12

Systèmes linéaires

1 Définitions générales

Définition 1 (Système linéaire)

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$
On appelle système linéaire de n équations à p inconnues tout système (S) de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

- $x_1, \ldots, x_p$ sont les inconnues de (S).
- Les $a_{i,j}$ et les b_i sont des nombres réels connus :

- Les $a_{i,j}$ sont les coefficients de (S).
- $(b_1, \ldots, b_n)$ est le second membre de (S).

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note L_i la i-ème ligne du système (S), c'est à dire l'équation :

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,p}x_p = b_i \quad (L_i)$$

Exemples

Les systèmes suivants sont-ils des systèmes linéaires ?

$$(S)\left\{\begin{array}{ll} 2x - y + 6z & = 1 \\ x + \frac{1}{2}y + z & = -3 \end{array}\right. \qquad (S')\left\{\begin{array}{ll} x^2 - y + 6z & = 1 \\ x + \frac{1}{2}y + z & = -3 \end{array}\right. \qquad (S'')\left\{\begin{array}{ll} 2x - y + 6z & = 1 \\ x + yz & = -3 \end{array}\right.$$

Oui — Non — Non

Définition 2 (Solutions d'un système linéaire)

- Une **solution** du système (S) est un p-uplet $X = (x_1, \ldots, x_p)$ qui vérifie les n équations de (S).
- Déterminer l'**ensemble des solutions** de (S), c'est donc déterminer l'ensemble des p-uplets X satisfaisant les n équations. (On verra qu'un système linéaire admet 0, 1 ou une infinité de solutions).
- Deux systèmes sont dits **équivalents** lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Vocabulaire lié aux solutions d'un système linéaire :

- Un système est dit compatible lorsqu'il admet au moins une solution.
- Un système est dit incompatible lorsqu'il n'admet aucune solution.
- On dit que (S) est un système de Cramer lorsque :
  - $\boxed{1}$ $n = p$ (autant d'équations que d'inconnues : le système est carré)
  - $\boxed{2}$ Il admet une unique solution.

Remarque 1

On traduit bien-sûr l'équivalence de deux systèmes linéaires avec le symbole " $\Longleftrightarrow$ " :

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x + y & = 1 \\ 3x + 3y & = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x + y & = 1 \\ x + y & = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & = 1 \\ x + y & = 0 \end{array}\right.$$

On peut vérifier ici que ces 3 systèmes ont le même ensemble de solutions : $\{(1, -1)\}$ (unique solution).
On verra dans la suite les "opérations" autorisées sur un système pour conserver un système équivalent.

Exercice 1

Déterminer (par substitution) l'ensemble des solutions des systèmes suivants, puis les caractériser :

$$(S^1)\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=2 \end{array}\right. \qquad (S^2)\left\{\begin{array}{r} 2x-y=1 \\ -2x+y=-1 \end{array}\right. \qquad (S^3)\left\{\begin{array}{r} x+3y=0 \\ 2x+6y=1 \end{array}\right. \qquad (S^4)\left\{\begin{array}{rl} x+y+z&=0 \\ 2x-y&=1 \\ y+z&=1 \end{array}\right.$$

$$(S^1)\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x & =1-y \\ x-y=2 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x & =1-y \\ (1-y)-y=2 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x & =1-y \\ -2y=1 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=1-y \\ y=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ensemble des solutions : $\{(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})\}$: (S^1) est de Cramer.

$$(S^2)\left\{\begin{array}{r} 2x-y=1 \\ -2x+y=-1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} y & =2x-1 \\ -2x+y=-1 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} y & =2x-1 \\ -2x+(2x-1)=-1 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} y=2x-1 \\ -1=-1 \end{array}\right.$$

$$\iff y=2x-1$$

Il y a une infinité de solutions : tous les couples $X=(x,y)$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y=2x-1$.

Ensemble des solutions : $\{(x,2x-1),\ x\in\mathbb{R}\}$ ("forme explicite" !)

