3

Applications

1 Définitions et premières propriétés

Dans toute cette partie, E et F désignent deux ensembles.

1.1 Application, fonction, domaine

Définition 1 (Application)

Une application f de E dans F est un procédé qui, à chaque élément $x \in E$, fait correspondre un unique élément $f(x) \in F$. Une telle application est notée :

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

On notera parfois simplement :

- $f : E \to F$ si on ne souhaite pas préciser l'expression de $f(x)$ pour $x \in E$
- $f : x \mapsto f(x)$ si les ensembles E et F sont sous-entendus (ou à déterminer)

E est appelé l'ensemble de départ de f, F est appelé l'ensemble d'arrivée de f.
On dit aussi que f est "définie sur E" et "à valeurs dans F".

Pour tout $x \in E$ $f(x)$ est appelée l'image de x.
Pour tout $y \in F$, si il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on dit que x est un antécédent de y.

On note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

Dessin :

Remarques 1

- Le "$\mathcal{F}$" dans $\mathcal{F}(E, F)$ vient de "fonction", terme que l'on confondra souvent avec "application" (malgré quelques différences, voir plus loin).
- Dans l'expression $f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ la variable x est <u>muette</u> : on peut aussi bien noter $f : t \mapsto f(t)$ ou $f : y \mapsto f(y)$, etc...

Attention !

Bien distinguer l'<u>application</u> f et l'<u>élément</u> $f(x)$ (qui est juste l'image d'un point $x \in E$ fixé).

Ne pas écrire : "L'application $f(x)$ est croissante" ou bien "$f(x)$ est continue"

Écrire : "L'application $f : E \to F$ est croissante" ou bien "f est continue"

Notons que les ensembles de départ et d'arrivée E et F font partie intégrante d'une application !

Exemples

- Les applications suivantes sont toutes bien définies (et différentes) :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}, \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}, \qquad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}.$$

- En revanche les applications suivantes ne sont pas bien définies :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}, \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}.$$

Définition 2 (Égalité de deux applications)

Deux applications f et g sont égales lorsque :

- Elles ont le même ensemble de départ E et le même ensemble d'arrivée F,
- $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

Définition 3 (Graphe)

Le graphe (ou courbe représentatrice) d'une application $f : E \to F$ est l'ensemble

$$\mathcal{C}_f = \Big\{(x, f(x)),\ \ x \in E\Big\}.$$

Exemples

Dessiner les graphes des applications $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+1 \end{array}$ et $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n+1 \end{array}$

Dessin :

Définition 4 (Application identité)

On appelle application identité de E (ou simplement identité de E) l'application :

$$Id_E: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

Exemple

Dessiner le graphe de la fonction $Id_{\mathbb{R}}$.

Dessin :

Attention : bien que dans le langage "courant" (celui des énoncés), il arrivera souvent que l'on confonde les mots “fonction” et “application”, *stricto sensu* la notion de fonction est à distinguer de celle d'application.

Définition 5 (Fonction, domaine de définition)

Une fonction f de E dans F est un procédé qui, à chaque élément de E, associe au plus un élément de F. Lorsque $x \in E$ a une image, celle-ci est donc unique et on la note $f(x)$.

L'ensemble des élément de E admettant une image bien définie par f est appelé “domaine de définition de f”, souvent noté D_f.

Pour une fonction $f : E \to F$, certains éléments de E peuvent ne pas admettre d'image ! On dira alors que la fonction n'est pas "définie partout sur E" et on est amené à déterminer son ensemble de définition.

Exemple

Il est possible de considérer la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x(x-1)} \end{array}$. Elle n'est pas définie partout sur $\mathbb{R}$.

Son domaine de définition est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. On peut alors définir l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0,1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x(x-1)} \end{array}.$$

Par commodité, on confondra parfois “domaine de définition” (f vue comme fonction)
et “ensemble de départ” (f vue comme application).
En tout cas, on fera bien attention au fait qu'une application $f : E \to F$ doit être définie sur E tout entier.

1.2 Image directe d'une partie de E

Considérons une application $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ fixée.

Définition 6 (Image directe)

Soit $A \subset E$.
L'image directe de A par f est l'ensemble des images des éléments de A. On la note $f(A)$.

$$f(A) = \Big\{ f(x),\ x \in A \Big\} = \Big\{ y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x) \Big\} \subset F.$$

On retiendra : pour tout $y \in F$ fixé, $\boxed{y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)}$

Dessin :

Attention !

