5

Suites réelles

Exercice 1 (Des suites explicites)

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est clairement strictement croissante (car définie comme une somme de termes strictement positifs). Preuve rapide : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2(n+1)^2} > 0$.
2. La fonction $x \mapsto \ln(x^2+1)$ est clairement strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   Il en résulte que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
3. Pour tout $n \geqslant 5$,
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+2}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{5^{n+1}} = \frac{5}{n+1} < 1 \ \text{ (car } n \geqslant 5\text{)}$$
   Puisque $u_n > 0$, on obtient $u_{n+1} < u_n$. La suite est donc strictement décroissante.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$u_{n+1}-u_n = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} < 0 \quad \left(\text{car } \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2}\right)$$
   Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}} = \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1.$$
   Comme on a clairement $u_n > 0$, on obtient $u_{n+1} < u_n$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

Exercice 2 (Des suites récurrentes)

1. (a) Par récurrence immédiate :
   - On a $u_0 = 1 > 0$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = \underbrace{u_n}_{>0} \underbrace{e^{u_n}}_{>0} > 0$, ce qui achève la récurrence.

   (b) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \underbrace{u_n}_{>0} \underbrace{e^{u_n}}_{>e^0=1} > u_n$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. (a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$:
   - On a $u_0 = 3 > 1$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n > 1$. On doit montrer que :
   $$u_{n+1} > 1 \iff \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} > 1 \iff 4u_n - 2 > u_n + 1 \iff 3u_n > 3 \iff u_n > 1 \text{ ce qui est vrai !}$$
   Ainsi, si $u_n > 1$, on a $u_{n+1} > 1$, ce qui achève la récurrence.

   (b) f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $\forall x \geqslant 1,\ f'(x) = \dfrac{4(x+1)-(4x-2)}{(x+1)^2} = \dfrac{6}{(x+1)^2} > 0$.

   Ainsi f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

   (c) On calcule $u_1 = \dfrac{4u_0 - 2}{u_0 + 1} = \dfrac{12-2}{3+1} = \dfrac{5}{2} < 3$, donc $u_1 < u_0$.
   Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} < u_n$.

   <u>Initialisation :</u> On a déjà vu que $u_1 < u_0$.

   <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{n+1} < u_n$.
   Puisque $u_{n+1}, u_n \in [1, +\infty[$ où f est strictement croissante, on obtient $f(u_{n+1}) < f(u_n)$, c'est à dire $u_{n+2} < u_{n+1}$, ce qui achève la récurrence.

   On a montré que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$, $\quad$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante.
3. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, "u_n est bien défini et $u_n \in]0, 1[$".

Initialisation : On a $u_0 = \dfrac{2}{3}$ (existe bien) et $u_0 \in]0, 1[$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que u_n est bien défini et $u_n \in]0, 1[$.
En particulier, $u_n \neq 2$, donc déjà $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 - u_n}$ est bien définie.
Puisque $u_n > 0$ et $2 - u_n > 0$ (car $u_n < 2$), on a $u_{n+1} > 0$.
De plus, on a $u_{n+1} < 1 \iff u_n < 2 - u_n \iff 2u_n < 2 \iff u_n < 1$, ce qui est bien vrai !
Ainsi $u_{n+1} > 0$ et $u_{n+1} < 1$, d'où $u_{n+1} \in]0, 1[$, ce qui achève la récurrence.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < 1$, donc $2 - u_n > 1$ et donc $\dfrac{1}{2 - u_n} < 1$.

Ainsi $u_{n+1} = \underbrace{u_n}_{>0} \times \underbrace{\dfrac{1}{2 - u_n}}_{<1} < u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2 - u_n}{u_n} = 1 - \left(\frac{2}{u_n} - 1\right) = 2 - \frac{2}{u_n} = 2\left(1 - \frac{1}{u_n}\right) = 2v_n.$$

Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.
(On pourrait ainsi déterminer l'expression de v_n, puis u_n en fonction de n...)

