13

Dérivation - Corrigé

Exercice 1 (Problème en 0 ?)

f est dérivable (et même de classe C^1 !) sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composition de fonctions dérivable.

Etudions la dérivabilité en 0 : pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{|x|\sin(x^2+1)}{x}$ donc :

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \sin(x^2+1) = \sin(1)$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} -\sin(x^2+1) = -\sin(1)$.

Ainsi f est dérivable à gauche et à droite en 0 mais $f'_d(0) \neq f'_g(0)$. On conclut que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2 (Prolongement $\mathcal{C}^1$)

- D'abord, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions C^1.
- Montrons que f est prolongeable par continuité en 0 : on a $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

(En effet, $\left|x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|^3$ et on conclut par théorème des gendarmes)

Ceci montre que f est prolongeable par continuité en 0. Notons $\widetilde{f}$ ce prolongement, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \widetilde{f}(x) = \begin{cases} x^3 cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{f}$ est ainsi continue sur $\mathbb{R}$, et toujours de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

- Vérifions que $\widetilde{f}$ est dérivable (et même de classe C^1) en 0.

Pour tout $x \neq 0$, $\quad \widetilde{f}'(x) = 3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) - x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi, on voit que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \widetilde{f}'(x) = 0$
(en utilisant à nouveau le Théorème des gendarmes).
D'après le théorème de prolongement de la dérivée, on en déduit que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0 avec $\widetilde{f}'(0) = 0$
et que $\widetilde{f}$ est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\widetilde{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ \widetilde{f}'(x) = \begin{cases} 3x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) - x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 3 (Prolongement non dérivable)

1. $f(x)$ est bien défini lorsque $x^2 > 0$ c'est à dire $x \neq 0$. Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}^*$, et f y est de classe C^1 comme somme, produit, composée de fonctions usuelles.
2. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$ et on a facilement $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln(x^2) = 0$. En effet :

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(x^2) = \lim_{x\to 0^+} x \times 2\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x) = 0$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x\ln(x^2) = \lim_{x\to 0^-} x\ln((-x)^2) = \lim_{x\to 0^-} 2x\ln(-x) = \lim_{y\to 0^+} -2y\ln(y) = 0$.

Ainsi, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 1 + 0 = 1$.

La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0.

Notons $\widetilde{f}$ ce prolongement : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \widetilde{f}(x) = \begin{cases} \cos(x) + x\ln(x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Vérifions maintenant que $\widetilde{f}$ n'est pas dérivable en 0.

Pour tout $x \neq 0$, $\quad \dfrac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x-0} = \dfrac{\cos(x) + x\ln(x^2) - 1}{x} = \dfrac{\cos(x)-1}{x} + \ln(x^2)$.

- On a évidemment $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln(x^2) = -\infty$.
- Par ailleurs, avec les limites usuelles, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1-\cos(x)}{x^2} \times x\right) = -\frac{1}{2} \times 0 = 0$

Ainsi, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x-0} = -\infty$: $\widetilde{f}$ n'est donc pas dérivable en 0.

Le graphe de $\widetilde{f}$ admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

Exercice 4 (Prolongement non C^1)

1. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions de classe C^1.

2. On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

$\Big($En effet, $\left|x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant x^2$ et on conclut avec le théorème des gendarmes $\Big)$

Ceci montre que f est prolongeable par continuité en 0. On choisit d'appeler toujours ce prolongement f.

Cela revient à poser $f(0) = 0$, c'est à dire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

3. • Vérifions que f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

On sait déjà que f est dérivable (et même C^1) sur $\mathbb{R}^*$. De plus :

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ (à nouveau avec le théorème des gendarmes).

Ceci montre que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

• Vérifions que f n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que f' n'est pas continue en 0 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et donc $f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Cette expression n'a pas de limite quand $x \to 0$ (le premier morceau tend vers 0, le deuxième n'a pas de limite).

Ainsi, on n'a pas $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$: la fonction f' n'est pas continue en 0 !

Exercice 5 ("Raboutement" dérivable)

La fonction f est clairement dérivable sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

Déterminons les valeurs de a et b pour qu'elle soit également dérivable en 1.

