\# **Samedi 12 Avril 2025**

Devoir Sur Table n°6 – Corrigé

Problème 1 : S.E.V supplémentaires à partir d'un endomorphisme

(Inspiré très librement de EDHEC 2016 voie ECS)

Partie I - Quelques exemples

1. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est une automorphisme, alors f est bijectif. On a donc $Ker(f) = \{0_E\}$ et $Im(f) = E$.
   Il est alors évident que $\boxed{E = \{0_E\} \oplus E = Ker(f) \oplus Im(f)}$.
   ($\{0_E\} + E = E$ et la somme est directe car l'intersection des deux ensembles donne $\{0_E\}$ par exemple)

Dans la suite de cette partie, on se place dans le cas particulier $E = \mathbb{R}^3$ et on définit les endomorphismes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{1}{3} \cdot (x+y+z, x+y+z, x+y+z) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y, x-y+z, -y+2z) \end{array}$$

2. Il s'agit de vérifier que $f^2 = f$.
   Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, notons $(x',y',z') = f(x,y,z) = \left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}\right)$.
   Ainsi $x' = y' = z' = \frac{x+y+z}{3}$.
   On a alors $f(f(x,y,z)) = f(x',y,z') = \left(\frac{x'+y'+z'}{3}, \frac{x'+y'+z'}{3}, \frac{x'+y'+z'}{3}\right)$.
   Un simple calcul permet de vérifier que $\frac{x'+y'+z'}{3} = \frac{x+y+z}{3}$.
   On obtient donc $f(f(x,y,z)) = \left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}\right) = f(x,y,z)$.
   C'est valable pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a donc montré que $f \circ f = f$, i.e $\boxed{f^2 = f}$.
   Ainsi f est un projecteur. On sait alors qu'il s'agit forcément du projecteur sur $F = Im(f)$ parallèlement à $G = Ker(f)$. En particulier, ces deux SEV sont supplémentaires dans E : $\boxed{E = Ker(f) \oplus Im(f)}$.

3. • $Im(g) = Vect\Big(g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1)\Big) = Vect\Big((2,1,0), (-1,-1,-1), (0,1,2)\Big)$.
   Or on remarque par exemple que $(-1,-1,-1) = -\frac{1}{2}((2,1,0) + (0,1,2))$.
   On a donc $Im(g) = Vect\Big((2,1,0), (0,1,2)\Big)$. La famille $\boxed{\Big((2,1,0), (0,1,2)\Big)}$ est ainsi génératrice de $Im(g)$ et elle est libre (deux vecteurs non-colinéaires), c'est donc une base de $Im(g)$.
   • Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x,y,z) \in Ker(g) \iff g(x,y,z) = (0,0,0) \iff \begin{cases} 2x - y &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ -y + 2z &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - y &= 0 \\ -y + 2z &= 0 \\ -y + 2z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = x \end{cases}$$

   On a donc $Ker(g) = \{(x, 2x, x), x \in \mathbb{R}\} = Vect\Big((1,2,1)\Big)$.
   La famille $\boxed{\Big((1,2,1)\Big)}$ est ainsi génératrice de $Ker(g)$ et elle est libre (un seul vecteur non-nul), c'est donc une base de $Ker(g)$.
   • Enfin, pour montrer que $E = Ker(g) \oplus Im(g)$, il suffit de vérifier que la concaténation d'une base de $Ker(g)$ et d'une base de $Im(g)$ est une base de E, c'est à dire une base de $\mathbb{R}^3$.
   On doit donc vérifier que :

$$\mathcal{B} = \Big((1,2,1), (2,1,0), (0,1,2)\Big) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

Puisque $Card(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, il suffit par exemple de vérifier que $\mathcal{B}$ est une famille libre.
Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a les équivalences :

$$a(1,2,1) + b(2,1,0) + c(0,1,2) = (0,0,0) \iff \begin{cases} a + 2b & = 0 \\ 2a + b + c & = 0 \\ a \quad + 2c & = 0 \end{cases} \iff [...] \iff a = b = c = 0.$$

Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de R^3, d'où : $\boxed{E = Ker(g) \oplus Im(g)}$.
Notons qu'ici g n'est pas un projecteur pour autant ! (un calcul montrerait que $g \circ g \neq g$)

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé. L'endomorphisme $g - \lambda Id_E$ est injectif si et seulement si $Ker(g - \lambda Id_E) = \{0_E\}$.
Il faut que l'équation $(g - \lambda Id_E)(x,y,z) = (0,0,0)$ admette l'unique solution $(x,y,z) = (0,0,0)$.
Etudions cette équation. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} (g - \lambda Id_E)(x,y,z) = (0,0,0) &\iff (2x - y, x - y + z, -y + 2z) - \lambda(x,y,z) = (0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} (2-\lambda)x & -y & & = 0 \\ x & +(-1-\lambda)y & +z & = 0 \\ & -y & +(2-\lambda)z & = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x & +(-1-\lambda)y & +z & = 0 & (L_1) \\ & -y & +(2-\lambda)z & = 0 & (L_2) \\ (2-\lambda)x & -y & & = 0 & (L_3) \end{cases} \end{aligned}$$

On cherche à quelle condition (sur λ) ce système est de Cramer. Ramenons-le à un système triangulaire.
On démarre le pivot de Gauss avec l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda)L_1$. Le coeff devant y devient alors :

$$-1 - (2-\lambda)(-1-\lambda) = -\lambda^2 + \lambda + 1$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} x & +(-1-\lambda)y & +z & = 0 & (L_1) \\ & -y & +(2-\lambda)z & = 0 & (L_2) \\ & (-\lambda^2+\lambda+1)y & -(2-\lambda)z & = 0 & (L_3) \end{cases}$$

On simplifie ensuite les z de la dernière ligne avec l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$\begin{cases} x & +(-1-\lambda)y & +z & = 0 & (L_1) \\ & -y & +(2-\lambda)z & = 0 & (L_2) \\ & (-\lambda^2+\lambda)y & & = 0 & (L_3) \end{cases}$$

En ré-ordonnant les variables, on obtient bien un système triangulaire :

$$\begin{cases} x & +z & +(-1-\lambda)y & = 0 & (L_1) \\ & (2-\lambda)z & -y & = 0 & (L_2) \\ & & \lambda(-\lambda+1)y & = 0 & (L_3) \end{cases}$$

Ce système est de Cramer (donc admet l'unique solution $(0,0,0)$) si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non-nuls. La condition est donc :

$$2 - \lambda \neq 0 \text{ et } \lambda(-\lambda+1) \neq 0 \quad \text{c'est à dire} \quad \lambda \notin \{0,1,2\}.$$

On a bien montré : $\boxed{g - \lambda Id_E \text{ est injectif si et seulement si } \lambda \notin \{0,1,2\}}$

5. (a) • On a déjà vu en question 3. que $Ker(g) = Vect\Big((1,2,1)\Big)$. $\boxed{\text{Base de } Ker(g) : \Big((1,2,1)\Big)}$.

