21

Espaces probabilisés généraux

Introduction et motivation

Jusqu'à maintenant, nous avons étudié des expériences aléatoires avec un nombre fini d'issues possibles. Celles-ci correspondaient donc à un univers Ω fini :

• On lance un dé à 6 faces : $\Omega = [\![1, 6]\!]$.
• On tire p boules avec remise dans une urne qui en contient n : $\Omega = [\![1, n]\!]^p$.
• On lance une pièce n fois consécutives : $\Omega = \{Pile, Face\}^n$.

Une expérience aléatoire pouvait ainsi être modélisée par un **espace probabilisé fini** : $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
Un évènement A étant un ensemble d'issue, c'est une partie de Ω : $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.
L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ était donc l'ensemble des évènements que l'on peut considérer.

À présent, on souhaiterait s'intéresser à des expériences aléatoires ayant une infinité d'issues possibles, c'est à dire pour lesquelles l'univers Ω est infini ! Deux exemples :

• On lance une pièce (éventuellement biaisée) une infinité de fois consécutivement :

$$\Omega = \Big\{(x_n)_{n\geqslant 1} \mid \forall n \geqslant 1,\ x_n \in \{Pile, Face\}\Big\} = \{Pile, Face\}^{\mathbb{N}^*}.$$

Par exemple, l'issue $\omega = (Pile, Pile, Pile, \ldots) \in \Omega$ correspond au fait de n'obtenir que des Piles.
• Le prochain bus arrivera dans 5 minutes maximum. On s'intéresse au temps d'attente (en minutes) :

$$\Omega = [0, 5].$$

Lorsque l'univers Ω est infini, il devient en fait compliqué et souvent inutile (voire parfois impossible !) de considérer n'importe quelle partie de Ω comme un événement. L'ensemble des évènements que l'on peut considérer ne sera donc pas nécessairement $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier, mais seulement un sous-ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$!

1 Ensemble des évènements sur un univers quelconque

Définition 1 (Ensemble des évènements sur Ω)

Soit Ω un ensemble (fini ou infini) s'interprétant comme l'univers associé à une expérience aléatoire.
Un "ensemble des évènements sur Ω" est un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ satisfaisant :

$\boxed{1}$ $\Omega \in \mathcal{A}$

$\boxed{2}$ **Stabilité par passage au complémentaire :** Si $A \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$

$\boxed{3}$ **Stabilité par union dénombrable :**

Si $I \subset \mathbb{N}$ et si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Tout élément $A \in \mathcal{A}$ est alors appelé évènement.

Remarque 1

Le terme **dénombrable** signifie : fini ou "infini comme $\mathbb{N}$" (l'infini des nombres entiers).
Plus précisément, un ensemble infini E est dit dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans E : chaque élément de E peut être "étiqueté" par un entier.

Exemples : Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ ou même $[0, 1]$ ne le sont pas !

Si $A_1, A_2, \ldots$ sont des éléments de $\mathcal{A}$ on pourra ainsi considérer des unions finies ou infinies :

• Avec $I = [\![1, n]\!]$: $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ • Avec $I = \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$

Interprétation probabiliste de ces opérations :

$\boxed{1}$ On peut considérer l'évènement certain Ω.

$\boxed{2}$ Si A est un évènement, on peut considérer l'évènement contraire $\overline{A}$.

$\boxed{2}$ Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des évènements, on peut considérer l'évènement :

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \text{"}A_1 \text{ ou } A_2 \text{ ou } \ldots \text{ ou } A_n \text{ est réalisé"} \quad \text{(OU INCLUSIF)}.$$

De manière plus générale, pour une infinité d'évènements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, on peut à présent considérer :

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \text{"L'un des } A_i \text{ (au moins) est réalisé"}.$$

À partir des propriétés $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, on a aussi "gratuitement" les propriétés suivantes :

Proposition 1 (Autres opérations avec les évènements)

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble des évènements sur Ω. Alors on a :

$\boxed{1 \text{ bis}}$ $\emptyset \in \mathcal{A}$.

