A rendre le $\boxed{\text{Vendredi 17 octobre 2024}}$

Devoir Maison n°2 - Corrigé

Etude de la fonction f et dessin.

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{x^2+1-(x+2)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Déterminons le signe du polynôme $-x^2-4x+1$. Son discriminant est :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) = 16 + 4 = 20 > 0.$$

Il admet donc les deux racines :

$$x_1 = \frac{4+\sqrt{20}}{-2} = \frac{4+2\sqrt{5}}{-2} = -2-\sqrt{5} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4-\sqrt{20}}{-2} = \frac{4-2\sqrt{5}}{-2} = -2+\sqrt{5}.$$

On a ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ -x^2-4x+1 > 0 \Longleftrightarrow -2-\sqrt{5} < x < -2+\sqrt{5}.$
Pour le tableau de variation, calculons les valeurs de f en x_1 et x_2 :

$$a = f(-2-\sqrt{5}) = \frac{-2-\sqrt{5}+2}{(-2-\sqrt{5})^2+1} = -\frac{\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}$$

$$b = f(-2+\sqrt{5}) = \frac{-2+\sqrt{5}+2}{(-2+\sqrt{5})^2+1} = \frac{\sqrt{5}}{10-4\sqrt{5}}$$

Si on veut éliminer la racine carrée au dénominateur, on peut multiplier par les quantités conjuguées $10-4\sqrt{5}$ et $10+4\sqrt{5}$:

$$a = -\frac{\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}} \times \frac{10-4\sqrt{5}}{10-4\sqrt{5}} = \frac{20-10\sqrt{5}}{10^2-(4\sqrt{5})^2} = \frac{20-10\sqrt{5}}{20} = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$b = \frac{\sqrt{5}}{10-4\sqrt{5}} \times \frac{10+4\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}} = \frac{20+10\sqrt{5}}{10^2-(4\sqrt{5})^2} = \frac{20+10\sqrt{5}}{20} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

On en déduit le tableau de variation suivant pour f :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{5}$		$-2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$1-\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\nearrow$	$1+\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\searrow$	0

Pour les limites en $\pm\infty$, on peut par exemple écrire :

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+1} = \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{x} \times \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0.$$

2. Résolvons l'équation $f(x) = x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences :

$$f(x) = x \Longleftrightarrow \frac{x+2}{x^2+1} = x \Longleftrightarrow x+2 = x(x^2+1) \Longleftrightarrow x+2 = x^3+x \Longleftrightarrow x^3 = 2.$$

Ainsi, f admet l'unique point fixe $\boxed{\alpha = \sqrt[3]{2}, \text{ ou encore } \alpha = 2^{1/3}}$.
Puisque la fonction $t \mapsto t^{1/3}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on $\alpha = 2^{1/3} > 1^{1/3}$ c'est à dire $\boxed{\alpha > 1}$.

3. (a) Notons que $1 > -2+\sqrt{5}$. En effet, on a les équivalences :

$$1 > -2+\sqrt{5} \iff 3 > \sqrt{5} \iff 9 > 5, \quad \text{ce qui est bien vrai.}$$

On a vu (tableau de variation) que f est strictement décroissante sur $[-2+\sqrt{5}, +\infty[$.
En particulier, f est continue et strictement décroissante sur le segment $I = [1, \frac{3}{2}]$.
On en déduit (d'après le TVI, en fait) que

$$f(I) = f\left(\left[1, \frac{3}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{3}{2}\right), f(1)\right].$$

On calcule :

$$f(1) = \frac{1+2}{1^2+1} = \frac{3}{2} \quad et \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}+2}{(\frac{3}{2})^2+1} = \frac{6+8}{9+4} = \frac{14}{13} > 1.$$

Ainsi

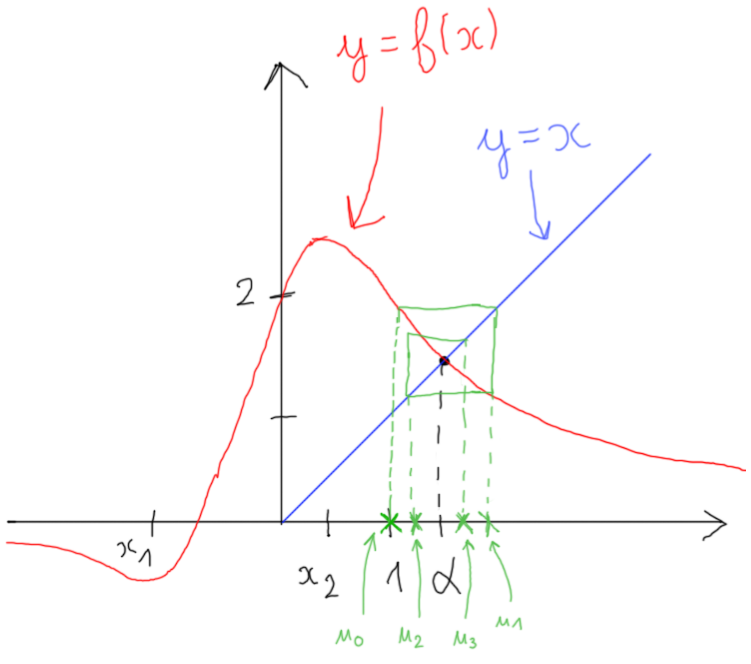
$$f\left(\left[1, \frac{3}{2}\right]\right) = \left[\frac{14}{13}, \frac{3}{2}\right] \subset \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

On a bien montré que $\boxed{f(I) \subset I}$, c'est à dire que le segment I est stable par f.

