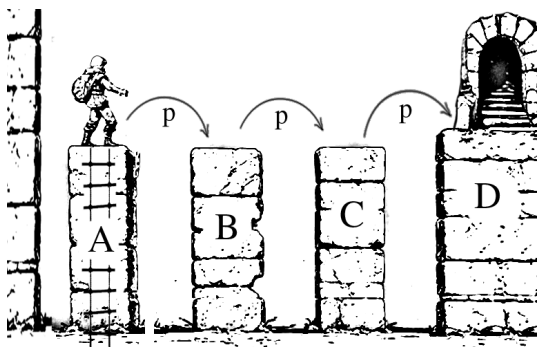
Expliquer ce programme. Quel est le lien entre la valeur renvoyée par la fonction `suite` et u_n ?

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(u_n) \geq 1$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
6. (a) Déterminer la valeur de u_2 et vérifier que $0 \leq u_2 < 1$.
 - (b) Déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^n = 0$.
7. Montrer finalement que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une valeur que l'on déterminera.

Problème : Escape the dungeon !

Un aventurier cherche à s'échapper du donjon dans lequel on l'a enfermé.

À l'instant initial $n = 0$, il se situe sur la plateforme A, et doit effectuer 3 sauts consécutifs pour atteindre la sortie sur la plateforme D. On fixe $p \in]0, 1[$. Chaque saut est indépendant et a une probabilité p de réussite :



- Si un saut est réussi, l'aventurier rejoint la prochaine plateforme à l'instant suivant.
- Si un saut est raté, l'aventurier tombe au sol et doit remonter à l'échelle. À l'instant suivant, il revient ainsi sur la première plateforme A et doit tout recommencer.
- Si l'aventurier atteint la plateforme D à l'instant n , il rejoint la sortie du donjon. Par convention, on décide alors qu'il se situe en D pour tous les instants suivants.

Partie I : Relations de récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement : "L'aventurier se situe sur la plateforme A à l'instant n ".

On introduit, de même, les évènements B_n , C_n et D_n pour les plateformes B, C et D.

- (a) Donner les probabilités $P(A_n), P(B_n), P(C_n), P(D_n)$ aux instants $n = 0, n = 1$ et $n = 2$.
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, que vaut $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n)$? Justifier.
- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $P(A_{n+1}) = (1 - p)P(A_n) + (1 - p)P(B_n) + (1 - p)P(C_n)$.
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $P(B_{n+1}) = p \times P(A_n)$ et exprimer similairement les probabilités $P(C_{n+1})$ et $P(D_{n+1})$ en fonction de $P(A_n), P(B_n), P(C_n), P(D_n)$ et p .
(c) En déduire la relation de récurrence triple suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(A_{n+3}) = (1 - p)(P(A_{n+2}) + pP(A_{n+1}) + p^2P(A_n)).$$

- Compléter la fonction Python suivante pour que, à la donnée de $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, elle calcule et renvoie la valeur de la probabilité $P(A_n)$. **On copiera le programme en entier.**

```
def proba(p,n) :  
    u = 1 ; v = ... ; w = ...  
    for k in range(...) :  
        x = ...  
        u = v  
        v = w  
        w = x  
    return ...
```

Partie II : Recherche de racine et conséquences

On rappelle que $p \in]0, 1[$ est une valeur fixée.

On cherche à montrer que l'équation (E) : $x^3 = (1 - p)(x^2 + px + p^2)$ admet une unique solution dans \mathbb{R} .

