Lundi 5 janvier 2026

Concours Blanc n°1 – Durée : 4h

L'utilisation de la calculatrice, des feuilles/notes de cours ou d'exercices est interdite.
La présentation, la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation de la copie.
Les résultats non encadrés/soulignés/surlignés ne seront pas pris en compte.

Problème 1 : Etude des racines d'une famille de polynômes

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le polynôme : $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-X)^k}{k!} = 1 - X + \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{6} + \ldots + \frac{(-X)^n}{n!}$.

1. Compléter la fonction Python suivante pour qu'à la donnée d'un entier n et d'un réel x, elle calcule et renvoie la valeur de $P_n(x)$.

```
def P(n,x) :
  S = 0 ; a = ...
  for k in range( ... ) :
    S = S + a
    a = a * ...
  return S
```

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n n'a aucune racine dans $\mathbb{R}_-$
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n' = -P_{n-1}$.
4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. Montrer que les suites $((P_{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_{2n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones à partir d'un certain rang. Puis montrer qu'elles sont adjacentes à partir d'un certain rang.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
5. (a) A l'aide d"études de fonctions appropriées, montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ P_{2n+1}(x) \leqslant e^{-x} \leqslant P_{2n}(x).$$
   (b) En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} P_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ fixé.
6. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_{2n} n'a pas de racine réelle.
   (b) A l'aide du théorème de Rolle, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_{2n+1} a au maximum une racine réelle.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Etablir, en justifiant, le tableau de variation complet de P_{2n+1} sur $\mathbb{R}$.
Déduire que le polynôme P_{2n+1} admet une unique racine, notée $\alpha_n > 0$, et que c'est une racine simple.
8. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad P_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k!)}\left(1 - \frac{X}{2k+1}\right)$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de $P_{2n+1}(1)$ et $P_{2n+1}(2n+1)$ et en déduire que $\alpha_n \in]1, 2n+1[$.
9. Compléter la fonction Python suivante pour que, à la donnée d'une entier n et d'un réel $\varepsilon > 0$, elle renvoie une valeur approchée de la racine α_n à ε près, déterminée à l'aide de la méthode de dichotomie. On justifiera en quelques phrases les choix faits pour compléter ce programme.

```
def approx_alpha(n,eps) :
  a = ... ; b = ...
  while ......... :
    c = (a+b)/2
    if P(2*n+1,c) < 0 :
      ... = c
    else :
      ... = c
    return a
```

L'instruction `print([ approx_alpha(n,0.01) for n in range(5)] )` affiche alors la liste suivante :

`[1, 1.59375, 2.1796875, 2.7578125, 3.328125]`

10. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en remarquant que $P_{2n+1} = P_{2n-1} + \dfrac{X^{2n}}{(2n)!}\left(1 - \dfrac{X}{2n+1}\right)$, montrer que $P_{2n+1}(\alpha_{n-1}) > 0$.

    (b) Etablir le sens de variation (strict) de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On suppose à présent que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ.

On admet l'inégalité suivante (démontrable par récurrence) : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant e^x$.

11. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $\left|P'_{2n+1}(x)\right| \leqslant e^x$.

    (b) Etablir l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|P_{2n+1}(\ell) - P_{2n+1}(\alpha_n)\right| \leqslant e^{\ell}|\ell - \alpha_n|$.

12. En passant à la limite dans l'inégalité de la question précédente, aboutir à une contradiction. Que dire finalement de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$?

Problème 2 : La ruine du joueur

Un casino dispose d'une machine à sous dont le comportement est le suivant :

- Pour jouer une partie, un joueur doit d'abord payer le coût d'entrée de 1€.
- A l'issue de la partie, le joueur reçoit : $\begin{cases} 0€ & \text{avec probabilité } p \\ 2€ & \text{avec probabilité } q \\ 3€ & \text{avec probabilité } r, \end{cases}$ où $p, q, r \in]0,1[$ avec $p + q + r = 1$.

Le gain moyen relatif d'un joueur à l'issue d'une seule partie est ainsi : $(0 \cdot p + 2 \cdot q + 3 \cdot r) - 1$.
On note ce gain $g = 2q + 3r - 1$.

Un joueur qui s'installe devant la machine à sous enchaine les parties successives. Si, à un moment quelconque au cours du jeu, son capital est réduit à 0€, il ne peut plus continuer : on dit qu'il finit ruiné. Notons qu'il est possible, a priori, qu'un joueur ne finisse jamais ruiné, c'est à dire qu'il continue de jouer indéfiniment.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n = "Un joueur avec un capital de départ de n€ finit par être ruiné",
et on note $u_n = P(A_n)$. On cherche, dans ce problème, à déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Partie I - Transcription matricielle

1. (a) Que vaut u_0 ? Justifier.

   (b) Quel sens de variation pourrait-on conjecturer pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Justifier (sans démontrer).

