16

Intégration sur un segment - Corrigé

Exercice 1 (Intégrales basiques)

(a) $\displaystyle\int_0^1 (3x^3-2x^2+x-1)dx = \Big[3\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\Big]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{12}.$

(b) $\displaystyle\int_a^b e^{2t}dt = \Big[\frac{e^{2t}}{2}\Big]_a^b = \frac{e^{2b}-e^{2a}}{2}.$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+1}dx = \Big[\ln(t+1)\Big]_0^1 = \ln(2).$

Exercice 2 (Plus avancé)

(a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dt}{t\ln(t)} = \int_2^3 \frac{1/t}{\ln(t)}dt = \Big[\ln(\ln(t))\Big]_2^3 = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2)) = \ln\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\right).$

(b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \Big[-2\sqrt{1-x}\Big]_0^{1/2} = -2\sqrt{1/2}+2 = 2-\sqrt{2}.$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)^3\cos(x)dx = \Big[\frac{\sin(x)^4}{4}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}.$

(d) Après calcul, pour tout $x \notin \{0,1\}$, $\displaystyle\quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1}$. Ainsi :

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^2-1}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{1}{x-1}dx = -\frac{1}{2}\Big[\ln(x+1)\Big]_0^{1/2} + \frac{1}{2}\Big[\ln(|x-1|)\Big]_0^{1/2}$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\ln(3)}{2}.$$

(e) $\displaystyle\int_0^2 t|t^2-1|dt = \int_0^1 t(1-t^2)dt + \int_1^2 t(t^2-1)dt = \int_0^1 (t-t^3)dt + \int_1^2 (t^3-t)dt = \Big[\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4}\Big]_0^1 + \Big[\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2}\Big]_1^2$

$\displaystyle= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{16}{4} - \frac{4}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$

Exercice 3 (IPP)

(a) $\displaystyle\int_1^e x^2\ln(x)dx = \Big[\frac{x^3}{3}\ln(x)\Big]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{x^2}{3}dx = \frac{e^3}{3} - \Big[\frac{x^3}{9}\Big]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 t^3e^tdt = \Big[t^3e^t\Big]_0^1 - \int_0^1 3t^2e^tdt = e - \left(\Big[3t^2e^t\Big]_0^1 - \int_0^1 6te^tdt\right) = -2e + \int_0^1 6te^tdt = -2e + \Big[6te^t\Big]_0^1 - \int_0^1 6e^tdt$

$\displaystyle= 4e - \Big[6e^t\Big]_0^1 = 4e - 6e + 6 = 6-2e.$

(c) Puisque $x \mapsto x^3\cos(x)$ est une fonction impaire, on peut affirmer directement que $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3\cos(x)dx = 0.$
Sinon, on peut faire des IPP successives en "dérivant le x^3" et en "primitivant le $\cos(x)$".

(d) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)dt = \int_0^1 \ln(1+t^2)\times 1dt = \Big[\ln(1+t^2)\times t\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\times tdt = \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt$

$\displaystyle= \ln(2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt \quad$ (astuce : $\displaystyle\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}$...)

$\displaystyle= \ln(2) - 2\Big[t - \arctan(t)\Big]_0^1 = \ln(2) - 2(1-\frac{\pi}{4}) = \ln(2) + \frac{\pi}{2} - 2.$

Exercice 4 (Recherche de primitives 1)

(a) Puisque $f : x \mapsto x\cos(2x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, on sait qu'elle y admet des primitives.
Par exemple, en définissant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x t\cos(2t)dt,$$

F est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Calculons cette intégrale : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x t\cos(2t)dt = \Big[t\frac{\sin(2t)}{2}\Big]_0^x - \int_0^x \frac{\sin(2t)}{2}dt = \frac{x}{2}\sin(2x) - \Big[\frac{-cos(2t)}{4}\Big]_0^x = \frac{x}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{4}.$$

Plus simplement, on peut éliminer la constante : $x \mapsto \frac{x}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
(ce qu'on peut vérifier en dérivant d'ailleurs !)

