24

Somme de sous-espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre E désigne un espace-vectoriel.

Introduction et motivation

- Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Exemple

On considère les deux plans suivants dans $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; | z = 0\} = Vect((1, 0, 0), (0, 1, 0)), \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; | y = 0\} = Vect((1, 0, 0), (0, 0, 1)).$$

Leur intersection est la droite

$$F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; | z = 0 \text{ et } y = 0\}$$

c'est à dire : $F = Vect((1, 0, 0))$.

Dessin :

- En revanche, (à moins que $F \subset G$ ou $G \subset F$), la réunion $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E !

Exemple

On considère les deux droites suivantes dans $\mathbb{R}^2$: $F = Vect((1, 0))$ et $G = Vect((1, 1))$.

$F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Par exemple : $(1, 0) \in F \cup G$ et $(1, 1) \in F \cup G$
mais $(1, 0) + (1, 1) = (2, 1) \notin F \cup G$

Dessin :

On aimerait donc définir une opération "similaire à l'union" qui préserve la structure d'espace vectoriel...

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, si on dispose des deux droites $F = Vect((1, 0, 0))$ et $G = Vect((1, 1, 0))$,
on voudrait un moyen simple de désigner le plan $H = Vect((1, 0, 0), (1, 1, 0))$.
H est ce que l'on va appeler la **somme de F et G**, notée $H = F + G$.

Dessin :

1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

1.1 Somme, somme directe, S.E.V supplémentaires

Définition 1 (Somme de deux S.EV)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle somme de F et G et on note $F+G$ l'ensemble :

$$F+G=\Big\{v_1+v_2,\ (v_1,v_2)\in F\times G\Big\}.$$

Proposition 1 (La somme est un S.E.V)

La somme $F+G$ est également un sous-espace vectoriel de E.

Preuve :

- F et G sont des S.E.V de E, donc contiennent 0_E. Ainsi, $0_E=\underbrace{0_E}_{\in F}+\underbrace{0_E}_{\in G}\in F+G$.

- Soient $v,v'\in F+G$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Vérifions que $v+\lambda v'\in E$.

Par définition, on peut écrire $v=v_1+v_2$ et $v'=v_1'+v_2'$ avec $v_1,v_1'\in F$ et $v_2,v_2'\in G$.
Ainsi, $v+\lambda v'=v_1+v_2+\lambda v_1'+\lambda v_2'=\underbrace{(v_1+\lambda v_1')}_{\in F}+\underbrace{(v_2+\lambda v_2')}_{\in G}\in F+G$. □

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les droites

$$F=Vect((1,0))=\{(x,0),\ x\in\mathbb{R}\}\quad\text{et}\quad G=Vect((0,1))=\{(0,y),\ y\in\mathbb{R}\}.$$

Alors $F+G=\{(x,0)+(0,y),\ x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}=\{(x,y),\ x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2$.

- Dans $\mathbb{R}[X]$, considérons les S.E.V :

$$F=Vect(1,X,X^3)=\{a+bX+cX^3,\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}\ \text{ et }\ G=Vect(X,X^2)=\{\alpha X+\beta X^2,\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}.$$

Alors $F+G=\Big\{a+bX+cX^3+\alpha X+\beta X^2,(a,b,c,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^5\Big\}=\mathbb{R}_3[X]$.

Remarque 1

Un vecteur $v\in F+G$ ne se décompose pas nécessairement <u>de manière unique</u> comme $v=\underbrace{v_1}_{\in F}+\underbrace{v_2}_{\in G}$!
Pour le deuxième exemple : on a $X\in F+G$, mais on peut le décomposer de multiples manières :

$$X=\underbrace{X}_{\in F}+\underbrace{0}_{\in G},\qquad X=\underbrace{2X}_{\in F}+\underbrace{(-X)}_{\in G},\qquad X=\underbrace{3X}_{\in F}+\underbrace{(-2X)}_{\in G}\quad\text{etc...}$$

Définition 2 (Somme directe)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que la somme $F+G$ **est directe**, ou que "**F et G sont en somme directe**" lorsque :

$$\forall v\in F+G,\ \ \exists!(v_1,v_2)\in F\times G,\ \ v=v_1+v_2.$$

Pour signifier que la somme $F+G$ est directe, on la note : $F\oplus G$.

Exemple

Tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ s'écrit $(x,y)=\underbrace{x(1,0)}_{\in Vect((1,0))}+\underbrace{y(0,1)}_{\in Vect((0,1))}$ et cette décomposition est clairement unique.

On a donc la somme directe : $\mathbb{R}^2=Vect((1,0))\oplus Vect((0,1))$.

On dispose en fait d'une caractérisation plus simple des sommes directes :

Théorème 1 (Caractérisation d'une somme directe par l'intersection $F \cap G$)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a l'équivalence suivante :

$$\text{La somme } F + G \text{ est directe} \iff F \cap G = \{0_E\}.$$

Preuve :

• Supposons que la somme $F + G$ est directe, montrons que $F \cap G = \{0_E\}$.
Soit $v \in F \cap G$, alors on peut écrire : $v = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ et $v = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{v}_{\in G}$.
Puisque cette décomposition doit être unique, on a forcément $v = 0_E$ et $0_E = v$. Ainsi $v = 0_E$!
Ceci montre l'inclusion $F \cap G \subset \{0_E\}$, l'inclusion réciproque est évidente.

• Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$, montrons que la somme $F + G$ est directe.
Soit $v \in F + G$, on suppose qu'il s'écrit à la fois : $v = \underbrace{v_1}_{\in F} + \underbrace{v_2}_{\in G}$ et $v = \underbrace{v_1'}_{\in F} + \underbrace{v_2'}_{\in G}$.
Montrons qu'en fait $v_1 = v_1'$ et $v_2 = v_2'$ (donc la décomposition sera unique).
On a $v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$, donc : $\underbrace{v_1 - v_1'}_{\in F} = \underbrace{v_2' - v_2}_{\in G}$.
Ainsi, $v_1 - v_1'$ et $v_2' - v_2$ appartiennent à la fois à F et à G, c'est à dire à $F \cap G = \{0_E\}$.
On a donc $v_1 - v_1' = 0_E$ et $v_2' - v_2 = 0_E$, ce qui donne bien $v_1 = v_1'$ et $v_2 = v_2'$. $\square$

On verra, dans la suite, d'autres caractérisation équivalentes pour vérifier qu'une somme est directe.

Bien souvent, on cherchera en fait à décomposer l'espace vectoriel E tout entier comme somme directe de deux sous-espace vectoriels : si l'on montre que $E = F \oplus G$, n'importe quel élément de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Définition 3 (S.E.V supplémentaires)

On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **supplémentaires** lorsque $E = F \oplus G$.
Autrement dit :

$\boxed{1}$ La somme $F + G$ est directe (on la note donc $F \oplus G$)

$\boxed{2}$ Le sous-espace vectoriel $F + G$ est égal à l'espace vectoriel E tout entier

Attention !

Ne pas confondre "supplémentaire" et "complémentaire" !
On ne considèrera jamais le complémentaire $\overline{F} = E \setminus F$ d'un SEV F de E.
($\overline{F}$ n'est même pas un sous-espace vectoriel de E...)

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit les S.E.V des fonctions paires et impaires :

$$\mathcal{P} = \Big\{ f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x) \Big\}, \quad \mathcal{I} = \Big\{ f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) \Big\}.$$

Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans E.

On souhaite montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$, c'est à dire que toute fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Soit $f \in E$ fixée.

• Analyse : Supposons qu'il existe $f_1 \in \mathcal{P}$ et $f_2 \in \mathcal{I}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.
Par parité/imparité, on obtient aussi : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f_1(x) - f_2(x)$.
Ainsi on note que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) + f(-x) = 2f_1(x)$ et $f(x) - f(-x) = 2f_2(x)$.

On en déduit que les fonctions f_1 et f_2 sont forcément données par :

$$f_1 : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et } f_2 : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

• Synthèse : Définissons les fonctions $f_1 : x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $f_2 : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
On vérifie très facilement que : $f_1 \in \mathcal{P}, \quad f_2 \in \mathcal{I}$ et $f = f_1 + f_2$.

On a bien montré que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

1.2 Concaténation des bases

On travaille à présent avec des sous-espaces vectoriels de dimension finie.

Proposition 2 (Famille génératrice de $F+G$)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E.
On introduit $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $\mathcal{B}_G = (g_1, \dots, g_q)$ une base de G.

Alors la famille $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ obtenue en **concaténant** (c'est à dire en "fusionnant") ces deux bases est une famille génératrice de $F+G$.

Preuve :

Par définition, tout $v \in F+G$ s'écrit $v = \underbrace{v_1}_{\in F} + \underbrace{v_2}_{\in G}$.
On a $v_1 \in F = Vect(f_1, \dots, f_p)$, donc en particulier $v_1 \in Vect(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$.
On a $v_2 \in G = Vect(g_1, \dots, g_q)$, donc en particulier $v_2 \in Vect(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$.
Ainsi, on a $v = v_1 + v_2 \in Vect(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$.
Tout $v \in F+G$ s'écrit donc comme combinaison linéaire de $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$. □

Remarque 2

• En fait, il n'est pas nécessaire de considérer des "bases" : il suffit que $(f_1, \dots, f_p)$ (resp. $(g_1, \dots, g_q)$) soit une famille génératrice de F (resp. G) pour avoir la conclusion de la Proposition 2.

On pourra donc retenir : $\boxed{Vect(f_1, \dots, f_p) + Vect(g_1, \dots, g_q) = Vect(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)}$

Méthode : Déterminer l'espace vectoriel $F+G$

• Pour déterminer explicitement le SEV $F+G$, on peut revenir à la définition

$$F+G = \{v_1 + v_2, \ (v_1, v_2) \in F \times G\}.$$

• On peut aussi déterminer des familles génératrices de F et G, de sorte que $F = Vect(f_1, \dots, f_p)$ et $G = Vect(g_1, \dots, g_q)$ et on a alors $F+G = Vect(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$.

Exercice 2

On considère les deux plans de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-y=0\}.$$

Montrer que $F+G = \mathbb{R}^3$.

