0

Préparation pour la rentrée en ECG
Mathématiques approfondies

En ce qui concerne les mathématiques, il est nécessaire de se remettre au travail ***au moins deux semaines avant la rentrée.*** *Les étudiants ayant des fragilités en mathématiques auront grand intérêt à élargir cette période de travail à 3 ou 4 semaines réparties dans l'été.*

Contexte

Ce document, qui fait office de "Chapitre #0", sert de transition entre le lycée et la classe préparatoire.
Si sa longueur peut sembler impressionnante, c'est parce que la **quinzaine d'exercices à préparer** est accompagnée de rappels de cours et de méthodes détaillées, dans l'optique de vous permettre d'aborder dans de bonnes conditions le rythme soutenu de la classe prépa !

Les exercices proposés ne couvrent pas du tout l'intégralité du programme de première et de terminale mais sont plutôt destinés à affirmer et à renforcer vos capacités techniques, calculatoires et de rédaction, les attentes à ce sujet étant bien plus importantes en classe préparatoire qu'au lycée.

Quelques points d'attention avant de démarrer :

• Les exercices sont **à rédiger au propre** : ils seront ramassés à la rentrée.

• Un **corrigé** des exercices est disponible sur le site du lycée. Il est important de jouer le jeu : cherchez activement tous les exercices et ne consultez la correction qu'en cas de blocage ou pour vérifier vos réponses ! Il est essentiel de bien comprendre la correction et d'être capable de refaire l'exercice sans la consulter.

• Tous les rappels de cours, en particulier les différentes règles de calculs, doivent être **connus par coeur et manipulés aisément** !

• Une **version imprimée** de ce document vous sera remise à la rentrée (il n'est donc pas obligatoire de l'imprimer de votre côté). On n'hésitera pas à se référer à ce "Chapitre #0" tout au long de l'année.

Table des matières

1 Calcul et opérations

1.1 Règles de priorités dans les calculs

Rappel : Règles de priorités

Dans une expression numérique, on effectue toujours les calculs dans l'ordre suivant :

$\boxed{1}$ Les calculs écrits entre parenthèses, en commençant par les parenthèses les plus intérieures.

$\boxed{2}$ Les puissances, en faisant les calculs dans l'ordre de la gauche vers la droite.

$\boxed{3}$ Les multiplications et les divisions (même niveau de priorité)
en faisant les calculs dans l'ordre de la gauche vers la droite.

$\boxed{4}$ Enfin, les additions et les soustractions.

Exercice 1

Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ? (pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ quelconques)

(a) $4x - x^2 = 4x(1 - x^2)$ (b) $(-1)^3 + 4 - 3 \times 2 = -3$ (c) $(-1)^4 + 2 \times 3/2 + 1 = 3$
(d) $1 - (-1)^n = 2$ (e) $2 \times 4^2 = 64$ (f) $3 \times 2^2 + (3 - (-1)^2) = 14$

1.2 Développer un produit

Méthode : Développer efficacement un produit de polynômes

Pour écrire un produit $\Big(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n\Big)\Big(b_0 + b_1 x + \ldots b_m x^m\Big)$ sous forme développée, on évitera de développer chacun des termes un à un puis de simplifier... Il est beaucoup plus efficace de repérer directement de tête (ou à l'aide d'un petit calcul au brouillon) le coefficient qui apparaitra devant 1, devant x, devant x^2, $\ldots$, devant x^{n+m}.

Exemple

Pour développer $P(x) = (1 + 3x + 2x^2)(3 - x + 3x^2)$, on effectue de tête le raisonnement suivant :

- Le seul terme de ce produit conduisant à une "constante" est : 1×3.
  Le coefficient constant dans $P(x)$ est donc 3.
- Les termes de ce produit donnant "du x" sont : $1 \times (-x)$ et $3x \times 3$.
  Le coefficient devant x dans $P(x)$ est donc : $-1 + 9 = 8$.
- Les termes de ce produit donnant "du x^2" sont : $1 \times 3x^2$, $3x \times (-x)$ et $2x^2 \times 3$.
  Le coefficient devant x^2 dans $P(x)$ est donc : $3 - 3 + 6 = 6$.
- Les termes de ce produit donnant "du x^3" sont : $3x \times 3x^2$ et $2x^2 \times (-x)$.
  Le coefficient devant x^3 dans $P(x)$ est donc : $9 - 2 = 7$.
- Enfin, le seul terme de ce produit donnant "du x^4" est : $2x^2 \times 3x^2$.
  Le coefficient devant x^4 dans $P(x)$ est donc : 6.

