6

Polynômes

1 Ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$

1.1 Notion de polynôme

Rappel : Étant données deux fonctions $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on peut naturellement définir les fonctions $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$, $\quad f \times g : x \mapsto f(x) \times g(x)$, $\quad f^k : x \mapsto (f(x))^k$ (pour $k \in \mathbb{N}$).

Définition 1 (Monômes)

- On note X la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a ainsi $X^k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array}$ (au sens de la multiplication de fonctions).
- Par convention, X^0 est la fonction constante égale à 1, c'est à dire $X^0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$

Définition 2 (Polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$)

Un polynôme (ou fonction polynômiale) est une **combinaison linéaire de monômes**, c'est à dire une fonction de la forme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 X^0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$, avec $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, $P : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \end{array}$

Les réels $a_0, a_1, \ldots a_n$ sont alors appelés les coefficients du polynôme P.

L'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}[X]$.

Exemples

- La fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$ est un polynôme.

Avec les notations introduites, on la note : $\quad P = 3X^3 - 2X^2 + X + 2X^0$.

Plus simplement encore, on écrira : $\quad P = 3X^3 - 2X^2 + X + 2 \quad$ en comprenant bien que ce "2" désigne la fonction constante égale à 2.

On peut ainsi écrire $3X^3 - 2X^2 + X + 2 \in \mathbb{R}[X]$.

- De même, $\quad X^2 - 1 \in \mathbb{R}[X], \quad X + 1 \in \mathbb{R}[X], \quad 3 \in \mathbb{R}[X]$ (polynôme constant égal à 3 !)

Remarque 1

- Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ étant en fait une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut naturellement évaluer sa valeur $P(a)$ en n'importe quel $a \in \mathbb{R}$.

Dans les calculs, tout se passe alors comme si on "remplaçait" X par a.

Exemple : Pour $P = 2X^3 + X^2 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ on a $\quad P(0) = -1, \quad P(1) = 2, \quad P(-1) = -2$.

- Pour cette raison, il arrive que l'on utilise la notation $P(X)$ pour désigner le polynôme P.

Exemple : On peut écrire $P = X^2 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ ou bien $P(X) = X^2 - 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1.2 Opérations sur les polynômes

Les polynômes étant des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, étant donnés $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on peut bien-sûr définir :

- $P+Q : x \mapsto P(x)+Q(x)$
- $PQ : x \mapsto P(x)Q(x)$
- $P \circ Q : x \mapsto P(Q(x))$
- $\lambda P : x \mapsto \lambda P(x)$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}$).

Proposition 1 (Stabilité de $\mathbb{R}[X]$)

L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ est stable par somme, produit, composition, multiplication par un réel.

Autrement dit, pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad P+Q \in \mathbb{R}[X], \quad PQ \in \mathbb{R}[X], \quad P\circ Q \in \mathbb{R}[X], \quad \lambda P \in \mathbb{R}[X]$.

Exemples

Posons $P = X^2+1$ et $Q = 2X-1$.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ (P+Q)(x) = P(x)+Q(x) = x^2+1+2x-1 = x^2+2x$.

Ainsi $P+Q = X^2+2X \in \mathbb{R}[X]$.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ (PQ)(x) = P(x)Q(x) = (x^2+1)(2x-1) = 2x^3-x^2+2x-1$.

Ainsi $PQ = 2X^3-X^2+2X-1 \in \mathbb{R}[X]$.

Pour effectuer ces calculs, le plus simple est en fait de travailler directement sur les polynômes, en traitant X "comme une variable" !

- $P+Q = X^2+1+2X-1 = X^2+2X$
- $PQ = (X^2+1)(2X-1) = 2X^3-X^2+2X-1$.

Exercice 1

On pose $P = X^2+2X-3$ et $Q = X^2+3X+1$. Calculer $P+Q$, PQ, $3P$, $P\circ Q$ et $Q \circ P$.

- $P+Q = X^2+2X-3+X^2+3X+1 = 2X^2+5X-2$.
- $PQ = (X^2+2X-3)(X^2+3X+1) = X^4+5X^3+4X^2-7X-3$
- $3P = 3(X^2+2X-3) = 3X^2+6X-9$.
- $P\circ Q = P(Q) = Q^2+2Q-3 = (X^2+3X+1)^2+2(X^2+3X+1)-3 = X^4+6X^3+13X^2+12X$

Remarque : Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, on a $P+Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=0}^{n} b_k X^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k+b_k)X^k$.

Proposition 2 (Coefficients d'un produit)

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$, alors $PQ = \sum_{k=0}^{n+p} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

(avec la convention $a_i = 0$ si $i > n$, $b_j = 0$ si $j > p$)

Exemple

Cette formule est utile pour développer rapidement et efficacement un produit de polynômes.

$$(a_0+a_1X+a_2X^2)(b_0+b_1X+b_2X^2) = a_0b_0 + (a_0b_1+a_1b_0)X + (a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)X^2 + (a_1b_2+a_2b_1)X^3 + a_2b_2X^4$$

1.3 Identification des coefficients

Il est bien entendu naturel de décréter que deux polynômes sont les mêmes lorsqu'ils sont égaux en tant que fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 3 (Égalité dans $\mathbb{R}[X]$)

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. On dit que P et Q sont égaux, et on note $P = Q$ lorsque : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = Q(x)$.

En fait, on peut également dire que deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients ! Commençons par un résultat intermédiaire.

Proposition 3 (Polynôme nul)

La fonction constante égale à 0 est appelée polynôme nul et noté simplement $0 \in \mathbb{R}[X]$.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On a l'équivalence : $P = 0 \iff \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = 0$.

Preuve :

L'implication réciproque $\Leftarrow$ est évidente : démontrons l'implication directe.

