

Introduction aux espaces vectoriels

Motivation

Nous avons jusqu'ici rencontré de nombreux ensembles stables par addition et multiplication par un réel :

- Si f et g sont deux fonctions sur un domaine D et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $\lambda f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.
- Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $P + Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda P \in \mathbb{R}[X]$.
- Si $X = (x_1, \dots, x_p)$ et $Y = (y_1, \dots, y_p)$ sont deux solutions d'un système linéaire homogène et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $X + Y$ et λX sont aussi solutions.
- Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Nous allons unifier l'étude de tels ensembles en mettant en place une théorie générale, nécessairement abstraite pour pouvoir s'appliquer aux différents exemples ci-dessus.

Ces objets qui, selon le contexte, seront des fonctions, des polynômes, des matrices, des suites, des couples de réels, etc... seront appelés **vecteurs**.

L'ensemble E de ces vecteurs sera appelé un **espace vectoriel**.

Les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ par lesquels on multiplie seront appelés des **scalaires**.

Un tel ensemble E est ainsi muni de deux opérations : la somme qui est une loi de composition interne, et le produit par un scalaire qui est une loi de composition externe.

Définition 1 (Loi de composition interne / externe)

Soit E un ensemble.

Une loi de composition interne sur E est une application de $E \times E$ dans E .

Une loi de composition externe sur E est une application de $\mathbb{R} \times E$ dans E .

$$\begin{array}{ll} \text{Addition :} & \begin{array}{ccc} E \times E & \rightarrow & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} & \text{Produit par un scalaire :} & \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda, v) & \mapsto & \lambda \cdot v \end{array} \end{array}$$

Dans tout ce chapitre, on utilisera en général les notations u, v, w pour désigner des vecteurs, c'est à dire des éléments d'un espace vectoriel général E .

Bien-sûr, dans les exemples, on choisira des noms plus "appropriés" pour les vecteurs :

- Un "vecteur" de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ sera plutôt noté $f, g, h...$
- Un "vecteur" de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ sera plutôt noté $P, Q, R....$
- Un "vecteur" de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sera plutôt noté $A, B, M, etc...!$

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition et exemples fondamentaux

Définition 2 (Espace vectoriel)

On dit qu'un ensemble non-vide E est un **espace vectoriel** lorsque :

- E est muni d'une addition, notée $+$, satisfaisant :

(A1) (**Stabilité**) $\forall (u, v) \in E^2, u + v \in E$ ("+" est bien une loi de composition interne!)

(A2) (**Associativité**) $\forall (u, v, w) \in E^3, (u + v) + w = u + (v + w)$

(A3) (**Commutativité**) $\forall (u, v) \in E^2, u + v = v + u$

(A4) (**Existence d'un élément neutre**) Il existe un élément noté $0_E \in E$ tel que :

$$\forall v \in E, v + 0_E = 0_E + v = v.$$

(A5) (**Existence d'opposés**) Pour tout $v \in E$, il existe un élément noté $-v \in E$ tel que :

$$v + (-v) = (-v) + v = 0_E.$$

- E est muni d'une multiplication par un scalaire, notée \cdot , satisfaisant :

(M1) (**Stabilité**) $\forall (\lambda, v) \in \mathbb{R} \times E, \lambda \cdot v \in E$ ("." est bien une loi de composition externe!)

(M2) (**Distributivité à gauche**) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall v \in E, (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

(M3) (**Distributivité à droite**) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in E^2, \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

(M4) (**Multiplications successives**) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall v \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \times \mu) \cdot v = \mu \cdot (\lambda \cdot v)$

(M5) (**Multiplication par l'unité**) $\forall v \in E, 1 \cdot v = v$

Les éléments de $v \in E$ sont appelés des **vecteurs**, les éléments $\lambda \in \mathbb{R}$ sont appelés des **scalaires**.

Remarques 1

- Du fait de l'associativité (A2), on pourra noter sans ambiguïté $u + v + w$.
- L'élément neutre pour l'addition 0_E est en fait unique! On l'appelle **le vecteur nul de E** .
- L'addition $u + (-v)$ sera notée $u - v$: on définit la soustraction comme l'addition de l'opposé!
- Il arrivera souvent que l'on omette le point "." pour désigner la multiplication par un scalaire. On notera ainsi volontiers λv plutôt que $\lambda \cdot v$.

Théorème 1 (Espaces vectoriels fondamentaux)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\mathbb{R}^n} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n), x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ est un espace vectoriel.
- $\boxed{\mathbb{R}[X]}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})}$ est un espace vectoriel.
- $\boxed{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R} \right\}$ est un espace vectoriel
- Pour toute partie $D \subset \mathbb{R}$, $\boxed{\mathcal{F}(D, \mathbb{R})}$ est un espace vectoriel.

Preuve :

On a déjà vu que ces espaces étaient munis d'une addition et d'une multiplication par un scalaire. Il suffit de vérifier que toutes les propriétés de la définition précédentes sont satisfaites. \square

Addition, multiplication par un scalaire, vecteur nul dans ces espaces :

Dans \mathbb{R}^n : Pour tous $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u + v = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot u = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

$$\text{Le vecteur nul est : } 0_{\mathbb{R}^n} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n \text{ fois.}}$$

Exemple : Dans \mathbb{R}^3 , $(x, y, z) - 2(a, b, c) = (x - 2a, y - 2b, z - 2c)$.

Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: Pour tous $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Le vecteur nul est : $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})} = 0_{n,p}$ (matrice nulle de taille $n \times p$)

Exemple : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Dans $\mathbb{R}[X]$: Pour tous $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P + Q = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) X^k \quad \text{et} \quad \lambda \cdot P = \sum_{k=0}^n \lambda a_k X^k$$

Le vecteur nul est : $0_{\mathbb{R}[X]} = \text{Le polynôme nul (souvent noté 0)}$

Exemple : Dans $\mathbb{R}[X]$, $(3X^3 - X + 2) + 3 \cdot (2X^4 + X^2 - 1) = 6X^4 + 3X^3 + 3X^2 - X - 1$

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: Pour tous $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot u = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Le vecteur nul est : $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} = \text{La suite constante égale à 0 (souvent notée 0)}$

Exemple : Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n+1}$ et $v_n = 2^n$, alors $2u + v = w$, où $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{2}{n+1} + 2^n$.

Dans $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$: Pour tous $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot f : x \mapsto \lambda f(x)$$

Le vecteur nul est : $0_{\mathcal{F}(D, \mathbb{R})} = \text{La fonction constante égale à 0 sur } D \text{ (souvent notée 0)}$

Exemple : Si $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = x^2$ et $g(x) = e^x$, alors $\forall x \in [0, 1]$, $(f - g)(x) = x^2 - e^x$.

1.2 Propriétés additionnelles

A partir de la Définition 2 d'espace vectoriel, on a automatiquement les propriétés suivantes :

🚩 Proposition 1 ("Produit" nul)

Soit E un espace vectoriel. Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in E$, on a l'équivalences :

$$\lambda \cdot v = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } v = 0_E.$$

Preuve :

- Montrons le sens réciproque \Leftarrow :

- Vérifions que $0 \cdot v = 0_E$. Comme $0 = 0 + 0$, d'après (M2) : $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$.

En ajoutant l'opposé $-(0 \cdot v)$ de chaque côté, on obtient $0_E = 0 \cdot v$.

