18

Équivalence et négligeabilité - Corrigé

Exercice 1 (Vrai ou faux ?)

(a) C'est faux si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$! Contre exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$: on n'a pas $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$...
Cependant, c'est vrai si jamais $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0$, car alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

(b) C'est vrai : résultat de cours !
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si (u_n) admet une limite (finie ou infinie), alors (v_n) admet la même limite.

(c) C'est vrai : $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n} \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \dfrac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{u_n - v_n} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

(d) C'est faux ! Par exemple, $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ mais $(n+1) - n = 1$ n'est pas équivalent à 0...

Exercice 2 (Echelle de grandeur 1)

Par commodité, on utilise ici la notation "$u_n << v_n$" (non-standard !) pour signifier $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

A chaque fois, on peut confirmer l'affirmation en vérifiant de tête que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

(a) $\dfrac{1}{n\sqrt{n}} << \dfrac{1}{n\ln(n)} << \dfrac{1}{n} << \dfrac{\ln(n)^3}{n} << \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

(b) $\dfrac{\ln(n)^3}{\sqrt{n}} << \sqrt{n\ln(n)} << n << n\sqrt{n} << \dfrac{n^2}{\ln(n)^5}$

Exercice 3 (Echelle de grandeur 2)

Même notation que dans l'Exercice 2.

(a) Quand $x \to +\infty$: $e^{-x} << \dfrac{1}{x^2} << \dfrac{1}{x} << 1 << \ln(x) << x << x^2 << 2^x << e^x$

(b) Quand $x \to 0$: $x^2 << x << e^x << \ln(x) << \dfrac{1}{x} << \dfrac{1}{x^2}$

(c) Quand $x \to -\infty$: $e^x << 2^x << \dfrac{1}{x^2} << \dfrac{1}{x} << 1 << x << x^2 << e^{-x}$

Exercice 4 (Facile)

(a) $\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{2n} = -\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$

(b) $\dfrac{2n^2+1}{1+2n-n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2n^2}{-n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{n}$

(c) $\left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \times (n + \sqrt{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2} \times n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$

(d) $\dfrac{1}{e^{3n} + \ln(2n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{e^{3n}} = e^{-3n}$

(e) $(n^2 + \cos(n) + 2)^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} (n^2)^3 = n^6$

(f) $\sqrt{n-1} = (n-1)^{1/2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{1/2} = \sqrt{n}$

Exercice 5 (Moins facile)

(a) $\ln(2n^2+1) = \ln\left(2n^2(1 + \dfrac{1}{2n^2})\right) = \ln(2n^2) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2n^2}\right) = \ln(2) + 2\ln(n) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2n^2}\right)$
$= 2\ln(n) + o(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n)$.

(b) $\exp\left(n + \dfrac{1}{n}\right) = e^n \times e^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n \times 1 = e^n$.

(c) $e^{1/n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc $e^{1/n} - 1 = \dfrac{1}{n} + \left(\dfrac{1}{n}\right)$. De même $\tan\left(\dfrac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$ donc $\tan\left(\dfrac{2}{n}\right) = \dfrac{2}{n} + \left(\dfrac{1}{n}\right)$.
En sommant on obtient $e^{1/n} - 1 + \tan\left(\dfrac{2}{n}\right) = \dfrac{3}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, c'est à dire $e^{1/n} - 1 + \tan\left(\dfrac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n}$.

(d) $e^n - 3^n + 2n = -3^n + o(3^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -3^n$

(e) $\sqrt{n^2+n} + n + \sqrt{n} = \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} + n + \sqrt{n} = n\sqrt{1+\frac{1}{n}} + n + \sqrt{n} = n\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}2} + \sqrt{n}.$

De là, on vérifie facilement par exemple que $\dfrac{\sqrt{n^2+n}+n+\sqrt{n}}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Ainsi $\sqrt{n^2+n}+n+\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.

(g) $n^{1/n} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} - 1 = e^{\frac{\ln(n)}{n}} - 1$.

Puisque $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Ainsi $n^{1/n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 6 (Limites de fonctions)

(a) $\dfrac{2x^2-x}{-5x^3+x} \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{2x^2}{-5x^3} = -\dfrac{2}{5x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

(b) $\dfrac{2x^2-x}{-5x^3+x} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{-x}{x} = -1$ donc $\dfrac{2x^2-x}{-5x^3+x} \xrightarrow[x\to0]{} -1$.