On voit ainsi directement que $P(x) = 3 + 8x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4$.

Remarque 1

En pratique, on préfère parfois (et même souvent) écrire les polynômes en commençant par le coefficient de plus haut degré. Le raisonnement pour développer efficacement reste évidemment le même !

Exercice 2

Développer efficacement les expressions polynômiales suivantes :

1. $P(x) = (4x^2 + 2x - 1)(x^2 + x + 2)$ 2. $Q(x) = (2x - 3)(-3x^4 + x + 1)$
3. $R(x) = (2x + 1)(-x - 3)(3x + 1)$

1.3 Calcul avec des fractions

Rappel : Règles de calcul de fractions

Dans tout ce qui suit, on a $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (supposés non nuls s'ils sont au dénominateur).

- **Produit de fractions :** $\boxed{\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}}$ et en particulier $\boxed{a \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{d}}$ (car $a = \frac{a}{1}$).

- **"Simplification" d'une fraction :** $\boxed{\dfrac{a \times c}{b \times c} = \dfrac{a}{b}}$.

- **Fraction inverse :** $\boxed{\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}}$ et en particulier $\boxed{\dfrac{1}{\frac{1}{a}} = a}$.

- **Quotient de fractions :** On évitera au maximum d'écrire des quotients de fractions, peu élégants.

  Pour diviser par une fraction, on préfère multiplier par l'inverse : $\boxed{\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{a \times d}{b \times c}}$.

- **Somme/différence de fractions :** La somme/différence nécessite un dénominateur commun.

Ainsi on pourra écrire : $\boxed{\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}}$ et $\boxed{\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{b} = \dfrac{a-c}{b}}$

ou bien plus généralement : $\boxed{\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bd} + \dfrac{bc}{bd} = \dfrac{ad+bc}{bd}}$ et $\boxed{\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bd} - \dfrac{bc}{bd} = \dfrac{ad-bc}{bd}}$.

- **Fractions et signe :** $\boxed{\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}}$ et $\boxed{\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b}}$

Remarques 2

Lorsque l'on est amené à manipuler un quotient de fractions :

- Il convient de tracer un trait plus long pour la "barre de fraction principale" et de bien placer celle-ci au niveau du symbole "=". Ceci permet par exemple de distinguer les fractions $\dfrac{a}{\frac{b}{c}}$ et $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$.
- Pour simplifier l'expression, au lieu d'appliquer la règle pour les quotients de fractions, il est souvent utile de multiplier numérateur et dénominateur par un réel bien choisi !

Exemples : $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{\frac{a}{b} \times b}{c \times b} = \dfrac{a}{cb}$, $\quad \dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a \times c}{\frac{b}{c} \times c} = \dfrac{ac}{b}$, $\quad \dfrac{n}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{n \times n}{(1+\frac{1}{n}) \times n} = \dfrac{n^2}{1+n}$,

> Quelques conseils pour les calculs <

$\boxed{1}$ Si l'on souhaite simplifier une fraction, il faut faire apparaitre des facteurs communs au numérateur et au dénominateur, que l'on peut ensuite supprimer. Il s'agit donc de travailler avec des expressions "les plus factorisées possibles" au numérateur et au dénominateur !

Exemple

$$\frac{9 \times 8 \times 7}{6 \times 5 \times 4} = \frac{3 \times 3 \times 4 \times 2 \times 7}{3 \times 2 \times 4 \times 5} = \frac{3 \times 7}{5} = \frac{21}{5}.$$

Ici, il aurait été regrettable d'écrire $\frac{9\times8\times7}{6\times5\times4} = \frac{504}{120}$ et de simplifier dans un deuxième temps...
Il est beaucoup plus simple de repérer les simplifications sous forme factorisée !
Cela vaut aussi pour des expressions dépendant d'une variable. Les identités remarquables peuvent aider :

Exemple

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)\times(x+1)}{(x+1)\times(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}.$$

$\boxed{2}$ Pour une somme ou une différence de fractions, il faut déterminer un dénominateur commun.

Exemple

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{3} = \frac{1\times 3}{2\times 3}+\frac{5\times 2}{3\times 2} = \frac{3}{6}+\frac{10}{6} = \frac{13}{6}.$$

Ce dénominateur commun n'est pas forcément le produit des deux dénominateurs !
On peut parfois faire plus simple :

Exemple

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1\times(x-1)}{x\times(x-1)}+\frac{1}{x(x-1)} = \frac{(x-1)+1}{x(x-1)} = \frac{x}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1}.$$

Il aurait ici été maladroit (mais pas impossible...) de choisir $x\times x(x-1)$ comme dénominateur commun.