Supposons $P = 0$, c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n = 0$. Ceci ce ré-écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ P(x) = x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n \right) = 0$$

Si jamais $a_n \neq 0$, on a ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^n \times a_n = \pm\infty$ (selon le signe de a_n). Contradiction !

C'est donc que $a_n = 0$. Mais alors on peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} = 0$ et reprendre le même raisonnement avec a_{n-1}.

On conclut ainsi que $a_n = 0$, puis $a_{n-1} = 0$, puis ... puis $a_1 = 0$.

Finalement, il reste : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a_0 = 0$, donc $a_0 = 0$.

On a bien montré que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = 0$. □

Théorème 1 (Identification des coefficients)

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ avec $a_n \neq 0$ et $Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ avec $b_p \neq 0$.

On a l'équivalence : $P = Q \iff \Big(n = p \text{ et } \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = b_k \Big)$

En particulier, les coefficients d'un polynôme P sont uniques.

Preuve :

L'implication réciproque $\Leftarrow$ est évidente : démontrons l'implication directe.
Supposons $P = Q$, c'est à dire $P - Q = 0$.
D'après la Proposition 1, tous les coefficients de $P - Q$ doivent donc être nuls.

- Supposons $n \neq p$, disons $n > p$ (l'autre cas est similaire).

Alors on peut écrire $P - Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \sum_{k=0}^{p} b_k X^k = \sum_{k=0}^{p} (a_k - b_k) X^k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k X^k$.
Absurde car le coefficient devant X^n est $a_n \neq 0$!

- Ainsi $n = p$ et on peut écrire $P - Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) X^k = 0$.

Tous les coefficients étant nuls, on conclut : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = b_k$. □

Une "application" de l'identification des coefficients de deux polynômes :

Exercice 2

Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \; \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} \iff \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)} \iff \frac{1}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)} \iff 1 = (a+b)x+a$$

On cherche donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \; (a+b)x + a = 1$.

Il est <u>suffisant</u> de choisir a et b tels que $(a+b)X + a = 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

En identifiant les coefficients : $a + b = 0$ et $a = 1$, donc $a = 1$ et $b = 0$ conviennent.

(En fait c'est la seule solution : on verra que deux polynômes qui coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ doivent être les mêmes.)

Proposition 4 (Produit nul dans $\mathbb{R}[X]$)

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a : $\quad PQ = 0 \iff (P = 0 \text{ ou } Q = 0)$.

Autrement dit, dans $\mathbb{R}[X]$: "un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul".

Preuve :

L'implication $(P = 0 \text{ ou } Q = 0) \Rightarrow PQ = 0$ est évidente.
Au lieu de montrer l'implication réciproque $PQ = 0 \Rightarrow (P = 0 \text{ ou } Q = 0)$,
on va montrer sa contraposée : $(P \neq 0 \text{ et } Q \neq 0) \Rightarrow PQ \neq 0$.

Si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, on peut toujours écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ et $Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$ avec $b_p \neq 0$.

On constate alors que le coefficient devant X^{n+p} dans PQ est $a_n b_p \neq 0$. Ainsi $PQ \neq 0$ (car sinon tous ses coefficients seraient nuls).

□

Corollaire 1 ("Simplification" dans $\mathbb{R}[X]$)

Soit $P, Q, A \in \mathbb{R}[X]$. Si $AP = AQ$ et si $A \neq 0$, alors $P = Q$.

Preuve :

On écrit que $AP - AQ = 0$, c'est à dire $A(P - Q) = 0$. L'un des facteurs doit être nul !
Comme $A \neq 0$, on en déduit que $P - Q = 0$, c'est à dire $P = Q$. □

Attention !

Cette "simplification" ne revient pas à "diviser par A" comme on le ferait pour des réels !

Un raisonnement du type : $AP = AQ \Rightarrow \dfrac{AP}{A} = \dfrac{AQ}{A} \Rightarrow P = Q$ est à proscrire !

L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ est stable par multiplication, mais pas par division : on ne peut pas diviser un polynôme par un autre dans $\mathbb{R}[X]$.

1.4 Notion de degré

Définition 4 (Degré d'un polynôme)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ un polynôme, avec $a_n \neq 0$.

L'entier $n \in \mathbb{N}$ est appelé degré de P et est noté $\deg(P)$.

Le coefficient a_n est appelé coefficient dominant de P.
(Lorsque celui-ci est égal à 1, on dit que le polynôme est unitaire.)

Par convention, le degré du polynôme nul est $\deg(0) = -\infty$.

Exemples

- Les polynômes de degré 0 sont les polynômes constants non nuls : $P = a_0 X^0$ avec $a_0 \neq 0$ (que l'on peut simplement noter $P = a_0$).
- Les polynômes de degré 1 sont les fonctions affines $P = a_1 X + a_0$ avec $a_1 \neq 0$.
- Les polynômes de degré 2 sont de la forme $P = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ avec $a_2 \neq 0$.
- Si $P = 3X^4 - X^2 + 2X - 1$ on a $deg(P) = 4$.

Définition 5 (Ensemble des polynômes de degré au plus n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X] = \Big\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leqslant n\Big\}$.

Attention !

$\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas l'ensemble des polynômes de degré égal à n !

Exemple

$\mathbb{R}_2[X]$ est composé des polynômes de degré 2, 1, 0, et du polynôme nul (degré $-\infty$).
On a ainsi : $3X^2 - 2 \in \mathbb{R}_2[X]$, $\quad X + 1 \in \mathbb{R}_2[X]$, $\quad 2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

Proposition 5 (Opérations et degré)

Soient P et Q deux polynômes.

- $deg(P \times Q) = deg(P) + deg(Q)$
- Si $Q \neq 0$ et $P \circ Q \neq 0$, $\quad deg(P \circ Q) = deg(P) \times deg(Q)$
- $deg(P + Q) \leqslant \max(deg(P), deg(Q))$.

