18

Équivalence et négligeabilité

Motivation

Pour lever l'indétermination de certaines limites de suites ou de fonctions, nous avons été amené par le passé (au moins au brouillon !) à simplifier des expressions en ne conservant que les "termes dominants".

Exemples

- Lorsque $x \to +\infty$, $\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+10x-5} \approx \dfrac{3x^2}{x^2} = 3$ si bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+10x-5} = 3$.
- Lorsque $x \to +\infty$, $e^{2x} - x^{10} \approx e^{2x}$ si bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{2x} - x^{10}) = +\infty$.

L'objectif de ce chapitre est de rendre ce genre de manipulation rigoureux mathématiquement, en remplaçant la notation intuitive $\approx$ ("à peu près égal à") par le symbole $\sim$ ("équivalent à").

La détermination d'équivalents permettra également une analyse plus fine de la convergence de certains suites et fonctions : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on voudra parfois préciser à quelle vitesse a lieu cette convergence. ($u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$? $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$? $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$? etc...)

1 Comparaison asymptotique de suites

1.1 Définitions et caractéristations

Définition 1 (Suite équivalente à une autre, suite négligeable devant une autre)

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- On dit que u est équivalente à v (lorsque $n \to +\infty$), et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, lorsque :

  Il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\left\{ \right.$

- On dit que u est négligeable devant v (lorsque $n \to +\infty$), et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, lorsque :

  Il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\left\{ \right.$

L'égalité $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ se lit "u_n est un petit o de v_n (quand n tend vers l'infini)".

Exemples

- $(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ car on peut écrire $(n+1) = n\lambda_n$ avec
- $(-2n^3+n^2+3) \underset{n\to+\infty}{\sim} -2n^3$ car on peut écrire $(-2n^3+n^2+3) = (-2n^3)\lambda_n$ avec
- $3n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$ car on peut écrire $3n = n^2\varepsilon_n$ avec
- $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ car on peut écrire $\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n}\varepsilon_n$ avec

Remarque 1

Par commodité, on oubliera parfois le "$n \to +\infty$" pour noter simplement $u_n \sim v_n$ ou $u_n = o(v_n)$.

En fait, dans le cas (largement majoritaire !) de suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, montrer une équivalence ou une négligeabilité revient à étudier le ratio des deux suites.
On pourrait voir la caractérisation suivante comme une définition alternative :

Proposition 1 (Caractérisation pratique de l'équivalence et de la négligeabilité)

Soient u et v deux suites telles que, à partir d'un certain rang, $v_n \neq 0$. Alors :

- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff$
- $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff$

Preuve :
Puisque $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, on peut toujours écrire $u_n = v_n \times \lambda_n$ avec $\lambda_n = \frac{u_n}{v_n}$.
Ainsi, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 1 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
et $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$. □ □

Exercice 1

Montrer que $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Attention !

L'écriture $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ est à comprendre comme une notation pratique, traduisant le caractère négligeable de u_n par rapport à v_n quand n est grand, et non comme une réelle "égalité mathématique".

Exemple : on peut écrire $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)$ et $n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)$ mais on n'a pas pour autant $n^2 = n$!

Proposition 2 (Une autre caractérisation de l'équivalence)

Soient u et v deux suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n)$.

La notation $u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n)$ signifie ici :

Preuve :
• Supposons $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$: on peut donc écrire à partir d'un certain rang, $u_n = v_n \times \lambda_n$ avec $\lambda_n \to 1$.
On a ainsi $u_n = v_n + v_n \times (\lambda_n - 1) = v_n + w_n$, en posant $w_n = v_n \times (\lambda_n - 1)$.
Ceci s'écrit $w_n = v_n \times \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = (\lambda_n - 1) \to 0$: on a donc bien $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

• Inversement, supposons que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + w_n$ avec $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
On peut donc écrire, à partir d'un certain rang $w_n = v_n \times \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$.
On a ainsi, $u_n = v_n + w_n = v_n + v_n \times \varepsilon_n = v_n \times (1 + \varepsilon_n)$.
Ceci s'écrit $u_n = v_n \times \lambda_n$ avec $\lambda_n = (1 + \varepsilon_n) \to 1$: on a donc bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. □

Exemple

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$.

Comme on sait que $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, on peut écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Attention !

À nouveau, cette notation ne fait pas office de véritable "égalité mathématique" !

Un terme "$o(v_n)$" doit se comprendre comme :

En particulier, si on a $u_n + o(v_n) = u'_n + o(v_n)$, cela n'implique pas que $u_n = u'_n$.