• f est dérivable à droite en 1 avec : $f'_d(1) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \dfrac{1}{2}$

(logique, c'est la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 1)

• f est-elle dérivable à gauche en 1 ?

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{a(1+h) + b - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \left(a + \dfrac{a + b - 1}{h}\right)$.

Ainsi, on voit que f est dérivable à gauche en 1, si et seulement si $\boxed{a + b - 1 = 0}$

Lorsque cette condition est satisfaite, on a $f'_g(1) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = a$.

f est alors dérivable en 1 si et seulement si $f'_g(1) = f'_d(1)$, c'est à dire $\boxed{a = \frac{1}{2}}$.

On résout ce système de deux équations : pour finir, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\boxed{a = \frac{1}{2} \text{ et } b = \frac{1}{2}}$.

Dans ce cas, on a $f'(1) = \frac{1}{2}$.

Enfin, pour ces valeurs de a et b, on a $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

On peut donc calculer la dérivée : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Il est facile de constater que f' est continue en 1, et donc continue sur $\mathbb{R}$: on a bien f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (Règle de L'Hôpital)

1. On note simplement que, puisque $f(a) = g(a) = 0$:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \frac{x - a}{g(x) - g(a)} = f'(a) \times \frac{1}{g'(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

2.

En posant $f(x) = x - 1$ et $g(x) = 2x^2 - x - 1$ on a bien $f(1) = g(1) = 0$ et $f'(1) = 1$, $g'(1) = 3$ d'où

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x^2 - x - 1} = \frac{1}{3}.$$

En posant $f(x)=\ln(1-2x)$ et $g(x)=\sin(x)+3x$ on a bien $f(0)=g(0)=0$ et $f'(0)=-2$, $g'(0)=4$ d'où

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)}{\sin(x)+3x}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

Exercice 7 (Montrer des inégalités)

(a) Posons $\forall x \geqslant 0,\ f(x)=\cos(x)-1+\dfrac{x^2}{2}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\geqslant 0,\ f'(x)=-\sin(x)+x$.
On a $\forall x\geqslant 0,\ \sin(x)\leqslant x$ (inégalité classique : on peut l'obtenir avec l'IAF, ou alors en étudiant $x\mapsto x-\sin(x)$...)
Ainsi $\forall x\geqslant 0,\ f'(x)\geqslant 0$. On en déduit que f est croissante : on a le tableau de variations suivant

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, on voit que $\forall x\geqslant 0,\ f(x)\geqslant 0$, ce qui donne bien : $\forall x\geqslant 0,\ 1-\dfrac{x^2}{2}\leqslant \cos(x)$.

(b) Posons $\forall x\geqslant 0,\ g(x)=\sin(x)-x+\dfrac{x^3}{6}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\geqslant 0,\ g'(x)=\cos(x)-1+\dfrac{x^2}{2}$.
D'après l'inégalité du (a), on a $\forall x\geqslant 0,\ g'(x)\geqslant 0$.
On en déduit que g est croissante : on a le tableau de variations suivant

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, on voit que $\forall x\geqslant 0,\ g(x)\geqslant 0$, ce qui donne bien : $\forall x\geqslant 0,\ \sin(x)\geqslant x-\dfrac{x^3}{6}$.

Exercice 8 (Une bijection)

1. f est définie et dérivable sur $]-\infty,1[$ (comme somme et composition de fonctions dérivables).
Pour tout $x\in]-\infty,1[$, $\quad f'(x)=2x+\dfrac{-1}{1-x}=\dfrac{2x(1-x)-1}{1-x}-\dfrac{-2x^2+2x-1}{1-x}$.
- Puisque $x<1$, on a $1-x>0$.
- On cherche le signe de $-2x^2+2x-1$. Discriminant : $\Delta=4-4\times 2=-4<0$.

