Devoir Sur Table n°3 – Corrigé

Exercice 1 : Alea Iacta, Victoria Certa ! ("Le sort en est jeté, la victoire est certaine")

1. (a) Avec du dénombrement par exemple...
On peut modéliser un résultat de cette expérience aléatoire par :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_N) \text{ avec } \forall i \in [\![1, N]\!],\ x_i \in [\![1, N]\!].$$

(x_i donnant le numéro obtenu au lancer numéro i) Autrement dit, $\Omega = [\![1, N]\!]^N$.
Nous sommes en situation d'équiprobabilité.
En notant A l'évènement "Obtenir 1 au moins une fois", on a :

$$\begin{aligned} P(A) = 1 - P(\overline{A}) &= 1 - P(\text{"ne jamais obtenir 1"}) \\ &= 1 - \frac{\text{Nb de résultats sans 1}}{\text{Nb total de résultats}} \\ &= 1 - \frac{(N-1)^N}{N^N} \\ &= 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^N. \end{aligned}$$

Ainsi la probabilité voulue est $\boxed{P(A) = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N}$.

(b) On choisit $N = 1$ million $= 10^6$ ici.
Si les chances de succès à chaque épreuve sont de $1/10^6$ (comme obtenir un 1 sur un dé à 10^6 faces), alors en répétant 10^6 fois l'expérience, la probabilité d'être vainqueur (au moins une fois) est $1 - (1 - \frac{1}{10^6})^{10^6}$ comme on vient de le voir.

• *Développement personnel à deux sous :* Si tes chances de succès sont d'une sur un million, essaye un million de fois et tu seras forcément vainqueur !
$\boxed{\text{C'est évidemment faux puisque } 1 - (1 - \frac{1}{10^6})^{10^6} \neq 1}$

• *"Règle des 63%" :* Si tes chances de succès sont d'une sur un million, essaye un million de fois et tu auras environ 63% de chance d'être vainqueur...
C'est vrai : pour le voir on peut considérer que $N = 10^6$ est très grand et donc regarder le cas où $N \to +\infty$:

$$\lim_{N\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N = \lim_{N\to+\infty} \exp\left(N \ln\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right) = \exp(-1) = e^{-1}$$

car $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} N \ln\left(1 - \frac{1}{N}\right) = -\lim_{N\to+\infty} \frac{\ln(1 - 1/N)}{-1/N} = -\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = -1$ par limite usuelle.

Ainsi, quand $N \to +\infty$ la probabilité de voir obtenir au moins un succès converge :

$$1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1 - e^{-1} \simeq 1 - 0,37 \simeq 0,63.$$

Quand N est grand, $\boxed{\text{cette probabilité est donc effectivement proche de } 63\%}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire $P(B_n) = 1 - P(\overline{B_n})$.
Or, $\overline{B_n} =$ "Ne pas obtenir de succès au cours des n premières épreuves" $= \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$.

Les évènements $\overline{A_k}$ étant mutuellement indépendants, on en déduit

$$P(\overline{B_n}) = \prod_{k=1}^{n} P(\overline{A_k}) \prod_{k=1}^{n}(1 - P(A_k) = \prod_{k=1}^{n}(1 - p_k).$$

On obtient donc $\boxed{P(B_n) = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - p_k)}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si l'évènement C est réalisé, alors en particulier on n'a pas obtenu de succès au cours des n premières épreuves (puisqu'on n'a jamais obtenu de succès).

La réalisation de C implique donc celle de $\overline{B_n}$: on a $\boxed{C \subset \overline{B_n}}$

On en déduit que $P(C) \leqslant P(\overline{B_n})$, c'est à dire $\boxed{P(C) \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1 - p_k)}$.

3. On suppose l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$. Dans ce cas, la majoration précédente donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(C) \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1 - p_k) = \prod_{k=1}^{n}(1 - p) = (1 - p)^n.$$

Evidemment, une probabilité est positive, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant P(C) \leqslant (1 - p)^n$.
Puisque $1 - p \in]0, 1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 - p)^n = 0$.

