19

Applications linéaires - Corrigé

Exercice 1 (Calcul d'image et de noyau)

- Soient $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f\Big((x,y,z)+\lambda(x',y',z')\Big) = f\Big((x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')\Big) = \Big(x+\lambda x'+y+\lambda y', 2(x+\lambda x')-(y+\lambda y')+z+\lambda z'\Big)$$
$$= \Big(x+y, 2x-y+z\Big)+\lambda\Big(x'+y', 2x'-y'-z'\Big) = f\Big((x,y,z)\Big)+\lambda f\Big((x',y,',z')\Big).$$

Ainsi $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$. Déterminons une base de $Im(f)$:

$$Im(f) = Vect\Big(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\Big) = Vect\Big((1,2),(1,-1),(0,1)\Big)$$

Cette famille est génératrice de $Im(f)$, mais n'est pas libre : par exemple $(1,2)=(1,-1)+3(0,1)$. Ainsi :

$$Im(f) = Vect\Big((1,-1),(0,1)\Big).$$

La famille $\Big((1,-1),(0,1)\Big)$ est libre, c'est donc une base de $Im(f)$! En fait, plus simplement, on peut voir que

$$Im(f) = Vect\Big((1,-1),(0,1)\Big) = Vect\Big((1,0),(0,1)\Big) = \mathbb{R}^2.$$

Ainsi $Im(f)=\mathbb{R}^2$ et une autre base en est la base canonique $\Big((1,0),(0,1)\Big)$...
Cherchons maintenant une base de $Ker(f)$:

$$Ker(f) = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|x+y=0 \text{ et } 2x-y+z=0\Big\}.$$

Après résolution de ce système de 2 équations, on obtient

$$Ker(f) = \Big\{(x,-x,-3x),\ x\in\mathbb{R}\Big\} = Vect\Big((1,-1,-3)\Big).$$

La famille (composée d'un seul vecteur) $\Big((1,-1,-3)\Big)$ est évidemment libre, c'est donc une base de $Ker(f)$.

- Linéarité évidente (similaire à f) : $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, c'est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Déterminons une base de de $Im(g)$:

$$Im(g) = Vect\Big(g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1)\Big) = Vect\Big(1,-3,1\Big).$$

Il s'agit d'une famille de trois "vecteurs" de $\mathbb{R}$! Evidemment elle est liée puisque $-3=-3\cdot 1$.

$$Im(g) = Vect\Big(1,-3,1\Big) = Vect\Big(1\Big) = \mathbb{R}.$$

Ainsi $Im(g)=\mathbb{R}$ et une base de $Im(g)$ est composée d'un seul "vecteur" de $\mathbb{R}$: 1.
Passons au noyau :

$$Ker(g) = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x-3y+z=0\Big\} = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,z=-x+3y\Big\} = \Big\{(x,y,-x+3y),\ y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}\Big\}$$
$$= \Big\{x(1,0,-1)+y(0,1,3),\ y\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{R}\Big\} = Vect\Big((1,0,-1),(0,1,3)\Big).$$

Cette famille de deux vecteurs est libre (car ils sont non-colinéaires) : $\Big((1,0,-1),(0,1,3)\Big)$ est une base de $Ker(f)$.

- Pour tous $P,Q\in\mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$h(P+\lambda Q) = X(P+\lambda Q)' = X(P'+\lambda Q') = XP'+\lambda XQ' = h(P)+\lambda h(Q).$$

Ceci montre que $h\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X],\mathbb{R}[X])$. Déterminons l'image :

$$Im(h) = Vect\Big(h(1),h(X),h(X^2),h(X^3)\Big) = Vect\Big(0,X,2X^2,3X^3\Big) = Vect\Big(X,2X^2,3X^3\Big) = Vect\Big(X,X^2,X^3\Big).$$

La famille $\Big(X, X^2, X^3\Big)$ est libre car constituée de polynôme de degrés échelonnés : c'est donc une base de $Im(f)$.
On passe au noyau :

$$Ker(h) = \Big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, XP' = 0\Big\} = \Big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P' = 0\Big\} = \mathbb{R}_0[X] = Vect\Big(1\Big) \text{ (ensemble des polynômes constants).}$$

Une base de $Ker(h)$ est composée d'un seul vecteur : 1 (polynôme constant égal à 1).

- Pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(X + \lambda Y) = A(X + \lambda Y) = AX + \lambda AY = \varphi(X) + \lambda\varphi(Y).$$

Ceci montre que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$. Déterminons l'image :

$$Im(\varphi) = Vect\Big(\varphi\Big(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\Big), \varphi\Big(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\Big), \varphi\Big(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\Big)\Big) = Vect\Big(\Big(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\Big), \Big(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\Big), \Big(\begin{smallmatrix}1\\1\\2\end{smallmatrix}\Big)\Big).$$

Cette famille est liée car par exemple $\Big(\begin{smallmatrix}1\\1\\2\end{smallmatrix}\Big) = 2\Big(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\Big) - \Big(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\Big)$. Ainsi : $Im(\varphi) = Vect\Big(\Big(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\Big), \Big(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\Big)\Big)$.
Ces deux vecteurs forment une famille libre, donc une base de $Im(\varphi)$. Passons au noyau :

$$\begin{aligned} Ker(\varphi) &= \Big\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,|\, AX = 0\Big\} = \Big\{\Big(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\Big) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,|\, \Big(\begin{smallmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\1&0&2\end{smallmatrix}\Big)\Big(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\Big) = \Big(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\Big)\Big\} \\ &= \Big\{\Big(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\Big) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,|\, \Big(\begin{smallmatrix}x+y+z\\-y+z\\x+2z\end{smallmatrix}\Big) = \Big(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

On résout rapidement le système :

$$\Big(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\Big) \in Ker(\varphi) \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases}$$

Ceci nous permet de ré-écrire $Ker(\varphi)$ sous forme "explicite" :

$$Ker(\varphi) = \Big\{\Big(\begin{smallmatrix}-2z\\z\\z\end{smallmatrix}\Big),\ z \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{z\Big(\begin{smallmatrix}-2\\1\\1\end{smallmatrix}\Big),\ z \in \mathbb{R}\Big\} = Vect\Big(\Big(\begin{smallmatrix}-2\\1\\1\end{smallmatrix}\Big)\Big).$$

Ainsi, une base de $Ker(\varphi)$ est composée d'un seul vecteur : $\Big(\begin{smallmatrix}-2\\1\\1\end{smallmatrix}\Big)$.

Exercice 2 (Endomorphisme de polynômes)

- D'abord, on a bien $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ car si $\deg(P) \leqslant n$, on a bien $\deg(2P' + P) \leqslant n$ également.
- Montrons que f est linéaire : pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(P + \lambda Q) = 2(P + \lambda Q)' + P + \lambda Q = 2(P' + \lambda Q') + P + \lambda Q = 2P' + P + \lambda(2Q' + Q) = f(P) + \lambda f(Q).$$

Ainsi f est un endormorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Montrons enfin que f est injectif en montrant que $Ker(f) = \{0\}$

Classiquement il suffit de montrer que $Ker(f) \subset \{0\}$: Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = 0$. Montrons que $P = 0$.
On a $f(P) = 0 \Longleftrightarrow 2P' + P = 0 \Longleftrightarrow P = -2P'$.
Si jamais $P \neq 0$, on sait que $\deg(P') < \deg(P)$, l'égalité $P = -2P'$ est donc impossible !
Ainsi on a bien $P = 0$.
Ceci montre que $Ker(f) = \{0\}$: f est un endomorphisme injectif.

Exercice 3 (Endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$)

1. Vérifions que Φ est linéaire : soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Notons $w = \Phi(u + \lambda v) \in \mathbb{R}^N$. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = (u + \lambda v)_{n+1} + 3(u + \lambda v)_n = u_{n+1} + \lambda v_{n+1} + 3u_n + 3\lambda v_n = (u_{n+1} + 3u_n) + \lambda(v_{n+1} + 3v_n).$$

On reconnait que $(u_{n+1} + 3u_n)$ est le terme d'indice n de la suite $\Phi(u)$
et $(v_{n+1} + 3v_n)$ est le terme d'indice n de la suite $\Phi(v)$. On a donc bien $w = \Phi(u) + \lambda\Phi(v)$, d'où la linéarité.

