7

Limites de suites

Exercice 1 (Possible ou pas ?)

(a) Oui : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$.

(b) Oui : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n(-1)^n$.

(c) Non : toute suite qui converge est bornée, donc en particulier majorée !

(d) Oui ! Par exemple : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n + (-1)^n$.

- On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n-1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} - u_n = n+1+(-1)^{n+1} - n - (-1)^n = 1 + 2(-1)^{n+1}$

c'est à dire $u_{n+1} - u_n = \begin{cases} -1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 3 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Ceci montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni croissante, ni décroissante, même "à partir d'un certain rang" !

(e) Non : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers cette même limite.

Exercice 2 (Des suites explicites)

(a) $\dfrac{e^n}{2n+1} = \dfrac{e^n}{n} \times \dfrac{1}{2+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

(b) $\dfrac{\ln(n+1)}{n} = \dfrac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{n} = \dfrac{\ln(n)}{n} + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(c) $\dfrac{-3n^2+2n-1}{1+2n} = \dfrac{n^2(-3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2})}{n(\frac{1}{n}+2)} = n \times \dfrac{-3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

(d) $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(e) $\dfrac{\sqrt{2n}}{(n+1)!} = \dfrac{\sqrt{2}}{n+1} \times \dfrac{n^{1/2}}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(f) $\dfrac{2^n-3^n}{3^n-5^n} = \dfrac{3^n((\frac{2}{3})^n-1)}{5^n((\frac{3}{5})^n-1)} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n \times \dfrac{(\frac{2}{3})^n-1}{(\frac{3}{5})^n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(g) $e^n - 2^n + n! = n! \times \left(\dfrac{e^n}{n!} - \dfrac{2^n}{n!} + 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

(h) $n^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} = \exp\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(0) = 1$ par composition de limite.

(i) $\dfrac{100^n+n!}{n^{100}+(n+1)!} = \dfrac{n!(\frac{100^n}{n!}+1)}{(n+1)!(\frac{n^100}{(n+1)!}+1)} = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{\frac{100^n}{n!}+1}{\frac{n^100}{(n+1)!}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 3 (Encadrement de suites explicites)

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement $-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

D'après le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 0$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant 1 - \dfrac{\cos(n)}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

D'après le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{\cos(n)}{n} = 1$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e^n - 3\sin(2n) \geqslant e^n - 3$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n - 3 = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n - 3\sin(2n) = +\infty$.

Exercice 4 (Une suite récurrente)

Soit u une suite définie par : $$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n}{3+u_n}$$

1. Posons $\mathcal{P}(n)$: "u_n est bien défini et $u_n > 0$". Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - Initialisation : On a $u_0 > 0$, d'où $\mathcal{P}(0)$.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

   On sait que $u_n > 0$. Il en résulte que $3 + u_n \neq 0$ donc $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3+u_n}$ est bien défini.
   De plus, $2u_n > 0$ et $3 + u_n > 0$, donc $u_{n+1} > 0$, ce qui achève la récurrence.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ donc $u_n + 3 \geqslant 3$. Ainsi : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3+u_n} \leqslant \dfrac{2u_n}{3} = \dfrac{2}{3}u_n$.
3. On sait déjà que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.
   De plus, de l'inégalité du 2., on déduit par récurrence immédiate que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n u_0$.

   $\Big($ C'est facile à prévoir : $u_1 \leqslant \dfrac{2}{3}u_0$, puis $u_2 \leqslant \dfrac{2}{3}u_1 \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 u_0$, puis $u_3 \leqslant \dfrac{2}{3}u_2 \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 u_0$, etc... $\Big)$

   Récurrence rigoureuse :
   - Initialisation : $u_0 \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^0 u_0$: OK !
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n u_0$. Alors : $u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{3}u_n \leqslant \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n u_0 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} u_0$.

   Ceci achève la récurrence.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a ainsi l'encadrement : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n u_0$.

   Puisque $\dfrac{2}{3} \in]0,1[$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.
   D'après le théorème des gendarmes, on en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 5 (Encadrement de sommes)

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $1 \leqslant \sqrt{k} \leqslant \sqrt{n}$ et donc : $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{n+\sqrt{k}} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
En sommant ces inégalités : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1}$

c'est à dire : $\boxed{\dfrac{n}{n+\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{n+1}}$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule les limites :

- $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}} = \dfrac{n}{n(1+\frac{1}{\sqrt{n}})} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$
- $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a $kx - 1 \leqslant \lfloor kx \rfloor \leqslant kx$.
En sommant ces inégalités : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \leqslant \sum_{k=1}^{n} kx$ donc : $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx$.
Calculons ces sommes :
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(kx-1) = x\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = x\frac{n(n+1)}{2} - n$.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx = x\sum_{k=1}^{n} k = x\frac{n(n+1)}{2}$.

