9

Limites de fonctions

Exercice 1 (Factorisation)

(a) • On a $\dfrac{3x^2-x+1}{5x^3+x^2-7} = \dfrac{x^2(3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^3(5+\frac{1}{x}-\frac{7}{x^3})} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{5+\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-x+1}{5x^3+x^2-7} = 0$.

• On a directement $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-x+1}{5x^3+x^2-7} = -\dfrac{1}{7}$.

(b) • On a $\dfrac{e^x+3x-1}{x^2+1} = \dfrac{e^x}{x^2} \times \dfrac{1+\frac{3x}{e^x}-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{x^2}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+3x-1}{x^2+1} = +\infty$.

• On a $\dfrac{e^x+3x-1}{x^2+1} = \dfrac{x}{x^2} \times \dfrac{\frac{e^x}{x}+3-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\frac{e^x}{x}+3-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+3x-1}{x^2+1} = 0$.

(c) On a $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \dfrac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x} = \dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$.

Exercice 2 ("Changement de variable")

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{e^y}{y^2} = +\infty$ par croissance comparée.

(b) En posant $x = 1+y$, c'est à dire $y = x-1$: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$ (limite usuelle en 0).

(c) $x^2 \tan\left(\frac{1}{x}\right) = x \times \dfrac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\tan(y)}{y} = 1$. Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \tan\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.

(d) En posant $x = 1+y$, c'est à dire $y = x-1$: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{1/3}-1}{x-1} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{(1+y)^{1/3}-1}{y} = \dfrac{1}{3}$ (limite usuelle en 0).

(e) $x\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right) = \frac{1}{x} \times x^2\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right) = \frac{1}{x} \times \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}}$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^y-1}{y} = 1$. Ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right) = 0$.

(f) $\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} = 2 \times \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}$.

Ainsi (en posant $y = 2x$) : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} = 2 \times \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sqrt{1+y}-1}{y} = 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$.

(g) $x\left(\ln(1+x)-\ln(x)\right) = x\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(1+x)-\ln(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$.

Exercice 3 (Un peu de tout)

(a) On a directement $\lim\limits_{x\to 0} x\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right) = 0$ (ce n'est pas une forme indéterminée !)

(b) $\dfrac{\ln(1+x)}{\tan(x)} = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \times \dfrac{x}{\tan(x)} = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \times \left(\dfrac{\tan(x)}{x}\right)^{-1} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \times 1^{-1} = 1$.

(c) $\sqrt{x^2+1}-x = \sqrt{x^2(1+\dfrac{1}{x^2})}-x = x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-x = x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1\right) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}}$.

On a $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+y}-1}{y}=\frac{1}{2}$. Ainsi $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-x=0$.

(d) $x^x=e^{x\ln(x)}$. Or on sait que $\lim_{x\to 0^+}x\ln(x)=0$ (croissances comparées "en 0" pour ln).

Rappel rapide de la preuve : $\lim_{x\to 0^+}x\ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+\infty}-\frac{\ln(y)}{y}=0$.

Ainsi $\lim_{x\to 0}x^x=\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln(x)}=e^0=1$.

(f) $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\right)$. Cherchons donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$.

On a $\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)=\frac{1}{x}\left(\ln(\ln(x))-\ln(x)\right)=\frac{\ln(\ln(x))}{x}-\frac{\ln(x)}{x}$.

Par croissances comparées, on a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$. A plus forte raison, : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{x}=0$.

En effet, par exemple : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\times\frac{\ln(x)}{x}=\left(\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}\right)\times\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}\right)=0$.

Pour conclure, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)=0$ et donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp(0)=1$.

Exercice 4 (Encadrements et limite)

1. • Pour tout $x>0$, $\left|\frac{1-\cos(x)}{x}\right|=\frac{|1-\cos(x)|}{x}\leqslant\frac{1+|\cos(x)|}{x}\leqslant\frac{2}{x}$.

D'après le théorème des gendarmes (version valeur absolue), on en déduit $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$.

• Pour tout $x>0$, on a $x-1\leqslant\lfloor x\rfloor\leqslant x$ donc $\frac{x-1}{x^2}\leqslant\frac{\lfloor x\rfloor}{x^2}\leqslant\frac{x}{x^2}$ i.e $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\leqslant\frac{\lfloor x\rfloor}{x^2}\leqslant\frac{1}{x}$.

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit $\lim_{x\to+\infty}\frac{\lfloor x\rfloor}{x^2}$.

2. Posons, pour tout $x\geqslant 1$, $f(x)=\frac{2}{\alpha}x^{\alpha/2}-\ln(x)$.

f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et : $\forall x\geqslant 1,\ f'(x)=x^{\alpha/2-1}-\frac{1}{x}=\frac{x^{\alpha/2}-1}{x}\geqslant 0$ (car $x\geqslant 1$)

Ainsi f est croissante sur $[1,+\infty[$, on a donc le tableau de variations suivant :

x	1	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{2}{\alpha}$ $\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, en particulier, pour tout $x\geqslant 1$, $f(x)\geqslant 0$ i.e $\frac{2}{\alpha}x^{\alpha/2}-\ln(x)\geqslant 0$ i.e $\ln(x)\leqslant\frac{2}{\alpha}x^{\alpha/2}$.