En passant à la limite dans notre inégalité, on déduit donc que $\boxed{P(C) = 0}$.

4. (a) Supposons que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisfait $(\mathcal{H}_1)$ et montrons qu'elle satisfait alors $(\mathcal{H}_2)$.
On suppose donc qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = p$.

Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} p = np \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$

On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} p_k = +\infty$, $\boxed{\text{d'où } (\mathcal{H}_2)}$.

(b) • Considérons $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = 1 - \frac{1}{2^k}$.
Cette suite n'est pas constante donc ne satisfait pas $(\mathcal{H}_1)$. En revanche :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} p_k &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(1 - \frac{1}{2^k}) = \lim_{n\to+\infty}\left(n - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(n - \frac{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(n - 1 + \frac{1}{2^n}\right) = +\infty.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Cette suite satisfait } (\mathcal{H}_2)}$.

• Considérons $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = \ln(1 + \frac{1}{k})$.
Cette suite n'est pas constante donc ne satisfait pas $(\mathcal{H}_1)$. En revanche :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} p_k &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) = \lim_{n\to+\infty}(\ln(n+1) - \ln(1)) = +\infty.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Cette suite satisfait } (\mathcal{H}_2)}$.

(c) • Pour montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1 + x) \leqslant x$
on introduit $g : x \mapsto \ln(1 + x) - x$ et on vérifie que $g \leqslant 0$ sur $]-1, +\infty[$.
La fonction g est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et $\forall x \in]-1, +\infty[,\ g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1.$
On a ensuite facilement $g'(x) \geqslant 0 \iff -1 < x \leqslant 0$, d'où le tableau de variations :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

On en lit bien sur ce tableau que $\forall x \in]-1,+\infty[,\ g(x) \leqslant 0$, $\boxed{\text{d'où l'inégalité voulue}}$.

- Ensuite, grâce à cete inégalité, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(P(\overline{B_n}) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1-p_k)\right) = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\ln(1-p_k)}_{\leqslant -p_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} -p_k,$$

d'où $\boxed{\ln(P(\overline{B_n})) \leqslant -\sum_{k=1}^{n} p_k}$.

(d) Rappelons qu'on a vu que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant P(C) \leqslant P(\overline{B_n})$.

Or, si on suppose l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$, on a : $\ln(P(\overline{B_n})) \leqslant -\sum_{k=1}^{n} p_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

Par comparaison, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \ln(P(\overline{B_n})) = -\infty$,

puis que $\lim_{n\to+\infty} P(\overline{B_n}) = 0$ (car bien-sûr $P(\overline{B_n}) = e^{\ln(P(\overline{B_n}))}$).

En passant à la limite dans l'inégalité $0 \leqslant P(C) \leqslant P(\overline{B_n})$, on en déduit que $\boxed{P(C) = 0}$.

5. Pour finir, on considère les probabilités de succès : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = \dfrac{1}{(k+1)^2}$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Ainsi on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k \leqslant 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1$. Il est donc impossible que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} p_k = +\infty$.

$\boxed{\text{La suite } (p_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ ne satisfait donc pas l'hypothèse } (\mathcal{H}_2)}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappelons qu'on a vu que $P(B_n) = 1 - \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-p_k)$.

Avec ici $p_k = \dfrac{1}{(k+1)^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}(1-p_k) &= \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1-1)(k+1+1)}{(k+1)^2} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} \times \prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k+1} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+2}{2} \quad \text{par téléscopage.}\end{aligned}$$

On obtient donc l'expression : $\boxed{P(B_n) = 1 - \dfrac{n+2}{2(n+1)} = \dfrac{n}{2(n+1)}}$.

En admettant que $P(C) = \lim_{n\to+\infty} P(\overline{B_n})$, on a ici

$$P(C) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{2(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{2}.$$

On a donc $\boxed{P(C) = \frac{1}{2} \neq 0}$.
Ainsi cette fois, bien que chaque épreuve soit indépendante et que la probabilité d'obtenir une succès soit strictement positive à chaque épreuve, il est possible (il y a même carrément une chance sur deux !) de ne jamais obtenir de succès au cours de la succession infinie d'épreuve.

