13

Dérivation

1 Dérivabilité en un point

1.1 Définition

Définition 1 (Taux d'accroissement et dérivée en un point)

Soit I un intervalle ; $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

• La fonction $\begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{array}$ est appelé

• On dit que f est **dérivable en** x_0 lorsque ce taux d'accroissement admet une limite finie en x_0.
On définit alors :

$$f'(x_0) =$$

Cette quantité est appelée **dérivée de** f **en** x_0.

Dessin :

Remarque 1

Alternativement, f est dérivable en x_0 si et seulement si la limite suivante existe et est finie :

$$\boxed{f'(x_0) = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

(Il suffit de poser le changement $x = x_0 + h$ i.e $h = x - x_0$: on a $(x \to x_0) \iff (h \to 0)$)

Exercice 1

Considérons la fonction racine carrée : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$.

1. Montrer que f est dérivable en tout $x_0 > 0$ et que $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Remarque 2

En pratique pour vérifier qu'une fonction est dérivable, on préfèrera (cf. plus loin dans ce chapitre) :

- Utiliser la dérivabilité des fonctions usuelles.
- Utiliser le Théorème de prolongement de la dérivée.

En dernier recours, on pourra étudier la limite du taux d'accroissement comme on vient de le faire !

Proposition 1 (Dérivabilité implique continuité)

Si une fonction f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.

Preuve rapide : $f(x) - f(x_0) =$

Ainsi $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, c'est à dire $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, d'où la continuité en x_0. $\square$

Remarques 3

- Ainsi, la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas dérivable en $k \in \mathbb{Z}$ car elle n'est pas continue en ce point ! (En revanche, elle est dérivable partout ailleurs, de dérivée nulle).

- Bien-sûr une fonction continue en un point n'y est pas forcément dérivable !
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue mais pas dérivable en 0.

Définition 2 (Dérivée à gauche / droite en un point)

Soit I un intervalle ; $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
On dit que f est dérivable à gauche (resp. à droite) en x_0 lorsque son taux d'accroissement y admet une limite finie à gauche (resp. à droite). On note alors :

$f'_g(x_0) =$ et $f'_d(x_0) =$

Proposition 2 (Lien dérivée à gauche / à droite / "tout court")

Soit I un intervalle ; $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ qui n'est pas une extrémité de I.
On a l'équivalence :

f est dérivable en $x_0 \iff$

Dans ce cas la dérivée est égale à cette valeur commune : $f'(x_0) =$

Preuve de la Proposition 2 :

C'est une conséquence immédiate du Théorème 1 du chapitre "Limites de fonctions". $\square$

Exercice 2

1. Soit f la fonction valeur absolue : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = |x|$. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

1.3 Interprétation graphique : tangente

Proposition 3 (Dérivée et tangente)

• Si f est dérivable en x_0, la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse x_0
L'équation de cette tangente est :

$f'(x_0)$ est appelé le de la tangente au point d'abscisse x_0.

• Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, la courbe représentative de f admet une
au point d'abscisse x_0. L'équation de cette tangente est :

• Si f est seulement dérivable à gauche ou à droite en x_0, on parle de "demi-tangente" (verticale).

Exemples

• Comme $\exp'(0) = \exp(0) = 1$, la courbe représentative de exp admet la tangente d'équation $y = x+1$ au point d'abscisse 0.

Dessin :

• La limite du taux d'accroissement de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0 vaut $+\infty$.
La courbe représentative admet donc une demi-tangente verticale en 0.

Dessin :

2 Fonctions dérivables, calcul de dérivées

2.1 Définitions

Définition 3 (Fonction dérivable sur un intervalle)

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point $x_0 \in I$.
Dans de cas, on peut introduire la fonction dérivée de f, c'est à dire l'application :

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x). \end{array}$$

L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté ou parfois plus simplement

Remarques 4

- On étend naturellement cette définition à une fonction définie sur domaine plus général, (souvent une union d'intervalles). Par exemple, on dira que $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

- Petite subtilité dans la définition :
Si f est définie sur un segment $[a, b]$, dire que f est dérivable sur $[a, b]$ revient à dire :
- f est dérivable en tout $x_0 \in]a, b[$
- f est dérivable à droite en a, dérivable à gauche en b.
On pourrait ainsi affirmer que la fonction valeur absolue est dérivable sur $[-1, 0]$ et dérivable sur $[0, 1]$. Pour autant, elle n'est pas dérivable $[-1, 1]$ (car pas dérivable en 0) !

- D'après la Proposition 1, une fonction dérivable sur I est automatiquement continue sur I.
On a ainsi l'inclusion : $\boxed{D(I, \mathbb{R}) \subset C(I, \mathbb{R})}$. L'inclusion réciproque est bien-sûr fausse.

