Mardi 20 mai 2025

Concours blanc n°2 - Épreuve de maths n°1 - Corrigé

Problème 1 : Calcul de l'intégrale de Gauss

1. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est <u>continue</u> et <u>positive</u> sur $[0, +\infty[$.
   De plus, on a (par exemple) $e^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
   Puisque l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est convergente, on en déduit $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ converge.
   L'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ étant une intégrale sur un segment, elle est bien définie.
   L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est donc également convergente.

Partie I : Étude des intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n dx$.

2. (a) $W_0 = \int_0^{\pi/2} dx$ donc $\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2}}$.
   $W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(x)dx = \Big[\sin(x)\Big]_0^{\pi/2}$, d'où $\boxed{W_1 = 1}$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = \cos(x)^2 - (1 - \cos(x)^2) = 2\cos(x)^2 - 1$.
   En réordonnant, on obtient : $\boxed{\cos(x)^2 = \frac{1+\cos(2x)}{2}}$.
   On peut alors calculer :
   $$W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}dx = \left[\frac{x + \frac{1}{2}\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}+0}{2} - 0 = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

   (c) Puisque $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \in [0,1]$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x)^{n+1} \leqslant \cos(x)^n$.
   En intégrant cette inégalité, on obtient $W_{n+1} \leqslant W_n$. Ceci montre que $\boxed{(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.
   Par ailleurs, pas positivité de l'intégrale, il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}, W_n \geqslant 0$.
   La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi décroissante et minorée par 0, donc $\boxed{\text{converge}}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
   $$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos(x)^{n+1}}_{u(x)} \underbrace{\cos(x)}_{v'(x)} dx = \Big[\cos(x)^{n+1}\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-(n+1)\sin(x)\cos(x)^n)\sin(x)dx$$
   $$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n \sin(x)^2 dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n(1-\cos(x)^2)dx$$
   $$= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^{n+2}dx\right) = \boxed{(n+1)(W_n - W_{n+2})}.$$

   (b) On déduit de la question précédente que $W_{n+2} + (n+1)W_{n+2} = (n+1)W_n$, d'où $\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n}$.
   Comme de plus $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$, on propose le programme Python suivant :

```python
import numpy as np
def wallis(n) :
  W = np.zeros(2n+1)
  W[0] = np.pi / 2 ; W[1] = 1
  for k in range(2*n-1) : # k = 0, 1, ..., 2n-2
    W[k+2] = (k+1)/(k+2) * W[k]
  return W
```

4. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad (n+1)W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2}$.
   - Initialisation : on a bien $W_1 \times W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ d'après 2.(a).
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $(n+1)W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2}$. Alors :

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+2) \times \left(\frac{n+1}{n+2}W_n\right) \times W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.$$

   Ceci achève la récurrence.

5. (a) D'après la relation précédente, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{W_{n+2}}{W_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1}$.

   (b) La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, on a l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{\frac{W_{n+2}}{W_n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant \frac{W_n}{W_n}. = 1$$

   À l'aide du théorème des gendarmes, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après 3.(b), $(n+1)W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2}$.
   Or, d'après 4.(b), $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.
   Puisque $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, on obtient l'équivalent : $(n+1)W_{n+1}W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} nW_n^2$.
   On a donc $nW_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$, c'est à dire $W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$ et enfin $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{\pi}{2n}\right)^{1/2}$.
   On a bien montré $\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$.

Partie II : Encadrement de l'exponentielle

7. (a) Montrons que : $\forall t \in \mathbb{R}, \ \ e^t \geqslant 1+t$.
   Il y a plusieurs façons rapides de faire cela :
   • On peut écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 en 0 pour exp, et vérifier que le "reste" est positif.
   • On pourrait utiliser le fait que exp est "au dessus de sa tangente en 0" (cf. cours Convexité à venir...)
   Autrement, on peut faire une étude de fonction toute simple !
   Posons $\forall t \in \mathbb{R}, \ f(t) = e^t - 1 - t$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \ f'(t) = e^t - 1$.
   On a donc $f'(t) \geqslant 0 \iff t \geqslant 0$. Un tableau de variation montre donc que f atteint son minimum en 0. De plus $f(0) = 0$.
   Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}, \ f(t) \geqslant 0$, ce qui donne l'inégalité voulue.