- Si $x \in E$, $f(x)$ est un élément de F, on écrit $f(x) \in F$.
- Si $A \subset E$, $f(A)$ est une partie de F, on écrit $f(A) \subset F$.

Définition 7 (Ensemble image)

L'ensemble image (ou image) de f est l'ensemble $f(E)$: c'est l'ensemble de toutes les valeurs "atteintes" par f.

$$f(E) = \Big\{f(x),\ x \in E\Big\} = \Big\{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\Big\} \subset F$$

Notons que l'ensemble image $f(E)$ n'est pas forcément égal à l'ensemble d'arrivée F !

Exemples

- L'ensemble image de $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^t \end{array}$ est $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$
- L'ensemble image de $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t} \end{array}$ est $g(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$
- L'ensemble image de $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}$ est l'ensemble des entiers pairs.

Méthode : Déterminer une image directe pour une fonction numérique

Soit I une intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $A \subset I$.
On peut lire facilement l'image directe $f(A)$ sur (au choix) :
- Le graphe de l'application f sur I.
- Le tableau de variation de l'application f sur I.

Exercice 1

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Déterminer $f([2,3])$ et $f(]-2,1[)$. Quel est l'ensemble image de f ?

On a le tableau de variation et le graphe suivant :

$f([2,3]) = \{x^2,\ x \in [2,3]\} = [4,9]$,
$f(]-2,1[) = \{x^2,\ x \in]-2,1[\} = [0,1[$
Ensemble image : $f(\mathbb{R}) = \{x^2,\ x \in \mathbb{R}\} = [0,+\infty[= \mathbb{R}_+$.

1.3 Image réciproque d'une partie de F

Considérons une application $f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ fixée.

Définition 8 (Image réciproque)

Soit $B \subset F$.
L'image récriproque (ou pré-image) de B par f est l'ensemble des antécédents des éléments de B.
On la note $f^{-1}(B)$.

$$f^{-1}(B) = \left\{x \in E \mid f(x) \in B\right\} \subset E.$$

<u>On retiendra :</u> pour tout $x \in E$ fixé, $\boxed{x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B}$

Dessin :

Méthode : Déterminer une image réciproque pour une fonction numérique

Soit I une intervalle de $\mathbb{R}$, $\quad f: I \to \mathbb{R} \quad$ et $B \subset \mathbb{R}$.
On peut lire facilement l'image réciproque $f^{-1}(B)$ sur (au choix) :
- Le graphe de l'application f sur I.
- Le tableau de variation de l'application f sur I.

Exercice 2

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Déterminer $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}([0,1[)$, $f^{-1}([3,4])$ et $f^{-1}([-9,-4])$.

On a le tableau de variation et le graphe suivant :

$f^{-1}(\{2\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

$f^{-1}([0,1[) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [0,1[\} =]-1,1[$

$f^{-1}([3,4]) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [3,4]\} = [-2,-\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3},2]$

$f^{-1}([-9,-4]) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [-9,-4]\} = \emptyset$

1.4 Composition d'applications

Définition 9 (Composée)

Soient E, F, G trois ensembles. Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
La composée $g \circ f$ est l'application de E dans G définie par : $\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Autrement dit,

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Dessin :

Exemple

On considère $E = F = G = \mathbb{R}$. L'application $h : x \mapsto (x-2)^2$ peut s'écrire comme $h = g \circ f$ avec

$$f : x \mapsto x - 2 \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2.$$

Si jamais l'ensemble image de f n'est pas inclus dans l'ensemble de départ de g, la composée $g \circ f$ peut ne pas être définie sur E tout entier !

Définition 10 (Composée - généralisation)

Considérons deux applications $f : D_f \to F$ et $g : D_g \to G$.

La composée $g \circ f$ peut être définie sur le domaine $D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \right\}$.

Méthode : Déterminer le domaine de définition d'une composée

Pour que l'expression $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ait un sens, il faut :
- D'abord : que $f(x)$ soit bien défini, donc $x \in D_f$
- Puis : que $g(f(x))$ soit bien défini, donc $f(x) \in D_g$.

