

Sommes et produits

Exercice 1 (Traduction)

$$\begin{aligned} \bullet S_1 &= \sum_{k=0}^n 4^k & \bullet S_2 &= \sum_{k=0}^5 (2k+1)^2. & \bullet S_3 &= \prod_{k=1}^n \ln(2k) & \bullet S_4 &= \prod_{k=1}^{50} (-1)^k k. & \bullet S_5 &= \sum_{k=2}^n \frac{x^k}{k!}. \\ \bullet S_6 &= \sum_{k=0}^6 (-1)^k \frac{x^k}{k+1} = \sum_{k=0}^6 \frac{(-x)^k}{k+1}. \end{aligned}$$

Exercice 2 (Factorielles)

$$\begin{aligned} 1. \text{ a) } \frac{1}{5!} & \quad \text{b) } 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{10!}{5!}. \\ 2. \text{ a) } \frac{n!}{(n-2)!} &= n(n-1) & \text{b) } \frac{(n-1)!}{(n-4)!} &= (n-1)(n-2)(n-3). \\ \text{c) } \frac{(n^2-1)n!}{n-1} &= \frac{(n-1)(n+1)n!}{n-1} = (n+1)n! = (n+1)!. \\ 3. m \times (m+1) \times \dots \times n &= \frac{1 \times 2 \times \dots \times (m-1) \times m \times (m+1) \times \dots \times n}{1 \times 2 \times \dots \times (m-1)} = \frac{n!}{(m-1)!}. \end{aligned}$$

Exercice 3 (Calcul de sommes)

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{i=0}^n (2i+n+3) &= 2 \sum_{i=0}^n i + (n+3) \sum_{i=0}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + (n+3)(n+1) = n(n+1) + (n+3)(n+1) = (2n+3)(n+1). \\ \bullet \sum_{k=2}^{n+1} n^3 &= n^3 \sum_{k=2}^{n+1} 1 = n^3(n+1-2+1) = n^4. \\ \bullet \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}. \\ \bullet \sum_{p=1}^n p(p-1) &= \sum_{p=1}^n (p^2 - p) = \sum_{p=1}^n p^2 - \sum_{p=1}^n p = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}. \\ \bullet \sum_{k=n+1}^{2n} k &= \sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^n k = \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(4n+2-n-1)}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}. \\ \bullet \text{ Avec le changement d'indice } k &= n+i : \\ \sum_{i=1}^n (n+i)^2 &= \sum_{k=n+1}^{2n} k^2 = \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}. \\ \bullet \text{ Avec le changement d'indice } i &= k-2 : \\ \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{3^{k-2}} &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{3^i} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right). \\ \bullet \text{ Avec le changement d'indice } i &= n-k : \\ \sum_{k=1}^n (-3)^{n-k} &= (-3)^{n-1} + (-3)^{n-2} + \dots + (-3)^0 = \sum_{i=0}^{n-1} (-3)^i = \frac{1 - (-3)^n}{1 - (-3)} = \frac{1 - (-3)^n}{4}. \\ \bullet \sum_{k=0}^{2n} \frac{5^k - 2^{2k}}{2^k} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{5^k}{2^k} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{2^{2k}}{2^k} = \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{5}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{2n} 2^k = \frac{1 - (\frac{5}{2})^{2n+1}}{1 - \frac{5}{2}} - \frac{1 - 2^{2n+1}}{1 - 2} \\ &= -\frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{5}{2}\right)^{2n+1}\right) + (1 - 2^{2n+1}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{5}{2}\right)^{2n+1} - 2^{2n+1}. \end{aligned}$$

Exercice 4 (Calcul de produits)

- $\prod_{p=1}^n (p+1)^3 = \left(\prod_{p=1}^n (p+1) \right)^3 = \left(\prod_{i=2}^{n+1} i \right)^3 = \left(\prod_{i=1}^{n+1} i \right)^3 = ((n+1)!)^3$
 - $\prod_{k=1}^n 2^k = 2^1 \times 2^2 \times \dots \times 2^n = 2^{1+2+\dots+n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$
 - $\prod_{p=1}^n \frac{2}{p^2} = \frac{\prod_{p=1}^n 2}{\prod_{p=1}^n p^2} = \frac{2^n}{\left(\prod_{p=1}^n p \right)^2} = \frac{2^n}{(n!)^2}$
 - $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$
 - $\prod_{k=1}^n k(n-k+1) = \left(\prod_{k=1}^n k \right) \times \left(\prod_{k=1}^n (n-k+1) \right) = n! \times (n \times (n-1) \times \dots \times 1) = n! \times n! = (n!)^2$
-

