26

Applications linéaires en dimension finie

Introduction et motivation

Rappels : Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Le noyau de f : $Ker(f) = \Big\{ v \in E \mid f(v) = 0_F \Big\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
  L'application f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0_E\}$.
- L'image de f : $Im(f) = \Big\{ f(v),\ v \in E \Big\} = \Big\{ u \in F \mid \exists v \in E, u = f(v) \Big\}$ est un S.E.V de F.
  L'application f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.

Lorsque l'on travaille dans un espace vectoriel de dimension finie, on a vu que des "arguments de dimension" permettent de prédire et montrer qu'une famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre/génératrice ou une base de E.
On peut également déduire ces informations en calculant le rang de la famille $(v_1, \dots, v_p)$.

On va à présent étudier l'impact de ces "arguments de dimension" sur les applications linéaires. Notamment :
$\boxed{1}$ On va relier les dimensions de $Ker(f)$ et $Im(f)$, puis définir le rang d'une application linéaire f.

(Ce qui permettra de prédire et montrer qu'une application linéaire est injective/surjective/bijective.)

$\boxed{2}$ On va montrer qu'en dimension finie, une application linéaire peut être "codée" par une matrice.
On établira alors de multiples liens entre le calcul des applications linéaires et le calcul matriciel.

1 Théorème du rang, rang d'une application linéaire

1.1 Dimension du noyau et de l'image

Théorème 1 (Théorème du rang)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont de dimension finie, et on a l'égalité :

$$\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(E).$$

Preuve :

Notons $n = dim(E)$ et $p = dim(Ker(f))$. Comme $Ker(f) \subset E$ on a $p \leqslant n$.

On introduit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $Ker(f)$.
Puisque c'est une famille libre de E, on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E.

On sait alors que $Im(f) = Vect\Big(f(e_1), \dots, f(e_p), f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)\Big)$. (résultat connu)

Or puisque $e_1, \dots, e_p \in Ker(f)$ on a $f(e_1) = \dots = f(e_p) = 0_F$.

Ainsi on a : $Im(f) = Vect\Big(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)\Big)$.

Vérifions que la famille $\Big(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)\Big)$ est libre : ce sera donc une base de $Im(f)$.

Pour tous $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F \iff f\left(\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F \iff \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i \in Ker(f) \iff \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i \in Vect(e_1, \dots, e_p).$$

Comme la famille $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots e_n)$ est libre, ceci n'est possible que si $\forall i \in [\![p+1, n]\!], \lambda_i = 0$.

Conclusion : la famille $\Big(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n))\Big)$ est une base de $Im(f)$.
Comme elle contient $n-p$ vecteurs, on a $dim(Im(f)) = n - p = dim(E) - dim(Ker(f))$. $\square$

Remarque 1

Ainsi, plus le noyau $Ker(f)$ "est petit", plus l'image $Im(f)$ "est grande" (et inversement) !

- Si $Ker(f) = E$ i.e $\dim(Ker(f)) = \dim(E)$ et on a donc $\dim(Im(f)) = 0$, i.e $Im(f) = \{0_F\}$.
  Logique : c'est le cas où $\forall v \in E,\ f(v) = 0_F$ (f est l'application linéaire nulle).
- Si $Ker(f) = \{0_E\}$ i.e $\dim(Ker(f)) = 0$ et on a donc dans ce cas $\dim(Im(f)) = \dim(E)$.
  Notons qu'il s'agit de la dimension maximale possible pour $Im(f)$!

Exercice 1

On considère l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y,\ x+y+2z,\ y+z,\ -y-z) \end{array}$.

1. Sans aucun calcul : f est-elle surjective ?
2. Confirmer en calculant $Im(f)$.
3. Sans aucun calcul : f est-elle injective ?

1. On sait qu'on aura $\dim(Im(f)) + \dim(Ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
Ainsi $\dim(Im(f)) = 3 - \dim(Ker(f)) \leqslant 3$. Il est donc impossible que $Im(f) = \mathbb{R}^4$.
f n'est donc pas surjective !

