# #16 : Intégration sur un segment - Corrigé

## Ex 1 :

(a) $\int_1^2 (3x^3 - 2x^2 + x - 1)\,dx = \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$

$= \left(\frac{3.2^4}{4} - \frac{2.2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1\right)$

$= \frac{85}{12}$

(b) $\int_a^b e^{2t}\,dt = \left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_a^b = \frac{e^{2b} - e^{2a}}{2}$

(c) $\int_0^1 \frac{dt}{t+1} = \left[\ln(t+1)\right]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$

## Ex 2 :

(a) $\int_2^3 \frac{dt}{t\ln(t)} = \int_2^3 \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}\,dt = \left[\ln(\ln(t))\right]_2^3$

$= \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2))$.

(b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\frac{1}{2}} + 2$

$= -\frac{2}{\sqrt{2}} + 2 = -\sqrt{2} + 2$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^3 \cos(x)\,dx = \left[\frac{\sin(x)^4}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$

(d) $\frac{1}{x^2-1} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-1} \iff \frac{1}{x^2-1} = \frac{\alpha(x-1)+\beta(x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$\iff \frac{1}{x^2-1} = \frac{x(\alpha+\beta)+(-\alpha+\beta)}{x^2-1}$

On choisit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de sorte que : $\begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ -\alpha+\beta = 1 \end{cases}$

On obtient : $\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$

Ainsi, $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$, $\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$.

Donc $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}\right)dx$

$= \left[-\frac{1}{2}\ln(|x+1|) + \frac{1}{2}\ln(|x-1|)\right]_0^{\frac{1}{2}}$ ($\triangle$ $x-1<0$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$)

$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right)}{2}$.

(e) On a $|t^2-1| = \begin{cases} t^2-1 \text{ si } t^2-1 \geq 0 \\ -(t^2-1) \text{ si } t^2-1 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} t^2-1 \text{ si } t \geq 1 \\ -t^2+1 \text{ si } t \leq 1 \end{cases}$
(pour $t \in [0,2]$)

$\int_0^2 t|t^2-1|dt = \int_0^1 t(-t^2+1)dt + \int_1^2 t(t^2-1)dt$

$= \int_0^1 (-t^3+t)dt + \int_1^2 (t^3-t)dt$

$= \left[\frac{-t^4}{4} + \frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2}\right]_1^2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{5}{2}$.

## Ex 3 :

(a) $$\int_1^e \underbrace{x^2}_{u'(t)} \underbrace{\ln(x)}_{v(t)}\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{x^2}{3}\, dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{2e^3 - 1}{9}.$$

(b) $$\int_0^1 \underbrace{t^3}_{v(t)} \underbrace{e^t}_{u'(t)}\, dt = \left[t^3 e^t\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{3t^2}_{v(t)} \underbrace{e^t}_{u'(t)}\, dt$$

$$= e - \left(\left[3t^2 e^t\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{6t}_{v(t)} \underbrace{e^t}_{u'(t)}\, dt\right)$$

$$= e - \left(3e - \left(\left[6t e^t\right]_0^1 - \int_0^1 6 e^t\, dt\right)\right)$$

$$= e - 3e + 6e - \int_0^1 6 e^t\, dt$$

$$= 4e - \left[6e^t\right]_0^1 = 4e - (6e - 6)$$

$$= -2e + 6$$

(c) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos(x)\, dx = 0 \quad \text{car } x \mapsto x^3\cos(x) \text{ est impaire !}$$

$$\left(\forall x \in \mathbb{R},\ (-x)^3 \cos(-x) = -x^3\cos(x)\right)$$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{1}_{u'(t)} \times \underbrace{\ln(1+t^2)}_{v(t)} dt = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 t \frac{2t}{1+t^2} dt$

$\displaystyle = \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt$

$\displaystyle = \ln(2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$

$= \ln(2) - 2\left[t - \arctan(t)\right]_0^1$

$= \ln(2) - 2\left(1 - \arctan(1)\right)$

$= \ln(2) - 2 + 2 \times \frac{\pi}{4}$

$= \ln(2) + \frac{\pi}{2} - 2.$

## Ex 4 :

(a) $x \mapsto x\cos(2x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc y admet des primitives.