Il y a inégalité stricte lorsque $\deg(P) = \deg(Q)$ avec des coefficients dominants opposés.

En particulier, si $deg(P) < deg(Q)$, on a $deg(P + Q) = \deg(Q)$.

Exemples

- Si $P = X^2 - 1$ et $Q = 2X + 2$, on a $PQ = (X^2 - 1)(2X + 2) = 2X^3 + 2X^2 - 2X - 2$.

Ainsi $deg(PQ) = 3 = 2 + 1 = deg(P) + deg(Q)$.

- Si $P = X^2 - 1$ et $Q = 2X + 2$, on a $P + Q = X^2 + 2X + 1$.

Ainsi $deg(P + Q) = 2 = \max(2, 1) = \max(deg(P), deg(Q))$.

- En revanche, si $P = X^2 + 1$ et $Q = -X^2 + 2X + 3$, on a $P + Q = 2X + 4$

Ainsi $deg(P + Q) < 2 = \max(deg(P), deg(Q))$!

Corollaire 2 (Stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par addition et multiplication par un réel.

Autrement dit, pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad P+Q \in \mathbb{R}_n[X] \quad$ et $\quad \lambda P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Preuve :

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc $\deg(P) \leqslant n$ et $\deg(Q) \leqslant n$.

- On a vu que $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$, donc $\deg(P+Q) \leqslant n$, c'est à dire $(P+Q) \in \mathbb{R}_n[X]$.

- Si $\lambda \neq 0$, on a vu que $\deg(\lambda P) = \deg(\lambda) + \deg(P) = \deg(P) \leqslant n$.
- Si $\lambda = 0$, $\deg(\lambda P) = \deg(0) = -\infty \leqslant n$. Dans les deux cas, on a $\deg(\lambda P) \leqslant n$, i.e $\lambda P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$\square$

2 Divisibilité

2.1 Division euclidienne

Théorème 2 (Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$)

Soient $A \in \mathbb{R}[X]$, $B \in \mathbb{R}[X]$ avec $B \neq 0$.

Il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ satisfaisant : $\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$

On dit alors que :

- Q est le quotient de la division euclidienne de A par B.
- R est le reste de cette division.

Attention !

Si $A = BQ + R$, cela ne suffit pas pour dire que Q est le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B. Il faut aussi faire attention au degré de R !

(On peut toujours écrire $A = BQ + R$ en prenant $Q = 0$ et $R = A$...)

Remarques 2

Le degré de Q peut être déterminé par d'avance :

- $\boxed{\text{Si } deg(B) > deg(A), \quad \text{alors} \quad Q = 0 \text{ (et donc } R = A).}$

Exemple : Division euclidienne de $X + 1$ par X^2 : $\quad X + 1 = 0 \times X^2 + (X + 1)$.

- $\boxed{\text{Si } \deg(B) \leqslant \deg(A), \text{ alors } \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B).}$

Exemple : Division euclidienne de $2X^2+1$ par X^2+X+2 : $\quad 2X^2+1 = 2 \times (X^2 + X + 2) + (-2X - 2)$

Méthode : Effectuer la division euclidienne de deux polynômes "explicites"

On peut "poser" une division euclidienne de polynômes comme on "pose" une division pour des entiers.

On construit le quotient petit à petit (en commençant par les monômes de plus haut degré) et l'on réduit au fur et à mesure le dividende, jusqu'à obtenir le reste.

Exercice 3

1. Effectuer la division euclidienne de $A = X^2$ par $B = (X-1)$:
2. Effectuer la division euclidienne de $A = X^3 + 5X^2 - X + 1$ par $B = X^2 - 3X + 2$:

1.

$$\begin{array}{l|l} X^2 & X-1 \\ \cline{2-2} \quad -X(X-1) & X+1 \\ \cline{1-1} X & \\ \quad -1(X-1) & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Conclusion : $X^2 = (X-1)(X+1) + 1$

2.

$$\begin{array}{l|c} X^3 + 5X^2 - X + 1 & X^2 - 3X + 2 \\ \cline{2-2} \quad -X(X^2 - 3X + 2) & X+8 \\ \cline{1-1} 8X^2 - 3X + 1 & \\ \quad -8(X^2 - 3X + 2) & \\ \cline{1-1} 21X - 15 & \end{array}$$

Conclusion : $X^3 + 5X^2 - X + 1 = (X^2 - 3X + 2)(X+8) + 21X - 15$

2.2 Diviseurs et multiples

Définition 6 (Diviseur / Multiple)

Soient $A \in \mathbb{R}[X]$, $B \in \mathbb{R}[X]$ avec $B \neq 0$.
On dit que B divise A, et on note $B \mid A$ lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = BQ$.
(autrement dit, lorsque le reste dans la division euclidienne de A par B est nul)
On alors dit que B est un diviseur de A ou encore que A est un multiple de B.

Exemple

$X - 1$ est un diviseur de $X^2 - 1$ car $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.

Remarques 3

- Le polynôme nul est divisible par n'importe quel polynôme B : $\quad 0 = B \times 0$.
- Un polynôme A est toujours divisible par n'importe quel polynôme constant $\lambda \neq 0$: $\quad A = \lambda \times (\frac{1}{\lambda} A)$.
- Un polynôme $A \neq 0$ est toujours divisible par lui même : $\quad A = A \times 1$.

Proposition 6 (Diviseurs et degré)

Soient A et B deux polynômes <u>non nuls</u>.

- Si $B|A$, alors $deg(B) \leqslant deg(A)$
- Si $B|A$ et si $deg(B) = deg(A)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $A = \lambda B$.
- En particulier, si $B|\ A$ et $A|\ B$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $A = \lambda B$.

Preuve de la Proposition 6 :

Supposons que $B|A$: on peut écrire $A = BQ$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \neq 0$ (car $A \neq 0$).

