

Dérivation

Pour s'exercer au calcul de dérivées

- (a) $f(x) = 3 \cos(x) - 2 \sin(x)^2$ (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ (c) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ (d) $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{\sqrt{2+x}}\right)$
 (e) $f(x) = \sin(2x^2 + 1)$ (f) $f(x) = (1-x)^x$ (g) $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2+1)^{3/2}}$ (h) $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
 (i) $f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2}$ (j) $f(x) = \tan(2x+1)$ (k) $f(x) = \frac{2x-1}{1+\cos(x)^2}$ (l) $f(x) = (3x+2)e^{x^2+x-1}$

Dérivabilité en un point

Exercice 1 (Problème en 0 ?)

Etudier la dérivabilité en tout point de la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |x| \sin(x^2 + 1)$.

Exercice 2 (Prolongement \mathcal{C}^1)

On pose $f(x) = x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Montrer que f se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Exercice 3 (Prolongement non dérivable)

Soit $f : x \mapsto \cos(x) + x \ln(x^2)$.

- Déterminer le domaine de définition et justifier que f y est de classe \mathcal{C}^1 .
- Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, mais que ce prolongement n'y est pas dérivable. Quelle interprétation peut-on faire graphiquement ?

Exercice 4 (Prolongement non \mathcal{C}^1)

On pose $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

- Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .
- Démontrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appelle toujours f ce prolongement : quelle valeur faut-il donc poser pour $f(0)$?
- Montrer que f ainsi re-définie est dérivable sur \mathbb{R} mais n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Exercice 5 ("Raboutement" dérivable)

Déterminer les valeurs des constantes $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ soit dérivable sur } \mathbb{R}.$$

Est-elle de classe \mathcal{C}^1 ?

Faire une représentation graphique.

Exercice 6 (Règle de L'Hôpital)

- Soit $a \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions dérivables en a satisfaisant : $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

- A l'aide de cette règle, calculer les limites :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x)}{\sin(x)+3x}.$$

Dérivée et études de fonctions

Exercice 7 (Montrer des inégalités)

À l'aide d'une étude de fonction appropriée, montrer les inégalités suivantes :

$$(a) \forall x \geq 0, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$$

$$(b) \forall x \geq 0, \quad \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}.$$

Exercice 8 (Une bijection)

On pose $f(x) = x^2 + \ln(1-x)$.

- Montrer que f réalise une bijection de son domaine de définition dans un intervalle que l'on déterminera.
- Dresser le tableau de variations de f^{-1} en précisant le comportement aux bornes.
- Montrer que f^{-1} est dérivable sur son domaine de définition et que

$$\forall x \in D_{f^{-1}}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{f^{-1}(x) - 1}{2f^{-1}(x)(f^{-1}(x) - 1) + 1}.$$

- Déterminer la valeur de $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 9 (Fonction arcinus)

- Montrer que la fonction \sin réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers un intervalle à déterminer.
- On note \arcsin la bijection réciproque. Etudier son sens de variation, sa continuité, sa dérivabilité, et montrer que

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Tracer l'allure des graphes de \sin et \arcsin sur les intervalles considérés.

Exercice 10 (Dérivée et parité/périodicité)

Soit $f \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. On suppose que f est paire. Que dire de f' ? (le démontrer)
2. On suppose que f est impaire. Même question.
3. On suppose que f est p -périodique, pour un $p > 0$. Même question.

Théorème de Rolle

Exercice 11 (Racines du polynôme dérivé)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ admettant n racines distinctes. Faire un dessin. Montrer que P' admet $n - 1$ racines distinctes. Que peut-on en déduire pour P'' ?

Exercice 12 (Variante de Rolle)

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R}_+ , dérivable sur \mathbb{R}_+^* et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$.

On veut montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f'(c) = 0$.

1. Faire un graphe illustrant cette situation.

On pose $g(x) = f(\frac{1-x}{x})$ pour $x \in]0, 1]$ et $g(0) = f(0)$.

2. Montrer que g est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.
3. Appliquer le théorème de Rolle à g et conclure.

Exercice 13 (EAF "généralisé")

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Indication : Appliquer Rolle à une bonne fonction...

Accroissements finis

Exercice 14 (IAF)

Démontrer les inégalités suivantes :

- (a) $\forall x \geq 2, \forall y \geq 2, |\ln(y) - \ln(x)| \leq \frac{1}{2}|y - x|$.
- (b) $\forall x \in [0, 1], x \leq e^x - 1 \leq ex$.
- (c) $\forall x > 0, \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 15 (Fonction \mathcal{C}^1 sur un segment)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

Montrer qu'il existe toujours un $M > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Exercice 16 (Somme infinie convergente)

Soit $\alpha > 1$. En appliquant l'IAF à $f : x \mapsto -\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ sur $[k-1, k]$, montrer que la suite de

terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ est majorée.

En déduire qu'elle converge.

Exercice 17 (IAF et suites récurrentes : méthode générale)

Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

On suppose que :

- $[a, b]$ est stable par f , i.e $f([a, b]) \subset [a, b]$.
- $\forall t \in]a, b[, |f'(t)| \leq k$, avec $k \in]0, 1[$.

1. Existence et unicité d'un point fixe

(a) A l'aide du TVI, montrer que f admet au moins un point fixe sur $[a, b]$.

(b) Justifier que pour tous $x, y \in [a, b]$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

En déduire que le point fixe est unique : on le note $\alpha \in [a, b]$.

2. Etude de la suite récurrente

On fixe $u_0 \in [a, b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

- (a) Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
- (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$
- (c) En déduire une majoration de $|u_n - \alpha|$, et finalement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 18 (Une suite récurrente)

On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2}$.

On introduit la fonction associée : $f(x) = \frac{e^x}{x + 2}$.

1. (a) Déterminer le domaine de définition de f . Calculer f' , f'' , puis dresser le tableau de variations de f .

(b) Déterminer $f([0, 1])$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$.

(c) Montrer que f admet un unique point fixe sur $[0, 1]$, noté α . Que dire de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, si elle existe ?

2.(a) Montrer que $\forall x \in [0, 1], \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$.

6. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Conclure quant à $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Solutions des calculs de dérivées :

$$1-x+x^2(x^2+x+1) \quad (I)$$

$$x^2((x)x^2+x+1) \quad (II)$$

$$\left((x)x^2+x+1 \right) x^2 = \frac{(x^2+1)x^2}{x} \quad (I')$$

$$\frac{(x^2+1)x^2}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{x^2}{x} \quad (I'')$$

$$\frac{x^2}{x} + \frac{x^2}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{x^2}{x} \quad (I''')$$

$$\frac{x^2}{x} + \frac{x^2}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{x^2}{x} \quad (I''')$$

$$x(x-1) \left((x-1)x^2 + \frac{1-x}{x} \right) \quad (J) \quad (x^2+1)x^2 \quad (K)$$

$$\frac{(x^2-x+x^2)x^2}{x^2+x} \quad (P) \quad \left(\frac{x^2}{1} - \frac{x+1}{1} \right) \frac{x^2}{1} \quad (Q)$$

$$\frac{x^2/(x^2-x^2)}{x} \quad (Q) \quad (x)x^2((x)x^2+x+1) \quad (R)$$