- Vérifions que $\lambda \cdot 0_E = 0_E$. Comme $0_E = 0_E + 0_E$, d'après (M3) : $\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$.

En ajoutant l'opposé $-(\lambda \cdot 0_E)$ de chaque côté, on obtient $0_E = \lambda \cdot 0_E$.

- Montrons le sens direct : \Rightarrow . Supposons $\lambda \cdot v = 0_E$. Alors :

- Soit $\lambda = 0$.

- Soit $\lambda \neq 0$ et alors, d'après (M5), (M4) et le point précédent :

$$v = 1 \cdot v = (\lambda^{-1} \times \lambda) \cdot v = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda^{-1} \cdot 0_E = 0_E. \quad \square$$

➡ Corollaire 1

Soit E un espace vectoriel. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in E$, on a les équivalences suivantes :

$$\bullet \lambda \cdot v = \mu \cdot v \iff \lambda = \mu \text{ ou } v = 0_E.$$

$$\bullet \lambda \cdot u = \lambda \cdot v \iff \lambda = 0 \text{ ou } u = v.$$

Preuve ("méthode" à retenir) :

$$\bullet \lambda \cdot v = \mu \cdot v \iff \lambda \cdot v - \mu \cdot v = 0_E \iff (\lambda - \mu) \cdot v = 0_E \iff \lambda - \mu = 0 \text{ ou } v = 0_E.$$

$$\bullet \lambda \cdot u = \lambda \cdot v \iff \lambda \cdot u - \lambda \cdot v = 0_E \iff \lambda \cdot (u - v) = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } u - v = 0_E. \quad \square$$

🚩 Proposition 2 (Propriétés liées à l'opposé)

Soit E un espace vectoriel. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites :

(a) L'élément neutre 0_E est unique.

(b) Chaque élément de E admet un unique opposé.

(c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in E, (-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$

Preuve :

(a) Supposons qu'il existe un autre élément neutre $0'_E$. Alors d'après (A4) avec $v = 0_E$ et $v = 0'_E$:

$$0_E + 0'_E = 0_E \text{ et } 0_E + 0'_E = 0'_E, \text{ d'où } 0_E = 0'_E.$$

(b) Soit $v \in E$. Supposons qu'il admet deux opposés v_1 et v_2 . Alors :

$$v + v_1 = 0_E \text{ donc } v + v_1 + v_2 = v_2 \text{ donc } \underbrace{(v + v_2)}_{0_E} + v_1 = v_2 \text{ donc } v_1 = v_2.$$

(c) On vérifie que $(-\lambda) \cdot v$ est l'opposé de $\lambda \cdot v$. D'après (M2) :

$$(-\lambda) \cdot v + \lambda \cdot v = (-\lambda + \lambda) \cdot v = 0 \cdot v = 0_E. \text{ Ainsi } (-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v).$$

On vérifie que $\lambda \cdot (-v)$ est aussi l'opposé de $\lambda \cdot v$. D'après (M3) :

$$\lambda \cdot (-v) + \lambda \cdot v = \lambda \cdot (-v + v) = \lambda \cdot 0_E = 0_E. \text{ Ainsi } \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v). \quad \square$$

1.3 Notion de combinaison linéaire de vecteurs

Dans cette section, on considère E un espace vectoriel fixé.

Définition 3 (Famille de vecteurs de E)

Une famille finie de E est une liste $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ de vecteurs de E .
On dit que $p \in \mathbb{N}^*$ est le "cardinal" de cette famille.

Attention !

Autrement dit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p) \in E^p$ est un p -uplet d'élément de E , et non une partie de E .
En particulier, il peut tout à fait y avoir des répétitions dans cette liste de vecteurs.

Exemples

- Une famille de 3 vecteurs de \mathbb{R}^2 : $\left((1, -1), (2, 0), (0, 1)\right)$
- Une famille de 2 vecteurs de \mathbb{R}^3 : $\left((1, 2, 3), (0, 0, -1)\right)$
- Une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}[X]$: $\left(1, 2X + 1, 3X^4 - 2X^2 + 1\right)$
- Une famille de 2 vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$

Définition 4 (Combinaison linéaire)

Soit (v_1, \dots, v_p) une famille de vecteurs de E .

On appelle **combinaison linéaire de la famille** (v_1, \dots, v_p) tout vecteur $v \in E$ de la forme :

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i \quad \text{avec } (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés les coefficients de cette combinaison linéaire.

On dit parfois plus simplement que v est "combinaison linéaire des vecteurs v_1, \dots, v_p ".

Remarque 2

Puisqu'un espace vectoriel est stable par addition et multiplication par un scalaire, toute combinaison linéaire de vecteurs de E est toujours un élément de E !

On peut ainsi dire qu'un espace vectoriel est "stable par combinaisons linéaires".

Exemples

- Dans \mathbb{R}^2 : le vecteur $v = (-5, 2)$ est une combinaison linéaire de $v_1 = (1, 2)$ et $v_2 = (3, 0)$
car : $(-5, 2) = (1, 2) - 2 \cdot (3, 0)$

 Dessin :

- Dans \mathbb{R}^3 : $(1, 0, 6)$ est une combinaison linéaire de $\left((1, 1, 1), (0, -1, 2), (0, 0, 1)\right)$ car :

$$(1, 0, 6) = (1, 1, 1) + (0, -1, 2) + 3 \cdot (0, 0, 1)$$

- Dans $\mathbb{R}[X]$: $(X - 3)^2$ est une combinaison linéaire de la famille $(1, X, X^2)$, car :

$$(X - 3)^2 = X^2 - 6X + 9 = 1 \cdot X^2 - 6 \cdot X + 9 \cdot 1$$

- Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: la fonction $\cosh : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (cosinus hyperbolique)

est une combinaison linéaire des vecteurs $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto e^{-x}$: $\cosh = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g$.

2 Sous-espaces vectoriels

Dans toute cette partie, on considère E un espace vectoriel fixé.

2.1 Définition, caractérisations, exemples.

Définition 5 (Sous-espace vectoriel de E)

On dit qu'une partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E lorsque :

- (a) $F \neq \emptyset$ (Non vide)
- (b) $\forall (u, v) \in F^2, u + v \in F$ (Stable par addition)
- (c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in F, \lambda \cdot v \in F$. (Stable par multiplication par un scalaire)

Remarque 3

Un espace vectoriel E contient toujours au moins deux sous-espaces vectoriels : E et $\{0_E\}$.
On les appelle parfois les sous-espaces vectoriels "triviaux".

Ces "trois conditions" à vérifier peuvent être réduites à deux conditions, pour une rédaction plus succincte :

Méthode : (Caractérisation pratique d'un sous-espace vectoriel)

Une partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- 1 $0_E \in F$
- 2 $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in F^2, u + \lambda \cdot v \in F$

On pourra donc rédiger ainsi :

- On a bien $0_E \in F$ (car ...)
- Soient $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $u + \lambda v \in F$...

Preuve de l'équivalence entre (a), (b), (c) et 1, 2 :

- Supposons (a), (b) et (c).

- D'après (a), $F \neq \emptyset$. On peut donc introduire $v \in F$.

Puis, d'après (c) avec $\lambda = 0$, on a $0 \cdot v \in F$, c'est à dire $0_E \in F$. On a bien montré 1.

- Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après (c) on a $\lambda \cdot v \in E$.

Puis, d'après (b), $\underbrace{u}_{\in E} + \underbrace{\lambda \cdot v}_{\in E} \in E$. On a bien montré 2.

