TP # 5

Etude de suites réelles

Dans les exercices, on utilisera régulièrement Python pour calculer numériquement les termes d'une suite et ainsi prévoir (entre autre) son sens de variation et sa limite éventuelle.

Suites définies explicitement

Rappel : Une suite u est définie "explicitement" si l'on dispose de l'expression de u_n en fonction de n : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)}$.

Les calculs numériques sont alors très faciles à faire en Python :

- On peut afficher la valeur d'un terme u_n en "traduisant" l'expression $f(n)$ en Python.
- On peut également afficher la liste des valeurs `[` $u_0, u_1, \ldots, u_n$ `]` à l'aide la syntaxe `[f(k) for k in range(0,n+1)]`.

Exercice 1

On considère la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1. Définir une fonction `u` qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de u_n.

Compléter les valeurs : $u_1 =$ ...... $u_2 \simeq$ .... $u_3 \simeq$ .... $u_4 \simeq$ ....

2. Définir une fonction `liste_u` qui prend en entrée un entier n et renvoie la liste des n premières valeurs de la suite u.

3. Dans la console, afficher les 100 premiers termes de la suite u. Conjecturer :

Sens de variation de u : .... $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ ....

Suites récurrentes (simples)

Rappel : Une suite u est définie par récurrence (simple) si l'on dispose de la valeur du premier terme et d'une relation liant u_{n+1} et u_n : $\boxed{u_0 = x \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)}$.

Pour calculer et afficher le terme u_n (pour un $n \in \mathbb{N}$ donné) :

```
u = x  # valeur initiale

for k in range(n) : # on passe n fois dans cette boucle

        u = f(u) # nouvelle valeur = f( ancienne valeur )

print(u) # apres n passages, on affiche (ou on renvoie) le resultat
```

Remarques 1

- A la place de `range(n)`, on aurait aussi pu mettre `range(1,n+1)` ici : l'important est de faire n passages dans la boucle !
- Si la suite ne démarre pas à l'indice 0 mais à l'indice 1 (avec donc $u_1 = x$), dans ce cas il faut seulement faire $n-1$ passages dans la boucle ! On mettra donc `range(n-1)` ou encore `range(1,n)`...

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Compléter la fonction suivante pour que `rec(n)` renvoie la valeur u_n.

```
import numpy as np

def rec(n):
```

2. Calculer ainsi quelques termes de la suite u. Conjecturer :

Sens de variation de u : .... $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ ....

Exercice 3

Soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\quad v_1=\dfrac{\pi}{2}\quad$ et $\forall n\geqslant 1,\ v_{n+1}=\sin(v_n)$.

1. Définir une fonction `rec2` de sorte que `rec2(n)` affiche le terme v_n.

2. Calculer ainsi quelques termes de la suite v. Conjecturer :

Sens de variation de v : .... $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=$ ....

Attention : si la relation de récurrence met aussi en jeu n $\Big(\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n,n).\Big)$ il faut bien faire attention aux valeurs prises par `k` dans la boucle, et pas seulement au nombre de passages.

Exercice 4

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\quad w_0=1\quad$ et $\quad\forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+1}=2w_n+3^n$.

Compléter la fonction suivante pour que `rec3(n)` renvoie le terme w_n.

```
def rec3(n):

    W = .....

    for k in ...................... :

        W = ..............................

    return(W)
```

Bonus : liste de termes d'une suite

Enfin, pour créer la liste `[` $u_0,u_1,\ldots,u_n$ `]` des premiers termes pour une suite récurrente, on peut utiliser la commande `append` (hors programme) qui permet d'ajouter une valeur à la fin d'une liste :

```
u = x  # valeur initiale
L = [x] # on remplit la liste avec la premiere valeur

for k in range(n) : # on passe n fois dans cette boucle

        u = f(u) # on "transforme" u en f(u)
        L.append(u) # on ajoute cette nouvelle valeur a la liste

print(L) # apres n passages, on affiche ou on renvoie la liste
```

(On verra plus tard une autre méthode, plus en phase avec le programme d'ECG)

Exercice 5

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\quad a_0=1\quad$ et $\quad\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=\dfrac{a_n+\frac{2}{a_n}}{2}$.

Proposer un programme qui affiche la liste des 100 premières valeurs de la suite.

Conjecturer :

Sens de variation de a : .... $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} a_n=$ ....