Par exemple, l'unique primitive s'annulant en $0$ est donnée par :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \displaystyle\int_0^x t\cos(2t) dt.$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, on calcule :

$\displaystyle F(x) = \int_0^x \underbrace{t}_{v(t)} \underbrace{\cos(2t)}_{u'(t)} dt = \left[t\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^x - \int_0^x \frac{\sin(2t)}{2} dt$

$\displaystyle = \frac{x}{2}\sin(2x) - \frac{1}{2}\int_0^x \sin(2t) dt$

$\displaystyle = \frac{x}{2}\sin(2x) - \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^x$

$\displaystyle = \frac{x}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{4}.$

Plus simplement (mais ce n'est pas obligatoire !) une autre primitive est : $x \mapsto \frac{x}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{4}$.

(b) Même chose, on définit par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x \arctan(t)\,dt.$$

On calcule, pour $x \in \mathbb{R}$ :

$$F(x) = \int_0^x \underbrace{1}_{u'(t)} \times \underbrace{\arctan(t)}_{v(t)}\,dt = \Big[t\arctan(t)\Big]_0^x - \int_0^x t \times \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= x\arctan(x) - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt$$

$$= x\arctan(x) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x$$

$$= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

<u>Ex 5 :</u> (a) On pose $u = 2x+1$ donc $du = 2dx$ $\left(\begin{array}{l}\text{et } t=0 \to u=1 \\ t=2 \to u=5\end{array}\right)$

Ainsi $x\sqrt{2x+1}\,dx = \left(\frac{u-1}{2}\right)\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}\,du$

Donc : $$\int_1^5 \left(\frac{u-1}{2}\right)\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{4}\int_1^5 (u-1)\sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_1^5 u\sqrt{u}\,du - \int_1^5 \sqrt{u}\,du\right) \qquad \left(⚠ \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_1^5 u^{\frac{3}{2}}\,du - \int_1^5 u^{\frac{1}{2}}\,du\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right]_1^5 - \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^5\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}5^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} - \frac{2}{3}5^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{4}{15} + 2\,5^{\frac{5}{2}-1} - \frac{2}{3}\,5^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{1}{2}\,5^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}\,5^{\frac{3}{2}} \qquad \text{et } 5^{\frac{3}{2}} = 5\times 5^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5}$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

(b) On note que $\dfrac{1}{x^2+4} = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{\frac{x^2}{4}+1} = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}$.

Ainsi : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx$.

On pose $u = \dfrac{x}{2}$ donc $du = \dfrac{1}{2}\,dx$

Ainsi $\dfrac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx = \dfrac{1}{u^2+1}\times 2\,du$ et quand $x=0$, $u=0$ ; quand $x=1$, $u=\dfrac{1}{2}$

On obtient donc $\displaystyle\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2+1}\times 2\,du = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2+1}\,du$

$$= \frac{1}{2}\Big[\arctan(u)\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$$

(c) • On pose $u = \sqrt{t}$ donc $du = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$.

(ce qui revient à $\underline{t = u^2}$ et $\underline{dt = 2u\,du}$ !)

• $e^{\sqrt{t}}\,dt = e^{u}\,2u\,du$

• Quand $t=1$, $u=1$ et quand $t=4$, $u=2$.