- Supposons 1 et 2.

- D'après 1, $0_E \in F$ donc $F \neq \emptyset$. On a bien montré (a).

- D'après 2 avec $\lambda = 1 : \forall (u, v) \in F^2, u + v \in F$. On a bien montré (b).

- D'après 2 avec $u = 0_E : \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in F, \lambda \cdot v \in F$. On a bien montré (c). □

Remarques 4

- On peut aussi remplacer la condition 2 par : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (u, v) \in F^2, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.
et l'équivalence tient toujours.
- De manière générale, on voit que la Définition 5 garantit que :

Un sous-espace vectoriel F est "stable par combinaisons linéaires".

Autrement dit, toute combinaison linéaire de vecteurs de F reste un élément de F !

Exercice 1

1. Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
2. Montrer que $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

1.

- D'abord on a $(0, 0, 0) \in F$ car : $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 0 = 0$.
- Soient $v_1 = (x_1, y_1, z_1) \in F$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $v = v_1 + \lambda v_2 \in F$.

Par définition $v = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2) = (x, y, z)$

avec $x = x_1 + \lambda x_2$, $y = y_1 + \lambda y_2$, $z = z_1 + \lambda z_2$.

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 2(x_1 + \lambda x_2) - 3(y_1 + \lambda y_2) + (z_1 + \lambda z_2) \\ &= 2x_1 + 2\lambda x_2 - 3y_1 - 3\lambda y_2 + z_1 + \lambda z_2 \\ &= \underbrace{(2x_1 - 3y_1 + z_1)}_{=0 \text{ car } v_1 \in F} + \lambda \underbrace{(2x_2 - 3y_2 + z_2)}_{=0 \text{ car } v_2 \in F} = 0 \end{aligned}$$

On a bien montré que $v \in F$.

Conclusion : F est un SEV de \mathbb{R}^3 .

2.

- D'abord le polynôme nul appartient à G car pour $P = 0$ on a bien $P'(1) = 0$.
- Soient $P \in F$, $Q \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $P + \lambda Q \in F$.

On a :

$$(P + \lambda Q)'(1) = (P' + \lambda Q')(1) = \underbrace{P'(1)}_{=0 \text{ car } P \in G} + \lambda \underbrace{Q'(1)}_{=0 \text{ car } Q \in G} = 0.$$

On a bien montré que $P + \lambda Q \in G$.

Conclusion : G est un SEV de $\mathbb{R}[X]$.

Citons quelques exemples fondamentaux de sous-espaces vectoriels (se convaincre que se sont bien des SEV !) :

Exemples

- L'ensemble des solutions (x_1, \dots, x_n) d'un système linéaire homogène à n inconnues est toujours un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Exemple : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0 \text{ et } x - 2y = 0\}$ est un SEV de \mathbb{R}^3 .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

(**Attention** : L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$!)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet les sous-espaces vectoriels suivants :

- $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ ensemble des matrices triangulaires supérieures,
- $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$ ensemble des matrices triangulaires inférieures,
- $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices diagonales.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices symétriques.
- $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices anti-symétriques.

(**Attention** : L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles n'est pas un SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$!)

- Si I est un intervalle, $C(I, \mathbb{R})$, $D(I, \mathbb{R})$, $C^1(I, \mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

💬 Remarque 5

On a vu que tout sous-espace vectoriel de E contient automatiquement 0_E .

Ainsi, si $0_E \notin F$, alors F ne peut pas être un sous-espace vectoriel de E !

👉 Exemples

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n\}$ n'est pas un SEV de $\mathbb{R}[X]$ car **il ne contient pas le polynôme nul.**
- $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas un SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car **il ne contient pas la matrice nulle.**
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 3 = 1\}$ n'est pas un SEV de \mathbb{R}^3 car **il ne contient pas $(0, 0, 0)$.**
- Attention, $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y^2 = 0\}$ contient bien $(0, 0)$, mais ce n'est pas un SEV de \mathbb{R}^2 !
Par exemple : **on a $v = (-1, 1) \in G$ mais $-v = (1, -1) \notin G$.**

Bien-sûr, l'intérêt de parler de sous-espace vectoriel est le suivant :

🚩 Proposition 3 ("Un SEV est un EV!")

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

Les restrictions des opérations "+" et "." à F confèrent à F une structure d'espace vectoriel.

Autrement dit, un sous-espace vectoriel de E est lui-même un espace vectoriel, avec les mêmes "règles" d'addition et de multiplication par un scalaire que dans E .

Preuve :

On doit vérifier les différentes propriétés de la Définition 2 pour F .

Les stabilités (A1) et (M1) découlent de la définition de sous-espace vectoriel.

Les autres propriétés (associativité, commutativité, etc...) sont vraies pour des éléments de E , donc restent vraies en particulier pour des éléments de F (puisque $F \subset E$). □

Intérêt pratique : Pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on ne vérifiera jamais toutes les propriétés (A1)-(A5), (M1)-(M5) de la Définition 2 (ce serait pénible!). On se contentera en général de montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E connu ($\mathbb{R}^n, \mathbb{R}[X], \mathcal{M}_{n,p}(R)$, etc...)

✎ Exercice 2

Montrer que l'ensemble des suites réelles convergentes est un espace-vectoriel.

Notons cet ensemble : $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists \ell \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell\}$. On a bien-sûr $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- La suite nulle appartient à E (car elle converge vers 0).
- Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $w = u + \lambda v \in E$:

Puisque les suites u et v convergent, on sait que w , donnée par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + \lambda v_n$ converge aussi !
(vers $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$).

Donc $w \in E$.

Conclusion : E est un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, c'est donc un espace-vectoriel.

Terminons avec une dernière propriété générale :

🚩 Proposition 4 (Intersection de sous espaces vectoriels)

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

Preuve de la Proposition 4 :

Soient F_1, F_2 deux SEV de E . Montrons que $F_1 \cap F_2$ est un SEV de E :

- $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$, donc $0_E \in F_1 \cap F_2$.
- Soient $u \in F_1 \cap F_2$, $v \in F_1 \cap F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $u + \lambda v \in F_1 \cap F_2$.

Puisque $u, v \in F_1$ qui est un SEV de E : $u + \lambda v \in F_1$.

Puisque $u, v \in F_2$ qui est un SEV de E : $u + \lambda v \in F_2$.

Ainsi on a bien $u + \lambda v \in F_1 \cap F_2$. □

👉 Exemple

On a vu que $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(1) = 0\}$ est un SEV de $\mathbb{R}[X]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut affirmer que $G_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P'(1) = 0\}$ est aussi un SEV de $\mathbb{R}[X]$, car $G_n = G \cap \mathbb{R}_n[X]$ (et $\mathbb{R}_n[X]$ est un SEV de $\mathbb{R}[X]$).

⚠ Attention !

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , leur union $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E en général... (Chercher des contre-exemples!)

2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

📖 Définition 6 (Sous-espace vectoriel engendré par (v_1, \dots, v_p))

Soit (v_1, \dots, v_p) une famille de vecteurs de E .

On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** (v_1, \dots, v_p) , et on note $Vect(v_1, \dots, v_p)$, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de (v_1, \dots, v_p) . Autrement dit :

$$Vect(v_1, \dots, v_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \right\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de E .