(b) Même raisonnement : arctan est continue sur $\mathbb{R}$ donc y admet des primitives. Par exemple, en définissant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x \arctan(t)dt,$$

F est l'unique primitive de arctan sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Calculons cette intégrale : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \arctan(t) \times 1dt = \Big[\arctan(t) \times t\Big]_0^x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \times tdt = x\arctan(x) - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt \\ &= x\arctan(x) - \Big[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big]_0^x = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2). \end{aligned}$$

Une primitive de arctan sur $\mathbb{R}$ est donc $x \mapsto x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Exercice 5 (Changements de variable)

(a) En posant $u = 2x+1$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^2 x\sqrt{2x+1}dx &= \int_1^5 \frac{u-1}{2}\sqrt{u}\frac{1}{2}du = \frac{1}{4}\int_1^5 (u-1)\sqrt{u}du = \frac{1}{4}\int_1^5 \left(u^{3/2} - u^{1/2}\right)du = \frac{1}{4}\Big[\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^5 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}5^{5/2} - \frac{2}{3}5^{3/2} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}\left((2-\frac{2}{3})5^{3/2} + \frac{4}{15}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}5^{3/2} + \frac{4}{15}\right) = \frac{5^{3/2}}{3} + \frac{1}{15} \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{3} + \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx = \int_0^2 \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{x^2}{4}+1}dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{(x/2)^2+1}dx$. Ainsi, en posant $u = x/2$, on obtient :

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}2du = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{2}\Big[\arctan(u)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

(c) En posant $u = \sqrt{t}$, on a $du = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, c'est à dire $dt = 2\sqrt{t}du = 2udu$. Ainsi :

$$\int_1^4 e^{\sqrt{t}}dt = \int_1^2 e^u 2udu = 2\int_1^2 ue^u du.$$

On pose ensuite une intégration par partie :

$$\int_1^2 xe^x dx = \Big[xe^x\Big]_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - \Big[e^x\Big]_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.$$

Ainsi, finalement $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{t}}dt = 2e^2$.

(d) En posant $u = y^2$, on a $du = 2ydy$, donc $ydy = \frac{1}{2}du$. Ainsi :

$$\int_1^3 \frac{y}{(y^2+1)(y^2+2)}dy = \int_1^9 \frac{1}{(u+1)(u+2)}\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int_1^9 \frac{du}{(u+1)(u+2)}.$$

On applique la même astuce que dans l'Exercice 2, (d) : on cherche deux réels a et b tels que, pour tout $x \notin \{-1, -2\}$,

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}.$$

Après calcul, on trouve $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{y}{(y^2+1)(y^2+2)} dy &= \frac{1}{2}\int_1^9 \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+2}\right) du = \frac{1}{2}\Big[\ln(u+1) - \ln(u+2)\Big]_1^9 = \frac{1}{2}\Big[\ln\left(\frac{u+1}{u+2}\right)\Big]_1^9 \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{10}{11}\right) - \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{30}{22}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{15}{11}\right).\end{aligned}$$

Exercice 6 (Recherche de primitives 2)

(a) Il suffit de calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+9} dt = \frac{1}{9}\int_0^x \frac{1}{t^2/9+1} dt = \frac{1}{9}\int_0^x \frac{1}{(t/3)^2+1} dt.$$

En posant $u = t/3$, on obtient :

$$F(x) = \frac{1}{9}\int_0^{x/3} \frac{1}{u^2+1} 3du = \frac{1}{3}\int_0^{x/3} \frac{1}{u^2+1} du = \frac{1}{3}\Big[\arctan(u)\Big]_0^{x/3} = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right).$$

(Autrement, après avoir écrit $\dfrac{1}{x^2+9} = \dfrac{1}{9}\dfrac{1}{(x/3)^2+1}$, on peut deviner qu'une primitive va "ressembler" à $\arctan(x/3)$, et adapter en mettant la bonne constante multiplicative...)

(b) Même chose : on veut calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{2t^2+1} dt = \int_0^x \frac{1}{(\sqrt{2}\cdot t)^2+1} dt.$$

En posant $u = \sqrt{2}\cdot t$, on obtient :

$$F(x) = \int_0^{\sqrt{2}\cdot x} \frac{1}{u^2+1}\frac{1}{\sqrt{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\arctan(u)\Big]_0^{\sqrt{2}\cdot x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\cdot x).$$

(Ou alors, encore une fois, on peut "deviner" la forme de la primitive)

Exercice 7 (Changement trigonométrique)

1. En se rappelant de $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2t) = \cos(t+t) = \cos(t)\cos(t) - \sin(t)\sin(t) = \cos(t)^2 - \sin(t)^2.$$

Ensuite, puisque $\sin(t)^2 = 1 - \cos(t)^2$, on obtient : $\cos(2t) = 2\cos(t)^2 - 1$.