$\boxed{2 \text{ bis}}$ **Stabilité par "privé de" :** Si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$, alors $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

$\boxed{3 \text{ bis}}$ **Stabilité par intersection dénombrable :**

$$\text{Si } I \subset \mathbb{N} \text{ et si } (A_i)_{i\in I} \text{ est une famille d'éléments de } \mathcal{A}, \text{ alors } \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}.$$

Preuve :

$\boxed{1 \text{ bis}}$: $\emptyset = \overline{\underbrace{\Omega}_{\in\mathcal{A}}} \in \mathcal{A}$.

$\boxed{2 \text{ bis}}$: Si $A, B \in \mathcal{A}$, on a $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \overline{\overline{A} \cup B} \in \mathcal{A}$.

$\boxed{3 \text{ bis}}$: Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i = \overline{\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}} \in \mathcal{A}$. □

Interprétation probabiliste de l'intersection :

$\boxed{3 \text{ bis}}$ Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des évènements, on peut considérer l'évènement :

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \text{"}A_1 \text{ et } A_2 \text{ et } \ldots \text{ et } A_n \text{ sont réalisés"}$$

De manière plus générale, pour une infinité d'évènements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, on peut à présent considérer :

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = \text{"Tous les } A_i \text{ sont réalisés"}.$$

Exemples

Pour un univers Ω fixé, plusieurs choix sont a priori possibles pour l'ensemble des évènements $\mathcal{A}$!
Donnons quelques exemples :

- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ est un "ensemble des évènements" sur Ω. (On choisit souvent cela lorsque Ω est fini !)
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est un "ensemble des évènements" sur Ω (Pas très intéressant...)
- Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors : $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est un "ensemble des évènements" sur Ω.
- Si $\Omega = [\![1, 6]\!]$ (expérience de lancer de dé) alors

$\mathcal{A} = \Big\{\emptyset, \{6\}, \{2,4\}, \{1,3,5\}, \{2,4,6,\}, \{1,3,5,6\}, \{1,2,3,4,5\}, \Omega\Big\}$ est un "ensemble des évènements" sur Ω.

En pratique : lorsque l'univers Ω est infini, il est très rare que l'on décrive explicitement l'ensemble des évènements $\mathcal{A}$ considéré ! On se contentera souvent d'admettre que certains évènements intéressants $A_1, A_2, \ldots$ appartiennent bien à $\mathcal{A}$. On sait alors que l'on peut considérer tous les évènements construits comme union, intersection, complémentaire de ceux-ci.

Exercice 1

On lance une pièce une infinité de fois consécutivement. (On peut donc considérer $\Omega = \{Pile, Face\}^{\mathbb{N}^*}$).

On admet qu'il existe un ensemble des évènements $\mathcal{A}$ adéquat, de sorte que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k =$ "Obtenir Pile au k-ème lancer" appartient à $\mathcal{A}$. Exprimer les évènements :

- $A =$ "N'obtenir que des Faces à partir du 10-ème lancer"
- $B =$ "Obtenir au moins un Pile"
- $C_k =$ "Obtenir Pile pour la première fois au k-ème lancer". (pour $k \in \mathbb{N}^*$)
- $D =$ "On obtient le premier Pile après un nombre pair de lancers".

- $A = \overline{A_{10}} \cap \overline{A_{11}} \cap \ldots = \bigcap_{k=10}^{+\infty} \overline{A_k} \in \mathcal{A}$.
- $B = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $C_k = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A_i} \right) \cap A_k \in \mathcal{A}$.
- $D = C_2 \cup C_4 \cup C_6 \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{+\infty} C_{2k} \in \mathcal{A}$.

