

Nombres réels, fonctions numériques

Exercice 1 (Calculs de sup et inf)

• $A =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. On a donc $\inf(A) = -\sqrt{2}$ et $\sup(A) = \sqrt{2}$. Pas de minimum ni de maximum

• On a $0 \in B$ et 0 est un minorant de B . Ainsi $\min(B) = \inf(B) = 0$.

Il est "clair" que $\sup(B) = 1$. Ce n'est pas un maximum.

• Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = xe^{-x}$. Après étude rapide de cette fonction, on obtient $C = f(\mathbb{R}_+) =]0, e^{-1}]$.
On a donc $\inf(C) = 0$ (pas de minimum) et $\max(C) = \sup(C) = e^{-1}$.

• Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on a

$$(x+y)^2 \geq 0 \iff x^2 + y^2 + 2xy \geq 0 \iff 2xy \geq -x^2 - y^2 \iff \frac{2xy}{x^2 + y^2} \geq -1.$$

Ceci montre que D est minoré par -1 . De plus $-1 \in D$ puisqu'on peut écrire par exemple $-1 = \frac{2 \times 1 \times (-1)}{1^2 + (-1)^2}$.

On a donc $\min(D) = -1 = \inf(D)$. De la même façon, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on a :

$$(x-y)^2 \geq 0 \iff x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \iff x^2 + y^2 \geq 2xy \iff 1 \geq \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Ceci montre que D est majoré par 1. De plus $1 \in D$ puisqu'on peut écrire par exemple $1 = \frac{2 \times 1 \times 1}{1^2 + 1^2}$.

On a donc $\max(D) = 1 = \sup(D)$.

Exercice 2 (Exercice d'abstraction)

Montrons d'abord que A est majoré. Soit $y \in B$ fixé (existe puisque $B \neq \emptyset$). On sait que $\forall x \in A, x \leq y$.
Ceci montre que A est majoré par y .

Puisque A est non-vidé est majoré, on peut introduire sa borne supérieure $\sup(A)$.

Puisque $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A et que y est un majorant de A , on a $\sup(A) \leq y$.

Ce raisonnement est valable quel que soit $y \in B$. On obtient donc aussi $\forall y \in B, \sup(A) \leq y$.

Ceci montre que B est minoré par $\sup(A)$.

Puisque B est non-vidé est minoré, on peut introduire sa borne inférieure $\inf(B)$.

Puisque $\inf(B)$ est le plus grand des minorants de B et que $\sup(A)$ est un minorant de B , on a $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 3 (Disjonctions de cas)

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } |4x+2| = \begin{cases} -(4x+2) & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \\ 4x+2 & \text{si } x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad |2-5x| = \begin{cases} 2-5x & \text{si } x \leq \frac{2}{5} \\ -(2-5x) & \text{si } x \geq \frac{2}{5} \end{cases}$$

Ainsi :

- Si $x \leq -\frac{1}{2}$, $|4x+2| - |2-5x| = -(4x+2) - (2-5x) = x-4$,
- Si $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{5}$, $|4x+2| - |2-5x| = 4x+2 - (2-5x) = 9x$,
- Si $x > \frac{2}{5}$, $|4x+2| - |2-5x| = 4x+2 + 2-5x = -x+4$.

Exercice 4 ((In)équations)

(a) $|x-3| \geq 4 \iff (x-3 \leq -4) \text{ ou } (x-3 \geq 4) \iff x \leq -1 \text{ ou } x \geq 7$.