- $\deg(A) = \deg(B) + \deg(Q) \geqslant \deg(B)$.
- Si $\deg(A) = \deg(B)$, c'est donc que $\deg(Q) = 0$: $Q = \lambda$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- Si $B|A$ et $A|B$, d'après le premier point on a $\deg(B) \leqslant \deg(A)$ et $\deg(A) = \deg(B)$.
Donc d'après le deuxième point, on conclut que $Q = \lambda$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

□

Proposition 7 (Relation de divisibilité)

• Soient $A, B, C \in \mathbb{R}[X]$ avec $B \neq 0$, $C \neq 0$.
Si $C|B$ et si $B|A$, alors $C|\ A$. (Transitivité)

• Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}[X]$ et $B \in \mathbb{R}[X]$ avec $B \neq 0$.
Si B divise $A_1, A_2 \ldots$ et A_n alors B divise tout polynôme de la forme $P = A_1C_1 + \ldots + A_nC_n$ (avec $C_1, \ldots C_n \in \mathbb{R}[X]$).

Preuve rapide :

- Si $B = CQ_1$ et $A = BQ_2$, on peut écrire $A = C(Q_1Q_2)$.
- Si $A_1 = BQ_1$, ..., $A_n = BQ_n$, on peut écrire $A_1C_1 + \ldots + A_nC_n = B(Q_1C_1 + \ldots Q_nC_n)$. □

3 Dérivation et formule de Taylor

Rappel : Pour f et g des fonctions dérivables (sur $\mathbb{R}$) et $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$(af + bg)' = (af)' + (bg)' = af' + bg'. \quad \textbf{(linéarité de la dérivation)}$$

Ainsi si $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$ alors par linéarité de la dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}.$$

Définition 7 (Polynôme dérivé, dérivées successives)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k \in \mathbb{R}[X]$.

- Le polynôme dérivé de P est : $P' = \sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1} \in \mathbb{R}[X]$.
- Soit $i \in \mathbb{N}$. En répétant i fois cette dérivation on obtient la dérivée i-ième de P, notée $P^{(i)}$.

Ainsi : $P^{(0)} = P$ (par convention) et $\forall i \in \mathbb{N},\ P^{(i+1)} = (P^{(i)})'$.

Remarques 4

• Si $P = 0$, alors $\forall i \in \mathbb{N},\ P^{(i)} = 0$.

• La définition de P' coïncide bien-sûr avec la notion classique de dérivée d'une fonction.
On a ainsi les règles de calcul habituelles : $(P + Q)' = P' + Q'$, $(PQ)' = P'Q + PQ'$ etc...

• En particulier, notons que pour $a, b \in \mathbb{R}$, $(aP + bQ)' = aP' + bQ'$.
En dérivant de nouveau : $(aP + bQ)'' = (aP' + bQ')' = aP'' + bQ''$. Par récurrence immédiate :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ (aP + bQ)^{(i)} = aP^{(i)} + bQ^{(i)} \quad \textbf{(linéarité de la dérivation (successive))}$$

Exercice 4

Calculer les dérivées successives de $P = 3X^3 - X^2 + 2X + 7$.

- $P^{(0)} = P = 3X^3 - X^2 + 2X + 7$
- $P^{(1)} = P' = 9X^2 - 2X + 2$
- $P^{(2)} = P'' = 18X - 2$
- $P^{(3)} = 18$
- $P^{(4)} = 0 \quad$ et donc $\forall i \geqslant 4,\ P^{(i)} = 0$.

Proposition 8 (Dérivation et degré)

Soit P un polynôme non constant. Alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

Plus généralement :

- Pour tout $0 \leqslant i \leqslant \deg(P) \quad \deg(P^{(i)}) = \deg(P) - i$
- Pour tout $i > \deg(P), \quad P^{(i)} = 0$.

Preuve rapide :

Notons $n = \deg(P) \geqslant 1$: on peut donc écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

On a alors $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$. Le coefficient dominant de P' est $n a_n \neq 0$ (coeff. devant X^{n-1}).

On voit donc que P' est de degré $n - 1$. On a bien montré $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

Les points suivants s'obtiennent par récurrence immédiate, puisque chaque dérivation abaisse de 1 le degré du polynôme ! Au bout de n dérivations, on a $\deg(P^{(n)}) = 0$, c'est à dire que $P^{(n)}$ est un polynôme constant. Il en résulte que $P^{(n+1)} = 0$, et toutes les dérivées suivantes sont également nulles. $\square$

Proposition 9 (Coefficients de $P^{(i)}$)

- **Dérivées d'un monôme :** Pour $k \in \mathbb{N}$, les dérivées successives de X^k sont données par :
  - Pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $\left(X^k\right)^{(i)} = k(k-1)\ldots(k-i+1)X^{k-i} = \dfrac{k!}{(k-i)!} X^{k-i}$.
  - Pour tout $i > k$, $\left(X^k\right)^{(i)} = 0$.
- **Dérivées d'un polynôme :** Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Les dérivées successives de P sont données par :
  - Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P^{(i)} = \sum_{k=i}^{n} a_k \dfrac{k!}{(k-i)!} X^{k-i}$.
  - Pour tout $i > n$, $P^{(i)} = 0$.

Preuve rapide :

- Les dérivées de X^k s'obtiennent facilement par récurrence.
- Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, par linéarité de la dérivation : $P^{(i)} = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(X^k\right)^{(i)} = \sum_{k=i}^{n} a_k \left(X^k\right)^{(i)}$.

  (car $\left(X^k\right)^{(i)} = 0$ pour $k < i$!)

En appliquant la formule du premier point, on obtient bien $P^{(i)} = \sum_{k=i}^{n} a_k \dfrac{k!}{(k-i)!} X^{k-i}$. $\square$

Corollaire 3 (Coefficients en fonction de dérivées en 0)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Ses coefficients sont donnés par : $\forall i \in [\![0, n]\!],\ a_i = \dfrac{P^{(i)}(0)}{i!}$.