Exercice 3 (Récurrences basiques)

(a) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}$: suite arithmético-géométrique.
On introduit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \dfrac{2}{3}\alpha + \dfrac{1}{3}$, c'est à dire $\alpha = 1$.
On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \alpha = u_n - 1$. Vérifions que v est géométrique de raison $\frac{2}{3}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} - 2 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(u_n - 1) = \frac{2}{3}v_n.$$

On en déduit l'expression : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = (0 - 1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 1$ c'est à dire : $u_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(b) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = -2u_n + 5$: suite arithmético-géométrique.
On introduit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = -2\alpha + 5$, c'est à dire $\alpha = \dfrac{5}{3}$.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = u_n - \alpha = u_n - \frac{5}{3}$. Vérifions que v est géométrique de raison -2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{3} = -2u_n + 5 - \frac{5}{3} = -2u_n + \frac{15 - 5}{3} = -2u_n + \frac{10}{3} = -2\left(u_n - \frac{5}{3}\right) = -2v_n.$$

On en déduit l'expression : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = v_1 \times (-2)^{n-1} = (2 - \frac{5}{3}) \times (-2)^{n-1} = \dfrac{(-2)^{n-1}}{3}$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + \frac{5}{3}$ c'est à dire : $u_n = \dfrac{(-2)^{n-1} + 5}{3}$.

Exercice 4 (Récurrence linéaire double)

(a) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Il s'agit de la suite de Fibonacci !
On résout l'équation caractéristique $x^2 = x + 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$.
$\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$. On a donc les deux racines : $q_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Le terme général sera donc de la forme $u_n = \lambda \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ à déterminer.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \mu \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ \lambda \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + (1-\lambda) \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ -\sqrt{5} \cdot \lambda + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ -\sqrt{5} \cdot \lambda = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ \lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\dfrac{2\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1-\sqrt{5}}{2} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

c'est à dire :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right)$$

(b) On a $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
On résout l'équation caractéristique : $x^2 = 4x - 4 \iff x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x-2)^2 = 0$.
On a donc une unique racine : $q = 2$.
Le terme général sera de la forme $u_n = (\lambda + \mu n)2^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ à déterminer.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ (\lambda + \mu) \times 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\quad u_n = (1-n)2^n$.

Exercice 5 (Autre approche pour les suites arithmético-géométriques)

On suppose que $q \neq 0$ et également que $q \neq 1$ (sinon c'est simplement une suite arithmétique...)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1}}{q^{n+1}} - \dfrac{u_n}{q^n} = \dfrac{qu_n + r}{q^{n+1}} - \dfrac{u_n}{q^n} = \dfrac{r}{q^{n+1}}$.

2. D'une part, par téléscopage, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_0$.

   D'autre part, d'après le 1. :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r}{q^{k+1}} = r \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{q}\right)^{k+1} = r \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{q}\right)^j = r \times \frac{\frac{1}{q} - \left(\frac{1}{q}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{q}} = r \times \frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^n}{q-1} = \frac{r}{1-q}\left(\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1\right).$$

   Ainsi, on a $\quad v_n - v_0 = \dfrac{r}{1-q}\left(\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1\right)\quad$ donc $\quad v_n = u_0 + \dfrac{r}{1-q}\left(\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1\right)$ (car $v_0 = u_0$)

3. Enfin, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n v_n$ on obtient :

$$u_n = q^n \left(u_0 + \frac{r}{1-q}\left(\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1\right)\right) = u_0 \cdot q^n + \frac{r}{1-q}(1 - q^n).$$

Exercice 6 (Oral ESCP 2008)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par téléescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_n^2 - u_0^2 = u_n^2$$

et également :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1}(8k+5) = 8\frac{(n-1)n}{2} + 5n = 4n(n-1) + 5n = n(4n-4+5) = n(4n+1).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n^2 = n(4n+1)$.
Comme on sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, il en résulte que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n(4n+1)}$.

