5

Suites réelles

Applications directes du cours

Exercice 1 (Des suites explicites)
Déterminer le sens de variation des suites :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k^2}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n^2+1)$
3. $\forall n \geqslant 5,\ u_n = \dfrac{5^{n+1}}{n!}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$

Exercice 2 (Des suites récurrentes)
1. On définit $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{u_n}$.
(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive.
(b) En déduire directement son sens de variation.

2. On définit $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.
(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$.
(b) Étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{4x-2}{x+1}$ sur $[1, +\infty[$.
(c) Déterminer le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. On définit $u_0 = \frac{2}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 - u_n}$.
(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
u_n est bien défini et appartient à $]0,1[$.
(b) Déduire directement le sens de variation de u.
(c) On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 - \dfrac{1}{u_n}$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

Exercice 3 (Récurrences basiques)
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n :

a) $u_0 = 0$ et : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ 3u_{n+1} - 2u_n = 1$
b) $u_1 = 2$ et : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} + 2u_n = 5$

Exercice 4 (Récurrence linéaire double)
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n :

a) $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$
b) $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{4}u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$

Pour approfondir

Exercice 5 (Autre approche pour les suites arithmético-géométriques)
Soient $q, r \in \mathbb{R}$ avec $q \neq 0$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n + r.$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{q^n}$
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer "simplement" $v_{n+1} - v_n$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$ de deux manières.
Déduire l'expression de v_n en fonction de n, q, r, u_0.
3. Déduire l'expression de u_n en fonction de n, q, r, u_0.

Exercice 6 (Oral ESCP 2008)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite à termes positifs ou nuls définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 = u_n^2 + 8n + 5$.

Exprimer u_n^2 puis u_n en fonction de n,
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 (Récurrence couplée)
Soient u et v les suites définies par :
$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -2 \end{cases}$ et $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_n + v_n$. Montrer que la suite w est géométrique.
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 3v_n - 3^n$.
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$.
Montrer que la suite z est arithmétique.
d) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que la suite u suit une récurrence linéaire d'ordre 2. Retrouver ainsi les expressions de u_n et v_n obtenues dans la question 1.

Exercice 8 (Suite satisfaisant une inégalité)
On considère une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant,
pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{4}$.
(On admet qu'une telle suite existe bien)

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ 0 < u_n < 1$.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \dfrac{1}{4u_n(1-u_n)}$.
3. Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{4x(1-x)}$ sur $]0,1[$.
En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.