   (b) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, en appliquant l'inégalité précédente, on a $e^t \geqslant 1+t$, donc $e^{-t} = \dfrac{1}{e^t} \leqslant \dfrac{1}{1+t}$.
   Et, toujours d'après l'inégalité précédente, $e^{-t} \geqslant 1-t$. On a donc bien $\boxed{1 - t \leqslant e^{-t} \leqslant \dfrac{1}{1+t}}$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, n]$.
   En appliquant l'encadrement précédent (avec $\frac{t}{n}$ à la place de t) : $\ 1 - \dfrac{t}{n} \leqslant e^{-\frac{t}{n}} \leqslant \dfrac{1}{1+\frac{t}{n}}$.
   Puis en élevant à la puissance n : $\ \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t} \leqslant \dfrac{1}{(1+\frac{t}{n})^n}$
   c'est à dire : $\boxed{\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t} \leqslant \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^{-n}}$

Partie III : Calcul de deux intégrales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé.

8. On pose $x = \sqrt{n}\sin(u)$ et donc $dx = \sqrt{n}\cos(u)du$.
   - On a donc :

$$\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = (1-\sin(u)^2)^n\sqrt{n}\cos(u)du = \sqrt{n}(\cos(u)^2)^n\cos(u)du = \sqrt{n}\cos(u)^{2n+1}du.$$

   - Quand $u = 0$, $x = 0$. Quand $u = \frac{\pi}{2}$, $x = \sqrt{n}$.

   Le changement de variable donne : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{n}\cos(u)^{2n+1}du = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(u)^{2n+1}du$

   c'est à dire $\boxed{\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n}W_{2n+1}}$.

9. (a) Pour tout $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on sait que $\cos(u)^2 + \sin(u)^2 = 1$.

   En divisant par $\cos(u)^2$ (non nul pour $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) : $\boxed{1+\tan(u)^2 = \dfrac{1}{\cos(u)^2}}$.

   (b) - On pose $x = \sqrt{n}\tan(u)$, donc $dx = \sqrt{n}(1+\tan(u)^2)du = \sqrt{n}\dfrac{1}{\cos(u)^2}du$
   - On a donc :

$$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx = \left(1+\tan(u)^2\right)^{-n}\sqrt{n}\frac{1}{\cos(u)^2}du = \left(\frac{1}{\cos(u)^2}\right)^{-n}\sqrt{n}\frac{1}{\cos(u)^2}du = \sqrt{n}\cos(u)^{2n-2}du$$

   - Quand $u = 0$, $x = 0$. Quand $u = \dfrac{\pi}{4}$, $x = \sqrt{n}$.

   Le changement de variable donne : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{n}\cos(u)^{2n-2}du = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(u)^{2n-2}du.$

   Enfin, puisque $\cos^{2n-2}$ est une fonction positive, on a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(u)^{2n-2}du \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(u)^{2n-2}du = W_{2n-2}$.

   On a donc montré que $\boxed{\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}}$.

Partie IV : Dénouement

10. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, d'après 6.(b) : $\forall t \in [0, n]$, $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t} \leqslant \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{-n}$.

   On en déduit donc : $\forall x \in [0, \sqrt{n}]$, $\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \leqslant \left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$.
   En intégrant cette inégalité, on obtient :

$$\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \leqslant \int_0^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

   Enfin, d'après les calculs de 7. et 8.(b), on déduit : $\boxed{\displaystyle\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}}$.

   (b) On a vu en question 1. que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est convergente.

   Notons I sa valeur. Par définition, il s'agit de $I = \displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-x^2}dx$.

   En particulier, par composition de limite, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx = I$.
   Cette limite peut être déduite à l'aide du théorème des gendarmes appliqué à l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

D'après 5., on sait que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. On a donc :

$$W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$W_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+2)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On obtient ainsi $\sqrt{n}W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\sqrt{n}W_{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

c'est à dire $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

D'après le Théorème des gendarmes, on conclut finalement que $\boxed{I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

C'est l'une des (très) nombreuses façons de déterminer la valeur de l'intégrale de Gauss, la plus célèbre des intégrales impropres ! Cette valeur est au coeur de la définition de la loi de probabilité normale ("Gaussienne") sur laquelle vous reviendrez l'an prochain.

