Dénombrement, combinatoire

Le **dénombrement** est la discipline des mathématiques qui consiste à développer des techniques pour dénombrer (c'est à dire à compter) le nombre d'objets vérifiant une certaine propriété. Cette discipline est voisine de la **combinatoire**, qui s'intéresse à lister et étudier les différentes configurations d'une collection finie d'objets.

1 Principes du dénombrement

1.1 Notion de cardinal

Définition 1 (Cardinal d'un ensemble fini)

On dit qu'un ensemble E est fini s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et n éléments e_1, \ldots, e_n distincts tels que $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. L'entier n s'appelle alors et se note

Card(E) est ainsi

Par convention, on pose $Card(\emptyset) =$

Exemples

- $Card(\{1,5,6\}) = 3$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Card([1,n]) = Card(\{1,2,\ldots,n\}) = n$.
- Le cardinal de $\{R, I, C, H, E, L, I, E, U\} = \{R, I, C, H, E, L, U\}$ est 7.

Proposition 1 (Cardinal et inclusion)

Soit E un ensemble fini.

- Si $A \subset E$ alors A est fini et
- Si $A \subset E$ et Card(A) = Card(E), alors

1.2 Principe additif

Principe additif : Si une collection finie d'objets peut être décomposée en plusieurs sous-collections mutuellement exclusives (c'est à dire deux à deux disjointes), alors le nombre d'objets dans la collection est égal à la somme des nombres d'objets dans chaque sous-collection.

Exemple trivial: Si un placard contient exactement 2 chemises rouges, 1 chemise bleue et 3 chemises vertes, il contient 2 + 1 + 3 = 6 chemises.

Proposition 2 (Cardinal d'une union disjointe)

Soient A_1, \ldots, A_n des ensembles finis <u>deux à deux disjoints</u>. Alors : $Card\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) =$

En particulier, si $\underline{A \cap B = \emptyset}$, $Card(A \cup B) =$

• Corollaire 1 (Cardinal du complémentaire)

Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E. Alors :

• $Card(B \setminus A) =$ • $Card(\overline{A}) =$

Preuve rapide:

- $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ (union disjointe) donc $Card(B) = Card(B \setminus A) + Card(A \cap B)$.
- $E = A \cup \overline{A}$ (union disjointe) donc $Card(E) = Card(A) + Card(\overline{A})$.

Lorsque l'union n'est pas disjointe, il faut utiliser la formule du crible :

Proposition 3 (Formule du crible de Poincaré)

Soient A,B,C trois parties d'un ensemble fini E. Alors :

- $\bullet \ Card(A \cup B) =$
- $Card(A \cup B \cup C) =$

Ceci s'illustre bien sur un diagramme de Venn :

✓ Dessin :

Exercice 1

34 couples sont inscrits dans un club de danse qui propose des cours de salsa, de rock et de tango.

- 18 couples prennent des cours de rock, 16 prennent des cours de salsa et 12 des cours de tango.
- 8 couples dansent la salsa et le rock, 2 dansent le rock et le tango et 4 dansent le tango et la salsa.

Combien de couples pratiquent les trois danses?

1.3 Principe multiplicatif

Principe multiplicatif : Si pour construire un élément d'un ensemble, on effectue une succession de n choix ayant respectivement $c_1, c_2, \ldots c_n$ possibilités (le nombre c_{i+1} de possibilité pour le i+1-ème choix ne dépendant pas des i premiers choix effectués), alors l'ensemble contient $c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n$ éléments.

Exercice 2

Une plaque d'immatriculation (SIV) est formée de deux lettres, trois chiffres, puis deux lettres.

Exemple: PL - 123 - AK

Règles additionnelles : les lettres I, O, U ne sont pas autorisées. Le bloc de deux lettres SS est interdit.

Combien y a-t-il de telles plaques d'immatriculation?

Proposition 4 (Cardinal d'un produit cartésien)

- Soient $A_1, \ldots A_n$ des ensembles finis. Alors : $Card(A_1 \times \ldots \times A_n) =$
- En particulier, si E est un ensemble fini de $n \in \mathbb{N}^*$, $Card(E^n) =$

Preuve rapide:

• On rappelle que $A_1 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n), x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\}.$

Pour construire un n-uplet de $A_1 \times \ldots \times A_n$, il faut choisir le premier élément x_1 ($Card(A_1)$ possibilités), puis le deuxième x_2 ($Card(A_2)$ possibilités), puis \ldots , puis le dernier x_n ($Card(A_n)$ possibilités).