• On a $(x,y,z) \in Ker(g - Id_E)$ lorsque :

$$g(x,y,z) - (x,y,z) = (0,0,0) \iff (x - y, x - 2y + z, -y + z) = (0,0,0) \iff x = y = z.$$

On obtient alors $Ker(g - Id) = \{(x,x,x), x \in \mathbb{R}\} = Vect\Big((1,1,1)\Big)$.

$\boxed{\text{Base de } Ker(g - Id_E) : \Big((1,1,1)\Big)}$.

- On a $(x,y,z) \in Ker(g-2Id_E)$ lorsque :

$$g(x,y,z)-2(x,y,z)=(0,0,0) \iff (-y,x-y+z,-y)=(0,0,0) \iff y=0 \text{ et } z=-x$$

On obtient alors $Ker(g-2Id)=\{(x,0,-x), x\in\mathbb{R}\}=Vect\Big((1,0,-1)\Big)$.

$\boxed{\text{Base de } Ker(g-2Id_E) : \Big((1,0,-1)\Big)}$.

(b) Pour montrer $E=Ker(g)\oplus Ker(g-Id_E)\oplus Ker(g-2Id_E)$, il suffit de vérifier que la concaténation

$$\mathcal{B}=\Big((1,2,1),(1,1,1),(1,0,-1)\Big) \text{ est une base de } E=\mathbb{R}^3.$$

Comme précédemment, il suffit par exemple de vérifier que c'est une famille libre. On peut également travailler avec le rang et montrer, à l'aide d'opérations sur les vecteurs que

$$rg(\mathcal{B})=rg\Big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\Big)=3.$$

Tout ceci est bien-sûr à détailler un minimum.
Bref, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, donc $\boxed{E=Ker(g)\oplus Ker(g-Id_E)\oplus Ker(g-2Id_E)}$.

Partie II - Les symétries

On dit qu'un endomorphisme $f\in\mathcal{L}(E)$ est une *symétrie* lorsqu'il satisfait : $f^2=Id_E$.
On définit dans ce cas les ensembles $E_1=Ker(f-Id_E)$ et $E_{-1}=Ker(f+Id_E)$.

Il est essentiel de noter dans cette partie que $\boxed{E_1=\{v\in E \,|\, f(v)=v\} \text{ et } E_{-1}=\{v\in E \,|\, f(v)=-v\}}$

6. (a) Il est clair que $f: A\mapsto {}^tA$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$f^2(A)=f(f(A))={}^t\,({}^tA)=A=Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(A)$$

Ceci montre que $f^2=Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$: $\boxed{f \text{ est une symétrie}}$. On remarque alors que :
$\boxed{E_1=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, f(A)=A\}=S_n(\mathbb{R})}$ (ensemble des matrices symétriques)
$\boxed{E_{-1}=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, f(A)=-A\}=A_n(\mathbb{R})}$ (ensemble des matrices antisymétriques)

(b) Il est clair que f est un endomorphisme de $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
(si ce n'est pas clair, c'est un bon exercice de poser h_1 et h_2 des fonctions, $\lambda\in\mathbb{R}$, et vérifier proprement que $f(h_1+\lambda h_2)=f(h_1)+\lambda f(h_2)$)
Pour toute fonction $h\in E$, $g=f(h)$ est la fonction définie par

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=h(-x)$$

En appliquant de nouveau f, on voit que $i=f(f(h))=f(g)$ est la fonction définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ i(x)=g(-x)=h(x)$$

Ainsi, la fonction $i=f(f(h))$ n'est autre que la fonction h, c'est à dire que $f(f(h))=h$.
Ceci montre que $f^2=Id_E$: $\boxed{f \text{ est une symétrie}}$. On remarque alors que :
$\boxed{E_1=\{h\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, f(h)=h\}=\{h\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, \forall x\in\mathbb{R},\ h(-x)=h(x)\}}$ (fonctions paires)
$\boxed{E_{-1}=\{h\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, f(h)=-h\}=\{h\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, \forall x\in\mathbb{R},\ h(-x)=-h(x)\}}$ (fonctions impaires)

On suppose à présent que E est un espace vectoriel quelconque et que $f\in\mathcal{L}(E)$ est une symétrie.

7. (a) Montrons que $E_1\cap E_{-1}=\{0_E\}$.
Soit $v\in E_1\cap E_{-1}$, vérifions qu'alors $v=0_E$. (L'autre inclusion $E_1\cap E_{-1}\supset\{0_E\}$ étant triviale)
Puisque $v\in Ker(f-Id_E)$, on a $(f-Id_E)(v)=0_E$, i.e $f(v)=v$.
Puisque $v\in Ker(f+Id_E)$, on a $(f+Id_E)(v)=0_E$, i.e $f(v)=-v$.
Ainsi, on doit avoir $v=-v$, c'est à dire $\boxed{v=0_E}$, CQFD.

(b) Soit $v \in E$.

- Notons $v_1 = \frac{1}{2}(v + f(v))$. Vérifions que $v_1 \in E_1$, c'est à dire que $f(v_1) = v_1$.
On a $f(v_1) = f\Big(\frac{1}{2}(v+f(v))\Big) = \frac{1}{2}\Big(f(v) + f(f(v))\Big) = \dfrac{1}{2}\Big(f(v) + Id_E(v)\Big) = \dfrac{1}{2}\Big(f(v) + v\Big) = v_1$
(on a utilisé $f^2 = Id_E$)
- Notons $v_{-1} = \frac{1}{2}(v - f(v))$. Vérifions que $v_{-1} \in E_{-1}$, c'est à dire que $f(v_{-1}) = -v_{-1}$.
On a $f(v_{-1}) = f\Big(\frac{1}{2}(v-f(v))\Big) = \frac{1}{2}\Big(f(v) - f(f(v))\Big) = \dfrac{1}{2}\Big(f(v) - Id_E(v)\Big) = \dfrac{1}{2}\Big(f(v) - v\Big) = -v_{-1}$
(on a utilisé $f^2 = Id_E$)

On a bien montré que $\boxed{\frac{1}{2}(v + f(v)) \in E_1 \text{ et } \frac{1}{2}(v - f(v)) \in E_{-1}}$.