Ces deux conditions permettent de déterminer le domaine de définition de la fonction $g \circ f$.

Remarque 2

En général, $g \circ f \neq f \circ g$! Elle peuvent d'ailleurs admettre des domaines de définitions différents.

Exercice 3

Déterminer le domaine de définition et l'expression de $g \circ f$ et de $f \circ g$ dans les cas suivants :

1. $\left(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + 1 \right)$ et $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \sqrt{x} \right)$
2. $\left(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -(x+1)^2 \right)$ et $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \ln(x) \right)$

1. $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \in \mathbb{R}_+\} = [-1, +\infty[$.

On a : $\forall x \in [-1, +\infty[,\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = \sqrt{x+1}$.

$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x+1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_+$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$.

2. $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -(x+1)^2 \in \mathbb{R}_+^*\} = \emptyset$.

La composée $g \circ f$ n'existe pas !

$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}_+^* \mid \ln(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_+^*$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln(x)) = -(\ln(x)+1)^2$.

On peut bien-sûr généraliser la notion de composition en composant 3, 4, ... applications.

Proposition 1 (Associativité de la composition)

Soient E, F, G, H des ensembles. Soient des applications $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$.

Alors : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

On pourra donc utiliser sans ambiguïté la notation $h \circ g \circ f$ pour désigner l'application définie par :

$$\forall x \in E, \quad (h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))).$$

Preuve rapide :
Il s'agit d'applications bien définies de E dans H.
Pour tout $x \in E$, $\quad (h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$. $\square$

Proposition 2 (Composition par l'identité)

Soit $f : E \to F$. Alors : $\quad f \circ Id_E = f \quad$ et $\quad Id_F \circ f = f$.

Preuve rapide :
Il s'agit d'applications bien définies de E dans H.
Pour tout $x \in E$, $\quad (f \circ Id_E)(x) = f(Id_E(x)) = f(x) \quad$ et $\quad (Id_F \circ f)(x) = Id_F(f(x)) = f(x)$. $\square$

1.5 Restriction ou prolongement de l'ensemble de départ

Définition 11 (Restriction)

Soit E un ensemble et $A \subset E$. Soit $f : E \to F$.

La restriction de f à A est l'application $f_{|A}$ définie par : $f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$

Autrement dit, f_A est l'application de A dans F définie par : $\forall x \in A,\ f_{|A}(x) = f(x)$.

Définition 12 (Prolongement)

Soit E un ensemble, inclus dans un plus grand ensemble E'. Soit $f : E \to F$.

Un prolongement de f sur E' est une application $g : E' \to F$ telle que $g_{|E} = f$.

Autrement dit, c'est une application g de E' dans F qui coïncide avec f sur E.

Remarque 3

Il n'y a qu'une seule manière de restreindre une application à un ensemble plus petit.
Il y a de nombreuses manières de prolonger une application sur un ensemble plus grand !

2 Injectivité, surjectivité, bijectivité

2.1 Injectivité

Définition 13 (Application injective)

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$.
On dit que f est injective (ou que f est une injection) lorsque :

" Tout élément de F a <u>au plus</u> un antécédent dans E. "

Cette propriété peut s'exprimer avec des quantificateurs :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad (f(x_1) = f(x_2)) \implies (x_1 = x_2).$$

" Si deux éléments de E ont même image, ce sont les mêmes "

Par contraposée, cela équivaut aussi à :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad (x_1 \neq x_2) \implies (f(x_1) \neq f(x_2)).$$

" Si deux éléments de E sont distincts, alors leurs images sont distinctes "

Dessin :

En pratique, pour montrer qu'une fonction est injective, on utilise la première proposition avec des quantificateurs.

Méthode : Injectivité (en appliquant la définition)

- Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est injective :

  " Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Montrons que $x_1 = x_2$. "

On peut parfois raisonner par équivalence d'une égalité à l'autre.

- Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ n'est pas injective :

  Déterminer (explicitement) deux éléments $x_1 \neq x_2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Exercice 4

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$
   (a) Montrer que f n'est pas injective.
   (b) On pose $g = f_{|\mathbb{R}_+}$. Montrer que g est injective.
   Interpréter sur un graphe.

2. Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n^2 + n. \end{array}$ Montrer que h est injective.