Par principe multiplicatif, il y a $Card(A_1) \times Card(A_2) \times ... \times Card(A_n)$ tels n-uplets.

• On rappelle que $E^n = E \times ... \times E$ (n fois). D'après le point précédent, $Card(E^n) = Card(E) \times ... \times Card(E)$ (n fois), c'est à dire $Card(E^n) = Card(E)^n$.

Exemple

Soient $A = \{a, b\}$ et $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. On peut compter le nombre d'éléments de $A \times B$ sur une arbre :

Dessin :

1.4 Cardinal et applications

Proposition 5 (Injections/surjections/bijections entre ensembles finis)

Soient E et F deux ensembles finis. Soit $f: E \to F$.

- Si $f: E \to F$ est injective, alors on a
- Si $f: E \to F$ est surjective, alors on a
- Si $f: E \to F$ est bijective, alors on

Dessin	:

Principe de "bijection" : Si deux ensembles sont en bijection (c'est à dire s'il existe une application bijective de l'un dans l'autre), alors ils ont le même nombre d'éléments.

ℰ Exercice 3

Un crabe de déplace sur l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs : à l'instant 0, il part de l'origine (0), et à chaque étape il choisit de faire un pas vers la gauche ou bien un pas vers la droite.

Une "trajectoire" du crabe est n+1 uplet (x_0, x_1, \ldots, x_n) donnant ses positions aux instants $0, 1, \ldots, n$.

Exemple: Une trajectoire du crabe pour n = 4: (0, 1, 0, -1, -2)

Combien y a-t-il de trajectoires possibles sur n pas?

$\mathbf{2}$ Listes, arrangements, parties à p éléments

Un problème de dénombrement se ramène bien souvent à se demander comment "coder" les objets considérés dans l'énoncé en termes mathématiques. Ces objets prendront bien souvent la forme d'une liste/collection de valeurs (tirages de boules dans une urne, tirage de cartes dans un paquet...)

En particulier, il est essentiel de se poser deux questions :

- Est-ce que l'ordre des valeurs compte?
- Les valeurs peuvent-elles se répéter?

Exemples

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire 3 boules dans cette urne. Il y a plusieurs façons d'exécuter ce tirage!

• Si les tirages sont successifs, avec remise : l'ordre des éléments compte, il peut y avoir répétition.

Exemple de résultat : 1er tirage : 4, 2ème tirage : 2, 3ème tirage : 2

• Si les tirages sont successifs, sans remise : l'ordre des éléments compte, pas de répétition.

Exemple de résultat : 1er tirage : 4, 2ème tirage : 1, 3ème tirage : 3

• Si on tire les trois boules d'un coup : l'ordre des éléments ne compte pas, pas de répétition.

Exemple de résultat : Ensemble des boules obtenues : $\{1, 3, 5\}$.

Listes 2.1

■ Définition 2 (p-liste)

Soit E un ensemble fini.

On appelle **p-liste d'éléments de** E (ou liste d'éléments de E de longueur p) tout p-uplet :

$$(x_1, x_2, \dots, x_p)$$
 avec $x_1 \in E, x_2 \in E, \dots, x_p \in E$.

(Autrement dit une p-liste de E est simplement un élément de E^p .)

Pour une p-liste :

• L'ordre des éléments compte • Il peut y avoir des répétitions.

Si
$$Card(E) = n$$
, il y a p -listes d'éléments de E .

Preuve à garder en tête:

Pour construire une p-liste (x_1, \ldots, x_p) on a n choix pour le premier élément, n choix pour le deuxième, ..., n choix pour le p-ième. Il y a donc $n \times ... \times n = n^p$ p-listes possibles.

Exemples

Dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: • $(3, 5) \neq (5, 3)$, (1, 1) sont des 2-listes.

• $(3,1,2) \neq (2,1,3) \neq (1,2,3)$, (5,2,2) sont des 3-listes. \bullet (1, 4, 4, 3, 5) est un 6-liste.

Exercice 4

On lance un dé à 6 face trois fois de suite. On note, dans l'ordre les valeurs obtenues. Combien y-a-t-il de résultat possibles?

2.2 Arrangements, permutations

Définition 3 (p-arrangement)

Soit E un ensemble fini.