(c)
- D'après 7.(a), $E_1 \cap E_{-1} = \{0_E\}$, donc on sait déjà que E_1 et E_{-1} sont en somme directe.
- De plus, on remarque astucieusement que tout vecteur $v \in E$ peut s'écrire

$$v = \underbrace{\frac{1}{2}(v+f(v))}_{\in E_1} + \underbrace{\frac{1}{2}(v-f(v))}_{\in E_{-1}}$$

Ceci montre que $E \subset E_1 + E_{-1}$ (et l'autre inclusion est évidente), donc $E = E_1 + E_{-1}$.
Conclusion : $\boxed{E = E_1 \oplus E_{-1}}$.

8. Il y a deux façons de traiter cette question.

- Option 1 : Expliciter les projecteurs.

On a déjà remarqué dans la question précédente que tout $v \in E$ s'écrivait

$$v = \underbrace{\frac{1}{2}(v+f(v))}_{\in E_1} + \underbrace{\frac{1}{2}(v-f(v))}_{\in E_{-1}}$$

Par définition des projecteurs, cela signifie que $p(v) = \frac{1}{2}(v + f(v))$ et $q(v) = \frac{1}{2}(v - f(v))$.
On remarque alors que pour tout $v \in E$,

$$p(v) - q(v) = \frac{1}{2}(v + f(v)) - \frac{1}{2}(v - f(v)) = f(v).$$

Ceci montre que $\boxed{f = p - q}$

- Option 2 : Sans expliciter les projecteurs.

Pour tout $v \in E$, on peut écrire, par définition, $v = \underbrace{p(v)}_{\in E_1} + \underbrace{q(v)}_{\in E_{-1}}$.
On a alors, par linéarité : $f(v) = f(p(v)) + f(q(v))$.
Comme $p(v) \in E_1$, on a $f(p(v)) = p(v)$. Comme $q(v) \in E_{-1}$, on a $f(q(v)) = -q(v)$.
Ainsi $f(v) = p(v) - q(v)$, ce qui montre que $\boxed{f = p - q}$.

9. On note p et q deux projecteurs associés et $f = p - q$.
Vérifions que f est une symétrie, c'est à dire que $f^2 = Id_E$.

- Option 1 : Calcul avec les endomorphismes.

$$f^2 = (p-q)^2 = (p-q)\circ(p-q) = p^2 - p\circ q - q \circ p + q^2.$$

Puisque p et q sont des projecteurs, $p^2 = p$ et $q^2 = q$, donc :

$$f^2 = p + q - p \circ q - q \circ p.$$

Puisque p et q sont des projecteurs associés, on sait que $p + q = Id_E$.
(Rappel de cours : pour tout $v \in E$, $v = \underbrace{p(v)}_{\in F} + \underbrace{q(v)}_{\in G}$ donc $Id_E = p + q$)
De plus, pour deux projecteurs associés, on a aussi $p \circ q = 0$ et $q \circ p = 0$.
En effet, pour tout $v \in E$, $p(\underbrace{q(v)}_{\in G}) = 0_E$ (car p projette sur F parallèlement à G)

De même, $q(\underbrace{p(v)}_{\in F}) = 0_E$ (car q projette sur G parallèlement à F)

Au final, on obtient en remplaçant $\boxed{f^2 = Id_E}$, d'où le résultat.

- Option 2 : En écrivant les décompositions.

Pour tout $v \in E$, on peut écrire $v = \underbrace{v_1}_{\in F} + \underbrace{v_2}_{\in G}$. Par définition, $v_1 = p(v)$ et $v_2 = q(v)$.

Puisque $v = \underbrace{v_1}_{\in F} + \underbrace{v_2}_{\in G}$, on a donc $f(v) = p(v) - q(v)$, c'est à dire $f(v) = v_1 - v_2$.

Ainsi f transforme un vecteur $v = v_1 + v_2$ en $f(v) = v_1 - v_2$.

En appliquant deux fois cette opération, on aura :

Puisque $v = \underbrace{v_1}_{\in F} + \underbrace{v_2}_{\in G}$, $\quad f(v) = \underbrace{v_1}_{\in F} + \underbrace{(-v_2)}_{\in G}$, $\quad f(f(v)) = v_1 - (-v_2) = v_1 + v_2 = v$.

Ceci montre que $\forall v \in E,\ f(f(v)) = v$. On a montré que $\boxed{f^2 = Id_E}$, d'où le résultat.

Partie III - Décomposition à partir de polynômes annulateurs

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel quelconque et $f \in \mathcal{L}(E)$.

10. Dans cette question, on suppose que l'endomorphisme f satisfait : $f \circ (f - Id_E)^2 = 0$.

(a) On "développe" :

$$f \circ (f - Id_E)^2 = f \circ (f^2 - 2f + Id_E) = f^3 - 2f^2 + f.$$

On a donc $\boxed{f^3 - 2f^2 + f = 0}$. $(a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_3 = 1)$

(b) Soit $v \in Ker(f) \cap Im(f)$, montrons que $v = 0_E$.

Puisque $v \in Ker(f)$, on sait que $f(v) = 0_E$.

Puisque $v \in Im(f)$, on peut écrire $v = f(u)$ avec un $u \in E$.

On note alors que $f(u) = v, \quad f^2(u) = f(v) = 0_E, \quad f^3(u) = f(f(v)) = f(0_E) = 0_E$.

En évaluant l'égalité précédente $f^3 - 2f^2 + f = 0$ en u, on obtient :

$$f^3(u) - 2f^2(u) + f(u) = 0_E \quad \text{c'est à dire} \quad 0_E - 2 \cdot 0_E + v = 0_E.$$

On apprend donc que $\boxed{v = 0_E}$, CQFD.

(c) Il suffit encore une fois de "développer" :

$$(f - Id_E)^2 + f \circ (2Id_E - f) = f^2 - 2f + Id_E + 2f - f^2 = Id_E$$

On a donc bien $\boxed{Id_E = (f - Id_E)^2 + f \circ (2Id_E - f)}$.

Il en résulte que tout $v \in E$ peut écrire $v = Id_E(v)$, c'est à dire $\boxed{v = (f - Id_E)^2(v) + f \circ (2Id_E - f)(v)}$.