Ainsi, on a l'encadrement $\boxed{x\dfrac{n(n+1)}{2n^2} - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant x\dfrac{n(n+1)}{2n^2}}$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminons les limites : $\dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{n(1+\frac{1}{n})}{2n} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

On en déduit facilement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x\frac{n(n+1)}{2} = \frac{x}{2} = \lim_{n\to+\infty}\left(x\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n}\right)$.

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{x}{2}$.

Exercice 6 (Convergence vers un point fixe)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant k|u_n - \alpha|$ d'après l'hypothèse sur f ;
2. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant k^n|u_0 - \alpha|$.
   - Initialisation : On a bien $|u_0 - \alpha| \leqslant k^0|u_0 - \alpha|$.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|u_n - \alpha| \leqslant k^n|u_0 - \alpha|$. D'après l'inégalité du 1., on a :

   $$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k|u_n - \alpha| \leqslant k \times k^n|u_0 - \alpha| = k^{n+1}|u_0 - \alpha|,$$

   ce qui achève la récurrence.
3. On a vu que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant k^n|u_0 - \alpha|$.
   Puisque $k \in]0,1[$ par hypothèse, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n|u_0 - \alpha| = 0$.
   D'après le théorème des gendarmes ("version valeur absolue"), on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$, c'est à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 7 (Étude n°1)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n(1 - u_n) - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
2. Vérifions que la suite est minorée par 0. Pour cela, montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
   - Initialisation : On a $u_0 \in]0,1[$, donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. On a alors aussi $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$.

   Il en résulte que $0 \leqslant u_n(1 - u_n) \leqslant 1$, c'est à dire $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, ce qui achève la récurrence.

   Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc converge vers un $\ell \in \mathbb{R}$.
   En passant à la limite dans $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, on en déduit que $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.
   En passant à la limite dans $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$, on obtient :

   $$\ell = \ell(1-\ell) \iff \ell = \ell - \ell^2 \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0.$$

   Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 8 (Étude n°2)

Introduisons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2+2}{3} \end{array}$, de sorte que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Il est clair que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ $\Big($ en fait $f(\mathbb{R}_+) = [\frac{2}{3}, +\infty[$ $\Big)$,
donc on montrerait très facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.
La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. (attention, elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}$!)

1. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$.
   - Initialisation : $u_0 = 3$ et $u_1 = \dfrac{3^2+2}{3} = \dfrac{11}{3} > 3$ donc $u_1 > u_0$.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n < u_{n+1}$.

   Puisque $u_n, u_n \in \mathbb{R}_+$ et que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $f(u_n) < f(u_{n+1})$, c'est à dire $u_{n+1} < u_{n+2}$, ce qui achève la récurrence.

   On a donc montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$.
   En passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient

   $$\ell = f(\ell) \iff \ell = \frac{\ell^2+2}{3} \iff 3\ell = \ell^2 + 2 \iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0.$$

   En résolvant cette équation polynômiale de degré 2, on obtient $\ell = 1$ ou $\ell = 2$.
   Dans les deux cas, c'est absurde puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $u_0 = 3$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 3$.
   On doit donc avoir $\ell \geqslant 3$...
3. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et ne peut pas converger.
   D'après le théorème de la limite monotone, on a nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 9 (Le cas "f décroissant")

1. (b) La fonction f est continue et (strictement) décroissante sur $[1, 3]$.
On a donc $f([1, 3]) = [f(3), f(1)] = [\frac{5}{3}, 3]$. En particulier, on a bien $f([1, 3]) \subset [1, 3]$.

$\boxed{\text{Remarque : Ceci nous apprend que } \forall x \in [1,3],\ f(x) \in [1,3].}$

On en déduit alors facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1, 3]$:
- Initialisation : $u_0 = 1 \in [1, 3]$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n \in [1, 3]$. Alors $f(u_n) \in [1, 3]$, c'est à dire $u_{n+1} \in [1, 3]$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = (f \circ f)(v_n).$$

$$w_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = (f \circ f)(w_n).$$

(b) Puisque f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $(f \circ f)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n < v_{n+1}$ et $w_n > w_{n+1}$.
- Initialisation : Calculons les premiers termes de la suite u :

$$u_0 = 1,\ \ u_1 = 3,\ \ u_2 = \frac{5}{3},\ \ u_3 = \frac{11}{5}.$$

Ainsi $u_0 < u_2$ et $u_1 > u_3$ c'est à dire $v_0 < v_1$ et $w_0 > w_1$, d'où l'initialisation.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $v_n < v_{n+1}$ et $w_n > w_{n+1}$.