2. Par définition,

$$Ker(\Phi) = \Big\{u \in \mathbb{R}^N \mid \Phi(u) = 0\Big\} = \Big\{u \in \mathbb{R}^N \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + 3u_n = 0\Big\} = \Big\{u \in \mathbb{R}^N \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -3u_n\Big\}.$$

Il s'agit donc de l'ensemble des suites géométriques de raison (-3) !
On sait qu'une telle suite satisfait : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \cdot (-3)^n$. Ainsi :
En notant la suite $w = ((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a donc : $u \in Ker(\Phi) \Longleftrightarrow u = u_0 \cdot w$.
Ainsi, les suites géométriques de raison (-3) sont exactement les suites proportionnelles à w :

$$Ker(\Phi) = \Big\{u_0 \cdot w,\ u_0 \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{\lambda w,\ \lambda \in \mathbb{R}\Big\} = Vect(w).$$

Une base de $Ker(\Phi)$ est donc composée d'un seul vecteur : la suite w.

Exercice 4 (Image, noyau et composée)

Rappel : Pour montrer une inclusion $A \subset B$, il faut et il suffit de montrer que : $\forall x \in A,\ x \in B$.

1. • Soit $u \in Im(g \circ f)$. Montrons que $u \in Im(g)$.
Par définition, il existe $v \in E$ tel que $u = (g \circ f)(v)$. Ainsi $u = g(\underbrace{f(v)}_{\in F})$ donc, par définition, $u \in Im(g)$.
Ceci montre que $Im(g \circ f) \subset Im(g)$.

• Soit $v \in Ker(f)$. Montrons que $v \in Ker(g \circ f)$.
Par définition, on a $f(v) = 0_F$ et donc $g(f(v)) = g(0_F) = 0_G$. Autrement dit, $(g\circ f)(v) = 0_G$: ainsi $v \in Ker(g\circ f)$.
Ceci montre que $Ker(f) \subset Ker(f \circ g)$.

2. • Supposons $Im(f) \subset Ker(g)$. Montrons que $g \circ f = 0$, c'est à dire que : $\forall v \in E,\ g(f(v)) = 0_G$.
Soit $v \in E$. Par définition, $f(v) \in Im(f)$ et donc $f(v) \in Ker(g)$ car $Im(f) \subset Ker(g)$.
Ainsi, on a bien $g(\ f(v)\ ) = 0_G$, d'où le résultat.

• Supposons $g \circ f = 0$. Montrons que $Im(f) \subset Ker(g)$.
Soit $u \in Im(f)$. Par définition, il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$.
Par suite, $g(u) = g(f(v)) = (g \circ f)(v) = 0_G$ car $g \circ f = 0$. Ainsi, on a $u \in Ker(g)$.
Ceci montre que $Im(f) \subset Ker(g)$, d'où le résultat.

Exercice 5 (Image, noyau et puissance)

1. Même preuve que dans l'exercice 4 question 1. (c'est le cas particulier où $g = f$...)

2. • Supposons $Ker(f) = Ker(f^2)$. Montrons que $Im(f) \cap Ker(f) = \{0_E\}$.
On a évidemment $\{0_E\} \subset Im(f) \cap Ker(f)$, il suffit donc de montrer que $Im(f) \cap Ker(f) \subset \{0_E\}$.
Soit $u \in Im(f) \subset Ker(f)$, montrons que $u = 0_E$.
Puisque $u \in Im(f)$, il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$.
Puisque $u \in Ker(f)$, on a $f(u) = 0_E$ c'est à dire $f(f(v)) = 0_E$ et donc $v \in Ker(f^2)$.
Or, par hypothèse, $Ker(f^2) = Ker(f)$, on a donc $v \in Ker(f)$ c'est à dire $f(v) = 0_F$.
Autrement dit, $u = f(v) = 0_E$, d'où le résultat.