Pour finir, maitenant que l'on dispose d'unions infinies d'ensembles, on peut aussi généraliser la notion de système complet d'évènements à une infinité d'évènements :

Définition 2 (Système complet d'évènements)

Soit Ω un univers et $\mathcal{A}$ un "ensemble des évènements" sur Ω.

Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}$.
(Il peut donc y avoir un nombre fini ou infini d'évènements !)

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'événements** (S.C.E) lorsque :

$\boxed{1}$ Ils sont **deux à deux incompatibles** : $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

$\boxed{2}$ Leur réunion donne Ω tout entier : $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Cela revient à dire : Quelle que soit l'issue de l'expérience, un et un seul des A_i est réalisé.

Exemples

- On lance une pièce indéfiniment. Notons, comme dans l'Exercice 1,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad C_k = \text{"Obtenir Pile pour la première fois au } k\text{-ème lancer"}.$$

Rajoutons $C_0 =$ "Ne pas obtenir de Pile".
Alors : $(C_i)_{i \in \mathbb{N}} = (C_0, C_1, C_2, \ldots)$ est un système complet d'évènements.
(**car** il y a toujours un et un seul de ces évènements qui se réalise...)

- On lance une pièce indéfiniment. Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i =$ "Obtenir exactement i Piles".

Rajoutons $A_\infty =$ "Obtenir une infinité de Piles".
Alors $(A_\infty, A_0, A_1, A_2, \ldots)$ est un système complet d'événements.

2 Espace probabilisé général

2.1 Probabilité sur un univers quelconque

Rappel : Dans le cas d'un univers Ω fini, une probabilité P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ satisfaisait la propriété d'additivité :

$$\text{Si } A_1, \dots, A_n \text{ sont deux à deux incompatibles,} \qquad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

On va maintenant demander ce que cette propriété soit valable non seulement pour une union finie mais aussi pour une union infinie (dénombrable) d'évènements ! On parle de σ-additivité.

Définition 3 (Probabilité sur $\mathcal{A}$, espace probabilisé)

Soit Ω un univers (fini ou infini) et $\mathcal{A}$ un "ensemble des évènements" sur Ω.

Une probabilité sur $\mathcal{A}$ est une application $\boxed{P : \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(A) \end{array}}$ satisfaisant les propriétés :

1. **σ−additivité :** Pour $I \subset \mathbb{N}$, si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'évènements deux à deux incompatibles,

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)}$$

2. **Proba de l'évènement certain :** $\boxed{P(\Omega) = 1}$

Lorsque Ω est un ensemble (fini ou infini), $\mathcal{A}$ un "ensemble des évènements" sur Ω et P une probabilité sur $\mathcal{A}$, on dit que le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un **espace probabilisé.**

Remarque 2

Dans le cas d'une famille infinie d'ensemble $(A_i)_{i \in I}$ la somme $\sum_{i \in I} P(A_i)$ est une somme infinie !
Pour que celle-ci soit bien définie, il faut que la série associée soit convergente...

Preuve du fait que $\sum_{i \in I} P(A_i)$ est bien définie :

Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements deux à deux incompatibles.

- Si I est une partie finie de $\mathbb{N}$, la somme $\sum_{i \in I} P(A_i)$ est finie, donc bien définie !
- Soit I une partie infinie de $\mathbb{N}$: disons $I = \{i_1, i_2, \dots, \} = \{i_n, \ \ n \geqslant 1\}$.

On doit montrer que la somme $\sum_{i \in I} P(A_i) = P(A_{i_1}) + P(A_{i_2}) + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_{i_n})$ est bien définie, c'est à dire que la série $\sum P(A_{i_n})$ converge. Or, pour tout $N \geqslant 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} P(A_{i_n}) = P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_{i_n}\right) \quad (\text{car } A_{i_1}, \dots, A_{i_N} \text{ sont 2 à 2 incompatibles}) \quad \text{donc } \sum_{n=1}^{N} P(A_{i_n}) \leqslant 1.$$

Ainsi la série $\sum P(A_{i_n})$ est à termes positifs et majorée (par 1), donc elle converge.