On en déduit donc bien $\cos(t)^2 = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$ (formule de "linéarisation" de $\cos^2$, souvent utile).

2. sin est une fonction de classe C^1 de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[0, 1]$.
On peut donc poser $u = \sin(t)$: pour que u balaye les valeurs de 0 à 1, il suffit que t balaye les valeurs de 0 à $\frac{\pi}{2}$.
On a alors :

$$\sqrt{1-u^2}du = \sqrt{1-\sin(t)^2}\cos(t)dt = \sqrt{\cos(t)^2}\cos(t)dt = \cos(t)\cos(t)dt = \cos(t)^2 dt$$

car $\cos(t) \geqslant 0$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$! (ce qui justifie que $\sqrt{\cos(t)^2} = \cos(t)$)
Ainsi, le changement de variable donne :

$$\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^2 dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \Big[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 8 (Quelques limites de sommes)

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right),\qquad$ où : $\forall x\in[0,1],\ f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

Puisque f est continue sur $[0,1]$, la convergence des sommes de Riemann s'applique :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=\Big[\ln(1+t)\Big]_0^1=\ln(2).$$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right),\qquad$ où : $\forall x\in[0,1],\ g(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$.

Puisque g est continue sur $[0,1]$, la convergence des sommes de Riemann s'applique :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\int_0^1 g(t)dt=\int_0^1\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt=\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\frac{\pi}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{\pi}.$$

Exercice 9 ("Produit" de Riemann ?!)

Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\quad u_n=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{1/n}$.

D'après les règles de calcul du logarithme, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\ln(u_n)=\ln\left(\frac{1}{n^2}\right)+\sum_{k=1}^{n}\ln\left((n^2+k^2)^{1/n}\right)=-\ln(n^2)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(n^2+k^2\right)=-\ln(n^2)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(n^2+k^2\right).$$

En notant que $\ln(n^2+k^2)=\ln\left(n^2\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)=\ln(n^2)+\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$, on obtient :

$$\ln(u_n)=-\ln(n^2)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(n^2)+\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)-\ln(n^2)+\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n^2)}_{=\ln(n^2)}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$$

donc au final : $\quad\ln(u_n)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right),\quad$ où : $\forall x\in[0,1],\ f(x)=\ln(1+x^2)$.

Puisque f est continue sur $[0,1]$, la convergence des sommes de Riemann s'applique :

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(u_n)=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1\ln(1+t^2)dt=\ln(2)+\frac{\pi}{2}-2\quad\text{(intégrale calculée dans l'Exercice 3, (d)).}$$

Pour finir, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln(u_n)}=e^{\ln(2)+\frac{\pi}{2}-2}=2e^{\frac{\pi}{2}}e^{-2}.$$

On pouvait aussi travailler directement sur le produit et noter que $u_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$ avant de passer au ln.

Exercice 10 (Une suite)

1. $I_0=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\Big[\arctan(t)\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}$.

$I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{t}{1+t^2}dt=\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1=\frac{\ln(2)}{2}$.

$I_2=\displaystyle\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\Big[t-\arctan(t)\Big]_0^1=1-\frac{\pi}{4}$.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a évidemment : $\forall t\in[0,1],\ \dfrac{t^{n+1}}{1+t^2}\leqslant\dfrac{t^n}{1+t^2}$. $\quad$ (car $t\in[0,1]$)

En intégrant cette inégalité sur $[0,1]$, on obtient $I_{n+1}\leqslant I_n$.

C'est valable pour tout $n\in\mathbb{N}$: la suite est donc décroissante.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a l'encadrement : $\quad\forall t\in[0,1],\ 0\leqslant\dfrac{t^n}{1+t^2}\leqslant t^n$.

En intégrant ces inégalités sur $[0,1]$, on obtient bien $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$.
Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 11 (Une autre suite)

1. (a) Puisque ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a évidemment

$$\forall x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \geqslant \ln(1) \ \text{ i.e } \ \ln(1+x) \geqslant 0.$$

Pour montrer l'autre inégalité, on peut étudier la fonction $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}_+$.
On montre facilement que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et on en déduit : $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant f(0) = 0$, ce qui donne exactement l'inégalité voulue.

