1

Logique, symboles, raisonnement mathématique

Exercice 1 (Traduction)

1. $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) > -5x+2$. Négation : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant -5x+2$.
2. $\exists x \in [0,1],\ f(x) = 0$. Négation : $\forall x \in [0,1],\ f(x) \neq 0$.
3. $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,1],\ f(x) = C$. Négation : $\forall C \in \mathbb{R},\ \exists x \in [0,1],\ f(x) \neq C$.
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$. Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant 4$. Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ v_n > 4$.
6. $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant C$. Négation : $\forall C \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ v_n > C$.

Exercice 2 ("Inversion" de quantificateurs)

1. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$: Vrai pour certaines fonctions (les fonctions surjectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$...)
$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$: Jamais vrai.
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)$: Toujours vrai.
$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$: Signifie que f est constante.

2. La première affirmation ($\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x \leqslant k$) est fausse.
Il n'existe pas de réel $k \in \mathbb{R}$ fixé tel que, pour n'importe quel $x \in \mathbb{R}$, $e^x \leqslant k$: en effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc on aura nécessairement $e^x > k$ pour un x "assez grand".
La seconde affirmation ($\forall x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{R},\ e^x \leqslant k$) est vraie.
Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on peut trouver un réel k tel que $e^x \leqslant k$: il suffit de choisir par exemple $k = e^x + 1$.

Exercice 3 (Implications)

1. $\mathcal{A} \Longleftarrow \mathcal{B}$
2. La proposition $\mathcal{A}$ n'a de sens que si $x > 0$. En supposant que $x > 0$: $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$.
3. $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$.
4. $\mathcal{A} \Longleftarrow \mathcal{B}$.
5. $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$.
6. $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$.
7. $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$.

Exercice 4 (Quelques équivalences)

1. On a les équivalences suivantes :

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 \Longleftrightarrow x^2+y^2+2xy = x^2+y^2-2xy \Longleftrightarrow 4xy = 0 \Longleftrightarrow xy = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0).$$

2.(a) On suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) - P(x-1) = x$.
• En particulier, pour $x = 0$, on obtient $P(1) - P(-1) = 0$, c'est à dire $a + b - (a - b) = 0$.
Ainsi $2b = 0$, donc $\underline{b = 0}$.
• En particulier, pour $x = 1$, on obtient $P(2) - P(0) = 1$, c'est à dire $4a + 2b = 1$.
Ainsi $4a = 1$, donc $\underline{a = \frac{1}{4}}$.

2.(b) • Supposons que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) - P(x-1) = x$. Montrons que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \dfrac{x^2}{4}$.
D'après le 2.(a), l'hypothèse $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) - P(x-1) = x$ entraine : $a = \frac{1}{4}$ et $b = 0$.
Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = ax^2 + bx$, on obtient bien $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \dfrac{x^2}{4}$.

• Supposons que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \dfrac{x^2}{4}$. Montrons que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) - P(x-1) = x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x+1) = \dfrac{(x+1)^2}{4}$ et $P(x-1) = \dfrac{(x-1)^2}{4}$, donc :

$$P(x+1) - P(x-1) = \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{4} = \frac{x^2+2x+1}{4} - \frac{x^2-2x+1}{4} = \frac{4x}{4} = x.$$

On a bien montré l'équivalence : $\Big(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) - P(x-1) = x\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \dfrac{x^2}{4}\Big)$.

Exercice 5 (Une suite récurrente)

Pour tout $n \geqslant 1$, posons $\mathcal{P}(n)$: "v_n est bien défini et $v_n > 0$".
Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- Initialisation : On a $v_1 = 1 > 0$, d'où $\mathcal{P}(1)$.
- Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On a v_n bien défini et $v_n > 0$. En particulier $v_n \neq 0$, donc $v_{n+1} = 2v_n + \dfrac{1}{v_n}$ est bien défini.
De plus $v_n > 0$ donc $2v_n > 0$ et $\dfrac{1}{v_n} > 0$, et donc $v_{n+1} = 2v_n + \dfrac{1}{v_n} > 0$. On a bien montré $\mathcal{P}(n+1)$.
Ceci achève la récurrence.