Ainsi : $\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt = \int_1^2 2u e^u du =$

On peut calculer cela à l'aide d'une IPP !

$$\int_1^2 \underbrace{2u}_{\text{à dériver}} \underbrace{e^u}_{\text{à primitiver}} du = \left[2ue^u\right]_1^2 - \int_1^2 2e^u du$$

$$= 4e^2 - 2e - \left[2e^u\right]_1^2$$

$$= 4e^2 - 2e - 2e^2 + 2e$$

$$= 2e^2.$$

(d) • On pose $u = y^2$ donc $du = 2y\,dy$

• Ainsi $\frac{y}{(y^2+1)(y^2+2)} dy = \frac{y\,dy}{(y^2+1)(y^2+2)} = \frac{\frac{1}{2}du}{(u+1)(u+2)}$

• Quand $y = 1$, $u = 1$
Quand $y = 3$, $u = 9$

Ainsi : $\int_1^3 \frac{y\,dy}{(y^2+1)(y^2+2)} = \frac{1}{2}\int_1^9 \frac{du}{(u+1)(u+2)}$

On cherche à écrire $\frac{1}{(u+1)(u+2)} = \frac{\alpha}{u+1} + \frac{\beta}{u+2}$

$$= \frac{\alpha(u+2) + \beta(u+1)}{(u+1)(u+2)} = \frac{u(\alpha+\beta) + (2\alpha+\beta)}{(u+1)(u+2)}$$

Il faut : $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$

Ainsi : $\frac{1}{2}\int_1^9 \frac{du}{(u+1)(u+2)} = \frac{1}{2}\int_1^9 \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+2}\right) du$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ln(u+1) - \ln(u+2)\Big]_1^9$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\ln(10) - \ln(11) - \ln(2) + \ln(3)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{10\times 3}{11\times 2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{15}{11}\right) = \frac{\ln(15)-\ln(11)}{2}$$

Ex 6 : Même méthode que dans l'Exercice 4 !

(a) On pose, par exemple :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+9}\,dt.$$

On a $\frac{1}{t^2+9} = \frac{1}{9}\,\frac{1}{\frac{t^2}{9}+1} = \frac{1}{9}\,\frac{1}{\left(\frac{t}{3}\right)^2+1}$

donc pour $x\in\mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{1}{9}\int_0^x \frac{1}{\left(\frac{t}{3}\right)^2+1}\,dt \underset{\substack{u=\frac{t}{3}\\ du=\frac{dt}{3}}}{=} \int_0^{\frac{x}{3}} \frac{1}{u^2+1}\,3\,du$$

$$= 3\int_0^{\frac{x}{3}} \frac{du}{u^2+1} = 3\Big[\arctan(u)\Big]_0^{\frac{x}{3}} = 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right).$$

(On aurait pu le repérer directement...)

(b) On pose, par exemple :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x) = \int_0^x \frac{1}{2t^2+1}\,dt$$

On a : $\dfrac{1}{2t^2+1} = \dfrac{1}{(\sqrt{2}t)^2+1}$

donc pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{(\sqrt{2}t)^2+1}\,dt \underset{\substack{u=\sqrt{2}t \\ du=\sqrt{2}\,dt}}{\uparrow}{=} \int_0^{\sqrt{2}x} \frac{1}{u^2+1}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\arctan(u)\Big]_0^{\sqrt{2}x} = \frac{\arctan(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}}$$

(On aurait pu le repérer directement...)

## Ex 7 :

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2t) = \cos(t+t) = \cos(t)\cos(t) - \sin(t)\sin(t)$$
$$= \cos(t)^2 - \sin(t)^2 = \cos(t)^2 - (1-\cos(t)^2)$$
$$= 2\cos(t)^2 - 1$$

et donc $\cos(t)^2 = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$.

2. • On pose $u = \sin(t)$ donc $du = \cos(t)\,dt$

• Pour que $u \in [0,1]$, on peut choisir $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

• $\sqrt{1-u^2}\,du = \sqrt{1-\sin(t)^2}\,\cos(t)\,dt$

$= \sqrt{\cos(t)^2}\,\cos(t)\,dt$ et $\cos(t) \geq 0$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$= \cos(t)\cos(t)\,dt$

$= \cos(t)^2\,dt$

Ainsi : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2\,dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0-0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

## Ex 8 :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

  où $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ est continue sur $[0,1]$.