(d) Montrons que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

- On a vu en 10.(b) que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$, donc $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont en somme directe.
- De plus, pour tout $v \in E$, on peut écrire (comme suggéré en 10.(c))

$$v = v_1 + v_2 \quad \text{avec} \quad v_1 = (f - Id_E)^2(v) \quad \text{et} \quad v_2 = f \circ (2Id_E - f)(v).$$

Vérifions qu'en fait $v_1 \in Ker(f)$ et $v_2 \in Im(f)$.

On a $f(v_1) = f \circ (f - Id_E)^2(v) = 0_E$ car l'application $f \circ (f - Id_E)^2$ est nulle par hypothèse.

On a $v_2 = f\Big((2Id_E - f)(v)\Big) \in Im(f)$ par définition de l'ensemble $Im(f)$.

Ainsi, on a montré que tout $v \in E$ peut s'écrire $v = \underbrace{v_1}_{\in Ker(f)} + \underbrace{v_2}_{\in Im(f)}$.

Ceci montre que $E = Ker(f) + Im(f)$. (En fait ça montre $\subset$, et $\supset$ est trivial)

Conclusion : on a bien $\boxed{E = Ker(f) \oplus Im(f)}$.

11. On suppose maintenant que $f \circ (f - Id_E) \circ (f - 4Id_E) = 0$. On veut montrer $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
On adopte le même raisonnement que précédemment. En développant cette égalité, on trouve :

$$f^3 - 5f^2 + 4f = 0$$

De là, on en déduit que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$:
Si $v \in Ker(f) \cap Im(f)$, on peut écrire $v = f(u)$ avec un $u \in E$. En évaluant l'égalité précédente en u :

$$f^3(u) - 5f^2(u) + 4f(u) = 0_E \quad \text{c'est à dire} \quad 0_E - 50_E + 4v = 0_E$$

et donc $v = 0_E$. Ainsi, $\boxed{Ker(f) \text{ et } Im(f) \text{ sont en somme directe}}$.

En suivant l'indication de l'énoncé, on peut remarquer que

$$1 = \frac{1}{4}(X-1)(X-4) + X\left(-\frac{1}{4}X + \frac{5}{4}\right).$$

En "évaluant" en f (polynôme d'endomorphismes, similaire aux polynômes de matrices), on remarque :

$$Id_E = \frac{1}{4}(f - Id_E) \circ (f - 4Id_E) + f \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}Id_E\right).$$

En particulier, tout $v \in E$ peut s'écrire

$$v = \underbrace{\frac{1}{4}(f - Id_E) \circ (f - 4Id_E)(v)}_{v_1} \; + \; \underbrace{f \circ \left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}Id_E\right)(v)}_{v_2}.$$

On vérifie pour finir que $v_1 \in Ker(f)$ et $v_2 \in Im(f)$:

- $f(v_1) = \dfrac{1}{4} f \circ (f - Id_E) \circ (f - 4Id_E)(v) = 0_E$ car l'application $f \circ (f - Id_E) \circ (f - 4Id_E)$ est nulle.
- $v_2 = f\Big(\left(-\frac{1}{4}f + \frac{5}{4}Id_E\right)(v)\Big) \in Im(f)$ par définition de l'ensemble $Im(f)$

Cette décomposition montre que $\boxed{E = Ker(f) + Im(f)}$.
On a donc bien montré le résultat voulu.

12. On suppose que $a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_p f^p = 0$ avec $a_1 \neq 0$. Montrons que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Pour cela, on fixe un $v \in E$, et on va montrer qu'il existe un unique couple $(v_1, v_2) \in Ker(f) \times Im(f)$ tel que $v = v_1 + v_2$.

Analyse : Supposons qu'un tel couple existe : $v = v_1 + v_2$.
Puisque $v_1 \in Ker(f)$, on a $f(v_1) = 0_E$.
Puisque $v_2 \in Im(f)$, on peut écrire $v_2 = f(u)$ avec un $u \in E$.
Partons donc de $v = v_1 + f(u)$. En composant par f (puisque $f(v_1) = 0_E$), on obtient :

$$f(v) = f^2(u) \;\text{ puis }\; f^2(v) = f^3(u) \;\text{ etc ...,}\; f^{p-1}(v) = f^p(u).$$

En évaluant en u l'égalité $a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_p f^p = 0$, on obtient :

$$a_1 \underbrace{f(u)}_{v_2} + a_2 \underbrace{f^2(u)}_{f(v)} + \ldots + a_p \underbrace{f^p(u)}_{f^{p-1}(v)} = 0_E$$

c'est à dire

$$a_1 v_2 + \sum_{k=2}^{p} a_k f^{k-1}(v) = 0_E.$$

On peut alors déterminer v_2 en fonction de v : $\boxed{v_2 = -\frac{1}{a_1}\sum_{k=2}^{p} a_k f^{k-1}(v)}$ (possible car $a_1 \neq 0$)

Ensuite, $v_1 = v - v_2$ donc $\boxed{v_1 = v + \frac{1}{a_1}\sum_{k=2}^{p} a_k f^{k-1}(v)}$

<u>Synthèse :</u> Posons $v_1 = v + \frac{1}{a_1}\sum_{k=2}^{p} a_k f^{k-1}(v)$ et $v_2 = -\frac{1}{a_1}\sum_{k=2}^{p} a_k f^{k-1}(v)$,
et vérifions que ce couple convient.

- On a bien $v_1 + v_2 = v$ (par construction, calcul facile)
- Vérifions que $v_1 \in Ker(f)$:

$$f(v_1) = f\left(v + \frac{1}{a_1}\sum_{k=2}^{p} a_k f^{k-1}(v)\right) = f(v) + \frac{1}{a_1}\sum_{k=2}^{p} a_k f^{k}(v) = \frac{1}{a_1}\Big(a_1 f(v) + a_2 f^2(v) + \ldots + a_p f^p(v)\Big) = 0_E$$

car l'application $a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_p f^p$ est nulle.

- Vérifions que $v_2 \in Im(f)$:

$$v_2 = -\frac{1}{a_1}\Big(a_2 f(v) + a_3 f^2(v) + \ldots + a_p f^{p-1}(v)\Big) = f\left(-\frac{1}{a_1}\Big(a_2 v + a_3 f(v) + \ldots a_p f^{p-2}(v)\Big)\right) \in Im(f).$$

Ceci conclut l'analyse synthèse et la preuve du résultat voulu.