On appelle **p-arrangement d'éléments de** E (ou arrangement d'éléments de E de longueur p) tout p-uplet :

$$(x_1, x_2, \dots, x_p)$$
 avec $x_1 \in E, x_2 \in E, \dots, x_p \in E$ deux à deux distincts.

(Autrement dit c'est une p-liste composée d'éléments 2 à 2 distincts.)

Pour un p-arrangement :

- L'ordre des éléments compte
- Il n'y a pas de répétition.

Si
$$Card(E) = n$$
, il y a

p-arrangements d'éléments de E. (si $p \leq n$)

Preuve à garder en tête:

Pour construire un p-arrangement (x_1, \ldots, x_p) on a:

- n choix pour le premier élément $(x_1 \in E)$
- n-1 choix pour le deuxième $(x_2 \in E \setminus \{x_1\})$
- n-2 choix pour le troisième $(x_3 \in E \setminus \{x_1, x_2\})$
- . . .
- (n-p+1) choix pour le p-ième $(x_p \in E \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\})$.

If y a donc $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements possibles.

Remarque 1

Il n'y a pas de p-arrangements d'éléments de E pour p > Card(E).

Exemples

Dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: \bullet $(3, 5) \neq (5, 3)$ sont des 2-arrangements. (1, 1) n'en est pas un.

• $(3,1,2) \neq (2,1,3) \neq (1,2,3)$ sont des 3-arrangements. (5,2,2) n'en est pas un.

Exercice 5

4 personnes s'asseyent autour d'une table comportant 6 chaises.

Combien y a-t-il d'agencements possibles? (on considère toutes les chaises distinctes).

Le cas des p-arrangements de E lorsque p = Card(E) est d'un intérêt particulier.

Définition 4 (Permutation)

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

On appelle **permutation** des éléments de E (ou permutation de E) tout n-uplet :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
 avec $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, ..., $x_n \in E$ deux à deux distincts.

(Autrement dit c'est un n-arrangement, où n = Card(E).)

Une permutation de E est donc une liste où chaque élément de E apparaît une et une seule fois. C'est une façon de "ranger" les éléments de E dans un certain ordre.

Si
$$Card(E) = n$$
, il y a permutations de E .

Preuve à garder en tête:

Pour construire une permutation (x_1, \ldots, x_n) on a:

- n choix pour le premier élément $(x_1 \in E)$
- n-1 choix pour le deuxième $(x_2 \in E \setminus \{x_1\})$
- ..
- 1 choix pour le *n*-ième $(x_n \in E \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\})$.

If y a donc $n \times (n-1) \dots \times 1 = n!$ permutations possibles.

Remarque 2

Ainsi, il y a n! façons de "ranger" n éléments distincts dans tous les ordres possibles!

Exemples

Dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: $(3, 4, 2, 5, 1) \neq (4, 1, 3, 2, 5) \neq (1, 2, 3, 4, 5)$ sont des permutations.

Exercice 6

Dans cet exercice, on appelle "anagramme" d'un mot tout mot formé avec le même jeu de lettres (qu'il soit dans le dictionnaire ou non!)

Combien les mots suivants ont-ils d'anagrammes?

- (a) LIT
- (b) MATHS
- (c) TEST
- (d) ABRACADABRA

Parties à p éléments

Rappel: Si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, c'est à dire l'ensemble de tous les ensembles inclus dans E.

Exemple

Pour $E = \{1, 2, 3, 4\}$, on a:

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\} \\ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \\ \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3\} \\ \{1, 2, 3, 4\} \end{array} \right\}$$

Rappelons que $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 2, 2, 3, 1\}.$

Proposition 6 (Nombre de parties de E)

Soit E un ensemble fini. Alors si Card(E) = n, $Card(\mathcal{P}(E)) =$

Preuve:

Puisque Card(E) = n, notons $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Construire une partie $A \in \mathcal{P}(E)$, revient à choisir lesquels de e_i appartiennent à A. On choisit ainsi :

- Si $e_1 \in A$ ou non (2 possibilités). Si $e_2 \in A$ ou non ...
- Si $e_n \in A$ ou non.

Par principe multiplicatif, il y a $2 \times ... \times 2 = 2^n$ telles parties $A \in \mathcal{P}(E)$.