On a donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \left[\ln(1+t)\right]_0^1$

$$= \ln(2).$$

- $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

  où $f : t \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ est continue sur $[0,1]$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt$

$$= \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\pi/2}\right]_0^1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Ex 9 : L'astuce est de passer au ln :

En notant $u_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} (n^2+k^2)^{1/n}$

on a $\ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(\prod_{k=1}^{n} (n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}\right)$

$$= -\ln(n^2) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left((n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$= -\ln(n^2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln(n^2+k^2)$$

$$= -\ln(n^2) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(n^2\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)$$

$$= -\ln(n^2) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(n^2) + \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)$$

$$= -\ln(n^2) + \frac{1}{n}\left(n \times \ln(n^2) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $[0,1]$.

On a donc $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt = \ln(2) + \frac{\pi}{2} - 2$

(cf. exercice 3 (d))

Donc en passant à l'exp :

$$u_n = e^{\ln(u_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\left(\ln(2)+\frac{\pi}{2}-2\right)} = 2\, e^{\frac{\pi}{2}} e^{-2}$$

## Ex 10 :

1. $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

$I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}$

$I_2 = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = [t - \arctan(t)]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$.

2. Pour $t \in [0,1]$, on a $t^{n+1} \leq t^n$

donc $\frac{t^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{t^n}{1+t^2}$.

En intégrant, on obtient $I_{n+1} \leq I_n$. C'est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$

donc $\int_0^1 0\,dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt \leq \int_0^1 t^n dt$

i.e : $0 \leq I_n \leq \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$

On en déduit $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

## Ex 11 :

1. (a) On peut par exemple poser $\forall x \geq 0$, $g(x) = x - \ln(1+x)$.

On a $\forall x \geq 0$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \geq 0$

donc $g$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et puisque $g(0) = 0$,

on a $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \geq 0$.

Cela donne : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leq x$

(et bien-sûr, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \ln(1+x)$)

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en intégrant $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$

on obtient : $$0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

D'après le thm des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx = 0.$$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx = \int_0^1 \underbrace{x}_{v(x)} \times \underbrace{\frac{x^{n-1}}{1+x^n}}_{u'(x)}\,dx$$

IPP

$$= \left[ x \,\frac{\ln(1+x^n)}{n} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x^n)}{n}\,dx$$

$$= \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$$

(b) On en déduit immédiatement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
et comme

$$n u_n = \ln(2) - \underbrace{\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = \ln(2)$.

Ex 12 : 1. $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$

$$W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,dt = \left[-\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1.$$

2. (a) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(t) \in [0,1]$

donc pour $n \in \mathbb{N}$, $(\sin(t))^{n+1} \leq \sin(t)^n$.

En intégrant on déduit bien $W_{n+1} \leq W_n$.

C'est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(b) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, et $n \in \mathbb{N}$, $\sin(t)^n \geq 0$.

En intégrant on en déduit $W_n \geq 0$.

Ainsi $(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée (par 0), donc converge.

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{n+2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(t)}_{u'(t)} \times \underbrace{\sin(t)^{n+1}}_{v(t)}\, dt$$

$$= \left[-\cos(t)\sin(t)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(t) \times (n+1)\cos(t)\sin(t)^n\, dt$$

$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2 \sin(t)^n\, dt \qquad \left(\frac{\text{Rappel:}}{\cos^2+\sin^2=1}\right)$$

$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin(t)^2)\sin(t)^n\, dt$$

$$= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{n+2}\, dt\right)$$

$$= (n+1)\left(W_n - W_{n+2}\right).$$

Ainsi $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$

$$\Leftrightarrow \quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{W_{n+2} = \frac{(n+1)}{(n+2)} W_n .}$$

(b) C'est une récurrence facile. On peut aussi l'écrire avec des pointillés : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times W_{2n-4}$$

$$= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \underbrace{W_0}_{=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 1}{2n\times(2n-2)\times\cdots\times 2} \times \frac{\pi}{2}$$

