12

Systèmes linéaires

Résolution de système

Exercice 1 (Systèmes échelonnés)

Prévoir le nombre de solutions des systèmes suivants. Vérifiant en déterminant l'ensemble des solutions.

$$(S_1)\begin{cases} 3x+y+z &= 1 \\ 2y-z &= 2 \\ 2z &= 3 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+y-2z &= 0 \\ -y+z &= -1 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} x \quad -z+t &= 1 \\ y-z-t &= 0 \\ z-2t &= 4 \end{cases} \qquad (S_4)\begin{cases} x \quad -z+t &= 1 \\ y-z-t &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

$$(S_5)\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ 2y-z &= 1 \\ z+t &= 2 \\ 2t &= 0 \end{cases}$$

Exercice 2 (3 inconnues)

En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss, déterminer l'ensemble des solutions des systèmes suivants.

$$(S_1)\begin{cases} 2x+y-z=4 \\ x-y+z=-1 \\ x-2y-z=0 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-3y-z=3 \\ 3x-4y-3z=4 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+2y+z=0 \\ 3x \quad +z=4 \end{cases} \qquad (S_4)\begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 \\ 2x+3y-5z=7 \\ x+8y-7z=12 \end{cases}$$

Exercice 3 (4 inconnues)

En appliquant l'algorithme du pivot de Gauss, déterminer l'ensemble des solutions des systèmes suivants.

$$(S_1)\begin{cases} 5x+2y-z \quad =0 \\ x+3y+z-2t=0 \end{cases}$$

$$(S_2)\begin{cases} x+2y+z+t=7 \\ x+2y+2z-t=12 \\ 2x+4y \quad +6t=4 \end{cases}$$

Exercice 4 (Quel second membre ?)

À quelles conditions sur a, b, c le système suivant est-il compatible ?

$$\begin{cases} 2x+y-z=a \\ x+2y+z=b \\ 3x+y-2z=c \end{cases}$$

Exercice 5 (Systèmes et polynômes)

1. Déterminer l'unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$Q(-1)=1,\ Q(1)=-2,\ Q(2)=-1$$

2. On définit les polynômes :

$$P_0=1,\ P_1=X+1,\ P_2=2X^2-X+1,\ P_3=X^3-2X.$$

Montrer que tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3 se décompose de manière unique comme combinaison linéaire de P_0, P_1, P_2, P_3.
Autrement dit, montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$

$$\exists!(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^4,\quad P=\sum_{k=0}^{3}\lambda_k P_k.$$

Systèmes "à paramètre"

Exercice 6 (Système à paramètre 1)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre le système : $\begin{cases} ax+y=1 \\ x+a^2y=0 \end{cases}$

(On distinguera plusieurs cas selon la valeur de a.)

Exercice 7 (Système à paramètre 2)

Pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ le système suivant est-il de Cramer ?

$$\begin{cases} (3-\lambda)x-y+z=38 \\ 7x+(-5-\lambda)y+z=12 \\ 6x-6y+(2-\lambda)z=27 \end{cases}$$

(On ne demande pas de calculer les solutions !)

Exercice 8 (Système à paramètre 3)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2y-z=\lambda x \\ 3x-2y \quad =\lambda y \\ -2x+2y+z=\lambda z \end{cases}$$

(On distinguera plusieurs cas selon la valeur de λ.)