2. On sait que

$$\begin{aligned} Im(f) &= Vect\Big(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\Big) = Vect\Big((1,1,0,0), (-1,1,1,-1), (0,2,1,-1)\Big) \\ &= Vect\Big((1,1,0,0), (-1,1,1,-1)\Big) \end{aligned}$$

On a déterminé une base $\Big((1,1,0,0), (-1,1,1,-1)\Big)$ de $Im(f)$.

3. On vient de voir que $\dim(Im(f)) = 2$. Donc $\dim(Ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(Im(f)) = 3 - 2 = 1$.
Ainsi $Ker(f) \neq \{0_E\}$: f n'est pas injective.

Le raisonnement employé dans la question 1. se généralise facilement :

Proposition 1 (Surjection/injection impossible)

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Si $\dim(E) < \dim(F)$, alors f ne peut pas être surjective.
- Si $\dim(E) > \dim(F)$, alors f ne peut pas être injective.

Preuve :

D'après le Théorème du rang, $\dim(Kerf(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(E)$.

- Supposons $\dim(E) < \dim(F)$.

Alors $\dim(Im(f)) = \dim(E) - \dim(Ker(f)) \leqslant \dim(E) < \dim(F)$.
Il est donc impossible que $Im(f) = F$: f n'est pas surjective.

- Supposons $\dim(E) > \dim(F)$.

Alors $\dim(Ker(f)) = \dim(E) - \dim(Im(f)) \geqslant \dim(E) - \dim(F) > 0$.
(puisque $Im(f) \subset F$, on a $\dim(Im(f)) \leqslant \dim(F)$)
Il est donc impossible que $Ker(f) = \{0_E\}$: f n'est pas injective.

$\square$

Remarque 2

Pour retenir la "philosophie" de la Proposition 1 :

- Si $\dim(E) < \dim(F)$, on ne peut pas "recouvrir" F à partir de E : pas de surjection de E dans F.
- Si $\dim(E) > \dim(F)$, on ne peut pas "injecter" E dans F : pas d'injection de E dans F.

Ce résultat est similaire à celui qui concerne les applications entre ensembles finis :

- Si $Card(E) < Card(F)$, il n'existe pas de surjection de E dans F.
- Si $Card(E) > Card(F)$, il n'existe pas d'injection de E dans F.

Dessin :

Evoquons une dernière conséquence directe du Théorème du rang :

Proposition 2 (Noyau d'une forme linéaire non nulle)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit f une forme linéaire non-nulle sur E (c'est à dire $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ avec $f \neq 0$).

Alors $Im(f) = \mathbb{R}$ et $Ker(f)$ est un hyperplan de E.

Preuve :

- Puisque $Im(f) \subset \mathbb{R}$, on a $\dim(Im(f)) \leqslant \dim(\mathbb{R}) = 1$. Ainsi $\dim(Im(f)) \in \{0, 1\}$.

Puisque f n'est pas l'application nulle, on a $Im(f) \neq \{0\}$ et donc $\dim(Im(f)) \neq 0$.
Ainsi, $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ de dimension 1 : c'est forcément $Im(f) = \mathbb{R}$.

- D'après le Théorème du rang : $\dim(Ker(f)) = \dim(E) - \dim(Im(f)) = \dim(E) - 1$.

Autrement dit, $Ker(f)$ est un hyperplan de E. $\square$

Exemple

Soit $F = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\Big\}$.
On peut à présent annoncer **sans calcul** que F est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, c'est à dire $\dim(F) = 2$!

En effet : F est le noyau de la forme linéaire non nulle $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & 2x + y - z \end{array}$

1.2 Rang d'une application linéaire

Définition 1 (Rang d'une application linéaire)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque.
Le rang d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, est défini par : $rg(f) = \dim(Im(f))$.