Exercice 5 (Exponentielle et logarithme)

- $\sum_{k=0}^n \exp(kx) = \sum_{k=0}^n e^{kx} = \sum_{k=0}^n (e^x)^k$, donc :
Si $e^x \neq 1$ (c'est à dire si $x \neq 0$) : $\sum_{k=0}^n \exp(kx) = \frac{1 - (e^x)^{n+1}}{1 - e^x} = \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x}$
Si $e^x = 1$ (c'est à dire si $x = 0$) : $\sum_{k=0}^n \exp(kx) = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$.
 - $\sum_{k=0}^n \exp(k+x) = \sum_{k=0}^n e^{k+x} = \sum_{k=0}^n e^k e^x = e^x \sum_{k=0}^n e^k = e^x \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e}$
 - $\prod_{k=0}^n \exp(kx) = \prod_{k=0}^n e^{kx} = e^0 \times e^x \times e^{2x} \times \dots \times e^{nx} = e^{x+2x+\dots+nx} = e^{x(1+2+\dots+n)} = e^{x \frac{n(n+1)}{2}}$
 - $\prod_{k=0}^n \exp(k+x) = \prod_{k=0}^n e^{k+x} = \prod_{k=0}^n (e^k e^x) = (e^x)^{n+1} \prod_{k=0}^n e^k = (e^x)^{n+1} e^{0+1+2+\dots+n} = (e^x)^{n+1} e^{\frac{n(n+1)}{2}} = e^{(n+1)x + (n+1)\frac{n}{2}} = e^{(n+1)(x+\frac{n}{2})}$
 - $\sum_{k=1}^n \ln(kx) = \ln(x) + \ln(2x) + \dots + \ln(nx) = \ln(x \times 2x \times \dots \times nx) = \ln\left(\prod_{k=1}^n kx\right)$
 $= \ln\left(x^n \prod_{k=1}^n k\right) = \ln(x^n n!)$
 - $\sum_{k=1}^n \ln(x^k) = \sum_{k=1}^n k \ln(x) = \ln(x) \sum_{k=1}^n k = \ln(x) \frac{n(n+1)}{2}$
 - Si $\ln(x) \neq 1$ (c'est à dire si $x \neq e$) : $\sum_{k=1}^n (\ln(x))^k = \frac{\ln(x) - \ln(x)^{n+1}}{1 - \ln(x)}$
Si $\ln(x) = 1$ (c'est à dire si $x = e$) : $\sum_{k=1}^n (\ln(x))^k = \sum_{k=1}^n 1 = n$.
 - $\prod_{k=1}^n \ln(x^k) = \prod_{k=1}^n (k \ln(x)) = \ln(x)^n \prod_{k=1}^n k = \ln(x)^n n!$
-

Exercice 6 (Décomposition astucieuse)

- On cherche a et b réels tels que pour tout $x \notin \{0, 1\}$,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} \iff \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(x+1) + bx}{x(x+1)} \iff 1 = a(x+1) + bx \iff 1 = (a+b)x + a.$$

Il suffit de choisir a et b pour que $a+b=0$ et $a=1$. On peut choisir $a=1$ et $b=-1$.

2. On a vu dans le 1. que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ par télescopage.}$$

Exercice 7 (Somme des carrés)

Par télescopage, $S = \sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1^3 = (n+1)^3 - 1$.

Par ailleurs, en développant le cube : $S = \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3) = \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1)$.