\blacksquare Définition 5 (Parties à p éléments)

Une partie à p éléments de E est un sous-ensemble de E ayant p éléments :

$$\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$$
 avec $x_1 \in E, x_2 \in E, \dots, x_p \in E$ deux à deux distincts.

Dans une partie à p éléments :

- L'ordre ne compte pas Il n'y a pas de répétition.

Si Card(E) = n, il y a

parties à p éléments de E, où :

• Si $p \in [0, n]$, $\binom{n}{p} =$

• Si
$$p > n$$
, $\binom{n}{p} = .$

Les quantités $\binom{n}{p}$ se lisent "p parmi n" et s'appellent les coefficients binomiaux.

Preuve à garder en tête:

Soit $p \in [0, n]$. Pour construire une partie à p éléments $\{x_1, \dots, x_p\}$ on a :

- n choix pour le premier élément $(x_1 \in E)$
- n-1 choix pour le deuxième $(x_2 \in E \setminus \{x_1\})$
- (n-p+1) choix pour le p-ième $(x_p \in E \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\})$.

Cela conduit à $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ possibilités.

Mais on a ici tenu compte de l'ordre des éléments : chaque partie a été comptée p! fois (nombre de permutations de p éléments). On a donc finalement $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ parties à p éléments possibles.

Exemples

Reprenons l'exemple précédent avec $E = \{1, 2, 3, 4\}.$

On peut compter le nombre de parties à 0,1,2,3,4 éléments et constater qu'en effet :

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!4!} = 1, \quad \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = 4, \quad \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6, \quad \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4, \quad \binom{4}{4} = \frac{4!}{4!0!} = 1$$

Remarque 3

Pour calculer un coefficient binomial pour des valeurs numériques données, il est en général préférable d'utiliser la formule avec les "produits successifs" plutôt que la version "compacte" avec des factorielles :

$$\binom{10}{3} =$$

Concrètement, $\binom{n}{p}$ est le nombre de façons de choisir p éléments distincts parmi n, sans tenir compte de leur ordre.

Exercice 7

On considère un jeu traditionnel de 52 cartes. Combien existe-t-il de mains de 4 cartes?

On dispose aussi d'une autre interprétation des coefficients binomiaux.

Proposition 7 (Nombre de chemins à p succès)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, n]$.

 $\binom{n}{p}$ est le nombre de chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire.

✓ Dessin :

Preuve rapide de la Proposition 7:

Notant S pour un succès et E pour un échec, un chemin menant à p succès pour n répétitions est un anagramme du "mot" : $\underbrace{SS \dots S}_{p \text{ fois}} \underbrace{EE \dots E}_{n-p \text{ fois}}$. C'est un mot de n lettres, qui contient p fois "S" et (n-p)

fois "E". Il y a donc $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ tels anagrammes (cf. Exercice 6). C'est bien $\binom{n}{p}$!

$\mathbf{3}$ Dénombrement en résumé : application aux tirages

De nombreuses situations dans des énoncés d'exercices de dénombrement (ou de probabilités élémentaires) peuvent se ramener à un "tirage dans une urne". Pour dénombrer le nombre de résultats possibles, il s'agit alors d'évaluer si un résultat est représenté par une liste, un arrangement ou une partie (ordre? répétitions?) On emploie alors la formule correspondante.

\blacksquare Méthode : (p tirages dans une urne contenant n boules)

On considère une urne contenant n objets distinguables : disons des boules, numérotées de 1 à n. On effectue p tirages dans cette urne.

• Tirages successifs, avec remise: l'ordre compte, il peut y avoir répétition.

Nombre de résultats possibles : $|n^p|$

• Tirages successifs, sans remise : l'ordre compte, pas de répétition.

Nombre de résultats possibles : $n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$

• Tirages simultanés (on tire p boules "d'un coup") : l'ordre ne compte pas, pas de répétition.

Nombre de résultats possibles :

Plus rarement : on peut considérer un cas ou l'ordre ne compte pas, mais il peut y avoir répétition.

Exemple : On considère une urne contenant les boules $1, 2, \dots n$ une infinité de fois.

On tire p boules "d'un seul coup" dans cette urne.

Dans ce cas, le nombre de résultats possibles est $\binom{n+p-1}{p}$

Preuve:

Un "résultat" de cette expérience revient à donner, parmi les p boules tirées, combien portent le numéro 1, combien portent le numéro 2, etc...