Exercice : Temps moyen d'apparition d'un "Triple Pile"

1. On a facilement $\boxed{P(X=1) = P(X=2) = 0 \ P(X=3) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}}$.

2. (a) Quelle que soit l'issue des 3 premiers lancers, on est dans une et une seule des situations suivantes :
   - $\overline{A_1}$: On obtient Face au premier lancer
   - $A_1 \cap \overline{A_2}$: On obtient Pile, puis Face
   - $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}$: On obtient deux fois Pile, puis Face
   - $A_1 \cap A_2 \cap A_3$: On obtient trois fois Pile.

   $\boxed{\text{Ces 4 évènements forment donc un système complet d'évènements}}$.

   (b) Soit $n \geqslant 4$. On applique la formule des probabilités totales avec le S.C.E précédent, ce qui donne :

$$\begin{aligned} P(X=n) = & P(\overline{A_1}) \times P_{\overline{A_1}}(X=n) \\ & + P(A_1 \cap \overline{A_2}) \times P_{A_1 \cap \overline{A_2}}(X=n) \\ & + P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}}(X=n) \\ & + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \times P_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}(X=n) \end{aligned}$$

   c'est à dire :

$$P(X=n) = \frac{1}{2}P_{\overline{A_1}}(X=n) + \frac{1}{4}P_{A_1 \cap \overline{A_2}}(X=n) + \frac{1}{8}P_{A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}}(X=n) + \frac{1}{8}P_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}(X=n).$$

   Interprétons maintenant les probabilités conditionnelles :
   - Si l'évènement $\overline{A_1}$ est réalisé, on obtient Face au premier lancer. Notre compteur de Pile se "réinitialise" alors : tout se passe comme si on voulait observer 3 Pile consécutifs au bout des $n-1$ lancers restants. Ainsi, $P_{\overline{A_1}}(X=n) = P(X=n-1)$
   - Le raisonnement est similaire si on obtient Face au bout du deuxième ou du troisième lancer (il y a "réinitialisation" à partir de là) : ainsi $P_{A_1 \cap \overline{A_2}}(X=n) = P(X=n-2)$ et $P_{A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}}(X=n) = P(X=n-3)$
   - Si l'évènement $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ est réalisé, alors on observe déjà 3 Pile consécutifs au bout du 3 ème lancer. On ne peut donc pas avoir $X = n$ (car $n \geqslant 4$ ici). Ainsi $P_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}(X=n) = 0$.

   En remplaçant, on obtient : $\boxed{P(X=n) = \frac{1}{2}P(X=n-1) + \frac{1}{4}P(X=n-2) + \frac{1}{8}P(X=n-3).}$

Pour tout $N \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit :

$$F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x^n P(X=n) \quad \text{et} \quad G_N(x) = \sum_{n=1}^{N} n x^{n-1} P(X=n).$$

Sous réserve d'existence (c'est à dire de convergence des séries), on définit également les sommes infinies :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n P(X=n) \quad \text{et} \quad G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} P(X=n).$$

3. (a) Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right)$ et vérifions que f s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$.
f est un polynôme donc est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 - x - \frac{1}{4}.$$

En calculant le discriminant, $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times \frac{-1}{4} = 4 > 0$.

On trouve les deux racines de f' : $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{4}}{6}$ c'est à dire $x = -\frac{1}{6}$ et $x = \frac{1}{2}$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1/6) < 0$	$\searrow$	$f(1/2) < 0$	$\nearrow$	$+\infty$

f étant <u>continue</u>, d'après le TVI, on lit sur ce tableau que f s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$, précisément en un $\alpha \in]1/2, +\infty[$. De plus, en notant que $f(1) = \frac{1}{8} > 0$, on en déduit que f s'annule sur l'intervalle $]1/2, 1[$, donc en particulier que $\boxed{\alpha \in]0,1[}$.

(b) Notons que 0 n'est pas solution de l'équation $\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = 1$. Dès lors, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = 1 &\iff \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^3} \quad \text{(on divise par } x^3\text{)} \\
&\iff y = \frac{1}{x} \text{ satisfait } y^3 = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}y + \frac{1}{8} \\
&\iff \frac{1}{x} = \alpha \iff x = \frac{1}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\frac{1}{\alpha} \text{ est l'unique solution de l'équation } \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = 1}$

(c) Montrons par récurrence triple que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad P(X = n) \leqslant \alpha^n$.
<u>Initialisation :</u> $P(X = 1) = 0 \leqslant \alpha^1$, $\quad P(X = 2) = 0 \leqslant \alpha^2 \quad P(X = 3) = \frac{1}{8} \leqslant \alpha^3$
puisque $\alpha^3 = \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{8} \geqslant \frac{1}{8}$ (car on a vu que $\alpha > 0$).
<u>Hérédité :</u> Soit $n \geqslant 4$. Supposons que

$$P(X = n-3) \leqslant \alpha^{n-3},\ P(X = n-2) \leqslant \alpha^{n-2},\ P(X = n-1) \leqslant \alpha^{n-1}$$

et montrons que $P(X = n) \leqslant \alpha^n$. D'après la relation du 2.(b) :

$$\begin{aligned}
P(X = n) &= \frac{1}{2}P(X = n-1) + \frac{1}{4}P(X = n-2) + \frac{1}{8}P(X = n-3) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\alpha^{n-1} + \frac{1}{4}\alpha^{n-2} + \frac{1}{8}\alpha^{n-3} \\
&= \alpha^n \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\alpha^3}\right)}_{=1} = \alpha^n
\end{aligned}$$

car on a vu que $\frac{1}{\alpha}$ satisfait l'équation $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 = 1$. Ceci achève la récurrence.

(d) Soit $x \in]-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}[$ fixé. Vérifions que les séries $\sum x^n P(X = n)$ et $\sum nx^{n-1}P(X = n)$ sont convergentes. Ces séries ne sont pas à termes positifs (si jamais $x < 0$...), donc on va montrer qu'elles sont absolument convergentes. D'après le résultat du 3.(c), on a les majorations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \left|x^n P(X = n)\right| = |x|^n P(X = n) \leqslant |x|^n \alpha^n = (|x|\alpha)^n,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \left|nx^{n-1} P(X = n)\right| = n|x|^{n-1} P(X = n) \leqslant n|x|^{n-1}\alpha^n = \alpha \cdot n(|x|\alpha)^{n-1}.$$

Puisqu'on a choisi $x \in]-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}[$, on a $|x| < \frac{1}{\alpha}$ et donc $|x| \times \alpha \in]0, 1[$.
Ainsi, les séries géométrique et géométrique dérivée

$$\sum (|x|\alpha)^n \quad \text{et} \quad \sum n(|x|\alpha)^{n-1}$$

sont convergentes ! Il en résulte, par théorème de comparaison, que les séries $\sum x^n P(X = n)$ et $\sum nx^{n-1}P(X = n)$ sont absolument convergentes, donc convergentes.