Preuve du fait que c'est un SEV :

- On peut écrire $0_E = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_p$, c'est donc que $0_E \in Vect(v_1, \dots, v_p)$.
- Soient $u, v \in Vect(v_1, \dots, v_p)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Il existe donc des coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ et $(\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$$u = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{i=1}^p \mu_i v_i.$$

Vérifions que $u + \lambda v \in Vect(v_1, \dots, v_p)$: on peut écrire :

$$u + \lambda v = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i + \lambda \sum_{i=1}^p \mu_i v_i = \sum_{i=1}^p \underbrace{(\lambda_i + \lambda \mu_i)}_{=\lambda'_i \in \mathbb{R}} v_i.$$

On a bien écrit $u + \lambda v$ comme combinaison linéaire de (v_1, \dots, v_p) .

C'est donc que $u + \lambda v \in Vect(v_1, \dots, v_p)$. □

💬 Remarque 6

Notons que l'ordre des vecteurs (v_1, \dots, v_p) n'importe pas pour déterminer $Vect(v_1, \dots, v_p)$.

Exemple : $Vect(u, v, w) = Vect(v, u, w) = Vect(w, u, v)$ etc...

👉 Exemples

- Dans \mathbb{R}^2 : $Vect\left((1, 0), (0, 1)\right) = \{\lambda(1, 0) + \mu(0, 1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.
- Dans \mathbb{R}^3 :
 $Vect\left((1, -1, 0), (2, 1, 1)\right) = \{\lambda(1, -1, 0) + \mu(2, 1, 1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda + 2\mu, -\lambda + \mu, \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$
- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\right\} = D_2(\mathbb{R}).$
- Dans $\mathbb{R}[X]$: $Vect(1, X, X^2) = \{a + bX + cX^2, a, b, c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_2[X].$

On peut voir $Vect(v_1, \dots, v_p)$ comme "le plus petit" sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs v_1, \dots, v_p :

🚩 Proposition 5 (Espace vectoriel contenant une famille)

Si un espace vectoriel F contient les vecteurs v_1, \dots, v_p , alors $Vect(v_1, \dots, v_p) \subset F$.

Preuve :

C'est évident puisqu'un espace vectoriel F est "stable par combinaison linéaire" :
s'il contient les vecteurs v_1, \dots, v_p alors il doit contenir tous les vecteurs de la forme $v = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i$. \square

✎ Exercice 3

Montrer que $Vect\left((1, 2), (0, 3)\right) = Vect\left((1, 0), (0, 1)\right)$.

Notons $F = Vect\left((1, 2), (0, 3)\right)$ et $G = Vect\left((1, 0), (0, 1)\right)$.

- On a $(1, 2) = (1, 0) + 2 \cdot (0, 1)$ donc $(1, 2) \in Vect\left((1, 0), (0, 1)\right)$ i.e $(1, 2) \in G$.
- On a $(0, 3) = 0 \cdot (1, 2) + 3(0, 1)$ donc $(0, 3) \in Vect\left((1, 0), (0, 1)\right)$ i.e $(0, 3) \in G$.

Comme G est un espace-vectoriel, on en déduit que $Vect\left((1, 2), (0, 3)\right) \subset G$, i.e $F \subset G$.

Inversement,

- On a $(1, 0) = \dots\dots\dots$ donc $(1, 0) \in F$.
- On a $(0, 1) = \dots\dots\dots$ donc $(0, 1) \in F$ (faites-le!)

Comme F est un espace vectoriel, on en déduit que $Vect\left((1, 0), (0, 1)\right) \subset F$, i.e $G \subset F$.

Conclusion : $F = G$.

💬 Remarque 7

Ainsi, des familles de vecteurs différentes peuvent très bien engendrer le même sous-espace vectoriel !

Théorème 2 ("Simplification d'un Vect")

Soit (v_1, \dots, v_p) une famille de vecteur de E .

L'espace vectoriel $Vect(v_1, v_2, \dots, v_p)$ reste inchangé par les opérations suivantes :

(a) Changer l'ordre des vecteurs de la famille.

(b) Multiplier un vecteur par une constante non nulle :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, Vect(\lambda v_1, v_2, \dots, v_p) = Vect(v_1, v_2, \dots, v_p).$$

(c) Additionner à un vecteur un autre vecteur de la famille, multiplié par une constante :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, Vect(v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_p) = Vect(v_1, v_2, \dots, v_p).$$

(d) Retirer de la famille un vecteur qui est combinaison linéaire des autres :

$$\text{Si } v_1 \in Vect(v_2, \dots, v_p), Vect(v_1, v_2, \dots, v_p) = Vect(v_2, \dots, v_p).$$

En particulier, on peut toujours supprimer le vecteur nul : $Vect(0_E, v_2, \dots, v_p) = Vect(v_2, \dots, v_p)$

Preuve rapide :

(a) Propriété déjà évoquée en Remarque 6. Pour toutes les autres, on procède par double inclusion :

(b) • Soit $x \in Vect(\lambda v_1, v_2, \dots, v_p)$. Alors x s'écrit sous la forme :

$$x = \lambda_1(\lambda v_1) + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = (\lambda_1 \lambda) v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p \in Vect(v_1, v_2, \dots, v_p).$$

• Inversement, soit $x \in Vect(v_1, v_2, \dots, v_p)$. Alors x s'écrit sous la forme :

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = \frac{\lambda_1}{\lambda}(\lambda v_1) + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p \in Vect(\lambda v_1, v_2, \dots, v_p).$$

(c) • Soit $x \in Vect(v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_p)$. Alors x s'écrit sous la forme :

$$x = \lambda_1(v_1 + \lambda v_2) + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = \lambda_1 v_1 + (\lambda_1 \lambda + \lambda_2) v_2 + \dots + \lambda_p v_p \in Vect(v_1, v_2, \dots, v_p).$$

• Inversement, soit $x \in Vect(v_1, v_2, \dots, v_p)$. Alors x s'écrit sous la forme :

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = \lambda_1(v_1 + \lambda v_2) + (\lambda_2 - \lambda_1 \lambda) v_2 + \dots + \lambda_p v_p \in Vect(v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_p).$$

(d) On suppose que $v_1 \in Vect(v_2, \dots, v_p)$, donc on peut l'écrire sous la forme : $v_1 = \sum_{i=2}^p \mu_i v_i$.

• Soit $x \in Vect(v_1, v_2, \dots, v_p)$. Alors x s'écrit sous la forme :

$$x = \lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^p \lambda_i v_i = \lambda_1 \left(\sum_{i=2}^p \mu_i v_i \right) + \sum_{i=2}^p \lambda_i v_i = \sum_{i=2}^p (\lambda_1 \mu_i + \lambda_i) v_i \in Vect(v_2, \dots, v_p).$$

• Inversement, soit $x \in Vect(v_2, \dots, v_p)$. Alors x s'écrit sous la forme :

$$x = \sum_{i=2}^p \lambda_i v_i = 0 \cdot v_1 + \sum_{i=2}^p \lambda_i v_i \in Vect(v_1, v_2, \dots, v_p).$$

□

Remarque 8

Les propriétés (a), (b), (c) rappellent les "**opérations élémentaires**" sur les lignes d'un système ou d'une matrice : $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

On pourra ainsi utiliser une suite d'opérations similaire au **pivot de Gauss** pour "simplifier des Vect", en retirant au fur et à mesure les vecteurs "redondants" !