(c) $\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{\sqrt{x}} = \dfrac{(1+3x)^{1/3}-1}{\sqrt{x}} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\frac{1}{3}(3x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \xrightarrow[x\to0]{} 0$

(d) $\dfrac{\ln(\cos x)}{x} = \dfrac{\ln\left(1+(\cos(x)-1)\right)}{x} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\cos(x)-1}{x}$ (car $\ln(1+y) \underset{y\to0}{\sim} y$ et ici $y = \cos(x)-1 \xrightarrow[x\to0]{} 0$)

$\underset{x\to0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x} = -\dfrac{x}{2} \xrightarrow[x\to0]{} 0$

Exercice 7 (Étude de signe)

$f(x) = \dfrac{3x^3-4x^2+3}{-x^2+10x+5} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{3x^3}{-x^2} = -3x$. Puisque $-3x < 0$ au voisinage de $+\infty$, on a également $f(x) < 0$ au voisinage de $+\infty$ (c'est à dire pour x assez grand).

Exercice 8 (Équivalent de arctan**)**

On sait que $\tan(y) \underset{y\to0}{\sim} y$. En posant le changement de variable $y = \arctan(x)$ (quand $x \to 0$ on a bien $y \to 0$) on obtient : $\tan(\arctan(x)) \underset{x\to0}{\sim} \arctan(x)$ c'est à dire $x \underset{x\to0}{\sim} \arctan(x)$.
Autrement dit, $\arctan(x) \underset{x\to0}{\sim} x$.

Autrement, on peut aussi vérifier que le ratio tend vers 1
(en repérant qu'il s'agit de la limite d'un taux d'accroissement) :

$$\lim_{x\to0} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x-0} = \arctan'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1.$$

Exercice 9 (Méthode générale)

(a) En appliquant le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n+1} = 1$, c'est à dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$.
Plus simplement, on a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

(b) On a l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N},\ n+\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant n+2\sqrt{n}$.
En repérant que $n+\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $n+2\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, on conjecture naturellement que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Montrons-le en vérifiant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{\dfrac{n+\sqrt{n}}{n}}_{\to1} \leqslant u_n \leqslant \underbrace{\dfrac{n+2\sqrt{n}}{n}}_{\to1}$.

D'après le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$, c'est à dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

(c) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1)u_n = 2$, ce qui s'écrit également $(n-1)u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$.
On en déduit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$.

Exercice 10 (Série harmonique)

1. Soit $x \geqslant 1$.

On applique l'inégalité des acroissements finis à la fonction ln, dérivable sur le segment $[x, x+1]$: on sait que

$$\forall t \in [x, x+1], \quad \frac{1}{x+1} \leqslant \ln'(t) = \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{x}.$$

D'après l'IAF, on déduit : $\frac{1}{x+1} \times (x+1-x) \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x} \times (x+1-x)$,

c'est à dire $\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en sommant ces inégalités :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

ce qui donne :

$$\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \leqslant \ln(n+1) - \ln(1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

autrement dit :

$$S_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) \leqslant S_n.$$

On en déduit l'encadrement de S_n :

$$\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}$$

Puisque $\ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$, on conjecture naturellement que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$.

Montrons-le en vérifiant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(n+1)} = 1$. On a l'encadrement : $1 \leqslant \frac{S_n}{\ln(n+1)} \leqslant 1 + \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)}$.

D'après le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(n+1)} = 1$, c'est à dire $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$.

Plus simplement, on peut affirmer $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ (équivalent $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ déjà vu).

Exercice 11 (Équivalent de $\ln(n!)$)

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\quad \forall t \in [k, k+1], \ \ln(k) \leqslant \ln(t) \leqslant \ln(k+1)$.

En intégrant, on obtient : $\int_k^{k+1} \ln(k)dt \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)dt \leqslant \int_k^{k+1} \ln(k+1)dt$

C'est à dire : $\ln(k) \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)dt \leqslant \ln(k+1)$.

La première inégalité nous donne $\ln(k) \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)dt$.

La deuxième inégalité nous donne (pour tout $k \in \mathbb{N}^*$) $\quad \ln(k+1) \geqslant \int_k^{k+1} \ln(t)dt$

c'est à dire (pour tout $k \geqslant 2$) $\quad \ln(k) \geqslant \int_{k-1}^{k} \ln(t)dt$.

On a donc bien l'encadrement, pour tout $k \geqslant 2$: $\quad \int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \leqslant \ln k \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)dt$.

2. Soit $n \geqslant 2$. En sommant ces inégalités pour $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \ln(t)dt$$

D'après la relation de Chasles : $\quad \int_1^n \ln(t)dt \leqslant \ln\left(\prod_{k=2}^{n} k\right) \leqslant \int_2^{n+1} \ln(t)dt$

c'est à dire $\quad \int_1^n \ln(t)dt \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_2^{n+1} \ln(t)dt$.