Exercice 3

1. Simplifier les fractions suivantes : $\quad A = \dfrac{\frac{1}{6}-\frac{1}{4}}{2}, \qquad B = \dfrac{\frac{1}{5}+\frac{4}{15}}{1+\frac{2}{5}}, \qquad C = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}}.$
2. Simplifier les expressions suivantes :

$$f(x) = \frac{4x^2}{1-\frac{2-x}{2+x}}, \qquad g(x) = \frac{x}{x-1}+\frac{x}{1-x}, \qquad h(x) = \frac{6x+4}{4-x^2}-\frac{x}{x+2},$$

$$u(x) = \frac{e^{2x}+2e^x+1}{1+e^{-x}}, \qquad v(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}+e^x}{e^{-2x}+e^{-x}}\right).$$

1.4 Calcul avec des puissances

Rappel : Règles de calcul de puissances

Dans tout ce qui suit, on a $a, b \in \mathbb{R}$ (supposés non nuls s'ils sont au dénominateur) et $n, m \in \mathbb{N}$.

- **Définition :** $a^1 = a, \quad a^2 = a\times a \quad$ et $\boxed{a^n = \underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n \text{ fois}}}$, avec la convention $\boxed{a^0 = 1}$.

  En particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 0^n = 0 \quad$ et $\quad 1^n = 1$.

- **Produits et quotients :** Les puissances sont "compatibles" avec les produits et les quotients :

$$\boxed{(a\times b)^n = a^n \times b^n} \quad \text{et} \quad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

- **Exposant négatif :** En particulier, $\left(\dfrac{1}{a}\right)^n = \dfrac{1}{a^n}$. On note $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$.

- **"Mélange" d'exposants :** $\boxed{a^n \times a^m = a^{n+m}}$, $\boxed{\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$ et $\boxed{(a^n)^m = a^{n\times m}}$.

  Ces règles sont également valables pour des exposants n, m négatifs.

Remarque 3

Les puissances ne sont **pas "compatibles" avec la somme** : $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ (sauf si $n=1$).
Il existe toutefois une formule permettant de développer $(a+b)^n$: la formule du binôme de Newton, qui sera étudiée dans l'année.

> Quelques conseils pour les calculs <

$\boxed{1}$ Les puissances ne sont pas compatibles avec les sommes/différences, mais avec les produits/quotients. Pour simplifier une expression impliquant des puissances et des sommes/différences, il faudra en général la factoriser et/ou réduire au même dénominateur les fractions qui y apparaissent.

$\boxed{2}$ Pour $n \in \mathbb{N}$, la quantité $(-1)^n$ est souvent utile et sera rencontrée régulièrement dans l'année.

Par définition de la puissance, on voit facilement que : $\boxed{(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}}$

Notons bien que $(-1)^n \neq -1^n$ et plus généralement, $(-a)^n = ((-1) \times a)^n = (-1)^n \times a^n \neq -a^n$.

Exercice 4

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = 2^{-1} - 3^{-2}, \qquad B = \frac{3}{2^3} + \frac{2^{-2}}{4}, \qquad C = \frac{\frac{1}{2^n}}{4^n}, \qquad D = \frac{1}{\frac{2^n}{4^n}}, \qquad E = \frac{(-1)^n}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n},$$

$$F = (2^n + 2^{n-1}) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n, \qquad G = \frac{x^{2n} - 2x^{4n} + x^{6n}}{x^{2n} - 1}, \qquad H = \frac{x^{2n}-1}{x^n - 1}.$$

1.5 Exponentielle et logarithme

Rappel : Propriétés de l'exponentielle.

- **Domaine et image :** $\exp : x \mapsto e^x$ est une fonction $\boxed{\text{strictement croissante de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}_+^*}$.
- **Dérivée et valeur particulière :** $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x) = e^x}$ et $\boxed{\exp(0) = e^0 = 1}$.
- **Limites au bord du domaine :** $\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$ et $\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$.
- **Règles de calcul :** exp transforme la somme en produit et la différence en quotient :

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\boxed{e^{a+b} = e^a \times e^b}$ et $\boxed{e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}}$. En particulier : $\boxed{e^{-a} = \frac{1}{e^a}}$.

On a également, pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{e^{n \times a} = (e^a)^n}$ $\left(\text{et on rajoute } \boxed{\sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}}\right)$.