Exercice 7 (Récurrence couplée)

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = (2u_n - v_n) + (u_n + 4v_n) = 3u_n + 3v_n = 3(u_n + v_n) = 3w_n.$$

Ainsi, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 3.
On en déduit son expression : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = w_0 \times 3^n = (1-2)\times 3^n = -3^n$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que $v_{n+1} = u_n + 4v_n = (u_n + v_n) + 3v_n = w_n + 3v_n$.
Puisqu'on a vu que $w_n = -3^n$, on obtient bien $v_{n+1} = 3v_n - 3^n$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{v_{n+1}}{3^{n+1}} = \dfrac{3v_n - 3^n}{3^{n+1}} = \dfrac{3v_n}{3^{n+1}} - \dfrac{3^n}{3^{n+1}} = \dfrac{v_n}{3^n} - \dfrac{1}{3} = z_n - \dfrac{1}{3}$.
Ainsi, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
On en déduit son expression : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = z_0 - \dfrac{n}{3} = -2 - \dfrac{n}{3}$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = 3^n z_n = 3^n\left(-2 - \dfrac{n}{3}\right) = \boxed{-\left(2 + \dfrac{n}{3}\right)3^n}$.

Puis, puisque $w_n = u_n + v_n$, on a : $u_n = w_n - v_n = -3^n + \left(2 + \dfrac{n}{3}\right)3^n = \boxed{\left(1 + \dfrac{n}{3}\right)3^n}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - v_{n+1} = 2u_{n+1} - (u_n + 4v_n) = 2u_{n+1} - u_n - 4v_n.$$

Or comme $u_{n+1} = 2u_n - v_n$, on peut écrire $v_n = -u_{n+1} + 2u_n$. Ainsi :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 4(-u_{n+1} + 2u_n),$$

d'où finalement : $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$. On reconnait bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
On résout l'équation caractéristique : $x^2 = 6x - 9 \iff x^2 - 6x + 9 = 0 \iff (x-3)^2 = 0$.
On a une unique racine $q = 3$.
Le terme général sera donc de la forme $u_n = (\lambda + \mu n)3^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ à déterminer.
Or on a $u_0 = 1$ et $u_1 = 2u_0 - v_0 = 2 \times 1 - (-2) = 4$. Ainsi :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ (\lambda + \mu)\times 3 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ 1 + \mu = \dfrac{4}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(1 + \dfrac{n}{3}\right)3^n$. On retrouve bien l'expression obtenue en 1. d) !
Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en se rappelant que $v_n = -u_{n+1} + 2u_n$, on obtient

$$v_n = -\left(1 + \frac{n+1}{3}\right)3^{n+1} + 2\left(1 + \frac{n}{3}\right)3^n = \left(\left(-1 - \frac{n+1}{3}\right)\times 3 + 2\left(1 + \frac{n}{3}\right)\right)3^n = -\left(2 + \frac{n}{3}\right)3^n.$$

Exercice 8 (Suite satisfaisant une inégalité)

1. Soit $n \geqslant 1$. On sait déjà que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. De plus :
   - Si jamais $u_n = 0$, cela contredit le fait que $u_n(1-u_{n-1}) > \frac{1}{4}$.
   - Si jamais $u_n = 1$, cela contredit le fait que $u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4}$.

   Ainsi, on a bien $0 < u_n < 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, d'après la question pécédente, on a $u_n > 0$ et $1 - u_n > 0$.
   Ainsi, l'inégalité $u_{n+1}(1-u_n) > \dfrac{1}{4}$ donne $u_{n+1} > \dfrac{1}{4(1-u_n)}$ puis $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \dfrac{1}{4u_n(1-u_n)}$.

3. On pose, pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{4x(1-x)}$.

   f est dérivable sur $]0,1[$ et : $\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = \dfrac{-(4-8x)}{(4x(1-x))^2} = \dfrac{8x-4}{(4x(1-x))^2}$.

   Ainsi $f'(x) \geqslant 0 \iff 8x - 4 \geqslant 0 \iff x \geqslant \dfrac{1}{2}$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

   Ceci nous apprend en particulier que pour tout $x \in]0,1[,\ f(x) \geqslant 1$.

   Conclusion : pour tout $n \geqslant 1$, on sait d'après 2. que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > f(u_n) \geqslant 1$ (car $u_n \in]0,1[$).

   Ainsi pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et donc $u_{n+1} > u_n$ (car $u_n > 0$).

   La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est donc strictement croissante.