24

Somme de sous-espaces vectoriels

Sommes, sommes directes

Exercice 1 (Vrai ou Faux ?)

(a) $\mathbb{R}_3[X] + \mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_3[X]$.

(b) $\mathbb{R}_3[X] \oplus \mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_3[X]$.

(c) Si $F \oplus G = \mathbb{R}^2$, et $F \oplus H = \mathbb{R}^2$, alors $G = H$.

(d) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Si $v \in F$ alors $v \notin G$.

(e) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Le complémentaire de F est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F.

Exercice 2 (Des sommes directes)

1. Soient $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$
et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\}$.
Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

2. Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y + z = 0\}$
et $G = Vect((1, 0, 1))$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

3. Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$
et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(2) = P(3) = 0\}$.
Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 3 (Une somme de S.E.V de $\mathbb{R}^3$)

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$
et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$.

(a) Sont-ils en somme directe ?
(b) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4 (Supplémentaires à trouver)

1. Déterminer un supplémentaire de
$F = Vect((1, 0, 1), (1, 1, 2))$ dans $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer un supplémentaire de
$F = Vect((1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 2))$ dans $\mathbb{R}^4$.

3. Déterminer un supplémentaire de $\mathbb{R}_2[X]$
dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 5 (Supplémentaires en dim. infinie)

Soient $F = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c\}$
et $G = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$.

Montrer que $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice 6 (Somme de trois S.E.V)

$F = Vect(X^2, X^4)$, $G = Vect(X)$, $H = Vect(X^3)$.

Ces trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_4[X]$ sont-ils en somme directe ? Décrire $F + G + H$.

Projecteurs

Exercice 7 (Un projecteur dans $\mathbb{R}^4$)

Soient $F = Vect((1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0))$ et
$G = Vect((1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0))$.

1. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G.

Exercice 8 (Projecteurs dans $\mathbb{R}^3$)

Soient $F = Vect((1, 2, -1)$
et $G = Vect((1, 0, 1), (1, 1, 1))$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer l'expression du projecteur p (resp. q) sur F (resp. G) parallèlement à G (resp. F)

Exercice 9 (Sur quoi / parallèlement à quoi ?)

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - 2z, y + z, 0) \end{array}$$

1. Montrer que g est un projecteur.

2. Déterminer explicitement les espaces F et G tels que g soit le projecteur sur F parallèlement à G.

Exercice 10 (Somme de projecteurs)

Soit E un espace vectoriel.
Soient p et q deux projecteurs de $\mathcal{L}(E)$.
Montrer que $p + q$ est encore un projecteur
si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Oral HEC 2013

On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$
et $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(X) = P(-X)\}$. Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus G \oplus H$.