• Supposons $Im(f) \cap Ker(f) = \{0_E\}$. Montrons que $Ker(f) \subset Ker(f^2)$.
D'après 1., on sait déjà que $Ker(f) \subset Ker(f^2)$, il suffit donc de montrer $Ker(f^2) \subset Ker(f)$.
Soit $v \in Ker(f^2)$, montrons que $v \in Ker(f)$.
Puisque $v \in Ker(f^2)$, on a $f(f(v)) = 0_E$, autrement dit $f(v) \in Ker(f)$.
De plus, par définition, $f(v) \in Im(f)$. On a donc $f(v) \in Im(f) \cap Ker(f)$.
Par hypothèse, $Im(f) \cap Ker(f) = \{0_E\}$, et donc $f(v) = 0_E$. Autrement dit, $v \in Ker(f)$, d'où le résultat.

Exercice 6 (Endomorphismes qui commutent)

• Soit $v \in Ker(f)$, montrons que $g(v) \in Ker(f)$, c'est à dire que $f(g(v)) = 0_E$.
On a $f(g(v)) = (f \circ g)(v) = (g \circ f)(v) = g(f(v))$.
Puisque $v \in Ker(f)$, on a $f(v) = 0_E$, donc $f(g(v)) = g(0_E) = 0_E$, d'où le résultat.

• Soit $u \in Im(f)$, montrons que $g(u) \in Im(f)$.
Par définition, il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$.
Ainsi $g(u) = g(f(v)) = (g \circ f)(v) = (f \circ g)(v) = f(\ g(v)\ )$. Ceci montre que $g(u) \in Im(f)$.

Exercice 7 (Espaces usuels isomorphes)

1. L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k & \to & (a_0, a_1, \dots, a_n) \end{array}$ est clairement linéaire et également bijective.

$\Bigg($ car on peut expliciter sa réciproque : $\quad f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ (a_0, a_1, \dots, a_n) & \to & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \end{array}$. $\Bigg)$

2. De même avec l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^{n\times p} \\ A = (a_{i,j})_{i\in[\![1,n]\!],\, j\in[\![1,p]\!]} & \to & (a_{1,1}, \dots, a_{1,p}, a_{2,1}, \dots, a_{2,p}, \dots, a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,p}) \end{array}$.

Par exemple (pour clarifier), dans le cas $n = p = 2$, il s'agit de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^4 \\ A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) & \to & (a, b, c, d) \end{array}$.

3. De même avec l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \to & (u_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*} \end{array}$ $\Bigg($ de réciproque $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} & \to & (v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \Bigg)$

Exercice 8 (Un espace vectoriel de suites)

1. • La suite nulle appartient bien sûr à E car si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{u_{n+2}}_{=0} = (n+2)\underbrace{u_{n+1}}_{=0} + \underbrace{u_n}_{=0}$$

• Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $w = u + \lambda v \in E$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $u_{n+2} = (n+2)u_{n+1} + u_n$ et $v_{n+2} = (n+2)v_{n+1} + v_n$
et on doit montrer que $w_{n+2} = (n+2)w_{n+1} + w_n$.

$$\begin{aligned} w_{n+2} = u_{n+2} + \lambda v_{n+2} &= ((n+2)u_{n+1} + u_n) + \lambda((n+2)v_{n+1} + v_n) = (n+2)(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + u_n + \lambda v_n \\ &= (n+2)w_{n+1} + w_n. \end{aligned}$$

Ceci montre bien que $w \in E$.

Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Véifions d'abord que φ est linéaire : pour $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(u + \lambda v) = \Big((u + \lambda v)_0, (u + \lambda v)_1\Big) = \Big(u_0 + \lambda v_0, u_1 + \lambda v_1\Big) = (u_0, u_1) + \lambda(v_0, v_1) = \varphi(u) + \lambda\varphi(v).$$

Montrons que φ est bijective. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrons qu'il existe une unique $u \in E$ telle que $\varphi(u) = (a, b)$.
(Définition d'une bijection : chaque $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent par φ !)
En fait c'est évident, puisque l'unique suite $u \in E$ telle que $\varphi(u) = (a, b)$ est celle définie par :

$$u_0 = a,\ u_1 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = (n+2)u_{n+1} + u_n.$$

Ainsi, φ est un isomorphisme entre E et $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9 (Isomorphisme de Lagrange)

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= \Big((P + \lambda Q)(x_0), \dots, (P + \lambda Q)(x_n)\Big) = \Big(P(x_0) + \lambda Q(x_0), \dots, P(x_n) + \lambda Q(x_n)\Big) \\ &= \Big(P(x_0), \dots, P(x_n)\Big) + \lambda\Big(Q(x_0), \dots, Q(x_n)\Big) = f(P) + \lambda f(Q). \end{aligned}$$

Ainsi $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}^{n+1})$.

2. Montrons que f est injective en vérifiant que $Ker(f) = \{0_E\}$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$, montrons que $P = 0$. On sait que

$$f(P) = \Big(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)\Big) = \Big(0, 0, \dots, 0\Big).$$

Autrement dit, P admet les $n + 1$ racines distinctes $x_0, x_1, \dots, x_n$.
Or puisque $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\deg(P) \leqslant n$: il en résulte que P est nécessairement le polynôme nul !

Ceci montre que f est injective.

---

3. (a) Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$f(L_i) = \Big(L_i(x_0), L_i(x_1), \ldots, L_i(x_n)\Big).$$

Or, il est facile de remarquer que $L_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$. Ainsi :

$$f(L_i) = \Big(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\Big) \text{ (1 en "} i+1 \text{-ème position")}$$

Par exemple : $f(L_0) = (1, 0, \ldots, 0)$, $f(L_1) = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $f(L_n) = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.

(b) Puisque, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $f(L_i) \in Im(f)$, on sait que

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \Big(0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i+1\text{-ème position}}, 0, \ldots, 0\Big) \in Im(f).$$

Puisque $Im(f)$ est un espace vectoriel, toute combinaison linéaire des ces vecteurs appartient toujours à $Im(f)$, c'est à dire : $Vect\Big((1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1)\Big) \subset Im(f)$.
Autrement dit, $\mathbb{R}^{n+1} \subset Im(f)$. Puisque par définition $Im(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, on a $Im(f) = \mathbb{R}^{n+1}$.
Ceci montre que f est surjective !

Exercice 10 (Isomorphisme de Taylor)

f est clairement une application linéaire.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$. Montrons que $P = 0$.
On sait que

$$f(P) = (P(\alpha), P'(\alpha), \ldots, P^{(n)}(\alpha)) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Ainsi $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(n)}(\alpha) = 0$. Autrement dit, α est une racine de P de multiplicité $n+1$.
Or puisque $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\deg(P) \leqslant n$: il en résulte que P est le polynôme nul.
Ceci montre que $Ker(f) = \{0\}$ et donc f est injective.

2. (a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Et notant $P = (X - \alpha)^k$, on a :

- $P^{(0)} = P = (X - \alpha)^k$ donc $P^{(0)}(\alpha) = 0$.
- $P^{(1)} = k(X - \alpha)^{k-1}$ donc $P^{(1)}(\alpha) = 0$.
- $P^{(2)} = k(k-1)(X - \alpha)^{k-2}$ donc $P^{(2)}(\alpha) = 0$.

$\vdots$

- $P^{(k-1)} = k(k-1)\ldots 2(X - \alpha)$ donc $P^{(k-1)}(\alpha) = 0$.
- $P^{(k)} = k(k-1)\ldots 1(X - \alpha)^0 = k!$ donc $P^{(k)}(\alpha) = k!$.
- Pour tout $i > k$, $P^{(i)} = 0$ et donc $P^{(i)}(\alpha) = 0$.

