

# Continuité

## Étude de continuité et prolongement

### Exercice 1 (Continue ou pas ?)

Étudier la continuité en tout point de  $\mathbb{R}$  des fonctions suivantes :

(a)  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{x}{|x|}$  et  $f(0) = 1$ .

(b)  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  et  $f(0) = 1$ .

(c)  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - \lfloor x \rfloor$

### Exercice 2 (Prolongeable ou pas ?)

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, et justifier qu'elle y sont continues.

2. Peut-on prolonger ces fonctions par continuité aux bords du domaine de définition ? Si oui, définir le prolongement.

(a)  $f(x) = \arctan(x^{-1})$

(b)  $f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}$  (c)  $f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$

### Exercice 3 ("Recollement" continu)

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-1, 2] \\ \exp(ax + b) & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer des constantes  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 4 (Problème en 0)

On définit, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .

Montrer par l'absurde que  $f$  n'est pas prolongeable par continuité en 0.

## TVI et Théorème de la bijection

### Exercice 5 (Une unique racine)

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $P_n = X^n + X - 1$  admet une unique racine  $\alpha_n$  dans  $[0, 1]$ .

2. (a) Montrer que la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

(b) On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \ell < 1$ . Montrer que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$  et obtenir une contradiction.

(c) En déduire finalement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ .

### Exercice 6 (Intersection de graphes)

Soient  $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  satisfaisant

$$(f(a) - g(a))(f(b) - g(b)) < 0.$$

Montrer qu'il existe  $x_0 \in [a, b]$  tel que  $f(x_0) = g(x_0)$ .

### Exercice 7 (Étude d'une suite implicite)

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique réel  $x_n \in [1, n]$  tel que  $\ln(x_n) + x_n = n$ .

2. (a) Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante, puis que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ .

3. (a) Justifier que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{n} = 0$  puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n}$ .

(b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = 1$ , puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x_{n-1})$ .

## Fonctions continues et bornes

### Exercice 8 (Fonction continue périodique)

Montrer qu'une fonction continue et périodique sur  $\mathbb{R}$  admet un maximum et un minimum.

### Exercice 9 (Limite finie aux bords)

On souhaite montrer que toute fonction continue sur  $\mathbb{R}$  admettant des limites finies en  $-\infty$  et  $+\infty$  est bornée. Soit donc  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \in \mathbb{R}$  et  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$

(a) Justifier qu'il existe  $A < 0$  et  $A' > 0$  tels que  $\forall x < A, a - 1 \leq f(x) \leq a + 1$

et  $\forall x > A', b - 1 \leq f(x) \leq b + 1$ .

(b) Justifier qu'il existe  $m, M \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall x \in [A', A], m \leq f(x) \leq M$ .

(c) Conclure.

(d) Donner un exemple d'une telle fonction qui n'atteint pas ses bornes.

### Exercice 10 (Graphes sans intersection)

Soient  $f, g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  t.q  $\forall x \in [0, 1], f(x) \neq g(x)$ .

On suppose par exemple que  $f(0) < g(0)$ .

(a) Montrer que  $\forall x \in [0, 1], f(x) < g(x)$ .

(b) Plus précisément, montrer qu'il existe  $\delta > 0$  fixé tel que  $\forall x \in [0, 1], f(x) \leq g(x) - \delta$ .

## Problèmes divers

### Exercice 11 (Une équation contraignante)

Soit  $f$  une fonction continue en 0 satisfaisant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x).$$

1. Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ .

2. En déduire que  $f$  est constante.

### Exercice 12 (Fonction Lipschitzienne)

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une fonction.

On suppose qu'il existe  $k \in ]0, 1[$  tel que

$$\forall (x, x') \in [0, 1]^2, |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|.$$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ .
2. Montrer que  $f$  a un unique point fixe  $\alpha \in [0, 1]$ .
3. On pose  $u_0 \in [0, 1]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ .
  - (a) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq |u_0 - \alpha| \times k^n$ .
  - (b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### Exercice 13 (Fonctions continues additives)

L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  satisfaisant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On note  $\mathcal{A}$  l'ensemble de ces fonctions.

0. Vérifier que pour tout  $a \in \mathbb{R}, a \times Id_{\mathbb{R}} \in \mathcal{A}$ .

Soit maintenant  $f \in \mathcal{A}$ . On pose  $a = f(1)$ .

1. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$ .
2. Montrer que  $f$  est impaire, et en déduire que l'égalité précédente reste vraie pour  $n \in \mathbb{Z}$ .
3. Déduire que pour tout  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  
 $f\left(\frac{1}{q}\right) = a \times \frac{1}{q}$ , puis que  $f\left(\frac{p}{q}\right) = a \times \frac{p}{q}$ .
4. On rappelle que tout réel est limite d'une suite de rationnel (par exemple :  $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[10^n x]}{10^n}$ .)  
Montrer finalement que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax$ .
5. Décrire explicitement l'ensemble  $\mathcal{A}$ .