- La dérivée de f en au point x peut également se noter $\dfrac{df(x)}{dx}$.

Attention !

La dérivée de la fonction f au point x se note bien $f'(x)$ et non " $f(x)'$ " !

Pour exprimer la dérivée de l'expression $x^3 + 2e^{x^2}$ par exemple, **il faut écrire :**

On évitera à tout prix la notation $\left(x^3 + 2e^{x^2}\right)'$ qui n'a aucun sens !!

Si l'on veut s'économiser d'introduire une fonction f, on pourra à la rigueur écrire :

Définition 4 (Classe $\mathcal{C}^1$)

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I lorsque
On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Autrement dit :

$$\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) =$$

Remarque 5

On ainsi les inclusions : $\boxed{C^1(I, \mathbb{R}) \subset D(I, \mathbb{R}) \subset C(I, \mathbb{R}).}$ Les inclusions réciproques sont fausses.

2.2 Dérivées de fonctions usuelles

Proposition 4 (Dérivabilité des fonctions usuelles (admis))

Les fonctions "usuelles" (que l'on s'apprête à lister) sont dérivables sur les domaines appropriés. Plus précisément, elles sont même de classe C^1 sur leur domaine de dérivabilité.

$f(x)$	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	$f'(x)$
C (*constante*)			
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$			
$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$			
x^α $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$			
$\sqrt{x}$			
e^x			
$\ln(x)$			
$\sin(x)$			
$\cos(x)$			
$\tan(x)$			
$\arctan(x)$			

Remarques 6

• Si l'on retient que $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$, on peut retrouver l'expression des dérivées de :

$$x \mapsto x^n \text{ (prendre } \alpha = n), \quad x \mapsto \frac{1}{x^n} \text{ (prendre } \alpha = -n), \quad x \mapsto \sqrt{x} \text{ (prendre } \alpha = 1/2).$$

Attention cependant au domaine de définition/dérivabilité qui n'est pas le même que pour $x \mapsto x^\alpha$!

• Si l'on admet ces différentes expressions, les "limites usuelles en 0" s'obtiennent en fait comme la limite d'un taux d'accroissement en 0 !

- Avec $f(x) = e^x$, l'égalité $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$ donne : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

- Avec $f(x) = \sin(x)$, l'égalité $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$ donne : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$

De même en choisissant $f(x) = \ln(1+x),\ \tan(x),\ (1+x)^\alpha$.

2.3 Dérivée et opérations

Proposition 5 (Dérivée de sommes, produits, quotients)

Soient u et v deux fonctions dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur un même intervalle I. Alors :

- La fonction $u+v$ est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et

$$\forall x \in I,\ (u+v)'(x) =$$

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, (λu) est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et

$$\forall x \in I,\ (\lambda u)'(x) =$$

- La fonction $u\,v$ est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et

$$\forall x \in I,\ (u\,v)'(x) =$$

- Si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et

$$\forall x \in I,\ \left(\frac{u}{v}\right)'(x) =$$

Remarque 7

En combinant les deux premiers résultats, on obtient, pour u, v dérivables et $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(au+bv)' = \qquad\qquad \textbf{(linéarité de la dérivation)}}$$

Exemple

Si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on définit $f(x) = 3\sin(x) - 2\cos(x) + 4e^x$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) =$$

Théorème 1 (Dérivée d'une composition ("Chain Rule"))

Soit $u \in D(I, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$) et $g \in D(J, \mathbb{R})$ (resp $\mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$) avec $u(I) \subset J$.

Alors $g \circ u \in D(I, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$) et on a l'expression :

$$\forall x \in I,\ \ (g \circ u)'(x) =$$

Preuve :

□

Cas particuliers usuels : (à connaître ou savoir retrouver en 5 secondes)

$f(x)$	$f'(x)$
$u(x)^\alpha$	
$\sqrt{u(x)}$	

$f(x)$	$f'(x)$
$e^{u(x)}$	
$\ln(u(x))$	

(On applique la "chain rule" pour dériver l'expression $f(x) = g(u(x))$ avec $g(x) = x^n,\ x^\alpha,\ \sqrt{x},\ e^x,\ \ln(x)$!)

Remarque 8

Pour dériver une expression de la forme $f(x) = u(x)^{v(x)}$, toujours revenir à l'expression l'exponentielle :

$$f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))} \quad \text{puis utiliser la "chain rule".}$$

Méthode : Dérivabilité d'une fonction "élémentaire"

Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité D d'une fonction f
(souvent égal au domaine de définition...), on pourra souvent annoncer :

"f est dérivable/de classe $\mathcal{C}^1$ sur D comme somme/produit/quotient/composée de fonctions usuelles".