1. (a) On a par exemple $f(-1) = f(1) = 1$.

(b) On a donc $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$ Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $g(x_1) = g(x_2)$. Montrons que $x_1 = x_2$.
On a $x_1^2 = x_2^2$. En prenant la racine carrée : $|x_1| = |x_2|$, c'est à dire $x_1 = x_2$.

Ceci montre que g est injective. Interprétation graphique : tout $y \in \mathbb{R}_+$ a au plus un antécédent dans $\mathbb{R}_+$ (mais peut avoir un autre antécédent dans $\mathbb{R}_-$!)

2. Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $h(n_1) = h(n_2)$. Montrons que $n_1 = n_2$.

$$n_1^2 + n_2 = n_2^2 + n_2 \iff n_1^2 - n_2^2 = n_2 - n_1 \iff (n_1 - n_2)(n_1 + n_2) = n_2 - n_1$$

Supposons qu'on ait $n_1 \neq n_2$. Alors en divisant par $n_1 - n_2$, on obtient $n_1 + n_2 = -1$: absurde car $n_1 \geqslant 0$ et $n_2 \geqslant 0$. Ainsi $n_1 = n_2$. Ceci montre que h est injective.

S P O I L E R . . .

On verra plus tard qu'une application strictement monotone (i.e strictement croissante ou strictement décroissante) est nécessairement injective ! Bien-sûr, ceci n'a de sens que pour des applications allant d'une partie de $\mathbb{R}$ dans une partie de $\mathbb{R}$.

2.2 Surjectivité

Définition 14 (Application surjective)

Soit E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$.
On dit que f est surjective (ou que f est une surjection) lorsque :

" Tout élément de F a au moins un antécédent dans E. "

Cette propriété peut s'exprimer avec des quantificateurs :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \quad f(x) = y.$$

En terme d'ensemble image, cela équivaut aussi à : $f(E) = F$.
" Tout élément de F est atteint par f "

Dessin :

Méthode : Surjectivité (en appliquant la définition)

- Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective :

  Introduire $y \in F$ et déterminer $x \in E$ tel que $f(x) = y$. ou bien Vérifier que $f(E) = F$.

- Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ n'est pas surjective :

  Déterminer un $y \in F$ n'admettant pas d'antécédent par f ou bien Vérifier que $f(E) \neq F$.

Exercice 5

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$

   (a) Montrer que f n'est pas surjective. (b) Montrer g est surjective.

2. Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n^2 + n. \end{array}$ Montrer que h n'est pas surjective.

1. (a) Par exemple : $-1 \in \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent par f.
En effet, s'il existait $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -1$, on aurait $x^2 = -1$, donc $-1 > 0$, ce qui est absurde !
Autrement, on a déjà vu que l'ensemble image de f est $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ \neq \mathbb{R}$.

(b) Soit $y \in \mathbb{R}_+$. En posant $x = \sqrt{y}$, on a bien $f(x) = \sqrt{y}^2 = y$. Ceci montre que f est surjective.
Autrement, on a vu que $g(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ qui est l'ensemble d'arrivée de g.

2. Par exemple : $3 \in \mathbb{N}$ n'a pas d'antécédent par h.
En effet, s'il existait $n \in \mathbb{N}$ tel que $h(n) = 3$, on aurait $n^2 + n = 2$, c'est à dire $n(n+1) = 3$.
Les seuls possibilités sont ($n = 3$ et $n + 1 = 1$) ou bien ($n = 1$ et $n + 1 = 3$), les deux sont absurdes.

La question 1. de l'exercice précédant nous amène à faire le constat suivant :

Proposition 3 (Surjection "forcée")

Toute application f définie de E dans $f(E)$ est automatiquement surjective.

Preuve :

Trivial : c'est la définition de la surjectivité ! $\square$

Conséquence : Pour transformer une application f quelconque en une application surjective,
on peut toujours restreindre son ensemble d'arrivée à $f(E)$.

Exemple

L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 1 - e^{-t} \end{array}$ n'est pas surjective : son ensemble image est $f(\mathbb{R}_+) = [0, 1[$.

Il en résulte que l'application $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [0, 1[\\ t & \longmapsto & 1 - e^{-t} \end{array}$ est surjective !

Attention !