Ainsi : $S = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n$. On a donc l'égalité :

$$\begin{aligned} 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n &= (n+1)^3 - 1 \iff \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{3} = \frac{(n+1)^3 - 1}{3} \\ &\iff \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)^3 - n - 1}{3} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &\iff \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)((n+1)^2 - 1)}{3} - \frac{(n+1)n}{2} \\ &\iff \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)(2(n+1)^2 - 2) - (n+1)3n}{6} \\ &\iff \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)(2(n+1)^2 - 3n - 2)}{6} \\ &\iff \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{6} = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

On a bien retrouvé la formule $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 8 (Sommes avec parité)

$$S_n + T_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

• Dans le cas où n est pair, on peut écrire $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Dans ce cas :

$$S_n = \sum_{k \in \{2, 4, \dots, 2p-2, 2p\}} k = \sum_{i=1}^p 2i = 2 \sum_{i=1}^p i = 2 \frac{p(p+1)}{2} = p(p+1).$$

Puisque $p = \frac{n}{2}$, on obtient donc $S_n = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{n(n+2)}{4}$.

$$\text{Puis : } T_n = \frac{n(n+1)}{2} - S_n = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+2)}{4} = \frac{n(2n+2)}{4} - \frac{n(n+2)}{4} = \frac{n^2}{4}.$$

• Dans le cas où n est impair, on peut écrire $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. On a toujours :

$$S_n = \sum_{k \in \{2, 4, \dots, 2p-2, 2p\}} k = \sum_{i=1}^p 2i = 2 \sum_{i=1}^p i = 2 \frac{p(p+1)}{2} = p(p+1).$$

Cette fois $p = \frac{n-1}{2}$, on obtient donc $S_n = \frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right) = \frac{(n-1)(n+1)}{4}$.

$$\text{Puis : } T_n = \frac{n(n+1)}{2} - S_n = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)(n+1)}{4} = \frac{2n(n+1)}{4} - \frac{(n-1)(n+1)}{4} = \frac{(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 9 (Produits avec parité)

$$P_n \times Q_n = \prod_{k=1}^n k = n!.$$

- Dans le cas où n est pair, on peut écrire $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Dans ce cas :

$$P_n = \prod_{k \in \{2, 4, \dots, 2p-2, 2p\}} k = \prod_{i=1}^p 2i = 2^p p!.$$

Puisque $p = \frac{n}{2}$, on obtient donc $S_n = 2^{\frac{n}{2}} (\frac{n}{2})!$. Puis : $Q_n = \frac{n!}{P_n} = \frac{n!}{2^{\frac{n}{2}} (\frac{n}{2})!}$.

- Dans le cas où n est impair, on peut écrire $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. On a toujours :

$$P_n = \prod_{k \in \{2, 4, \dots, 2p-2, 2p\}} k = \prod_{i=1}^p 2i = 2^p p!.$$

Cette fois $p = \frac{n-1}{2}$, on obtient donc $S_n = 2^{\frac{n-1}{2}} (\frac{n-1}{2})!$. Puis : $Q_n = \frac{n!}{P_n} = \frac{n!}{2^{\frac{n-1}{2}} (\frac{n-1}{2})!}$.

Exercice 10 (Dérivation)

La fonction f est bien dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, puisque c'est un polynôme !

- D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$.

donc $f'(x) = 0 + 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} = \sum_{k=0}^n kx^{k-1}$ c'est à dire $f'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$.

- D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on sait que $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

En dérivant cette expression : $f'(x) = \frac{-(n+1)x^n \times (1-x) - (1-x^{n+1}) \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

On en déduit finalement : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

Exercice 11 (Télescopage)

- $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k) - \ln(k+1)) = \ln(1) - \ln(n+1) = -\ln(n+1)$.
- $\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k+1}{k} \times \frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=2}^n \left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) + \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)\right)$
 $= \sum_{k=2}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) + \sum_{k=2}^n (\ln(k-1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(2) + \ln(1) - \ln(n) = \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(2)$
 $= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$.
- $\sum_{k=1}^{n-1} k \times k! = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1-1) \times k! = \sum_{k=1}^{n-1} ((k+1)k! - k!) = \sum_{k=1}^{n-1} ((k+1)! - k!) = n! - 1$.
- $\sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{k}{k!} - \frac{1}{k!}\right) = \sum_{k=2}^n \left(\frac{k}{k(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right) = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right) = 1 - \frac{1}{n!}$.