Exercice 3

Déterminer le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivée.

(a) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ (b) $g(x) = \left(\dfrac{4x-1}{x+1}\right)^3$ (c) $h(x) = (1-x^2)^{\sin(x)}$

2.4 Dérivée d'une bijection réciproque

Théorème 2 (Dérivée de la réciproque)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I. On note $J = f(I)$.

$$\left(\begin{array}{c}\text{On sait d'après le Théorème de la bijection que } f \text{ réalise une bijection de } I \text{ dans } J. \\ \text{De plus, la bijection réciproque } f^{-1} : J \to I \text{ est continue et strictement monotone.}\end{array}\right)$$

Si f est dérivable sur I et <u>si f' ne s'annule pas sur I</u>, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) =$$

Preuve partielle :

Admettons que f^{-1} soit bien dérivable. On sait que pour tout $x \in J, \quad f(f^{-1}(x)) = x$.
En dérivant on obtient $\dfrac{d}{dx}\big(f(f^{-1}(x))\big) = 1$, c'est à dire :

$$(f^{-1})'(x) \times f'(f^{-1}(x)) = 1 \quad \text{et donc} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \qquad \square$$

Exercice 4

Retrouver la formule donnant la dérivée de arctan.

Remarque 9

Si jamais f' s'annule en un point $x_0 \in I$, alors dans ce cas f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$.
Sa courbe représentative y admet une tangente verticale.

Exercice 5

On considère la fonction cube : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = x^3$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
3. Dessiner les courbes représentatives de f et f^{-1}.

3 Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle

3.1 Théorème de Rolle

Lemme (Extremum et dérivée)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Si f atteint son maximum/minimum en un point $x_0 \in]a, b[$, alors

Dessin :

Remarque 10

Ce résultat reste vrai pour un minimum/maximum local, du moment que celui-ci est bien atteint dans l'intérieur de l'intervalle (et pas à une extrémité !)

Preuve :

□

Théorème 3 (Théorème de Rolle)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

On suppose que Alors

Dessin :

Remarque 11

Un tel réel c peut ne pas être unique.

Preuve :

$\square$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et p-périodique ($p > 0$).
Montrer que f' s'annule une infinité de fois.

3.2 Théorèmes des accroissements finis

Théorème 4 (Égalité des accroissements finis (EAF))

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Alors

Dessin :

Remarques 12

- $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le taux d'accroissement de f entre a et b.
Il peut s'interpréter comme la pente de la "corde" tendue entre les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

- Comme pour le Théorème de Rolle, un tel réel c peut ne pas être unique.

- En particulier, lorsque $f(a) = f(b)$, on obtient $f'(c) = 0$ et on retrouve le Théorème de Rolle.

Preuve :

$\square$

Une conséquence importante et souvent utile est l'inégalité des accroissements finis :

Théorème 5 (Inégalité des accroissements finis (IAF))

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

$\boxed{1}$ **Version "minorant/majorant" :** S'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\underline{m \leqslant f' \leqslant M \text{ sur }]a, b[}$, alors

$\boxed{2}$ **Version "valeur absolue" :** S'il existe $K > 0$ tel que $\underline{|f'| \leqslant K \text{ sur }]a, b[}$, alors

(fonctionne aussi si $a > b$)

Preuve :

$\square$

Méthode : Repérer une utilisation de l'IAF

Lorsque l'on demande de montrer une inégalité qui met en jeu un écart entre deux valeurs prises par une fonction (un "accroissement" $f(b) - f(a)$), c'est bien souvent l'IAF qui permet de conclure !

$\boxed{1}$ Repérer à quelle fonction f et sur quel segment $[a, b]$ appliquer l'IAF.

$\boxed{2}$ Affirmer que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$
(ou, bien souvent, carrément dérivable sur $[a, b]$, ce qui implique la continuité).

$\boxed{3}$ Déterminer des <u>constantes</u> m et M ou bien une <u>constante</u> K telles que

$$\forall t \in]a, b[, \quad m \leqslant f'(t) \leqslant M \qquad \text{ou bien} \qquad \forall t \in]a, b[, \ |f'(t)| \leqslant K.$$

$\boxed{4}$ En déduire l'inégalité voulue avec l'IAF.

Exercice 7

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \ |\sin(x)| \leqslant |x|$

L'IAF est un outil très puissant dans de nombreux contextes, notamment l'analyse de suites récurrentes.

Exercice 8

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

Notons $f : \begin{array}{ccc} [-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$ la fonction associée à cette récurrence.