Exercice 2 : Etude de deux suites implicites

1. (a) Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on rappelle que $\boxed{x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}}$.
On sait bien-sûr que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{xto+\infty} \ln(x) = +\infty$. On distingue donc deux cas :
• <u>Si $\alpha > 0$</u>, $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \alpha \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{xto+\infty} \alpha \ln(x) = +\infty$,
et donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0 \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty}$.

• <u>Si $\alpha < 0$</u>, $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} \alpha \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{xto+\infty} \alpha \ln(x) = -\infty$,
et donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0}$.

(b) f_α est-elle prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{(1-x^\alpha)\ln(x)}$ existe et est finie.
• <u>Si $\alpha > 0$</u>, $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - x^\alpha) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 - x^\alpha)\ln(x) = -\infty$
et donc $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{(1-x^\alpha)\ln(x)} = 0$. $\;$ f_α est donc prolongeable par continuité en 0 (en posant $f_\alpha(0) = 0$).

• <u>Si $\alpha < 0$</u>, $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - x^\alpha) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 - x^\alpha)\ln(x) = +\infty$
et donc $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{(1-x^\alpha)\ln(x)} = +\infty$. $\;$ f_α n'est donc pas prolongeable par continuité en 0.

Conclusion : $\boxed{f_\alpha \text{ est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si } \alpha > 0}$.

(c) • <u>Si $\alpha > 0$</u>, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x^\alpha) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x^\alpha)\ln(x) = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = 0}$.

• <u>Si $\alpha < 0$</u>, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x^\alpha) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x^\alpha)\ln(x) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = +\infty}$.

2. On suppose $\alpha < 0$. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f_\alpha(x) - x}{x^{\alpha+1}\ln(x)} &= \frac{x^{1-x^\alpha} - x}{x^{\alpha+1}\ln(x)} = \frac{x(x^{-x^\alpha} - 1)}{x^{\alpha+1}\ln(x)} = \frac{x^{-x^\alpha} - 1}{x^\alpha \ln(x)} \\ &= \frac{e^{-x^\alpha \ln(x)} - 1}{x^\alpha \ln(x)} = -\Big(\frac{e^{-x^\alpha \ln(x)} - 1}{-x^\alpha \ln(x)}\Big). \end{aligned}$$

Puisque $\alpha < 0$, on a ici $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha \ln(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^{-|\alpha|}} = 0$ par croissances comparées.
En posant alors le changement de variable $y = -x^\alpha \ln(x)$, on en déduit :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_\alpha(x) - x}{x^{\alpha+1}\ln(x)} = -\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x^\alpha \ln(x)} - 1}{-x^\alpha \ln(x)}. = -\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = \boxed{-1}.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $f_n(x) = e^{(1-x^n)\ln(x)}$ et que la fonction exp est strictement croissante, le sens de variation de f_n est le même que celui de la fonction $h_n : x \mapsto (1 - x^n)\ln(x)$.
Etudions donc celle-ci. h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme produit de fonctions usuelles) et

$$\forall x > 0,\ h_n'(x) = -nx^{n-1} \times \ln(x) \quad + \quad (1 - x^n) \times \frac{1}{x}.$$

Si $x \in]0, 1[$, les deux morceaux de la somme sont positifs donc $h_n'(x) > 0$.
Si $x > 1$, les deux morceaux de la somme sont négatifs donc $h_n'(x) < 0$.
Ainsi h_n, et donc f_n, est $\boxed{\text{strictement croissante sur }]0, 1[, \text{ strictement décroissante sur }]1, +\infty[}$.
Précisément, avec $f_n(1) = 1$ et les valeurs des limites déjà calcuées dans les questions précédentes, on a le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f_n(x)$	$\Vert$ 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- f_n est <u>continue et strictement croissante</u> sur $]0,1]$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = 0 < \dfrac{1}{2}$ et $f_n(1) = 1 > \frac{1}{2}$.