(u_n + quelque chose de très petit devant v_n = u'_n + quelque chose de très petit devant v_n...
mais rien ne dit que ces "quelques choses" sont les mêmes !)

1.2 Comparaisons asymptotiques usuelles

a) Négligeabilités usuelles

Proposition 3 (Suite négligeable devant une constante)

Soit u une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour toute constante $C \in \mathbb{R}^*$, on a les équivalences :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(C) \iff \qquad\qquad \iff$$

Ainsi, une autre façon de dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ est d'écrire :

Preuve :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(C) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{C} = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1} = 0 \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1). \qquad \square$$

Dans le chapitre "Limites de suites", on avait énoncé les résultats de croissances comparées :

$$\ln(n)^b << n^a << e^{cn} << n! \quad \text{(où "<<" signifiait "très petit devant")}$$

On peut maintenant exprimer cette "échelle de grandeurs" rigoureusement à l'aide de la notation "$o(\ )$".

Théorème 1 (Croissances comparées "version négligeabilité")

- Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$,
- Pour tous $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et $q > 1$, on a les négligeabilités suivantes :

et

Preuve :

Tout ceci se montre facilement avec la caractérisation pratique de la Proposition 1. Par exemple :

- Pour $\alpha < \beta$, $\quad \frac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad$ (car $\alpha - \beta < 0$) donc $n^\alpha = o(n^\beta)$.
- Pour $a, b > 0$, $\frac{(\ln(n))^a}{n^b} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (croissance comparée) donc $(\ln(n))^a = o(n^b)$. Etc... $\square$

Exemples

- $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(n^5)$, $\qquad \frac{1}{n^5} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad$ (car c'est $n^{-5} \underset{n\to+\infty}{=} o(n^{-2})$!)

Remarque 2

Lorsque $q \in]-1, 1[$, on a tout simplement (puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$)

Proposition 4 (Terme borné V.S Terme divergent)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$, alors

Preuve :
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, on dispose de $K>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n|\leqslant K$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n| = +\infty$. Il en résulte que $v_n\neq 0$ à partir d'un certain rang.

Ainsi : $0\leqslant \left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant \dfrac{K}{|v_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$, c'est à dire $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. □

Exemple
$1 \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$, $\cos(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n))$, etc...

b) Équivalents usuels

Proposition 5 (Suite équivalente à une constante)

Soit u une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour toute constante $C\in\mathbb{R}^*$, on a l'équivalence :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C \iff$$

Preuve :
D'après la caractérisation pratique (Proposition 1) :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{C} = 1 \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = C.$$ □

Remarque 3

Ainsi, pour $\underline{\ell\neq 0}$, une autre façon de dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ est d'écrire :

Attention !

C'est faux pour $\ell = 0$!
En fait, les seules suites "équivalentes à 0" sont les suites nulles à partir d'un certain rang .
Autant dire que l'**on écrira jamais** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$!

Proposition 6 (Équivalent d'un polynôme en n)

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_p\in\mathbb{R}$. Si $a_p\neq 0$, alors : $a_0 + a_1 n + ... + a_p n^p \underset{n\to+\infty}{\sim}$.

Preuve :

On voit que : $\dfrac{a_0 + a_1 n + \ldots + a_{p-1}n^{p-1} + a_p n^p}{a_p n^p} = \underbrace{\dfrac{a_0}{a_p}\dfrac{1}{n^p} + \dfrac{a_1}{a_p}\dfrac{1}{n^{p-1}} + \ldots + \dfrac{a_{p-1}}{a_p}\dfrac{1}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$ □

Exemples

$n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, $2n^2 - n + 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^2$, $3n^5 - 200n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n^5$, etc...

Théorème 2 (Équivalents usuels "en 0" (pour des suites))

Soit u un suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$. Alors :

- $e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim}$ $\qquad \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim}$
- $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim}$ $\qquad \tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim}$ $\qquad 1-\cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim}$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim}$ $\qquad$ en particulier, $\sqrt{1+u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim}$

Preuve :

Tout ceci se montre facilement avec la caractérisation pratique de la Proposition 1. Par exemple :

On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ (limite usuelle en 0) et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Donc par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{u_n} - 1}{u_n} = 1$, c'est à dire $e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Etc... $\square$

Exemples

$\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim}$ $\qquad \sin\left(\dfrac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim}$ $\qquad \sqrt{1+e^{-n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim}$

Attention !

La condition $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ est essentielle ! (On le voit d'ailleurs dans la preuve du Théorème 2).