(c) Bravo à vous, mais ne prenez pas trop la confiance.

11. On définit la "densité gaussienne" par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On note que f est paire, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge, et dans ce cas on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

Pour calculer $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx$,
on pose le changement $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$, donc $du = \frac{1}{\sqrt{2}}dx$. Ceci est possible car la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{2}}$ est C^1 et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Cela donne (sous réserve de convergence) :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\sqrt{2}du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}.$$

On conclut finalement que l'intégrale converge et $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2 \times \frac{1}{2} = 1}$

Problème 2 : Réduction d'endomorphismes en dimension 4

Partie I - Réduction des symétries

Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme admettant la matrice S suivante dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Après calcul (pivot de Gauss sur les lignes par exemple), on ramène S a une matrice triangulaire avec des coefficients diagonaux non-nuls. Ainsi $\boxed{rg(S) = 4}$.

   (b) On en déduit que $rg(s) = 4$. Puisque $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$, il en résulte que s est injectif et surjectif : c'est un $\boxed{\text{automorphisme de } \mathbb{R}^4}$.

2. Un calcul de matrice montre que $S^2 = I_4$. On en déduit que $\boxed{s^2 = Id}$, c'est à dire que s est un symétrie.

3. (a)
```
S = np.array([ [3,2,-4,-2], [2,1,-2,-2], [2,2,-3,-2], [2,0,-2,-1] ])
```

   (b) Il faut tester si les matrices A^2 et I_n (où n est le nombre de lignes de A, récupéré dans le programme) sont les mêmes.

   La condition est ainsi : `(al.matrix_power(A,2)==np.eye(n)).all()`

   ou encore : `(np.dot(A,A)== np.eye(n)).all()`

4. (a) Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a les équivalences suivantes :

$$(x, y, z, t) \in Ker(s - Id) \iff (s - Id)(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0) \iff (S - I_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y - 4z - 2t &= 0 \\ 2x \qquad\quad - 2z - 2t &= 0 \\ 2x + 2y - 4z - 2t &= 0 \\ 2x \qquad\quad - 2z - 2t &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2y - 4z - 2t &= 0 \\ 2x \qquad\quad - 2z - 2t &= 0 \end{cases} \iff x = z + t \text{ et } y = z.$$

   Ainsi $Ker(s - Id) = \{(z + t, z, z, t),\ z, t \in \mathbb{R}\} = Vect\Big((1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\Big)$.

   La famille $\boxed{\Big((1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\Big)}$ étant libre, c'est une base de $Ker(s - Id)$.

   De même, on a les équivalences suivantes :

$$(x, y, z, t) \in Ker(s + Id) \iff (s + Id)(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0) \iff (S + I_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 4x + 2y - 4z - 2t &= 0 \\ 2x + 2y - 2z - 2t &= 0 \\ 2x + 2y - 2z - 2t &= 0 \\ 2x \qquad\quad - 2z &= 0 \end{cases} \iff x = z \text{ et } y = t.$$

   Ainsi $Ker(s + Id) = \{(z, t, z, t),\ z, t \in \mathbb{R}\} = Vect\Big((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\Big)$.

   La famille $\boxed{\Big((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\Big)}$ étant libre, c'est une base de $Ker(s + Id)$.

   (b) Pour montrer que $\mathbb{R}^4 = Ker(s - Id) \oplus Ker(s + Id)$, il suffit de vérifier que la famille obtenue par concaténation des deux bases :

$$\mathcal{B} = \Big((1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\Big) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4.$$

   On peut pour cela vérifier qu'elle est libre ou bien que $rg(\mathcal{B}) = 4$ avec des opérations sur les vecteurs (calcul à préciser). Ainsi $\boxed{\mathbb{R}^4 = Ker(s - Id) \oplus Ker(s + Id)}$.

