18

Équivalence et négligeabilité

Exercice 1 (Vrai ou faux ?)

(a) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

(b) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors u et v ont la même limite.

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0 \iff e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$.

(d) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$.

Négligeabilité

Exercice 2 (Echelle de grandeur 1)

Dans chaque cas, classer les termes généraux ci-dessous par "ordre de négligeabilité".

(a) $\dfrac{1}{n}$ $\quad \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ $\quad \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ $\quad \dfrac{(\ln n)^3}{n}$ $\quad \dfrac{1}{n\ln(n)}$

(b) n $\quad n\sqrt{n}$ $\quad \dfrac{(\ln n)^3}{\sqrt{n}}$ $\quad \dfrac{n^2}{(\ln n)^5}$ $\quad \sqrt{n\ln(n)}$

Exercice 3 (Echelle de grandeur 2)

$f_1(x) = e^{-x}$ $\quad f_2(x) = 1$ $\quad f_3(x) = \dfrac{1}{x}$

$f_4(x) = e^{x}$ $\quad f_5(x) = x^2$ $\quad f_6(x) = x,$

$f_7(x) = \ln(x)$ $\quad f_8(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad f_9(x) = 2^x$

Classer ces fonctions par "ordre de négligeabilité" au voisinage de :

(a) $+\infty$ (b) 0 (sauf f_1, f_2 et f_9)

(c) $-\infty$ (sauf f_7)

Calculs directs d'équivalents

Exercice 4 (Facile)

Déterminer un équivalent simple lorsque $n \to +\infty$.

(a) $\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{2n}$ (b) $\dfrac{2n^2+1}{1+2n-n^3}$

(c) $\left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)(n+\sqrt{n})$ (d) $\dfrac{1}{e^{3n} + \ln(2n)}$

(e) $(n^2 + \cos(n) + 2)^3$ (f) $\sqrt{n-1}$

Exercice 5 (Moins facile)

Déterminer un équivalent simple lorsque $n \to +\infty$.

(a) $\ln(2n^2+1)$ (b) $\exp\left(n + \dfrac{1}{n}\right)$

(c) $e^{1/n} - 1 + \tan\left(\dfrac{2}{n}\right)$ (d) $e^n - 3^n + 2n$

(e) $\sqrt{n^2+n} + n + \sqrt{n}$ (f) $n^{1/n} - 1$

Exercice 6 (Limites de fonctions)

Chercher un équivalent pour déterminer les limites :

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2 - x}{-5x^3 + x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 - x}{-5x^3 + x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+3x} - 1}{\sqrt{x}}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x}$

Exercice 7 (Étude de signe)

Étudier le signe de f au voisinage de $+\infty$.

$$f(x) = \frac{3x^3 - 4x^2 + 3}{-x^2 + 10x + 5}$$

Exercice 8 (Équivalent de arctan)

Montrer que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Indication : Utiliser l'équivalent de $\tan(y)$ *en* 0.

Équivalents à partir d'encadrements

Exercice 9 (Méthode générale)

Trouver un équivalent simple de u_n lorsque :

(a) $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant \dfrac{u_n}{n+1} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2n}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N},\ n + \sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant n + 2\sqrt{n}$.

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1)u_n = 2$

Exercice 10 (Série harmonique)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. ("série harmonique").

1. Montrer : $\forall x \geqslant 1,\ \dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.
2. Déduire un encadrement puis un équivalent de S_n.

Exercice 11 (Équivalent de $\ln(n!)$)

1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$,
$\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln(t)dt \leqslant \ln k \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln(t)dt.$
2. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$,
$\displaystyle\int_{1}^{n} \ln(t)dt \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_{2}^{n+1} \ln(t)dt.$
3. En déduire finalement $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

Exercice 12 (Équivalent d'une fonction définie par une intégrale)

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^4}dt.$

1. Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1 + t^2$
2. En déduire un encadrement de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$, puis un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

Exercices classiques

Exercice 13 (Équivalent d'une suite récurrente)

On pose $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1, 2]$.

2. En déduire que la suite converge vers 1.
(Indication : Trouver un encadrement de u_n !)

3. Déterminer un équivalent de $u_n - 1$.

4. En déduire que l'on peut écrire :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 14 (Équivalent d'une suite implicite)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel strictement positif u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) = u_n$.
(b) En déduire que (u_n) est décroissante .
(c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. Établir l'équivalent : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n} - u_n$.
(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ na_n = u_n^5$.
(b) En déduire un équivalent de a_n.
(c) En déduire finalement que l'on peut écrire :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} n^{-1} - n^{-6} + o(n^{-6}).$$

Exercice 15 (Une autre suite implicite)

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x^n e^x = 1$ possède une unique solution positive notée x_n, et que, de plus, $x_n \in]0, 1[$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = e^{\frac{-x_n}{n}}$,
et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

3. Déterminer un équivalent de $x_n - 1$.

4. En déduire finalement : $x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 16 (Composer un équivalent par ln)

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a telles que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.
On suppose également $f > 0$ au voisinage de a (donc $g > 0$ aussi).

(a) Montrer que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors :

$$\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \ln(g(x)).$$

(Indication : on pourra écrire $f(x) = g(x) \times \frac{f(x)}{g(x)}$)

(b) Montrer que c'est faux lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$!
(On pourra trouver un contre-exemple)

Oral ESCP 2017

On admet la propriété suivante (Théorème de Césaro) : Pour toute suite réelle $(a_n)_{n\geqslant 1}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \ell$$

Autrement dit, si une suite converge vers une limite ℓ, alors la suite de ses moyennes converge aussi vers ℓ.

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $u_1 = 2$, $u_2 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \geq 1,\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{1 + u_{n+1}\sqrt{u_{n+1}u_n}}$$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie.
   (b) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
2. Montrer que la suite de terme général $a_n = \dfrac{1}{u_{n+2}^2} - \dfrac{1}{u_{n+1}^2}$ converge vers 2.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ en fonction de n et u_{n+2}.
4. En déduire finalement un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.