(b) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement :

$$\forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n.$$

Notons $J_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$. En intégrant l'encadrement sur $[0,1]$, on obtient : $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et on en déduit bien-sûr $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

2. (a) On pose une intégration par parties : $u_n = \int_0^1 \underbrace{x}_{v(x)} \times \underbrace{\frac{x^{n-1}}{1+x^n}}_{u'(x)} dx$.

En notant qu'une primitive de $x \mapsto \frac{x^{n-1}}{1+x^n}$ est $x \mapsto \frac{1}{n}\ln(1+x^n)$, on obtient bien :

$$u_n = \Big[x \times \frac{1}{n}\ln(1+x^n)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n}\ln(1+x^n)dx = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx.$$

(b) On a déjà vu que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)dx = 0$.
En passant à la limite dans l'égalité précédente, on déduit sans problème $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$nu_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} nu_n = \ln(2)$.

Exercice 12 (Intégrales de Wallis)

1. $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1dt = \frac{\pi}{2}$. et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)dt = \Big[-\cos(t)\Big]_0^{\pi/2} = 1$

2.(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ (\sin(t))^{n+1} \leqslant (\sin(t))^n \quad \text{car } \sin(t) \in [0,1]$$

En intégrant cette inégalité, on obtient $W_{n+1} \leqslant W_n$. C'est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite est donc décroissante.

(b) La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et évidemment minorée par 0 (puisque l'on intègre des fonctions positivies sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On en déduit donc qu'elle converge.

3.(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose l'intégration par parties :

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin(t)}_{u'(t)} \times \underbrace{(\sin(t))^{n+1}}_{v(t)} dt = \Big[-\cos(t)\sin(t)^{n+1}\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos(t))(n+1)\cos(t)\sin(t)^n dt$$

$$= (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos(t)^2 \sin(t)^n dt = (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin(t)^2)\sin(t)^n dt = (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin(t)^n - \sin(t)^{n+2})dt$$

$$= (n+1)\left(\int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt - \int_0^{\pi/2} \sin(t)^{n+2} dt\right) = (n+1)(W_n - W_{n+2}).$$

On en déduit par suite :

$$W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \Longleftrightarrow (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n \Longleftrightarrow W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.$$

Ainsi, on a la relation de récurrence : $\forall n \geqslant 2,\ W_n = \dfrac{n-1}{n}W_{n-2}$.

(b) D'après la relation précédente, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}W_{2(n-1)} \text{ et } W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}W_{2(n-1)+1}.$$

A partir de ces relations, on déduit par récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n} = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\right) \times W_0 \text{ et } W_{2n+1} = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}\right) \times W_1,$$

c'est à dire

$$W_{2n} = \left(\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)}\right) \times \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2n+1} = \left(\frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}\right).$$

Il reste à calculer ces produits, ce qui est un exercice classique.

D'abord, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n n!$.

Ensuite, puisque $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) \times \prod_{k=1}^{n}(2k-1) = (2n)!$, on déduit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

De même, puisque $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) \times \prod_{k=1}^{n}(2k+1) = (2n+1)!$, on déduit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.

En remplaçant, cela donne finalement :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \times \frac{1}{2^n n!} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2n+1} = 2^n n! \times \frac{2^n n!}{(2n+1)!} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. Puisque $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$ et donc

$$\underbrace{\frac{W_{n+2}}{W_n}}_{=\frac{n+1}{n+2}} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 1$, d'après le théorème des gendarmes on déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.

5.(a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

Initialisation : on a bien $1 \times W_0 \times 1 = \frac{\pi}{2}$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$. Alors, d'après la relation trouvée en 3.(a) on a

$$(n+1)W_{n+1}W_n = (n+1)\left(\frac{n}{n+1}W_{n-1}\right)W_n = nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2},$$

ce qui achève la récurrence.

5.(b) Comme suggéré, on écrit $(W_n)^2 = W_nW_{n-1} \times \dfrac{W_n}{W_{n-1}}$.