Remarques 3

- Notons dès à présent que $\boxed{\text{la seule application de rang nul est l'application linéaire nulle}}$:

$$rg(f) = 0 \Longleftrightarrow dim(Im(f)) = 0 \Longleftrightarrow Im(f) = \{0_F\} \Longleftrightarrow \forall v \in E,\ f(v) = 0_F \Longleftrightarrow f = 0$$

- Le rang de f étant la dimension de son image, l'égalité du Théorème 1 peut se ré-écrire :

$$\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(E) \quad i.e \quad \dim(Ker(f)) + rg(f) = \dim(E)$$

d'où le nom "Théorème du rang" ! (parfois "formule du rang")

En pratique, le calcul du rang de f revient au calcul du rang d'une famille de vecteurs :

Proposition 3 (Calcul pratique du rang de f)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque.
On introduit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Alors pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\quad rg(f) = rg\Big(f(e_1), \dots, f(e_n)\Big)$.

Preuve :
Puisque $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $\quad Im(f) = Vect\Big(f(e_1), \dots, f(e_n)\Big)$.
Ainsi $\quad rg(f) = dim(Im(f)) = dim\left(Vect\Big(f(e_1), \dots, f(e_n)\Big)\right) = rg\Big(f(e_1), \dots, f(e_n)\Big)$,
par définition du rang d'une famille de vecteurs. $\square$

L'intérêt fondamental du rang est le suivant :

Théorème 2 (Rang et famille libre / génératrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$\boxed{1}$ On a toujours $\quad rg(f) \leqslant \dim(E) \quad$ avec égalité si et seulement si f est **injective** :

$$\boxed{rg(f) = \dim(E) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est injective}}$$

(et donc, si $rg(f) < \dim(E)$, $\quad f$ n'est pas injective.)

$\boxed{2}$ On a toujours $\quad rg(f) \leqslant \dim(F)$, $\quad$ avec égalité si et seulement si f est **surjective** :

$$\boxed{rg(f) = \dim(F) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est surjective}}$$

(et donc, si $rg(f) < \dim(F)$, $\quad f$ n'est pas surjective)

Preuve :

$\boxed{1}$ D'après le Théorème du rang, $rg(f) = \dim(Im(f)) = \dim(E) - \dim(Ker(f)) \leqslant \dim(E)$.
De plus : $\quad rg(f) = \dim(E) \Longleftrightarrow \dim(Ker(f)) = 0 \Longleftrightarrow Ker(f) = \{0_E\} \Longleftrightarrow f$ est injective.

$\boxed{2}$ Puisque $Im(f) \subset F$, par définition, $rg(f) = \dim(Im(f)) \leqslant \dim(F)$
De plus : $\quad rg(f) = \dim(F) \Longleftrightarrow \dim(Im(f)) = \dim(F) \Longleftrightarrow Im(f) = F \Longleftrightarrow f$ est surjective. $\square$

Remarque 4

On notera l'analogie très claire entre ce théorème et celui concernant le rang d'une famille de vecteurs. Là où le rang d'une famille de vecteur permet de déterminer si celle-ci est libre et /ou génératrice, le rang d'une application linéaire permet de déterminer si celle-ci est injective et/ou surjective !

Exercice 2

1. Calculer le rang de l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x+z, x+y-z+t, 2x+y+t). \end{array}$

Est-elle injective ? Surjective ?

2. Calculer le rang de l'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P - XP' \end{array}$ Est-elle injective ? Surjective ?

1.

$$\begin{aligned} rg(f) &= rg\Big(f(1,0,0,0), f(0,1,0,0), f(0,0,1,0), f(0,0,0,1)\Big) = rg\Big((1,1,2),(0,1,1),(1,-1,0),(0,1,1)\Big) \\ &= rg\Big((1,1,2),(0,1,1),(0,-2,-2),(0,1,1)\Big) = rg\Big((1,1,2),(0,1,1)\Big) = 2 \end{aligned}$$

Ainsi $rg(f) < \dim(\mathbb{R}^4)$ et $rg(f) < \dim(R^3)$: f n'est ni injective ni surjective.