On détermine une famille génératrice (en fait une base) de F et de G :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|z = -x-y\} = \{(x,y,-x,-y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = Vect((1,0,-1),(0,1,-1)).$$

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x\} = \{(x,2x,z),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\} = Vect((1,2,0),(0,0,1)).$$

On a donc

$$\begin{aligned} F+G &= Vect((1,0,-1),(0,1,-1),(1,2,0),(0,0,1)) = Vect((1,0,0),(0,1,0),(1,2,0),(0,0,1)) \\ &= Vect((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Attention !

Comme on vient de le voir, la famille obtenue par concaténation d'une base de F et d'une base de G n'est pas forcément une base de $F+G$!
Dans l'exercice précédent, on avait $\mathcal{B}_F = ((1,0,-1),(0,1,-1))$ et $\mathcal{B}_G = ((1,2,0),(0,0,1))$.
La concaténation de ces deux bases donne une famille génératrice de $F+G = \mathbb{R}^3$,
mais ce n'est pas une famille libre !

En fait, le cas où la concaténation des deux bases donne une base de $F+G$ est exactement le cas d'une somme directe, ce qui donne une nouvelle caractérisation !

Théorème 2 (Caractérisation d'une somme directe par concaténation des bases)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E.
On introduit $\mathcal{B}_F = (f_1,\dots,f_p)$ une base de F et $\mathcal{B}_G = (g_1,\dots,g_q)$ une base de G.
On a l'équivalence suivante :

$$\text{La somme } F+G \text{ est directe} \iff \mathcal{B} = (f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_q) \text{ est une base de } F+G.$$

Preuve (facultative) :

On a déjà vu en Proposition 2 que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $F+G$. Il reste donc à montrer :

$$\text{La somme } F+G \text{ est directe} \iff \mathcal{B} = (f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_q) \text{ est une famille libre.}$$

• Supposons que la somme $F+G$ est directe, c'est à dire $F \cap G = \{0_E\}$ d'après le Théorème 1. Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{R}$ et $\mu_1,\dots,\mu_q \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i + \sum_{i=1}^q \mu_i g_i = 0_E$ et montrons que tous ces scalaires sont nuls.

On a $\underbrace{\displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i}_{\in F} = -\underbrace{\displaystyle\sum_{i=1}^q \mu_i g_i}_{\in G}$ donc ces vecteurs appartiennent à $F \cap G = \{0_E\}$.

Ainsi, on en déduit que $\displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i = 0_E$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^q \mu_i g_i = 0_E$. Enfin, comme les familles $(f_1,\dots,f_p)$ et $(g_1,\dots,g_q)$ sont libres, on en déduit que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ et $\mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$, d'où le résultat.

• Inversement, supposons que $\mathcal{B}$ est libre.
Montrons que la somme $F+G$ est directe, c'est à dire que $F \cap G = \{0_E\}$ d'après le Théorème 1.
Soit $v \in F \cap G$. Puisque $v \in F$, on peut écrire $v = \displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i$. Puisque $v \in G$, on peut écrire $v = \displaystyle\sum_{i=1}^q \mu_i g_i$.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i - \sum_{i=1}^q \mu_i g_i = v - v = 0_E$. Puisque la famille $\mathcal{B} = (f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_q)$ est libre, il en résulte que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$. On obtient donc $v = \displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = 0_E$.

On conclut que $F \cap G \subset \{0_E\}$. L'inclusion réciproque est évidente. □

Cette caractérisation nous donne ainsi une nouvelle façon de montrer qu'une somme est directe.

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|x + y + z = 0\}$ et la droite $G = Vect((1, 1, 1))$.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ (c'est à dire que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.)

On a déjà vu qu'une base de F était $\mathcal{B}_F = ((1, 0, -1,), (0, 1, -1))$.
Une base de G est $\mathcal{B}_G = ((1, 1, 1))$.
On sait donc que $F + G = Vect((1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, 1, 1))$.
De plus, $\mathcal{B} = ((1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, 1, 1))$ est une famille libre : c'est donc une base de $F + G$!
$\Big($ En effet, $rg(\mathcal{B}) = rg((1, 0, -1), (0, 1, -1), (0, 1, 2)) = rg((1, 0, -1), (0, 1, -1), (0, 0, 3)) = 3.$ $\Big)$
D'après le théorème de concaténation des bases (Théorème 2), on en déduit que la somme est directe : on peut donc l'écrire $F + G = F \oplus G$.

Puisque $Card(\mathcal{B}) = 3$, $F \oplus G$ est un S.E.V de $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, c'est donc que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Une conséquence importante du Théorème de concaténation des bases est la suivante :

Corollaire 1 (Existence d'un supplémentaire en dimension finie)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel F de E admet un sous-espace supplémentaire G dans E, c'est à dire qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$.

Preuve :

Notons $n = dim(E)$ et $p = dim(F)$ (avec donc $p \leqslant n$).
On introduit $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F.

$\mathcal{B}_F$ est une famille libre de vecteurs de F, donc une famille libre de vecteurs de E.
D'après le Théorème de la base incomplète, on sait qu'on peut rajouter $n-p$ vecteur pour la compléter en une base $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_{n-p})$ de E !

Posons alors $G = Vect(g_1, \ldots, g_{n-p})$.

- On a : $E = Vect(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_{n-p}) = Vect(f_1, \ldots, f_p) + Vect(g_1, \ldots, g_{n-p}) = F + G$.
- De plus, la famille $\mathcal{B}_G = (g_1, \ldots, g_{n-p})$ est libre, donc c'est une base de G.