Méthode : "Simplifier un Vect"

En partant de $Vect(v_1, \dots, v_p)$:

- Effectuer des "opérations élémentaires" (changer, au besoin, l'ordre des vecteurs)
- Dès que l'on repère qu'un vecteur est combinaison linéaire des autres, on peut le supprimer.
- En particulier, on peut toujours supprimer le vecteur nul.

Exercice 4

1. Simplifier le SEV de \mathbb{R}^3 : $F = Vect\left((1, 1, -1), (0, 0, 0), (-1, -1, 1), (0, 2, 1), (1, -1, -2), (1, 3, 0)\right)$ (jusqu'à ce qu'on ne puisse plus "retirer" de vecteurs.)
2. Déterminer plus simplement le SEV de $\mathbb{R}[X]$: $Vect(X + X^3, 1, X, X^2 + 1, X^3)$.

1. • Déjà on peut retirer le vecteur nul : $F = Vect\left((1, 1, -1), (-1, -1, 1), (0, 2, 1), (1, -1, -2), (1, 3, 0)\right)$

• On a $(-1, -1, 1) = -(1, 1, -1)$: il est donc combinaison linéaire des autres vecteurs.

On peut le retirer : $F = Vect\left((1, 1, -1), (0, 2, 1), (1, -1, -2), (1, 3, 0)\right)$

• Pour simplifier d'avantage, on peut aligner les vecteurs verticalement "comme une matrice", et effectuer le Pivot de Gauss :

$$F = Vect \begin{pmatrix} (1, 1, -1) \\ (0, 2, 1) \\ (1, -1, -2) \\ (1, 3, 0) \end{pmatrix} = Vect \begin{pmatrix} (1, 1, -1) \\ (0, 2, 1) \\ (0, -2, -1) \\ (0, 2, 1) \end{pmatrix}$$

On voit déjà à ce stade que l'on peut retirer $(0, -2, -1)$ et $(0, 2, 1)$, qui sont combinaisons linéaires des autres vecteurs. Ou alors on poursuit le "pivot" :

$$F = Vect \begin{pmatrix} (1, 1, -1) \\ (0, 2, 1) \\ (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) \end{pmatrix} = Vect \begin{pmatrix} (1, 1, -1) \\ (0, 2, 1) \end{pmatrix}$$

Finalement : $F = Vect\left((1, 1, -1), (0, 2, 1)\right)$.

(On voit qu'on ne peut pas simplifier davantage car aucun de ces deux vecteurs n'est combinaison linéaire de l'autre).

2. Déjà, on peut retirer $X + X^3$ qui est combinaison linéaire de X et X^3 :

$$Vect\left(X + X^3, 1, X, X^2 + 1, X^3\right) = Vect\left(1, X, X^2 + 1, X^3\right) = Vect\left(1, X, X^2, X^3\right)$$

Notons que, par définition : $Vect\left(1, X, X^2, X^3\right) = \left\{a + bX + cX^2 + dX^3, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\right\} = \mathbb{R}_4[X]$.

Ainsi, $Vect\left(X + X^3, 1, X, X^2 + 1, X^3\right) = \mathbb{R}_4[X]$.

3 Familles génératrices, familles libres, bases

Dans toute cette partie, on considère E un espace vectoriel fixé.

3.1 Familles génératrices

Définition 7 (Famille génératrice d'un espace vectoriel)

On dit qu'une famille (v_1, \dots, v_p) de vecteurs de E est **une famille génératrice de E** (ou bien qu'elle "engendre" E) lorsque :

Tout vecteur $v \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire de (v_1, \dots, v_p) .

c'est à dire :

$$\forall v \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

ou, pour le dire autrement :

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_p) = E.$$

Exemples

Dans \mathbb{R}^2 :

- Tout vecteur $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire :

$$(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1).$$

N'importe quel vecteur de \mathbb{R}^2 s'écrit donc comme combinaison linéaire de $(0, 1)$ et $(1, 0)$:

$((1, 0), (0, 1))$ est une famille génératrice de \mathbb{R}^2 .

 Dessin :

$$\begin{aligned} \bullet \text{Vect}((1, 1), (1, 2)) &= \text{Vect}((1, 1), (0, 1)) \\ &= \text{Vect}((1, 0), (0, 1)) = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

 Dessin :

donc $((1, 1), (1, 2))$ est aussi une famille génératrice de \mathbb{R}^2 .

Exemple

Dans \mathbb{R}^n : Tout vecteur $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot (1, 0, \dots, 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n \cdot (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Donc en notant, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{i-ème coordonnée}}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

on voit que (e_1, e_2, \dots, e_n) est une famille génératrice de \mathbb{R}^n .

Exemple

$$\begin{aligned} \text{Notons que } \mathbb{R}_n[X] &= \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq n \right\} = \left\{ a_0 1 + a_1 X + \dots + a_n X^n, (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \right\} \\ &= \text{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^n). \end{aligned}$$

Ainsi $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

☞ Méthode : Montrer qu'une famille est génératrice d'un espace vectoriel E

Pour montrer qu'une famille (v_1, \dots, v_p) est génératrice d'un espace vectoriel E , on peut :

- Introduire $v \in E$ quelconque et montrer qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p$. (Cela revient à résoudre un système linéaire d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.)
- En "simplifiant le Vect" à l'aide d'opérations élémentaires, montrer que $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p) = E$.

Exercice 5

Montrer que la famille $\left((1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, -1)\right)$ est génératrice de \mathbb{R}^3 .

Appliquons par exemple la méthode 1 :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque. Montrons que l'on peut trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x, y, z) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 1) + c(0, 1, -1).$$

Cette égalité équivaut à :

$$(x, y, z) = (a + b, b + c, a + b - c) \iff \begin{cases} a + b = x \\ b + c = y \\ a + b - c = z \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = x \\ b + c = y \\ -c = z - x \end{cases}$$

On voit que ce système admet une solution (et même une unique solution!).

Il existe donc bien de tels réels a, b, c . Conclusion : la famille est génératrice.

☞ Méthode : Déterminer une famille génératrice d'un espace vectoriel E

- 1 Si l'ensemble E est donné "sous forme explicite", reconnaître qu'il s'agit d'un ensemble de combinaisons linéaires, et l'écrire comme un "Vect" : on en déduit une famille génératrice.
- 2 Si l'ensemble E est donné "sous forme implicite", le ré-exprimer sous forme explicite. Appliquer alors le point 1.

(On cherchera souvent à obtenir **une famille génératrice avec le moins de vecteurs possibles**)

Exercice 6

1. Montrer que $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un SEV de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une famille génératrice.
2. Donner une famille génératrice de l'ensemble des solutions du système homogène suivant :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$$

3. Montrer que $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$ est un SEV de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déterminer une famille génératrice.

$$1. E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

C'est donc bien un SEV de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une famille génératrice est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

2. On sait que F est un SEV de \mathbb{R}^3 car c'est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène ! Ensemble sous forme implicite...