En particulier le système est compatible.

$$(S^3)\left\{\begin{array}{r} x+3y=0 \\ 2x+6y=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x & =-3y \\ 2x+6y=1 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x & =-3y \\ 2\times(-3y)+6y=1 & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-3y \\ 0=1 \end{array}\right. \quad \text{Impossible !}$$

Ensemble des solutions : $\emptyset$. Le système est incompatible.

$$(S^4)\left\{\begin{array}{rl} x+y+z&=0 \\ 2x-y&=1 \\ y+z&=1 \end{array}\right. \iff (S^4)\left\{\begin{array}{ll} x+y+z=0 & \\ y & =2x-1 \\ z & =1-y \end{array}\right. \iff (S^4)\left\{\begin{array}{ll} x+y+z=0 & \\ y & =2x-1 \\ z & =1-(2x-1) \end{array}\right.$$

$$\iff (S^4)\left\{\begin{array}{ll} x+y+z=0 & \\ y & =2x-1 \\ z & =-2x+2 \end{array}\right. \iff (S^4)\left\{\begin{array}{r} x+(2x-1)+(-2x+2)=0 \\ y=2x-1 \\ z=-2x+2 \end{array}\right.$$

$$\iff (S^4)\left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=2x-1 \\ z=-2x+2 \end{array}\right. \iff (S^4)\left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-3 \\ z=4 \end{array}\right.$$

Ensemble des solutions : {(-1,-3,4)} : (S^4) est de Cramer.

Au delà de 2 ou 3 équations/inconnues, la résolution par substitution devient très lourde à mettre en place ! Pour résoudre un système linéaire général, on essaiera plutôt, à l'aide d'**opérations sur les lignes**, de le ramener à un **système échelonné**, dont la résolution est aisée.

Avant cela, ajoutons un dernier point de vocabulaire :

Définition 3 (Système homogène)

- On dit qu'un système linéaire (S) est **homogène** lorsque que son second membre est nul, c'est à dire : $(b_1,\dots,b_n)=(0,\dots,0)$.
- Si (S) est un système non-homogène, on note (S_h) le **système homogène associé à** (S) : c'est le système obtenu à partir de (S) en remplaçant le second membre par $(0,\dots,0)$.

Exemples

- $(H)\begin{cases} x-y &= 0 \\ 2x-y &= 0 \\ 2x-2y &= 0 \end{cases}$ est homogène.
- $(S)\begin{cases} 2x-y+6z=2 \\ x+2y+z=-1 \end{cases}$ n'est pas homogène. Système homogène associé : $(S_h)\begin{cases} 2x-y+6z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$

Remarque 2

Un système homogène $(H)\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\ldots+a_{1,p}x_p &= 0 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\ldots+a_{2,p}x_p &= 0 \\ \vdots & \\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\ldots+a_{n,p}x_p &= 0 \end{cases}$ est **toujours compatible** :

$$\boxed{\text{Il admet toujours au moins la solution } X=(0,\ldots,0)}$$

2 Systèmes échelonnés

Définition 4 (Système échelonné)

On dit qu'un système linéaire (S) de n équations à p inconnues est **échelonné** lorsque :

Le nombre de coefficients nuls au début de chaque équation
augmente strictement d'une ligne à l'autre,
(pour finir éventuellement avec des équations dont tous les coefficients sont nuls.)

Exemples

Les systèmes suivants sont échelonnés :

$$\begin{cases} x+y-z+t &= 1 \\ 2y+2z-t &= -1 \\ 3z+t &= 0 \\ t &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z+t &= 1 \\ 2y+2z-t &= -1 \\ 3z+t &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2y+2z &= -1 \\ 3z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-z+t &= 1 \\ 2z-t &= -1 \\ t &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z+t &= 1 \\ 2y+2z-t &= -1 \\ t &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2y+2z &= -1 \\ 0 &= 1 \\ 0 &= 2 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

Les systèmes suivants ne sont pas échelonnés :

$$\begin{cases} x+y-z+t &= 1 \\ -x+2y+2z-t &= -1 \\ 3z+t &= 0 \\ y+z-t &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z+t &= 1 \\ x-2y+z-t &= 0 \\ 3z+t &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2y+2z &= -1 \\ y-z &= 0 \\ z &= 1 \end{cases}$$

Nous allons présenter une méthode de résolution systématique de n'importe quel système échelonné.