(si $\mathcal{B}_G$ était liée, alors $\mathcal{B}$ serait également liée, ce qui est exclu !)
Ainsi, en concaténant les bases $\mathcal{B}_F$ de F et $\mathcal{B}_G$ de G, on obtient la base $\mathcal{B}$ de $E = F + G$.
D'après le théorème de concaténation des bases (Théorème 2), la somme $F + G$ est directe.
On a donc bien montér que $E = F \oplus G$: F et G sont supplémentaires dans E. $\square$

Attention !

Il n'y a pas unicité du supplémentaire !
Pour cette raison, on dit toujours qu'on introduit "un supplémentaire" et non pas "le supplémentaire".

Exemple : Vérifier (à l'aide du critère que vous préférez !) que

$$Vect((1, 0)) \oplus Vect((0, 1)) = \mathbb{R}^2 \quad \text{et aussi} \quad Vect((1, 0)) \oplus Vect((1, 1)) = \mathbb{R}^2.$$

$G = Vect((0, 1))$ et $G = Vect((1, 1))$ sont donc des supplémentaires de $F = Vect((1, 0))$ dans $E = \mathbb{R}^2$.

Méthode : Déterminer un supplémentaire de F dans E

Si on souhaite déterminer un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel F de E :

$\boxed{1}$ On détermine une base $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ de F.

$\boxed{2}$ On complète cette famille en une base $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ de E.

$\boxed{3}$ On sait alors qu'en posant $G = Vect(g_1, \dots, g_q)$, on a un supplémentaire de F dans E, c'est à dire que $F \oplus G = E$.

Exercice 4

Déterminer un supplémentaire de $F = Vect(X^2 - 2X + 1, -X + 2)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

$\mathcal{B}_F = (X^2 - 2X + 1, -X + 2)$ est une base de F. On cherche à la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Par exemple : $(X^2 - 2X + 1, -X + 2, 1, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$
(famille libre car polynômes de degrés échelonnés, de cardinal $4 = \dim(R_3[X])$.)
On peut donc affirmer que $G = Vect(1, X^3)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$: $F \oplus G = \mathbb{R}_3[X]$.

1.3 Dimension d'une somme, dimension d'une somme directe

On travaille toujours avec des sous-espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème 3 (Formule de Grassmann : dimension de la somme $F + G$)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E.

Alors $F + G$ est de dimension finie et $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Conséquence : On a toujours $\dim(F + G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$.

Remarque 3

Cette formule n'est pas sans rappeler $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$!

Preuve du Théorème 3 (facultative) :

• Montrons d'abord que la formule est vraie pour les sommes directes $F + G = F \oplus G$.
Supposons $F \cap G = \{0_E\}$ donc $\dim(F \cap G) = 0$. On veut donc montrer $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.
Soient $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $\mathcal{B}_G = (g_1, \dots, g_q)$ une base de G. Puisque la somme $F \oplus G$ est directe, on sait d'après le Théorème de concaténation des bases que $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de $F \oplus G$. C'est donc que $\dim(F + G) = p + q = \dim(F) + \dim(G)$, d'où le résultat.

• Revenons à présent au cas général où la somme n'est pas directe : $F \cap G \neq \{0_E\}$.
Puisque $F \cap G$ est un SEV de F, d'après le Corollaire 1, on peut introduire F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F : c'est à dire que F' est un SEV de F tel que $F = F \cap G \oplus F'$.
Cette somme étant directe, on sait que $\dim(F) = \dim(F \cap G) + \dim(F')$,
et donc $\dim(F') = \dim(F) - \dim(F \cap G)$. Montrons à présent que $F + G = F' \oplus G$:

- D'abord comme la somme $F \cap G \oplus F'$ est directe, on sait que $(F \cap G) \cap F' = \{0_E\}$, c'est à dire $G \cap F' = \{0_E\}$. Ceci montre que la somme $F' + G$ est directe.

- Justifions que $F + G = F' + G$. Puisque $F' \subset F$, on a bien-sûr $F' + G \subset F + G$.
Inversement, si $v \in F + G$, on peut écrire $v = \underbrace{v_1}_{\in F} + \underbrace{v_2}_{\in G}$.
Comme $v_1 \in F = F \cap G \oplus F'$, on peut écrire $v_1 = \underbrace{w_1}_{\in F \cap G} + \underbrace{w_2}_{\in F'}$, donc $v = \underbrace{w_2}_{\in F'} + \underbrace{w_1 + v_2}_{\in G} \in F' + G$.

Pour finir : $\dim(F + G) = \dim(F' \oplus G) = \dim(F') + \dim(G) = \dim(F) - \dim(F \cap G) + \dim(G)$. □

En conséquence, on obtient une dernière caractérisation des sommes directes :

Théorème 4 (Caractérisation d'une somme directe par la dimension)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. On a l'équivalence :

$$\text{La somme } F+G \text{ est directe} \iff dim(F+G) = dim(F) + dim(G).$$

En particulier, pour une somme directe, on pourra écrire $dim(F \oplus G) = dim(F) + dim(G)$.

