23

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 (Loi valide ?)

1. Il faut que $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \geqslant 0$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. On calcule : $\sum_{n=0}^{+\infty} a\left(\frac{3}{4}\right)^n = a\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = a\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = a \times 4$.

Ainsi, il faut que $a = \frac{1}{4}$.
(En fait, à un "décalage" près, c'est une loi géométrique).

2. Même chose, on calcule : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{8}\left(\frac{2+a^n}{n!}\right) = \frac{1}{8}\left(2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{n!}\right) = \frac{1}{8}(2e^1 + e^a)$. Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 \iff \frac{1}{8}(2e^1 + e^a) = 1 \iff 2e + e^a = 8 \iff e^a = 8 - 2e \iff a = \ln(8-2e).$$

Exercice 2 (Loi à partir d'une relation de récurrence)

1. On calcule les "premiers termes" :

- $P(X=1) = \frac{2}{1}P(X=0)$,
- $P(X=2) = \frac{2}{2}P(X=1) = \frac{2^2}{2\times 1}P(X=0)$,
- $P(X=3) = \frac{2}{3}P(X=2) = \frac{2^3}{3\times 2\times 1}P(X=0)$ etc...

On démontre facilement (récurrence immédiate) que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = \frac{2^n}{n!}P(X=0)$.

Pour calculer la valeur de $P(X=0)$, on se rappelle que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1 \iff P(X=0)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!} = 1 \iff P(X=0)\times e^2 = 1 \iff P(X=0) = e^{-2}.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = \frac{2^n}{n!}e^{-2}$. On reconnait la loi de Poisson : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$.

2. Notons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = P(X=n)$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 4u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n \quad \text{c'est à dire} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Il s'agit d'une suite à récurrence linéaire d'ordre 2. On applique la méthode de l'équation caractéristique en résolvant l'équation $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = 0$ c'est à dire $4x^2 - 5x + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$.

On a donc les deux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$ et $x_2 = \frac{5+3}{8} = 1$.

On en déduit la forme générale : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \lambda\left(\frac{1}{4}\right)^n + \mu \times 1^n = \lambda\left(\frac{1}{4}\right)^n + \mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer les valeurs de λ et μ, on se rappelle qu'on doit avoir $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = 1$, c'est à dire $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

Pour que la série converge, il faut déjà au moins que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, c'est à dire $\mu = 0$. Ensuite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lambda\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \lambda\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1\right) = \lambda\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1\right) = \lambda\left(\frac{4}{3} - 1\right) = \lambda \times \frac{1}{3}.$$

Ainsi, il faut que $\lambda = 3$. Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = u_n = \frac{3}{4^n}$.

Ceci peut se réécrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times \frac{3}{4} = \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{n-1} \times \frac{3}{4}$.

On reconnait donc une loi géométrique : $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{3}{4}\right)$

---

3. La relation se réécrit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = a\,(1-P(X<n)) = a\left(1-\sum_{k=1}^{n-1} P(X=k)\right)$. Ainsi :

- $P(X=1) = a \times (1-0) = a$.
- $P(X=2) = a\,(1-P(X=1)) = a(1-a)$.
- $P(X=3) = a\,(1-P(X=1)-P(X=2)) = a(1-a-a(1-a)) = a(1-a)(1-a) = a(1-a)^2$.

On conjecture donc que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad P(X=n) = a(1-a)^{n-1}$, démontrons-le par récurrence forte.
L'initialisation a déjà été vérifiée.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X=k) = a(1-a)^{k-1}$. On a alors :

$$\begin{aligned} P(X=n+1) &= a\left(1-\sum_{k=1}^{n} P(X=k)\right) = a\left(1-\sum_{k=1}^{n} a(1-a)^{k-1}\right) = a\left(1-a\sum_{k=1}^{n}(1-a)^{k-1}\right) \\ &= a\left(1-a\sum_{k=0}^{n-1}(1-a)^{k}\right) = a\left(1-a\times\frac{1-(1-a)^n}{1-(1-a)}\right) = a\left(1-a\times\frac{1-(1-a)^n}{a}\right) = a(1-a)^n. \end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence.
On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = (1-a)^{n-1}a$. On reconnait donc une loi géométrique : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(a)$.

Exercice 3 (Variance ou pas ?)

1. On doit vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$, c'est à dire $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$.
Classiquement, on cherche à repérer une série télescopique. On décompose : $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}+\dfrac{c}{k+2}$.
Après calcul, on obtient $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1/2}{k} - \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1/2}{k+2}$
ce qu'on peut ré-écrire : $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}-\dfrac{1}{k+1}\right)$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}) + \sum_{k=1}^{N}(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1})\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}-\frac{1}{2}\right)\Bigg)$$

en passant à la limite on obtient effectivement $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$.

