Matrices

Produits de matrices

Exercice 1 (Calcul 1)
Lorsque c'est possible, calculer AB et BA :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (Calcul 2)
On pose $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
Lorsque c'est possible, calculer :
XY, ${}^tXY$, $X{}^tY$, ${}^tX{}^tY$.

Exercice 3 (Matrices qui commutent 1)
On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer l'ensemble E des matrices qui commutent avec A.

<u>Méthode :</u> Écrire $AB = BA$ et chercher à identifier les coefficients de B.

2) Montrer qu'il s'agit en fait de l'ensemble :
$E = \{aI_3 + bA + cA^2, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

Exercice 4 (Matrices qui commutent 2)
Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Puissances de matrices

Exercice 5 ("Équation" matricielle)
Soit $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ satisfaisant : $M^3 - 2M = D$.
On pourra commencer par montrer qu'une telle matrice commute avec D.

Exercice 6 (Calcul de puissances)
On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer N telle que $A = 2I_2 + N$.
Calculer N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 (Plusieurs méthodes)
On note $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 et l'exprimer en fonction de M et I_3.

2. <u>Calcul de M^n : Première méthode</u>

(a) À l'aide de la question 1. montrer que
$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, M^n = a_n M + b_n I_3$.
On donnera l'expression de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

(b) Déterminer les expressions de a_n et b_n en fonction de n et en déduire M^n.

3. <u>Calcul de M^n : Deuxième méthode</u>

(a) À l'aide de la question 1., déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(M) = 0_3$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P.

(c) En déduire M^n.

Exercice 8 (Matrices et récurrence linéaire 1)
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $u_0 = 1, v_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$$
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

1. (a) Déterminer $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de sorte que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ X_{n+1} = AX_n$$
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.

2. (a) Montrer que l'on peut écrire $A = 5I_2 + J$, où J est une matrice à déterminer.
(b) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Conclusion : déterminer l'expression des termes généraux u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 (Matrices et récurrence linéaire 2)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite satisfaisant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de sorte que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n.$$
Quelle expression déduit-on pour U_n, pour $n \in \mathbb{N}$?

2. (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists a_n \in \mathbb{R},\ A^n = a_n \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
On exprimera au passage a_{n+1} en fonction de a_n.
(b) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Donner finalement u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

Exercice 10 (Matrices nilpotentes)

On dit qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente lorsqu'il existe un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0_n$.

1. (a) Donner un exemple de matrice nilpotente $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (à part $A = 0_2$!)

(b) Donner un exemple de matrice nilpotente $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (à part $A = 0_3$!)

2. (a) Montrer que le produit de deux matrices nilpotentes qui commutent est une matrice nilpotente.

(b) Montrer que la somme de deux matrices nilpotentes qui commutent est une matrice nilpotente.

3. Montrer qu'une matrice nilpotente n'est jamais inversible.

Matrices inversibles

Exercice 11 (Calcul d'inverse 1)

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 12 (Calcul d'inverse 2)

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 13 (Calcul d'inverse 3)

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.
En déduire les solutions du système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 4y + z = 5 \\ 2x + 5y + z = 1 \\ x + 2y + z = -3 \end{array} \right.$$

Exercice 14 (Calcul d'inverse 4)

1. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $B^3 - 3B^2 + 3B$.

2. En déduire que B est inversible, et déterminer directement B^{-1}.

3. Retrouver l'expression de B^{-1} à l'aide de la méthode d'inversion "classique" (pivot de Gauss).

Exercice 15 (Condition d'inversibilité ?)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda I_3$ est-elle inversible ?

2. Résoudre l'équation $AX = -3X$.
(d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$).

3. Résoudre, sans calcul, l'équation $AX = 2X$.

Bonus

Exercice 16 (Une décomposition)

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Raisonner par analyse-synthèse...

Exercice 17 (Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec toute autre matrice. Montrer que $A = \lambda I_n$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$.

Considérer les matrices $E_{i,j}$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf un 1 sur la i-ème ligne et la j-ième colonne...

Extrait EML 2010

On appelle matrice stochastique toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que :

a) $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,p\}^2,\ a_{i,j} \geqslant 0$ b) $\forall i \in \{1,\ldots,p\},\ \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = 1$.

On note $\mathcal{ST}_p$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, pour tout réel λ, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.
Notons que cet ensemble n'est jamais vide car on a toujours $A0_{p,1} = \lambda 0_{p,1}$.

1. (a) On note V la matrice colonne à p lignes dont tous les cœffcients sont égaux à 1.

Montrer que, pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$: $\quad A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in \{1,\ldots,p\}^2,\ a_{i,j} \geqslant 0 \\ AV = V. \end{cases}$

(b) En déduire que pour toute matrice A de $\mathcal{ST}_p$, $E_1(A) \neq \{0_{p,1}\}$.

(c) En déduire : $\forall A, B \in \mathcal{ST}_p, \quad AB \in \mathcal{ST}_p$.

2. Soit $A \in \mathcal{ST}_p$ et λ un réel tel que $E_\lambda(A) \neq \{0_{p,1}\}$. On introduit donc $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in E_\lambda(A)$, non nulle.

On introduit l'indice $i \in \{1,\ldots,p\}$ tel que : $\quad \forall k \in \{1,\ldots,p\},\ |x_k| \leqslant |x_i|$.

(a) Montrer que $|\lambda x_i| \leqslant |x_i|$. (b) En déduire : $|\lambda| \leqslant 1$.