Remarque 4

Les règles de calcul pour l'exponentielle ressemblent fortement aux règles de calcul de puissances : ceci justifie la notation e^x pour désigner la valeur $\exp(x)$.

Rappel : Propriétés du logarithme népérien

- **Domaine et image :** $\ln : x \mapsto \ln(x)$ est une fonction $\boxed{\text{strictement croissante de } \mathbb{R}_+^* \text{ dans } \mathbb{R}}$.

- **Dérivée et valeur particulière :** $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}}$ et $\boxed{\ln(1) = 0}$.

- **Limites au bord du domaine :** $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty}$.

- **Règles de calcul :** ln transforme le produit en somme et le quotient en différence :

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\boxed{\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)}$ et $\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$.

En particulier : $\boxed{\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)}$.

On a également, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\ln(a^n) = n\ln(a)}$.

Plus généralement, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, $\boxed{\ln(a^b) = b\ln(a)}$. En particulier : $\boxed{\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)}$.

Remarque 5

Les règles de calcul pour ln sont le miroir parfait de celles pour exp.

Exercice 5

Simplifier autant que possible les expressions suivantes.

1. $\ln(4)$, 2. $\ln(8e)$, 3. $\ln(\sqrt{2})$, 4. $\ln(1/2) + \ln(2/3) + \ln(3/4) + \ln(4/5) + \ln(5/6)$.

1.6 Racine carrée, valeur absolue

Rappel : Propriétés de la racine carrée

- **Définition :** Pour tout $a \geqslant 0$, $\boxed{\sqrt{a} \text{ est l'unique réel positif dont le carré est } a}$.

- **Résolution d'équation :** Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation $\boxed{x^2 = a}$ d'inconnue x :

- Admet deux solutions distinctes si $a > 0$: $x = \sqrt{a} > 0$ et $x = -\sqrt{a} < 0$.
- Admet une seule solution si $a = 0$: c'est $x = 0$.
- N'admet aucune solution réelle si $a < 0$.

- **Règles de calcul** : Pour tous $a, b \geqslant 0$, $\boxed{\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$ et $\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$ (pour $b > 0$)

On pourra retenir, pour $a > 0$: $\boxed{\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}}$.

Remarque 6

Pour $a > 0$, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. On donnera rapidement un sens précis à cette notation dans l'année.

Exercice 6

Simplifier les expressions suivantes (les mettre sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b le plus petit possible) :

$$A = \sqrt{50}, \qquad B = \sqrt{27}, \qquad C = \sqrt{3} \times \sqrt{6} \times \sqrt{8}, \qquad D = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{21}}.$$

Rappel : Notion de valeur absolue

- **Définition :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}}$ On a donc toujours $|x| \geqslant 0$.

- **Interprétation utile :** $|x-y|$ s'interprète comme la distance entre x et y sur la droite réelle.

Exercice 7

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \sqrt{x^2}$.

2 Résolution d'équations

Pour la résolution d'équation, on raisonnera souvent par équivalence. Dans la suite, on emploiera donc le symbole " $\Longleftrightarrow$ " entre deux égalités. Ce symbole a un sens précis : celui d'une **double implication**.

$$\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B} \quad \text{signifie : } \quad \text{"}\mathcal{A} \text{ implique } \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B} \text{ implique } \mathcal{A}\text{".}$$

On fera donc bien attention à ne l'employer que lorsque cette double implication est vérifiée !

Exemples

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences :

$$x^2 + 1 = x(x+2) \Longleftrightarrow x^2 + 1 = x^2 + 2x \Longleftrightarrow 1 = 2x \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

À chaque utilisation du symbole " $\Longleftrightarrow$ ", on s'assure de la double implication.
(On peut aller "dans le sens direct" ou bien "remonter les calculs" à chaque étape).

- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence : $x = y \Longleftrightarrow e^x = e^y$.
L'implication $\Rightarrow$ s'obtient "en passant à l'exponentielle", $\Leftarrow$ s'obtient "en passant au logarithme".

- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on n'a pas l'équivalence $x = y \Longleftrightarrow x^2 = y^2$!
L'implication $\Rightarrow$ est évidemment vraie, mais pas l'implication $\Leftarrow$.
Par exemple : $(-2)^2 = 2^2$ mais $-2 \neq 2$.