2. Rappelons que $(1, X, X^2, X^3)$ est une base (la base canonique) de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$\begin{aligned} rg(\varphi) &= rg\Big(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)\Big) = rg\Big(1-0, X-X, X^2-X(2X), X^3-X(3X^2)\Big) \\ &= rg\Big(1, 0, -X^2, -2X^3\Big) = rg\Big(1, -X^2, -2X^3\Big) = 3. \end{aligned}$$

Ainsi $rg(\varphi) < \dim(\mathbb{R}_3[X])$ et $rg(\varphi) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$: φ n'est pas injective mais est surjective.

1.3 Conséquence importante : isomorphismes en dimension finie

Rappel : On dit que deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes lorsqu'il existe un **isomorphisme** (i.e une application linéaire bijective) de E dans F.
Lorsque E et F sont de dimensions finies, on a : E et F sont isomorphes $\iff \dim(E) = \dim(F)$.

Revenons sur ce résultat, à la lumière des notions introduites dans ce chapitre :

- Si $\dim(E) \neq \dim(F)$, une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ ne peut pas être un isomorphisme.

(Proposition 1 : si $\dim(E) < \dim(F)$, f n'est pas surjective ; si $\dim(E) > \dim(F)$, f n'est pas injective)

- Si $\dim(E) = \dim(F)$, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ peut être un isomorphisme, mais ce n'est pas automatique !

On a le résultat fondamental suivant :

Théorème 3 (Application linéaire entre espaces de même dimension)

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie avec $\underline{dim(E) = dim(F)}$.
Alors pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a les équivalences :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ bijective.}$$

Preuve :
f est injective $\iff rg(f) = dim(E) \iff rg(f) = dim(F) \iff f$ est surjective.
Ceci équivaut donc aussi au fait que f est bijective ! $\square$

Remarques 5

- Ainsi, lorsque $\dim(E) = \dim(F)$, il suffit de montrer qu'une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective (ou surjective) pour que ce soit automatiquement un isomorphisme !

Ce résultat est à rapprocher de son analogue pour les familles de vecteurs : lorsque $Card(\mathcal{F}) = \dim(E)$,

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice de } E \iff \mathcal{F} \text{ est une base de } E .$$

- <u>**Cas particulier important :**</u> Le résultat s'applique en particulier lorsque $F = E$, c'est à dire dans le cas d'un **endomorphisme** $f \in \mathcal{L}(E)$.

En dimension finie, un endomorphisme injectif/surjectif est automatiquement un **automorphisme**.

Méthode : Montrer qu'une application est un isomorphisme

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie avec <u>$\dim(E) = \dim(F)$</u>.

Pour montrer qu'une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme :

- On justifie que f est injective (c'est souvent le plus facile !).

On peut par exemple fixer un vecteur $v \in E$ et montrer que $f(v) = 0_F \Longrightarrow v = 0_E$.

- Alternativement, on justifie que f est surjective.

On conclut : "Puisque $\dim(E) = \dim(F)$, f est automatiquement bijective."

Exercice 3

Isomorphisme de Lagrange (le retour).

Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{array}$.

Montrer que f est un isomorphisme.

- Il est clair que f est linéaire (vérifiez-le !)
- Montrons que f est injective, c'est à dire que $Ker(f) = \{0\}$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$, c'est à dire $P(x_0) = P(x_1) = \ldots = P(x_n) = 0$.

Puisque P admet $n + 1$ racines distinctes et $\deg(P) \leqslant n$, on a nécessairement $P = 0$.

Ceci montre que f est injective.

- Puisque $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$, f est automatiquement bijective.

On a bien montré que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

<u>Conclusion :</u> $\forall (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\exists ! P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$.