On a donc $-2x^2+2x-1<0$ (pour tout $x\in\mathbb{R}$).
Ainsi $\forall x\in]-\infty,1[,\ f'(x)<0$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty,1[$:

x	$-\infty$		1
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

D'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $]-\infty,1[$ dans $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.
2. On sait que $f^{-1}:\mathbb{R}\to]-\infty,1[$ est également strictement décroissante. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f^{-1}(x)$	$1 \searrow -\infty$

3. On a vu en question 1. que f' ne s'annule pas sur $]-\infty, 1[$. On en déduit que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

On a déjà calculé $f'(y) = \dfrac{2y(1-y)-1}{1-y} = \dfrac{2y(y-1)+1}{y-1}$ donc ceci donne bien :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f^{-1})'(x) = \frac{f^{-1}(x)-1}{2f^{-1}(x)(f^{-1}(x)-1)+1}.$$

4. On calcule facilement $f(0) = 0$. Ceci montre que l'unique antécédent de 0 par f est 0, autrement dit $f^{-1}(0) = 0$.
On en déduit : $(f^{-1})'(0) = \dfrac{f^{-1}(0)-1}{2f^{-1}(0)(f^{-1}(0)-1)+1} = \dfrac{-1}{1} = -1$.

Exercice 9 (Fonction arcinus)

1. sin est continnue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On a le tableau de variations suivant :

x	$-\frac{\pi}{2}$ $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	$-1 \nearrow 1$

D'après le théorème de la bijection, sin réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$.
2. On a arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Toujours d'après le théorème de la bijection, on sait que arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$.
Pour tout $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin'(y) = \cos(y)$. Ainsi, $\sin'$ ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
On en déduit que arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$, avec la formule :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Rappelons que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\quad \cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$, donc $\cos(y)^2 = 1 - \sin(y)^2$.
Pour tout $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on sait que $\cos(y) \geqslant 0$ et donc $\cos(y) = \sqrt{1-\sin(y)^2}$.
En appliquant ceci à $y = \arcsin(x)$ (on a bien $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pour $x \in [-1, 1]$!), on obtient :

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin(\arcsin(x))^2} = \sqrt{1-x^2}.$$

Pour conclure, on a : $\forall x \in]-1, 1[,\ \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. arcsin n'est pas dérivable en -1 et en 1 : elle y a admet des tangentes verticales.

Exercice 10 (Dérivée et parité/périodicité)

1. Puisque f est paire, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$.
En dérivant cette égalité (avec la formule pour dériver une composition), on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = f'(x)$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) = -f'(x)$. $\quad$ La fonction f' est donc impaire.

2. Puisque f est impaire, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$.
En dérivant cette égalité, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = -f'(x)$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) = f'(x)$. $\quad$ La fonction f' est donc paire.

3. Puisque f est p-périodiue, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+p) = f(x)$.

En dérivant cette égalité, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x+p) = f'(x)$.
Ainsi, la fonction f' est encore p-périodique.

Exercice 11 (Racines du polynôme dérivé)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ admettant n racines distinctes.
Notons ces racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. On a donc $P(x_1) = P(x_2) = \ldots = P(x_n) = 0$.

Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :
- P continue sur $[x_k, x_{k+1}]$ et dérivable sur $]x_k, x_{k+1}[$ (car P est dérivable sur $\mathbb{R}$)
- $P(x_k) = P(x_{k+1})$ $(= 0)$.

On peut appliquer le Théorème de Rolle : il existe donc $c_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $P'(c_k) = 0$.

On a montré que P' admet (au moins) les $n-1$ racines distinctes : $c_1 < c_2 < \ldots < c_{n-1}$.

En appliquant de nouveau ce résultat à P', on en déduit que P'' admet (au moins) $n-2$ racines distinctes, etc...

Exercice 12 (Variante de Rolle)

1. À vos crayons !

2. Pour tout $x \in]0,1[$, $\quad g(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1-x}{x}\right) & \text{si } x \in]0,1] \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\quad$ Pour $x \in]0,1]$, $\quad \dfrac{1-x}{x} \in \mathbb{R}_+$ donc ceci est bien défini.

- g est continue sur $]0,1]$ comme composée de deux fonctions continues : f et $x \mapsto \dfrac{1-x}{x}$.
- Vérifions que g est continue en 0 :

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f\left(\dfrac{1-x}{x}\right) = \lim\limits_{y \to +\infty} f(y) = f(0)$ par hypothèse.
Puisque $g(0) = f(0)$, on a montré $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0)$: g est bien continue en 0.