(b) $|x^2-1| \leq 3 \iff -3 \leq x^2-1 \leq 3 \iff -2 \leq x^2 \leq 4 \iff x^2 \leq 4 \iff -2 \leq x \leq 2$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|2x-4| = \begin{cases} -2x+4 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x-4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad |x+3| = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x \leq -3 \\ x+3 & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$

Ainsi :

$$|2x-4| = |x+3| \iff \begin{cases} x \leq -3 & \text{et} & -2x+4 = -x-3 \\ -3 < x \leq 2 & \text{et} & -2x+4 = x+3 \\ x > 2 & \text{et} & 2x-4 = x+3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -3 & \text{et} & x = 7 \\ -3 < x \leq 2 & \text{et} & x = \frac{1}{3} \\ x > 2 & \text{et} & x = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \text{ou} \\ x = 7 \end{cases}$$

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|\frac{1}{x} - 3| \leq 2 \iff -2 \leq \frac{1}{x} - 3 \leq 2 \iff 1 \leq \frac{1}{x} \leq 5 \iff \frac{1}{5} \leq x \leq 1$.

Exercice 5 (Partie entière)

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

• On sait que $\lfloor x \rfloor \leq x$ et $\lfloor y \rfloor \leq y$ donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y$.

Ainsi $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à $x + y$.

Puisque $\lfloor x + y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $x + y$, on en déduit : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

• On sait que $\lfloor x + y \rfloor \leq x + y$ avec $x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $y < \lfloor y \rfloor + 1$.

On a donc $\lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$. Puisqu'il s'agit d'entiers, cela revient à dire $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Ainsi on a montré que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Puisqu'il s'agit d'entiers, cet encadrement montre que l'on a toujours $\lfloor x + y \rfloor = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \\ \text{ou bien} \\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1. \end{cases}$

Exemples : Pour $x = 1$ et $y = 1$, on a $\lfloor x + y \rfloor = 2 = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

Pour $x = 1.5$ et $y = 2.5$, on a $\lfloor x + y \rfloor = 4 = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Par définition, $\lfloor x + n \rfloor$ est l'unique entier $N \in \mathbb{Z}$ satisfaisant l'encadrement $N \leq x + n < N + 1$.

Or on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < (\lfloor x \rfloor + n) + 1$.

Ainsi, l'entier $N = \lfloor x \rfloor + n \in \mathbb{Z}$ satisfait l'encadrement précédent, c'est donc que $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor kx \rfloor = n \iff n \leq kx < n + 1 \iff \frac{n}{k} \leq x < \frac{n + 1}{k}.$$

Exercice 6 (Fonctions "quasi-usuelles")

Dessins faciles.

On pourra retenir que la transformation $x \mapsto f(x) + a$ correspond à translater le graphe de f "de a vers le haut" et que la transformation $x \mapsto f(x + a)$ correspond à translater le graphe de f "de a vers la gauche".

Exercice 7 (Étude "sans dériver")

(a) • Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

• Pas de parité, pas de périodicité.

• Tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$\parallel 0$	$\parallel +\infty$	$\parallel 0$
		\searrow	\searrow
		$-\infty$	

• Fonction non bornée.

(b) • Domaine de définition : $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

• g est $\frac{\pi}{2}$ périodique $\left(\forall x \in D_g, g(x + \frac{\pi}{2}) = \tan(2(x + \frac{\pi}{2})) = \tan(2x + \pi) = \tan(2x) = g(x) \right)$.

• Tableau de variations sur $] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$:

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$g(x)$	\parallel	$\parallel +\infty$
	\nearrow	
	$-\infty$	

• Fonction non bornée.

(c) • Domaine de définition : $D_h = \mathbb{R}$.

• h est clairement paire.

• Tableau de variations : h est clairement croissante sur \mathbb{R}_+ , le reste est rempli "par symétrie".

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

• Fonction bornée. Minimum atteint en 0 : $\min(h) = -\frac{\pi}{4}$. Pas de maximum, mais $\sup(h) = \frac{\pi}{2}$.

(d) • Domaine de définition : $D_u = \mathbb{R}_+^*$.

• Pas de parité, pas de périodicité.

• Tableau de variations : les fonctions $x \mapsto x^{-1/4}$ et $x \mapsto -4x^{1/4}$ sont strictement décroissantes sur \mathbb{R}_+^* .

