8

Dénombrement, combinatoire

Le **dénombrement** est la discipline des mathématiques qui consiste à développer des techniques pour dénombrer (c'est à dire à compter) le nombre d'objets vérifiant une certaine propriété. Cette discipline est voisine de la **combinatoire**, qui s'intéresse à lister et étudier les différentes configurations d'une collection finie d'objets.

1 Principes du dénombrement

1.1 Notion de cardinal

Définition 1 (Cardinal d'un ensemble fini)

On dit qu'un ensemble E est fini s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et n éléments e_1,...,e_n distincts tels que $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. L'entier n s'appelle alors le cardinal de E et se note $Card(E)$.

$Card(E)$ est ainsi **le nombre d'éléments d'un ensemble fini** E

Par convention, on pose $Card(\emptyset) = 0$.

Exemples

- $Card(\{1, 5, 6\}) = 3$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Card([\![1, n]\!]) = Card(\{1, 2, \dots, n\}) = n$.
- Le cardinal de $\{R, I, C, H, E, L, I, E, U\} = \{R, I, C, H, E, L, U\}$ est 7.

Proposition 1 (Cardinal et inclusion)

Soit E un ensemble fini.
- Si $A \subset E$ alors A est fini et $Card(A) \leqslant Card(E)$.
- Si $A \subset E$ et $Card(A) = Card(E)$, alors $A = E$.

1.2 Principe additif

Principe additif : Si une collection finie d'objets peut être décomposée en plusieurs sous-collections mutuellement exclusives (c'est à dire deux à deux disjointes), alors le nombre d'objets dans la collection est égal à la somme des nombres d'objets dans chaque sous-collection.

Exemple trivial : Si un placard contient exactement 2 chemises rouges, 1 chemise bleue et 3 chemises vertes, il contient $2 + 1 + 3 = 6$ chemises.

Proposition 2 (Cardinal d'une union disjointe)

Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis deux à deux disjoints. Alors : $Card\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Card(A_i)$.

En particulier, si $A \cap B = \emptyset$, $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$.

Corollaire 1 (Cardinal du complémentaire)

Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E. Alors :
- $Card(B \setminus A) = Card(B) - Card(A \cap B)$
- $Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$

Preuve rapide :
- $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ (union disjointe) donc $Card(B) = Card(B \setminus A) + Card(A \cap B)$.
- $E = A \cup \overline{A}$ (union disjointe) donc $Card(E) = Card(A) + Card(\overline{A})$. □

Lorsque l'union n'est pas disjointe, il faut utiliser la formule du crible :

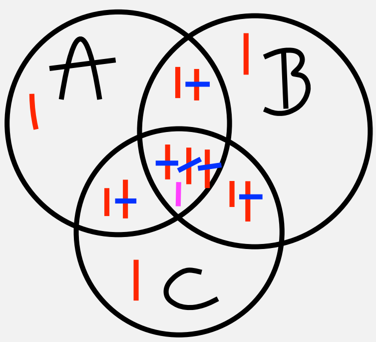
Proposition 3 (Formule du crible de Poincaré)

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble fini E. Alors :

- $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.
- $$Card(A \cup B \cup C) = Card(A) + Card(B) + Card(C) - Card(A \cap B) - Card(A \cap C) - Card(B \cap C) + Card(A \cap B \cap C).$$

Ceci s'illustre bien sur un diagramme de Venn :

Dessin :



Card(A) + Card(B) + Card(C)

- Card(A∩B) - Card(A∩C) - Card(B∩C)

+ Card(A∩B∩C)

Explication :
On compte 1 fois chaque élément de A, de B, de C (trait rouge = compté une fois)
On retire 1 fois chaque élément de A∩B, A∩C, B∩C (traits barrés en bleu)
On compte 1 fois chaque élément de A∩B∩C (traité ajouté en rose)

Au final, on a 1 trait dans chaque région : chaque élément de AUBUC a été compté une et une seule fois !