- Après "transformation", il ne s'agit plus de la même application, puisque l'ensemble d'arrivée à changé ! Il arrive cependant que l'on appelle tout de même cette application f, pour ne pas "surcharger" la notation.

- Cette "restriction de l'ensemble d'arrivée" est à bien distinguer de la "restriction de l'ensemble de départ" ($f_{|A}$) que l'on a définie précédemment !

2.3 Bijectivité

Définition 15 (Application bijective)

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$.
On dit que f est bijective (ou que f est une bijection) lorsque :

" Tout élément de F a <u>un unique</u> antécédent dans E. "

Cette propriété peut s'exprimer avec des quantificateurs : $\forall y \in F, \exists!x \in E,\ y = f(x)$.

Autrement dit, f est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Dessin :

Méthode : Bijectivité (en appliquant la définition)

- Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective :

  Montrer que f est injective <u>et</u> surjective (appliquer les méthodes précédentes).

- Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ n'est pas bijective :

  Montrer que f n'est pas injective ou bien Montrer que f n'est pas sujective.

Exemples

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas bijective, car elle n'est pas injective.
- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.
- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est bijective : tout $y \in \mathbb{R}_+$ admet un unique antécédent : $x = \sqrt{y}$.

Pour avoir une application f bijective, l'injectivité est une propriété clé !
On a vu qu'on pouvait toujours obtenir la surjectivité en restreignant le domaine d'arrivée de l'application.

Proposition 4 (Une injection "réalise une bijection")

Si f est une application injective de E dans F, alors elle réalise une bijection de E dans $f(E)$.

Autrement dit, l'application $\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & f(E) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est bijective.

Preuve :

- Montrons que $\widetilde{f}$ est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $\widetilde{f}(x_1) = \widetilde{f}(x_2)$. On a ainsi $f(x_1) = f(x_2)$, donc par injectivité de f, $x_1 = x_2$.
- Montrons que $\widetilde{f}$ est surjective.
  On a $\widetilde{f}(E) = \{\widetilde{f}(x),\ x \in E\} = \{f(x),\ x \in E\} = f(E)$, qui est bien l'ensemble d'arrivée de $\widetilde{f}$. $\square$

SPOILER...

On verra plus tard que si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I dans l'intervalle $J = f(I)$.

Exemple : Si une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ admet le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

f réalise une bijection de $[0,1]$ dans $[1,2]$ et de $[1,+\infty[$ dans $[2,-2[$.

Théorème 1 (Composition et injection/surjection/bijection)

La composée de deux injections est une injection.
La composée de deux surjections est une surjection.
La composée de deux bijections est une bijection.

Preuve :

Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On a donc $g \circ f : E \to G$.

• Supposons f et g injectives, montrons que $g \circ f$ est injective :
Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, montrons que $x_1 = x_2$.
On a $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, donc par injectivité de g : $f(x_1) = f(x_2)$.
On a $f(x_1) = f(x_2)$, donc par injectivité de f : $x_1 = x_2$. Ceci montre que $g \circ f$ est injective.

• Supposons f et g surjectives, montrons que $g \circ f$ est surjective :

Soit $z \in G$. Montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x)$.
Par surjectivité de g, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
Par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
On a ainsi $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Ceci montre que $g \circ f$ est surjective.

• Supposons f et g bijectives, montrons que $g \circ f$ est bijective :
f et g sont injectives donc d'après le premier point, $g \circ f$ est injective.
f et g sont surjectives donc d'après le premier point, $g \circ f$ est surjective.
Ceci montre que $g \circ f$ est bijective.

$\square$

2.4 Application réciproque

Théorème 2 (Bijection réciproque)

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$.

1) L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = Id_E \text{ et } f \circ g = Id_F.$$

2) Lorsqu'elle existe, une telle application g est unique : il s'agit de l'application réciproque de f, notée f^{-1}, définie par : $\begin{array}{rccl} f^{-1}: & F & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & \text{“l'unique } x \in E \text{ tel que } y = f(x)\text{”} \end{array}$

$$\left(\begin{array}{l} \text{On a ainsi : } \begin{cases} f^{-1} \circ f = Id_E, \text{ c'est à dire : } \forall x \in E,\ f^{-1}(f(x)) = x \\ f \circ f^{-1} = Id_F, \text{ c'est à dire : } \forall y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = y \end{cases} \\ \text{ce qu'on peut aussi résumer par : } \forall x \in E, \forall y \in F,\ \ f(x) = y \iff x = f^{-1}(y) \end{array} \right)$$