Exercice 12 (Décomposition astucieuse II)

1. On cherche a, b, c réels tels que pour tout $x \notin \{-2, -1, 0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{2}{x(x+1)(x+2)} &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} \iff \frac{2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)} \\ &\iff 2 = a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1) \\ &\iff 2 = a(x^2 + 3x + 2) + b(x^2 + 2x) + c(x^2 + x) \\ &\iff 2 = (a+b+c)x^2 + (3a+2b+c)x + 2a. \end{aligned}$$

Il suffit de choisir a, b, c pour que : $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 2a = 2 \end{cases}$. En résolvant on obtient : $a = 1, b = -2, c = 1$.

2. D'après le 1., pour tout $k \geq 1$, on peut écrire $\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}$
c'est à dire $\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)$.

$$\text{Ainsi : } \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2} + \frac{-(n+2) + n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 13 (Libres)

$$\text{a) } \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p 2^{2i-j} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p 4^i \left(\frac{1}{2}\right)^j \right) = \sum_{i=1}^n \left(4^i \sum_{j=1}^p \left(\frac{1}{2}\right)^j \right) = \sum_{i=1}^n \left(4^i \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{p+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \sum_{i=1}^n 4^i \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \\ = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \sum_{i=1}^n 4^i = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \frac{4 - 4^{n+1}}{1 - 4} = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) \frac{4^{n+1} - 4}{3} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) (4^n - 1).$$

$$\text{b) } \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^p 2 \right) = \sum_{i=0}^n 2(p+1) = (n+1) \times 2(p+1) = 2(n+1)(p+1).$$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (i+j) \right) = \sum_{i=1}^n \left(i \sum_{j=1}^n 1 + \sum_{j=1}^n j \right) = \sum_{i=1}^n \left(ni + \frac{n(n+1)}{2} \right) = n \sum_{i=1}^n i + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^n 1 \\ = n \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} n = n^2(n+1).$$

Exercice 14 (Avec contraintes)

$$\text{a) } \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n 1 = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) = n \sum_{i=0}^{n-1} 1 - \sum_{i=0}^{n-1} i = n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i = n^2 - \frac{(n-1)n}{2} = n \left(n - \frac{n-1}{2} \right) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{b) } \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j \frac{i^3}{j^2} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j^2} \sum_{i=1}^j i^3 \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j^2} \frac{j^2(j+1)^2}{4} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{(j+1)^2}{4} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n (j+1)^2. \text{ Avec le changement}$$

d'indice $k = j + 1$ on obtient :

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{n+1} k^2 = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^{n+1} k^2 - 1 \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - 1 \right)$$

$$\text{c) } \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n (i+j) \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(i \sum_{j=i+1}^n 1 + \sum_{j=i+1}^n j \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(i(n-i) + \left(\sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^i j \right) \right) \\ = \sum_{i=0}^{n-1} \left(i(n-i) + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(-\frac{3}{2}i^2 + (n - \frac{1}{2})i + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ = -\frac{3}{2} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + (n - \frac{1}{2}) \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=0}^{n-1} 1 \dots \text{après calcul et simplification, on obtient : } \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Exercice 15 (En distinguant des cas)

a) Puisque $\min(i, j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ i & \text{sinon} \end{cases}$, on peut calculer en séparant la somme en deux morceaux :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i \min(i, j) + \sum_{j=i+1}^n \min(i, j) \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i j + \sum_{j=i+1}^n i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i(i+1)}{2} + i \sum_{j=i+1}^n 1 \right) \\ = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i(i+1)}{2} + i(n-i) \right) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{2}i^2 + (n + \frac{1}{2})i \right) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 + (n + \frac{1}{2}) \sum_{i=1}^n i.$$

... après calcul et simplification on obtient : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) Avec la même méthode on obtient : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$.

c) Cette fois il faut noter que $|i - j| = \begin{cases} i - j & \text{si } j \leq i \\ j - i & \text{sinon} \end{cases}$.

Avec le même genre de calcul, on obtient : $\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$.

Exercice 16 (Somme et carré)

Il suffit de remarquer que la quantité dont on parle est en fait $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$.

$$\begin{aligned} \text{En effet : } \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^n x_j\right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j = \sum_{1 \leq i=j \leq n} x_i x_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j + \sum_{1 \leq j < i \leq n} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \text{ (par symétrie)} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j. \end{aligned}$$

Puisqu'on sait que le carré $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$ est toujours positif, on en déduit immédiatement le résultat.