2.1 Système triangulaire avec coefficients diagonaux non-nuls

Méthode : Résolution d'un système triangulaire

Soit (S) un système triangulaire avec des coefficients diagonaux non-nuls,
c'est à dire un système avec autant d'équations que d'inconnues et de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &=& b_1 \\ a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &=& b_2 \\ \ddots \qquad \vdots \quad &\vdots& \\ a_{n,n}x_n &=& b_n \end{array}\right. \qquad \text{avec } a_{1,1} \neq 0, \ldots, a_{n,n} \neq 0.$$

On résout facilement par **substitutions successives "de bas en haut"**,
de la ligne L_n à la ligne L_1 : on trouve la valeur de x_n puis de x_{n-1} puis ... puis de x_1.

Exercice 2

Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z &=& 1 \\ y+z &=& 0 \\ -3z &=& 2 \end{array}\right.$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z &=& 1 \\ y+z &=& 0 \\ -3z &=& 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z &=& 1 \\ y &=& -z \\ z &=& -\frac{2}{3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x &=& 1-y-z \\ y &=& \frac{2}{3} \\ z &=& -\frac{2}{3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x &=& 1 \\ y &=& \frac{2}{3} \\ z &=& -\frac{2}{3} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{2} \\ y &=& \frac{2}{3} \\ z &=& -\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Le système admet une unique solution. Comme il est carré, il est donc de Cramer.

Corollaire 1 (Nombre de solutions d'un tel système)

Soit (S) un système triangulaire, de n équations à n inconnues, avec $\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} \neq 0$.

Alors (S) admet une unique solution : c'est un système de Cramer.

2.2 Systèmes échelonnés non-triangulaires, sans équation auxiliaire

Méthode : Résolution avec des "inconnues auxiliaires"

Soit (S) un système échelonné de n équations à p inconnues,
qui ne soit pas un système triangulaire avec coeffs diagonaux non-nuls et sans équation auxiliaire
(c'est à dire pas d'équations de la forme "$0 = \ldots$" à la fin)

(S) peut être par exemple de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + \ldots + a_{1,p}x_p &=& b_1 \\ a_{2,2}x_2 + \ldots a_{2,n}x_n + \ldots + a_{2,p}x_p &=& b_2 \\ \ddots \qquad\qquad \vdots \quad &\vdots& \\ a_{n,n}x_n + \ldots + a_{n,p}x_p &=& b_n \end{array}\right. \qquad \text{(avec des coeff. } a_{i,j} \text{ éventuellement nuls...)}$$

Pour résoudre ce système, on procède à nouveau par **substitutions successives "de bas en haut"**.
Au cours de la résolution, on est amenés à passer une ou plusieurs inconnues dans le membre de droite pour les traiter comme des constantes : on dit que ce sont des inconnues auxiliaires.

On décrit alors l'ensemble des solutions de (S) en exprimant certaines inconnues en fonctions de ces inconnues auxiliaires, dont les valeurs peuvent être choisies arbitrairement.

Exercice 3

Déterminer l'ensemble E des solutions du système : $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 1 - z \\ y = \ -z \end{cases}$ On traite z comme une constante : on résout ce système triangulaire d'inconnues x et y :

$$\iff \begin{cases} 2x = 1 - z + y \\ y = \ -z \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 1 - 2z \\ y = \ -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} - z \\ y = \ -z \end{cases}$$

Il y a une infinité de solutions : tous les triplets $X = (x, y, z)$ avec $z \in \mathbb{R}$ et $x = \frac{1}{2} - z$, $y = -z$.

Ensemble des solutions : $E = \left\{ \left(\dfrac{1}{2} - z, -z, z \right) ,\ z \in \mathbb{R} \right\}$.

Remarque 3

Quitte à changer l'ordre des inconnues, on peut choisir d'autres inconnues auxiliaires !
L'ensemble des solutions du système ne dépend pas du choix des inconnues auxiliaires
(en revanche chaque choix conduit à une "écriture" différente de cet ensemble).