- g est dérivable sur $]0,1[$ comme composée de deux fonctions dérivables : f et $x \mapsto \dfrac{1-x}{x}$.

On peut calculer la dérivée : $\forall x \in]0,1[,\ g'(x) = \dfrac{-x-(1-x)}{x^2} f'\left(\dfrac{1-x}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2} f'\left(\dfrac{1-x}{x}\right)$.

3. g est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et on note que $g(1) = f(\frac{1-1}{1}) = f(0)$ donc $g(1) = g(0)$.

On peut ainsi appliquer le Théorème de Rolle à g : il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $g'(x_0) = 0$.

Ceci nous apprend que $-\dfrac{1}{x_0^2} f'\left(\dfrac{1-x_0}{x_0}\right) = 0$ c'est à dire $f'\left(\dfrac{1-x_0}{x_0}\right) = 0$.

Ainsi, en posant $c = \dfrac{1-x_0}{x_0} > 0$, on a $f'(c) = 0$. Ceci montre le résultat voulu.

Exercice 13 (EAF "généralisé")

On veut trouver une fonction h, bien choisie, à laquelle on puisse appliquer le Théorème de Rolle, de sorte que l'égalité $h'(c) = 0$ nous apprenne $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

Une bonne idée serait par exemple de choisir h telle que $h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$...

Posons donc $\boxed{\forall x \in [a,b],\ \ h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)}$.

- h est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ (car f et g le sont)
- On calcule : $h(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$

On calcule : $h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = g(a)f(b) - g(b)f(a)$.
On a donc bien $h(a) = h(b)$!

D'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$, c'est à dire

$$(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Remarque : en choisissant la fonction $g : x \mapsto x$, cette égalité nous donne

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \ \text{ c'est à dire } \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

On retrouve donc le résultat de l'égalité des accroissements finis (EAF).

Exercice 14 (IAF)

(a) Soient $x, y \geqslant 2$. Appliquons l'IAF à la fonction ln sur le segment $[x, y]$: ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall t \in [x,y], \quad |\ln'(t)| = \left|\frac{1}{t}\right| = \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{2} \quad (\text{car } t \geqslant 2 \text{ puisque } x, y \geqslant 2).$$

D'après l'IAF, on obtient : $|\ln(y) - \ln(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}|y - x|$.

(b) Soit $x \in [0,1]$. Appliquons l'IAF à la fonction exp sur le segment $[0, x]$: exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in [0,x], \quad e^0 \leqslant \exp'(t) = e^t \leqslant e \quad \text{c'est à dire} \quad 1 \leqslant \exp'(t) \leqslant e. \quad (\text{car } 0 \leqslant t \leqslant 1)$$

D'après l'IAF, on obtient : $1 \cdot (x - 0) \leqslant e^x - e^0 \leqslant e \cdot (x - 0)$ c'est à dire $x \leqslant e^x - 1 \leqslant ex$.

(c) Soit $x > 0$. Appliquons l'IAF à la fonction $f : t \mapsto \sqrt{t}$ sur le segment $[x, x+1]$: f est dérivable sur R_+^* et

$$\forall t \in [x, x+1], \quad \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leqslant f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

D'après l'IAF, on obtient : $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x+1-x) \leqslant f(x+1) - f(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x+1-x)$

c'est à dire $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leqslant \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Remarque : on aurait pu ici se passer de l'IAF en utilisant une identité remarquable (multiplication par la quantité conjuguée)

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

Puisque $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x+1}$, on en déduit facilement l'encadrement voulu.

Exercice 15 (Fonction $\mathcal{C}^1$ sur un segment)

Puisque f est de classe C^1 sur $[a, b]$, f' est continue sur le segment $[a, b]$.
D'après le théorème des bornes atteintes, une fonction continue sur un segment y est bornée !
Il existe donc $M > 0$ tel que : $\forall t \in [a, b], \ |f'(t)| \leqslant M$.
Soient $x, y \in [a, b]$. Appliquons l'IAF à f sur le segment $[x, y]$: puisque $\forall t \in [x, y], \ |f'(t)| \leqslant M$, on déduit

$$|f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x| \quad \text{c'est à dire} \quad |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|.$$

Exercice 16 (Somme infinie convergente)

Posons $\forall x > 0, \ f(x) = -\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} = -x^{1-\alpha}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0, \ f'(x) = -(1-\alpha)x^{-\alpha} = \dfrac{\alpha - 1}{x^\alpha}$.