(b) Puisque I est stable par f, on sait que $\forall x \in I,\ f(x) \in I$. ("Tout ce qui est dans I reste dans I").
Déduisons-en, par récrurence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1, \frac{3}{2}]$.
<u>Initialisation :</u> On a $u_0 = 1 \in [1, \frac{3}{2}]$.
<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $u_n \in [1, \frac{3}{2}]$. Il en résulte que $f(u_n) \in [1, \frac{3}{2}]$, c'est à dire $u_{n+1} \in [1, \frac{3}{2}]$. Ceci achève la récurrence.

(Si la question n'est pas posée explicitement et exclusivement, on pourrait considérer que ceci est une "récurrence immédiate", à partir du moment où on a montré que $[1, \frac{3}{2}]$ est stable par f)

4.



On prévoit ainsi que $\boxed{u_0 < u_2 < u_3 < u_1}$ donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

Implémentation en Python.

5.
```python
def f(x) :
    y = (x+2)/(x**2+1)
    return y
```

6. (a)
```python
def suite(n) :
    u = 1
    for k in range( n ) : # ou bien range(1,n+1)... n passages dans la boucle
        u = f(u)
    return u
```

(b) En appelant `suite(0)`, `suite(1)`, etc, on obtient les valeurs approximatives suivantes :

$$\boxed{u_0 = 1 \qquad u_1 = 1.5 \qquad u_2 \simeq 1.07 \qquad u_3 \simeq 1.42 \qquad u_4 \simeq 1.13 \qquad u_5 \simeq 1.37}$$

(c) On rappelle que $\alpha = \sqrt[3]{2}$. On peut en calculer la valeur en Python avec : `print(2**(1/3))`

On obtient : $\boxed{\alpha \simeq 1.2599}$.

Toujours avec la fonction `suite`, on obtient les valeurs approchées :

$$\boxed{u_{10} \simeq 1.2137 \qquad u_{100} \simeq 1.2599 \qquad u_{1000} \simeq 1.2599}$$

(avec les chiffres suivants, on constate que u_{1000} est encore plus proche de α.

On conjecture donc naturellement que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$.

(La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique point fixe de f)

Suite des termes pairs / impairs.

On introduit les suites des termes pairs et impairs définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

7. Avec les valeurs obtenues 6.(b), on confirme que :

$$u_0 < u_2 < u_4 \quad \text{et} \quad u_1 > u_3 > u_5$$

c'est à dire :

$$v_0 < v_1 < v_2 \quad \text{et} \quad w_0 > w_1 > w_2.$$

On conjecture donc que $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante et } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante}}$.

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$v_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f(f(v_n)) = (f\circ f)(v_n).$$

De même,

$$w_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = f(f(w_n)) = (f\circ f)(w_n).$$

On a bien montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = (f\circ f)(v_n) \quad \text{et} \quad w_{n+1} = (f\circ f)(w_n).}$

(b) On a déjà vu en 3.(a) que f est strictement décroissante sur $[1, \frac{3}{2}]$, et que $f([1, \frac{3}{2}]) \subset [1, \frac{3}{2}]$.

Il en résulte que $\boxed{(f\circ f) \text{ est strictement croissante sur } [1, \frac{3}{2}]}$,

comme composée de deux fonctions strictement décroissantes.

(c) Enfin, établissons que v est strictement croissante et que w est strictement décroissante.

Montrons donc par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n < v_{n+1}$ et $w_n > w_{n+1}$.

<u>Initialisation :</u> On a déjà établi que $v_0 < v_1$ et $w_0 > w_1$ (voir question 7.)

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que :

$$v_n < v_{n+1} \quad \text{et} \quad w_n > w_{n+1}.$$

On sait que $v_n, v_{n+1}, w_n, w_{n+1} \in [1, \frac{3}{2}]$,

(car on a vu en 3.(b) que la suite u prend ses valeurs dans cet intervalle)

et on sait que $f\circ f$ est strictement croissante sur $[1, \frac{3}{2}]$ (d'après 8.(b)).

On en déduit donc que

$$(f\circ f)(v_n) < (f\circ f)(v_{n+1}) \quad \text{et} \quad (f\circ f)(w_n) > (f\circ f)(w_{n+1})$$

c'est à dire (d'après la relation de récurrence du 8.(a)) :

$$v_{n+1} < v_{n+2} \quad \text{et} \quad w_{n+1} > w_{n+2}.$$

Ceci achève la récurrence.