Exercice 6 (Une décomposition)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: " $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2,\ (3+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ ".
Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : On peut écrire $(3+\sqrt{2})^0 = a_0 + b_0\sqrt{2}$ avec $a_0 = 1 \in \mathbb{Z}$ et $b_0 = 0 \in \mathbb{Z}$. Ceci montre $\mathcal{P}(0)$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

D'après $\mathcal{P}(n)$, on dispose de $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $(3+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Il en résulte que :

$$(3+\sqrt{2})^{n+1} = (3+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})^n = (3+\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2}) = 3a_n+3b_n\sqrt{2}+a_n\sqrt{2}+2b_n = (3a_n+2b_n)+(a_n+3b_n)\sqrt{2}.$$

Ainsi, en posant $a_{n+1} = 3a_n + 2b_n \in \mathbb{Z}$ et $b_{n+1} = a_n + 3b_n \in \mathbb{Z}$, on a $(3+\sqrt{2})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2}$.
On a bien montré $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

Exercice 7 (Divisibilité par 3)

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

- Initialisation : $4^0 - 1 = 0$ est bien divisible par 3.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $4^n - 1$ est divisible par 3, montrons que $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3.

Par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{Z}$ (et même $k \in \mathbb{N}$) tel que $4^n - 1 = 3k$.
On en déduit que $4^{n+1} - 4 = 4 \times 3k = 12k$, puis $4^{n+1} - 1 = 12k + 3$, c'est à dire $4^{n+1} - 1 = 3(4k+1)$.
On a ainsi écrit $4^{n+1} - 1 = 3k'$ avec $k' = 4k + 1 \in \mathbb{Z}$.
Ceci montre que $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3, ce qui achève la récurrence.

Exercice 8 (Une suite à récurrence linéaire double)

1. Après calcul, on voit que $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 8$... On peut donc conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = 2^n$".

Montrons par récurrence (double) que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : On a $u_0 = 1 = 2^0$ et $u_1 = 2 = 2^1$, d'où $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$.
- Hérédité : Soit $n \geqslant 1$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On suppose donc que $u_{n-1} = 2^{n-1}$ et $u_n = 2^n$.
Or, d'après l'énoncé, on sait que $\forall k \geqslant 2,\ u_k = 3u_{k-1} - 2u_{k-2}$.
En particulier, on a $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$. Ainsi :

$$u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1} = 3 \times 2^n - 2 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^n - 2^n = (3-1) \times 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

Ceci montre $\mathcal{P}(n+1)$ est achève la récurrence.

Exercice 9 (Une suite de rationnels)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathcal{P}(n)$: "$w_n \in \mathbb{Q}$".
Montrons par récurrence (forte) que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : $w_1 = 2 \in \mathbb{Q}$, d'où $\mathcal{P}(1)$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \dots, \mathcal{P}(n)$, et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On suppose donc que $w_1 \in \mathbb{Q}$, $w_2 \in \mathbb{Q}$, $\dots$, $w_n \in \mathbb{Q}$.
Il en résulte que $\dfrac{w_1}{n} \in \mathbb{Q}$, $\dfrac{w_2}{n-1} \in \mathbb{Q}$, $\dots$, $\dfrac{w_n}{1} \in \mathbb{Q}$ (une fraction de rationnels est un rationnel),
puis que $w_{n+1} = \dfrac{w_1}{n} + \dfrac{w_2}{n-1} + \dots + \dfrac{w_n}{1} \in \mathbb{Q}$ (une somme de rationnels est un rationnel).
Ceci montre $\mathcal{P}(n+1)$ est achève la récurrence.

Exercice 10 (Valide ou non ?)

1. Non, il faut écrire $a \in E$.
2. Oui : $\{a\}$ est une partie de E, donc un élément de $\mathcal{P}(E)$.
3. Non, il faut écrire $E \cap F = \{c\}$.
4. Non, il faut écrire $E \cap G = \emptyset$.