(c) En notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base précédente, on a par définition

$$e_1, e_2 \in Ker(s - Id) \text{ donc } s(e_1) = e_1 \text{ et } s(e_2) = e_2.$$
$$e_3, e_4 \in Ker(s + Id) \text{ donc } s(e_3) = -e_3 \text{ et } s(e_4) = -e_4.$$

Ceci conduit à la matrice suivante : $\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

On passe à présent au cas général.
Soit E un espace vectoriel de dimension 4 quelconque et $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie quelconque.

5. On souhaite montrer que $E = Ker(s - Id) \oplus Ker(s + Id)$.

(a) L'inclusion $Ker(s - Id) \cap Ker(s + Id) \supset \{0_E\}$ est évidente, vérifions l'autre.
Soit $v \in Ker(s - Id) \cap Ker(s + Id)$.
On a alors $s(v) = v$ et $s(v) = -v$. Ainsi $v = -v$ et donc $v = 0_E$.
On a bien montré que $\boxed{Ker(s - Id) \cap Ker(s + Id) = \{0_E\}}$.

(b) En "développant" le polynôme d'endomorphisme, on obtient :

$$(s - Id) \circ (s + Id) = s^2 - Id = 0 \text{ car } s^2 = Id \text{ puisque } s \text{ est une symétrie.}$$

On a donc $\boxed{(s - Id) \circ (s + Id) = 0}$. Vérifions alors l'inclusion $Im(s + Id) \subset Ker(s - Id)$.
Soit $v \in Im(s + Id)$. Par définition, il existe $u \in E$ tel que $v = (s + Id)(u)$.
On a : $(s - Id)(v) = (s - Id) \circ (s + Id)(u) = 0_E$ puisque l'application $(s - Id) \circ (s + Id)$ est nulle.
Ceci montre que $v \in Ker(s - Id)$.
On a bien vérifié que $\boxed{Im(s + Id) \subset Ker(s - Id)}$.

(c) Rappelons que $\dim(E) = 4$.
On applique le théorème du rang à l'endomorphisme $s + Id$:

$$\dim(Ker(s + Id)) + \dim(Im(s + Id)) = 4.$$

Puisque $Im(s + Id) \subset Ker(s - Id)$, on a :

$$\begin{aligned} &\dim(Im(s + Id)) \leqslant \dim(Ker(s - Id)) \\ &\text{donc : } \dim(Im(s + Id)) + \dim(Ker(s + Id)) \leqslant \dim(Ker(s - Id)) + \dim(Ker(s + Id)) \\ &\text{i.e : } 4 \leqslant \dim(Ker(s - Id)) + \dim(Ker(s + Id)). \end{aligned}$$

On a montré que $\boxed{\dim(Ker(s - Id)) + \dim(Ker(s + Id)) \geqslant 4}$.
Montrons pour finir que $E = Ker(s - Id) \oplus Ker(s + Id)$.
• On a déjà vu en 5.(a) que $Ker(s - Id) \cap Ker(s + Id) = \{0_E\}$, donc les deux espaces sont en somme directe.
• Il en résulte que $\dim\Big(Ker(s - Id) \oplus Ker(s + Id)\Big) = \dim(Ker(s - Id)) + \dim(Ker(s + Id)) \geqslant 4$.
Ainsi, $Ker(s - Id) \oplus Ker(s + Id)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension supérieure ou égale à 4. Puisque $\dim(E) = 4$, c'est forcément que $\boxed{Ker(s - Id) \oplus Ker(s + Id) = E}$.

6. On peut construire une base de E en concaténant une base de $Ker(s-Id)$ puis une base de $Ker(s+Id)$.
Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base ainsi obtenue. Pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$,

Si $e_i \in Ker(s - Id)$, on aura $s(e_i) = e_i$. Si à l'inverse $e_i \in Ker(s + Id)$, on aura $s(e_i) = -e_i$.

Il en résulte que la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(s)$ sera diagonale avec des 1, puis des -1 comme coeffs diagonaux.
Par exemple, si $d = \dim(Ker(s + Id)) = 3$, on aura $\dim(Ker(s - Id)) = 1$, si bien que

$$\mathcal{B} = (\underbrace{e_1}_{\in Ker(s-Id)} , \underbrace{e_2, e_3, e_4}_{\in Ker(s+Id)})$$

et on aura $Mat_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = S_3$.