2.1 Équations "simples"

En plus des opérations habituelles sur les égalités (développement, factorisation, "passer" un terme de l'autre côté de l'égalité...), rappelons les propriétés fondamentales suivantes :

Rappel : Propriétés utiles pour la résolution d'équations

- **Produit nul :** Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\boxed{a \times b = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0}$

- **Fraction nulle :** Pour tous $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $\boxed{\frac{a}{b} = 0 \Longleftrightarrow a = 0}$

- **Égalité de fractions :** Pour tous $a, c \in \mathbb{R}$, $b, d \in \mathbb{R}^*$, $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \times d = c \times b}$

- **Utilisation de la bijectivité :** On dit qu'une fonction f de I dans J est bijective lorsque tout élément de J admet un unique antécédent dans I par f. On a alors, pour tous $x, y \in I$:

$$\boxed{f(x) = f(y) \Longleftrightarrow x = y}$$

Fonctions bijectives classiques : exp de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, ln de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$,
$x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{x}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarques 7

- La notion de bijectivité sera étudiée plus précisément en début d'année.

On pourra ici affirmer que : Pour tous $x, y > 0$, $\ln(x) = \ln(y) \Longleftrightarrow x = y$.
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x^3 = y^3 \Longleftrightarrow x = y$.
Pour tous $x, y \geqslant 0$, $x^2 = y^2 \Longleftrightarrow x = y$.
Pour tous $x, y \leqslant 0$, $x^2 = y^2 \Longleftrightarrow x = y$.

- On notera que pour pouvoir passer au carré dans une égalité en conservant l'équivalence, il faut impérativement que les deux membres de l'égalité soient de même signe !

Si les signes de x et de y sont opposés ou inconnus, l'égalité $x = y$ n'est pas équivalente à $x^2 = y^2$.

Le résultat suivant, déjà mentionné, est souvent utile dans tous les cas :

$$\text{Pour tous } x \in \mathbb{R} \text{ et } a > 0, \quad \boxed{x^2 = a \Longleftrightarrow x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}}$$

Méthode : Résolution d'une équation "simple" par équivalences successives

$\boxed{1}$ Déterminer le domaine de validité de l'équation,
c'est à dire l'ensemble des réels x tels que l'équation ait un sens.

$\boxed{2}$ Utiliser les propriétés précédentes pour "modifier" l'équation à l'aide d'équivalences successives,
jusqu'à parvenir à isoler x. Il est bien souvent utile de mettre "les termes en x" d'un côté,
"les termes constants" de l'autre.

$\boxed{3}$ Vérifier que la ou les solutions trouvées à l'issue des équivalences appartiennent bien au domaine de validité de l'équation.

Exemples

- Le domaine de validité de l'équation $(E) : \ x + 2 = 3 - x$ est $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences : $x + 2 = 3 - x \Longleftrightarrow 2x = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
On a bien $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$. L'équation (E) admet ainsi une unique solution : $\frac{1}{2}$.

- Le domaine de validité de l'équation $(E') : \ \sqrt{x-1} = \sqrt{2x}$ est $[1, +\infty[$.

(car l'équation n'a de sens que lorsque $x - 1 \geqslant 0$ et $2x \geqslant 0$, c'est à dire lorsque $x \geqslant 1$).

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, puisque la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$, on a les équivalences :

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{2x} \Longleftrightarrow x - 1 = 2x \Longleftrightarrow x = -1.$$

Or $-1 \notin [1, +\infty[$: la solution est donc à rejeter. L'équation (E') n'admet donc pas de solution.

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes :

(A) : $\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x+1} = 0$, (B) : $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(x+2)$, (C) : $2e^{-x} - e^{-2x} = 0$,

(D) : $(x+2)^2 = 1$, (E) : $\sqrt{\ln(x)} = \big(\ln(x)\big)^2$.

2.2 Équations du second degré

Rappel : Résolution d'une équation polynômiale de degré 2

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Pour résoudre l'équation $(E) : ax^2 + bx + c = 0$:

On calcule le discriminant $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$, puis :

- Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une unique solution : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation (E) n'admet pas de solution réelle.

> Quelques conseils pour les calculs <

$\boxed{1}$ Si on peut <u>éviter de calculer le discriminant</u>, en reconnaissant une "forme simple" on le fera sans hésiter ! Pour cela, il faut souvent faire bon usage des identités remarquables :

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \quad \text{et} \quad \boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}.$$

Exemples

- $x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.
- $x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$.

Dans ces deux cas, il aurait été dommage de calculer le discriminant...

$\boxed{2}$ La méthode de résolution pour les "équations simples" de la section précédente s'applique également dans cette section, à ceci près que l'on rencontrera une équation du second degré à un certain moment du raisonnement. Il faudra souvent se ramener à une équation du second degré en posant un "changement d'inconnue". On fera bien attention à revenir à l'inconnue initiale à la fin de la résolution.