- Justifier que (E) admet au moins une solution dans $]0, 1[$.
- Pour quelle valeur de $p \in]0, 1[$ le réel $x = p$ est-il une solution de l'équation (E) ?
- Montrer que pour tout réel $x \neq p$, l'égalité (E) est équivalente à (E') : $x^3(1 - x) = p^3(1 - p)$.
Indication : Multiplier chaque côté de (E) par $(x - p)$.
- (a) Justifier que toutes les solutions de (E') sont dans $]0, 1[$.
(b) Dresser le tableau de variation complet de la fonction $\varphi : x \mapsto x^3(1 - x)$ sur $]0, 1[$. Déduire que :
 - Si $p = \frac{3}{4}$, l'équation (E') admet p pour unique solution.
 - Si $p \neq \frac{3}{4}$, l'équation (E') admet exactement deux solutions : p , et une autre valeur dans $]0, 1[$.
- En distinguant les cas $p = \frac{3}{4}$ et $p \neq \frac{3}{4}$, conclure que (E) admet toujours une unique solution dans \mathbb{R} .

Dans toute la suite, on note $\alpha \in]0, 1[$ l'unique solution de l'équation (E).

9. (a) Lorsque $p \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$ sont des valeurs spécifiées par l'utilisateur, on souhaite calculer à l'aide de Python une valeur approchée de α , solution de (E), à ε près. Compléter, à cette fin, le script suivant. On pourra, au préalable, définir une certaine fonction **f**, qui sera exploitée dans la fonction **dichotomie**. **On copiera le programme en entier.**

```
def dichotomie(p,eps) :
    a = ... ; b = ...
    while ..... :
        c = (a+b)/2
        if ..... :
            a = ....
        else :
            b = ....
    return a
```

- (b) Dans le cas où $p = \frac{1}{2}$ (seulement dans cette question) l'appel de **dichotomie(0.5,0.001)** renvoie la valeur : 0.91894. Quel encadrement en déduit-on pour α ?

10. On définit la constante $C = \max\left(1, \frac{p}{\alpha}, \frac{1-p}{\alpha^2}\right)$ (c'est-à-dire la plus grande de ces 3 valeurs).

En raisonnant par récurrence triple, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(A_n) \leq C\alpha^n$.

11. (a) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n)$.
 (b) Etablir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(D_n) = 1$. Comment peut-on interpréter ce résultat pour notre aventurier ?

On note Z l'évènement " L'aventurier finit (à un moment) par s'échapper du donjon ".

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comparer les évènements D_n et Z (au sens de l'inclusion). En déduire que $P(Z) = 1$.
On dit, dans ce genre de cas, que l'aventurier finira "presque-sûrement" par s'échapper du donjon.

Partie III : Nombre de tentatives

Pour finir, on segmente le parcours aléatoire de l'aventurier en différentes "tentatives" :

- L'aventurier démarre en A, et tente d'effectuer 3 sauts pour atteindre D : c'est la première tentative.
- Si l'aventurier tombe, il remonte sur la plateforme A et recommence : c'est une nouvelle tentative.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note T_k l'évènement : "L'aventurier atteint la sortie au bout de k tentatives exactement".

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n l'évènement : "L'aventurier atteint la sortie en n tentatives ou moins".

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement S_n en fonction des évènements T_k .

14. A quelle situation correspond l'évènement T_1 ? Justifier que $P(T_1) = p^3$.

15. (a) Pour tout $k \geq 2$, justifier que :

$$\bullet T_k \subset \bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{T_i}, \quad \bullet P_{\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}}(T_k) = p^3, \quad \bullet P_{\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}}(\overline{T_k}) = 1 - p^3.$$

- (b) En déduire l'expression de $P\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{T_i}\right)$ en fonction de $k \in \mathbb{N}^*$ et de p .

- (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n) = 1 - (1 - p^3)^n$.

16. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P(T_k) = (1 - p^3)^{k-1} p^3$.

- (b) En sommant ces probabilités, retrouver d'une autre façon la valeur de $P(S_n)$ établie en 15.(c).

17. (a) Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n)$? Retrouver alors $P(Z) = 1$, où Z est l'évènement introduit en partie II.

- (b) Généralisation : Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. Au lieu de 3 sauts, on suppose que l'aventurier doit effectuer N sauts consécutifs pour rejoindre la plateforme D (la probabilité pour chaque saut étant toujours p).

Donner, en justifiant brièvement, la probabilité $P(S_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Déduire encore une fois que l'aventurier finira presque-sûrement par s'échapper du donjon.