De manière générale, on comprend que $\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(s) = S_d, \text{ où } d = \dim(Ker(s + Id))}$.

Partie II - Réduction des endomorphismes nilpotents

On travaille pour commencer dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

7. (a) La base canonique étant $(1, X, X^2, X^3)$, on calcule :
$f(1) = 0$, $f(X) = 1$, $f(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 1 + 2X$, $f(X^3) = (X+1)^3 - X^2 = 1 + 3X + 3X^2$.

   La matrice de f dans la base canonique est donc : $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

   (b) Au lieu de calculer les compositions $f \circ f$ puis $f \circ f \circ f$... Il est plus simple de travailler avec les matrices ! Un calcul montre que :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   L'application qui à un endomorphisme associe sa matrice étant bijective,
ceci montre que $f \neq 0$, $f^2 \neq 0$, $f^3 \neq 0$ et $f^4 = 0$. $\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est nilpotent d'indice } p = 4}$.

8. (a) Notons $\mathcal{B} = (X^3, f(X^3), f^2(X^3), f^3(X^3))$.
On constate facilement (par un calcul par exemple) qu'il s'agit d'une famille de polynôme de degré échelonné. Chaque application de f abaissant de 1 le degré, on a :

$$\deg(X^3) = 3,\ \deg(f(X^3)) = 2,\ \deg(f^2(X^3)) = 1,\ \deg(f^3(X^3)) = 0.$$

   Ainsi, $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$, de cardinal $4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$, c'est donc $\boxed{\text{une base de } \mathbb{R}_3[X]}$.

   (b) En notant $\mathcal{B} = (X^3, f(X^3), f^2(X^3), f^3(X^3)) = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on a par construction :

$$f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = e_3,\ f(e_3) = e_4,\ f(e_4) = 0.$$

   On bien $f(e_4) = f(f^3(X^3)) = f^4(X^3) = 0$ car l'application f^4 est nulle.

   Dans cette base, on obtient ainsi la matrice : $\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

On passe à présent au cas général.
Soit E un espace vectoriel de dimension 4 quelconque et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent quelconque.
On note $p \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de f.

9. (a) Puisque p est l'indice de nilpotence de f, on a forcément $f^{p-1} \neq 0$.
(Car sinon f serait nilpotent d'indice $p-1$ ou inférieur).
Il en résulte qu'il existe $\boxed{x \in E \text{ tel que } f^{p-1}(x) \neq 0}$.

   (b) Montrons que $\mathcal{F} = \Big(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x)\Big)$ est libre.
Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{R}$ et supposons que

$$a_0 x + a_1 f(x) + a_2 f^2(x) + \ldots + a_{p-1} f^{p-1}(x) = 0_E.\ (\star)$$

   En composant des deux côtés par l'application linéaire f^{p-1}, on obtient :

$$a_0 f^{p-1}(x) + a_1 f^p(x) + a_2 f^{p+2}(x) + \ldots + a_{p-1} f^{2p-2}(x) = 0_E.$$

   Or, f^p est l'application nulle, donc $\forall k \geqslant p,\ f^k = 0$. Il reste donc seulement :

$$a_0 f^{p-1}(x) = 0_E.$$

Puisque $f^{p-1}(x) \neq 0_E$ (par construction de x), il en résulte que $\boxed{a_0 = 0}$.
L'égalité $(\star)$ de départ devient à présent :

$$a_1 f(x) + a_2 f^2(x) + \ldots + a_{p-1} f^{p-1}(x) = 0_E. \ (\star)$$

On compose des deux côtés par f^{p-2}, pour obtenir avec le même raisonnement :

$$a_1 f^{p-1}(x) = 0_E$$

et déduire que $\boxed{a_1 = 0}$. On poursuit ainsi de proche en proche...

Au final, on a montré que $a_0 = a_1 = \ldots = a_{p-1} = 0$, ce qui montre que $\boxed{\text{la famille } \mathcal{F} \text{ est libre}}$.