Preuve :

Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a vu que $P^{(i)} = \sum_{k=i}^{n} a_k \dfrac{k!}{(k-i)!} X^{k-i} = a_i \times i! + \sum_{k=i+1}^{n} a_k \dfrac{k!}{(k-i)!} X^{k-i}$.

Donc en évaluant en 0 : $P^{(i)}(0) = a_i \times i! + 0 = a_i \times i!$. On en déduit $a_i = \dfrac{P^{(i)}}{i!}$. □

Théorème 3 (Formule de Taylor pour les polynômes)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Pour tout $\underline{n \geqslant \deg(P)}$, on peut écrire la **formule de Taylor à l'ordre n en α** :

$$P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X-\alpha) + \ldots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^i.$$

Remarque 5

Traditionnellement, on donne un polynôme P comme une combinaison linéaire de puissances de X. La formule de Taylor en α permet en fait de ré-exprimer P comme une combinaison linéaire de puissances de $(X-\alpha)$. On écrira en général la formule à l'ordre $n = \deg(P)$.

Exemple : Pour $\boxed{P = X^3 - 2X + 1}$, écrivons la formule de Taylor à l'ordre 3 en 1 :

$$P = P(1) + P'(1)(X-1) + \frac{P''(1)}{2!}(X-1)^2 + \frac{P^{(3)}(1)}{3!}(X-1)^3.$$

On calcule :
- $P = X^3 - 2X + 1$ donc $P(1) = 0$
- $P' = 3X^2 - 2$ donc $P'(1) = 1$.
- $P'' = 6X$ donc $P''(1) = 6$.
- $P^{(3)} = 6$ donc $P^{(3)}(1) = 6$.

On obtient ainsi : $\boxed{P = (X-1) + 3(X-1)^2 + (X-1)^3}$

Preuve :
On a $n \geqslant \deg(P)$, donc on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (avec éventuellement des coefficients nuls).

- Montrons la formule pour $\alpha = 0$. On a vu que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $a_i = \dfrac{P^{(i)}(0)}{i!}$.

On a donc bien : $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{P^{(i)}(0)}{i!}(X-0)^i$.

- Montrons la formule pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = P(x+\alpha) \quad (\star)$

Cela revient à poser le polynôme $Q = Q(X) = P(X+\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X+\alpha)^k \in \mathbb{R}[X]$.

On peut appliquer la formule de Taylor à l'ordre n en 0 à Q : $Q = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{Q^{(i)}(0)}{i!} X^i$.

En dérivant $(\star)$, on voit facilement que : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $Q^{(i)}(x) = P^{(i)}(x+\alpha)$.

En particulier, $Q^{(i)}(0) = P^{(i)}(\alpha)$. Ainsi : $Q = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} X^i$

et donc $P = P(X) = Q(X-\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^i$. □

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ satisfaisant $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P^{(i)}(2) = 0$. Que dire de P ?

On a $\deg(P) \leqslant n$, donc on peut écrire la formule de Taylor à l'ordre n en 2 :

$$P = P(2) + P'(2)(X-2) + \ldots + \frac{P^{(n)}(2)}{n!}(X-2)^n = P(2).$$

P est donc un polynôme constant.
Inversement, tout polynôme P constant satisfsait $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P^{(i)}(2) = 0$.

4 Racines d'un polynôme

4.1 Notion de racine et divisibilité

Définition 8 (Racine d'un polynôme)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est une racine de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Exemples

- $P = X + 1$ admet une racine : -1. $\quad P(x) = 0 \iff x + 1 = 0 \iff x = -1$.
- $P = X(X-1)$ admet deux racines : 0 et 1. $\quad P(x) = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 1$
- $P = X^2 + 1$ n'admet pas de racine (dans $\mathbb{R}$) ! $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x^2 + 1 \geqslant 1$.

Attention !

Rappelons que X est un polynôme, donc une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$!
Lors de la recherche de racines, on évitera donc d'écrire $X(X-1) = 0 \iff X = 0$ ou $X = 1$.
On préfèrera évaluer le polynôme P en un réel particulier ($P(\alpha) = \ldots$)
ou bien introduire $x \in \mathbb{R}$ et résoudre l'équation $P(x) = 0$ d'inconnue x.

Remarque 6

Le polynôme nul admet n'importe quel réel comme racine.
On verra que c'est l'unique polynôme admettant une infinité de racine !

Théorème 4 (Racines et divisibilité)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence : $\quad \alpha$ est une racine de $P \iff (X - \alpha) \mid P$.
2. Plus généralement, pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels deux à deux distincts, on a l'équivalence :

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ sont des racines de } P \iff P \text{ est divisible par } (X - \alpha_1) \times \ldots \times (X - \alpha_n).$$

Preuve du Théorème 4 :

$\boxed{1}$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Écrivons la division euclidienne de P par $X-\alpha$: $P = (X-\alpha)\times Q + R$.
On doit avoir $\deg(R) < \deg(X-\alpha) = 1$ c'est à dire $\deg(R) \leqslant 0$. R est donc un polynôme constant : on peut écrire $R = \lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi $P(X) = (X-\alpha)Q(X) + \lambda$ et donc $P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) + \lambda = \lambda$.
On a donc les équivalences :

$$\alpha \text{ est une racine de } P \iff P(\alpha) = 0 \iff \lambda = 0 \iff R = 0 \iff (X-\alpha)|P$$

(car $(X-\alpha)$ divise P si et seulement si le reste dans la division euclidienne est nul !)

$\boxed{2}$ Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ deux à deux distincts.

- L'implication réciproque $\Leftarrow$ est évidente : si P est divisible par $\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)$, on peut écrire

$P(X) = Q(X) \times \prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)$ et en évaluant on voit que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(\alpha_k) = 0$.