<u>Exemple</u> : On a $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ mais on n'a évidemment pas $\ln(1+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

1.3 Équivalents et comportement asymptotique

En pratique, les équivalents serviront souvent à déterminer des limites, grâce à la proposition suivante :

Proposition 7 (Équivalence et limites)

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, alors

Autrement dit, deux suites équivalentes sont **de même nature** (convergente ou divergente) et, le cas échéant, ont **la même limite** (finie ou infinie).

Preuve :

Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, on peut écrire, à partir d'un certain rang, $u_n = v_n \times \lambda_n$ avec $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
Puisque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, on a bien $u_n = v_n \times \lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. $\square$

Proposition 8 (Équivalence et signe)

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors les suites u et v sont de même signe à partir d'un certain rang.

Preuve :

C'est immédiat puisqu'on peut écrire $u_n = v_n \times \lambda_n$ à partir d'un certain rang,
et comme $\lambda_n \to 1$, on a $\lambda_n > 0$ à partir d'un certain rang. $\square$

Exemple

On a $3n^3 - 1000n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n^3$ donc $3n^3 - 1000n^2 > 0$ à partir d'un certain rang !

1.4 Propriétés et calcul

Citons quelques propriétés élémentaires, assez intuitives avec l'interprétation de l'équivalence et de la négligeabilité que l'on a développé :

Proposition 9 (Propriétés élémentaires)

Soient u, v, w trois suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors :

- Pour l'équivalence :

(a) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

(b) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

- Pour la négligeabilité :

(c) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.

(d) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.

(e) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.

Preuve :

Evident en revenant aux définitions de $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ($u_n = v_n \times \lambda_n$ avec $\lambda_n \to 1$) et de $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ ($u_n = v_n \times \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \to 0$)... $\square$

Exemples

- On a $n^4 - 3n^2 + n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^4$ et donc, réciproquement, $n^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^4 - 3n^2 + n$.
- On a vu que $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\tan\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.
- On a vu que $\ln(n)^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n})$ et $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(2^n)$ donc $\ln(n)^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(2^n)$.
- On a $n^4 - 3n^2 + n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^4$ et $n^4 \underset{n\to+\infty}{=} o(n^5)$ donc $n^4 - 3n^2 + n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^5)$.
- On a $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ donc $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

Pour déterminer des équivalents, on exploitera les équivalents usuels ainsi que les règles de calculs suivantes :

Proposition 10 (Opérations licites sur les équivalents)

Soient u, v, u' et v' quatre suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(a) **(Multiplication)** : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u'_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim}$

En particulier, $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\sim}$

(b) **(Division)** : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u'_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n$, avec $v_n, v'_n \neq 0$ à p. c. rg., alors $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim}$

(c) **(Élévation à une puissance)** : Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $(u_n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim}$

Preuve rapide :

On peut écrire, à partir d'un certain rang, $u_n = u'_n \times \lambda_n$ et $v_n = v'_n \times \mu_n$ avec $\lambda_n, \mu_n \to 1$.
Ainsi, à partir d'un certain rang, $\lambda_n > 0$ et $\mu_n > 0$.

(a) $u_n v_n = u'_n v'_n \times (\lambda_n \mu_n)$ et on a $\lambda_n \mu_n \to 1$. (b) $\frac{u_n}{v_n} = \frac{u'_n}{v'_n} \times \left(\frac{\lambda_n}{\mu_n}\right)$ et on a $\frac{\lambda_n}{\mu_n} \to 1$.

(c) $(u_n)^\alpha = (u'_n)^\alpha \times (\lambda_n)^\alpha$ et on a $(\lambda_n)^\alpha \to 1$. $\square$

Remarque 4

Dans (c), si jamais $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, pour que $(u_n)^\alpha$ et $(v_n)^\alpha$ soient bien définis, il faut bien-sûr supposer $u_n > 0$ et $v_n > 0$ à partir d'un certain rang. Ce sera toujours le cas quand on en aura besoin.

Exercice 2

Déterminer des équivalents simples des expressions suivantes quand $n \to \infty$. En déduire leurs limites.

- $\dfrac{3n^2 - 2n + 1}{n^2 + 10n - 5}$
- $\dfrac{e^n - n^{10}}{n^2 - 2n}$
- $n^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
- $(2n^2 - 3n - 1)^4$

Attention !

- **On ne peut pas sommer des équivalents !**

Exemple : On a $n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $-n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$ mais pas $n + 1 - n \underset{n\to+\infty}{\sim} n - n$

(Qui donnerait $1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$...)