Ainsi, $\boxed{\text{les sommes infinies } F(x) \text{ et } G(x) \text{ sont bien définies lorsque } x \in]-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}[}$.

4. (a) Soient $N \geqslant 4$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
8F_N(x) &= 8\sum_{n=1}^{N} x^n P(X = n) = 8\left(x\underbrace{P(X=1)}_{=0} + x^2\underbrace{P(X=2)}_{=0} + x^3\underbrace{P(X=3)}_{=\frac{1}{8}} + \sum_{n=4}^{N} x^n P(X=n)\right) \\
&= 8\left(x^3 \times \frac{1}{8} + \sum_{n=4}^{N} x^n P(X=n)\right) = x^3 + 8\sum_{n=4}^{N} x^n P(X=n) \\
&= x^3 + 8\sum_{n=4}^{N} x^n \left(\frac{1}{2}P(X=n-1) + \frac{1}{4}P(X=n-2) + \frac{1}{8}P(X=n-3)\right) \\
&= x^3 + 4\sum_{n=4}^{N} x^n P(X=n-1) + 2\sum_{n=4}^{N} x^n P(X=n-2) + \sum_{n=4}^{N} x^n P(X=n-3) \\
&= x^3 + 4x\sum_{n=4}^{N} x^{n-1} P(X=n-1) + 2x^2\sum_{n=4}^{N} x^{n-2} P(X=n-2) + x^3\sum_{n=4}^{N} x^{n-3} P(X=n-3) \\
&= x^3 + 4x\sum_{n=3}^{N-1} x^n P(X=n) + 2x^2\sum_{n=2}^{N-2} x^n P(X=) + x^3\sum_{n=1}^{N-3} x^n P(X=n) \\
&= x^3 + 4x\sum_{n=3}^{N-1} x^n P(X=n) + 2x^2\sum_{n=2}^{N-2} x^n P(X=) + x^3\sum_{n=1}^{N-3} x^n P(X=n) \\
&= x^3 + 4xF_{N-1}(x) + 2x^2F_{N-2}(x) + x^3F_{N-3}(x).
\end{aligned}$$

On a bien montré : $\boxed{8F_N(x) = x^3 + 4xF_{N-1}(x) + 2x^2F_{N-2}(x) + x^3F_{N-3}(x)}$.

(b) Soit $x \in]-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}[$. On sait dans ce cas, d'après le 3.(d), que $\lim_{N\to+\infty} F_N(x) = F(x)$.
En passant la limite quand $N \to +\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient donc :

$$8F(x) = x^3 + 4xF(x) + 2x^2F(x) + x^3F(x)$$

c'est à dire

$$(8 - 4x - 2x^2 - x^3)F(x) = x^3.$$

On note que pour $x \in]-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}[$, on a bien $\boxed{(8 - 4x - 2x^2 - x^3) \neq 0}$ car

$$(8 - 4x - 2x^2 - x^3) = 8(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3)$$

et d'après 3.(b), la seule solution de l'équation $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 = 1$ est $\frac{1}{\alpha}$ (et ici $x \neq \frac{1}{\alpha}$).

On peut donc diviser sans problème pour obtenir : $\boxed{F(x) = \frac{x^3}{8 - 4x - 2x^2 - x^3}}$.

(c) D'après 3.(a), on sait que $\alpha \in]0, 1[$, donc $\frac{1}{\alpha} > 1$. On a ainsi $\boxed{1 \in]-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}[}$.

On peut donc calculer $F(1)$ avec la formule précédente : $\boxed{F(1) = \frac{1}{8 - 4 - 2 - 1} = 1}$.

Rappelons que $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n P(X = n)$.

La valeur $F(1) = 1$ nous apprend donc que : $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$.
Autrement dit $P(X \geqslant 1) = 1$. Il en résulte que $P(X = 0) = 1 - P(X \geqslant 1) = 1 - 1 = 0$.
On a $\boxed{P(X = 0) = 0}$: l'évènement $[X = 0]$ est négligeable.
Autrement dit, on est presque-sûr de finir par observer 3 Pile consécutifs.

5. (a) Pour tout $N \geqslant 4$ et $x \in \mathbb{R}$, rappelons que l'on a

$$8F_N(x) = x^3 + 4xF_{N-1}(x) + 2x^2F_{N-2}(x) + x^3F_{N-3}(x).$$

En dérivant (en notant bien-sûr que $G_N(x) = F'_N(x)$), on obtient :

$$8\,G_N(x) = 3x^2 + 4F_{N-1}(x) + 4xG_{N-1}(x) + 4xF_{N-2}(x) + 2x^2G_{N-2}(x) + 3x^2F_{N-3}(x) + x^3G_{N-3}(x).$$

Lorsque $x \in]-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}[$, on sait que $\lim_{N \to +\infty} F_N(x) = F(x)$ et $\lim_{N \to +\infty} G_N(x) = G(x)$, donc en passant à la limite on obtient :

$$8\,G(x) = 3x^2 + 4F(x) + 4xG(x) + 4xF(x) + 2x^2G(x) + 3x^2F(x) + x^3G(x).$$

En réunissant les termes :

$$(8 - 4x - 2x^2 - x^3)G(x) = 3x^2 + F(x)(4 + 4x + 3x^2)$$

et donc finalement $\boxed{G(x) = \dfrac{3x^2 + F(x)(4 + 4x + 3x^2)}{8 - 4x - 2x^2 - x^3}}$.

(b) Rappelons que $\forall x \in]-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}[,\ G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}P(X = n)$.
Puisque, comme on l'a déjà dit, $1 \in]-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}[$, la série $\sum nP(X = n)$ est (absolument) convergente et $G(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n)$. Ceci montre que $\boxed{X \text{ admet une espérance}}$ et

$$E(X) = G(1) = \frac{3 + F(1)(4 + 4 + 3)}{8 - 4 - 2 - 1} = \frac{14}{1} = 1.$$

Ainsi, effectivement $\boxed{E(X) = 14}$.