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y + z = -2y - \frac{3}{2}y = -\frac{7}{2}y \\ z = -\frac{3}{2}y \end{cases}$$

Ainsi on a explicité l'ensemble des solutions :

$$F = \left\{ \left(-\frac{7}{2}y, y, -\frac{3}{2}y \right), y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \left(-\frac{7}{2}, 1, -\frac{3}{2} \right), y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\left(-\frac{7}{2}, 1, -\frac{3}{2} \right) \right) = \text{Vect} \left((-7, 2, -3) \right).$$

F est donc généré par un seul vecteur : $(-7, 2, -3) \in F$. (On dira que c'est une "droite vectorielle")

3. Ensemble G sous forme implicite : explicitons-le ! Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} P(1) = 0 &\iff (X - 1) \text{ divise } P \iff \exists Q \in \mathbb{R}_2[X], P = (X - 1)Q \quad (\text{car } \deg(Q) = \deg(P) - 1 \leq 2) \\ &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, P = (X - 1)(aX^2 + bX + c). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} G &= \left\{ (X - 1)(aX^2 + bX + c), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ a(X - 1)X^2 + b(X - 1)X + c(X - 1), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect} \left((X - 1)X^2, (X - 1)X, X - 1 \right) \end{aligned}$$

G est donc bien un SEV de $\mathbb{R}[X]$ et une famille génératrice est : $\left((X - 1)X^2, (X - 1)X, X - 1 \right)$.

3.2 Familles liées, familles libres

Si (v_1, \dots, v_p) est une famille de vecteur de E , il existe toujours une combinaison linéaire de ces vecteurs qui donne le vecteur nul : la **combinaison linéaire triviale** qui consiste à poser $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$:

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_p = 0_E.$$

📖 Définition 8 (Famille liée / Famille libre)

- On dit qu'une famille (v_1, \dots, v_p) de vecteurs de E est une **famille liée** lorsqu'il existe une combinaison linéaire non-triviale de ces vecteurs qui donne le vecteur nul.

Autrement dit, la famille (v_1, \dots, v_p) est liée si et seulement si :

$$\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0), \quad \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0_E.$$

- On dit qu'une famille (v_1, \dots, v_p) de vecteurs de E est une **famille libre** lorsqu'elle n'est pas liée : seule la combinaison linéaire triviale peut donner le vecteur nul.

Autrement dit, la famille (v_1, \dots, v_p) est libre si et seulement si :

$$\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0)$$

⚠ Attention !

Dans la définition de famille liée : $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$ signifie qu'au moins un des λ_i est non nul (et non pas que chaque coefficient λ_i est non nul !)

Une autre caractérisation, plus intuitive, de la notion de famille liée/libre est la suivante :

🚩 Proposition 6 (Famille liée et "vecteur redondant")

La famille (v_1, \dots, v_p) est liée si et seulement si l'un des vecteurs de la famille peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres. Autrement dit, (v_1, \dots, v_p) est liée si et seulement si :

$$\exists i_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad v_{i_0} \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_{i_0-1}, v_{i_0+1}, \dots, v_p)$$

À l'inverse, la famille (v_1, \dots, v_p) est libre si et seulement si aucun vecteur ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

Preuve :

- Supposons (v_1, \dots, v_p) liée : il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = 0_E$.

Au moins l'un des coefficients est non nul, disons $\lambda_{i_0} \neq 0$ pour un $i_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

On a donc :

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = 0_E \iff \lambda_{i_0} v_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} \lambda_i v_i = 0_E \iff \lambda_{i_0} v_{i_0} = - \sum_{i \neq i_0} \lambda_i v_i \iff v_{i_0} = - \sum_{i \neq i_0} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} v_i \quad (\text{car } \lambda_{i_0} \neq 0)$$

Ainsi le vecteur v_{i_0} est bien combinaison linéaire des autres.

- Supposons qu'il existe $i_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que v_{i_0} s'écrive comme combinaison linéaire des autres :

$$v_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \lambda_i v_i \quad \text{avec des coefficients } \lambda_1, \dots, \lambda_{i_0-1}, \lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}.$$

Ceci se ré-écrit : $\sum_{i \neq i_0} \lambda_i v_i - v_{i_0} = 0_E$, c'est à dire :

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i_0-1} v_{i_0-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} \cdot v_{i_0} + \lambda_{i_0+1} v_{i_0+1} + \dots + \lambda_p v_p = 0_E.$$

On a donc une combinaison linéaire non-triviale qui donne le vecteur nul : (v_1, \dots, v_p) est liée. \square

🗨 Remarques 9

- En particulier : une famille qui contient le vecteur nul est liée, une famille qui contient deux fois le même vecteur est liée.
- Le cas d'une famille liée est exactement le cas où on peut "simplifier le Vect" en retirant un vecteur : si v_{i_0} s'écrit comme combinaison linéaire des autres :

$$\text{Vect}(v_1, \dots, v_p) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_{i_0-1}, v_{i_0+1}, \dots, v_p)$$

(on peut retirer v_{i_0} et conserver le même sous espace-vectoriel engendré)

- À l'inverse, lorsqu'une famille est libre, aucun vecteur ne s'écrit comme combinaison linéaire des autres, et on ne peut donc pas "simplifier le Vect" davantage (retirer un vecteur) !

👉 Exemples

- Dans \mathbb{R}^3 , la famille $\left((0, 1, 2), (1, 1, 0)\right)$ est libre.

En effet, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda(0, 1, 2) + \mu(1, 1, 0) = \underbrace{(0, 0, 0)}_{0_{\mathbb{R}^3}} \iff (\mu, \lambda + \mu, 2\lambda) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = 0.$$

La seule combinaison linéaire donnant $(0, 0, 0)$ est donc la combinaison triviale.

- Dans \mathbb{R}^3 , la famille $\left((0, 1, 2), (1, 1, 0), (2, 3, 2)\right)$ est liée.

En effet, pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lambda_1(0, 1, 2) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(2, 3, 2) = (0, 0, 0) &\iff (\lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3, 2\lambda_1 + 2\lambda_3) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 - 3\lambda_3 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \end{cases} \end{aligned}$$

En choisissant par exemple $\lambda_3 = 1$, on a la solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, -2, 1)$.

On obtient ainsi une combinaison non-triviale donnant le vecteur nul :

$$-(0, 1, 2) - 2(1, 1, 0) + (2, 3, 2) = (0, 0, 0). \quad \text{La famille est donc liée.}$$

On aurait aussi pu remarquer directement que : $(2, 3, 2) = (0, 1, 2) + 2(1, 1, 0)$.

Un vecteur s'écrit comme combinaison linéaire des autres : la famille est donc liée.

🚩 Proposition 7 (Familles liées/libres à 1 ou 2 vecteurs)

- Une famille à un seul vecteur (v_1) est libre si et seulement si $v_1 \neq 0_E$.
- Une famille à deux vecteurs (v_1, v_2) est liée si et seulement si ces vecteurs sont **colinéaires** (i.e "proportionnels") : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, v_1 = \lambda v_2$ ou $v_2 = \lambda v_1$.

Ainsi, une famille de deux vecteurs non-colinéaires est libre.

Preuve :

- Par définition, dire que la famille (v_1) est libre, c'est dire : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda \cdot v_1 = 0_E \implies \lambda = 0)$. C'est vrai si et seulement si $v_1 \neq 0_E$ (cf. Proposition 1)

- Avec la caractérisation de la Proposition 6, la famille (v_1, v_2) est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres : c'est bien dire que v_1 et v_2 sont colinéaires. \square

👉 Exemples

- Dans \mathbb{R}^4 : $\left((1, 2, 3, 4), (0, 2, 1, 1) \right)$ est libre car les deux vecteurs sont clairement non-colinéaires.
- Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: la famille (\cos, \sin) est libre, car ces deux fonctions ne sont pas proportionnelles !
(Exercice : pourquoi ?)