Exercice 4

Déterminer l'ensemble E des solutions de $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ en utilisant y comme variable auxiliaire.

$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + z = 1 + y \\ z = \ -y \end{cases}$ On traite y comme une constante, on résout ce système triangulaire d'inconnues x et z :

$$\iff \begin{cases} 2x = 1 + y - z \\ z = \ -y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 1 + 2y \\ z = \ -y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} + y \\ z = \ -y \end{cases}$$

Il y a une infinité de solutions : tous les triplets $X = (x, y, z)$ avec $y \in \mathbb{R}$ et $x = \frac{1}{2} + y$, $z = -y$.

Ensemble des solutions : $E = \left\{ \left(\dfrac{1}{2} + y, y, -y \right) ,\ y \in \mathbb{R} \right\}$.

Notons qu'il s'agit bien du même ensemble que $E = \left\{ \left(\dfrac{1}{2} - z, -z, z \right) ,\ z \in \mathbb{R} \right\}$. En effet :

- Pour tout $z \in \mathbb{R}$, le triplet $\left(\frac{1}{2} - z, -z, z \right)$ peut s'écrire sous la forme $\left(\frac{1}{2} + y, y, -y \right)$ (avec $y = -z$).
- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, le triplet $\left(\frac{1}{2} + yz, y, -y \right)$ peut s'écrire sous la forme $\left(\frac{1}{2} - z, -z, z \right)$ (avec $z = -y$).

Exercice 5

Résoudre les systèmes : $\begin{cases} 2x - y + z + t = 1 \\ z - t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ z + 2t = 0 \end{cases}$

$$\left\{\begin{array}{r}2x-y+z+t=1\\ z-t=0\\ t=1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r}2x-y+1+1=1\\ z=1\\ t=1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl}y=&2x+1\\ z=&1\\ t=&1\end{array}\right. \quad \text{(avec } x \text{ variable auxiliaire)}$$

Ensemble des solutions : $\{(x,2x+1,1,1),\ x\in\mathbb{R}\}$.

$$\left\{\begin{array}{r}x+y+z-t=0\\ z+2t=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl}x+y-2t-t=&0\\ z=&-2t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl}x=&-y+3t\\ z=&-2t\end{array}\right. \quad \text{(avec } y,\ t \text{ variables auxiliaires)}$$

Ensemble des solutions : $\{(-y+3t,y,-2t,t),\ y\in\mathbb{R},t\in\mathbb{R}\}$

Corollaire 2 (Nombre de solutions d'un tel système)

Soit (S) un système échelonné qui ne soit pas un système triangulaire avec coefficients diagonaux non-nuls, et sans équation auxiliaire. Alors (S) admet une infinité de solutions.

2.3 Systèmes échelonnés avec des équations auxiliaires

Méthode : Traitement des "équations auxiliaires"

Soit (S) un système échelonné de n équations à p inconnues, <u>comportant des équations auxiliaires</u> (c'est à dire une ou plusieurs équations de la forme "$0=\ldots$" à la fin)
(S) peut être par exemple de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl}a_{1,1}x_1+\ldots+a_{1,r}x_r+\ldots+a_{1,p}x_p&=&b_1\\ \ddots\qquad\qquad\vdots&&\vdots\\ a_{r,r}x_r+\ldots+a_{2,p}x_p&=&b_r\\ 0&=&b_{r+1}\\ \vdots&&\vdots\\ 0&=&b_n\end{array}\right. \quad \text{(avec des coeff. } a_{i,j} \text{ éventuellement nuls...)}$$

- Si $b_{r+1}=\ldots=b_n=0$, les $n-r$ dernières équations sont automatiquement vérifiées !
On peut alors les retirer : on se ramène à la résolution d'un système échelonné vue précédemment.

- Si l'un des b_i pour $i\in[\![r+1,n]\!]$ est non nul, le système est incompatible
(i.e il n'admet pas de solution).

Exemples

- Le système $\left\{\begin{array}{rl}x+y-z&=1\\ 2y+2z&=-1\\ 3z&=0\\ 0&=0\\ 0&=-1\end{array}\right.$ est incompatible !