(c) La famille $\mathcal{F}$ une famille libre de vecteurs de E.
On a donc nécessairement $Card(\mathcal{F}) \leqslant \dim(E)$, c'est à dire $\boxed{p \leqslant 4}$.
(et donc $1 \leqslant p \leqslant 4$ puisqu'on sait que $p \in \mathbb{N}^*$)

On étudie, dans la suite, les différentes réductions possibles de f en fonction de la valeur de $p \in \{1, 2, 3, 4\}$.

10. Si $p = 1$, f est nilpotent d'indice 1, c'est à dire que $f = 0$.
Dans ce cas, $\boxed{f \text{ est l'application nulle}}$. (cas peu intéressant)

11. On suppose dans cette question que $p = 4$.
    (a) Dans ce cas, $\mathcal{F}$ est une famille libre de E (d'après 9.(b)) de cardinal $p = 4 = \dim(E)$.
    C'est donc automatiquement $\boxed{\text{une base de } E}$.
    (b) Puisque $p = 4$, on a $\mathcal{F} = (x, f(x), f^2(x), f^3(x))$. Notons $\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
    On est alors exactement dans le même cas que dans l'exemple étudié en 8.(b) :

$$f(e_1) = e_2, \ f(e_2) = e_3, \ f(e_3) = e_4, \ f(e_4) = 0.$$

Dans cette base, on obtient ainsi la matrice : $\boxed{Mat_{\mathcal{F}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

12. On suppose dans cette question que $p = 3$.
    (a) Dans ce cas, on sait que $\mathcal{F} = (x, f(x), f^2(x))$ est une famille libre de E (d'après 9.(b)).
    D'après le théorème de la base incomplète, il est possible de compléter $\mathcal{F}$ est une base de E.
    (Puisque $\dim(E) = 4$, il faudra ajouter un seul vecteur).
    Autrement dit, on peut trouver un vecteur $y \in E$ tel que la famille $\mathcal{G} = \Big(x, f(x), f^2(x), y\Big)$
    $\boxed{\text{soit une base de } E}$.
    (b) Notons $\mathcal{G} = \Big(x, f(x), f^2(x), y\Big) = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
    On a, par construction :

$$f(e_1) = e_2, \ f(e_2) = e_3, \ f(e_3) = 0_E, \quad (\text{car } f(e_3) = f^3(x) \text{ et } f \text{ est nilpotent d'indice } 3)$$

et $f(e_4) = f(y) \in E$ est inconnu. On peut tout de même décomposer $f(e_4)$ dans la base $\mathcal{G}$ de E :
il existe des réels $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(e_4) = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4.$$

Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathcal{G}$ est : $\boxed{M = Mat_{\mathcal{G}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}}$.

(c) Puisque f est nilpotent d'indice 3, on a $f^3 = 0$ et donc on doit avoir $Mat_{\mathcal{G}}(f^3) = 0$ c'est à dire que M^3 est la matrice nulle. Le calcul donne :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ad \\ 0 & 0 & 0 & a+bd \\ 1 & 0 & 0 & b+cd \\ 0 & 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix}, \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ad^3 \\ 0 & 0 & 0 & ad+bd^2 \\ 0 & 0 & 0 & a+bd+cd^2 \\ 0 & 0 & 0 & d^3 \end{pmatrix}$$

L'égalité $M^3 = 0$ nous apprend effectivement que $\boxed{d = 0, \text{ puis } a = 0}$.

(d) Dans la base $\mathcal{G} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on a donc la matrice

$$Mat_{\mathcal{G}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On sait donc que $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$, $f(e_3) = 0_E$, et la dernière colonne nous apprend que

$$f(e_4) = be_2 + ce_3 = bf(e_1) + cf(e_2) \text{ donc } f(e_4 - be_1 - ce_2) = 0_E.$$

Remplaçons donc le dernier vecteur par $\boxed{e_4' = e_4 - be_1 - ce_2}$ et considérons la famille

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4').$$

Il est clair que cette famille est toujours une base de E car, avec des opérations sur les vecteurs :

$$rg(\mathcal{B}) = rg(e_1, e_2, e_3, e_4 - be_1 - ce_2) = rg(e_1, e_2, e_3, e_4) = rg(\mathcal{G}) = 4.$$