- Montrons l'implication directe $\Rightarrow$ par récurrence. Pour tout $n \geqslant 1$, posons :

$$\mathcal{P}(n) : \text{"Si } P \in \mathbb{R}[X] \text{ et } \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ sont des racines de } P \text{ 2 à 2 distinctes, alors } \prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k) \,\Big|\, P \text{ "}$$

\- La proposition $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après le point $\boxed{1}$ (cas d'une seule racine)

\- Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\mathcal{P}(n)$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ des racines de P deux à deux distinctes.

Montrons que P est divisible par $\prod_{k=1}^{n+1}(X-\alpha_k)$.

On sait que α_{n+1} est racine de P. Donc d'après $\boxed{1}$, $(X-\alpha_{n+1})$ divise P :
il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q(X) \times (X-\alpha_{n+1})$.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $P(\alpha_k) = 0$, i.e $Q(\alpha_k)(\alpha_k - \alpha_{n+1}) = 0$ et donc $Q(\alpha_k) = 0$.

Ainsi $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des racines de Q 2 à 2 distinctes !

D'après $\mathcal{P}(n)$ (appliquée au polynôme Q !), il en résulte que Q est divisible par $\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)$.

Il existe donc $\widetilde{Q} \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = \widetilde{Q} \times \prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)$.

On conclut : $P = Q \times (X-\alpha_{n+1}) = \widetilde{Q} \times \prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k) \times (X-\alpha_{n+1}) = \widetilde{Q} \times \prod_{k=1}^{n+1}(X-\alpha_k)$.

Ceci montre $\mathcal{P}(n+1)$ et achève la récurrence.

$\square$

Une conséquence importante de ce théorème est que le nombre de racines distinctes d'un polynôme est limité par son degré !

Proposition 10 (Nombre de racines distinctes)

- Un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus n racines distinctes.
- Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ (i.e $\deg(P) \leqslant n$) admet $n+1$ racines distinctes, alors $P = 0$.

En particulier si un polynôme admet une infinité de racines, il est nul.

Preuve :

- Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ (ainsi $P \neq 0$).

Si P admet r racines distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, d'après le Théorème 4, $\prod_{k=1}^{r}(X - \alpha_k)$ divise P.

Il faut donc que $\deg\left(\prod_{k=1}^{r}(X - \alpha_k)\right) \leqslant \deg(P)$, c'est à dire $r \leqslant n$.

Ainsi P admet au plus n racines distinctes !

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Si jamais $P \neq 0$, d'après le premier point, P admet au plus $\deg(P)$ racines distinctes, donc moins de n racines distinctes.

Par contraposée, si P admet au moins $n+1$ racines, il doit être nul. $\square$

Exemples

Ainsi, un polynôme de degré 2 admet au maximum 2 racines distinctes (on le savait déjà !), un polynôme de degré 3 admet au maximum 3 racines distinctes, etc...

Attention !

Il s'agit bien d'une majoration : le nombre de racines distinctes n'est pas forcément égal au degré !

Exemples :
- $X(X-1)$ est de degré 2 et admet deux racines distinctes : 0 et 1.
- $(X-1)^2$ est de degré 2 et admet une seule racine : 1.
- $X^2 + 1$ est de degré 2 et n'admet aucune racine (réelle).

Exercice 6

Justifier que la fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas un polynôme.

La fonction cos s'annule une infinité de fois (en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$).
Si c'était un polynôme, il aurait une infinité de racine, donc serait le polynôme nul !
Or bien-sûr $\cos \neq 0$ (car $\cos(0) = 1$ par exemple).

Le résultat suivant, conséquence de la Proposition 10, est souvent utile (à re-démontrer au cas par cas) :

Corollaire 4 (Polynômes "qui coïncident")

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Si P et Q coïncident en au moins $n+1$ points distincts, alors $P = Q$.
En particulier, deux polynômes qui coïncident en un infinité de points sont égaux.

Preuve (à savoir reproduire):

On pose $A = P - Q$. Comme $\deg(P) \leqslant n$ et $\deg(Q) \leqslant n$, on a aussi $\deg(A) \leqslant n$.

Si P et Q coïncident en au moins $n+1$ un points, alors A admet au moins $n+1$ racines.
C'est donc que $A = 0$ i.e $P = Q$. $\square$

4.2 Multiplicité d'une racine

Définition 9 (Racine multiple)

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
On dit que α est une racine de P de multiplicité m lorsque :

$$P \text{ est divisible par } (X-\alpha)^m \text{ mais pas par } (X-\alpha)^{m+1}.$$

- Lorsque $m=1$, on parle de racine simple.
- Lorsque $m=2$, on parle de racine double.

Remarque 7

Notons que la multiplicité d'une racine est forcément inférieure ou égale au degré du polynôme !

Exemples

- Si $P=(X-1)^2(X+2)$: P est de degré 3, 1 est racine double et -2 est racine simple.
Ainsi, P n'admet que deux racines distinctes, mais on dit qu'il admet 3 racines "comptées avec multiplicité" (on compte 1 deux fois).

- Si $P=(X^2+1)(X-2)^3(X+1)$: P est de degré 6, 2 est racine triple, -1 est racine simple.
Ainsi, P n'admet que deux racines distinctes, mais 4 racines comptées avec multiplicité (on compte 2 trois fois).

On dispose naturellement d'un équivalent du Théorème 4 (Racines et divisibilité) pour les racines multiples :

Théorème 5 (Racines multiples et divisibilité (admis))

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ sont des racines de P deux à deux distinctes, de multiplicités respectives $m_1,\ldots,m_r$, alors P est divisible par $(X-\alpha_1)^{m_1}\times\ldots\times(X-\alpha_r)^{m_r}$.