Preuve :
Avec la formule de Grassmann (Théorème 3), on voit directement que
$dim(F+G) = dim(F) + dim(G) \iff dim(F \cap G) = 0 \iff F \cap G = \{0_E\} \iff F+G$ est directe.
□

1.4 Récapitulatif : montrer qu'une somme de deux S.E.V est directe

Méthode : Montrer que deux S.E.V F et G sont en somme directe

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
Toutes les affirmations suivantes sont équivalentes :

(a) La somme $F+G$ est directe (on l'écrit alors $F \oplus G$).

(b) $F \cap G = \{0_E\}$

(c) La concaténation d'une base de F et d'une base de G donne une base de $F+G$.
(il suffit de vérifier que c'est une famille libre, car c'est toujours une famille génératrice de $F+G$!)

(d) $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.

1.5 Récapitulatif : montrer que deux S.E.V sont supplémentaires

Rappel : (Définition 3) On dit que F et G sont supplémentaires dans E lorsque $F \oplus G = E$, c'est à dire :

$$\text{La somme } F+G \text{ est directe} \quad \underline{\underline{\text{et}}} \quad F+G=E$$

Théorème 5 (Caractérisations des S.E.V supplémentaires)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On introduit $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $\mathcal{B}_G = (g_1, \dots, g_q)$ une base de G.

L'affirmation "F et G sont supplémentaires dans E" (c'est à dire $F \oplus G = E$)
est équivalente à chacune des affirmation suivantes :

(a) **Avec la définition :** $\forall v \in E,\ \exists!(v_1, v_2) \in F \times G,\ v = v_1 + v_2$.

(b) **Avec l'intersection :** $F+G=E$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

(c) **Avec les bases :** La concaténation $\mathcal{B} = [\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G] = (f_1, \dots f_p, g_1, \dots g_q)$ est une base de E.

(d) **Avec les dimensions (version 1) :** $F+G=E$ et $dim(F) + dim(G) = dim(E)$.

(e) **Avec les dimensions (version 2) :** $F \cap G = \{0_E\}$ et $dim(F) + dim(G) = dim(E)$.

Preuve :

- (a) est simplement la définition de $E = F \oplus G$.
- L'équivalence (a) $\iff$ (b) découle de la caractérisation du Théorème 1 :

$$(a) \iff E = F \oplus G \iff \left\{ \begin{array}{l} F+G=E \\ \text{et la somme } F+G \text{ est directe} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} F+G=E \\ \text{et } F \cap G = \{0_E\} \end{array} \right. \iff (b)$$

- L'équivalence (a) $\iff$ (c) découle de la caractérisation du Théorème 2.

$$(a) \iff E = F \oplus G \iff \begin{cases} F+G=E \\ \text{et la somme } F+G \text{ est directe} \end{cases} \iff \begin{cases} F+G=E \\ \text{et } \mathcal{B}=[\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F] \text{ est une base de } F+G \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} F+G=E \\ \text{et } \mathcal{B}=[\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F] \text{ est une base de } E \end{cases} \iff (c)$$

- L'équivalence (a) $\iff$ (d) découle de la caractérisation du Théorème 4 :

$$(a) \iff E = F \oplus G \iff \begin{cases} F+G=E \\ \text{et la somme } F+G \text{ est directe} \end{cases} \iff \begin{cases} F+G=E \\ \text{et } \dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} F+G=E \\ \text{et } \dim(E)=\dim(F)+\dim(G) \end{cases} \iff (d)$$

- L'équivalence (a) $\iff$ (e) découle de la formule de Grassman (Théorème 3) :

$$(a) \iff (b) \iff \begin{cases} F+G=E \\ \text{et } F\cap G=\{0_E\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim(F+G)=\dim(E) \\ \text{et } F\cap G=\{0_E\} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)=\dim(E) \\ \text{et } F\cap G=\{0_E\} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \dim(F)+\dim(G)=\dim(E) \\ \text{et } F\cap G=\{0_E\} \end{cases} \iff (e) \qquad \square$$

Exercice 5

On rappelle que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\}$

1. En utilisant la définition, montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (c'est à dire $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$).

2. En utilisant le critère "le plus simple", re-démontrer très rapidement ce résultat.

1. Montrons que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists!(A,B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),\ M = A+B.$
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixé.
- Analyse : Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = A+B$.
On donc également : ${}^tM = {}^tA + {}^tB = A - B$.
On remarque donc que $M + {}^tM = 2A$ et $M - {}^tM = 2B$.
On en déduit qu'on a nécessairement : $A = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $B = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.
- Synthèse : Posons $A = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $B = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.
On a évidemment $M = A+B$.
On vérifie très facilement que ${}^tA = A$ donc $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et ${}^tB = -B$ donc $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

On a bien montré que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.
On a même la décomposition explicite : $M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$.

2. On peut faire beaucoup plus rapide avec le critère (e) du Théorème 5 :
- $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n^2+n+n^2-n}{2} = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$
(car si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a ${}^tA = A$ et ${}^tA = -A$ donc $A = -A$ d'où $A = 0$.)