On note que $2n\times(2n-2)\times\cdots\times 2 = 2^n (n\times(n-1)\times\cdots\times 1)$
$= 2^n n!$

et $(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 1 = \dfrac{(2n)!}{2n\times(2n-2)\times\cdots\times 2} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$

Ainsi $$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \times \frac{1}{2^n n!} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

De même $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1}$

$$= \frac{2n \times (2n-2) \times \dots \times 2}{2n+1 \times (2n-1) \times \dots \times 3} \times \underbrace{W_1}_{1}$$

$$= \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$ (calculs similaires)

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$ donc :

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1 \quad \text{i.e} \quad \underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

5. (a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

- $1 \times W_1 \times W_0 = 1 \times 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

Alors $(n+1) \times W_{n+1} \times W_n = (n+1) \times \left(\frac{n}{n+1} W_{n-1}\right) \times W_n$ (d'après 3.(a))

$= nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ par hypothèse de récurrence.

(b) $$(W_n)^2 = (W_n W_{n-1}) \times \frac{W_n}{W_{n-1}} = \frac{\pi}{2n} \times \frac{W_n}{W_{n-1}}$$

donc $$n(W_n)^2 = \frac{\pi}{2} \times \underbrace{\frac{W_n}{W_{n-1}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

Ainsi $n(W_n)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$ donc par composition de limite,

$$\sqrt{n}\, W_n = \sqrt{n(W_n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Puis $$W_n = \frac{\sqrt{n}\, W_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

## Ex 13 :

(a) La fonction $t \mapsto \sqrt{1-t}$ est définie et continue sur $]-\infty, 1]$

Ainsi l'intégrale $\int_x^1 \sqrt{1-t}\, dt$ est définie pour tout $x \in ]-\infty, 1]$.

En introduisant $F$ une primitive de $t \mapsto \sqrt{1-t}$ sur $]-\infty,1]$, on a $\forall x \in ]-\infty, 1]$, $f(x) = \int_x^1 \sqrt{1-t}\, dt = F(1) - F(x)$.

Par définition $F \in C^1(]-\infty, 1])$ (car dérivable, de dérivée $t \mapsto \sqrt{1-t}$).

Ainsi $f \in C^1(]-\infty, 1])$ et

$\forall x \in ]-\infty, 1]$, $f'(x) = -F'(x) = -\sqrt{1-x}$.

(⚠ $F(1)$ est une constante !)

(b) La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

Donc l'intégrale $\int_x^{x^2} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est bien définie du moment que $0 \notin [x, x^2]$. Il faut donc que $\underline{\underline{x>0}}$.

On introduit $F$ une primitive de $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sin(t)}{t} dt = F(x^2) - F(x)$.

On en déduit (puisque $F \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$) que $g \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = 2x F'(x^2) - F'(x)$$

$$= 2x \frac{\sin(x^2)}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x}$$

$$= \frac{2\sin(x^2) - \sin(x)}{x}.$$

## Ex 14 :

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(1+t^2)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

L'intégrale $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$ est donc bien définie si $0 \in [x, 2x]$. Il faut donc que $\underline{x \in \mathbb{R}^*}$.

Ainsi $D_f = \mathbb{R}^*$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)} \underset{\substack{u=-t\\ du=-dt}}{=} \int_{x}^{2x} \frac{-du}{\ln(1+u^2)}$$

$$= -\int_{x}^{2x} \frac{du}{\ln(1+u^2)} = -f(x)$$

3. Soit $F$ une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\ln(1+t^2)}$ sur $\mathbb{R}^*$ (i.e sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$)

On a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = F(2x) - F(x)$.