⚠ Attention !

Pour montrer qu'une famille de 3 vecteurs ou plus est libre, il n'est pas suffisant de vérifier que les vecteurs sont deux à deux non-colinéaires !

Exemple : La famille $\left((0, 1, 2), (1, 1, 0), (2, 3, 2) \right)$ est composée de vecteurs non-colinéaires, pourtant on a vu qu'elle était liée.

☞ Méthode : Montrer qu'une famille est libre / liée

Pour montrer qu'une famille (v_1, \dots, v_p) est **liée**, on peut :

- Repérer qu'un vecteur s'écrit comme combinaison linéaire des autres.
(en particulier si la famille contient le vecteur nul, ou deux fois le même vecteur...)
- Démontrer qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_E$.

Pour cela, on pose l'égalité $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_E$, on identifie les coefficients, et on raisonne par équivalences pour trouver les solutions $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.

Cela revient en général à résoudre un système linéaire homogène ! (cf. Exemples page précédente)

Pour montrer qu'une famille (v_1, \dots, v_p) est **libre**, on peut :

- Pour une famille d'un seul vecteur, annoncer que ce vecteur est non nul.
- Pour une famille de deux vecteurs, vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires.
- Pour une famille d'au moins 3 vecteurs : introduire $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_E$ et montrer qu'on a nécessairement $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

Pour cela, on pose l'égalité $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_E$, on identifie les coefficients, et on raisonne par équivalences : cela revient à résoudre un système linéaire homogène d'inconnues $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$!
(cf. Exemples page précédente)

Dans les espaces vectoriels \mathbb{R}^n ou $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, il peut être nécessaire de raisonner autrement.

(On peut choisir des valeurs de $n \in \mathbb{N}$ ou de $x \in \mathbb{R}$ particulières pour obtenir un système à résoudre, on peut aussi exploiter les limites, dériver, etc...)

(On cherchera souvent à obtenir **une famille libre avec le plus de vecteurs possibles**)

✎ Exercice 7

Montrer que les familles suivantes sont libres :

1. Dans \mathbb{R}^4 : $\left((1, 0, 2, 0), (0, 1, 2, 1), (1, 1, 0, -1) \right)$
2. Dans $\mathbb{R}[X]$: $\left(2X, X + 1, 3X^2 - 2X + 1 \right)$
3. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: (f_1, f_2, f_3) , où $f_k : x \mapsto \cos(kx)$.

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Supposons $a(1, 0, 2, 0) + b(0, 1, 2, 1) + c(1, 1, 0, -1) = (0, 0, 0, 0)$ et montrons que $a = b = c = 0$.

$$a(1, 0, 2, 0) + b(0, 1, 2, 1) + c(1, 1, 0, -1) = (0, 0, 0, 0) \iff (a + b, b + c, 2a + 2b, b - c) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b + c = 0 \\ 2a + 2b = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow [...] \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

On voit que ce système homogène est de Cramer, donc admet l'unique solution : $a = b = c = 0$.
La famille est donc libre.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Supposons $a \cdot 2X + b(X + 1) + c(3X^2 - 2X + 1) = \underbrace{0}_{\text{polynôme nul}}$ et montrons que $a = b = c = 0$.

$$a \cdot 2X + b(X + 1) + c(3X^2 - 2X + 1) = 0 \Leftrightarrow 3cX^2 + (a + b - 2c)X + b + c = 0$$

Or un polynôme est nul si et seulement si tous ces coefficients sont nuls :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3c = 0 \\ a + b - 2c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

La famille est donc libre.

3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons que $af_1 + bf_2 + cf_3 = \underbrace{0}_{\text{fonction nulle}}$ et montrons que $a = b = c = 0$.

L'égalité $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$ signifie : $\forall x \in \mathbb{R}, af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) = 0$.

c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R}, a \cos(x) + b \cos(2x) + c \cos(3x) = 0$.

On ne peut pas vraiment "identifier les coefficients" et raisonner par équivalences ici !

En évaluant en $x = 0$: $a + b + c = 0$.

En évaluant en $x = \frac{\pi}{2}$: $-b = 0$.

En évaluant en $x = \frac{\pi}{3}$: $\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - c = 0$.

À partir de ces 3 équations, on obtient facilement $a = b = c = 0$. La famille est donc libre.

🚩 Proposition 8 (Famille de polynômes de degrés échelonnés)

Dans $\mathbb{R}[X]$: on dit qu'une famille de polynômes non nuls (P_1, P_2, \dots, P_p) est **de degrés échelonnés** lorsqu'elle est constituée de polynômes **de degrés deux à deux distincts**.

Toute famille de polynômes de degrés échelonnés est **libre**.

Preuve :

Soit (P_1, \dots, P_p) une famille de polynômes de degrés échelonnés.

Quitte à changer l'ordre des polynômes, on peut supposer $0 \leq \deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_p)$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que la famille (P_1, \dots, P_p) soit liée :

il existe donc des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_p P_p = 0$.

Au moins l'un des λ_i est non nul : choisissons $i_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$ le plus grand indice possible tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$.

$$\text{Ainsi : } \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{i_0-1} P_{i_0-1} + \underbrace{\lambda_{i_0} P_{i_0}}_{\neq 0} + \underbrace{\lambda_{i_0+1} P_{i_0+1}}_{=0} + \dots + \underbrace{\lambda_p P_p}_{=0} = 0$$

$$\text{On obtient donc : } \underbrace{\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{i_0-1} P_{i_0-1}}_{\text{degré} < \deg(P_{i_0})} + \underbrace{\lambda_{i_0} P_{i_0}}_{\text{degré} = \deg(P_{i_0})} = 0.$$

Or on voit que le degré de ce polynôme est $\deg(P_{i_0}) \geq 0$: il ne peut pas être nul. Contradiction ! \square

👉 **Exemple**

La famille $\left(3, 2X - 1, 3X^3 - X^2 + 2, X^4 + X^2\right)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$, car de degrés échelonnés.

3.3 Bases

Rappelons qu'une famille (v_1, \dots, v_p) est génératrice de E lorsque n'importe quel vecteur $v \in E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de ces vecteurs : $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$.

Néanmoins, cette "décomposition" n'est pas nécessairement unique ! Il peut y avoir plusieurs façon d'exprimer un même vecteur $v \in E$ comme combinaison linéaire de (v_1, \dots, v_p) ...

👉 Exemple

La famille $\left((1, 0), (0, 1), (1, 1)\right)$ est génératrice de \mathbb{R}^2 . (cf. Exemples page 13).

Le vecteur $(2, 3) \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire : $(2, 3) = 2 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 1) + 0 \cdot (1, 1)$.

Mais il peut aussi s'écrire : $(2, 3) = 1 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (1, 1)$!

Ce constat justifie que l'on introduise la notion plus précise de base de E .

📖 Définition 9 (Base)

Une famille (v_1, \dots, v_p) est une **base de E** lorsque : **c'est une famille libre et génératrice de E .**

👉 Exemples

- La famille $\left((1, 0), (0, 1), (1, 1)\right)$ est génératrice de \mathbb{R}^2 mais n'est pas libre (car $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$). Ce n'est pas une base de \mathbb{R}^2 .
- La famille $\left((1, 0), (0, 1)\right)$ est génératrice de \mathbb{R}^2 et est libre (2 vecteurs non-colinéaires). C'est une base de \mathbb{R}^2 !
- La famille $\left((1, -1), (2, 2)\right)$ est une autre base de \mathbb{R}^2 . (vérifiez-le)

👑 Théorème 3 (Unicité de la décomposition dans une base)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base E . Alors :

Tout vecteur $v \in E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de (e_1, \dots, e_p) .

c'est à dire :

$$\forall v \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (uniques !) sont alors appelés **coordonnées de v dans la base (e_1, \dots, e_p) .**

On peut les noter dans la "matrice colonne des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ " :

$$Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}).$$

Preuve :

Soit $v \in E$. Montrons l'existence et l'unicité annoncée dans le Théorème.