- Le système $\left\{\begin{array}{rl}x+y-z&=1\\ 2y+2z&=-1\\ 3z&=0\\ 0&=0\\ 0&=0\end{array}\right.$ équivaut à $\left\{\begin{array}{rl}x+y-z&=1\\ 2y+2z&=-1\\ 3z&=0\end{array}\right.$ qui admet une unique solution.

- Le système $\left\{\begin{array}{rl}x+y-z&=1\\ 2y+2z&=2\\ 0&=0\\ 0&=0\end{array}\right.$ équivaut à $\left\{\begin{array}{rl}x+y-z&=1\\ 2y+2z&=2\end{array}\right.$ qui admet une infinité de solutions.

Bilan pour les systèmes échelonnés :

Proposition 1 (Nombre de solutions d'un système échelonné)

- Un système échelonné admet toujours 0, 1, ou une infinité de solutions.
- Un système échelonné de n équations à p inconnues admet une unique solution si et seulement si c'est un système triangulaire avec coefficients diagonaux non-nuls, avec éventuellement des équations auxiliaires compatibles.

Autrement dit lorsqu'il est de la forme : $\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \ddots \quad \vdots & & \vdots \\ a_{p,p}x_p & = & b_p \\ 0 & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$ avec $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$.

- En particulier, pour un système carré (cas où $n = p$) :

Un système échelonné carré est de Cramer si et seulement si c'est un système triangulaire avec diagonale non-nulle.

3 Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss va nous permettre de ramener n'importe quel système linéaire à un système échelonné, que l'on sait systématiquement résoudre avec les méthodes vues précédemment !

3.1 Opérations élémentaires sur les lignes

Définition 5 (Opérations élémentaires)

Notons $L_1, \ldots, L_n$ les lignes d'un système linéaire (S).
On appelle **opérations élémentaires sur les lignes** les trois opérations suivantes :

$\boxed{1}$ Échanger les lignes i et j (pour $i \neq$j), notée $L_i \leftrightarrow L_j$

$\boxed{2}$ Multiplier la ligne i par un réel $a \neq 0$, notée $L_i \leftarrow aL_i$

$\boxed{3}$ Ajouter à la ligne i la ligne j (pour $j \neq i$) multipliée par un réel b, notée $L_i \leftarrow L_i + bL_j$

Proposition 2 (Opérations élémentaires et équivalences)

Soit (S) un système linéaire. Tout système (S') obtenu à partir de (S) en effectuant une succession d'opérations élémentaires sur les lignes est équivalent à (S).

Exemple

$$\left\{\begin{array}{rl} y + z = 3 & (L_1) \\ 2x + 4y + 6z = 16 & (L_2) \\ x - y + z = 0 & (L_3) \end{array}\right. \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 16 \\ y + z = 3 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 8 \\ y + z = 3 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ 3y + 2z = 8 \\ y + z = 3 \end{array}\right.$$

Remarques 4

- Il est clair qu'il s'agit d'une succession d'équivalences, puisque l'on peut toujours effectuer les opérations "inverses" pour "remonter les calculs" :

- Si on passe de (S) à (S') en effectuant $L_i \leftrightarrow L_j$,
on peut revenir de (S') à (S) en effectuant $L_i \leftrightarrow L_j$.

- Si on passe de (S) à (S') en effectuant $L_i \leftarrow aL_i$,
on peut revenir de (S') à (S) en effectuant $L_i \leftarrow \frac{1}{a}L_i$.

- Si on passe de (S) à (S') en effectuant $L_i \leftarrow L_i + bL_j$,
on peut revenir de (S') à (S) en effectuant $L_i \leftarrow L_i - bL_j$.

- En regroupant les deux dernières opérations, on peut également autoriser l'opération élémentaire :

$$\boxed{\boxed{4} \quad L_i \leftarrow aL_i + bL_j \qquad \text{pour } a \neq 0 \text{ et } b \in \mathbb{R}}$$

Exemple

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y + 2z = 8 \\ y + z = 3 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y + 2z = 8 \\ z = 1 \end{cases}$$

3.2 Algorithme du pivot de Gauss

Méthode : Pivot de Gauss (ramener un système linéaire à un système échelonné)

$\boxed{1}$ Si l'inconnue x_1 n'est pas présente sur L_1, on permute la ligne L_1 avec une autre ligne afin que x_1 apparaisse bien sur la première ligne.