Notons que cet argument est souvent utile dans des contextes "abstraits" comme l'Exercice précédent. Lorsque l'application f est simple et explicite, on s'en sort aussi en calculant le rang.

Exercice 4

Montrer que $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, -x + 2y - z, x + 3z) \end{array}$ est un automorphisme.

Il est clair que h est linéaire et :

$$\begin{aligned} rg(h) &= rg(h(1,0,0), h(0,1,0), h(0,0,1)) = rg((1,-1,1), (1,2,0), (0,-1,3)) \\ &= rg((1,-1,1), (0,3,-1), (0,-1,3)) = rg((1,-,1,1), (0,3,-1), (0,0,8)) = 3. \end{aligned}$$

Ainsi $rg(h) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$: h est injective et surjective. C'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2 Représentations matricielles

2.1 Représentation matricielle d'un vecteur dans une base

Rappel : Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, tout vecteur $v \in E$, s'écrit de manière unique comme $v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$. Les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les **coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$**.

La **matrice colonne des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$** est : $Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Le choix d'une base de E permet ainsi d'"identifier" les vecteurs de E à des matrices colonnes.

Exemples

- Dans la base canonique $\mathcal{B} = \Big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\Big)$ de $\mathbb{R}^3$, le vecteur $v = (1,-2,2)$ s'écrit

$$v = 1(1,0,0) - 2(0,1,0) + 2(0,0,1) \text{ et donc } Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, le polynôme $P = 2(X-1)^2$ s'écrit

$$P = 2 - 4X + 2X^2 \text{ et donc } Mat_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Attention !

La matrice des coordonnées de v dépend de la base de E choisie !

Exemple : Soit $v = (1,-2,2) \in \mathbb{R}^3$.

- Dans la base $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$, $Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Dans la base $\mathcal{B}' = ((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$, $Mat_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

  (En effet : $v = (1,-2,2) = (1,1,1) - 3(0,1,1) + 4(0,0,1)$.)

Définition 2 (Matrice passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$)

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E.
On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** la matrice carrée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
formée en fusionnant les matrices colonnes : $\Big[Mat_{\mathcal{B}}(e'_1), Mat_{\mathcal{B}}(e'_2), \ldots, Mat_{\mathcal{B}}(e'_n)\Big]$.
Autrement dit : la j-ème colonne de $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ contient les coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$.

Dessin :

Remarque 6

On retiendra : $\boxed{\text{la matrice de passage } P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \quad \text{exprime "la nouvelle base" } (\mathcal{B}') \text{ dans "l'ancienne" } (\mathcal{B}).}$

Exercice 5

Soient $e_1 = (1,-1)$ et $e_2 = (2,3)$. Soient $e_1' = e_1 + e_2 = (3,2)$ et $e_1' = e_1 - e_2 = (-1,-4)$.
Il est clair que $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.
Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Puisque $e_1' = e_1 + e_2$ et $e_2' = e_1 - e_2$, $\quad P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Théorème 4 (Formule de changement de base)

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e_1', \ldots, e_n')$ deux bases de E.
Soit $v \in E$ et $Mat_{\mathcal{B}}(v)$, $Mat_{\mathcal{B}'}(v)$ les matrices colonnes de ses coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Alors : $\quad Mat_{\mathcal{B}}(v) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} Mat_{\mathcal{B}'}(v)$.

Remarque 7

- Moyen mnémotechnique : cette formule ressemble à une "relation de Chasles".
  Les "$\mathcal{B}$" sont côte à côte, les "$\mathcal{B}'$" sont côte à côte.

- Attention : cette formule exprime les coordonnées de v dans "l'ancienne base" en fonction de celles dans "la nouvelle base" !
Si on veut aller dans l'autre sens, on a bien-sûr symétriquement : $\boxed{Mat_{\mathcal{B}'}(v) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} Mat_{\mathcal{B}}(v).}$
(mais il faut dans ce cas calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$!)