Soit $k \geqslant 2$. Appliquons l'IAF à f sur le segment $[k-1, k]$:

$$\forall t \in [k-1, k], \ f'(t) = \frac{\alpha - 1}{t^\alpha}$$

Puisque $k - 1 \leqslant t \leqslant k$, on a $(k-1)^\alpha \leqslant t^\alpha \leqslant k^\alpha$, donc $\dfrac{1}{(k-1)^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{t^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{k^\alpha}$, donc $\dfrac{\alpha-1}{(k-1)^\alpha} \geqslant \dfrac{\alpha-1}{t^\alpha} \geqslant \dfrac{\alpha-1}{k^\alpha}$ (car $\alpha - 1 > 0$ puisque $\alpha > 1$). Ainsi on a l'encadrement :

$$\forall t \in [k-1, k], \ \frac{\alpha - 1}{k^\alpha} \leqslant f'(t) \leqslant \frac{\alpha - 1}{(k-1)^\alpha}.$$

D'après l'IAF, on déduit : $\dfrac{\alpha-1}{k^\alpha}(k - (k-1)) \leqslant f(k) - f(k-1) \leqslant \dfrac{\alpha - 1}{(k-1)^\alpha}(k - (k-1))$

c'est à dire : $\boxed{\dfrac{\alpha-1}{k^\alpha} \leqslant -\dfrac{1}{k^{\alpha-1}} + \dfrac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} \leqslant \dfrac{\alpha-1}{(k-1)^\alpha}.}$ C'est valable pour tout $k \geqslant 2$.

Pour majorer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, conservons uniquement la première inégalité : $\forall k \geqslant 2, \ \dfrac{\alpha-1}{k^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{k^{\alpha-1}}$.

Autrement dit : $\quad \forall k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{k^{\alpha-1}}\right).$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right) = 1 + \frac{1}{\alpha-1}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right).$$

On peut calculer cette dernière somme par télescopage : $\ \forall n \geqslant 2,\ u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha-1}\left(1 - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$

en particulier, ceci donne la majoration : $\ \forall n \geqslant 2,\ u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha-1}.$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est majorée (par $1 + \frac{1}{1-\alpha}$).
Puisqu'elle est croissante (c'est évident : étudier $u_{n+1} - u_n$ ...), on en déduit qu'elle converge.

Exercice 17 (IAF et suites récurrentes : méthode générale)

1. (a) Posons $\forall x \in [a,b],\ g(x) = f(x) - x.\quad g$ est continue sur $[a,b]$ (car f l'est).

On a $g(a) = f(a) - a > 0$ et $g(b) = f(b) - b < 0 \quad$ (car $f(a) \in [a,b]$ et $f(b) \in [a,b]$ puisque $f([a,b]) \subset [a,b]$).

D'après le TVI, on en déduit que g s'annule (au moins une fois) sur $[a,b]$, donc que f admet au moins une point fixe sur $[a,b]$.

(b) Soient $x, y \in [a,b]$.
On applique l'IAF à f sur $[x,y]$: puisque $\forall t \in [a,b];\ |f'(t)| \leqslant k$ on obtient $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$.

Montrons que f admet une unique point fixe. Supposons que f admet deux points fixes $\alpha \neq \beta$. Alors on a :

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \leqslant k|\alpha - \beta| \iff |\alpha - \beta| \leqslant k|\alpha-\beta| \iff 1 \leqslant k \quad (\text{car } |\alpha - \beta| \neq 0).$$

C'est une contradiction, puisque $k \in]0,1[$ par hypothèse. Absurde ! Ainsi, f admet un unique point fixe.

2. (a) On a $f([a,b]) \subset [a,b]$, c'est à dire que l'intervalle $[a,b]$ est stable par f.
Par réccurence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [a,b]$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique l'inégalité du 1.(b) : $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant k|u_n - \alpha|$ c'est à dire $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k|u_n - \alpha|$.