D'après le TVI avec stricte monotonie, $\boxed{\text{il existe un unique } u_n \in]0,1[\text{ tel que } f_n(u_n) = \frac{1}{2}}$.

- f_n est <u>continue et strictement décroissante</u> sur $[1,+\infty]$, $f_n(1) = 1 > \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0 < \dfrac{1}{2}$.

D'après le TVI avec stricte monotonie, $\boxed{\text{il existe un unique } v_n \in]1,+\infty[\text{ tel que } f_n(u_n) = \frac{1}{2}}$.

(Le cadre du TVI évoqué dans le cours se cantonne en principe à un segment $[a,b]$ et à l'étude des valeurs $f(a)$ et $f(b)$, mais il n'y a pas de difficulté à l'étendre avec des "limites" dans le cas qui nous intéresse ici... Il est clair que f_n prend des valeurs plus petites et plus grandes que $\frac{1}{2}$ sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$, donc atteindra nécessairement la valeur $\frac{1}{2}$ par continuité.)

4. (a) Notez qu'on définit ici $f_n(0) = 0$: c'est le prolongement par continuité en 0 de la fonction f_n étudié dans la question 1.(b) !

```python
import numpy as np
def f(n,x) :
    if x < 0 :
        print('Erreur !')
    elif x == 0 :
        return 0
    else :
        return np.exp( (1-x**n) * np.log(x) )
```

(b) Rappelons que u_n est l'unique solution de l'équation $f_n(x) = \frac{1}{2}$ sur le segment $[0,1]$ (si on a prolongé f_n en 0...)
On applique donc ici l'algorithme de dichotomie à f_n sur $[0,1]$ pour approcher cette solution.

```python
def approx_u(n) :
    a = 0 ; b = 1 ; eps = 10**(-2)
    while b-a > eps :
        c = (a+b)/2
        if f(n,c) < 1/2 :
            a = c
        else :
            b = c
    return (a,b)
```

Comme f_n est <u>croissante</u> sur $[0,1]$, c'est le cas classique (on peut le vérifier sur un dessin) :
si $f_n(c) < 1/2$ alors il faut "décaler a", et si $f_n(c) > 1/2$ il faut "décaler b".

(c) Cete fois, v_n est l'unique solution de l'équation $f_n(x) = \frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[1,+\infty[$.
Evidemment, ce n'est pas un segment, mais on peut raisonnablement se placer sur le segment $[1,100]$ par exemple pour la dichotomie (on aura $f_n(1) > \frac{1}{2}$ et $f_n(100) < \frac{1}{2}$ vraisemblablement).
On applique l'algorithme de dichotomie à f_n sur $[1,100]$ pour approcher cette solution.

```python
def approx_u(n) :
    a = 1 ; b = 100 ; eps = 10**(-2)
    while b-a > eps :
        c = (a+b)/2
        if f(n,c) < 1/2 :
            b = c
        else :
            a = c
    return (a,b)
```

Attention, cette fois f_n est <u>décroissante</u> sur $[1,100]$! Du coup dans ce ças :
si $f_n(c) < 1/2$ alors il faut "décaler b", et si $f_n(c) > 1/2$ il faut "décaler a".
(faire un dessin pour s'en convaincre)

Valeurs numériques :

L'instruction `approx_u(300)` renvoie le couple : `(0.4990234375, 0.5)`
L'instruction `approx_v(300)` renvoie le couple : `(1.0087890625, 1.017578125)`

$\Big($ Avec ces valeurs numériques, on peut conjecturer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1...$ $\Big)$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a par exemple :

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{e^{(1-x^{n+1})\ln(x)}}{e^{(1-x^n)\ln(x)}} = e^{(x^n - x^{n+1})\ln(x)} = e^{(1-x)x^n\ln(x)}.$$

- Si $x \leqslant 1$, on a $(1-x) \geqslant 0$, $\quad x^n \geqslant 0 \quad$ et $\quad \ln(x) \leqslant 0$.
  Ainsi $(1-x)x^n\ln(x) \leqslant 0$ et donc $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \leqslant 1$.
- Si $x \geqslant 1$, on a $(1-x) \leqslant 0$, $\quad x^n \geqslant 0 \quad$ et $\quad \ln(x) \geqslant 0$.
  Ainsi à nouveau $(1-x)x^n\ln(x) \leqslant 0$ et donc $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \leqslant 1$.

