Programme de khôlles ECG1-B

Semaines 5 et 6

Suites réelles, Limites de suites, Polynômes

• Énoncés / notions à connaitre :

Suites réelles

- Vocabulaire sur les suites : suite définie explicitement/par récurrence/implicitement, suite minorée/majorée/bornée, suite croissante/décroissante/monotone...
- Diverses méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite.
- Suites arithmétiques, suites géométriques. Termes généraux.
- Suites arithmético-géométriques : méthode pour en exprimer le terme général.
- Suites à récurrence linéaire d'ordre 2 : méthode pour en exprimer le terme général (méthode de l'équation caractéristique).

Limites de suites

- Définition de la limite (réelle ou $\pm\infty$) avec des quantificateurs.
- Calcul de limites d'expressions explicites : opérations standards (somme, produit, quotient, composition d'une limite avec une fonction continue).
  Utilisation de limites classiques (croissances comparées type $\frac{\ln(n)}{n}$, $\frac{n}{e^n}$, $\frac{e^n}{n!}$, etc...)
  (NB : on ne dispose pas encore de développements limités !)
- Utilisation d'encadrements, théorème des gendarmes. Passage à la limite dans une inégalité.
- Théorème de la limite monotone.
- Suites adjacentes. Résultat de convergence.
- Suites extraites formées des termes d'indices pairs et impairs (et lien avec la limite).
- Application de tout cela à la détermination de la limite d'une suite récurrente ($u_{n+1} = f(u_n)$)

Polynômes

- Coefficients, degré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
- Opérations dans $\mathbb{R}[X]$: somme, produit (et composition) de polynômes.
  Conséquences sur le degré.
- Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$, multiples et diviseurs d'un polynôme.
  (NB : on ne parlera pas de "polynôme irréductible"...)
- Dérivation et formule de Taylor.
- Notion de racine, de multiplicité d'une racine. Lien avec la divisibilité
  (par $(X-\alpha)$, par $(X-\alpha)^m$...)
- Lien entre degré et nombre de racines (distinctes ou comptées avec multiplicité)
- Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ (en produit de polynômes irréductibles).

• Démonstrations à connaitre :

- Convergence des suites adjacentes (Théorème 8).
- Formule de Taylor (Théorème 3). On admettra pour la preue le résultat suivant :
  Si $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$ alors $\forall i \in [\![0, n]\!],\ a_i = \dfrac{P^{(i)}(0)}{i!}$. (Corollaire 3)
- α est racine de P si et seulement si $(X-\alpha)$ divise P (Théorème 4, point $\boxed{1}$).
- α est une racine de P de multiplicité m si et seulement si
  $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$. (Théorème 6)