Ainsi : $f\Big((X - \alpha)^k\Big) = (0, 0, \ldots, 0, k!, 0, \ldots, 0)$ ($k!$ en $k+1$-ème position)

(b) Même raisonnement qu'en 3.(b) de l'Exercice 9. On sait que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$(0, 0, \ldots, 0, k!, 0, \ldots, 0) = f\Big((X - \alpha)^k\Big) \in Im(f)$$

et donc

$$\frac{1}{k!}(0, 0, \ldots, 0, k!, 0, \ldots, 0) = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in Im(f).$$

Ainsi $Vect\Big((1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1)\Big) \subset Im(f)$.
Ceci montre que $\mathbb{R}^{n+1} \subset Im(f)$, c'est à dire $Im(f) = \mathbb{R}^{n+1}$. Ainsi f est surjective.

3. (a) On a déjà vu que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f\Big((X - \alpha)^k\Big) = \Big(0, 0, \ldots, 0, k!, 0, \ldots 0\Big) = k! \cdot e_k$.
Ainsi : $f\Big(\frac{1}{k!}(X - \alpha)^k\Big) = \frac{1}{k!} f\Big((X - \alpha)^k\Big) = e_k$.
Autrement dit, l'unique antécédent de e_k par f^{-1} est $\frac{1}{k!}(X - \alpha)^k$.
Ceci montre que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f^{-1}(e_k) = \frac{1}{k!}(X - \alpha)^k$.

(b) Soit $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On a la décomposition naturelle dans la base canonique :

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) = x_0 \cdot e_0 + x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_n \cdot e_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot e_k.$$

Puisque f^{-1} est également une application linéaire, on a :

$$f^{-1}\Big((x_0, x_1, \ldots, x_n)\Big) = f\left(\sum_{k=0}^{n} x_k \cdot e_k\right) = \sum_{k=0}^{n} x_k f^{-1}(e_k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{k!}(X-\alpha)^k.$$

On vient donc de déterminer explicitement l'application réciproque f^{-1} !

4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ l'égalité $P = f^{-1}(f(P))$ s'écrit :

$$P = f^{-1}\Big((P(\alpha), P'(\alpha), \ldots, P^{(n)}(\alpha))\Big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k.$$

$\Big($formule précédente avec $(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (P(\alpha), P'(\alpha), \ldots, P^{(n)}(\alpha))$, c'est à dire $x_k = P^{(k)}(\alpha)\Big)$
En fait, cette formule est **la formule de Taylor à l'ordre n en α** (cf. chapitre "Polynômes").

Exercice 11 (Image d'une base 1)

Traduisons les hypothèses :

$$f((1,0,0)) = (1,-2), \quad f((0,1,0)) = (3,0), \quad f((0,0,1)) = (2,1).$$

1. On sait que $\Big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On regarde la famille $\Big(f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1))\Big)$ c'est à dire : $\Big((1,-2),(3,0),(2,1)\Big)$.

• Ce n'est pas une famille libre (car par exemple : $(1,-2) = -2(2,1) + \frac{5}{3}(3,0)$).
On en déduit que f n'est pas injective.

• C'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$, en effet :

$$Vect\Big((1,-2),(3,0),(2,1)\Big) = Vect\Big((3,0),(2,1)\Big) = Vect\Big((1,0),(2,1)\Big) = Vect\Big((1,0),(0,1)\Big) = \mathbb{R}^2.$$

On en déduit que f est surjective.

2. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f((x,y,z)) &= f\Big(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)\Big) = xf((1,0,0)) + yf((0,1,0)) + zf((0,0,1)) \\ &= x(1,-2) + y(3,0) + z(2,1) = (x+3y+2z, -2x+z). \end{aligned}$$

Exercice 12 (Image d'une base 2)

1. Il suffit de vérifier que $\Big((1,0,1),(1,2,2),(0,1,0)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(on sait ensuite que donner l'image des vecteurs d'une base définit une application linéaire de manière unique)
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque. Montrons qu'il existe un unique $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$(x,y,z) = \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(1,2,2) + \lambda_3(0,1,0).$$

Cette égalité équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda_1 + \lambda_2 & = x \\ \quad 2\lambda_2 + \lambda_3 & = y \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 & = z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \lambda_1 + \lambda_2 & = x \\ \quad 2\lambda_2 + \lambda_3 & = y \\ \quad \lambda_2 & = z - x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \lambda_1 & = x - (z-x) \\ \lambda_3 & = y - 2(z-x) \\ \lambda_2 & = z - x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \lambda_1 & = 2x - z \\ \lambda_2 & = -x + z \\ \lambda_3 & = 2x + y - 2z \end{array}\right.$$

On a bien une unique solution, d'où le résultat.