Dans tous les cas, on a bien : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Voici une possibilité de rédaction :

- En évaluant l'inégalité précédente en $x = u_{n+1}$, on obtient :

$$f_{n+1}(u_{n+1}) \leqslant f_n(u_{n+1}) \ \text{ c'est à dire } \ \frac{1}{2} \leqslant f_n(u_{n+1}).$$

Or, rappelons que f_n est strictement croissante sur $]0,1[$ et passe par $\frac{1}{2}$ au point u_n :

$$\forall x \in]0,u_n[,\ f_n(x) < \frac{1}{2}, \quad f_n(u_n) = \frac{1}{2}, \quad \forall x \in]u_n,1[,\ f_n(x) > \frac{1}{2},$$

Puisqu'on sait que $f_n(u_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2}$, c'est donc forcément que $u_{n+1} \in [u_n,1[$,
c'est à dire que $u_{n+1} \geqslant u_n$. $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est donc croissante}}$.

- En évaluant l'inégalité précédente en $x = v_{n+1}$, on obtient :

$$f_{n+1}(v_{n+1}) \leqslant f_n(v_{n+1}) \ \text{ c'est à dire } \ \frac{1}{2} \leqslant f_n(v_{n+1}).$$

Or, rappelons que f_n est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ et passe par $\frac{1}{2}$ au point v_n :

$$\forall x \in]1,v_n[,\ f_n(x) > \frac{1}{2}, \quad f_n(v_n) = \frac{1}{2}, \quad \forall x \in]v_n,+\infty[,\ f_n(x) < \frac{1}{2},$$

Puisqu'on sait que $f_n(v_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2}$, c'est donc forcément que $v_{n+1} \in]1,v_n]$,
c'est à dire que $v_{n+1} \leqslant v_n$. $\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est donc décroissante}}$.

- Quant à la nature de ces suites : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante et majorée par 1, donc converge}}$,
$\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante et minorée par 1, donc converge}}$.

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour montrer que $u_n \in]0,\frac{1}{2}[$, il suffit de justifier que $f_n(\frac{1}{2}) > \frac{1}{2}$
(car alors, d'après le TVI, f_n atteindra forcément la valeur $\frac{1}{2}$ entre les abscisses 0 et $\frac{1}{2}$)
On calcule :

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = e^{(1-(\frac{1}{2})^n)\ln(\frac{1}{2})} > e^{\ln(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}.$$

car $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$ et $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, donc $\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\ln\left(\frac{1}{2}\right) > \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.
Ainsi $\boxed{u_n \in]0,\frac{1}{2}[}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$ donc $0 \leqslant (u_n)^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, d'après le théorème des gendarmes on obtient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n = 0}$.

On a déjà dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée, donc converge vers un $\ell \in]0,1]$. Pour déterminer cette limite, on se rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(u_n) = \frac{1}{2} \quad \text{c'est à dire} \quad e^{(1-(u_n)^n)\ln(u_n)} = \frac{1}{2}.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-(u_n)^n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell)$, on obtient : $e^{\ln(\ell)} = \frac{1}{2}$, c'est à dire $\ell = \frac{1}{2}$. On a ainsi montré que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}}$.