1. Donner le tableau de variation de f. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geqslant 0$.
2. Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ que l'on déterminira.
3. Établir l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
5. On choisit $u_0 = 1$ de sorte que $|u_0 - \alpha| \leqslant 1$: ainsi on a $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

Compléter la fonction `approx_alpha` pour qu'elle renvoie une valeur approchée de α à `eps` près.

```
import numpy as np

def approx_alpha(eps) :

    u = ....... ;   n = .......

    while (1/2)**n > eps :

        u = ...................

        n = ...................

    return(u)
```

3.3 Conséquence importante de l'EAF : Prolongement C^1

Théorème 6 (Prolongement C^1)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On suppose que :

-
-
-

Alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) =$ Ainsi :

Preuve :

$\square$

Exercice 9

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\frac{1}{x^2}} \end{array}$

Montrer que f est prolongeable en une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$.

Remarque 13

Attention, parfois le théorème du prolongement C^1 ne s'applique pas et il faut plutôt revenir à la définition de la dérivée avec la limite du taux d'accroissement !

Exemple : $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$. f est dérivable en 0 mais n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}$.

3.4 Conséquence importante de l'EAF : Dérivée et sens de variation

Terminons par un des intérêts fondamentaux de la dérivée (utilisé depuis le lycée) : le signe de la dérivée nous renseigne sur le sens de variation de f !

Théorème 7 (Dérivée et monotonie)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On a les équivalences :

- f est croissante sur $I \iff$
- f est décroissante sur $I \iff$
- f est constante sur $I \iff$

Preuve :

Montrons l'équivalence du premier point (les autres points sont similaires).

- Si f est croissante sur I, alors on note que pour tout $x_0, x \in I$ avec $x \neq x_0$,

Si $x > x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$, si $x < x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$, donc dans tous les cas $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$.

En passant à la limite quand $x \to x_0$, on obtient $f'(x_0) \geqslant 0$. C'est valable pour tout $x_0 \in I$.

- Inversement, supposons $f' \geqslant 0$ sur I. Soient $a, b \in I$ avec $a \leqslant b$.

Si $a = b$ alors évidemment $f(a) \leqslant f(b)$.

Si $a < b$, en appliquant l'EAF sur le segment $[a, b]$, on peut écrire $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ avec un $c \in]a, b[$.

Comme $f'(c) \geqslant 0$, on en déduit que $f(b) - f(a) \geqslant 0$, c'est à dire $f(a) \leqslant f(b)$.

On a bien montré que $a \leqslant b$ implique $f(a) \leqslant f(b)$: f est croissante sur I. $\square$

Remarque 14

Si l'intervalle est un segment $I = [a, b]$, on peut remplacer l'hypothèse "f dérivable sur $[a, b]$" par "f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$" et le résultat reste vrai.

Attention !

Ce théorème devient faux si l'on ne se place pas sur un intervalle !

Exemple : $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.
Pour autant, f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$! Par exemple, $f(-1) = -1 \leqslant f(1) = 1$.
En revanche on peut bien dire que f est décroissante sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Exercice 10

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\quad \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Théorème 8 (Dérivée et stricte monotonie)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

On peut être plus précis :

- Si $f' \geqslant 0$ et f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' \leqslant 0$ et f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Preuve :

Si $f' > 0$ sur I, il suffit d'adapter la preuve du Théorème 7 (avec l'EAF) pour voir que $a < b$ implique $f(a) < f(b)$.

On admet le point "plus précis" pour le moment, par commodité. $\square$

Exemple

Une fonction strictement croissante peut quand même avoir une dérivée qui s'annule ponctuellement !

Par exemple $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pourtant $f' : x \mapsto 3x^2$ s'annule en 0.

Évidemment, on utilise depuis bien longtemps ce lien entre signe de la dérivée et sens de variation, dès qu'il s'agit d'établir un tableau de variations !

Exercice 11

Déterminer le domaine de définition et établir le tableau de variation de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x(x-1)}$$

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Justifier qu'une fonction est dérivable/de classe C^1 sur un domaine.
- Calculer rapidement une dérivée ! (Somme/produit/quotient/composée...)
- Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point particulier.
  (en pensant notamment au Théorème de prolongement de la dérivée)
- Calculer la dérivée d'une bijection réciproque.
- Utiliser l'inégalité des accroissements finis (IAF).

Pour suivre

- Repérer et utiliser le Théorème de Rolle.
- Repérer et utiliser l'égalité des accroissements finis (EAF).

Pour les ambitieux

- Utiliser spontanément l'IAF pour étudier certaines suites récurrentes.