Exercice 11 (Traduction)

1. Implicite : $\{n \in \mathbb{Z} \,|\, \exists k \in \mathbb{Z},\, n = 3k\}$. Explicite : $\{3k, k \in \mathbb{Z}\}$.
2. Implicite : $\{x \in \mathbb{R}_+ \,|\, x^2 \in \mathbb{N}\}$. Explicite : $\{\sqrt{k}, k \in \mathbb{N}\}$.
3. Implicite : $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a+b = 1\}$. Explicite : $\{(a, 1-a), a \in \mathbb{R}\}$ ou bien $\{(1-b, b), b \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 12 (Ensembles et logique)

a) $(x \leqslant 2$ et $x \geqslant -1)$ ou $x > 3 \iff x \in [-1,2]$ ou $x \in]3,+\infty[\iff x \in [-1,2] \cup]3,+\infty[$.

b) $x > 4$ et $(x \leqslant 6$ ou $x \geqslant 2) \iff x \in]4,+\infty[$ et $x \in]-\infty, 6] \cup [2, +\infty[$
$\iff x \in]4,+\infty[$ et $x \in \mathbb{R} \iff x \in]4,+\infty[$.

Exercice 13 (Réunion de n ensembles)

a) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} [0,i] = [0,n]$, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} [0,i] = [0,1]$. b) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} [i, i+1[= [1, n+1[$, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} [i, i+1[= \emptyset$.

c) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \left]\frac{1}{i}, i\right] = \left]\frac{1}{n}, n\right]$, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} \left]\frac{1}{i}, i\right] = \emptyset$.

Exercice 14 (Différence symétrique)

1. $A\Delta B$ correspond à "ce qui est dans A ou dans B, mais pas les deux".

2. $A\Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$.
$A\Delta E = (A \cup E) \setminus (A \cap E) = E \setminus A = \overline{A}$.
$A\Delta\emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A$.

3. (a) En notant que $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, on a ici :

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup \emptyset = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B). \end{aligned}$$

3.(b) En utilisant la formule du 3.(a),

$$\overline{A}\Delta\overline{B} = (\overline{A} \cap \overline{\overline{B}}) \cup (\overline{\overline{A}} \cap \overline{B}) = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A\Delta B.$$

3.(c) En utilisant la formule du 3.(b),

$$\begin{aligned} \overline{A\Delta B} &= \overline{(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)} = \overline{(A \cap \overline{B})} \cap \overline{(\overline{A} \cap B)} = (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \\ &= (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap A) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= \emptyset \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup \emptyset = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B). \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\overline{A}\Delta B = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{\overline{A}} \cap B) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$. On a donc bien $\overline{A\Delta B} = \overline{A}\Delta B$.

4. Montrons l'équivalence $A\Delta B = \emptyset \iff A = B$.

• Supposons $A\Delta B = \emptyset$ et montrons que $A = B$.
On a $A\Delta B = \emptyset$, c'est à dire $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \emptyset$. Ceci signifie que $(A \cup B) \subset (A \cap B)$. Ainsi :

$$A \subset (A \cup B) \subset (A \cap B) \subset B \qquad \text{et} \qquad B \subset (A \cup B) \subset (A \cap B) \subset A.$$

Ainsi $A \subset B$ et $B \subset A$, d'où $A = B$.

• Inversement, supposons $A = B$ et montrons que $A\Delta B = \emptyset$.
D'après la question 2., $A\Delta B = A\Delta A = \emptyset$, d'où le résultat.

On a bien montré l'équivalence voulue !

Exercice 15 (Une partie de $\mathbb{N}^2$)

1. $E_0 = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \,|\, p+q=0\} = \{(0,0)\}$.
$E_1 = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \,|\, p+q=1\} = \{(0,1),(1,0)\}$.
$E_2 = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \,|\, p+q=2\} = \{(0,2),(1,1),(2,0)\}$.
$E_3 = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \,|\, p+q=3\} = \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$.

2. Cela correspond à des points alignés en "diagonales" sur le plan.

3. Pour deux réels $r \neq r'$, on a $E_r \cap E_{r'} = \emptyset$.
En effet, s'il existait un couple $(p,q) \in E_r \cap E_{r'}$, on aurait $p+q=r$ et $p+q=r'$: absurde !

4. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ fixé. Montrons qu'il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ tel que $(p,q) \in E_r$.
Autrement dit, on veut montrer qu'il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ tel que $p+q=r$.
Or c'est évident : l'unique réel en question est $r = p+q$.