Problème 2 : Lois discrètes suivant la relation de Panjer

(Inspiré librement de ESSEC 2013 voie ECS)

Partie I : Calcul des probabilités avec Python

1. (a)

```
import numpy as np
def suite_p(a,b,n) :
    P = np.zeros(n+1) ; P[0] = 1
    for k in range(1,n+1) :
        P[k] = (a + b/k) * P[k-1]
    return(P)
```

(b) Par récurrence immédiate, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = p_kP(X = 0)$. En effet :
- $P(X = 0) = p_0 \times P(X = 0)$ car $p_0 = 1$.
- Si $P(X = k - 1) = p_{k-1} \times P(X = 0)$ on a, d'après $(\star)$:

$$P(X = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(X = k - 1) = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}P(X = 0) = p_k \times P(X = 0).$$

Ceci achève la récurrence.

(c) Le programme calcule et affiche $s = \sum_{k=0}^{1000} p_k \simeq \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \simeq 7,4$.

Or on doit avoir :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1 \iff \sum_{k=0}^{+\infty} (p_k \times P(X=0)) = 1 \iff P(X=0) \times \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1.$$

Ainsi $\boxed{P(X=0) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} p_k\right)^{-1} \simeq s^{-1}}$

Partie II : Espérance et variance

On considère une variable aléatoire discrète X, de support inclus dans $\mathbb{N}$, satisfaisant $(\star)$ pour certains réels $a < 1$ et $b > 0$.

2. (a) D'après $(\star)$, on a $P(X=1) = (a+b) \times P(X=0)$, et on sait que $P(X=0) \in]0,1[$.

   Ainsi $\boxed{a+b = \frac{P(X=1)}{P(X=0)} \geqslant 0}$.

   (b) Soit $n \geqslant 1$.

$$\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\left(a + \frac{b}{k}\right) P(X=k-1) = a\sum_{k=1}^{n} kP(X=k-1) + b\sum_{k=1}^{n} P(X=k-1)$$

   puis en opérant un changement d'indice : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = a\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)P(X=k) + b\sum_{k=0}^{n-1} P(X=k)}$.

   (c) En poursuivant les calculs précédents :

$$\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = a\sum_{k=0}^{n-1} kP(X=k) + a\sum_{k=0}^{n-1} P(X=k) + b\sum_{k=0}^{n-1} P(X=k)$$
$$\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = a\sum_{k=1}^{n-1} kP(X=k) + (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} P(X=k)$$
$$\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \left(a\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) - anP(X=n)\right) + (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} P(X=k)$$

   En passant le terme $a\sum_{k=1}^{n-1} kP(X=k)$ du côté gauche de l'égalité, on obtient :

$$\boxed{(1-a)\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} P(X=k) - anP(X=n)}$$

   Enfin, puisque $\sum_{k=0}^{n-1} P(X=k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$ et que $-anP(X=n) \leqslant 0$

   on obtient $(1-a)\sum_{k=0}^{n-1} kP(X=k) \leqslant (a+b)$ et donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \leqslant \frac{a+b}{1-a}}$ (car $1-a>0$)

   Remarque : En fait pour affirmer que $-anP(X=n) \leqslant 0$, on est parti du principe que $a \geqslant 0$... Mais l'énoncé affirme seulement que $a < 1$. Si jamais $a < 0$ et si on est rigoureux, il faudrait en fait adapter l'argument pour obtenir une autre majoration :

$$nP(X=n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \quad \text{donc on peut écrire} \quad -anP(X=n) \leqslant -a\sum_{k=0}^{n} kP(X=k).$$

L'égalité encadrée précdemment nous apprend cette fois :

$$(1-a)\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \leqslant (a+b) - a\sum_{k=0}^{n} P(X=k).$$

On obtient finalement la majoration : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \leqslant (a+b)$. (et pas forcément $\leqslant \frac{a+b}{1-a}$)

(d) La question précédente nous montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \leqslant \frac{a+b}{1-a} \quad \text{(ou seulement } \leqslant a+b\text{, cela ne change rien à l'argument)}$$

Ainsi, la série $\sum kP(X=k)$ est à termes positifs et toutes les sommes partielles sont majorées par une constante. Il en résulte que $\boxed{\text{la série } \sum kP(X=k) \text{ converge (absolument)}}$.

Ainsi X admet une espérance. Passons à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité précédente :

$$(1-a)\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} P(X=k) - anP(X=n)$$

Notons que puisque la série $\sum kP(X=k)$ on a forcément $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} kP(X=k) = 0$.
On obtient donc, à la limite :

$$(1-a)E(X) = (a+b)\times 1 - 0$$

d'où la valeur $\boxed{E(X) = \dfrac{a+b}{1-a}}$.

3. (a) On généralise les calculs précédents :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2P(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} k^2\left(a+\frac{b}{k}\right)P(X=k-1) = a\sum_{k=1}^{n} k^2P(X=k-1) + b\sum_{k=1}^{n} kP(X=k-1)\\
&= a\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2P(X=k) + b\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)P(X=k)\\
&= a\sum_{k=0}^{n-1}(k^2+2k+1)P(X=k) + b\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)P(X=k)\\
&= a\sum_{k=0}^{n-1} k^2P(X=k) + (2a+b)\sum_{k=0}^{n-1} kP(X=k) + (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} P(X=k).
\end{aligned}$$

De là, comme précédemment, on obtient l'égalité :

$$\boxed{(1-a)\sum_{k=1}^{n} k^2P(X=k) = (2a+b)\sum_{k=0}^{n-1} kP(X=k) + (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} P(X=k) - an^2P(X=n)}.$$

Avec les majorations $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} kP(X=k) \leqslant E(X) = \frac{a+b}{(1-a)}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(X=k) \leqslant 1$ $\quad -an^2P(X=n) \leqslant 0$
(si $a \geqslant 0$, sinon même technique que dans la remarque précédente...)
on obtient $\displaystyle(1-a)\sum_{k=1}^{n} k^2P(X=k) \leqslant \frac{(2a+b)(a+b)}{1-a} + (a+b)$

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2P(X=k) \leqslant \frac{(2a+b)(a+b)}{(1-a)^2} + \frac{a+b}{1-a}}$

A nouveau, on en déduit que la série $\sum k^2P(X=k)$ est (absolument) convergente, donc que X^2 admet une espérance. Enfin, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité précédente :

$$(1-a)E(X^2) = (2a+b)E(X) + (a+b)\times 1 - 0$$

c'est à dire $(1-a)E(X^2) = \dfrac{(2a+b)(a+b)}{1-a} + (a+b) = \dfrac{(2a+b+1-a)(a+b)}{1-a} = \dfrac{(a+b+1)(a+b)}{1-a}$.