Par construction, on a alors

$$f(e_1) = e_2, \ f(e_2) = e_3, \ f(e_3) = 0_E, \ f(e_4') = 0_E$$

donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est bien : $\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

13. On suppose pour finir que $p = 2$.

(a) Soit $v \in Im(f)$. Il existe donc $u \in E$ tel que $v = f(u)$. On a alors $f(v) = f^2(u) = 0_E$ (car $f^2 = 0$). Ceci montre que $v \in Ker(f)$. On montré l'inclusion $\boxed{Im(f) \subset Ker(f)}$.
Le théorème du rang nous apprend ensuite que $\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = 4$.
Comme on doit avoir $0 < \dim(Im(f)) \leqslant \dim(Ker(f))$
(on ne peut pas avoir $\dim(Im(f)) = 0$ car alors f serait l'application nulle, qui est nilpotente d'indice 1 et non pas 2)
les seules possibilités sont : $\dim(Ker(f)) = 2$ et $\dim(Im(f)) = 2$
ou bien $\dim(Ker(f)) = 3$ et $\dim(Im(f)) = 1$.
Ainsi, on a forcément $\boxed{\dim(Ker(f)) \in \{2, 3\}}$.

(b) Supposons que $\dim(Ker(f)) = 3$.
On cherche une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Autrement dit, il faut que :

$$f(e_1) = e_2, \ f(e_2) = 0_E, \ f(e_3) = 0_E, \ f(e_4) = 0_E.$$

- Puisque $\dim(Im(f)) = 1$ (théorème du rang), on peut introduire une base (e_2) de $Im(f)$.
- Par définition, $e_2 \in Im(f)$ donc il existe un vecteur $e_1 \in E$ tel que $e_2 = f(e_1) \neq 0_E$.
- On note alors que $f(e_2) = f^2(e_1) = 0_E$ (car $f^2 = 0$), donc $e_2 \in Ker(f)$
- Puisque $Ker(f)$ est dimension 3, on peut compléter la famille (e_2) en une base (e_2, e_3, e_4) de $Ker(f)$.

On a alors bien les conditions :

$$f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = 0_E,\ f(e_3) = 0_E,\ f(e_4) = 0_E.$$

Il reste à vérifier que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est bien une base de E ! Pour cela, on vérifie qu'elle est libre : soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = 0_E.$$

En composant par f, on obtient

$$af(e_1) = 0_E \text{ avec } f(e_1) \neq 0_E,$$

donc $a = 0$. On est alors réduit à :

$$be_2 + ce_3 + de_4 = 0_E$$

et comme la famille (e_2, e_3, e_4) est une base de $Ker(f)$, elle est libre : on peut donc conclure que $b = c = d = 0$. Ainsi $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E \text{ qui convient}}$.

(c) Supposons que $\dim(Ker(f)) = 2$.

On cherche une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$.

Autrement dit, il faut que :

$$f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = 0_E,\ f(e_3) = e_4,\ f(e_4) = 0_E.$$

- Puisque $\dim(Im(f)) = 2$ (théorème du rang), on peut introduire une base (e_2, e_4) de $Im(f)$.
- Par définition, cela signifie qu'il existe des vecteurs notés $e_1, e_3 \in E$ tels que $e_2 = f(e_1)$ et $e_4 = f(e_3)$.
- Notons qu'alors $f(e_2) = f^2(e_1) = 0_E$ et $f(e_4) = f^2(e_3) = 0_E$ (car $f^2 = 0$)

On a alors bien les conditions :

$$f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = 0_E,\ f(e_3) = e_4,\ f(e_4) = 0_E.$$

Il reste à vérifier que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est bien une base de E ! Pour cela, on vérifie qu'elle est libre : soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = 0_E.$$

En composant par f, on obtient

$$ae_2 + ce_4 = 0_E.$$

Comme la famille (e_2, e_4) est une base de $Im(f)$, elle est libre : on peut donc conclure que $a = c = 0$. On est alors réduit à :

$$be_2 + de_4 = 0_E$$

et à nouveau, comme la famille (e_2, e_4) est libre, on conclut que $b = d = 0$.

Ainsi $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E \text{ qui convient}}$.