On obtient un système du type $(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$ avec $\underline{a_{1,1} \neq 0.}$

$\boxed{2}$ On élimine l'inconnue x_1 dans les lignes $L_2, \ldots, L_n$, à l'aide de la ligne L_1.

Pour cela on effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}}L_1, \quad$ etc...

Le réel $a_{1,1} \neq 0$ sert ainsi de **pivot** pour éliminer x_1 dans les autres lignes.

On obtient alors un système de la forme $(S') \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \qquad\quad a'_{2,2}x_2 + \ldots + a'_{2,p}x_p = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad\quad a'_{n,2}x_2 + \ldots + a'_{n,p}x_p = b'_n \end{cases}$

$\boxed{3}$ On retourne à l'étape 1, que l'on applique au système encadré (qui contient une variable de moins !).

Au bout d'un nombre fini d'étapes, on obtient un système échelonné (avec éventuellement des équations auxiliaires) équivalent au système de départ.

<u>Conseil :</u> Pour simplifier les calculs de l'étape 2, pendant l'étape 1, il vaut mieux choisir un pivot le plus "simple" possible ($a_{1,1} = 1$ ou -1 quand c'est possible !) pour éviter de faire apparaître des fractions.

Exercice 6

Résoudre les systèmes suivants :

$$(A)\left\{\begin{array}{r}y-z=0\\3x+2y+z=0\\x+y-z=2\end{array}\right.\qquad(B)\left\{\begin{array}{r}5x+3y-z=3\\x+2y-z=1\\3x-y+z=2\end{array}\right.\qquad(C)\left\{\begin{array}{l}2x+y-3z+7t=12\\-x+y\qquad\;\;-4t=-5\\x+5y-6z+2t=9\end{array}\right.$$

$$(A)\left\{\begin{array}{r}y-z=0\\3x+2y+z=0\\x+y-z=2\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{r}x+y-z=2\\3x+2y+z=0\\y-z=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{r}x+y-z=2\\-y+4z=-6\\y-z=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{r}x+y-z=2\\-y+4z=-6\\3z=-6\end{array}\right.$$

On obtient un système triangulaire avec des coeffs. diagonaux non nuls : le système est de Cramer ! On peut terminer la résolution :

$$\left\{\begin{array}{r}x+y-z=2\\-y+4z=-6\\3z=-6\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}x=2-y+z\\y=4z+6\\z=-2\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}x=2-2+2\\y=-2\\z=-2\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}x=2\\y=-2\\z=-2\end{array}\right.$$

Unique solution : $(2,-2,-2)$.

$$(B)\left\{\begin{array}{r}5x+3y-z=3\\x+2y-z=1\\3x-y+z=2\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{r}x+2y-z=1\\5x+3y-z=3\\3x-y+z=2\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{r}x+2y-z=1\\-7y+4z=-2\\-7y+4z=-1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{r}x+2y-z=1\\-7y+4z=-2\\0=1\end{array}\right.$$

Le système est maintenant échelonné. On voit qu'il est incompatible !

$$(C)\left\{\begin{array}{l}2x+y-3z+7t=12\\-x+y\qquad\;\;-4t=-5\\x+5y-6z+2t=9\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{r}2x+y-3z+7t=12\\3y-3z-t=2\\-15y+15z+5t=-10\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{r}2x+y-3z+7t=12\\3y-3z-t=2\\0=0\end{array}\right.$$

On a terminé l'algorithme : on a un système échelonné (non triangulaire !) avec une équation auxiliaire compatible. On sait qu'il y aura une infinité de solutions. Terminons la résolution :

$$\left\{\begin{array}{r}2x+y-3z+7t=12\\3y-3z-t=2\\0=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{r}2x+y=12+3z-7t\\3y=2+3z+t\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{3}(17+3z-11t)\\[2ex]y=\dfrac{1}{3}(2+3z+t)\end{array}\right.$$

Ensemble des solutions : $\left\{\left(\dfrac{17+3z-11t}{3},\dfrac{2+3z+t}{3},z,t\right),\quad z\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}\right\}$.