$\square$

Par suite, on a toutes les propriétés habituelles pour le calcul des probabilités.

Proposition 2 (Propriétés d'une probabilité)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Pour tous évènements $A, B \in \mathcal{A}$,

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ • $P(\emptyset) = 0$ • $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$ • $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Sur un univers fini, on avait vu qu'une probabilité P était entièrement déterminée par la donnée des probabilité des évènements élémentaires $P(\{\omega\})$ pour $\omega \in \Omega$. (cf. Chapitre #11, Théorème 1)
C'est toujours le cas sur un univers infini dénombrable :

Théorème 1 (Probabilité sur un univers dénombrable)

Soit Ω un univers infini dénombrable : on peut donc écrire $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$.

Soient $p_1, p_2, \dots$ des réels positifs tels que la série $\sum p_n$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$.

Alors il existe une unique probabilité P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que $\forall n \geqslant 1,\ \ P(\{\omega_n\}) = p_n$.
Précisément, cette probabilité est donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(A) = \sum_{n \text{ tel que } \omega_n \in A} p_n$$

Preuve :

La même que dans le cas fini, sauf que les ensemble/unions/sommes peuvent être infinis... □

Exercice 2

On considère l'univers $\Omega = \mathbb{N}$ avec l'ensemble des évènements $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

On munit $(\Omega, \mathcal{A})$ d'une probabilité P satisfaisant : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(\{n\}) = \dfrac{a}{2^n}$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la valeur de la constante a.
2. On choisit un entier "au hasard", selon la probabilité P.
   Quelle est la probabilité que cet entier soit pair ?

1. Pour que P soit une probabilité, on doit avoir :

$$P(\mathbb{N}) = 1 \iff P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{n\}\right) = 1 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{n\}) = 1 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{2^n} = 1 \iff a \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

puique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$, il faut que $2a = 1$, c'est à dire $a = \frac{1}{2}$.

2. On veut calculer $P(A)$, où $A = \{2n,\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (ensemble des entiers pairs).

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{2n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{2n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a\frac{1}{2^{2n}} = a\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = a\frac{1}{1 - 1/4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

2.2 Théorème de la limite monotone

Énonçons à présent quelques résultats permettant de calculer un bon nombre de probabilités d'union/d'intersection infinies d'évènements.

Théorème 2 (Théorème de la limite monotone)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'événements.

- **Union croissante :** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est à dire si $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$,

$$\text{alors} \quad P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

- **Intersection décroissante :** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, c'est à dire si $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$,

$$\text{alors} \quad P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Remarques 3

- Bien-sûr cela tient toujours pour des unions/intersections démarrant à l'indice $n = 1$ ou $n = 2$...
- Rappelons l'interprétation de l'inclusion d'évènements :

$$\boxed{A_n \subset A_{n+1} \text{ signifie que "la réalisation de } A_n \text{ implique celle de } A_{n+1}\text{"}}$$

On a bien-sûr l'inverse pour une famille décroissante d'évènements.

Preuve du Théorème 2 :

- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille croissante d'évènements.

On pose $B_0 = A_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = A_n \setminus A_{n-1}$.

Dessin :

On voit que les $(B_n)_{n\geqslant 0}$ sont 2 à 2 disjoints et que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. On en déduit, par σ-additivité :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} P(B_n).$$

Or : $\sum_{n=0}^{N} P(B_n) = P(A_0) + \sum_{n=1}^{N} P(A_n \setminus A_{n-1}) = P(A_0) + \sum_{n=1}^{N} (P(A_n) - P(A_{n-1})) = P(A_N)$

d'où $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P(A_N) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille décroissante d'évènements.

Il en résulte que $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille croissante d'évènements, donc en lui appliquant le résultat précédent :

$$P\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} P(\overline{A_n}) = \lim(1 - P(\overline{A_n})) = \lim P(A_n).$$

□