Samedi 30 Septembre 2023

Devoir Sur Table n°1 – Durée : 3h

L'utilisation de la calculatrice, des feuilles/notes de cours ou d'exercices est interdite.

La présentation, la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation de la copie.

Les résultats non encadrés/soulignés/surlignés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1 : Calculs de sommes et produits

1. Soit $n \geqslant 3$ un entier. Calculer les sommes et produits suivants. On donnera les résultats sous la forme "la plus simple" (= la plus factorisée) possible, éventuellement avec des factorielles.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3k(k+1)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{2k+1}$ (c) $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n} (3k)$ (d) $\displaystyle\prod_{k=3}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

2. On donne le programme Python suivant :

```
S = 0
for k in range(1,10) :
    S = S + 4*k**3
print(S)
```

   Quelle valeur numérique est affichée ? Détailler votre raisonnement et/ou les calculs effectués.

3. (a) Développer le polynôme $(x+1)^5$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant la somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ((k+1)^5 - k^5)$ de deux façons, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Exercice 2 : Une bijection

On considère l'application $\begin{array}{rcl} f :]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right) \end{array}$.

1. Justifier que l'application f est bien définie.
2. Définir en langage Python la fonction f. (Penser à importer la bibliothèque nécessaire !)
   On considère que l'utilisateur d'une fonction sait s'en servir : il est donc inutile de vérifier que l'argument d'entrée `t` est bien entre -1 et 1.
3. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 3 : Une somme, plusieurs méthodes

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Dans cet exercice, on se propose d'étudier différentes méthodes pour établir la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}. \quad (\star)$$

Les 3 questions, correspondant à 3 méthodes distinctes, doivent être traitées indépendamment.

1. Méthode 1 : *Récurrence.*
   Démontrer la formule $(\star)$ par récurrence.
2. Méthode 2 : *Sommes doubles.*
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x^j$ de deux manières différentes. En déduire la formule $(\star)$.

3. <u>Méthode 3 :</u> *Transformation d'Abel.*
   Soit $n \in \mathbb{N}$, soient $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ et $b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}$ des réels.
   (a) Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k)$?
   (b) Démontrer la formule d'Abel : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k(b_{k+1} - b_k) = (a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1) - \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)b_{k+1}$
   (c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(x^{k+1} - x^k)$ en fonction de x et n.
   (d) En déduire finalement la formule $(\star)$.

Exercice 4 : Un critère d'injectivité

Soient E et F deux ensembles non-vides et une application $f : E \to F$.
On souhaite démontrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ est injective} \iff \text{Il existe une application } g : F \to E \text{ telle que } g \circ f = Id_E.$$

1. Démontrer l'implication de la droite vers la gauche.
2. On suppose à présent f injective. On pose $\widetilde{F} = f(E)$ et on définit $\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} E & \to & \widetilde{F} \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$
   (a) Justifier que l'application $\widetilde{f}$ est bijective.
   (b) On fixe un élément $x_0 \in E$ et on pose : $\forall y \in F,\ g(y) = \begin{cases} \widetilde{f}^{-1}(y) & \text{si } y \in \widetilde{F} \\ x_0 & \text{si } y \in F \setminus \widetilde{F}. \end{cases}$
   Obtenir la conclusion voulue.
3. Donner un exemple de deux applications f et g telles que $g \circ f = Id_E$, avec f non surjective.
   (on pourra par exemple choisir pour E et F des intervalles de $\mathbb{R}$)

$\star\star\star$ Fin du sujet $\star\star\star$