Remarque 8

La réciproque n'est ici pas tout à fait vraie : si P est divisible par $(X-\alpha_1)^{m_1}\times\ldots\times(X-\alpha_n)^{m_n}$, alors $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ sont racines de P de multiplicité au moins m_1, ..., m_n (mais éventuellement plus !)

Exemple : $P=(X-1)^3$ est bien divisible par $(X-1)^2$, mais 1 est en fait racine de multiplicité 3.

À nouveau, les multiplicités des racines d'un polynôme sont limitées par son degré !

Proposition 11 (Nombre de racines comptées avec multiplicité)

- Un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus n racines comptées avec multiplicité.
- Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ admet au moins $n+1$ racines comptées avec multiplicité, alors $P=0$.

Preuve :

Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ (ainsi $P \neq 0$).

Si P admet r racines distinctes $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ de multiplicités respectives $m_1,\ldots,m_r$, d'après le Théorème 5, $\displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X-\alpha_k)^{m_k}$ divise P.

Il faut donc que $\deg\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X-\alpha_k)^{m_k}\right) \leqslant \deg(P)$ c'est à dire $m_1+\ldots+m_r \leqslant n$.
Ainsi la somme des multiplicités ne peut pas excéder n : P admet au plus n racines comptées avec multiplicité. Le second point découle facilement du premier. $\square$

À partir des dérivées de P, on dispose d'un critère pour déterminer exactement la multiplicité d'une racine.

Théorème 6 (Racine multiple et dérivation)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
α est une racine de P de multiplicité m si et seulement si :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Preuve :

Notons $n = \deg(P)$. Écrivons la formule de Taylor à l'ordre n en α :

$$P = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^i = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^i + \sum_{i=m}^{n} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^i$$

ce qui peut se ré-écrire

$$P = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^i + (X-\alpha)^m \sum_{i=m}^{n} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^{i-m} = (X-\alpha)^m Q + R$$

avec $Q = \displaystyle\sum_{i=m}^{n} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^{i-m}$ et $R = \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^i$.

Comme $\deg(R) \leqslant m-1 < \deg((X-\alpha)^m)$, il s'agit de la division euclidienne de P par $(X-\alpha)^m$!

Ainsi on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
(X-\alpha)^m \text{ divise } P \iff R = 0 &\iff \sum_{i=0}^{m-1} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X-\alpha)^i = 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{i=0}^{m-1} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(x-\alpha)^i = 0 \\
&\iff \forall y \in \mathbb{R},\ \sum_{i=0}^{m-1} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}y^i = 0 \\
&\iff \sum_{i=0}^{m-1} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}X^i = 0 \\
&\iff \forall i \in [\![0, m-1]\!],\ \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} = 0 \\
&\iff \forall i \in [\![0, m-1]\!],\ P^{(i)}(\alpha) = 0
\end{aligned}$$

On a donc établi : $(X-\alpha)^m$ divise $P \iff P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0 \ldots$ et $P^{(m-1)}(\alpha) = 0$.
De même : $(X-\alpha)^{m+1}$ divise $P \iff P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0 \ldots$ et $P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) = 0$.
Ainsi, pour finir :

$$\begin{aligned}
\alpha \text{ est racine de multiplicité } m &\iff (X-\alpha)^m \text{ divise } P \text{ et } (X-\alpha)^{m+1} \text{ ne divise pas } P \\
&\iff P(\alpha) = 0 \text{ et } P'(\alpha) = 0 \ldots \text{ et } P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0.
\end{aligned}$$

□

Exercice 7

Montrer que 1 est racine de $P = X^3 + X^2 - 5X + 3$ et déterminer sa multiplicité.

On calcule $P(1) = 1 + 1 - 5 + 3 = 0$: 1 est bien racine de P.

$P' = 3X^2 + 2X - 5$ donc $P'(1) = 3 + 2 - 5 = 0$: 1 est de multiplicité au moins 2.

$P'' = 6X + 2$ donc $P''(1) = 6 + 2 = 8 \neq 0$: donc 1 est de multiplicité 2.

5 Factorisation de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$

5.1 Rappels pour les polynômes de degré 2

Proposition 12 (Factorisation d'un polynôme de degré 2)

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$ et soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, alors on peut écrire $P = a(X - x_1)(X - x_2)$ avec $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
  x_1 et x_2 sont ainsi des racines simples (distinctes) de P.
- Si $\Delta = 0$, alors on peut écrire $P = a(X - x_0)^2$ avec $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
  x_0 est ainsi une racine double de P.
- Si $\Delta < 0$, alors P n'admet aucune racine réelle.
  On ne peut pas le factoriser sous une forme plus simple.

Preuve rapide :

On peut vérifier en développant que les polynômes factorisés sont bien égaux à P.
Si $\Delta \geqslant 0$ (dans le cas $\Delta = 0$ on a $x_1 = x_2 = x_0$), on a :

$$a(X - x_1)(X - x_2) = a(X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1x_2) = aX^2 - a(x_1 + x_2)X + ax_1x_2$$

et on remarque que $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$, d'où $a(X - x_1)(X - x_2) = aX^2 + bX + c = P$. $\square$

5.2 Cas d'un polynôme général

Théorème 7 (Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ (admis))

Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant peut se factoriser sous la forme :

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{q} (X^2 + b_jX + c_j)^{s_j}$$

où :
- $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est le **coefficient dominant** de P.
- $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ sont les **racines** deux à deux distinctes de P.
- $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}^*$ sont les **multiplicités** de ces racines.
- $(b_1, c_1), \dots, (b_q, c_q) \in \mathbb{R}^2$ sont deux à deux distincts, tels que : $\forall j \in [\![1, q]\!],\ \Delta_j = b_j^2 - 4c_j < 0$
  (Autrement dit, le **discriminant** de $X^2 + b_jX + c_j$ est **négatif**)
- $s_1, \dots, s_q \in \mathbb{N}^*$.

Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Remarque 9

Notons que les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ n'ayant aucune racine sont ceux qui se mettent sous la forme

$$P = \lambda \prod_{j=1}^{q} (X^2 + b_j X + c_j)^{s_j}$$

Le degré d'un tel polynôme est $2s_1 + 2s_2 + \ldots + 2s_q$: P est donc de degré pair !

Par contraposée, on en déduit : $\boxed{\text{Un polynôme de degré impair admet toujours au moins une racine.}}$

Méthode : Factoriser un polynôme de degré 2

Si $P = aX^2 + bX + c$ (avec $a \neq 0$).

Méthode 1 (basique) : Calculer le discriminant et appliquer le résultat de la Proposition 12.
Méthode 2 (quand c'est possible) : Utiliser une identité remarquable.
Méthode 3 (quand c'est possible) : Repérer une racine évidente ($\alpha = 0$ ou ± 1 ou ± 2), puis utiliser les propriétés sur la somme et le produit des racines pour déterminer la deuxième.

Méthode : Factoriser un polynôme de degré supérieur ou égal à 3

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(P) \geqslant 3$.
L'objectif est de se ramener à un polynôme de degré inférieur, plus facile à factoriser !

$\boxed{1}$ Touver une racine α de P (souvent une racine évidente $\alpha = 0$ ou ± 1 ou ± 2).

$\boxed{2}$ Déterminer la multiplicité m de α en calculant $P'(\alpha), P''(\alpha)$ etc...

$\boxed{3}$ On sait alors qu'on peut écrire $P = (X - \alpha)^m \times Q$ avec $\deg(Q) = \deg(P) - m$.
Déterminer le polynôme Q en posant la division euclidienne de P par $(X - \alpha)^m$.
(remarque : le reste doit être nul !) (On peut aussi déterminer Q en identifiant ses coefficients...)

$\boxed{4}$ On est maintenant ramené à factoriser Q !
Si $\deg(Q) \leqslant 2$ c'est aisé, sinon on reprend cette même méthode à nouveau.

En plus de ça, il peut parfois être utile/plus rapide de :

- Repérer une identité remarquable
- Utiliser d'autres propriétés du polynôme P

(si $P(X)$ peut s'écrire $Q(X^2)$ par exemple, il peut être utile de factoriser le polynôme Q...)

Attention :
- Ne pas oublier de mettre le coefficient dominant de P "devant" !
- Un polynôme qui n'a pas de racine peut tout de même être factorisé.

Exercice 8

Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$.

(a) $P = 2X^3 + 2X^2 - 10X + 6$ (b) $P = 3X^4 - 4X^3 - 4X^2 + X - 2$ (c) $P = X^4 + 1$

(a) On remarque que $P(1) = 2 + 2 - 10 + 6 = 0$: 1 est racine de P.
$P' = 6X^2 + 4X - 10$ donc $P'(1) = 6 + 4 - 10 = 0$.
$P'' = 12X + 4$ donc $P''(1) = 16 \neq 0$: 1 est donc racine double.

On cherche donc à écrire $P = (X - 1)^2 \times Q$ (on sait que $\deg(Q) = 1$)

On pose la division euclidienne de $P = 2X^3 + 2X^2 - 10X + 6$ par $(X - 1)^2 = X^2 - 2X + 1$...

On obtient $P = (X-1)^2 \times (2X+6)$ ce qu'on peut ré-écrire $P = 2(X-1)^2(X+3)$.

(b) On remarque que $P(-1) = 3+4-4-1-2 = 0$: $\quad -1$ est racine de P.
On remarque que $P(2) = 3\times 16 - 4\times 8 - 4\times 4 + 2 - 2 = 0$.
On pourrait chercher les multiplicités de -1 et 2.
Mais on peut aussi écrire tout de suite $P = (X+1)(X-2)Q$.
(On aura $\deg(Q) = 2$)

On pose la division euclidienne de $P = 3X^4 - 4X^3 - 4X^2 + X - 2$ par $(X+1)(X-2) = X^2 - X - 2$.

On obtient $P = (X+1)(X-2)\times(3X^2 - X + 1)$.

Factorisons $Q = 3X^2 - X + 1$. Discriminant : $\Delta = 1 - 4\times 3 = -11 < 0$.

On ne peut donc pas factoriser Q d'avantage !

Conclusion : $P = (X+1)(X-2)(3X^2 - X + 1) = 3(X+1)(X-2)(X^2 - \frac{1}{3}X + \frac{1}{3})$.

(c) $P = X^4 + 1$. On constate facilement que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x^4 + 1 \geqslant 1$.
Donc P n'a pas de racine réelle... Il s'agit de repérer/faire apparaître une identité remarquable.

$$P = X^4+1 = (X^2)^2+1^2 = (X^2+1)^2 - 2X^2 = (X^2+1)^2 - (\sqrt{2}X)^2 = \left(X^2+1+\sqrt{2}X\right)\left(X^2+1-\sqrt{2}X\right)$$

Ces deux polynômes de degré 2 ont un discriminant négatif (sinon P aurait une racine...).
On a donc terminé la factorisation !

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Effectuer des calculs avec des polynômes.
- Déterminer facilement le degré d'un polynôme (même "non développé").
- Poser la division euclidienne de deux polynômes de petits degrés.
- Déterminer une racine et sa multiplicité.

Pour suivre

- Connaître ou retrouver rapidement la formule donnant les coefficients de P'.
- Connaître le lien entre nombre de racines et degré d'un polynôme.
- Montrer qu'un polynôme est nul en lui trouvant "trop" de racines.
- Factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ en repérant des racines évidentes.

Pour les ambitieux

- Savoir exploiter la formule de Taylor quand elle est utile.
- Factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ en utilisant des calculs astucieux (identités remarquables...)
- Maîtriser toutes les preuves du cours.