On en déduit directement que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

2 Projecteurs

Définition 4 (Projecteurs associés à deux S.E.V supplémentaires)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = F \oplus G$.
Ainsi tout vecteur $v \in E$ s'écrit de manière unique $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in F$ et $v_2 \in G$.
On introduit les applications suivantes :

- $p : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ v & \mapsto & v_1 \end{array}$ est appelé projecteur sur F parallèlement à G.
- $q : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ v & \mapsto & v_2 \end{array}$ est appelé projecteur sur G parallèlement à F.

On dit que p et q sont des projecteurs associés .

- Dans $E = \mathbb{R}^2$, soient F et G deux-droites non-parallèles. On a alors $F \oplus G = E$:

Tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire $v = \underbrace{p(v)}_{\in F} + \underbrace{q(v)}_{\in G}$.

Dessin :

- Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit F un plan et G une droite non-incluse dans F. On a alors $F \oplus G = E$:

Tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ peut s'écrire $v = \underbrace{p(v)}_{\in F} + \underbrace{q(v)}_{\in G}$.

Dessin :

Exemple

On a vu que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrivait :

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}.$$

Les projecteurs associés sont donc : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad p(M) = \frac{1}{2}(M + {}^tM) \quad q(M) = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

Méthode : Déterminer les projecteurs associés à $E = F \oplus G$

On suppose que $E = F \oplus G$. On souhaite déterminer les projecteurs p et q associés.

$\boxed{1}$ Déterminer des bases $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ de F et $\mathcal{B}_G = (g_1, \dots, g_q)$ de G.

$\boxed{2}$ Introduire un vecteur $v \in E$ quelconque et déterminer sa décomposition dans la base $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ de E, c'est à dire déterminer des scalaires λ_i, μ_i tels que :

$$v = \underbrace{\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p}_{p(v) \in F} + \underbrace{\mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q}_{q(v) \in G}$$

$\boxed{3}$ Reconnaître $p(v)$ et $q(v)$ dans cette décomposition.

Exercice 6

On a vu dans l'exercice 3 que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$
avec $F = Vect((1,0,-1),(0,1,-1))$ et $G = Vect((1,1,1))$.
Déterminer les projecteurs associés.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ fixé. Cherchons les scalaires $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x,y,z) = \underbrace{a(1,0,-1)+b(0,1,-1)}_{\in F} + \underbrace{c(1,1,1)}_{\in G}$$

Cela donne le système (d'inconnues a,b,c) :

$$\begin{cases} a \quad\ + c &= x \\ \quad b + c &= y \\ -a - b + c &= z \end{cases} \iff \begin{cases} a \quad\ + c &= x \\ \quad b + c &= y \\ -b + 2c &= x+z \end{cases} \iff \begin{cases} a \quad\ + c &= x \\ \quad b + c &= y \\ 3c &= x+y+z \end{cases}$$

et on trouve l'unique solution : $c = \dfrac{x+y+z}{3}$, $b = \dfrac{-x+2y-z}{3}$, $a = \dfrac{2x-y-z}{3}$.
Ainsi, tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se décompose (de manière unique) comme :

$$(x,y,z) = \underbrace{\frac{2x-y-z}{3}(1,0,-1) + \frac{-x+2y-z}{3}(0,1,-1)}_{\in F} + \underbrace{\frac{x+y+z}{3}(1,1,1)}_{\in G}.$$

On reconnait ainsi les projections :

$$p((x,y,z)) = \frac{2x-y-z}{3}(1,0,-1)+\frac{-x+2y-z}{3}(0,1,-1) = \left(\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}\right)$$

$$q((x,y,z)) = \frac{x+y+z}{3}(1,1,1) = \left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}\right).$$

Proposition 3 (Propriétés élémentaires des projecteurs)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E : $E = F \oplus G$.
On note p et q les projecteurs associés, de sorte que : $\forall v \in E,\ v = \underbrace{p(v)}_{\in F} + \underbrace{q(v)}_{\in G}$.

Alors on a les propriétés suivantes :

(a) p et q sont des applications linéaires : $p \in \mathcal{L}(E)$ et $q \in \mathcal{L}(E)$.

(b) $p + q = Id_E$ et donc $q = Id_E - p$.

(c) Si $v \in F$, alors $p(v) = v$. Si $v \in G$, alors $p(v) = 0$.

Preuve :

(a) Soient $v, v' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $p(v+\lambda v') = p(v) + \lambda p(v')$ et $q(v+\lambda v') = q(v) + \lambda q(v')$.
Par définition des projecteurs, l'"unique décomposition" de v dans $E = F \oplus G$ est : $v = \underbrace{p(v)}_{\in F} + \underbrace{q(v)}_{\in G}$.

De même, l'"unique décomposition" de v' dans $E = F \oplus G$ est : $v' = \underbrace{p(v')}_{\in F} + \underbrace{q(v')}_{\in G}$.

On obtient donc : $v + \lambda v' = p(v) + q(v) + \lambda(p(v') + q(v')) = \underbrace{p(v) + \lambda p(v')}_{\in F} + \underbrace{q(v) + \lambda q(v')}_{\in G}$.

Il s'agit de l'unique décomposition de $v + \lambda v'$ dans $E = F \oplus G$!
Par définition des projecteurs, c'est donc que $p(v+\lambda v') = p(v) + \lambda p(v')$ et $q(v+\lambda v') = q(v) + \lambda q(v')$.
On a ainsi montré que $p \in \mathcal{L}(E)$ et $q \in \mathcal{L}(E)$.