2. On sait que X admet une espérance si et seulement si la série $\sum kP(X=k)$ est absolument convergente (c'est à dire tout simplement convergente, car elle est à termes positifs). Or :

$$kP(X=k) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \text{ après calcul.}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{N+2}$.
En passant à la limite, on en déduit que X admet une espérance et $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = \frac{1}{2}$.

3. On sait que X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance.
D'après le théorème de transfert, cela revient à savoir si la série $\sum k^2P(X=k)$ est convergente.
Or, $k^2P(X=k) = \dfrac{k^2}{k(k+1)(k+2)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k}$ et la série harmonique $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge.
Ainsi, X n'admet pas de variance !

Exercice 4 (Une variable à valeurs dans $\mathbb{Z}$)

1. On sait que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} P(X=n) = 1$, c'est à dire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=-n) + P(X=0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = 1$.
Ainsi : $\displaystyle 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+2}} + P(X=0) = 1$ i.e $\displaystyle\frac{2}{2^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}} + P(X=0) = 1$ i.e $\displaystyle\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} + P(X=0) = 1$.

Pour finir, on obtient $\frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + P(X=0) = 1$ et donc $P(X=0) = \frac{1}{2}$.

2. Pour que X admette une espérance, il faut que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} nP(X=n)$ soit <u>absolument convergente</u> : c'est important ici, car cette série comporte des termes négatifs ! Autrement dit, il faut que

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} |n|P(X=n) \text{ existe et soit finie.}$$

Pour $N \geqslant 0$ fixé, on calcule :

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N} |n|P(X=n) &= \sum_{n=-N}^{-1} (-n)P(X=n) + |0|P(X=0) + \sum_{n=1}^{N} nP(X=n)\\ &= \sum_{n=1}^{N} nP(X=-n) + \sum_{n=1}^{N} nP(X=n) = 2\sum_{n=1}^{N} n\frac{1}{2^{n+2}}.\end{aligned}$$

Ceci admet bien une limite finite quand $N \to +\infty$ puisque la série $\sum n\frac{1}{2^{n+2}}$ est convergente
(par exemple parce que c'est presque une série géométrique dérivée, ou bien parce que $n\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$)
Ainsi, X admet bien une espérance et :

$$E(X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} nP(X=n) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} nP(X=n).$$

En calculant de nouveau, pour $N \geqslant 0$ fixé :

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N} nP(X=n) &= \sum_{n=-N}^{-1} nP(X=n) + 0P(X=0) + \sum_{n=1}^{N} nP(X=n)\\ &= \sum_{n=1}^{N}(-n)P(X=-n) + \sum_{n=1}^{N} nP(X=n)\\ &= -\sum_{n=1}^{N} n\frac{1}{2^{n+2}} + \sum_{n=1}^{N} n\frac{1}{2^{n+2}} = 0.\end{aligned}$$

On a ainsi $E(X) = \lim_{N\to+\infty} 0 = 0$.
C'était en fait prévisible puisque la loi de probabilité de X est en quelque sorte "symétrique" par rapport à 0 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X=-n) = P(X=n)$.

Exercice 5 (Highscore)
Pour tout $i \geqslant 1$, notons A_i = "Le joueur parvient à compléter le niveau numéro i". On a alors :

- $[X=0] = \overline{A_1}$ donc $P(X=0) = 1 - P(A_1) = 1 - 1 = 0$.
- Pour tout $k \geqslant 1$, $[X=k] = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}$.

Attention : ces évènements ne sont pas indépendants ! (Par exemple, si A_1 n'est pas réalisé, on sait que A_2 ne peut pas l'être non plus...) On utilise donc plutôt la formule des probabilités composées :

$$P(X=k) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1\cap\ldots A_{k-1}}(A_k) \times P_{A_1\cap\ldots A_k}(\overline{A_{k+1}}).$$

D'après l'énoncé, ceci donne :

$$P(X=k) = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \ldots \times \frac{1}{k} \times \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k!} \times \frac{(k+1)-1}{k+1} = \frac{k}{k! \times (k+1)} = \frac{k}{(k+1)!}.$$

2. D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $X+1$ admet une espérance si et seulement la série $\sum (k+1)P(X=k)$ est (absolument) convergente, et dans ce cas $E(X+1) = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)P(X=k)$.