---

3. On calcule les intégrales pour obtenir l'encadrement :

$$\Big[t\ln(t)-t\Big]_1^n \leqslant \ln(n!) \leqslant \Big[t\ln(t)-t\Big]_2^{n+1}$$

c'est à dire

$$\underbrace{n\ln(n)-n+1}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)} \leqslant \ln(n!) \leqslant \underbrace{(n+1)\ln(n+1)-(n+1)-2\ln(2)+2}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)}$$

En divisant l'encadrement précédnet par $n\ln(n)$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n!)}{n\ln(n)} = 1$ avec le théorème des gendarmes. On montre ainsi $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

Exercice 12 (Équivalent d'une fonction définie par une intégrale)

1. Il suffit de montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant 1+x$ (et appliquer le résultat avec $x = t^2$ pour $t \in \mathbb{R}_+$)

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, il est déjà clair que $x = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{1+x^2}$, d'où la première inégalité.
- Pour la deuxième inégalité, on peut étudier la fonction $g : x \mapsto \sqrt{1+x^2} - x$ sur $\mathbb{R}_+$.

Il est clair que g y est dérivable et : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \leqslant 0$ (car, à nouveau $x \leqslant \sqrt{x^2+1}$).

Ainsi g est décoissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) \leqslant g(0) = 1$, c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{1+x^2} - x \leqslant 1$, d'où la deuxième inégalité.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En intégrant sur $[0, x]$ les inégalités

$$\forall t \in [0,x],\ \ t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$$

on obtient :

$$\int_0^x t^2 dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^x (1+t^2)dt.$$

Ainsi, on a l'encadrement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ \frac{x^3}{3} \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{x^3}{3}.$$

Avec cet encadrement, on conjecture évidemment que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$.

On le montre en divisant cette ingéalité par $x^3/3$: pour tout $x > 0$, $\quad 1 \leqslant \dfrac{f(x)}{x^3/3} \leqslant \dfrac{3}{x^2} + 1$.

A l'aide du théorème des gendarmes, on déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^3/3}$, c'est à dire bien $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$.

Exercice 13 (Équivalent d'une suite récurrente)

1. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1,2]$.

• Initialisation : On a bien $u_0 = 1 \in [1,2]$.

Vérifions également la propriété au rang 1 : $u_1 = 1 + \dfrac{1}{1} = 2 \in [1,2]$: OK !

• Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $u_n \in [1,2]$ et montrons que $u_{n+1} \in [1,2]$.
(Il est possible de poser $n \geqslant 1$ car on a vérifié "à la main" que $u_1 \in [1,2]$).
On a $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{n+1}$ et comme $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, on obtient $1 + \dfrac{1}{n+1} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 + \dfrac{2}{n+1}$.
Puisque $1 \leqslant 1 + \dfrac{1}{n+1}$ et $1 + \dfrac{2}{n+1} \leqslant 1 + \dfrac{2}{2} = 2$ (car $n \geqslant 1$), cela donne en particulier $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
Ainsi $u_{n+1} \in [1,2]$, ce qui achève la récurrence.

2. On a déjà trouvé un encadrement dans la récurrence précédente :

$$\forall n \geqslant 0, \quad 1 + \frac{1}{n+1} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 + \frac{2}{n+1}$$

c'est à dire

$$\forall n \geqslant 1, \quad 1 + \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{2}{n}.$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n}) = \lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \frac{2}{n}) = 1$, on en déduit bien $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, $\quad u_n - 1 = \dfrac{u_{n-1}}{n}$. Or on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n-1} = 1$, c'est à dire $u_{n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} 1$.
Ainsi : $u_n - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

4. L'équivalent précédent peut aussi se ré-écrire $u_n - 1 \underset{n \to +\infty}{=} \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
c'est à dire effectivement : $u_n \underset{n \to +\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 14 (Équivalent d'une suite implicite)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Il s'agit de montrer que la fonction f_n s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$.
Il est clair que f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a donc le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	-1 $\nearrow$	$+\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (+ stricte monotonie), ou bien le théorème de la bijection, on en déduit qu'il existe un unique réel $u_n \in]0, +\infty[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
Prenons bien note de cette relation importante qui définit la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(u_n) = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n^5 + nu_n - 1 = 0.$$

2. (a) C'est un simple calcul : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^5 + (n+1)u_n - 1 = \underbrace{u_n^5 + nu_n - 1}_{=0} + u_n = u_n.$$

(b) On sait que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ (c'est c'est une suite à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ par définition).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que $f_{n+1}(u_n) = u_n$ donc en particulier

$$f_{n+1}(u_n) > 0 \quad \text{i.e} \quad f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1}) \quad (\text{car } f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 \text{ par définition}) .$$

Puisque la fonction f_{n+1} est strictement croissante, cette dernière inégalité implique que $u_n > u_{n+1}$.
C'est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc (strictement) décroissante.

