

Logique, symboles, raisonnement mathématique

Logique et quantificateurs

Exercice 1 (Traduction)

Traduire les affirmations et leurs négations avec des quantificateurs :

1. Il existe $x \geq 0$ tel que $f(x) > -5x + 2$.
2. f s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$.
3. f est constante sur $[0, 1]$.
4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
5. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 4.
6. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Exercice 2 ("Inversion" de quantificateurs)

1. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
Relier les quantificateurs aux phrases correspondantes :

- | | | |
|---|---|--------------------------------|
| $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x).$ | • | Toujours vrai |
| $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x).$ | • | Jamais vrai |
| $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x).$ | • | Vrai pour certaines fonctions |
| $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x).$ | • | Signifie que f est constante |
2. Comparer : $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, e^x \leq k$
avec $\forall x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{R}, e^x \leq k$

Exercice 3 (Implications)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Indiquer si on a $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$,
 $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ ou $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ (ou aucun des trois).

- | | |
|---|---|
| 1. $\mathcal{A} : " \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} "$ | $\mathcal{B} : " x = \frac{\pi}{4} "$ |
| 2. $\mathcal{A} : " 2 \ln(x) \geq \ln(x+1) "$ | $\mathcal{B} : " x^2 \geq x+1 "$ |
| 3. $\mathcal{A} : " x > \frac{1}{2} "$ | $\mathcal{B} : " \frac{1}{x} < 2 "$ |
| 4. $\mathcal{A} : " x + y > 0 "$ | $\mathcal{B} : " x > 0 \text{ et } y > 0 "$ |
| 5. $\mathcal{A} : " x + y > 0 "$ | $\mathcal{B} : " x > 0 \text{ ou } y > 0 "$ |
| 6. $\mathcal{A} : " x = 0 "$ | $\mathcal{B} : " \exists a > 0, x \leq a "$ |
| 7. $\mathcal{A} : " x = 0 "$ | $\mathcal{B} : " \forall a > 0, x \leq a "$ |

Exercice 4 (Quelques équivalences)

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence :
 $(x+y)^2 = (x-y)^2 \iff (x=0 \text{ ou } y=0).$
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et P le polynôme défini par :
 $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = ax^2 + bx.$
(a) On suppose que
 $\forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) - P(x-1) = x.$
Déterminer les constantes a et b .

(b) En déduire l'équivalence :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) - P(x-1) = x$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \frac{x^2}{4}.$$

Réurrences

Exercice 5 (Une suite récurrente)

On définit une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en posant $v_1 = 1$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = 2v_n + \frac{1}{v_n}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
 v_n est bien défini et $v_n > 0$.

Exercice 6 (Une décomposition)

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2, (3+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}.$$

Exercice 7 (Divisibilité par 3)

On rappelle qu'un entier a est divisible par 3 si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 3k$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Exercice 8 (Une suite à récurrence linéaire double)

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$,
 $u_1 = 2$ et $\forall n \geq 2, u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$.

1. Calculer les premiers termes de la suite puis conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n .
2. Démontrer rigoureusement cette conjecture.

Exercice 9 (Une suite particulière)

On définit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en posant $w_1 = 1$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} = \frac{(w_1)^2 + (w_2)^2 + \dots + (w_n)^2}{n}.$$

Calculer les premiers termes de cette suite,
émettre une conjecture, puis la démontrer rigoureusement.

Exercice 10 (Valide ou non ?)

Soient $E = \{a, b, c\}$, $F = \{c, d\}$ et $G = \{e\}$.

Peut-on écrire les choses suivantes ? Si non, que faudrait-il écrire à la place ?

1. $a \subset E$
2. $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$
3. $E \cap F = c$
4. $E \cap F = \{\emptyset\}$

Exercice 11 (Traduction)

Écrire les ensembles suivants sous forme implicite, puis sous forme explicite :

1. Ensemble des entiers divisibles par 3
2. Ensemble des réels positifs dont le carré est un entier
3. Ensemble des couples de réels dont la somme vaut 1

Exercice 12 (Ensembles et logique)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Traduire les inégalités suivantes en terme d'appartenance à une partie de \mathbb{R} .

- a) $(x \leq 2 \text{ et } x \geq -1) \text{ ou } x > 3$
- b) $x > 4 \text{ et } (x \leq 6 \text{ ou } x \geq 2)$

Exercice 13 (Réunion de n ensembles)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\bigcup_{i=1}^n A_i$ et $\bigcap_{i=1}^n A_i$ avec :

- a) $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_i = [0, i]$
- b) $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_i = [i, i + 1[$
- c) $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_i =]\frac{1}{i}, i]$

Exercice 14 (Différence symétrique)

Soient A, B deux parties de E .

On pose $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

1. Faire un dessin.
2. Déterminer $A \Delta A, A \Delta E$ et $A \Delta \emptyset$.
3. (a) Montrer : $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
 (b) Dédire de (a) que $A \Delta B = \overline{A \Delta \overline{B}}$.
 (c) Dédire de (a) que $\overline{A \Delta \overline{B}} = \overline{A} \Delta B$.
4. Montrer que $A \Delta B = \emptyset \iff A = B$.

Exercice 15 (Une partition de \mathbb{N}^2)

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble

$$E_r = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q = r\}.$$

1. Expliciter E_0, E_1, E_2, E_3 .
2. Représenter ces ensembles dans le plan \mathbb{R}^2 .
3. Que dire de $E_r \cap E_{r'}$ pour $r \neq r'$?
4. Montrer : $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \exists ! r \in \mathbb{N}, (p, q) \in E_r$.

On dit alors que les ensembles $(E_r)_{r \in \mathbb{N}}$ forment "une partition" de \mathbb{N}^2 .