Or, pour tout $N \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{N}(k+1)P(X=k)=\sum_{k=1}^{N}(k+1)P(X=k)=\sum_{k=1}^{N}\frac{(k+1)k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(k-1)!}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{n!}.$$

On reconnait une série exponentielle qui est bien convergente !
Ainsi, $X+1$ admet une espérance, et en passant à la limite,

$$E(X+1)=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)P(X=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e^1=e.$$

On en déduit finalement que X admet une espérance et $E(X)=E(X+1-1)=E(X+1)-1=e-1$.
En moyenne, le joueur parvient à compléter $e-1\simeq 1,7$ niveaux.

Exercice 6 (Premier "Pile-Face" pour une pièce biaisée)

1. X peut prendre la valeur 0 (par convention) et les valeurs $2,3,4,\ldots$, mais pas la valeur 1 !
Ainsi $X(\Omega)=\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

2. (a) Pour tout $i\in\mathbb{N}^*$ notons $A_i=$ "Obtenir Pile au i-ème lancer ". On a alors :

- $[X=2]=A_1\cap\overline{A_2}$.

Ainsi : $P(X=2)=pq$.

- $[X=3]=(A_1\cap A_2\cap\overline{A_2})\cup(\overline{A_1}\cap A_2\cap\overline{A_2})$ (Pile, Pile, Face ou alors Face, Pile, Face).

Ainsi : $P(X=3)=ppq+qpq=p^2q+q^2p$

- $[X=4]=(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\overline{A_4})\cup(\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3\cap\overline{A_4})\cup(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3\cap\overline{A_4})$

(Pile, Pile, Pile, Face ou alors Face, Pile, Pile, Face ou alors Face, Face, Pile, Face).
Ainsi : $P(X=4)=p^3q+qp^2q+q^2pq=p^3q+p^2q^2+pq^3$.

(b) Soit $n\geqslant 2$. Listons toutes les possibilités conduisant à l'évènement $[X=n]$:

$\underbrace{\text{Pile Pile Pile}\ldots\text{Pile Pile}}_{n-1\text{ fois}}$ Face réalisé avec probabilité : $p^{n-1}q$

Face $\underbrace{\text{Pile Pile}\ldots\text{Pile Pile}}_{n-2\text{ fois}}$ Face réalisé avec probabilité : $p^{n-2}q^2$

Face Face $\underbrace{\text{Pile}\ldots\text{Pile Pile}}_{n-3\text{ fois}}$ Face réalisé avec probabilité : $p^{n-3}q^3$

$\vdots$

Face Face Face ... Face $\underbrace{\text{Pile}}_{1\text{ fois}}$ Face réalisé avec probabilité : pq^{n-1}

On obtient ainsi effectivement

$$P(X=n)=p^{n-1}q+p^{n-2}q^2+p^{n-3}q^3+\ldots+pq^{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}p^{n-k}q^k.$$

2.(c) Pour tout $n\geqslant 2$,

$$\begin{aligned}P(X=n)&=\sum_{k=1}^{n-1}p^{n-k}q^k=p^n\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^k=p^n\times\frac{\frac{q}{p}-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\frac{q}{p}}\\&=p^n\times\frac{q-\frac{q^n}{p^{n-1}}}{p-q}=p\times\frac{p^{n-1}q-q^n}{p-q}\\&=pq\times\frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q}=\frac{pq}{p-q}(p^{n-1}-q^{n-1}).\end{aligned}$$

3. On doit avoir $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)}P(X=x)=1$, c'est à dire $\displaystyle P(X=0)+\sum_{n=2}^{+\infty}P(X=n)=1$.

Ainsi $P(X=0) = 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n)$. On calcule à l'aide de l'expression précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{pq}{p-q}(p^{n-1} - q^{n-1}) = \frac{pq}{p-q}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} p^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} q^{n-1}\right) \\
&= \frac{pq}{p-q}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} p^{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n}\right) = \frac{pq}{p-q}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^{n} - 1 - (\sum_{n=0}^{+\infty} q^{n} - 1)\right) \\
&= \frac{pq}{p-q}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} q^{n}\right) = \frac{pq}{p-q}\left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-q}\right).
\end{aligned}$$

En se rappelant que $1-p=q$ et $1-q=p$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n) &= \frac{pq}{p-q}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \\
&= \frac{pq}{p-q} \times \frac{p-q}{pq} = 1.
\end{aligned}$$

On conclut bien que $P(X=0) = 1-1 = 0$.

4. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum nP(X=n)$ est (absolument convergente). Pour tout $N \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} nP(x=n) &= \frac{pq}{p-q}\sum_{n=2}^{N}(np^{n-1} - nq^{n-1}) = \frac{pq}{p-q}\left(\sum_{n=2}^{N} np^{n-1} - \sum_{n=2}^{N} nq^{n-1}\right) \\
&= \frac{pq}{p-q}\left(\sum_{n=1}^{N} np^{n-1} - 1 - \left(\sum_{n=1}^{N} nq^{n-1} - 1\right)\right) \\
&= \frac{pq}{p-q}\left(\sum_{n=1}^{N} np^{n-1} - \sum_{n=1}^{N} nq^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

On repère bien-sûr des séries géométriques dérivées qui sont convergentes car $p, q \in]0,1[$. Ainsi, X admet une espérance et en passant à la limite :

$$E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} nP(X=n) = \frac{pq}{p-q}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} np^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}\right) = \frac{pq}{p-q}\left(\frac{1}{(1-p)^2} - \frac{1}{(1-q)^2}\right)$$

En se rappelant à nouveau que $1-p=q$ et $1-q=p$:

$$E(X) = \frac{pq}{p-q}\left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{pq}{p-q} \times \frac{p^2-q^2}{p^2q^2} = \frac{pq}{p-q} \times \frac{(p-q)(p+q)}{p^2q^2} = \frac{p+q}{pq}.$$

Finalement, puisque $p+q = p+(1-p) = 1$: $E(X) = \dfrac{1}{pq}$.

5. On cherche d'abord à calculer $E(X(X-1))$, c'est à dire à montrer que la série $\sum n(n-1)P(X=n)$ est (absolument) convergente. Le calcul est très similaire à la question précédente :

$$\sum_{n=2}^{N} n(n-1)P(X=n) = \frac{pq}{p-q}\left(p\sum_{n=2}^{N} n(n-1)p^{n-2} - q\sum_{n=2}^{N} n(n-1)q^{n-2}\right).$$

On reconnait des séries géométriques dérivées secondes qui sont bien convergentes.
En passant à la limite, on apprend que $X(X-1)$ admet une espérance et que

$$\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \frac{pq}{p-q}\left(p\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)p^{n-1} - q\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-1}\right) = \frac{pq}{p-q}\left(\frac{2p}{(1-p)^3} - \frac{2q}{(1-q)^3}\right) \\
&= \frac{2pq}{p-q}\left(\frac{p}{q^3} - \frac{q}{p^3}\right) = \frac{2pq}{p-q} \times \frac{p^4-q^4}{p^3q^3} = \frac{2(p^3+p^2q+pq^2+q^3)}{p^2q^2}
\end{aligned}$$

On a ici utilisé l'identité remarquable $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.
Pour finir, on en déduit que $X^2 = X(X-1) + X$ admet une espérance et

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = \frac{2(p^3 + p^2q + pq^2 + q^3)}{p^2q^2} + \frac{1}{pq}. = \frac{2(p^3 + p^2q + pq^2 + q^3) + pq}{p^2q^2}.$$

Pour finir, X admet une variance et

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2(p^3 + p^2q + pq^2 + q^3) + pq}{p^2q^2}. - \frac{1}{p^2q^2} = \frac{2(p^3 + p^2q + pq^2 + q^3) + pq - 1}{p^2q^2}.$$

Exercice 7 (Faces précédant Pile)

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
2. En posant $Y = X + 1$, la variable aléatoire Y est le numéro du premier lancer où l'on obtient Pile.
On reconnait donc $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)$. On a ainsi $E(Y) = \frac{1}{1/2} = 2$ et $V(Y) = \dfrac{1-(1/2)}{(1/2)^2} = 2$.
Par linéarité, on en déduit $E(X) = E(Y-1) = E(Y) - 1 = 1$ et $V(X) = V(Y-1) = V(Y) = 2$.

Exercice 8 (Poule pondeuse)

1. (a) Si l'on sait que l'évènement $[N = n]$ est réalisé, on sait que la poule a pondu n oeufs.
Chacun de ces n oeufs a une probabilité p de donner un poussin, indépendamment des autres.
Dans ce cas, le nombre X de poussins obtenus suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P_{[N=n]}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{(qui est nulle lorsque } k > n\text{)}.$$

(b) En utilisant le système complet d'évènements associé à N : $([N = n])_{n\in\mathbb{N}}$,
on applique la formule des probabilités totales. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) P_{[N=n]}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-3}\frac{3^n}{n!} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-3}\frac{3^n}{n!} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-3}\frac{3^n}{n!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= e^{-3}\frac{1}{k!} p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{3^n}{(n-k)!}(1-p)^{n-k} = e^{-3}\frac{1}{k!} p^k 3^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{3^{n-k}}{(n-k)!}(1-p)^{n-k} \\
&= e^{-3}\frac{(3p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(3(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-3}\frac{(3p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3(1-p))^{n}}{n!} \\
&= e^{-3}\frac{(3p)^k}{k!} \times e^{3(1-p)} = e^{-3}\frac{(3p)^k}{k!} \times e^3 e^{-3p} = e^{-3p}\frac{(3p)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

On reconnait donc la loi de Poisson : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(3p)$.