3) Si $f : E \to F$ est bijective, alors $f^{-1} : F \to E$ est aussi bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Dessin :

Preuve du Théorème 2 :

Montrons l'équivalence du point 1) : f bijective $\iff \exists g \in \mathcal{F}(F,E), \Big(g \circ f = Id_E \text{ et } f \circ g = Id_F \Big)$

• Supposons que $f : E \to F$ est bijective. On sait que tout $y \in F$ admet un unique antécédent.

On peut donc bien définir l'application $\begin{array}{rccl} f^{-1}: & F & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & \text{“unique antécédent de } y \text{ par } f\text{”.} \end{array}$.

Posons $g = f^{-1}$. On a alors :

Pour tout $x \in E$, $\quad g(f(x)) = \text{“unique antécédent de } f(x) \text{ par } f\text{”} = x$.

Pour tout $y \in F$, $\quad f(g(y)) = f(\text{“unique antécédent de } y \text{ par } f\text{”}) = y$.

Ceci montre que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.

• Inversement, supposons qu'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.
Montrons que f est bijective.
Soit $y \in F$, montrons par analyse-synthèse qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

- Analyse : Si il existe bien $x \in E$ tel que $y = f(x)$ alors $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = x$.
On a donc nécessairement $x = g(y)$.

- Synthèse : posons $x = g(y)$. On a bien $f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = y$.

On a bien montré que tout $y \in F$ admet un unique antécédent par f, donc f est bijective.

Au passage, on a aussi vu que : $\forall y \in F,\ g(y) =$ "unique antécédent de y par f".
Ceci montre qu'on a nécessairement $g = f^{-1}$ (d'où le point 2))

Pour finir, montrons le point 3).
Soit $f : E \to F$ bijective. En posant $g = f$, l'application $f^{-1} : F \to E$ satisfait :

$$g \circ f^{-1} = Id_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ g = Id_E.$$

D'après les points 1) et 2), appliqués à l'application f^{-1} on déduit que :
f^{-1} est bijective et $g = (f^{-1})^{-1}$, i.e $f = (f^{-1})^{-1}$. □

Attention !

- L'application réciproque n'est pas l'application inverse : $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$
- On peut parler de l'application f^{-1} uniquement si l'application f est bijective.

Si $f : E \to F$ n'est pas bijective, on emploie malgré tout la notation $f^{-1}(B)$ pour désigner l'image réciproque d'une partie de F (mais ce n'est qu'une notation !).

Exemples

- Pour tout ensemble E, l'application $Id_E : E \to E$ est bijective, de réciproque $\boxed{Id_E^{-1} = Id_E}$
- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est bijective, de réciproque $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

Dessin :

- L'application $\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$ est bijective, de réciproque $\ln = \exp^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$.

Dessin :

Remarque 4

Lorsqu'une fonction numérique $f : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle de R) est bijective, le graphe de l'application réciproque f^{-1} s'obtient en symétrisant celui de f par rapport à la diagonale $y = x$.

Il arrive que l'on puisse identifier une application réciproque à partir de relations de composition.

Méthode : Montrer la bijectivité et déterminer f^{-1} par composition

Soit $f : E \to F$. Si l'on détermine une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$ alors on en déduit :

$$\boxed{1} \ f \text{ est bijective} \qquad \boxed{2} \ f^{-1} = g.$$

Exercice 6

Soit
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t-1}{t+1} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1+t}{1-t} \end{array}.$$

1. Vérifier que les applications f et g sont bien définies.
2. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. Qu'en conclut-on ?

