Devoir Maison n°2 – Corrigé

1. (a) Le support de X_1 est $\boxed{X_1(\Omega) = [\![0, p]\!]}$. Par ailleurs on a :

   - $\boxed{[X_1 = 0] = \overline{A_1}}$.
   - Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\boxed{[X_1 = k] = A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}}$.
   - $\boxed{[X_1 = p] = A_1 \cap \ldots \cap A_p}$.

   (b) Au vu de l'énoncé, les évènements $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ sont indépendants et $P(A_i) = \frac{1}{2}$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. On en déduit :

   - $\boxed{P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}}$.
   - Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\boxed{P(X_1 = k) = \dfrac{1}{2^{k+1}}}$.
   - $\boxed{P(X_1 = p) = \dfrac{1}{2^p}}$.

   L'évènement "Tous les joueurs survivent au jeu" correspond à l'évènement $[X_1 = p]$: si le joueur 1 trouve le bon trajet pour rejoindre l'arrivée, tous les joueurs suivants peuvent suivre sereinement ce trajet également ! La probabilité que tous les joueurs survivent est donc $\boxed{\dfrac{1}{2^p}}$.

2. (a) • D'abord, si l'évènement $[X_n = p]$ est réalisé, le joueur numéro $(n+1)$ a vu le joueur numéro n avancer jusqu'à l'arrivée : il connait donc lui-même le chemin pour rejoindre l'arrivée !
   On a donc $\boxed{P_{[X_n=p]}(X_{n+1} = p) = 1}$.

   • Si l'évènement $[X_n = j]$ est réalisé (pour un $j \in [\![0, p-1]\!]$), le joueur numéro $(n+1)$ a vu le joueur numéro n avancer jusqu'à la j-ième plateforme, puis tomber à la $(j+1)$-ième plateforme. Il connait donc le bon trajet pour rejoindre la $(j+1)$-ème plateforme sans problème !
   Ainsi pour $0 \leqslant k \leqslant j$, $\boxed{P_{[X_n=j]}(X_{n+1} = k) = 0}$.

   À partir de la $(j+1)$-ème plateforme, le joueur $(n+1)$ a, à chaque saut, une chance sur deux de choisir la bonne dalle. Pour que $X_{n+1} = k$ (avec $j+1 \leqslant k < p$), il faut donc réaliser exactement $k-(j+1)$ bons choix, puis 1 mauvais choix.

   Ainsi pour $j < k < p$, $\boxed{P_{[X_n=j]}(X_{n+1} = k) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-(j+1)} \times \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-j}}$.

   Enfin, à partir de la $(j+1)$-ème plateforme, pour rejoindre la plateforme d'arrivée, le joueur $(n+1)$ doit réaliser exactement $p-(j+1)$ bons choix.

   Ainsi $\boxed{P_{[X_n=j]}(X_{n+1} = p) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{p-j-1}}$.

   (b) On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $([X_n = j])_{0 \leqslant j \leqslant p}$:
$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{j=0}^{p} P(X_n = j) P_{[X_n=j]}(X_{n+1} = k)$$

   • Pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, on sait que $P_{[X_n=j]}(X_{n+1} = k) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \geqslant k \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j} \text{ si } j < k \end{cases}$ donc on obtient :
$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{j=0}^{k-1} P(X_n = j) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k-1} P(X_n = j) \frac{2^j}{2^k} = \boxed{\frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k-1} 2^j P(X_n = j)}.$$

   • Pour $k = p$, on sait que $P_{[X_n=j]}(X_{n+1} = p) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{p-j-1} \text{ si } j < p \\ 1 \text{ si } j = p \end{cases}$ donc on obtient :
$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = p) &= \sum_{j=0}^{p-1} P(X_n = j) \left(\frac{1}{2}\right)^{p-j-1} + P(X_n = p) \times 1 \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} P(X_n = j) \frac{2^j}{2^{p-1}} + P(X_n = p) = \boxed{\frac{1}{2^{p-1}} \sum_{j=0}^{p-1} 2^j P(X_n = j) + P(X_n = p)}. \end{aligned}$$

3.
```python
import numpy as np
def loi_X1() :

    P= (1/2)**np.arange(1,p+2)

    P[p] = (1/2)**p

    return(P)
```

```python
def iteration(P) :
    Q=np.zeros(p+1)
    for k in range(p+1) :
        S=0
        for j in range(k) :

            S = S + (2**j)*P[j]

        if k < p :
            Q[k] = (1/2**k)*S
        else :
            Q[k] = (1/2**(p-1))*S + P[p]
    return(Q)
```

```python
def loi_X(n) :

    P = loi_X1()

    for k in range(n-1) :

        P = iteration(P)

    return(P)
```

4. (a) Pour $n \in [\![1, N]\!]$, posons $\mathcal{P}(n)$: "$\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ P(X_n = k) = \dfrac{1}{2^{k+1}}\dbinom{k}{n-1}$".

