Devoir Sur Table n°1 – Durée : 3h

L'utilisation de la calculatrice, des feuilles/notes de cours ou d'exercices est interdite.
La présentation, la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation de la copie.
Les résultats non encadrés/soulignés/surlignés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1 : Récurrence et produits

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfaisant la relation suivante :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right) u_{n+1}.$$

On définit également, pour tout $n \geqslant 2$, les produits : $P_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} (2i)$ et $Q_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} (2i+1)$.

1. Calculer les valeurs de u_2 et u_3.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, $\quad u_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$.
3. Soit $n \geqslant 2$ fixé.
   (a) Donner l'expression de P_n en fonction de n.
   (b) Que vaut le produit $P_n \times Q_n$?
   (c) En déduire l'expression de Q_n en fonction de n.
4. Montrer finalement que pour tout $n \geqslant 2$, $\quad u_n = \dfrac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-1)!}$

Exercice 2 : Etude de deux bijections

On s'intéresse à la fonction f définie par l'expression $f(t) = \ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$ (sur un domaine approprié).

1. Déterminer le domaine de définition de f, que l'on notera I.
   On considère ainsi, dans la suite, l'application $f : I \to \mathbb{R}$.
2. Définir, en Python, une fonction qui prend en entrée un nombre t, renvoie la valeur de $f(t)$ si celle-ci est bien définie, et affiche un message d'erreur dans le cas contraire.
3. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

On définit à présent l'application $g : \begin{array}{rcl}]\frac{1}{2}, +\infty[& \to &]-\infty, 1[\\ x & \mapsto & 4x(1-x) \end{array}$

4. Montrer que g est bijective et déterminer sa réciproque.
5. Démontrer que le domaine de définition de la fonction $h = f \circ g$ est un intervalle de la forme $]\frac{1}{2}, \alpha[$, où α est une valeur réelle que l'on déterminera.
6. Montrer finalement que $h :]\frac{1}{2}, \alpha[\to \mathbb{R}$ est une bijection et que : $\forall y \in \mathbb{R},\ h^{-1}(y) = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{1+e^y}}{2\sqrt{1+e^y}}$.

Exercice 3 : Formule d'Abel pour le calcul de somme

Dans tout cet exercice, on fixe un entier $n \geqslant 2$.

1. Soient $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ des réels fixés.

   (a) A l'aide d'un télescopage, exprimer la valeur $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k(b_{k+1} - b_k) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) b_{k+1}$ en fonction de a_1, b_1, a_n et b_n.

   (b) En déduire la formule d'Abel : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k(b_{k+1} - b_k) = (a_n b_n - a_1 b_1) - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) b_{k+1}.}$

Dans la suite, on propose d'étudier quelques cas d'application de cette formule.

2. Dans cette question, on cherche à calculer la somme des entiers alternés :

$$S_n = -1 + 2 - 3 + 4 - \ldots + (-1)^n n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k.$$

   On introduit également $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k((-1)^{k+1} - (-1)^k)$.

   (a) En appliquant la formule d'Abel, montrer que $T_n = (-1)^n n + \dfrac{1 - (-1)^n}{2}$.

   (b) Justifier par ailleurs que $T_n = -2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k k$, puis exprimer T_n en fonction de S_n et de n.

   (c) Déduire des deux questions précédentes que : $S_n = \dfrac{(-1)^n n}{2} + \dfrac{(-1)^n}{4} - \dfrac{1}{4}$.

   (d) Définir, en Python, une fonction nommée `somme_alterne` qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de S_n (donnée par l'expression précédente).

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on cherche à calculer la somme $A_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k x^k$.

   (a) Que vaut $A_n(1)$?

   (b) On suppose que $x \neq 1$. Calculer $(x-1) \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k x^k$ à l'aide de la formule d'Abel, et en déduire :

$$A_n(x) = \frac{(n-1)x^{n+1} - n x^n + x}{(x-1)^2}.$$

   (c) Définir, en Python, une fonction nommée `somme_A` qui prend en entrée un entier n et un réel x et renvoie la valeur de $A_n(x)$ (donnée par l'expression précédente).

$\star\star\star$ Fin du sujet $\star\star\star$