(b) Par définition, pour tout $v \in E$, $\quad v = p(v) + q(v)$.
Autrement dit : $\forall v \in E,\ p(v) + q(v) = v = Id_E(v)$. On a donc bien $p + q = Id_E$.

(c) Si $v \in F$, sa décomposition est $v = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$. On a donc $p(v) = v$ et $q(v) = 0_E$.

Si $v \in G$, sa décomposition est $v = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{v}_{\in G}$. On a donc $p(v) = 0_E$ et $q(v) = v$.

□

Proposition 4 (Noyau et image d'un projecteur)

On suppose toujours que $E = F \oplus G$. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G.
Alors : $\quad Ker(p) = G \quad$ et $\quad Im(p) = F$.

Preuve :

• Montrons que $Ker(p) = G$ par double inclusion :

- Si $v \in G$, alors on peut écrire $v = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{v}_{\in G}$ donc $p(v) = 0_E$, i.e $v \in Ker(p)$.

- Si $v \in Ker(p)$, alors on peut écrire $v = \underbrace{p(v)}_{\in F} + \underbrace{q(v)}_{\in G}$ mais $p(v) = 0_E$, donc on a $v = q(v) \in G$.

• Montrons que $Im(p) = F$ par double inclusion :

- Si $v \in F$, alors on peut écrire $v = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$, donc $p(v) = v$, et donc $v = p(v) \in Im(p)$.

- Si $v \in Im(p)$, on peut écrire $v = p(u)$ pour un $u \in E$.
Par définition des projecteurs, $\quad u = \underbrace{p(u)}_{\in F} + \underbrace{q(u)}_{\in G}$, $\quad$ donc $v = p(u) \in F$. □

Pour terminer, donnons une autre façon de voir les projecteurs :

Théorème 6 (Caractérisation des projecteurs)

Soit f un endomorphisme de E quelconque. Alors :

$$f \text{ est un projecteur} \iff f^2 = f \quad (\text{c'est à dire } f \circ f = f)$$

Plus précisément, si f est un endomorphisme satisfaisant $f \circ f = f$, alors :

• On a $E = Im(f) \oplus Ker(f)$

• f est le projecteur sur $F = Im(f)$, $\quad$ parallèlement à $G = Ker(f)$.

Preuve :

• Supposons que f est un projecteur : notons le donc p. Il existe ainsi deux sous-espace vectoriels supplémentaires F et G, de sorte que p soit le projecteur sur F parallèlement à G.
Pour tout $v \in E$, on sait que $p(v) \in F$, donc sa décomposition est $p(v) = \underbrace{p(v)}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$.

Par définition, on a donc $p(p(v)) = p(v)$, i.e $(p \circ p)(v) = p(v)$.

C'est valable pour tout $v \in E$, ceci montre donc que $p \circ p = p$.

• Inversement, supposons que $f \circ f = f$. Posons $F = Im(f)$ et $G = Ker(f)$.

- Montrons que $E = F + G$.
Tout vecteur $v \in E$ peut se décomposer sous la forme $v = f(v) + (v - f(v)) = v_1 + v_2$.

On a évidemment $v_1 = f(v) \in Im(f)$ donc $v_1 \in F$.
On a $f(v_2) = f(v - f(v)) = f(v) - (f \circ f)(v) = 0$ par hypothèse donc $v_2 \in Ker(f)$ i.e $v_2 \in G$.

Ceci montre que $E = F + G$.

- Vérifions que la somme $F+G$ est directe, c'est à dire que $F \cap G = \{0_E\}$.
Soit $v \in F \cap G$. On a donc $v \in Im(f)$ et $v \in Ker(f)$.
Puisque $v \in Im(f)$, on peut écrire $v = f(u)$ avec un $u \in E$.
On obtient alors $v = f(u) = (f \circ f)(u) = f(f(u)) = f(v) = 0_E$ car $v \in Ker(f)$!
Ainsi $v = 0_E$. Ceci montre que $F \cap G \subset \{0_E\}$, et l'inclusion réciproque est évidente.

- Finalement, montrons que que f est bien le projecteur sur F parallèlement à G.
On a vu que $E = F \oplus G$, donc chaque $v \in E$ se décompose de manière unique comme $v = \underbrace{v_1}_{\in F} + \underbrace{v_2}_{\in G}$.

Or on a vu (cf. premier tiret) que l'on pouvait écrire la décomposition $v = \underbrace{f(v)}_{\in F} + \underbrace{(v - f(v))}_{\in G}$.

Par définition, $f(v)$ est donc bien la projection de v sur F, parallèlement à G. $\square$

Exercice 7

On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ f((x,y,z)) = (2x+3y-z, -x-2y+z, -x-3y+2z).$$

Montrer que f est un projecteur. Préciser sur quoi, parallèlement à quoi.

On vérifie par le calcul que $f \circ f = f$: pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(f(x,y,z)) = f\Big((2x+3y-z, -x-2y+z, -x-3y+2z)\Big) = \ldots = (x,y,z) \quad \text{(vérifiez-le !)}$$

En vertu du Théorème 6, on sait que f est le projecteur sur $F = Im(f)$, parallèlement à $G = Ker(f)$.