1. Il faut montrer : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \ \dfrac{t-1}{t+1} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \ \dfrac{1+t}{1-t} \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\text{Pour tout } t \neq -1, \quad \frac{t-1}{t+1} = 1 \iff t-1 = t+1 \iff -1 = 1 \ \text{ ce qui est bien faux !}$$

$$\text{Pour tout } t \neq 1, \quad \frac{1+t}{1-t} = -1 \iff 1+t = t-1 \iff -1 = 1 \ \text{ ce qui est bien faux !}$$

2. Les applications $g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ sont bien définies.

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad (g \circ f)(t) = g(f(t)) = g\left(\frac{t-1}{t+1}\right) = \frac{1 + \frac{t-1}{t+1}}{1 - \frac{t-1}{t+1}} = \frac{\frac{2t}{t+1}}{\frac{2}{t+1}} = t.$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad (f \circ g)(t) = f(g(t)) = f\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \frac{\frac{1+t}{1-t} - 1}{\frac{1+t}{1-t} + 1} = \frac{\frac{2t}{1-t}}{\frac{2}{1-t}} = t.$$

Ceci montre que $g \circ f = Id_{\mathbb{R} \setminus \{-1\}}$ et $f \circ g = Id_{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$.

On en déduit que f est bijective et que $f^{-1} = g$ (et g est bijective et $g^{-1} = f$).

...mais cette méthode requiert que l'on connaisse déjà un “candidat” pour être l'application réciproque ! Bien souvent, il est possible de déterminer l'expression de f^{-1} à partir de celle de f en se ramenant à la résolution d'une équation.

Proposition 5 (Interprétation en terme de résolution d'équations)

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$. On a les équivalences :

- f injective $\iff$ Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution x dans E.
- f surjective $\iff$ Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution x dans E.
- f bijective $\iff$ Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution x dans E. Cette solution est alors $x = f^{-1}(y)$.

Preuve :

Trivial : il s'agit de la définition d'injectivité/surjectivité/bijectivité (chaque élément de l'ensemble d'arrivée possède au plus/au moins/exactement un antécédent). □

Méthode : Montrer la bijectivité et déterminer f^{-1} en résolvant une équation

Pour montrer que $f : E \to F$ est bijective et déterminer f^{-1} :

“ Soit $y \in F$ fixé. Pour tout $x \in E$, on a les équivalences : ”

$$\underbrace{y = f(x)}_{(y \text{ en fonction de } x)} \iff \dots \text{résolution} \dots \iff \underbrace{x = g(y)}_{(x \text{ en fonction de } y)}$$

- Si on parvient à mener la résolution jusqu'au bout, on en déduit que f est bijective, et on identifie :
$$\forall y \in F,\ f^{-1}(y) = g(y).$$
- Si l'équation peut avoir plusieurs solutions, f n'est pas injective.
- Si l'équation peut ne pas avoir de solution, f n'est pas surjective.

Exercice 7

Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & \exp(x^2) \end{array}$ est une bijection et déterminer f^{-1}.

Soit $y \in [1, +\infty[$ fixé. Pour tout $x \in R_+$, on a les équivalences :

$$y = f(x) \iff y = e^{x^2} \iff \ln(y) = x^2 \iff x = \sqrt{\ln(y)}. \quad (\text{possible car } \ln(y) \geqslant 0, \text{ car } y \geqslant 1)$$

On en déduit que f est bijective et $f^{-1} : \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \to & \mathbb{R}_+ \\ y & \mapsto & \sqrt{\ln(y)}. \end{array}$

Proposition 6 (Réciproque d'une composition)

Soient E, F et G des ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections.
Alors $g \circ f : E \to G$ est une bijection, et on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Preuve :

On sait que la composée de deux bijection est une bijection : $g \circ f : E \to G$ est donc bien bijective.

On a $f^{-1} : F \to E$ et $g^{-1} : G \to F$. On peut donc poser $h = f^{-1} \circ g^{-1}$, de sorte que $h : G \to E$.

On note alors que : $h \circ (g \circ f) = (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ f = Id_E$

et : $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = Id_G$.

D'après le Théorème 2, on en déduit que $(g \circ f)^{-1} = h$, i.e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

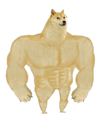
À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Donner les définitions et calculer image directe $f(A)$ ou réciproque $f^{-1}(B)$.
- Déterminer le domaine de définition et l'expression d'une composée $g \circ f$ pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour suivre

- Montrer qu'une application est injective/surjective/bijective.
- Calculer la composée de fonctions de plusieurs variables.
- Calculer la réciproque d'une bijection.



Pour les ambitieux

- Interpréter facilement injectivité/surjectivité/bijectivité sur un graphe.
- Résoudre des problèmes avec des applications “abstraites”.
- Maîtriser les preuves du cours.