D'après 4., on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{W_{n-1}} = 1$. D'après 5.(a), on sait que $W_nW_{n-1} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi :

$$W_n = \sqrt{W_n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{\frac{W_n}{W_{n-1}}}$$

et donc $\sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \underbrace{\sqrt{\frac{W_n}{W_{n-1}}}}_{\to 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Enfin, on en déduit évidemment $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$ puisque : $W_n = \dfrac{\overbrace{\sqrt{n}W_n}^{\to\sqrt{\pi/2}}}{\underbrace{\sqrt{n}}_{\to+\infty}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 13 (Dériver une fonction des bornes)

(a) Pour que $f(x)$ ait bien un sens, il faut que $t \mapsto \sqrt{1-t}$ soit définie et continue sur le segment $[x, 1]$.
Pour cela, il faut que $x \leqslant 1$. Le domaine de définition de f est donc $D_f =]-\infty, 1]$.
Introduisons une primitive G de $t \mapsto \sqrt{1-t}$ sur $]-\infty, 1]$ (c'est possible car il s'agit d'une fonction continue).
On a alors, par définition :

$$\forall x \in]-\infty, 1],\ f(x) = \int_x^1 \sqrt{1-t}dt = \Big[G(t)\Big]_x^1 = G(1) - G(x).$$

Puisque G est de classe C^1 (car c'est une primitive d'une fonction continue !), on en déduit que f est également de classe C^1, et en dérivant l'égalité précédente :

$$\forall x \in]-\infty, 1],\ f'(x) = 0 - G'(x) = -G'(x) = -\sqrt{1-x}.$$

(b) Pour que $g(x)$ ait bien un sens, il faut que $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ soit définie et continue sur le segment $[x, x^2]$.
Autrement dit, il faut que 0 n'appartienne par au segment $[x, x^2]$... Pour cela, il faut que $x > 0$!
Le domaine de définition de g est donc $D_g = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

Introduisons une primitive H de $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ (ou juste sur $\mathbb{R}_+^*$...)
Notons qu'il ne serait pas possible de calculer explicitement l'expression d'une telle primitive, mais peu importe !
On a, par définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sin(t)}{t^2}dt = \Big[H(t)\Big]_x^{x^2} = H(x^2) - H(x).$$

Puisque H est de classe C^1 (car c'est une primitive d'une fonction continue), on en déduit que g est également de classe C^1, et en dérivant l'égalité précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = 2xH'(x^2) - H'(x) = 2x\frac{\sin(x^2)}{(x^2)^2} - \frac{\sin(x)}{x^2} = \frac{2\sin(x^2)}{x^3} - \frac{\sin(x)}{x^2}.$$

Exercice 14 (Etude d'une fonction)

1. Pour que $f(x)$ ait bien un sens, il faut que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ soit définie et continue sur le segment $[x, 2x]$. Autrement dit, il faut que 0 n'appartienne pas au segment $[x, 2x]$.
Pour cela, il faut et il suffit que x soit non nul ! Le domaine de définition de f est donc $D_f = \mathbb{R}^*$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, en posant le changement $u = -t$,

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}dt = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+u^2)}(-du) = -\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+u^2)}du = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire.

3. Introduisons une primitive G de $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ sur $\mathbb{R}^*$ (possible car il s'agit d'une fonction continue).
On a alors par définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \Big[G(t)\Big]_x^{2x} = G(2x) - G(x).$$

G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (comme primitive d'une fonction continue), donc f également,
et en dérivant on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}.$$

---

4. Pour tout $x > 0$, puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ est évidemment décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a l'encadrement :

$$\forall t \in [x, 2x], \quad \frac{1}{\ln(1+(2x)^2)} \leqslant \frac{1}{\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{\ln(1+x^2)}.$$

En intégrant ceci sur $t \in [x, 2x]$ (preserve le sens de l'inégalité car $x \leqslant 2x$ pour $x > 0$) :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+(2x)^2)} dt \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+x)2} dt$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\ln(1+(2x)^2)} \int_x^{2x} 1 dt \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\ln(1+x^2)} \int_x^{2x} 1 dt$$

et donc

$$\frac{x}{\ln(1+(2x)^2)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{\ln(1+x^2)}.$$

On montre aisément (en s'appuyant sur des croissances comparées usuelles : faites-le !)
que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln(1+(2x)^2)} = +\infty$. On en déduit donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Enfin, puisque f est impaire, on en déduit directement :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -f(-x) = \lim_{y\to+\infty} -f(y) = -\infty.$$