7. On a déjà dit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 1, donc converge vers un $\ell' \geqslant 1$. On souhaite montrer qu'en fait $\ell' = 1$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell' > 1$.
Dans ce cas, puisque la suite décroit vers ℓ', on aura : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geqslant \ell'$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (v_n)^n \geqslant (\ell')^n$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ell')^n = +\infty$ (car $\ell' > 1$), on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)^n = +\infty$.
Ceci pose problème, car en passant à la limite dans $f_n(v_n) = \frac{1}{2}$, c'est à dire

$$e^{(1-(v_n)^n)\ln(v_n)} = \frac{1}{2},$$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-(v_n)^n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(v_n) = \ln(\ell') > 0$ (car $\ell' > 1$), donc on obtient :

$$0 = \frac{1}{2}, \text{ ce qui, bien-sûr, est absurde!}$$

Conclusion : on a nécessairement $\ell' = 1$, c'est à dire $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1}$.

Exercice 3 : Le jeu du Double-Face

1. (a) Il faut faire au moins 2 lances pour espérer gagner au jeu du Double-Face.
Il n'est évidemment pas possible de gagner dès le premier lancer ! Ainsi $G_1 = \emptyset$ et $\boxed{P(G_1) = 0}$.
$\boxed{G_2 = F_1 \cap F_2}$ donc par indépendance, $P(G_2) = P(F_1) \times P(F_2)$ c'est à dire $\boxed{P(G_2) = (1-p)^2}$.
$\boxed{G_3 = \overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3}$ donc par indépendance, $P(G_2) = P(\overline{F_1})P(F_2)P(F_3)$ i.e $\boxed{P(G_2) = p(1-p)^2}$.

(b) La famille de 3 évènements $(\overline{F_1},\ F_1 \cap F_2,\ F_1 \cap \overline{F_2})$ forme un $\boxed{\text{système complet d'événements}}$, car quelle que soit l'issue des lancers de pièces, on est forcément dans l'un de ces trois cas :
- Soit on obtient Pile au 1er lancer (F_1 est réalisé)
- Soit on obtient Face au 1er lancer puis Face au deuxième ($F_1 \cap F_2$ est réalisé)
- Soit on obtient Face au 1er lancer puis Pile au deuxième ($F_1 \cap \overline{F_2}$ est réalisé).

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On applique la formule des probabilités totales avec le S.C.E $(\overline{F_1},\ F_1 \cap F_2,\ F_1 \cap \overline{F_2})$:

$$P(G_{n+2} = P(\overline{F_1}) \times P_{\overline{F_1}}(G_{n+2}) + P(F1 \cap F_2) \times P_{F_1\cap F_2}(G_{n+2}) + P(F_1 \cap \overline{F_2}) \times P_{F_1\cap\overline{F_2}}(G_{n+2}).$$

On remplace avec $P(\overline{F_1}) = p, \quad P(F_1 \cap F_2) = (1-p)^2, \quad P(F_1 \cap \overline{F_2}) = (1-p)p$:

$$P(G_{n+2} = (1-p)P_{\overline{F_1}}(G_{n+2}) + (1-p)^2 \times P_{F_1\cap F_2}(G_{n+2}) + p(1-p)P_{F_1\cap\overline{F_2}}(G_{n+2}).$$

Détaillons maintenant les probabilités conditionnelles :

• Si on a obtenu Pile au premier lancer, c'est comme si on reprenait le jeu à zéro à partir de là : la probabilité qu'un joueur gagne le jeu du Double-Face en $n+2$ lancers sachant qu'il a commencé par Pile est la même que la probabilité qu'un joueur gagne le joue du Double-Face en seulement $n+1$ lancers. Ainsi, $\boxed{P_{\overline{F_1}}(G_{n+2} = P(G_{n+1})}$.

• Si on a obtenu Face au deux premiers lancers, alors le joueur a déjà gagné le jeu du Double-Face au deuxième lancer ! Puisque le jeu s'arrête après une victoire, il est impossible de gagner également au lancer numéro $n+2>2$... Ainsi, $\boxed{P_{F_1\cap F_2}(G_{n+2})=0}$.

• Si on a obtenu Face puis Pile au deux premiers lancers, à nouveau, c'est comme si on reprenait le jeu à zéro à partir de là : il reste n lancers pour gagner le jeu du Double-Face.
Ainsi, $\boxed{P_{F_1\cap\overline{F_2}}(G_{n+2})=P(G_n)}$.