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence : $e^{2x} - e^x - 2 = 0 \iff (e^x)^2 - e^x - 2 = 0$.

On résout l'équation $y^2 - y - 2 = 0$, on trouve deux solutions : $y = -1$ ou $y = 2$.

On a donc : $e^{2x} - e^x - 2 = 0 \iff e^x = -1$ ou $e^x = 2 \iff e^x = 2 \iff x = \ln(2)$.
($e^x = -1$ est exclu puisque exp est une fonction positive sur $\mathbb{R}$!).

Exercice 9

Résoudre les équations suivantes :

(A) : $-2x^4 + 3x^2 + 2 = 0$, (B) : $\ln(x) + \ln(x+1) = 0$, (C) : $1 - 2e^x = \dfrac{e^{-x}}{3}$, (D) : $x - \sqrt{x} = \dfrac{3}{2}$.

3 Inégalités

3.1 Démontrer une inégalité

Rappelons quelques règles générales sur les signes.

Rappel : Signe d'un produit, d'un quotient, d'une somme

Signe de a	Signe de b	Signe de $a \times b$	Signe de a/b	Signe de $a+b$
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$	$-$	inconnu
$-$	$+$	$-$	$-$	inconnu
$-$	$-$	$+$	$+$	$-$

Les opérations suivantes préservent les inégalités :

Rappel : Opérations préservant une inégalité

- Ajouter un réel quelconque : Si $x \leqslant y$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $x + \alpha \leqslant y + \alpha$.
- Multiplier par un réel positif : Si $x \leqslant y$ et $\alpha \geqslant 0$, alors $\alpha \times x \leqslant \alpha \times y$.
- Ajouter des inégalités : Si $x \leqslant y$ et $a \leqslant b$, alors $x + a \leqslant y + b$.
- Multiplier des inégalités de nombres positifs : Si $0 \leqslant x \leqslant y$ et $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $x \times a \leqslant y \times b$.
- Composer par une fonction f croissante : Si $x \leqslant y$ alors $f(x) \leqslant f(y)$.

Fonctions croissantes classiques : exp sur $\mathbb{R}$, ln sur $\mathbb{R}_+^*$,
$x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, etc...

Les opérations suivantes "renversent" les inégalités :

Rappel : Opérations renversant une inégalité

- Multiplier par un réel négatif : Si $x \leqslant y$ et $\alpha \leqslant 0$, alors $\alpha \times x \geqslant \alpha \times y$.
- Passer à l'inverse si les deux membres sont de même signe :

$$\text{Si } 0 < x \leqslant y, \text{ alors } \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}, \qquad \text{Si } x \leqslant y < 0, \text{ alors } \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}.$$

- Composer par une fonction f décroissante : Si $x \leqslant y$ alors $f(x) \geqslant f(y)$.

Remarques 8

• Les règles précédentes tiennent toujours en remplaçant toutes les inégalités larges par des inégalités strictes (et en prenant f strictement croissante/décroissante).

• Si $x \leqslant y$ avec x et y de signes opposés, on ne peut pas passer à l'inverse "facilement".
Par ailleurs, on ne peut pas diviser deux inégalités (même avec des nombres positifs !).
Si nécessaire, on procédera d'abord à un passage à l'inverse, puis à une multiplication.

• Il faut toujours être prudent quand on passe au carré dans une inégalité !
On peut retrouver rapidement les règles suivantes à l'aide du graphe de $x \mapsto x^2$:

$$\boxed{\text{Si } 0 \leqslant x \leqslant y \text{ alors } x^2 \leqslant y^2}, \qquad \boxed{\text{Si } x \leqslant y \leqslant 0 \text{ alors } x^2 \geqslant y^2},$$

Si x et y sont de signes opposés : on ne peut rien dire.

Méthode : Démontrer une inégalité

Soient $A, B \in \mathbb{R}$ (dépendant éventuellement d'un réel x). Pour montrer l'inégalité $A \leqslant B$:

$\boxed{1}$ **Méthode "directe" :** On montre l'inégalité "directement" en utilisant les règles précédentes.

Il est souvent utile de considérer plutôt la différence $B - A$ et de montrer que $\boxed{B - A \geqslant 0}$.
Puisqu'il est plus simple d'étudier le signe d'un produit ou d'un quotient,
on essaiera de factoriser au maximum.

