22

Espaces vectoriels de dimension finie

Calculs de dimension

Exercice 1 (Quelle dimension ?)
En déterminant une base, donner la dimension des espaces vectoriels suivants :

- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z = 0,\ 3x+y+z = 0\}$.
- $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 2z - t = 0\}$.
- $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ c & 0 & a \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
- $G = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid X^2 + 2X + 3 \text{ divise } P\}$
- $S = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$.

(Utiliser la méthode de l'équation caractéristique pour déterminer une base de S)

Exercice 2 (Un hyperplan de polynômes)
Soit F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui s'annulent en 1. Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ et en donner une base.

Bases en dimension finie

Exercice 3 (Base ou pas ?)
Dans chacun des cas suivants, déterminer (avec le moins de calculs possible !) si la famille $\mathcal{F}$ est ou non une base de E :

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$,
(a) $\mathcal{F} = \big((1, 2, -1), (1, 1, 3)\big)$.
(b) $\mathcal{F} = \big((1, 0, -1), (2, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 1)\big)$.
(c) $\mathcal{F} = \big((1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 2)\big)$.
(d) $\mathcal{F} = \big((1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\big)$.

2. La famille $\mathcal{F} = (X^3, X^3 - 1, X^3 + X, X^2)$
(a) Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$?
(b) Dans $E = \mathbb{R}_4[X]$?

3. Dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
(a) $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$
(b) $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$

Exercice 4 (Génératrice ou pas ?)
Déterminer, <u>sans aucun calcul</u>, si les familles de polynômes suivantes sont génératrices de $\mathbb{R}_3[X]$:

(a) $(X^3 - X^2 + 2X - 1,\ X^2 - 2)$.
(b) $(X^2 - X + 1,\ X^3 - 2X,\ X - 1)$.
(c) $(X^2 + 3X - 2,\ 3X - 2,\ X^3,\ 2)$.
(d) $(X^3 - 2,\ X^2 + 2X,\ -1,\ X - 2,\ X^3 + 2X^2)$.
(e) $(X^2 + X,\ X + 1,\ 3,\ X^2 + 1\ , 2X^2 - X + 1)$.

Exercice 5 (Complétion/extraction)
1. Compléter la famille de l'Exercice 3, 1.(a) en une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Extraire de la famille de l'Exercice 3, 1.(b) une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 (Une base de $\mathbb{R}_3[X]$)
Soit $a \in \mathbb{R}^*$.
1. Montrer que $\big(1, X - a, (X - a)^2, (X - a)^3\big)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer les coordonnées de X et de X^3 dans cette base.
3. Comment déterminer simplement les coordonnées de n'importe quel polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ dans cette base ?

Exercice 7 (Une autre base pour $\mathbb{R}_n[X]$)
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$.

Montrer que $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Indication : Pour montrer que c'est une famille libre, on pensera à évaluer X en une valeur particulière...

Calcul de rang

Exercice 8 (Rang dans $\mathbb{R}^3$)
Calculer le rang des familles suivantes :
(a) $\mathcal{F}_1 = ((1, 1, 0), (0, 1, 1))$
(b) $\mathcal{F}_2 = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$
(c) $\mathcal{F}_3 = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1))$
(d) $\mathcal{F}_4 = ((1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, 1, 1))$

Dans chaque cas, dire s'il s'agit d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9 (Rang dans $\mathbb{R}[X]$)
On pose : $P_0 = 1$, $P_1 = X - 1$, $P_2 = 2X^2 + 2$, $P_3 = (X-1)(2X^2-X)$, $P_4 = X^3$, $P_5 = X^3-2X+1$.
1. Calculer $rg(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$.
2. Cette famille est-elle libre ?
3. Déterminer l'espace vectoriel qu'elle engendre.

Exercice 10 (Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)
On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
1. Calculer $rg(A, B, C, D, E)$.
2. Cette famille est-elle libre ?
Est-elle génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercices classiques

Exercice 11 (Polynômes de Lagrange (le retour))

Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on définit

$$L_i(X) = \prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}} \left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right) \in \mathbb{R}_n[X].$$

1. (a) Pour tout $(i, k) \in [\![0, n]\!]^2$, que vaut $L_i(x_k)$?
(b) En déduire que $\mathcal{B} = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ quelconque.
Comment P se décompose-t-il dans la base $\mathcal{B}$?

3. Soient $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(x_k) = y_k$. On donnera la décomposition de ce polynôme dans la base $\mathcal{B}$.

Cet unique polynôme de degré inférieur à n, qui prend les valeurs y_k au $(n+1)$ points x_k, est appelé "Polynôme interpolateur de Lagrange".

Exercice 12 (Indice de nilpotence d'un endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ (f est un endomorphisme de E).

On suppose que f est un endomorphisme **nilpotent** c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$.

On note $p \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier satisfaisant $f^p = 0$. (On l'appelle "l'indice de nilpotence de f")

1. Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$.

2. Montrer que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille libre.
Indication : que se passe-t-il en composant par f ?...

3. En déduire qu'on a forcément $p \leqslant n$.
Que dire de la famille précédente dans le cas $p = n$?