23

Variables aléatoires discrètes

Lois de probabilité discrètes

Exercice 1 (Loi valide ?)

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = a\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}^*$ la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit-elle une loi de probabilité ?
(C'est à dire qu'en posant $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = p_n$, on définit bien une loi de probabilité pour X)

2. Même question avec : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{2+a^n}{n!}\right)$.

Exercice 2 (Loi à partir d'une relation de récurrence)

1. Soit X une variable aléatoire discrète de support $X(\Omega) = \mathbb{N}$ satisfaisant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X=n+1) = \frac{2}{n+1}P(X=n).$$

Déterminer la loi de X et reconnaître une loi usuelle.

2. Soit X une variable aléatoire discrète de support $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ satisfaisant, pour tout $n \geqslant 1$:

$$4P(X=n+2) = 5P(X=n+1) - P(X=n).$$

Déterminer la loi de X et reconnaître une loi usuelle.

3. On fixe un $a \in]0,1[$.
Soit X une variable aléatoire discrète de support $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ satisfaisant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X=n) = aP(X \geqslant n).$$

Déterminer la loi de X et reconnaître une loi usuelle.
Indication : calculer $P(X=1), P(X=2)$, $P(X=3)$, puis généraliser par récurrence...

Espérances et variances

Exercice 3 (Variance ou pas ?)
On considère la variable aléatoire discrète X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = \frac{4}{k(k+1)(k+2)}.$$

1. Vérifier que c'est une loi de probabilité "valide".
Indication : repérer une série télescopique.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
Indication : repérer une série télescopique.
2. (a) On pose $Y = X(X+1)$.
La variable Y admet-elle une espérance ?
(b) X admet-elle une variance ?

Exercice 4 (Une variable à valeurs dans $\mathbb{Z}$)
Soit X une variable aléatoire avec $X(\Omega) = \mathbb{Z}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad P(X=n) = P(X=-n) = \frac{1}{2^{n+2}}.$$

1. Déterminer $P(X=0)$.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer. Aurait-on pu prévoir cette valeur ?

Variables discrètes dans des énoncés en français

Exercice 5 (High score)
Un jeu comporte une infinité niveaux $1, 2, 3, \ldots$.
• Lorsque le joueur démarre le niveau numéro k, il parvient à le compléter avec la probabilité $\dfrac{1}{k}$.
• Si le joueur échoue pendant un niveau, la partie est terminée.
Soit X le nombre de niveaux complétés par le joueur.

1. Montrer que $\forall k \geqslant 1,\ P(X=k) = \dfrac{k}{(k+1)!}$.
2. Calculer $E(X+1)$ et en déduire le nombre de niveaux complétés par le joueur en moyenne.

Exercice 6 (Premier "Pile-Face" pour une pièce biaisée)
On effectue une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est $p \in]0,1[$, celle d'obtenir Face est $q = (1-p)$. On se place dans le cas $p \neq \frac{1}{2}$, de sorte que $p \neq q$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers à effectuer pour obtenir pour la première fois "Pile puis Face" (à la suite). On pose $X = 0$ si cette séquence n'apparaît jamais.

1. Quel est le support de X ?
2. (a) Calculer $P(X=2)$, $P(X=3)$, $P(X=3)$.
(b) En généralisant le raisonnement, montrer que :

$$\forall n \geqslant 2,\quad P(X=n) = \sum_{k=1}^{n-1} p^{n-k}q^k.$$

On pourra écrire $[X=n]$ comme réunion de $n-1$ évènements 2 à 2 disjoints.
(c) Obtenir l'expression :

$$\forall n \geqslant 2,\quad P(X=n) = \frac{pq}{p-q}(p^{n-1} - q^{n-1})$$

3. En déduire que $P(X=0) = 0$.
4. Montrer que $E(X)$ existe et vaut $\dfrac{1}{pq}$.
5. Montrer que $E(X(X-1))$ existe et

$$E(X(X-1)) = \frac{2(p^3 + p^2q + pq^2 + q^3)}{p^2q^2}.$$

En déduire que X admet une variance.

Utilisation des lois usuelles

Exercice 7 (Faces précédant Pile)

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de Faces précédant le premier Pile.

1. Déterminer le support et la loi de X.

2. On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de Y.
En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 8 (Poule pondeuse)

Une poule pond chaque semaine N oeufs, où N est une variable aléatoire discrète de loi $\mathcal{P}(3)$.

Pour chaque oeuf pondu, la probabilité d'obtenir un poussin est $p \in]0,1[$, indépendamment des autres oeufs. On note X le nombre de poussins obtenus en une semaine.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Conditionnellement à $[N = n]$, quelle est la loi de probabilité de X ?
En déduire $P_{[N=n]}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) Déterminer la loi de probabilité de X. On reconnaitra une loi usuelle dont on précisera le paramètre.

2. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 9 (Autour de la loi géométrique)

Soit X une variable de loi $\mathcal{G}(p)$ pour un $p \in]0,1[$.

1. Montrer que $P(\text{"}X \text{ est pair"}) = \dfrac{1-p}{2-p}$.
X a-t-il plus de chance d'être pair ou impair ?

2. Déterminer la (ou les) valeur(s) que prend X avec la plus grande probabilité.
On étudiera donc les variations de la suite de terme général $u_n = P(X = n)$.

3. A quelle condition sur $a > 0$ l'espérance $E(a^X)$ existe-t-elle ? Calculer alors sa valeur.

Exercice 10 (Autour de la loi de Poisson)

Soit X une variable de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ pour un $\lambda > 0$.

1. Montrer que $P(\text{"}X \text{ est pair"}) = \dfrac{1+e^{-2\lambda}}{2}$.
X a-t-il plus de chance d'être pair ou impair ?

2. Déterminer la (ou les) valeur(s) que prend X avec la plus grande probabilité.
On étudiera donc les variations de la suite de terme général $u_n = P(X = n)$.

3. Soit $a > 0$. Montrer que $E(a^X)$ existe et calculer sa valeur.

Oral HEC 2012

Soit $n \geqslant 2$. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n.
On effectue dans cette urne une infinité de tirages successifs d'une boule avec remise.

On note $X_1, X_2, \ldots$ les numéros successifs obtenus.
On note enfin Y le rang du premier tirage (supérieur ou égal à 2) pour lequel le numéro de la boule tirée est supérieur ou égal à celui de la première boule X_1 (sous réserve qu'un tel numéro existe !)

1. Pour tout $k \geqslant 2$, on pose l'évènement $B_k = [X_k < X_1]$.

(a) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que $\forall k \geqslant 2,\ P(B_2 \cap \ldots \cap B_k) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^{k-1}$.

Indication : "Distinguer" selon les valeurs prises par X_1.

(b) En déduire que $P\left(\displaystyle\bigcap_{k=2}^{+\infty} B_k\right) = 0$. En déduire que la variable Y est presque-sûrement bien définie.

2. (a) Similairement au 1.(a), montrer que pour tout $m \geqslant 2$, $P(Y = m) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(\left(\frac{i}{n}\right)^{m-2} \times \left(1 - \frac{i}{n}\right)\right)$.

(b) Montrer que Y admet une espérance et que $E(Y) = 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.

Indication : montrer au préalable que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{m=2}^{+\infty} m \left(\frac{i}{n}\right)^{m-2} = \frac{1}{(1-\frac{i}{n})^2} + \frac{1}{1-\frac{i}{n}}$.