La résolution de n'importe quel système linéaire se ramenant à la résolution d'un système échelonné, la méthode du pivot de Gauss a les conséquences suivantes :

Théorème 1 (Nombre de solutions d'un système linéaire)

Un système linéaire (S) admet toujours 0, 1, ou une infinité de solutions.

Si le système linéaire est homogène, il n'y a que deux possibilités :

- (S) admet l'unique solution $(0, 0, \ldots, 0)$
- (S) admet une infinité de solutions.

Preuve :

Grâce à l'algorithme du pivot de Gauss, tout système linéaire (S) est équivalent à un système échelonné. Or on a vu (Proposition 1) qu'un système échelonné admet toujours 0, 1 ou une infinité de solutions. De plus, on sait qu'un système homogène admet toujours au moins la solution $(0, \ldots 0)$. □

Théorème 2 (Caractérisation des systèmes de Cramer)

Soit (S) un système linéaire carré (i.e avec autant d'équations que d'inconnues).

$\boxed{1}$ (S) est un **système de Cramer** si et seulement si le système échelonné obtenu à la fin de l'algorithme du pivot de Gauss est triangulaire avec des coefficients diagonaux nons-nuls.

$\boxed{2}$ Conséquence : Pour un système carré, $\boxed{(S) \text{ est de Cramer} \iff (S_h) \text{ est de Cramer}}$

où (S_h) désigne le système homogène associé à (S).

Preuve :

$\boxed{1}$ Grâce à l'algorithme du pivot de Gauss, tout système linéaire (S) carré est équivalent à un système échelonné carré. Or on a vu (Proposition 1) qu'un système échelonné carré est de Cramer si et seulement si c'est un système triangulaire avec coefficients diagonaux non-nuls.

$\boxed{2}$ Il suffit de noter que les opérations que l'on choisit d'effectuer pour appliquer le pivot de Gauss à un système linéaire (S) ne dépendent pas de son second membre ! Autrement dit :

- Si une succession d'opérations élémentaires ramène (S) à un système triangulaire (avec diagonale $\neq 0$), alors la même succession d'opérations élémentaires ramène (S_h) à un système triangulaire (avec diagonale $\neq 0$).

- Inversement, si une succession d'opérations élémentaires ramène (S_h) à un système triangulaire (avec diagonale $\neq 0$), alors la même succession d'opérations élémentaires ramène (S) à un système triangulaire (avec diagonale $\neq 0$). □

Exemple

Si on a montré que le système homogène $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \\ -x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$ admet l'unique solution $(0, 0, 0)$

alors le système $\begin{cases} 2x - y + z = a \\ x + 3y - 4z = b \\ -x - 2y + 2z = c \end{cases}$ admet une unique solution, quel que soit le second membre !

Attention !

Ce raisonnement ne fonctionne qu'avec les systèmes carrés (autant d'inconnues que d'équations) !

Le système homogène $\begin{cases} y = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ admet l'unique solution $(0, 0)$, mais $\begin{cases} y = 1 \\ x + y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$ n'admet aucune solution !

4 Ensemble des solutions d'un système homogène/non-homogène

4.1 Solutions d'un système homogène

Définition 6 (Addition et multiplication par un scalaire dans $\mathbb{R}^p$)

Pour $X = (x_1, \ldots, x_p)$, $X' = (x'_1, \ldots, x'_p)$ des p-uplets et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit :

$$X + X' = (x_1 + x'_1, \ldots, x_p + x'_p), \qquad \text{et} \qquad \lambda X = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p).$$

S P O I L E R . . .

L'ensemble des p-uplet $\boxed{\mathbb{R}^p}$ est ainsi stable par ces opérations d'addition et de multiplication par un réel. On dira plus tard que cela le munit d'une structure d'**espace vectoriel**.

