Samedi 9 Novembre 2024

Devoir Sur Table n°2 – Corrigé

Exercice 1 : Etude d'une suite récurrente

1. On a $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 1}$. On peut donc proposer le programme suivant :

```python
def suite(n) :
    u = 2
    for k in range(n) : # n passages de boucle
        u = (4*u - 1)/(u + 1)
    return u
```

   Autrement, on peut également définir en amont la fonction f :

```python
def f(x) :
    y = (4*x - 1)/(x+1)
    return y

def suite(n) :
    u = 2
    for k in range(n) :
        u = f(u)
    return u
```

2. (a) Plusieurs possibilités ici. On peut essayer de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant u_n \leqslant 3$.
   Mais pour répondre rapidement au 2.(a) et 2.(b), on peut aussi étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x-1}{x+1}$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \dfrac{4(x+1) - (4x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{5}{(x+1)^2} > 0$.
   f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a le tableau de variations suivant sur $[2,3]$:

x	2	3
$f(x)$	$\frac{7}{3}$ $\nearrow$	$\frac{11}{4}$

   On voit ainsi que $f([2,3]) = [\frac{7}{3}, \frac{11}{4}]$, donc en particulier $\boxed{f([2,3]) \subset [2,3]}$. (car $2 \leqslant \frac{7}{3}$ et $\frac{11}{4} \leqslant 3$)
   A partir de là, il est clair par récurrence immédiate que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \in [2,3]}$.
   Initialisation : $u_0 = 2 \in [2,3]$.
   Hérédité : Su $u_n \in [2,3]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in f([2,3]) \subset [2,3]$ donc $u_{n+1} \in [2,3]$.

   (b) Plusieurs possibilités également.
   En utilisant le fait que $u_n \in [2,3]$, on peut montrer que $u_{n+1} - u_n > 0$.
   Autrement, avec l'étude de fonction précédente, on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$.
   Initialisation : On calcule $u_1 = \dfrac{4 \times 2 - 1}{2+1} = \dfrac{7}{3} > 2 = u_0$. On a donc bien $u_0 < u_1$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $u_n < u_{n+1}$. Alors, puisque f est strictement croissante sur $[2,3]$, $f(u_n) < f(u_{n+1})$, c'est à dire $u_{n+1} < u_{n+2}$, ce qui achève la récurrence.
   Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}}$.

3. Puisque (u_n) est croissante (d'après 2.(b)) et majorée par 3 (d'après 2.(a)), d'après le théorème de la limite monotone on en déduit que $\boxed{u_n \text{ converge vers un réel } \alpha}$.
   De plus, en passant à la limite dans l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant u_n \leqslant 3$, on apprend déjà que $2 \leqslant \alpha \leqslant 3$.
   Enfin, en passant à la limite dans l'égalité $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, (par continuité de f), on obtient :

$$\alpha = f(\alpha) \iff \alpha = \frac{4\alpha - 1}{\alpha + 1} \iff \alpha(\alpha+1) = 4\alpha - 1 \iff \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$$

On résout cette équation : $\Delta = (-3)^2 - 4 = 5 > 0$. On en déduit que $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou $\alpha = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Mais rappelons que $\alpha \geqslant 2$... Puisque $5 > 4$, on a $\sqrt{5} > 2$, et donc $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < \dfrac{3-2}{2} = \dfrac{1}{2} < 2$.

Cette deuxième valeur est donc exclue ! Ainsi, finalement, $\boxed{\alpha = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$.

4. (a) Soit $x, y \geqslant 2$, on a :

$$f(x)-f(y) = \frac{4x-1}{x+1} - \frac{4y-1}{y+1} = \frac{(4x-1)(y+1)-(4y-1)(x+1)}{(x+1)(y+1)} = \frac{5x-5y}{(x+1)(y+1)} = \frac{5(x-y)}{(x+1)(y+1)}.$$

Ainsi, en passant à la valeur absolue :

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{5(x-y)}{(x+1)(y+1)}\right| = \frac{|5(x-y)|}{|(x+1)(y+1)|} = \frac{5|x-y|}{(x+1)(y+1)}.$$

Enfin, puisque $x, y \geqslant 2$, on a $\dfrac{1}{(x+1)(y+1)} \leqslant \dfrac{1}{3 \times 3} = \dfrac{1}{9}$.

On obtient donc bien : $\boxed{|f(x)-f(y)| \leqslant \dfrac{5}{9}|x-y|}$. (et c'est valable quels que soient $x, y \geqslant 2$)

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{5}{9}\right)^n |2-\alpha|$.

<u>Initialisation :</u> On a $|u_0 - \alpha| = |2-\alpha| \leqslant \left(\frac{5}{9}\right)^0 |2-\alpha|$.
<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{5}{9}\right)^n |2-\alpha|$ et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{5}{9}\right)^{n+1} |2-\alpha|$.
En se rappelant que $u_{n+1} = f(u_n)$ et aussi que $\alpha = f(\alpha)$ (point fixe de f), on a :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| &\leqslant \frac{5}{9}|u_n - \alpha| \quad \text{(d'après l'inégalité du 4.(a))} \\ &\leqslant \frac{5}{9} \times \left(\frac{5}{9}\right)^n |2-\alpha| \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(\frac{5}{9}\right)^{n+1} |2-\alpha|. \end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence.

(c) On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{5}{9}\right)^n |2-\alpha|$.

Puisque $\dfrac{5}{9} \in]0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{9}\right)^n = 0$.

D'après le théorème des gendarmes ("version valeur absolue"),
on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$, c'est à dire $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$.

Problème : Formule de Bâle via les polynômes de Tchebychev

Partie I - Etude de (s_n) et (s'_n)

1.
```python
def somme(n) :
    s = 0
    for k in range(1,n+1) : # k = 1, 2, ... , n
        s = s + 1 / k ** 2
    return s
```

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = s_n + \frac{1}{n}$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_{n+1} - s_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc $\boxed{(s_n) \text{ est croissante}}$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= s_{n+1} + \frac{1}{n+1} - (s_n + \frac{1}{n}) = (s_{n+1} - s_n) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{n + n^2 + n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{(t_n) \text{ est décroissante}}$.
   - Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} (t_n - s_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (t_n - s_n) = 0}$.

   On a montré que les suites (s_n) et (t_n) sont adjacentes.

On en déduit en particulier que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel, que l'on note ℓ dans toute la suite.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sépare les indices pairs et impairs dans la somme s_{2n} :

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} \\ &= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{2^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = s'_n + \frac{1}{4} s_n \end{aligned}$$

   On a donc bien montré que $\boxed{s_{2n} = \dfrac{1}{4} s_n + s'_n}$.

   (b) Puisqu'on a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \ell$, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n} = \ell$.
   Il en résulte que $s'_n = s_{2n} - \frac{1}{4} s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \frac{1}{4}\ell = \frac{3}{4}\ell$.

   Ainsi, on a $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} s'_n = \ell' \text{ avec } \ell' = \dfrac{3}{4}\ell}$.

Partie II - Polynômes de Tchebychev

4. On a $T_0 = 1$, $T_1 = X$, puis $T_2 = 2XT_1 - T_0$ donc $\boxed{T_2 = 2X^2 - 1}$.
   Ensuite, $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2 - 1) - X$ donc $\boxed{T_3 = 4X^3 - 3X}$.
5. Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.
   Initialisation : On a $\deg(T_0) = \deg(1) = 0$ et $\deg(T_1) = \deg(X) = 1$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Supposons que $\deg(T_n) = n$ et $\deg(T_{n+1}) = n+1$. Montrons que $\deg(T_{n+2}) = n+2$.
Puisque $\deg(T_{n+1}) = n+1$, on a $\deg(2XT_{n+1}) = n+2$. Ainsi :

$$T_{n+2} = \underbrace{2XT_{n+1}}_{\text{degré } n+2} - \underbrace{T_n}_{\text{degré } n} \quad \text{est de degré } n+2.$$

Ceci achève la récurrence.

Par ailleurs, pour les mêmes raisons, on devine facilement que $\boxed{\text{le coefficient dominant de } T_n \text{ est } 2^{n-1}}$

6.
```
def tcheby(n,x) :
    a = 1 ; b = x
    for k in range( n ) : # n passages de boucle
        c = 2 * x * b - a
        a = b
        b = c
    return a
```

7. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = T_n(1)$.
On sait que $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$ donc en évaluant en 1, on obtient $\boxed{u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n}$.
On peut déterminer l'expression de u_n à l'aide de la méthode de l'équation caractéristique :

$$x^2 = 2x - 1 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0.$$

On a une unique solution $q = 1$. On en déduit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = (\lambda + \mu n) \times 1^n = \lambda + \mu n.$$

Avec les conditions initiales $u_0 = T_0(1) = 1$ et $u_1 = T_1(1) = 1$,
on obtient $\lambda = 1$ et $\lambda + \mu = 1$ donc $\mu = 0$.
Finalement, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = 1$, c'est à dire $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ T_n(1) = 1}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en dérivant l'égalité $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$, on obtient :

$$T'_{n+2}(X) = 2T_{n+1}(X) + 2XT'_{n+1}(X) - T'_n(X)$$

et donc en évaluant en 1 :

$$T'_{n+2}(1) = 2\underbrace{T_{n+1}(1)}_{=1} + 2T'_{n+1}(1) - T'_n(1)$$

On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \ T'_{n+2}(1) = 2 + 2T'_{n+1}(1) - T'_n(1)$.
A partir de cette relation, montrons par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}, \ T'_n(1) = n$.
Initialisation : $T_0(X) = 1$ donc $T'_0(X) = 0$ et donc $\underline{T'_0(1) = 0^2}$.
$T_1(X) = X$ donc $T'_1(X) = 1$ et donc $\underline{T'_1(1) = 1^2}$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Supposons que $T'_n(1) = n^2$ et $T'_{n+1}(1) = (n+1)^2$. Montrons que $T'_{n+2}(1) = (n+2)^2$. On a :

$$\begin{aligned} T'_{n+2}(1) &= 2 + 2T'_{n+1}(1) - T'_n(1) \\ &= 2 + 2(n+1)^2 - n^2 \\ &= 2 + 2n^2 + 4n + 2 - n^2 \\ &= n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2. \end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence.

8. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. D'après les formules d'additivité, on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et par parité/imparité} \quad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

En sommant ces deux égalités :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b).$$

En divisant par 2 on obtient bien $\boxed{\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)}$.

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Montrons par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
Initialisation : $T_0(X) = 1$ donc $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0 \times \theta)$.
$T_1(X) = X$ donc $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1 \times \theta)$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
Supposons que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et $T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)$.
Puisque $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$, on a :

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta) \times T_{n+1}(\cos(\theta)) - \cos(n\theta) \\
&= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\
&= 2 \times \frac{1}{2}\Big(\cos(\theta + (n+1)\theta) + \cos(\theta - (n+1)\theta)\Big) - \cos(n\theta) \quad \text{d'après le 8.(a)} \\
&= \cos((n+2)\theta) + \cos(-n\theta) - \cos(n\theta) \\
&= \cos((n+2)\theta).
\end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons, pour tout $k \in [\![1, n]\!],\ \theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$.

- On peut d'abord vérifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\cos(\theta_k)$ est une racine de T_n :

$$T_n(\cos(\theta_k)) = \cos(n\theta_k) = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right) = \cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - k\pi\right) = 0.$$

- Notons également que puisque $0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \pi$,
on a : $1 > \cos(\theta_0) > \cos(\theta_1) > \cos(\theta_2) > \ldots \cos(\theta_n) > 0$ (car cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$).
Ainsi, les valeurs $\cos(\theta_k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ sont toutes distinctes.

- Ainsi, T_n admet n racines distinctes. Or on a vu que $\deg(T_n) = n$, il ne peut donc pas avoir plus de racines, même comptées avec multiplicité ! Toutes ces racines sont donc simples.

- On en déduit que T_n se factorise sous la forme : $\quad T_n(X) = \lambda \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - \cos(\theta_k))$
où λ est le coefficient dominant de T_n, c'est à dire $\lambda = 2^{n-1}$ (cf question 5).
Ainsi, pour finir : $\boxed{T_n(X) = 2^{n-1} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - \cos(\theta_k))}$

Partie III - Décomposition de $\frac{P'}{P}$ pour un polynôme à racines simples

10. *Etude d'un exemple.*
On pose $P(X) = 2X^3 - 2X^2 - 18X + 18$.
On remarque d'abord que $P(1) = 0$, donc 1 est racine de P.
Ensuite, $P'(X) = 6X^2 - 4X - 18$ donc $P'(1) \neq 0$.
On cherche ensuite à écrire $P(X) = (X-1) \times Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.
En posant la division euclidienne, on trouve $P(X) = (X-1) \times (2X^2 - 18)$. Ainsi :

$$P(X) = (X-1) \times 2 \times (X^2 - 9) = 2(X-1)(X^2 - 3^2) = \boxed{2(X-1)(X-3)(X+3)}.$$

Ainsi $\boxed{P \text{ admet 3 racines simples : } \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = -3}$.
Vérifions ensuite la formule $(\star)$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3, -3\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \frac{1}{x-\alpha_3} &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} \\
&= \frac{(x-3)(x+3)}{(x-1)(x-3)(x+3)} + \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-3)(x+3)} + \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+3)} \\
&= \frac{(x-3)(x+3) + (x-1)(x+3) + (x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+3)} \\
&= \frac{3x^2 - 2x - 9}{(x-1)(x-3)(x+3)} \\
&= \frac{6x^2 - 4x - 18}{2(x-1)(x-3)(x+3)} = \frac{P'(x)}{P(x)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, effectivement, $\boxed{\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \dfrac{1}{x-\alpha_1} + \dfrac{1}{x-\alpha_2} + \dfrac{1}{x-\alpha_3}}$.

11. Soit P un polynôme de degré 1 quelconque : on peut donc l'écrire $P(X) = aX + b$ avec $a \neq 0$. Autrement dit, $P(X) = a(X + \frac{b}{a})$. Il admet donc une unique racine simple : $\alpha_1 = -\frac{b}{a}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$, on a alors :

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{a}{a(x+\frac{b}{a})} = \frac{1}{x+\frac{b}{a}} = \frac{1}{x-\alpha_1}.$$

$\boxed{\text{Ceci montre la formule } (\star) \text{ pour un polynôme de degré 1}}$.

12. On a $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n+1}(X-\alpha_k)$, c'est à dire $P(X) = (X-\alpha_{n+1}) \times Q(X)$ avec $Q(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)$.
En dérivant, $P'(X) = Q(X) + (X-\alpha_{n+1})Q'(X)$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}\}$, on a donc :

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{Q(x) + (x-\alpha_{n+1})Q'(x)}{(x-\alpha_{n+1})Q(x)} = \frac{1}{x-\alpha_{n+1}} + \frac{Q'(x)}{Q(x)}.$$

Or, puisque Q est de degré n et admet les racines simples $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, par hypothèse de récurrence on sait qu'on peut lui appliquer la formule $(\star)$:

$$\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-\alpha_k}.$$

En remplaçant, on obtient ainsi :

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-\alpha_{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-\alpha_k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{x-\alpha_k}.$$

$\boxed{\text{Ceci montre la formule } (\star) \text{ pour } P}$ et achève la récurrence.

Partie IV - Le grand final !