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![1, N]\!]$.

- Initialisation : pour $n = 1$, $\mathcal{P}(1)$ s'écrit : "$\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ P(X_1 = k) = \dfrac{1}{2^{k+1}}$".

C'est bien vrai d'après la question 1.(b).

- Hérédité : soit $n \in [\![1, N-1]\!]$. Supposons $\mathcal{P}(n)$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, d'après 2.(b), on a :

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = k) &= \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k-1} 2^j P(X_n = j) = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k-1} 2^j \frac{1}{2^{j+1}}\binom{j}{n-1} \quad \text{d'après } \mathcal{P}(n)\\
&= \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{j}{n-1} = \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{j=n-1}^{k-1}\binom{j}{n-1} = \frac{1}{2^{k+1}}\binom{(k-1)+1}{(n-1)+1} \quad \text{d'après la formule de Pa}\\
&= \frac{1}{2^{k+1}}\binom{k}{n}. \text{ On a bien vérifié } \mathcal{P}(n+1), \text{ ce qui achève la récurrence.}
\end{aligned}$$

(b) Pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, on a, d'après 2.(b) :

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = p) &= \frac{1}{2^{p-1}}\sum_{j=0}^{p-1} 2^j P(X_n = j) + P(X_n = p) = \frac{1}{2^{p-1}}\sum_{j=0}^{p-1} 2^j \frac{1}{2^{j+1}}\binom{j}{n-1} + P(X_n = p) \text{ d'après 4.(a}\\
&= \frac{1}{2^p}\sum_{j=0}^{p-1}\binom{j}{n-1} + P(X_n = p) = \frac{1}{2^p}\sum_{j=n-1}^{p-1}\binom{j}{n-1} + P(X_n = p)\\
&= \frac{1}{2^p}\binom{p}{n} + P(X_n = p) \text{ d'après la formule de Pascal.}
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{P(X_{n+1} = p) - P(X_n = p) = \dfrac{1}{2^p}\dbinom{p}{n}}$.

5. (a) Pour $k \in [\![1, N]\!]$, justifions l'égalité $[S > k] = [X_{N-k} = p]$:

- Montons l'inclusion $[X_{N-k} = p] \subset [S > k]$.

Si l'évènement $[X_{N-k} = p]$ est réalisé, le joueur numéro $(N - k)$ survit au jeu et rejoint l'arrivée. Dès lors, tous les joueurs suivants savent également rejoindre l'arrivée ! On sait donc que (au moins) les joueurs portant les numéros $(N-k)$ à N survivent. Cela fait (au moins) $k+1$ survivants : l'évènement $[S > k]$ est réalisé.

- Montrons l'inclusion $[S > k] \subset [X_{N-k} = p]$.

Si l'évènement $[S > k]$ est réalisé, il y a au moins $k + 1$ survivants. Ainsi, les $(k + 1)$ derniers joueurs (au moins) parviennent à l'arrivée ! En particulier, le joueur numéro $(N - k)$ parvient à l'arrivée : l'évènement $[X_{N-k} = p]$ est réalisé.

Par suite, on peut noter que $[S = k] = [S > k - 1] \setminus [S > k]$, c'est à dire :

$\boxed{[S = k] = [X_{N-k+1} = p] \setminus [X_{N-k} = p]}$.

(b) Puisque le support de S est $S(\Omega) = [\![0, N]\!]$, on a $E(S) = \sum_{k=0}^{N} kP(S = k) = \sum_{k=1}^{N} kP(S = k)$.

D'après 5.(a), pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $P(S = k) = P(X_{N-k+1} = p) - P(X_{N-k} = p)$

et donc, d'après 4.(b), $P(S = k) = \dfrac{1}{2^p} \dbinom{p}{N-k}$.

En remplaçant dans la somme, on obtient bien : $\boxed{E(S) = \dfrac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{N} k \dbinom{p}{N-k}}$.

6. Image me représentant le plus après avoir conçu ce sujet :