- **On ne peut pas composer un équivalent par une fonction !**

Exemple : On a $n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ mais pas $e^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$ (en effet $\dfrac{e^{n+1}}{e^n} = e$ ne tend pas vers 1)

- **On ne peut pas élever un équivalent à une puissance "variable" !**

Exemple : On a $n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ mais pas $(n + 1)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n$.

$\left(\text{En effet } \dfrac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \text{ ne tend pas vers 1, on a en fait } \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e. \right)$

Terminons par quelques règles de calcul avec la notation $o(\ )$ (un peu moins essentiel).

Proposition 11 (Opérations sur les "petits o")

(a) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$

(b) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ alors $u_n + v_n = \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$

(c) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u'_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v'_n)$, alors $u_n \times v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\ u'_n \times v'_n\ )$.

(d) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ $(u_n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(\ (v_n)^\alpha\ )$.

Remarque 5

On pourra surtout retenir les propriétés (a) et (b) sous la forme suivante :

(a) **"Les constantes multiplicatives n'apparaissent pas dans les o"** : $\boxed{\lambda \times o(v_n) = o(v_n)}$

<u>Exemple :</u> On a $e^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $3e^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$

(Il n'est pas faux de dire que $3e^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{3}{n}\right)$ mais c'est inutile...)

(b) **"Une somme de termes négligeables devant v_n le reste"** : $\boxed{o(v_n) + o(v_n) = o(v_n)}$

<u>Exemple :</u> On a $e^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $e^{-n} + \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$

Méthode : Récapitulatif pour les calculs d'équivalents

- Si l'expression est un produit $u_n \times v_n$ ou un quotient $\frac{u_n}{v_n}$:
  Déterminer un équivalent de u_n et v_n et faire le produit/quotient des équivalents.
- Si l'expression est une puissance $(u_n)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ <u>fixé</u> :
  Déterminer un équivalent de u_n et l'élever à la puissance α.
- Si l'expression est une somme $u_n + v_n$, **on ne peut pas sommer les équivalents !**
  Cependant on peut souvent s'en sortir en écrivant les équivalents "avec des o" (cf. Proposition 2) :

Exemple

On cherche un équivalent de $\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

On sait que $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) =$

On sait que $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) =$

Ainsi : $\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) =$

donc : $\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim$

Exemple

On cherche un équivalent de $\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \tan\left(\frac{2}{n}\right)$.

On sait que $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) =$

On sait que $\tan\left(\frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$, donc $\tan\left(\frac{2}{n}\right) =$

Ainsi : $\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \tan\left(\frac{2}{n}\right) =$

donc : $\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \tan\left(\frac{2}{n}\right) \sim$

- En cas de doute, ou si les méthodes précédentes ne fonctionnent pas (ou dans des exercices plus théoriques) on reviendra toujours à la définition de l'équivalent en étudiant le ratio :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1. \quad \text{(cf. Proposition 1)}$$

2 Comparaison de fonctions au voisinage d'un point ou de l'infini

Dans toute cette partie :

- a désigne un réel, ou bien $\pm\infty$: $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
- f et g sont des fonctions définies au voisinage de a.

(Si $a \in \mathbb{R}$: les domaines D_f et D_g contiennent un intervalle de la forme $]a-\delta, a+\delta[$ pour un $\delta > 0$)
(Si $a = +\infty$: les domaines D_f et D_g contiennent un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ pour un $A \in \mathbb{R}$)
(Si $a = -\infty$: les domaines D_f et D_g contiennent un intervalle de la forme $]-\infty, A[$ pour un $A \in \mathbb{R}$)

2.1 Définitions et caractérisations

Définition 2 (Fonction équivalente à / négligeable devant une autre)

- On dit que f est équivalente à g au voisinage de a et on note $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ (ou $f \underset{a}{\sim} g$), lorsque :

  Il existe une fonction $x \mapsto \lambda(x)$ telle que : $\left\{ \right.$

- On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a et on note $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ (ou $f \underset{a}{=} o(g)$), lorsque :

  Il existe une fonction $x \mapsto \varepsilon(x)$ telle que : $\left\{ \right.$

Remarques 6

- Dans la grand majorité des cas, on considérera : $a = 0$, $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.
- Pour des fonctions, on ne se permettra pas d'écrire simplement $f \sim g$ ou $f = o(g)$,
car il est essentiel de préciser au voisinage de quel point a a lieu cette comparaison !