Exercice 15 (Limite de Fourier)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puisque f est de classe C^1, on peut poser l'intégration par parties :

$$\int_a^b \underbrace{f(t)}_{v(t)} \underbrace{\sin(nt)}_{u'(t)} dt = \left[f(t) \times \frac{-\cos(nt)}{n}\right]_a^b - \int_a^b f'(t) \times \frac{-\cos(nt)}{n} dt$$

c'est à dire

$$\int_a^b f(t)\sin(nt) = f(a)\frac{\cos(na)}{n} - f(b)\frac{\cos(nb)}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)dt.$$

Puisque cos est borné par 1, on a évidemment $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(na)}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(nb)}{n} = 0$.
(vous pouvez le montrer avec un encadrement ou une majoration de la valeur absolue + théorème des gendarmes).
Pour le dernier terme, il en va de même, par exemple parce que (avec l'inégalité triangulaire) :

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)dt\right| = \frac{1}{n}\left|\int_a^b f'(t)\cos(nt)dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\underbrace{|\cos(nt)|}_{\leqslant 1} dt \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Pour finir, on en déduit bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0$.

Exercice 16 (Point fixe)

Supposons qu'il n'existe pas de $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$. Autrement dit, on suppose que $\forall x \in [0,1], f(x) \neq x$.
Pour le dire autrement, on suppose que $\forall x \in [0,1],\ f(x) - x \neq 0$.
Puisque la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est <u>continue</u> sur $[0,1]$, on en déduit que l'on a

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) - x > 0 \quad \text{ou bien} \quad \forall x \in [0,1],\ f(x) - x < 0.$$

En effet, si jamais la fonction $x \mapsto f(x) - x$ changeait de signe sur $[0,1]$, alors elle s'annulerait d'après le TVI !
Ainsi, on a nécessairement :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) > x \quad \text{ou bien} \quad \forall x \in [0,1],\ f(x) < x.$$

Si on est dans le premier cas, alors par stricte croissance de l'intégrale, on aura $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx > \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$, ce qui contredit l'hypothèse ! De même, dans le deuxième cas, on aura $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$.

Dans tous les cas on obtient une contradiction : c'est donc que notre hypothèse de départ est fausse.
Il existe donc nécessairement un $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 17 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)

1. Si f est constante égale à 0, alors l'inégalité devient $0 \leqslant 0$, ce qui est évidemment vrai.

2. (a) En utilisant la linéarité de l'inégrale, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \int_a^b \left(x^2 f(t)^2 + 2x f(t)g(t) + g(t)^2\right) dt = \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right) x^2 + 2\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right) x + \int_a^b g(t)^2 dt.$$

On a bien écrit notre polynôme sous la forme "développée" $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, avec

$$\alpha = \int_a^b f(t)^2 dt, \quad \beta = 2\int_a^b f(t)g(t)dt, \quad \gamma = \int_a^b g(t)^2 dt.$$

(b) Puisque l'on intègre une fonction positive sur $[a,b]$, on a évidemment $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

(c) Puisque P est toujours de même signe sur $\mathbb{R}$, <u>son discriminant Δ est nécessairement inférieur ou égal à 0.</u>
(Si on avait $\Delta > 0$, P admettrait deux racines réelles distinctes, et changerait de signe entre les racines !)
Calculons ce discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma &= \left(2\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 - 4\left(\int_a^b f(t)^2 dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2 dt\right)\\ &= 4\left(\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 - \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2 dt\right)\right).\end{aligned}$$

Ainsi, le fait que $\Delta \leqslant 0$ nous donne exactement l'inégalité

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2 dt\right).$$

3. Puisque $f > 0$ sur $[a,b]$, on peut définir les fonctions :

$$\forall t \in [a,b],\ u(t) = \sqrt{f(t)} \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{1}{\sqrt{f(t)}}.$$

Ces fonctions sont continues sur $[a,b]$ (car f l'est) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous apprend que :

$$\left(\int_a^b u(t)v(t)dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b u(t)^2 dt\right)\left(\int_a^b v(t)^2 dt\right).$$

En remplaçant :

$$\left(\underbrace{\int_a^b 1 dt}_{=b-a}\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right),$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue.