Sommes et produits

Applications et calculs directs

Exercice 1 (Traduction)

Écrire avec les symboles $\sum$ ou $\prod$:

- $S_1 = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^n$.
- $S_2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2$.
- $S_3 = \ln(2) \times \ln(4) \times \ln(6) \times \ldots \times \ln(2n)$.
- $S_4 = (-1) \times 2 \times (-3) \times 4 \times \ldots \times (-49) \times 50$.
- $S_5 = \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$.
- $S_6 = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{5} - \dfrac{x^5}{6} + \dfrac{x^6}{7}$.

Exercice 2 (Factorielles)

1. Écrire à l'aide de factorielles :

a) $\dfrac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ b) $6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$.

2. Soit $n \geqslant 4$. Simplifier :.

a) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ b) $\dfrac{(n-1)!}{(n-4)!}$ c) $\dfrac{(n^2-1)n!}{n-1}$

3. Soient $m \leqslant n$ deux entiers.
Écrire à l'aide de factorielle le produit :
$m \times (m+1) \times (m+2) \times ... \times n$.

Exercice 3 (Calcul de sommes)

Calculer les sommes suivantes (où $n \geqslant 1$) :

- $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (2i + n + 3)$ • $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} n^3$ • $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2$
- $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p(p-1)$ • $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} k$ • $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (n+i)^2$
- $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{3^{k-2}}$ • $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-3)^{n-k}$ • $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{5^k - 2^{2k}}{2^k}$.

Exercice 4 (Calcul de produits)

Calculer les produits suivants ($n \geqslant 2$) :

- $\displaystyle\prod_{p=1}^{n} (p+1)^3$ • $\displaystyle\prod_{k=i}^{n} 2^i$ • $\displaystyle\prod_{p=1}^{n} \frac{2}{p^2}$
- $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ • $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)$

Exercice 5 (Exponentielle et logarithme)

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \exp(kx)$ • $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \exp(k+x)$
- $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \exp(kx)$ • $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \exp(k+x)$

2. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(kx)$ • $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(x^k)$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln(x))^k$ • $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \ln(x^k)$

Exercices classiques

Exercice 6 (Décomposition astucieuse)

1. Déterminer des constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \ \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.

2. En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 7 (Somme des carrés)

Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ((k+1)^3 - k^3)$.

En ré-exprimant S, retrouver la formule donnant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ à partir de celle donnant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

Exercice 8 (Sommes avec parité)

On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{n} k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n} k$.

Que vaut $S_n + T_n$? Calculer S_n et T_n.

On pourra distinguer les cas n pair ($n = 2p$) et n impair ($n = 2p + 1$).

Exercice 9 (Produits avec parité)

On pose : $P_n = \displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{n} k$ et $Q_n = \displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n} k$.

Que vaut $P_n \times Q_n$? Calculer P_n et Q_n.

On pourra distinguer les cas n pair ($n = 2p$) et n impair ($n = 2p + 1$).

Exercice 10 (Dérivation)
Calculer de deux manières différentes la dérivée de la fonction f définie par :
$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.
En déduire, pour $x \neq 1$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

Exercice 11 (Télescopage)
Soit $n \geqslant 2$. Calculer les sommes suivantes :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$
- $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k \times k!$
- $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!}$

Exercice 12 (Décomposition astucieuse II)
1. Déterminer des constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\}$,
$$\frac{2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$
2. En déduire l'expression de
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$.

Sommes doubles

Exercice 13 (Libres)
Calculer les sommes doubles suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} 2^{2i-j}$ b) $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant p}} 2$ c) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$

Exercice 14 (Avec contraintes)
Calculer les sommes doubles suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} 1$ b) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^3}{j^2}$ c) $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (i+j)$

Exercice 15 (En distinguant des cas)
Calculer les sommes doubles suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i,j)$ b) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$
c) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j|$

Exercice 16 (Somme et carré)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.
Justifier que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \geqslant 0$.