- On peut en fait montrer que $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

Preuve du Théorème 4:

Notons $Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Mat_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Par définition de la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, on peut écrire : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $e_k' = \sum_{i=1}^{n} p_{i,k} e_i$.

Puisque les x_j' sont les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}'$, on peut écrire :

$$v = \sum_{k=1}^{n} x_k' e_k' = \sum_{j=1}^{n} x_k' \left(\sum_{i=1}^{n} p_{i,k} e_i \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_k' p_{i,k} e_i = \sum_{i=1}^{n} \Bigg(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_{i,k} x_k'}_{x_i} \Bigg) e_i$$

Ainsi, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} x_k'$, ce qui correspond à : $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$. $\square$

Exercice 6

On reprend les bases $\mathcal{B} = ((1,-1),(2,3))$ et $\mathcal{B}' = ((3,2),(-1,-4))$ de l'Exercice 5.
Posons $v = (3,2) - 2 \cdot (-1,-4) = (5,10) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $Mat_{\mathcal{B}'}(v)$ et $Mat_{\mathcal{B}}(v)$.

2.2 Représentation matricielle d'une application linéaire.

Rappel : Si $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E, une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs $u_1 = f(e_1), \ldots, u_p = f(e_p)$.

En effet, tout vecteur $v \in E$ s'écrit $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et on a alors $f(v) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$.

Définition 3 (Matrice d'une application linéaire dans deux bases)

Soit E un espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, ..., e_p)$.
Soit F un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_n)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$** la matrice $Mat_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ formée en fusionnant les matrices colonnes : $\Big[Mat_{\mathcal{B}_\mathcal{F}}(f(e_1)), Mat_{\mathcal{B}_\mathcal{F}}(f(e_2)), \ldots, Mat_{\mathcal{B}_\mathcal{F}}(f(e_p)) \Big]$.

Autrement dit : la j-ème colonne de $Mat_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$ contient les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

Dessin :

Exercice 7

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (7x - 3y, -x + 2y, 8y) \end{array}$

Donner la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$.

Remarque 8

Lorsque les espaces de départ et d'arrivée disposent de bases dites "canoniques"
(donc pour la plupart des espaces vectoriels étudiés : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$), on cherchera en général à déterminer et étudier $M = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$, où $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont les bases canoniques !

Pour ce choix de bases, on dit parfois que M est la matrice canoniquement associée à f.

Dans le cas où f est un endomorphisme (i.e $f \in \mathcal{L}(E,E)$),
on se contente en général de choisir la même base de E "au départ et à l'arrivée" :

Définition 4 (Matrice d'un endomorphisme dans une seule base)

Soit E un espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, ..., e_p)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

La matrice $Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(f)$ est simplement notée $Mat_{\mathcal{B}_E}(f)$.

On l'appelle **matrice de f dans la base $\mathcal{B}_E$**. Notons qu'il s'agit d'une matrice carrée !

Exercice 8

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & XP' + P. \end{array}$ Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. On considère l'endomorphisme : $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$.

Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Que remarque-t-on ?

Remarque 9

Plus généralement, on peut montrer que quelle que soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $f_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ est A.

(démonstration laissée en exercice)

On revient à présent au cas général où $F \neq E$. On note $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$.
On a vu que, en fixant des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ de E et de F, on pouvait faire correspondre à une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une unique matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. En fait l'inverse est également vrai : à une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ fixée, on peut faire correspondre une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$!

Théorème 5 (Correspondance entre matrices et applications linéaires)

Soit E un espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B}_E$.
Soit F un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}_F$.

- Pour toute $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on peut considérer la matrice $M = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Inversement, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,
il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $M = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Autrement dit, l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \end{array}$ est une bijection !

Étudions cette correspondance, dans un sens et dans l'autre, sur des exemples concrets.

Exercice 9

Déterminer l'unique endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ admettant la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.