(c) Avec l'inégalité précédente, on obtient par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant k^n|u_0 - \alpha|$.
Puisque $k \in]0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$ et d'après le théorème des gendarmes, on conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 18 (Une suite récurrente)

1. (a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$ est bien défini lorsque $x + 2 \neq 0$. Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
La fonction f y est clairement dérivable comme quotient de fonctions usuelles.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\},\ f'(x) = \dfrac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2} = \dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}.\quad$ Ainsi $f'(x) \geqslant 0 \iff x + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	e^{-1}	$\nearrow$	$+\infty$

Enfin, la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ et

$$f''(x) = \frac{(e^x(x+1) + e^x)(x+2)^2 - 2e^x(x+1)(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{e^x(x+2)\Big((x+2)^2 - 2(x+1)\Big)}{(x+2)^4}.$$

c'est à dire

$$f''(x) = \frac{e^x(x+2)(x^2+4x+4-2x-2)}{(x+2)^4} = \frac{e^x(x+2)(x^2+2x+2)}{(x+2)^4}.$$

(b) Puisque f est strictement croissante sur $[0,1]$, on a facilement $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = \left[\frac{1}{2}, \frac{e}{3}\right]$.
Puisque $e < 3$, on a ainsi $f([0,1]) \subset [0,1]$: $[0,1]$ est un intervalle stable par f. $\quad (\forall x \in [0,1],\ f(x) \in [0,1])$
On en déduit par récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$:

- Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2} \in [0,1]$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in [0,1]$. Alors $f(u_n) \in [0,1]$, c'est à dire $u_{n+1} \in [0,1]$.

(c) Posons $\forall x \in [0,1],\ g(x) = f(x) - x$. $\quad g$ est dérivable sur $[0,1]$ et

$$\forall x \in [0,1],\ \ g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2} - 1.$$

Le signe de g' n'est pas évident à déterminer... Dérivons de nouveau !

$$\forall x \in [0,1],\ g''(x) = f''(x) = \frac{e^x(x+2)(x^2+2x+2)}{(x+2)^4} > 0.$$

On obtient donc le tableau de variation :

x	0		1
$g''(x)$		$+$	
$g'(x)$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{2e}{9} - 1$

Puisque $e < 3$, on a $\dfrac{2e}{9} - 1 < 0$, on en déduit $\forall x \in [0,1],\ g'(x) < 0$. On a ainsi le tableau de variations :

x	0		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{e}{3} - 1$

Finalement, puisque $\dfrac{1}{2} > 0$ et $\dfrac{e}{3} - 1 < 0$, d'après le TVI (ou le théorème de la bijection),
il existe un unique $\alpha \in [0,1]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Autrement dit, il existe un unique $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
Si jamais $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ existe, celle-ci est nécessairement finie (car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$).
En notant $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$.
Ainsi, ℓ est un point fixe de f, c'est donc que $\ell = \alpha$. Ainsi, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, c'est forcément α !

2.(a) On a déjà vu que

$$\forall x \in [0,1],\ f''(x) = \frac{e^x(x+2)(x^2+4x+4-2x-2)}{(x+2)^4} = \frac{e^x(x+2)(x^2+2x+2)}{(x+2)^4} > 0.$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		1
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{2e}{9}$

Ainsi, on a l'encadrement : $\forall x \in [0,1],\ \dfrac{1}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{2e}{9} \leqslant \dfrac{2}{3}$ (car $e \leqslant 3$).

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons l'IAF à f sur le segment $[u_n, \alpha]$:

$$\forall t \in [u_n, \alpha],\ \ |f'(t)| \leqslant \frac{2}{3} \quad \text{(puisque, pour } t \in [0,1],\ \ \frac{1}{4} \leqslant f'(t) \leqslant \frac{2}{3}\text{)}$$

Ainsi, l'IAF donne : $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$ c'est à dire $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$.

(c) A partir de l'inégalité précédente, on montre par réccurence immédiate que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Puisque $u_0 \in [0,1]$ et $\alpha \in [0,1]$, on a $|u_0 - \alpha| \leqslant 1$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, d'après le théorème des gendarmes, on conclut que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$,
c'est à dire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.