Exemples

- $e^x + x \underset{x \to +\infty}{\sim} e^x$ car on peut écrire $e^x + x = e^x \times \lambda(x)$ avec
- $x + x^2 \underset{x \to 0}{\sim} x$. car on peut écrire $x + x^2 = x \times \lambda(x)$ avec
- $x + x^2 \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$. car on peut écrire $x + x^2 = x^2 \times \lambda(x)$ avec
- $x \underset{x \to +\infty}{=} o(x^3)$ car on peut écrire $x = x^3 \times \varepsilon(x)$ avec
- $x^3 \underset{x \to 0}{=} o(x)$ car on peut écrire $x^3 = x \times \varepsilon(x)$ avec

Attention !

À nouveau, l'écriture $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ est une notation, et non une réelle égalité mathématique.

Proposition 12 (Caractérisation pratique de l'équivalence et de la négligeabilité)

Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :

- $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff$
- $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x)) \iff$

Preuve (ou pas) :

Les preuves de toutes les propositions de cette section sont totalement analogues au cas des suites !
On se permettra donc d'en omettre la majorité. $\square$

À nouveau, on a le lien suivant, souvent pratique, entre équivalents et "petit o" :

Proposition 13 (Une autre caractérisation de l'équivalence)

On a l'équivalence : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$

La notation $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$ signifie ici : il existe une fonction h telle que

$$f(x) = g(x) + h(x) \text{ au voisinage de } a \qquad \text{et} \qquad h(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)).$$

2.2 Comparaisons usuelles

a) Négligeabilités usuelles

Proposition 14 (Fonction négligeable devant une constante)

Pour toute constante $C \in \mathbb{R}^*$, on a les équivalences :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(C) \iff \qquad\qquad \iff$$

Remarque 7

Ainsi, une autre façon de dire que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ est d'écrire :

Théorème 3 (Croissances comparées "version négligeabilité")

- Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$, et
- Pour tous $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$, on a les négligeabilités suivantes au voisinage de $+\infty$:

et

et donc, à l'inverse :

et

- Pour tous $a > 0$, $b > 0$, on a la négligeabilité au voisinage de 0 :

Preuve :

Il suffit de considérer les ratios... Notons que le dernier point se ramène à montrer :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\ln(x)|^a}{1/|x|^b} = 0 \iff \lim_{x\to 0^+} |x|^b |\ln(x)|^a = 0 \iff \lim_{x\to 0^+} x^b(-\ln(x))^a = 0.$$

En posant $y = \frac{1}{x}$, on se ramène à $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\ln(y)^a}{y^b} = 0$. □

Exemples

- Attention, on a bien $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} o(x^5)$ mais $x^5 \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$!
- On a par exemple : $\ln(x)^{10} \underset{x\to+\infty}{=} o(\sqrt{x})$ et $e^{-\frac{x}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- La divergence de ln en 0 (comme en $+\infty$, d'ailleurs) est "très lente". Notamment : $|\ln(x)| \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Proposition 15 (Terme borné V.S Terme divergent)

Si $f(x)$ reste borné au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

b) Équivalents usuels

Proposition 16 (Fonction équivalente à une constante)

Pour toute constante $C \in \mathbb{R}^*$, on a l'équivalence : $\quad f(x) \underset{x\to a}{\sim} C \iff$

Remarque 8

Ainsi, pour $\underline{\ell \neq 0}$, une autre façon de dire que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ est d'écrire :

Attention !

À nouveau, c'est faux pour $\ell = 0$!
Les seules fonctions "équivalentes à 0 en a" sont les fonctions constantes égales à 0 au voisinage de a.
Autant dire que l'**on écrira jamais** $f(x) \sim 0$!

Proposition 17 (Équivalent d'un polynôme au voisinage de $\pm\infty$ et de 0)

Un polynôme non nul équivaut :

- au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.
- au voisinage de 0.

Exemple

Ainsi : $4x^5 - 2x^2 + 3x \underset{x\to+\infty}{\sim}$ et $4x^5 - 2x^2 + 3x \underset{x\to-\infty}{\sim}$ mais $4x^5 - 2x^2 + 3x \underset{x\to 0}{\sim}$

Théorème 4 (Équivalents usuels en 0)

- $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim}$. $\qquad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim}$.
- $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim}$ $\qquad \tan(x) \underset{x\to 0}{\sim}$ $\qquad 1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim}$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim}$, et en particulier $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim}$

2.3 Équivalence et comportement au voisinage de a

Déterminer un équivalent permettra souvent de déterminer une limite, grâce à la proposition suivante :

Proposition 18 (Équivalence et limites)

Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, alors

Autrement dit, si f et g sont équivalentes au voisinage de a, alors soit elle n'admettent pas de limite en a, soit elles admettent toutes les deux la **même limite en** a (finie ou infinie).