Il en va donc de même pour leur somme.

x	0	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	0

• Fonction non majorée. Pas de minimum, mais $\inf(u) = 0$.

(e) La fonction \ln étant strictement croissante, le sens de variation de v est le même que le sens de variation de $f : x \mapsto -x^2 + 4x - 3$. Etudions rapidement cette fonction polynomiale.

$\Delta = 4^2 - 4 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$. On a donc deux racines : $x_1 = \frac{-4-2}{-2} = 3$ et $x_2 = \frac{-4+2}{-2} = 1$.

Le "sommet" de la parabole est au milieu des racines : point d'abscisse $x = \frac{3+1}{2} = 2$.

f admet ainsi le tableau de variations suivant sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	1	0	$-\infty$

Par suite, on a le domaine de définition de la fonction $v : D_v = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} =]1, 3[$.

Et pour finir, le tableau de variations de $v : x \mapsto \ln(f(x))$ sur $]1, 3[$:

x	1	2	3
$v(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

Exercice 8 ((In)équations)

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2 \leq \lfloor 2x + 1 \rfloor \leq 4 \iff 2 \leq 2x + 1 < 5 \iff 1 \leq 2x < 4 \iff \frac{1}{2} \leq x < 2$.

(b) L'équation n'a de sens que pour $x > 0$. Pour tout $x > 0$,

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \iff \exp(\sqrt{x} \ln(x)) = \exp(x \ln(\sqrt{x})) \iff \sqrt{x} \ln(x) = x \ln(\sqrt{x}) \iff \sqrt{x} \ln(x) = \frac{1}{2} x \ln(x).$$

On voit que $x = 1$ est une solution de l'équation.

En supposant à présent $x \neq 1$, on a $\ln(x) \neq 0$ et on peut poursuivre les équivalences :

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \iff \sqrt{x} = \frac{x}{2} \iff 1 = \frac{\sqrt{x}}{2} \iff \sqrt{x} = 2 \iff x = 4.$$

Les deux solutions sont donc $x = 1$ ou $x = 4$.

(c) Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on sait que $\tan(x) > 1 \iff x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.

Par π -périodicité de \tan , l'ensemble de toutes les solutions est : $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque 1, $\arctan(x)$ et $\frac{\pi}{3}$ appartiennent à l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ où la fonction \tan est strictement croissante, on a :

$$1 < \arctan(x) < \frac{\pi}{3} \iff \tan(1) < x < \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff \tan(1) < x < \sqrt{3}.$$

Attention, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, mais $\tan(1)$ n'est pas une valeur connue ! On a $\tan(1) \simeq 1,557...$

Exercice 9 ("Exposant variable")

1. Il faut penser à écrire : $\forall x \in I, f(x) = e^{v(x) \ln(u(x))}$.

Ceci a bien un sens puisque par hypothèse : $\forall x \in I, u(x) > 0$.

En admettant que tout est dérivable, on obtient :

$$\forall x \in I, f'(x) = \left(v'(x) \ln(u(x)) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right) e^{v(x) \ln(u(x))}.$$

2. Posons $f(x) = (1+x)^x = e^{x \ln(1+x)}$.

Ceci est bien défini lorsque $1+x > 0$, c'est à dire sur le domaine $D_f =]-1, +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et

$$\forall x > -1, f'(x) = \left(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \right) e^{x \ln(1+x)}.$$

Le signe de cette expression est le même que celui de $\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$.

• Pour $-1 < x < 0$, on a $\ln(1+x) < 0$ et $\frac{x}{1+x} < 0$ donc $f'(x) < 0$.

• Pour $x > 0$, on a $\ln(1+x) > 0$ et $\frac{x}{1+x} > 0$ donc $f'(x) > 0$.

On a donc, pour finir, le tableau de variations suivant :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\left\ \begin{array}{ccc} +\infty & \searrow & 1 & \nearrow & +\infty \end{array} \right\ $		

Exercice 10 (La plus petite période)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\lfloor x+4 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 4$, donc :

$$f(x+4) = (x+4 - \lfloor x \rfloor - 4) \sin\left(\frac{\pi(x+4)}{2}\right) = (x - \lfloor x \rfloor) \sin\left(\frac{\pi x}{2} + 2\pi\right) = (x - \lfloor x \rfloor) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = f(x).$$

Ceci montre que f est 4-périodique.

2. (a) Soit $p > 0$. Supposons que f est p -périodique. En particulier, on a :

$$f(p) = f(0) \iff (p - \lfloor p \rfloor) \times \sin\left(\frac{\pi p}{2}\right) = 0 \iff p = \lfloor p \rfloor \quad \text{ou} \quad \sin\left(p \times \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

L'égalité $p = \lfloor p \rfloor$ équivaut à dire que p est un entier. L'égalité $\sin\left(p \times \frac{\pi}{2}\right) = 0$ équivaut à dire que p est un entier (et même un entier pair). Dans tous les cas, on peut conclure que $p \in \mathbb{N}$.

(b) On a déjà vérifié que 4 est une période de f . Vérifions que c'est la plus petite des périodes possibles. Supposons que l'on ait $p > 0$ une période de f avec $p < 4$. D'après 2.(a), p est un entier, donc $p \in \{1, 2, 3\}$. Or, on peut vérifier que f n'est ni 2-périodique, ni 3-périodique.

Par exemple, $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - 0) \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ mais :

$$\bullet f\left(\frac{1}{2} + 2\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \neq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\bullet f\left(\frac{1}{2} + 3\right) = f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \neq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Enfin, f ne peut pas être 1-périodique, car elle serait alors automatiquement 2-périodique...

Ceci montre que la plus petite période de f est 4.

Exercice 11 (Antécédents par cos, sin, tan)

$$\begin{aligned} \bullet \cos^{-1}(\{0\}) &= \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} & \bullet \cos^{-1}(\{1\}) &= \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} & \bullet \cos^{-1}(\{-1\}) &= \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\ \bullet \sin^{-1}(\{0\}) &= \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} & \bullet \sin^{-1}(\{1\}) &= \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} & \bullet \sin^{-1}(\{-1\}) &= \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \\ \bullet \tan^{-1}(\{0\}) &= \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} & \bullet \tan^{-1}(\{1\}) &= \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} & \bullet \tan^{-1}(\{-1\}) &= \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

Exercice 12 ((In)équations)

(a) Pour $x \in [0, 2\pi]$, $\cos(x) \leq \frac{1}{2} \iff x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right]$.

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \leq \frac{1}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right] \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right]$.

(b) Pour $y \in [-\pi, \pi]$, $\sin(y) \geq -\frac{1}{2} \iff y \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right]$.

Ainsi, pour $y \in \mathbb{R}$, $\sin(y) \geq -\frac{1}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right] \iff y \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right]$.

Pour finir, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin(2x) \geq -\frac{1}{2} &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x \in \left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi \right] \\ &\iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi \right]. \end{aligned}$$

Exercice 13 (Des formules de trigo)

Toutes ces formules se retrouvent facilement à partir des formules connues pour l'addition :

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) \quad \text{et} \quad \sin(x + y) = \cos(x) \sin(y) + \sin(x) \cos(y).$$

• Deux premiers points : choisir $x = a$ et $y = -b$. Utiliser la parité de cos et l'imparité de sin.

• $\cos(2a) = \cos(a + a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2$. Or on a $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Ainsi, $\cos(2a) = \cos(a)^2 - (1 - \cos(a)^2)$ soit $\cos(2a) = \cos(a)^2 - 1$. On en déduit bien $\cos(a)^2 = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$.

• Pour $\sin(a)^2$: de même que pour le point précédent.