En remplaçant, on obtient finalement : $\boxed{P(G_{n+2})=p\,P(G_{n+1})+p(1-p)\,P(G_n)}$.

2. (a)
```python
def valeur(p,n) :
    u = 0 ; v = (1-p)**2 # valeurs de P(G_1) et P(G_2)
    for k in range(n) : # n passages
        w = p * v + p * (1-p) * u
        u = v
        v = w
    return u
```
(b)
```python
def vecteur(p,n) :
    U = np.zeros(n) ; U[0] = 0 ; U[1] = (1-p)**2
    for k in range(2,n) : # k = 2, 3, ... , n-1
        U[k] = p * U[k-1] + p*(1-p) * U[k-2]
    return U
```

3. On introduit la fonction polynomiale définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x^2-px-p(1-p)$.
(a) f est une fonction <u>continue</u> sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme). On calcule (rappelons que $p\in]0,1[$) :

$$\begin{aligned}&f(-1)=1+p-p(1-p)=1+p^2>0,\\&f(0)=-p(1-p)<0,\\&f(1)=1-p-p(1-p)=(1-p)(1-p)=(1-p)^2>0.\end{aligned}$$

D'après le TVI, on en déduit que f s'annule en un point $r_1\in]-1,0[$ et en un point $r_2\in]0,1[$.
Puisque c'est un polynôme de degré 2, il ne peut pas admettre plus de deux racines !
$\boxed{f\text{ admet donc deux racines réelles } r_1,r_2 \text{ avec : } -1<r_1<0<r_2<1}$.
(b) Puisque f admet deux racines distinctes r_1 et r_2, on a la factorisation :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=(x-r_1)(x-r_2)\ \ \text{(Le coeff. dominant de } f \text{ est 1).}$$

En évaluant en $x=1$, on obtient $f(1)=(1-r_1)(1-r_2)$, c'est à dire $\boxed{(1-r_1)(1-r_2)=(1-p)^2}$.

4. (a) Pour simplifier les notations, notons $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=P(G_n)$.
La relation du 1.(c) s'écrit : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+2}=pu_{n+1}+p(1-p)u_n$.
On reconnait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, on peut donc appliquer la méthode de l'équation caractéristique. Cette équation caractéristique est :

$$x^2=px+p(1-p)\iff x^2-px-p(1-p)=0\iff f(x)=0.$$

On a vu que cette équation admet deux solutions distinctes $r_1<r_2$.
On sait donc que la forme générale de u_n sera :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\lambda(r_1)^n+\mu(r_2)^n\ \text{ avec } \lambda,\mu\in\mathbb{R} \text{ à déterminer.}$$

Enfin, $u_1=P(G_1)=0$ et $u_2=P(G_2)=(1-p)^2$, ce qui donne le système :

$$\left\{\begin{aligned}\lambda r_1+\mu r_2&=0\\ \lambda(r_1)^2+\mu(r_2)^2&=(1-p)^2.\end{aligned}\right.\iff\left\{\begin{aligned}\mu&=-\frac{r_1}{r_2}\lambda\\ \lambda(r_1)^2-\lambda r_1r_2&=(1-p)^2.\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}\mu&=-\frac{r_1}{r_2}\lambda\\ \lambda r_1(r_1-r_2)&=(1-p)^2.\end{aligned}\right.\iff\left\{\begin{aligned}\mu&=-\frac{r_1}{r_2}\lambda\\ \lambda&=\frac{(1-p)^2}{r_1(r_1-r_2)}.\end{aligned}\right.\iff\left\{\begin{aligned}\mu&=-\frac{(1-p)^2}{r_2(r_1-r_2)}.\\ \lambda&=\frac{(1-p)^2}{r_1(r_1-r_2)}.\end{aligned}\right.$$

En remplaçant, on obtient ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{(1-p)^2}{r_1 - r_2}(r_1)^{n-1} - \frac{(1-p)^2}{r_1 - r_2}(r_2)^{n-1} = \frac{(1-p)^2}{r_2 - r_1}\Big((r_2)^{n-1} - (r_1)^{n-1}\Big).$$

On a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P(G_n) = \frac{(1-p)^2}{r_2 - r_1}\Big((r_2)^{n-1} - (r_1)^{n-1}\Big)}$.