2. En distinguant les cas selon le résultat de la première partie du joueur, établir la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = pu_n + qu_{n+2} + ru_{n+3}.$$

Pour toute la suite du problème, on introduit la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} -\frac{q}{r} & \frac{1}{r} & -\frac{p}{r} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

les matrices colonnes $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (pour $n \in \mathbb{N}$) et le polynôme $P = rX^3 + qX^2 - X + p \in \mathbb{R}[X]$

3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ X_{n+1} = MX_n$.

   (b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de la matrice colonne X_n en fonction de M, n et X_0.

4. Calculer M^2 et M^3, puis vérifier que P est un polynôme annulateur de la matrice M.

Partie II - Etude d'un cas particulier à gain moyen positif

Dans cette partie du problème, on étudie le cas particulier où $p = q = \frac{3}{8}$ et $r = \frac{1}{4}$.

5. Vérifier que, dans ce cas, le gain moyen g à l'issue d'une partie est strictement positif.
6. Donner la matrice M dans ce cas. Comment pourrait-on définir cette matrice en Python ?
7. Etablir la factorisation du polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$. On précisera ses racines et leurs multiplicités.

Pour tout réel λ fixé, on note (S_λ) le système : $MX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

8. Montrer que le système (S_λ) est équivalent à : $\begin{cases} x \quad -\lambda y & = 0 \\ \quad y \quad -\lambda z & = 0 \\ \quad P(\lambda) \cdot z & = 0 \end{cases}$

9. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $M - \lambda I_3$ est-elle inversible ? Justifier.

10. (a) Déterminer l'ensemble des solutions $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de (S_1) (système (S_λ) avec $\lambda = 1$). Quelle solution obtient-on si on impose que $x = 1$?

    (b) Vérifier rapidement que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont solutions des systèmes $(S_{\frac{1}{2}})$ et (S_{-3}) respectivement.

On définit la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, obtenue en "fusionnant" les matrices colonnes susmentionnées.

11. Montrer que Q est inversible.

12. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D dont on précisera les coefficients telle que $MQ = QD$.

13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad M^n = QD^nQ^{-1}$.

14. (a) En déduire la forme générale : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + b\left(\frac{1}{2}\right)^n + c\,(-3)^n$, avec certains $a, b, c \in \mathbb{R}$.
    Indication : Se rappeler de la formule obtenue en 3.(b) et remplacer M^n par son expression. On ne cherchera pas à détailler explicitement les valeurs numériques..

    (b) Justifier qu'on a nécessairement $c = 0$. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + (1-a)\left(\frac{1}{2}\right)^n$, avec $a \in \mathbb{R}$.

(Remarque : En admettant que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (ce qui est légitime ici), on obtient, dans ce cas particulier, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$)

Partie III - Cas d'un jeu à gain moyen nul

On revient à présent au cas général où le joueur reçoit : $\begin{cases} 0€ & \text{avec probabilité } p \\ 2€ & \text{avec probabilité } q \\ 3€ & \text{avec probabilité } r, \end{cases}$

où p, q, r sont des réels quelconques de $]0, 1[$ tels que $p + q + r = 1$.

Dans cette partie du problème, on suppose de plus que le gain moyen relatif est nul : $g = 2q + 3r - 1 = 0$.

15. (a) Vérifier que 1 est une racine double du polynôme P introduit en partie I.

    (b) Etablir la factorisation complète de P dans $\mathbb{R}[X]$. On montrera au passage que P admet une autre racine simple, notée α. On exprimera α en fonction de p et et r, et on justifiera que $\alpha \in]-\infty, -1[$.

16. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n le reste dans la division euclidienne de X^n par P.

    (a) Que dire du degré de R_n ?
    Justifier qu'on puisse l'écrire sous la forme : $R_n(X) = R_n(1) + R_n'(1)(X-1) + \dfrac{R_n''(1)}{2}(X-1)^2$.

    (b) Déterminer les valeurs de $R_n(1)$ et $R_n'(1)$ en fonction de n.

    (c) Déterminer la valeur de $R_n(\alpha)$ en fonction de α et n, et obtenir finalement l'expression :

$$R_n(X) = 1 + n(X-1) + \frac{1}{(1-\alpha)^2}\Big(\alpha^n - 1 + n(1-\alpha)\Big)(X-1)^2.$$

17. Déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de M^n, et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$M^n = A + \alpha^n \cdot B + n \cdot C$$

    où A, B et C sont des matrices carrées indépendantes de n, dont on précisera les expressions en fonction de α et des matrices I_3 et $(M - I_3)$.

18. (a) En raisonnant par l'absurde, montrer qu'on doit forcément avoir $BX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
    Montrer de même que $CX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Indication :* Se rappeler l'expression obtenue en 3.(b).

    (b) En déduire que $MX_0 = X_0$.

19. Que vaut donc X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$? Qu'en déduit-on pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
    Comment interpréter cela pour les joueurs du casino, dans le cas d'un jeu à gain moyen nul qui se prolonge indéfiniment ?

$\star\star\star$ Fin du sujet $\star\star\star$