

# Programme de khôlles ECG1-B

# Semaines 5 et 6

## Suites réelles, Limites de suites, Polynômes

### • Énoncés / notions à connaître :

#### Suites réelles

- Vocabulaire sur les suites : suite définie explicitement/par récurrence/implicitement, suite minorée/majorée/bornée, suite croissante/décroissante/monotone...
- Diverses méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite.
- Suites arithmétiques, suites géométriques. Termes généraux.
- Suites arithmético-géométriques : méthode pour en exprimer le terme général.
- Suites à récurrence linéaire d'ordre 2 : méthode pour en exprimer le terme général (méthode de l'équation caractéristique).

#### Limites de suites

- Définition de la limite (réelle ou  $\pm\infty$ ) avec des quantificateurs.
- Calcul de limites d'expressions explicites : opérations standards (somme, produit, quotient, composition d'une limite avec une fonction continue).  
Utilisation de limites classiques (croissances comparées type  $\frac{\ln(n)}{n}$ ,  $\frac{n}{e^n}$ ,  $\frac{e^n}{n!}$ , etc...)  
(NB : on ne dispose pas encore de développements limités!)
- Utilisation d'encadrements, théorème des gendarmes. Passage à la limite dans une inégalité.
- Théorème de la limite monotone.
- Suites adjacentes. Résultat de convergence.
- Suites extraites formées des termes d'indices pairs et impairs (et lien avec la limite).
- Application de tout cela à la détermination de la limite d'une suite récurrente ( $u_{n+1} = f(u_n)$ )

#### Polynômes

- Coefficients, degré d'un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ .
- Opérations dans  $\mathbb{R}[X]$  : somme, produit (et composition) de polynômes.  
Conséquences sur le degré.
- Division euclidienne dans  $\mathbb{R}[X]$ , multiples et diviseurs d'un polynôme.  
(NB : on ne parlera pas de "polynôme irréductible" ...)
- Dérivation et formule de Taylor.
- Notion de racine, de multiplicité d'une racine. Lien avec la divisibilité  
(par  $(X - \alpha)$ , par  $(X - \alpha)^m$  ...)
- Lien entre degré et nombre de racines (distinctes ou comptées avec multiplicité)
- Factorisation d'un polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$  (en produit de polynômes irréductibles).

### • Démonstrations à connaître :

- Convergence des suites adjacentes (Théorème 8).
- Formule de Taylor (Théorème 3). On admettra pour la preuve le résultat suivant :  
Si  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$  alors  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_i = \frac{P^{(i)}(0)}{i!}$ . (Corollaire 3)
- $\alpha$  est racine de  $P$  si et seulement si  $(X - \alpha)$  divise  $P$  (Théorème 4, point [1]).
- $\alpha$  est une racine de  $P$  de multiplicité  $m$  si et seulement si  
 $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$  et  $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$ . (Théorème 6)