Théorème 3 (Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène)

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène (H) est stable par addition et multiplication par un réel. Autrement dit : si X, X' sont deux solutions de (H) et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$X + X' \text{ et } \lambda X \text{ sont encore des solutions de } (H).$$

Preuve :

Si on a $\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x'_1 + a_{1,2}x'_2 + \ldots + a_{1,p}x'_p & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{n,1}x'_1 + a_{n,2}x'_2 + \ldots + a_{n,p}x'_p & = & 0 \end{array}\right.$

alors en sommant ces équations ou en les multipliant par $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}(x_1 + x'_1) + a_{1,2}(x_2 + x'_2) + \ldots + a_{1,p}(x_p + x'_p) & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{n,1}(x_1 + x'_1) + a_{n,2}(x_2 + x'_2) + \ldots + a_{n,p}(x_p + x'_p) & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}\lambda x_1 + \ldots + a_{1,p}\lambda x_p & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{n,1}\lambda x_1 + \ldots + a_{n,p}\lambda x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

□

S P O I L E R . . .

L'ensemble des solutions de (H) est donc une partie non-vide de $\mathbb{R}^p$ stable par addition et multiplication par un réel. On dira plus tard qu'il s'agit d'un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^p$

Remarque 5

On retrouve le fait qu'un système homogène (H) admet une seule ou bien une infinité de solutions !

En effet, (H) admet toujours la solution nulle $(0, \ldots 0)$, et si jamais il admet une autre solution $X = (x_1, \ldots, x_p)$ (avec l'un des x_i non nul), alors il admet automatiquement les solutions

$$\lambda X = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

qui sont toutes distinctes.

4.2 Solution d'un système non-homogène

Théorème 4 (Solutions d'un système linéaire non-homogène)

Soit (S) un système linéaire quelconque et (S_h) le système homogène associé.

- Si (S) n'admet pas de solution, son ensemble de solutions est bien-sûr : $\emptyset$.
- Si (S) admet des solutions, introduisons X_0 une solution particulière de (S).

Alors l'ensemble de toutes les solutions de (S) est :

$$\left\{X_0 + X_h, \ \ X_h \text{ solution de } (S_h)\right\}$$

Preuve :

Notons $X_0 = (x_1^0, \dots, x_p^0)$ une solution particulière de (S) : $\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1^0 + a_{1,2}x_2^0 + \ldots + a_{1,p}x_p^0 & = & b_1 \\ \vdots & & \\ a_{n,1}x_1^0 + a_{n,2}x_2^0 + \ldots + a_{n,p}x_p^0 & = & b_n \end{array}\right.$

Par suite, pour tout p-uplet $X = (x_1, \dots, x_p)$, on a les équivalences :

$$X \text{ est solution de } (S) \iff \left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}(x_1 - x_1^0) + a_{1,2}(x_2 - x_2^0) + \ldots + a_{1,p}(x_p - x_p^0) & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{n,1}(x_1 - x_1^0) + a_{n,2}(x_2 - x_2^0) + \ldots + a_{n,p}(x_p - x_p^0) & = & 0 \end{array}\right.$$

$\iff X - X_0$ est solution de (S_h)
$\iff$ Il existe X_h solution de (S_h) tel que $X - X_0 = X_h$
$\iff$ Il existe X_h solution de (S_h) tel que $X = X_0 + X_h$. □

Remarque 6

On retrouve le fait qu'un système (S) admet 0, 1, ou bien une infinité de solutions ! Plus précisément :

- (S) peut n'avoir aucune solution.
- (S) admet une unique solution lorsqu'il admet une solution X_0 et que l'unique solution de (S_h) est $X_h = (0, \dots, 0)$.
- (S) admet une infinité de solutions lorsqu'il admet une solution X_0 et que (S_h) admet une infinité de solutions X_h.

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Écrire l'ensemble des solutions d'un système linéaire sous forme explicite.
- Résoudre un système linéaire en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss.

Pour suivre

- Repérer "à l'oeil" le nombre de solutions d'un système échelonné
- Connaître le lien entre solutions de (S) et solutions de (S_h).

Pour les ambitieux

- $\emptyset$