$\boxed{2}$ **Étude de fonction :** Disons que $A = A(x)$ et $B = B(x)$ dépendent d'un réel $x \in I$.

Si l'on ne parvient pas à montrer l'inégalité directement, on peut établir le tableau
de variation de la fonction $f : x \mapsto B(x) - A(x)$ sur I pour en déduire que $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

Exemples

- Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer que $xy \leqslant \dfrac{x^2 + y^2}{2}$.

Méthode directe : On étudie la différence $\dfrac{x^2 + y^2}{2} - xy = \dfrac{x^2 + y^2 - 2xy}{2} = \dfrac{(x-y)^2}{2} \geqslant 0$, CQFD.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer que $e^x \geqslant 1 + x$.

Étude de fonction : On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - (1 + x)$. Étudions la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = e^x - 1$, d'où on déduit l'équivalence : $f'(x) \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$.
On a donc facilement le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(Les limites en $\pm\infty$ ne sont pas utiles pour le raisonnement, mais elles sont faciles à déterminer ici).
Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$, c'est à dire $e^x - (1 + x) \geqslant 0$, CQFD.

> Quelques conseils pour les calculs <

Il est nécessaire de connaître et d'exploiter les inégalités suivantes (entre autres) :

- Puissances de x (pour $n \in \mathbb{N}^*$) : $\boxed{\forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant x^n \leqslant 1}$ et $\boxed{\forall x \geqslant 1,\ x^n \geqslant 1}$.
- Exponentielle : $\boxed{\forall x \leqslant 0,\ \ 0 < e^x \leqslant 1}$ et $\boxed{\forall x \geqslant 0,\ \ e^x \geqslant 1}$.
- Cosinus et sinus : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1}$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1}$.

Exercice 10

1. Comparer les nombres $\dfrac{2}{7}$ et $\dfrac{3}{8}$. 2. Comparer les nombres $\dfrac{1}{\ln(2)}$ et $\dfrac{2}{\ln(3)}$

3. Encadrer $\sqrt{29}$ par deux entiers consécutifs.

Exercice 11

Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ (1 + x)^2 \geqslant 4x$, 2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{2 + \cos(x)}{2 + \sin(x)} \leqslant 3$. 3. $\forall x > 0,\ 2\ln(x) < x$.

3.2 Inéquations "simples"

Pour résoudre une inéquation, on procédera par équivalences successives (comme pour les équations !) en appliquant les règles vues précédemment pour les inégalités. Au cours des équivalences, on pourra ainsi "passer" un terme de l'autre côté de l'inégalité, multiplier/diviser par un réel (mais attention à son signe !)... Le résultat général suivant sera aussi utile :

Rappel : Fonctions strictement croissantes et inégalités

Si f est une fonction strictement croissante sur un intervalle I, alors pour tous $x, y \in I$,

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

Autrement dit, l'équivalence et le sens de l'inégalité sont maintenus en composant par une fonction strictement croissante. Ceci reste valable avec des inégalités strictes.

Remarque 9

À nouveau, il faut faire bien attention avec les carrés dans les inégalités !
On peut retrouver rapidement les règles suivantes à l'aide du graphe de $x \mapsto x^2$: pour $a \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{x^2 \leqslant a \Longleftrightarrow -\sqrt{a} \leqslant x \leqslant \sqrt{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x^2 \geqslant a \Longleftrightarrow x \geqslant \sqrt{a} \text{ ou } x \leqslant -\sqrt{a}}\ .$$

Ceci reste valable avec des inégalités strictes.

Méthode : Résolution d'une inéquation "simple" par équivalences successives

$\boxed{1}$ Déterminer le domaine de validité de l'inéquation,
c'est à dire l'ensemble des réels x tels que l'inéquation ait un sens.

$\boxed{2}$ Utiliser les propriétés précédentes pour "modifier" l'inéquation à l'aide d'équivalences successives, jusqu'à parvenir à isoler x. Il est bien souvent utile de mettre "les termes en x" d'un côté, "les termes constants" de l'autre.

$\boxed{3}$ Limiter les solutions trouvées au domaine de validité de l'inéquation.

Exemples

• Le domaine de validité de l'inéquation $(E) :\ \ln(x) \leqslant \ln(1-x)$ est $]0, 1[$.
(cette inéquation a un sens lorsque $x > 0$ et $1 - x > 0$).
Soit $x \in]0, 1[$. La fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a les équivalences :

$$\ln(x) \leqslant \ln(1-x) \iff x \leqslant 1 - x \iff 2x \leqslant 1 \iff x \leqslant \frac{1}{2}.$$

Conclusion : (E) admet comme ensemble de solutions $]0, \frac{1}{2}]$.