On explicite ces espaces :

$$\begin{aligned} F = Im(f) &= \Big\{ f((x,y,z)), \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big\} = \Big\{ (2x+3y-z, -x-2y+z, -x-3y+2z), \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big\} \\ &= Vect((2,-1,-1),(3,-2,-3),(-1,1,2)) = Vect((2,-1,-1),(-1,1,2)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = Ker(f) &= \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f((x,y,z)) = (0,0,0) \Big\} \\ &= \{(x,-x,-x), \ x \in \mathbb{R}\} \quad \text{(après résolution du système associé...)} \\ &= Vect((1,-1,-1)). \end{aligned}$$

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :


Au minimum

- Connaître la définition de $F+G$ et celle d'une somme directe.
- Connaître la définition de deux SEV supplémentaires.
- Savoir calculer explicitement le SEV $F+G$.
- Connaître les critères permettant de montrer qu'une somme est directe. (avec l'intersection, avec les bases, avec la dimension)


Pour suivre

- Repérer le critère "le plus simple" pour monter que $E = F \oplus G$.
- Définir et éventuellement déterminer les projecteurs associés à $E = F \oplus G$.
- Connaître et appliquer le Théorème de "Caractérisation des projecteurs"


Pour les ambitieux

- Manipuler des sommes de 3 SEV ou plus.
- Avoir lu et bien compris les preuves "facultatives".

3 HORS PROGRAMME : Somme de r sous-espaces vectoriels

3.1 Définitions

Définition 5 (Somme de r S.EV)

Soient $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E.

On appelle somme de $F_1, \ldots, F_r$ et on note $F_1 + \ldots + F_r$ ou bien $\sum_{i=1}^{r} F_i$ l'ensemble :

$$F_1 + \ldots + F_r = \Big\{v_1 + \ldots + v_r,\ (v_1, \ldots v_r) \in F_1 \times \ldots \times F_r\Big\}.$$

Proposition 5 (La somme est un S.E.V)

La somme $F_1 + \ldots + F_r$ est une sous-espace vectoriel de E.

Définition 6 (Somme directe)

Soient $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E.

La somme $\sum_{\text{ì}=1}^{r} F_i$ est dite directe si tout vecteur $v \in \sum_{i=1}^{r} F_i$ s'écrit de manière unique comme $v = v_1 + \ldots + v_r$ avec $(v_1, \ldots, v_r) \in F_1 \times \ldots \times F_r$.

Dans ce cas, la somme est notée $F_1 \oplus \ldots \oplus F_r$ ou bien $\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

Attention !

On n'a plus de caractérisation simple avec l'intersection... En particulier, il n'est pas suffisant de vérifier que $F_1 \cap \ldots \cap F_r = \{0_E\}$, ni même que $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ pour $i \neq j$ pour avoir une somme directe ! Les autres caractérisations peuvent néanmoins se généraliser :

Proposition 6 (Famille génératrice de la somme)

Soient $F_1, ..., F_r$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie. $(r \geqslant 2)$
Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on introduit $\mathcal{B}_k$ une base de F_k.

La famille (notée $[\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r]$) obtenue par concaténation des vecteurs de $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r$ est une famille génératrice de $F_1 + \ldots + F_r$.

Théorème 7 (Caractérisation d'une somme directe par les bases)

Soient $F_1, ..., F_r$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie. $(r \geqslant 2)$
Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on introduit $\mathcal{B}_k$ une base de F_k.

$$\text{La somme } F_1 + \ldots + F_r \text{ est directe} \iff \mathcal{B} = [\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r] \text{ est une base de } F_1 + \ldots + F_r.$$

La base $\mathcal{B} = [\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r]$ obtenue par concaténation est alors appelée **"base adaptée"** à la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

Théorème 8 (Dimension de la somme)

Soient $F_1, ..., F_r$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie. $(r \geqslant 2)$
Alors $\sum_{i=1}^{r} F_i$ est de dimension finie et $dim\left(\sum_{i=1}^{r} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{r} dim(F_i)$.

Théorème 9 (Caractérisation d'une somme directe par la dimension)

Soient $F_1, ..., F_r$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie. ($r \geqslant 2$)

$$\text{La somme } F_1 + \ldots + F_r \text{ est directe} \iff dim\left(\sum_{i=1}^{r} F_i\right) = \sum_{i=1}^{r} dim(F_i).$$

Pour une somme de r sous-espaces, on ne parle plus vraiment d'espaces "supplémentaires".
On peut tout de même énoncé un résultat similaire à celui vu précédemment :

Théorème 10 (Caractérisations des S.E.V supplémentaires)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soient $F_1, ..., F_r$ des sous-espaces vectoriels de E. ($r \geqslant 2$)
Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on introduit $\mathcal{B}_k$ une base de F_k.

L'affirmation "$E = \bigoplus_{k=1}^{r} F_i$" est équivalent à chacune des affirmations suivantes :

(a) $\forall v \in E,\ \exists!(v_1, \ldots, v_r) \in F_1 \times \ldots \times F_r,\ v = v_1 + \ldots + v_r.$

(b) La concaténation $\mathcal{B} = [\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r]$ est une base de E.

(c) $E = \sum_{i=1}^{r} F_i$ et $\sum_{i=1}^{r} dim(F_i) = dim(E)$.