Comme la fonction $f \circ f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient
$(f \circ f)(v_n) < (f \circ f)(v_{n+1})$ et $(f \circ f)(w_n) > (f \circ f)(w_{n+1})$,
c'est à dire (d'après 2.(a)), $v_{n+1} < v_{n+2}$ et $w_{n+1} > w_{n+2}$, ce qui achève la récurrence !

On a donc montré que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

(c) Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1, 3]$, on a également $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in [1, 3]$ et $w_n \in [1, 3]$.
Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 3), donc converge vers un $\ell \in [1, 3]$.
Ainsi, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 1) donc converge vers un $\ell' \in [1, 3]$.
En passant à la limite dans $v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)$ et $w_{n+1} = (f \circ f)(w_n)$, par continuité de $f \circ f$, on obtient :

$$\ell = (f \circ f)(\ell) \ \text{ et } \ \ell' = (f \circ f)(\ell').$$

Résolvons cette équation :

$$\ell = (f\circ f)(\ell) \iff \ell = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{\ell}} \iff \ell = 1 + \frac{2\ell}{\ell + 2} \iff \ell(\ell+2) = \ell+2+2\ell \iff \ell^2 = \ell+2 \iff \ell^2-\ell-2 = 0.$$

En résolvant cette équation polynomiale, on obtient : $\ell = -1$ ou $\ell = 2$.
Puisque $\ell \in [1, 3]$, on a nécessairement $\ell = 2$. Exactement de la même façon, on obtient $\ell' = 2$.

(d) On a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 2$.
On en déduit (résultat de cours) que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Exercice 10 (Critère des séries alternées)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
- $u_{n+1} - u_n = S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0$
(car la suite a est décroissante)
- $v_{n+1} - v_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3} a_{2n+3} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geqslant 0$
(car la suite a est décroissante)

Ceci montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Enfin :
- $v_n - u_n = S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$).

Ceci montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

2. On en déduit que ces deux suites convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \ell$. On en déduit (résultat de cours) que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell$.

Exercice 11 (Récurrence couplée)

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < v_n$.
   - Initialisation : on sait par hypothèse que $0 < u_0 < v_0$.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $0 < u_n < v_n$.

   Déjà $u_n > 0$ et $v_n > 0$, donc il est clair que $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} > 0$.

   Il nous reste à montrer que $u_{n+1} < v_{n+1}$, c'est à dire :

   $$\frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} < \frac{u_n + v_n}{2} \iff 2u_n v_n < \frac{(u_n + v_n)^2}{2} \iff 4u_n v_n < (u_n + v_n)^2 \iff 4u_n v_n < u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2$$
   $$\iff 0 < u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2 \iff 0 < (u_n - v_n)^2 \text{ ce qui est vrai !}$$

   On a donc bien $0 < u_{n+1} < v_{n+1}$, ce qui achève la récurrence.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   - $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2v_n}{u_n + v_n} > 1$ (puisque $2v_n > u_n + v_n$ car $v_n > u_n$). Ainsi $u_{n+1} > u_n$.

   Ceci montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

   - $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} < 0$ (car $u_n < v_n$). Ainsi $v_{n+1} < v_n$.

   Ceci montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les équivalences suivantes :

   $$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n) &\iff \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n) \\ &\iff (u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n \leqslant (v_n - u_n)(v_n + u_n) \text{ (en multipliant par } 2(u_n + v_n)) \\ &\iff u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 - 4u_n v_n \leqslant v_n^2 - u_n^2 \\ &\iff 2u_n^2 - 2u_n v_n \leqslant 0 \\ &\iff 2u_n(u_n - v_n) \leqslant 0 \iff u_n - v_n \leqslant 0 \iff u_n \leqslant v_n \text{ ce qui est vrai !} \end{aligned}$$

   (b) Par récurrence immédiate, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$. En effet :
   - Initialisation : $v_0 - u_0 \leqslant \dfrac{1}{2^0}(v_0 - u_0)$: OK !
   - Hérédité : si $v_n - u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$, alors $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - v_n) \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0) = \dfrac{1}{2^{n+1}}(v_0 - u_0)$.

   (c) On a ainsi l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

   D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

   Ainsi, u est croissante, v est décroissante, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$: les suites u et v sont adjacentes !

   On en déduit que u et v convergent vers une même limite ℓ.

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \times \dfrac{u_n + v_n}{2} = u_n v_n$. Ceci montre que $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante !

   (b) Ainsi, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n v_n = u_0 v_0$.

   En passant à la limite dans cette égalité (puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$), on obtient : $\ell^2 = u_0 v_0$.

   Enfin, on sait que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, donc en passant à la limite on obtient $\ell \geqslant 0$.

   On en déduit pour finir que la limite commune à ces deux suites est $\boxed{\ell = \sqrt{u_0 v_0}}$.