Pour tout $x\geqslant 1$, on en déduit l'encadrement :

$$0\leqslant\ln(x)\leqslant\frac{2}{\alpha}x^{\alpha/2}\iff 0\leqslant\frac{\ln(x)}{x^\alpha}\leqslant\frac{2}{\alpha}\frac{1}{x^{\alpha/2}}.$$

Puisque $\alpha>0$, on a $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha/2}}=0$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha}=0$.

3. Posons, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-(1+x)$ et $g(x)=1+xe^x-e^x$.

Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=e^x-1,\ g'(x)=xe^x$.

On a donc $f'(x)\geqslant 0\iff x\geqslant 0$ et $g'(x)\geqslant 0\iff x\geqslant 0$. On en déduit les tableaux de variations suivants :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	1 $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\;f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$ ce qui donne $e^x \geqslant 1+x$ et $1+xe^x \geqslant e^x$.
On a ainsi l'encadrement : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x \leqslant e^x \leqslant 1+xe^x$.

On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1+x \leqslant e^x \leqslant 1+xe^x \iff x \leqslant e^x - 1 \leqslant xe^x \iff 1 \leqslant \frac{e^x-1}{x} \leqslant e^x.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$, d'après le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

Exercice 5 (Une autre définition de $\exp$**...)**

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\right)$.

On peut ré-écrire : $n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) = x \times \dfrac{n}{x}\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) = x \times \dfrac{\ln(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}$.

Puisque $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} = 1$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) = x$. $\quad$ On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Exercice 6 (Limite à gauche/droite)

(a) On a $\forall x > 0,\ f(x) = 1$ et $\forall x < 0,\ f(x) = -1$.
Il est donc clair que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

On en déduit que f n'admet pas de limite en 0.

(b) On a $\lim\limits_{x\to 0^-} x\lfloor x \rfloor = \lim\limits_{x\to 0^-} x \times (-1) = 0 \quad$ et $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} x\lfloor x \rfloor = \lim\limits_{x\to 0^+} x \times 0 = 0$.
De plus $g(0) = 0$. On a donc $\lim\limits_{x\to 0-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

(c) On a $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0$. $\quad$ On a aussi $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = 0$.
$\Big($ En effet, en posant $y = \frac{1}{x}$, on se ramène à $\lim\limits_{y\to+\infty} -\dfrac{\ln(y)}{y^2} = 0$ par croissances comparées $\Big)$
De plus $h(0) = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = h(0) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$

(d) On a $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^-} e^{-1} = e^{-1}$. $\quad$ On a aussi $\varphi(-1) = e^{-1}$.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} (x+1)^x = \lim\limits_{x\to(-1)^+} e^{x\ln(x+1)} = \lim\limits_{y\to+\infty} e^y = +\infty$.
On en déduit que φ n'admet pas de limite en -1.

(e) On a $\lim\limits_{x\to 2^-} \psi(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \exp(-\dfrac{1}{|x-2|}) = \lim\limits_{y\to+\infty} \exp(-y) = 0$. (car $\frac{1}{|x-2|} \to +\infty$ quand $x \to 2$)
De même, $\lim\limits_{x\to 2^+} \psi(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \exp(-\dfrac{1}{|x-2|}) = \lim\limits_{y\to+\infty} \exp(-y) = 0$. (car $\frac{1}{|x-2|} \to +\infty$ quand $x \to 2$)
Ainsi $\lim\limits_{x\to 2^-} \psi(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \psi(x) = 0$, mais $\psi(2) = 1$. $\quad$ On en déduit que ψ n'admet pas de limite en 2.

Exercice 7 (Sortez les ε **!)**

L'intervalle I est ouvert, notons-le $I =]a,b[$ (avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).

(a) D'après la définition de la limite : $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]a,b[\cap]x_0-\delta, x_0+\delta[, |f(x)-\ell| < \varepsilon$.
Prenons $\varepsilon = 1$. Il existe donc un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]a,b[\cap]x_0-\delta, x_0+\delta[$,

$$|f(x)-\ell| < 1 \text{ c'est à dire } \ell - 1 < f(x) < \ell + 1.$$

Posons $J =]a,b[\cap]x_0-\delta, x_0+\delta[$: il est clair que c'est un intervalle ouvert contenant x_0
(faite un dessin : on a $J =]x_0-\delta, x_0+\delta[$ ou $]a, x_0+\delta[$ ou $]x_0-\delta, b[$ ou $]a,b[$), c'est donc un voisinage de x_0.

Pour tout $x \in J$, $\quad \ell - 1 < f(x) < \ell + 1$: f est bien bornée sur l'intervalle J.

(b) Dans la définition de la limite, choisissons cette fois $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$ (car $\ell > 0$).

Il existe donc un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]a,b[\cap]x_0-\delta, x_0+\delta[$,

$$|f(x)-\ell| < \frac{\ell}{2} \text{ c'est à dire } \ell - \frac{\ell}{2} < f(x) < \ell + \frac{\ell}{2} \text{ c'est à dire } \frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3\ell}{2}.$$

En posant à nouveau $J =]a,b[\cap]x_0-\delta, x_0+\delta[$ (c'est un intervalle ouvert contenant x_0), on a pour tout $x \in J$, $f(x) > \frac{\ell}{2}$ donc en particulier $f(x) > 0$: f est bien strictement positive sur l'intervalle J.