2. Dans la questions précédente, on a vu que tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se décompose :

$$(x,y,z) = (2x-z)\cdot(1,0,1) + (-x+z)\cdot(1,2,2) + (2x+y-2z)\cdot(0,1,0).$$

Par linéarité :

$$\begin{aligned}
f((x,y,z)) &= (2x-z)\cdot f((1,0,1)) + (-x+z)\cdot f((1,2,2)) + (2x+y-2z)\cdot f((0,1,0)) \\
&= (2x-z)\cdot 3 + (-x+z)\cdot(-1) + (2x+y-2z)\cdot 0 \\
&= 7x-4z.
\end{aligned}$$

Exercice 13 (Calcul de puissances d'un endomorphisme)

1. D'abord, on a bien $\Delta : E \to E$. Vérifions que Δ est linéaire. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\Delta(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(X+1) - (P+\lambda Q)(X) \\
&= P(X+1) + \lambda Q(X+1) - P(X) - \lambda Q(X) \\
&= P(X+1) - P(X) + \lambda(Q(X+1) - Q(X)) \\
&= \Delta(P) + \lambda\Delta(Q).
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\Delta \in \mathcal{L}(E)$.

2. $Ker(\Delta) = \Big\{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(X+1) - P(X) = 0\Big\}$.

Montrons qu'en fait $Ker(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$ (ensemble des polynômes constants).

- D'abord, si P est un polynôme constant, on a évidemment $P(X+1) = P(X)$.
- Inversement, montrons que les seuls polynômes satisfaisant $P(X+1) - P(X) = 0$ sont les polynômes constants.

(c'est un exercice assez classique)

Supposons que $n = \deg(P) \geqslant 1$, de sorte que l'on peut écrire $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}
P(X+1) - P(X) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left((X+1)^k - X^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k\right) \quad \text{(en développant } (X+1)^k \text{ avec le binôme de Newton)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i\right).
\end{aligned}$$

En observant les puissance mises en jeu dans ce polynôme, on voit que le terme de plus haut degré qui y apparaît est $a_n\binom{n}{n-1}X^{n-1}$: c'est donc un polynôme de degré $n-1$.

Ainsi, si $\deg(P) = n \geqslant 1$, alors $\deg(P(X+1) - P(X)) = n-1$. Il est alors impossible que $P(X+1) - P(X) = 0$. Ainsi pour que $P(X+1) - P(X) = 0$, il faut que $\deg(P) \leqslant 0$, c'est à dire que P soit constant, CQFD.

3. (a) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X) = S(P) - P = S(P) - Id_E(P).$$

Autrement dit, $\Delta = S - Id_E$.

(b) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

- $S^0(P) = Id_E(P) = P$
- $S^1(P) = S(P) = P(X+1)$
- $S^2(P) = S(S(P)) = S(P(X+1))$. En notant $Q(X) = P(X+1)$, on note que $S(Q) = Q(X+1) = P(X+2)$.

Ainsi $S^2(P) = P(X+2)$.

- Etc...

Par récurrence immédiate, on montrerait que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ S^k(P) = P(X+k)$.

(c) Les endomorphismes S et $-Id_E$ commutent évidemment (puisque Id_E commute avec n'importe quel endomorphisme) donc on peut appliquer la formule du binôme : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\Delta^n = (S - Id_E)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S^k \circ (-Id_E)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S^k \circ (-1)^{n-k} Id_E^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} S^k \circ Id_E = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} S^k.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} S^k(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k).$$