• Comme (e_1, \dots, e_p) est une famille génératrice de E , par définition, on sait qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$.

• Supposons qu'il existe d'autres scalaires $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $v = \lambda'_1 e_1 + \dots + \lambda'_p e_p$.

Alors en faisant la différence des deux égalités : $v - v = (\lambda_1 - \lambda'_1)e_1 + \dots + (\lambda_p - \lambda'_p)e_p$, ce qui donne :

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)e_1 + \dots + (\lambda_p - \lambda'_p)e_p = 0_E.$$

Comme la famille (e_1, \dots, e_p) est libre, par définition, ceci implique : $\lambda_1 - \lambda'_1 = 0, \dots, \lambda_p - \lambda'_p = 0$.

Autrement dit : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda'_i = \lambda_i$. La décomposition est donc unique. \square

👉 Exemples

- **Dans \mathbb{R}^n** : En notant, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ème coordonnée}}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

la famille (e_1, e_2, \dots, e_n) est une base de \mathbb{R}^n .

On l'appelle la **base canonique de \mathbb{R}^n** .

En effet : On a déjà vu que c'est une famille génératrice de \mathbb{R}^n . Vérifiez qu'elle est libre !

- **Dans $\mathbb{R}_n[X]$** : La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On l'appelle la **base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$** .

En effet : On a déjà vu que c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$. Elle est libre car c'est une famille de polynômes de degrés échelonnés.

- **Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$** : En notant, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$,

$E_{i,j} =$ **matrice dont tous les coeffs. sont nuls, sauf un 1 sur la i -ème ligne et la j -ième colonne.**

la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On l'appelle la **base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$** .

En effet : On remarque que pour tout $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on peut écrire : $A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} E_{i,j}$.

C'est donc une famille génératrice !

De plus, si des scalaires $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ satisfont $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0_{n,p}$, cela revient à dire que la matrice $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est nulle, c'est à dire que tous les scalaires $\lambda_{i,j}$ sont nuls. C'est donc une famille libre !

Par exemple : La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

En particulier : La base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

☞ Méthode : Questions liées aux bases

- **Montrer qu'une famille de vecteurs (e_1, \dots, e_p) est une base de E :**

- On peut montrer que c'est une famille génératrice et libre (cf. méthodes associées).
- On peut introduire $v \in E$ quelconque et montrer qu'il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_p e_p.$$

Cela revient à résoudre un système linéaire d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

- **Déterminer une base d'un espace vectoriel E :**

- Déterminer une famille génératrice (cf. méthode associée).
 - Si cette famille est également libre (c'est très souvent le cas !) alors c'est une base.
- Sinon, "simplifier le Vect" en supprimant des vecteurs jusqu'à obtenir une famille libre.

- **Déterminer les coordonnées d'un vecteur $v \in E$ dans une base (e_1, \dots, e_p) :**

Déterminer l'unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$.

Cela revient à résoudre un système linéaire d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Exercice 8

1. (a) Montrer que $\mathcal{B} = (2, -X + 1, 2X^2 - 2X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
 - (b) Donner la matrice des coordonnées de $P = X^2 + 2X - 3 \in \mathbb{R}_2[X]$ dans :
La base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
La base \mathcal{B} .
2. Déterminer une base du plan de \mathbb{R}^3 d'équation $x - 2y + z = 0$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}.$$

1. (a) • \mathcal{B} est une famille libre, car les polynômes sont de degré échelonnés.
- Montrons que \mathcal{B} est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$\begin{aligned} \text{Vect}(2, -X + 1, 2X^2 - 2X + 1) &= \text{Vect}(1, -X + 1, 2X^2 - 2X + 1) = \text{Vect}(1, -X, 2X^2 - 2X) \\ &= \text{Vect}(1, X, X^2 - X) = \text{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X] \quad \text{d'où le résultat.} \end{aligned}$$

Ainsi \mathcal{B} est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

- 1.(b) P s'écrit : $P = -3 \cdot 1 + 2 \cdot X + 1 \cdot X^2$ donc ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ sont :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(P) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathcal{B} = (2, -X + 1, 2X^2 - 2X + 1)$ est aussi une base de $\mathbb{R}_2[X]$, on sait qu'il existe un unique $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$P = a \cdot 2 + b \cdot (-X + 1) + c \cdot (2X^2 - 2X + 1).$$

Déterminons ces coordonnées :

$$\begin{aligned} P = 2a + b(-X + 1) + c(2X^2 - 2X + 1) &\iff X^2 + 2X - 3 = (2c)X^2 + (-b - 2c)X + (2a + b + c) \\ \iff \begin{cases} 2c &= 1 \\ -b - 2c &= 2 \\ 2a + b + c &= -3 \end{cases} &\iff \begin{cases} c &= \frac{1}{2} \\ b &= -2c - 2 = -1 - 2 = -3 \\ 2a &= -3 - b - c = -3 + 3 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} c &= \frac{1}{2} \\ b &= -3 \\ a &= -\frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, P s'écrit : $P = -\frac{1}{4} \cdot 2 - 3 \cdot (-X + 1) + \frac{1}{2}(2X^2 - 2X + 1)$
donc ses coordonnées dans la base $\mathcal{B} = (2, -X + 1, 2X^2 - 2X + 1)$ sont :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. On pourrait vérifier que F est bien un SEV de \mathbb{R}^3 . En fait on va montrer que c'est un "Vect", donc cela montrera au passage que c'est un SEV !

On l'écrit sous forme explicite : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y - z\} = \{(2y - z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$.

Ainsi : $F = \{y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((2, 1, 0), (-1, 0, 1))$.

F est donc un SEV de \mathbb{R}^3 , dont une famille génératrice est $((2, 1, 0), (-1, 0, 1))$.

De plus cette famille est libre, car composée de deux vecteurs non-colinéaires.

Une base de F est donc : $((2, 1, 0), (-1, 0, 1))$.

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :



Au minimum

- Connaître les espaces vectoriels usuels et les règles de calculs dans ces espaces.
- Montrer et repérer qu'un vecteur est combinaison linéaire d'autres vecteurs.
- Montrer qu'un ensemble est un SEV d'un espace vectoriel usuel.
- Comprendre et manipuler $Vect(v_1, \dots, v_p)$.
- Déterminer une famille génératrice d'un espace vectoriel.
- Montrer qu'une famille est libre ou liée.
- Connaître les bases canoniques des espaces vectoriels usuels.



Pour suivre

- Modifier un "Vect" avec des opérations élémentaires
(Pour modifier ou simplifier une famille génératrice)
(Pour supprimer des vecteurs jusqu'à obtenir une famille libre)
- Montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel.
- Déterminer la matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base.



Pour les ambitieux

- Connaître la définition théorique d'un espace vectoriel (liste de propriétés).
- Maîtriser toutes les preuves du cours.