2. On en déduit que X admet une espérance et une variance et que $E(X) = V(X) = 3p$.

Exercice 9 (Autour de la loi géométrique)

1. Rappelons que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On calcule :

$$\begin{aligned}
P(\text{"}X \text{ est pair"}) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 2n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{2n-1} p = \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^n \\
&= \frac{p}{1-p} \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} ((1-p)^2)^n - 1 \right) = \frac{p}{1-p} \times \left(\frac{1}{1-(1-p)^2} - 1 \right) \\
&= \frac{p}{1-p} \times \left(\frac{1}{2p - p^2} - 1 \right) = \frac{p}{1-p} \times \frac{1 - 2p + p^2}{p(2-p)} = \frac{p}{1-p} \times \frac{(1-p)^2}{p(2-p)} = \frac{1-p}{2-p}.
\end{aligned}$$

On a donc les équivalences suivantes :

$$P(\text{"}X \text{ est pair"}) < \frac{1}{2} \iff \frac{1-p}{2-p} < \frac{1}{2} \iff 2(1-p) < 2-p \iff 2 - 2p < 2 - p \iff -2p < -p \iff 0 < p$$

---

ce qui est bien vrai ! Ainsi, X a plus de chance d'être impaire.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = P(X = n) = (1-p)^{n-1}p$.
Puisque $(1-p) \in]0,1[$, il est évident que cette suite est strictement décroissante. En effet, par exemple :

$$\forall n \geqslant 1,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = (1-p) < 1.$$

Ainsi, u_1 est la valeur maximale de cette suite.
Autrement dit, la valeur que X prend avec la plus grand probabilité est 1.

3. Soit $a > 0$. Pour tout $N \geqslant 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} a^n P(X=n) = \sum_{n=1}^{N} a^n (1-p)^{n-1} p = \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{N} (a(1-p))^n = \frac{p}{1-p} \left(\sum_{n=0}^{N} (a(1-p))^n - 1 \right).$$

Cette série géométrique est convergente si et seulement si $a(1-p) \in]-1,1[$, c'est à dire lorsque $a < \dfrac{1}{1-p}$.
Dans ce cas, en passant à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient :

$$E(a^X) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n P(X=n) = \frac{p}{1-p} \left(\frac{1}{1-a(1-p)} - 1 \right) = \frac{p}{1-p} \times \frac{a(1-p)}{1-a(1-p)} = \frac{ap}{1-a(1-p)}.$$

Exercice 10 (Autour de la loi de Poisson)

1. On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On calcule :

$$P(\text{"}X \text{ est pair"}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = 2n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}.$$

En notant $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$ et $T = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!}$, on remarque classiquement que :

$$S + T = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda} \quad \text{et} \quad S - T = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} = e^{-\lambda}.$$

En sommant ces deux égalité, on obtient $2S = e^{\lambda} + e^{-\lambda}$, et donc $S = \dfrac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}$. Ainsi en revenant à la probabilité :

$$P(\text{"}X \text{ est pair"}) = e^{-\lambda} \times \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}.$$

Puisque $e^{-2\lambda} > 0$, cette probabilité est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$. Ainsi X a plus de chance d'être paire.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = P(X = n) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}$.
Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = \dfrac{\lambda}{n}$. On a donc les équivalences : $u_n \geqslant u_{n-1} \iff \dfrac{\lambda}{n} \geqslant 1 \iff n \leqslant \lambda \iff n \leqslant \lfloor \lambda \rfloor$.
(Puisque, par définition, $\lfloor \lambda \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à λ).
Ainsi, la suite est croissante jusqu'à l'indice $n = \lfloor \lambda \rfloor$, puis elle est décroissante.
La valeur maximale atteinte par cette suite est donc $u_{\lfloor \lambda \rfloor}$.
Autrement dit, la valeur que X prend avec la plus grand probabilité est $\lfloor \lambda \rfloor$.

3. Soit $a > 0$. Pour tout $N \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a^n P(X=n) = \sum_{n=0}^{N} a^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{N} \frac{(a\lambda)^n}{n!}$.
On reconnait une série exponentielle qui est donc convergente.
En passant à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient : $E(a^X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n P(X=n) = e^{-\lambda} e^{a\lambda} = e^{(a-1)\lambda}$.