(b) On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$.
Cherchons les solutions de l'équation :

$$f(x) = 0 \iff x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$$

Discriminant : $\Delta = \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 0$. On a donc les deux racines $r_{1,2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}}{2}$,
soit $\boxed{r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ et } r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$.
En remplaçant dans la formule précédente, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(G_n) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\Bigg(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\Bigg)$$

c'est à dire $\boxed{P(G_n) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\Bigg(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\Bigg)}$. (ou bien $\frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$...)

5. On note C l'évènement "Le jeu du Double-Face ne prend jamais fin".

(a) $\boxed{\text{Certains résultats de l'expérience conduisent à la réalisation de } C}$: par exemple si on obtient constamment Pile à chaque lancer, ou bien si on obtient une alternance Pile-Face-Pile-Face à l'infini... On n'a donc pas $C = \emptyset$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si le joueur gagne le jeu au cours des n premier lancers, alors celui-ci s'arrête.
La réalisation de $\bigcup_{k=1}^{n} G_k$ implique donc celle de $\overline{C}$. Autrement dit, $\boxed{\bigcup_{k=1}^{n} G_k \subset \overline{C}}$.
On en déduit que

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} G_k\right) \leqslant 1 - P(C) \iff P(C) \leqslant 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} G_k\right).$$

Cette union étant disjointe (les évènements G_k sont 2 à 2 incompatibles), on obtient :
$\boxed{P(C) \leqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} P(G_k)}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule du 4.(a) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} P(G_k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-p)^2}{r_2 - r_1}\Big((r_2)^{k-1} - (r_1)^{k-1}\Big) \\
&= \frac{(1-p)^2}{r_2 - r_1}\left(\sum_{k=1}^{n}(r_2)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n}(r_1)^{k-1}\right) \\
&= \frac{(1-p)^2}{r_2 - r_1}\left(\sum_{j=0}^{n-1}(r_2)^{j} - \sum_{j=0}^{n-1}(r_1)^{j}\right) \\
&= \frac{(1-p)^2}{r_2 - r_1}\left(\frac{1-(r_2)^n}{1-r_2} - \frac{1-(r_1)^n}{1-r_1}\right) \\
&= \frac{(1-p)^2}{r_2 - r_1} \times \frac{(1-(r_2)^n)(1-r_1) - (1-(r_1)^n)(1-r_2)}{(1-r_1)(1-r_2)}.
\end{aligned}$$

D'après 3.(b), $(1-r_1)(1-r_2) = (1-p)^2$ donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} P(G_k) &= \frac{1}{r_2 - r_1} \times \Big((1-(r_2)^n)(1-r_1) - (1-(r_1)^n)(1-r_2)\Big) \\ &= \frac{1}{r_2 - r_1} \times \Big(r_2 - r_1 - (r_2)^n(1-r_1) + (r_2)^n(1-r_1)\Big)\end{aligned}$$

d'où finalement : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} P(G_k) = 1 - \frac{(r_2)^n(1-r_1) - (r_1)^n(1-r_2)}{r_2 - r_1}}$.

(d) D'après 5.(b), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant P(C) \leqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} P(G_k) = \frac{(r_2)^n(1-r_1) - (r_1)^n(1-r_2)}{r_2 - r_1}.$$

Puisque $r_1 \in]-1,0[$ et $r_2 \in]0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (r_1)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} (r_2)^n = 0$, et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(r_2)^n(1-r_1) - (r_1)^n(1-r_2)}{r_2 - r_1} = 0.$$

En passant à la limite dans l'encadrement, on on obtient bien $P(C) = 0$.

$\star\star\star$ Fin du sujet $\star\star\star$