(c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, on sait donc qu'elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell > 0$. Alors, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^5 + nu_n - 1 = 0$$

on obtient $+\infty = 0$: contradiction ! Ainsi, on ne peut pas avoir $\ell > 0$, c'est donc que $\ell = 0$, i.e $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que

$$u_n^5 + nu_n - 1 = 0 \quad \text{et donc} \quad nu_n = 1 - u_n^5 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Ceci montre que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

4.(a) C'est un simple calcul, toujours en exploitant la même relation... Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$na_n = n\left(\frac{1}{n} - u_n\right) = 1 - nu_n = u_n^5.$$

(b) On a vu que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, donc on en déduit $u_n^5 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^5}$. Ainsi $na_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^5}$ et donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^6}$.

(c) L'équivalent $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{-6}$ que l'on vient d'établir se ré-écrit : $a_n \underset{n\to+\infty}{=} n^{-6} + o(n^{-6})$.
Ainsi $n^{-1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} n^{-6} + o(n^{-6})$ c'est à dire $u_n \underset{n\to+\infty}{=} n^{-1} - n^{-6} - o(n^{-6})$
ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{=} n^{-1} - n^{-6} + o(n^{-6})$.
(Rappel : les constante multiplicatives, notamment les signes, n'importent pas pour les "petits o" !)

Exercice 15 (Une autre suite implicite)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Définissons la fonction $f_n : x \mapsto x^n e^x - 1$, et montrons qu'elle s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+$.
Il est clair que f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
On a donc facilement le tableau de variations suivant (dans lequel on place également le point d'abscisse $x = 1$) :

x	0	1	$+\infty$
$f_n(x)$	-1 ↗	$e-1$ ↗	$+\infty$

D'après le Théorème de la bijection (ou TVI + stricte croissance), f_n s'annule en un unique point $x_n \in \mathbb{R}_+$.
De plus, puisque $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = e - 1 > 0$, on peut même préciser que $x_n \in]0, 1[$.

Notons bien la relation qui définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x_n) = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (x_n)^n e^{x_n} = 1.$$

2. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(x_n)^n e^{x_n} = 1$ donc $(x_n)^n = e^{-x_n}$ et donc $x_n = (e^{-x_n})^{1/n} = e^{-\frac{x_n}{n}}$.
Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < x_n < 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \dfrac{x_n}{n} < \dfrac{1}{n}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n} = 0$.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{x_n}{n}} = e^0 = 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad x_n - 1 = e^{-\frac{x_n}{n}} - 1$.
Or puisque $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et qu'ici $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{x_n}{n} = 0$, on obtient : $e^{-\frac{x_n}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x_n}{n}$, c'est à dire $x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x_n}{n}$.
Enfin, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$, on a $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et donc finalement $x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$.

4. L'équivalent précédent se ré-écrit : $x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
c'est à dire effectivement $x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 16 (Composer un équivalent par $\ln$**)**

(a) On sait que $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$, c'est à dire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Pour tout x au voisinage de a, on écrit :

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \frac{\ln\left(g(x) \times \frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))} = \frac{\ln(g(x)) + \ln\left(\frac{f(x)}{g(x))}\right)}{\ln(g(x)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))}.$$

On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ et donc $\lim\limits_{x \to 0} \ln\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$.

• Si on suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors on a également $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ (puisque $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$!) et donc $\lim\limits_{x \to a} \ln(g(x)) = +\infty$.

• Si on suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ alors on a également $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ (puisque $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$!) et donc $\lim\limits_{x \to a} \ln(g(x)) = -\infty$.

Dans les deux cas, on peut affirmer que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))} = 0$, ce qui montre que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = 1$, c'est à dire que $\ln(f(x)) \underset{x \to a}{\sim} \ln(g(x))$.

(b) De nombreux contre-exemples sont possibles. On peut par exemple définir :

$$\forall x \neq 0, \quad f(x) = 1 + x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - x.$$

Alors on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = \lim\limits_{x \to 0} g(x)$, donc on a bien $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} g(x) \underset{x \to 0}{\sim} 1$.

En revanche on n'a pas $\ln(f(x)) \underset{x \to 0}{\sim} \ln(g(x))$ puisque (avec l'équivalent usuel $\ln(1 + y) \underset{y \to 0}{\sim} y$) :

$$\ln(f(x)) = \ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x \quad \text{et} \quad \ln(g(x)) = \ln(1 - x) \underset{x \to 0}{\sim} -x$$

et évidemment on n'a pas $x \underset{x \to 0}{\sim} -x$!