• Deux derniers points : partir du membre de droite, calculer $\cos(a + b)$ et $\cos(a - b)$ puis simplifier.

Exercice 14 ($\cos \circ \arctan$)

Soit $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a $\tan(t)^2 = \frac{\sin(t)^2}{\cos(t)^2} = \frac{1 - \cos(t)^2}{\cos(t)^2} = \frac{1}{\cos(t)^2} - 1$.

On en déduit que $\frac{1}{\cos(t)^2} = 1 + \tan(t)^2$ et donc $\cos(t)^2 = \frac{1}{1 + \tan(t)^2}$.

En se rappelant que $\cos(t) > 0$ pour $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on peut même écrire $\cos(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan(t)^2}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en choisissant $t = \arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on obtient :

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan(\arctan(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Exercice 15 (Décomposition paire + impaire)

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ fixée. Montrons qu'il existe un unique couple (g, h) de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que :

$$\boxed{1} \quad g \text{ est paire} \quad \boxed{2} \quad h \text{ est impaire} \quad \boxed{3} \quad f = g + h.$$

Analyse : Supposons que l'on dispose d'un tel couple (g, h) .

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = g(x) + h(x)$

mais également $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$ par parité/imparité. Ainsi :
$$\begin{cases} g(x) + h(x) = f(x) \\ g(x) - h(x) = f(-x) \end{cases}$$

En sommant ces deux équations, on obtient $2g(x) = f(x) + f(-x)$ soit $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$.

En prenant soustrayant la seconde ligne à la première, on obtient $2h(x) = f(x) - f(-x)$ soit $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Ainsi, si des fonctions g et h satisfont $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$, ce sont nécessairement les fonctions :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}$$

Synthèse : Inversement, les fonctions g et h que l'on vient d'identifier satisfont bien $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$:

$$\boxed{1} \quad g \text{ paire} \quad \left(\text{car } \forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x) \right)$$

$$\boxed{2} \quad h \text{ impaire} \quad \left(\text{car } \forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x) \right)$$

$$\boxed{3} \quad f = g + h \quad \left(\text{car } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x) \right)$$

On a bien montré le résultat attendu.

Exercice 16 (Périodique et monotone)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x + np) = f(x)$.

Initialisation : $f(x + 0 \times p) = f(x)$ évidemment.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(x + np) = f(x)$ et montrons que $f(x + (n+1)p) = f(x)$.

Comme f est p -périodique, on a $\forall y \in \mathbb{R}, f(y + p) = f(y)$, donc ici :

$$f(x + (n+1)p) = f((x + np) + p) = f(x + np) = f(x).$$

2. Puisque x et y sont des réels fixés, il est évident que $x + np \geq y$ si l'on choisit un entier $n \in \mathbb{N}$ assez grand...

• Première justification : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x + np) = +\infty$, donc on aura $x + np \geq y$ à partir d'un certain rang.

• Deuxième justification : $x + np \geq y \iff n \geq \frac{y-x}{p}$. Il suffit de choisir par exemple $n = \left\lfloor \frac{y-x}{p} \right\rfloor + 1$.

3. Soit f une fonction périodique (disons de période $p > 0$) et monotone.

Supposons par exemple que f est croissante (l'autre cas est similaire).

On souhaite montrer que f est constante.

Soient donc $x, y \in \mathbb{R}$ fixés : démontrons que $f(x) = f(y)$.

• Supposons que $x \leq y$. Alors comme f est croissante, on a $f(x) \leq f(y)$.

De plus, on sait qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x + np \geq y$.

Par croissance de f , on a alors $f(x + np) \geq f(y)$, c'est à dire $f(x) \geq f(y)$ par périodicité.

Ceci montre que $f(x) = f(y)$.

• Si on est dans l'autre cas $y \leq x$, même raisonnement en inversant le rôle de x et de y ...

On obtient de même $f(x) = f(y)$.

Ainsi quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(y)$: f est une fonction constante !