On en déduit que $f \in C^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2F'(2x) - F'(x)$

$$= \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}$$

4. Soit $x > 0$. Pour $t \in [x, 2x]$,

$$\frac{1}{\ln(1+4x^2)} \leq \frac{1}{\ln(1+t^2)} \leq \frac{1}{\ln(1+x^2)}$$

donc $$\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+4x^2)} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+x^2)} dt$$

Ce qui donne : $$\frac{2x-x}{\ln(1+4x^2)} \leq f(x) \leq \frac{2x-x}{\ln(1+x^2)}$$

$$\underbrace{\frac{x}{\ln(1+4x^2)}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty} \leq f(x) \leq \underbrace{\frac{x}{\ln(1+x^2)}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty}$$

(croissance comparée...)

Ainsi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Par imparité, on conclut $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

## ~~EX~~ 15 : Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\int_a^b \underbrace{f(t)}_{v(t)} \underbrace{\sin(nt)}_{u'(t)}\,dt = \left[f(t)\times\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_a^b + \int_a^b f'(t)\frac{\cos(nt)}{n}\,dt$$

$$= -f(b)\frac{\cos(nb)}{n} + f(a)\frac{\cos(na)}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,dt$$

- On a $\left|-f(b)\frac{\cos(nb)}{n}\right| \leq \frac{|f(b)|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\left|f(a)\frac{\cos(na)}{n}\right| \leq \frac{|f(a)|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $-f(b)\frac{\cos(nb)}{n} + f(a)\frac{\cos(na)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- $$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,dt\right| \leq \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)||\cos(nt)|\,dt$$

$$\leq \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$.

Ex 16 : Supposons que $\forall x \in [0,1],\ f(x) \neq x$.

Ainsi $\forall x \in [0,1],\ f(x) - x \neq 0$.

Comme $x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[0,1]$, il faut donc qu'elle soit de signe constant (sinon elle s'annule d'après le TVI)

On a donc $(\forall x \in [0,1],\ f(x) < x)$ ou bien $(\forall x \in [0,1],\ f(x) > x)$.

Par stricte positivité (ou "stricte croissance") de l'intégrale, on en déduit :

$$\int_0^1 f(x)\,dx < \int_0^1 x\,dx \quad \text{ou bien} \quad \int_0^1 f(x)\,dx > \int_0^1 x\,dx$$

i.e $\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ ou bien $\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$

C'est absurde dans les deux cas !

Ainsi notre hypothèse de départ est fausse : c'est donc que

$$\exists c \in [0,1],\ f(c) = c.$$

Ex 17 : 1. Si $f = 0$, les deux membres de l'inégalité sont nuls, donc c'est évident.

2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \int_a^b \left(x^2 f(t)^2 + g(t)^2 + 2x f(t) g(t)\right) dt$$

$$P(x) = \underbrace{\left(\int_a^b f(t)^2\,dt\right)}_{\alpha \in \mathbb{R}} x^2 + \underbrace{\left(2\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)}_{\beta \in \mathbb{R}} x + \underbrace{\int_a^b g(t)^2\,dt}_{\gamma \in \mathbb{R}}$$

(b) $P$ est ainsi un polynôme de degré 2.

Par positivité de l'intégrale, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \int_a^b \underbrace{(xf(t)+g(t))^2}_{\geq 0} dt \geq 0$.

(c) Comme $P$ est de signe constant,
son discriminant est négatif ou nul
(car sinon le signe change entre les racines...)

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \left(2\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2$$
$$- 4\left(\int_a^b f(t)^2\,dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2\,dt\right)$$

$$\Delta = 4\left(\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 - \left(\int_a^b f(t)^2\,dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2\,dt\right)\right).$$

On sait que $\Delta \leq 0$, ce qui donne exactement
l'inégalité voulue.

3. On pose $\forall t \in [a,b],\ \begin{cases} a(t) = \sqrt{f(t)} \\ b(t) = \dfrac{1}{\sqrt{f(t)}} \end{cases}$

Il s'agit de fonctions continues sur $[a,b]$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\left(\int_a^b a(t)\,b(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b a(t)^2\,dt\right)\left(\int_a^b b(t)^2\,dt\right)$$

i.e :

$$\left(\int_a^b 1\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt\right)$$

Ce qui donne l'inégalité voulue.