Ainsi, on obtient : $\boxed{E(X^2) = \dfrac{(a+b+1)(a+b)}{(1-a)^2}}$

(b) Puisque X^2 admet une espérance, d'après la formule de Koenig-Huygens, X a une variance et :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(a+b+1)(a+b)}{(1-a)^2} - \frac{(a+b)^2}{(1-a)^2} = \frac{(a+b+1-a-b)(a+b)}{(1-a)^2} = \boxed{\frac{a+b}{(1-a)^2}}.$$

Partie III : Relation de Panjer et lois usuelles

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale négative $\mathcal{BN}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$, lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \binom{n+k-1}{k} p^k (1-p)^n.$$

On admettra que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k} p^k = \frac{1}{(1-p)^n}$, de sorte que ceci définit bien une loi de probabilité.

4. Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{BN}(1,p)$. On a donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \binom{k}{k} p^k (1-p) = p^k(1-p).$$

En posant $Y = X+1$, on a donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Y=k) = P(X+1=k) = P(X=k-) = p^{k-1}(1-p).$$

On reconnait ici une loi géométrique : $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)}$.

5. Par récurrence immédiate à partir de $(\star)$, on obtient $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) \times P(X=0)}$.

(valable aussi pour $k=0$ si on considère qu'un produit vide vaut 1)

6. Lorsque $a = 0$ on obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X=k) = \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{b}{i}\right) \times P(X=0) = \frac{b^k}{k!} \times P(X=0).$$

Ensuite, puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$, on doit avoir

$$P(X=0) \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} = 1 \quad \text{i.e} \quad P(X=0) \times e^b = 1 \quad \text{i.e} \quad P(X=0) = e^{-b}.$$

On a donc bien $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{P}(b)}$.

7. (a) Supposons que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) > 0$. Alors on doit avoir $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) > 0$.

Puisque tous les produits consécutifs sont positifs, il faut forcément que chaque terme soit strictement positif. Ainsi : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ a + \dfrac{b}{i} > 0$. Ceci est évidemment absurde car $\displaystyle\lim_{i \to +\infty} \left(a + \frac{b}{i}\right) = a < 0$ donc l'un des termes finit forcément par être négatif.

<u>Conclusion :</u> On n'a pas $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) > 0$, c'est donc qu'il existe un $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(X=k) = 0$. A partir de là, grâce à la relation $P(X=k+1) = \left(a + \frac{b}{k+1}\right) P(X=k)$, toutes les probabilités suivantes sont également nulles : $\forall i \geqslant k,\ P(X=i) = 0$.

On a montré que la suite $\boxed{(P(X=k))_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est nulle à partir d'un certain rang}}$.

(b) Notons $r \in \mathbb{N}^*$ l'entier correspondant à la dernière probabilité non-nulle :

$$P(X = r) \neq 0 \text{ et } \forall k > r,\ P(X = k) = 0.$$

En particulier on a $P(X = r+1) = \left(a + \frac{b}{r+1}\right) P(X = r) = 0$.

Il faut donc que $a + \frac{b}{r+1} = 0$, c'est à dire $\boxed{b = -a(r+1)}$.

(c) Pour tout $k \in [\![0, r]\!]$,

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) \times P(X = 0) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{-a(r+1)}{i}\right) \times P(X = 0) \\
&= \prod_{i=1}^{k} (-a) \left(-1 + \frac{r+1}{i}\right) \times P(X = 0) \\
&= (-a)^k \prod_{i=1}^{k} \frac{r+1-i}{i} \times P(X = 0) \\
&= (-a)^k \times \left(\frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k(k-1)\dots 1}\right) \times P(X = 0) \\
&= (-a)^k \times \binom{r}{k} \times P(X = 0).
\end{aligned}$$

On a montré : $\boxed{P(X = k) = \binom{r}{k}(-a)^k \times P(X = 0)}$.

(d) On a déjà dit que $\forall k > r,\ P(X = k) = 0$. On peut donc considérer que $X(\Omega) = [\![0, r]\!]$.

On doit alors avoir $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} P(X = k) = 1$, c'est à dire

$$P(X = 0) \times \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}(-a)^k = 1 \iff P(X = 0) \times (-a+1)^r = 1 \iff P(X = 0) = \frac{1}{(1-a)^r}.$$

En remplaçant, on a donc :

$$\forall k \in [\![0, r]\!],\quad P(X = k) = \binom{k}{r}(-a)^k \frac{1}{(1-a)^r} = \binom{k}{r}\left(\frac{-a}{1-a}\right)^k \times \left(\frac{1}{1-a}\right)^{r-k}.$$

On reconnait ici

$$\forall k \in [\![0, r]\!],\quad P(X = k) = \binom{k}{r} p^k (1-p)^{r-k} \quad \text{avec} \quad p = \frac{-a}{1-a}.$$

Autrement dit, $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(r, \frac{-a}{1-a}\right)}$.

8. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P(X = r) &= \prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) \times P(X = 0) \\
&= \prod_{i=1}^{k} a \left(1 + \frac{\frac{b}{a}}{i}\right) \times P(X = 0) \\
&= a^k \times \prod_{i=1}^{k} \frac{\frac{b}{a} + i}{i} \times P(X = 0) \\
&= a^k \times \binom{\frac{b}{a} + k}{k} \times P(X = 0) \ \text{(similaire au 7.(c))}
\end{aligned}$$

On a bien montré : $\boxed{P(X=k) = \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k \times P(X=0)}$.

(b) On doit avoir $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$, c'est à dire : $P(X=0) \times \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k = 1$.

On a admis au début de la partie III que $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} p^k = \frac{1}{(1-p)^n}$.

Ici $n = \frac{b}{a}+1$ et $p = a$.

On obtient donc $P(X=0) \times \frac{1}{(1-a)^{b/a+1}} = 1$, c'est à dire $P(X=0) = (1-a)^{b/a+1}$.

En remplaçant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \binom{b/a+k}{k} a^k (1-a)^{b/a+1}.$$

On reconnait finalement $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{BN}\left(\frac{b}{a}+1, a\right)}$.