• Le domaine de validité de l'inéquation $(E') :\ x^4 > x^3$ est $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il ne faut surtout pas diviser par x^3 dans l'inégalité $x^4 > x^3$, puisque le signe de x^3 n'est pas connu ! La bonne méthode consiste à tout mettre à gauche puis à factoriser :

$$x^4 > x^3 \iff x^4 - x^3 > 0 \iff x^3(x-1) > 0$$

On s'aide alors d'un tableau de signes (c'est un raisonnement classique) :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x^3(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi : $x^4 > x^3 \iff x < 0$ ou $x > 1$.
Conclusion : (E') admet comme ensemble de solutions $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 12

Résoudre les inéquations suivantes :

(A) : $\dfrac{x+1}{x} \leqslant \dfrac{x}{x+1}$, (B) : $(x+2)^2 \leqslant 1$, (C) : $\sqrt{2x-1} > x$, (D) : $\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x) \leqslant 3$.

3.3 Inéquations se ramenant à une équation du second degré

Rappel : Signe d'un polynôme de degré 2

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et P le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^2 + bx + c$.

Pour déterminer le signe de P il est nécessaire de déterminer ses racines.

On calcule donc le discriminant $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$, puis :

- Si $\Delta > 0$ alors P admet deux racines distinctes $x_1 < x_2$.

Dans ce cas P est du signe de a est l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, alors P admet une unique racine x_0. Dans ce cas P est du signe de a :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta < 0$, alors P n'admet pas de racine réelle. Dans ce cas P est du signe de a :

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

> Quelques conseils pour les calculs <

$\boxed{1}$ À nouveau, si on peut éviter de calculer le discriminant, en reconnaissant une "forme simple" ou une identité remarquable, on le fera sans hésiter !

$\boxed{2}$ La méthode de résolution pour les inéquations "simples" de la section précédente s'applique également dans cette section, à ceci près que l'on rencontrera un polynôme du second degré à un certain moment du raisonnement. Il faudra souvent effectuer un "changement d'inconnue" : à nouveau, on fera bien attention à revenir à l'inconnue initiale à la fin de la résolution.

Exercice 13

Résoudre les inéquations suivantes :

(A) : $-2x^4 + 3x^2 + 2 \geqslant 0$, (B) : $\ln(x) + \ln(x+1) \leqslant 0$, (C) : $x > \sqrt{2-x}$.

4 Etude de fonctions

L'étude rigoureuse de la dérivabilité d'une fonction et ses conséquences fera l'objet d'un chapitre à part entière en cours d'année. On se contente ici de rappeler les règles de calcul de dérivées vues au lycée.

Rappel : Calcul de dérivée

Soient $C \in \mathbb{R}$ une constante, $n \in \mathbb{Z}^*$ un entier relatif, u et v des fonctions dérivables.
Sous réserve que les expressions soient bien définies, on a les formules de dérivation suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$f(x)$	$f'(x)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$C \cdot u(x)$	$C \cdot u'(x)$
$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$
$u(x)^n$	$n \cdot u'(x) \cdot u(x)^{n-1}$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$e^{u(x)}$	$u'(x) \cdot e^{u(x)}$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$

Exercice 14

Déterminer le domaine de définition puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}, \qquad g(x) = \ln\left(\frac{x-3}{x^2-4}\right), \qquad h(x) = (3x+2)e^{x^2+x-1}$$

Le signe de la dérivée f' nous renseigne ensuite sur le sens de variation de f.
Dès lors, en mettant à profit les techniques de résolution d'inéquations vues précédemment, on peut déterminer quels réels x satisfont l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$, en déduire un tableau de signe de f', puis un tableau de variation de f.

Exercice 15

1. Faire l'étude complète de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$: domaine de définition, dérivée, tableau de variations complet (limites comprises), allure du graphe.

2. Faire l'étude complète de la fonction définie par $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$: domaine de définition, dérivée, tableau de variations complet (limites comprises), allure du graphe.
Déduire de cette étude l'inégalité : $\pi^e < e^\pi$.

Vous voilà enfin venu à bout de cette quinzaine d'exercices de calcul basiques !

S'il vous reste du temps et de l'énergie, il peut également être bon de re-travailler le calcul de primitives. Mais ne négligez pas les lectures et le travail estival en langues, lettres, philo, ESH/HGGMC...

Bienvenue en prépa !