Proposition 19 (Équivalence et signe)

Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors il existe un voisinage de a sur lequel f et g sont de même signe.

Exemple

Puisque $-3x^3 + 10x^2 + x \underset{x\to-\infty}{\sim} -3x^3$, on sait que $-3x^3 + 10x^2 + x > 0$ au voisinage de $-\infty$.
Cela signifie : il existe $A < 0$ tel que $\forall x \in]-\infty, A[,\ -3x^3 + 10x^2 + x > 0$.

2.4 Propriétés et calcul

Les propriétés et les méthodes de calcul pour les équivalents de fonctions sont les mêmes que pour les suites. Résumons-les rapidement.

Proposition 20 (Propriétés élémentaires)

Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage de a. Alors :

- Pour l'équivalence :

(a) $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.

(b) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.

- Pour la négligeabilité :

(c) Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x)))$.

(d) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.

(e) Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.

Proposition 21 (Opérations licites sur les équivalents)

Soient f_1, g_1, f_2 et g_2 quatre fonctions définies au voisinage de a.

(a) **(Multiplication)** : Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x)$ et $g_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$, alors $f_1(x)g_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x)g_2(x)$.

(b) **(Division)** : Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x)$, $\quad g_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x) \quad$ et $g_1(x) \neq 0$ au voisinage de a,

alors $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$.

(c) **(Élévation à une puissance)** : Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\quad f_1(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} f_2(x)^\alpha$

Attention !

Comme pour les suites :

- **On ne peut pas sommer des équivalents !**
- **On ne peut pas composer un équivalent par une fonction !**
- **On ne peut pas élever un équivalent à une puissance "variable" !**

Proposition 22 (Opérations sur les "petits o")

(a) Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad \lambda f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$

(b) Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$ alors $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$

(c) Si $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(f_2(x))$ et $g_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g_2(x))$, alors $\quad f_1(x)g_1(x) \underset{x\to a}{=} o(f_2(x)g_2(x))$

(d) Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ $f(x)^\alpha \underset{x\to a}{=} o(g(x)^\alpha)$

Remarque 9

Ces propriétés pour les "petits o" sont moins importantes que pour les équivalents.
On pourra quand même retenir les propriétés (a) et (b) sous la forme suivante :

(a) **"Les constantes multiplicatives n'apparaissent pas dans les petits o"** : $\boxed{\lambda \times o(f(x)) = o(\lambda f(x)) = \qquad}$

(b) **"Une somme de termes négligeables devant $f(x)$ le reste"** : $\boxed{o(f(x)) + o(f(x)) = \qquad}$

Exercice 3

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes :

- $g(x) = (1+3x)\ln(1+x)$ en 0
- $h(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^3-x}$ en 0
- $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ en $+\infty$.

Mentionnons pour finir une dernière technique :

Proposition 23 ("Changement de variable" dans un équivalent)

Supposons qu'on ait $f(y) \underset{y\to a}{\sim} g(y)$.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$. Alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n)$.

(On peut dire qu'on "pose $y = u_n$")

- Soit $x \mapsto u(x)$ une fonction définie au voisinage de $b \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ telle que $\lim\limits_{x\to b} u(x) = a$.

  Alors $f(u(x)) \underset{t\to b}{\sim} g(u(x))$.

On peut dire qu'on "pose $y = u(x)$")

Exemple

On sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Remarque 10

On retrouve ainsi, à partir des équivalents usuels du Théorème 4, tous les équivalents vus pour les suites au Théorème 2 !

Exercice 4

Donner un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{1+2x} - 1, \qquad g(x) = \sin(3x^2 - 2x)$$

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Connaître les comparaisons/équivalents usuels de suites et de fonctions.
- Savoir "ordonner" facilement des suites/fonctions par "ordre de négligeabilité".
- Déterminer des équivalents de suites et de fonctions à l'aide des règles de calculs.
- Déterminer un équivalent de suite ou de fonction en montrant que le "ratio" tend vers 1 (par exemple à partir d'un encadrement !)

Pour suivre

- Utiliser les équivalents pour déterminer rapidement des limites.
- Déterminer un équivalent en utilisant un "changement de variable".

Pour les ambitieux

- Manipuler sans problème des expressions contenant $o(\ )$.