On peut imaginer que l'on dispose de n boites alignées, numérotées de 1 à n.

On range chaque boule tirée dans la boite correspondant à son numéro.

Calculer le nombre de résultats de l'expérience se ramène donc à calculer combien de façon il y a de ranger p boules dans n boites distinctes!

Maintenant, à la place des n boites alignées, on peut imaginer n-1 "murs" séparants les p boules.

Exemple: Pour n=3 boites et p=4 boules, illustrons quelques résultats possibles:

OO|O|O00|00 O|O|OOOOO|O|0000

C'est un mot de n + p - 1 lettres, qui contient p fois "O" et n - 1 fois "|".

Il y a donc $\frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$ tels an
agrammes. (cf. Exercice 6).

Cela donne bien $\binom{n+p-1}{p}$.

Exercice 8

Une urne contient 10 jetons numérotés de 0 à 9.

- 1. On pioche 3 jetons, un par un et avec remise.
- (a) Combien y a-t-il de tirages possibles?
- (b) Combien de tirages contiennent le jeton 3?
- (c) Combien de tirages ne contiennent que des jetons pairs?
- 2. Mêmes questions lorsque les pioches sont sans remise.
- 3. Mêmes questions lorsque les 3 jetons sont tirés simultanément.

4 Propriétés des coefficients binomiaux

Pour
$$p \in [0, n]$$
, $\binom{n}{p} =$ et pour $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$.

Proposition 8 (Somme des coefficients binomiaux)

Pour tout
$$n \in \mathbb{N}$$
, $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = \binom{n}{n}$

Preuve "combinatoire":

Soit E un ensemble à n éléments (par exemple $E = \{1, 2, \dots, n\}$).

Pour tout $p \in [0, n]$, notant $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties à p éléments. de E, on a

$$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{p=0}^{n} \mathcal{P}_{p}(E)$$
 (union disjointe)

Ainsi
$$Card(\mathcal{P}(E)) = \sum_{p=0}^{n} Card(\mathcal{P}_p(E))$$
, c'est à dire $2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$.

et

Proposition 9 (Propriétés diverses)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les propriétés suivantes :

- Symétrie : Pour tout $p \in [0, n]$,
- Premiers/derniers coefficients:
- "Diagonale": Si $n \ge 1$ et $p \ge 1$, $\binom{n}{p} =$

Preuve:

Vérifier directement les propriétés avec la formule $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Proposition 10 (Formule de Pascal)

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,

Preuve:

Si p > n, cette égalité est simplement : 0 + 0 = 0.

Traitons le cas $p \in [0, n]$.

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \frac{(p+1)n! + (n-p)n!}{(p+1)!(n-p)!}$$

$$= \frac{(n+1)n!}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!((n+1)-(p+1))!} = \binom{n+1}{p+1}$$

12

On représente souvent les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$ dans le **triangle de Pascal**.

La formule de Pascal (Proposition 10) permet de reconstruire ce tableau très rapidement!

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

$$\binom{n}{p}$$
 + $\binom{n}{p+1}$ - $\binom{n+1}{n}$

<u>★</u> Théorème 1 (Formule du binôme de Newton)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n =$

Remarque 4

• Bien-sûr, par symétrie on a aussi $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Les coefficients binomiaux mis en jeu se lisent sur la n-ième ligne du triangle de Pascal :

- Pour n = 1, on obtient $(a + b)^1 = a + b$.
- Pour n=2, on obtient $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. (identité remarquable bien connue!)
- Pour n = 3, on obtient $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Pour n = 4, on obtient $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Preuve du Théorème 1:

- 1. Retrouver par le calcul le fait que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. 2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :



- Utiliser le principe additif et les formules du crible.
- Interpréter un énoncé de dénombrement pour savoir quelle formule utiliser (liste, arrangement ou partie).
- Connaître les propriétés des coefficients binomiaux.



- Utiliser le principe multiplicatif dans des cas généraux.
- Penser à dénombrer \overline{A} plutôt que A (lorsque c'est plus simple)
- Calculer un nombre d'anagrammes.
- Retrouver rapidement le triangle de Pascal.
- Calculer des sommes mettant en jeu les coefficients binomiaux.



Pour les ambitieux

- Utiliser le principe de "bijection" pour dénombrer un ensemble.
 Repérer les énoncés se ramenant à "ranger p boules dans n boîtes" et pouvoir redémontrer la formule.