13. (a) On a vu en question 9. que T_n est de degré n et admet les racines simples $\cos(\theta_1), \cos(\theta_2), \dots, \cos(\theta_n)$. En lui appliquant la formule $(\star)$ établie en partie III, on en déduit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\cos(\theta_k),\ k \in [\![1,n]\!]\}, \quad \frac{T_n'(x)}{T_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-\cos(\theta_k)}}.$$

(b) En évaluant la formule précédente en $x = 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\cos(\theta_k)} = \frac{T_n'(1)}{T_n(1)}$.

Or on a vu en question 7. que $T_n(1) = 1$ et $T_n'(1) = n^2$. Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\cos(\theta_k)} = n^2}$.

(c) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin^2(\frac{\theta}{2}) = \dfrac{1-\cos(\theta)}{2}$, donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta_k}{2}\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{1-\cos(\theta_k)} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\cos(\theta_k)} = \boxed{2n^2}$$

(d) Pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\frac{1}{\tan^2(\theta)} = \frac{1}{\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} = \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \frac{1-\sin^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \boxed{\frac{1}{\sin^2(\theta)} - 1}.$$

On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\theta_k}{2}\right)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sin^2(\frac{\theta_k}{2})} - 1\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2(\frac{\theta_k}{2})} - \sum_{k=1}^{n} 1 = \boxed{2n^2 - n}.$$

14. On cherche à encadrer $s'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\frac{\theta_k}{2} = \frac{(2k-1)\pi}{4n} \in]0, \frac{\pi}{2}[$. (car $(2k-1) < 2n$)

On a donc l'encadrement (donnée par l'énoncé) :

$$\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right) \leqslant \frac{\theta_k}{2} \leqslant \tan\left(\frac{\theta_k}{2}\right) \quad \text{donc (tout est positif)} \quad \sin^2\left(\frac{\theta_k}{2}\right) \leqslant \left(\frac{\theta_k}{2}\right)^2 \leqslant \tan^2\left(\frac{\theta_k}{2}\right)$$

et donc $\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta_k}{2}\right)} \geqslant \frac{1}{\left(\frac{\theta_k}{2}\right)^2} \geqslant \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\theta_k}{2}\right)}$.

En sommant ces inégalités pour tous les $k \in [\![1, n]\!]$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta_k}{2}\right)} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{\theta_k}{2}\right)^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{\theta_k}{2}\right)}$$

c'est à dire (avec les sommes calculées dans les questions précédentes) :

$$2n^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{\theta_k^2} \geqslant 2n^2 - n.$$

Pour finir, en remplaçant θ_k par son expression : $\frac{4}{\theta_k^2} = \frac{16n^2}{(2k-1)^2\pi^2}$. L'encadrement devient donc :

$$2n^2 \geqslant \frac{16n^2}{\pi^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}}_{=s'_n} \geqslant 2n^2 - n.$$

En multipliant par $\frac{\pi^2}{16n^2}$, on obtient finalement : $\frac{2n^2\pi^2}{16n^2} \geqslant s'_n \geqslant \frac{(2n^2-n)\pi^2}{16n^2}$

c'est à dire, après simplification : $\boxed{\frac{(2n-1)\pi^2}{16n} \leqslant s'_n \leqslant \frac{\pi^2}{8}.}$

15. Pour déterminer $\ell' = \lim_{n\to+\infty} s'_n$, on utilise alors le théorème des gendarmes, en remarquant que

$$\frac{(2n-1)\pi^2}{16n} = \frac{n \times (2 - \frac{1}{n})\pi^2}{n \times 16} = \frac{(2 - \frac{1}{n})\pi^2}{16} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{8}.$$

s'_n est encadré par deux termes qui convergent vers $\frac{\pi^2}{8}$, on a donc $\boxed{\ell' = \frac{\pi^2}{8}}$.

Pour finir, il faut se rappeler que d'après 3.(b), $\ell' = \frac{3}{4}\ell$. On a donc $\ell = \frac{4}{3}\ell'$ soit finalement $\boxed{\ell = \frac{\pi^2}{6}}$.

<u>Conclusion :</u> On a montré que $\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{\pi^2}{6}$, c'est à dire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On a bien démontré la "formule de Bâle" énoncé dans l'introduction du problème.