Exercice 1

34 couples sont inscrits dans un club de danse qui propose des cours de salsa, de rock et de tango.
- 18 couples prennent des cours de rock, 16 prennent des cours de salsa et 12 des cours de tango.
- 8 couples dansent la salsa et le rock, 2 dansent le rock et le tango et 4 dansent le tango et la salsa.

Combien de couples pratiquent les trois danses ?

On note S (resp. R,T) l'ensemble de couples pratiquant la salsa (resp. le rock, le tango).

$Card(S \cup R \cup T) = 34$
$Card(S) = 16, \quad Card(R) = 18, \quad Card(T) = 12.$
$Card(S \cap R) = 8, \quad Card(R \cap T) = 2, \quad Card(S \cap T) = 4.$
La formule du crible donne :

$$Card(S \cup R \cup T) = Card(S) + Card(R) + Card(T) - Card(S \cap R) - Card(S \cap T) - Card(R \cap T) + Card(S \cap R \cap T)$$

i.e
$$34 = 16 + 18 + 12 - 8 - 2 - 4 + Card(S \cap R \cap T) = 32 + Card(S \cap R \cap T)$$

et on trouve $Card(S \cap R \cap T) = 2$.

1.3 Principe multiplicatif

Principe multiplicatif : Si pour construire un élément d'un ensemble, on effectue une succession de n choix ayant respectivement c_1, c_2, $\dots c_n$ possibilités (le nombre c_{i+1} de possibilité pour le $i+1$-ème choix ne dépendant pas des i premiers choix effectués), alors l'ensemble contient $c_1 \times c_2 \times \dots \times c_n$ éléments.

Exercice 2

Une plaque d'immatriculation (SIV) est formée de deux lettres, trois chiffres, puis deux lettres.

Exemple : $PL - 123 - AK$

Règles additionnelles : les lettres I, O, U ne sont pas autorisées. Le bloc de deux lettres SS est interdit.

Combien y a-t-il de telles plaques d'immatriculation ?

Pour construire une plaque d'immatriculation, il faut :

- Choisir le premier bloc de deux lettres : $26 - 3 = 23$ possibilités pour chaque lettre.
Cela donne 23×23 possibilités pour le premier bloc de deux lettres, auxquelles on retire le bloc SS, laissant $\boxed{23^2 - 1}$ possibilités.

- Choisir les trois chiffres : de 0 à 999 soit $\boxed{1000}$ possibilités.
(Ou alors 10 possibilités pour chaque chiffre, soit $10 \times 10 \times 10 = 1000$ possibilités)

- Choisir le deuxième bloc de deux lettres : à nouveau $\boxed{23^2 - 1}$ possibilités.

Par principe multiplicatif, il y a $\boxed{(23^2 - 1) \times 1000 \times (23^2 - 1) = 10^3 \times (23^2 - 1)^2}$ plaques possibles.
(Cela donne 278 724 000).

Proposition 4 (Cardinal d'un produit cartésien)

- Soient $A_1, \dots A_n$ des ensembles finis. Alors : $Card(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} Card(A_i)$.
- En particulier, si E est un ensemble fini de $n \in \mathbb{N}^*$, $Card(E^n) = Card(E)^n$.

Preuve rapide :

- On rappelle que $A_1 \times \dots \times A_n = \Big\{(x_1, \dots, x_n),\ x_1 \in A_1,\ \dots, x_n \in A_n\Big\}$.

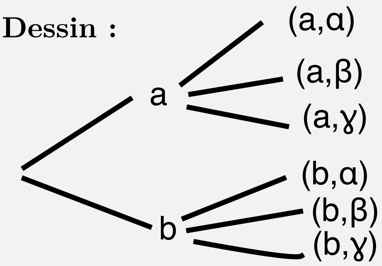
Pour construire un n-uplet de $A_1 \times \dots \times A_n$, il faut choisir le premier élément x_1 ($Card(A_1)$ possibilités), puis le deuxième x_2 ($Card(A_2)$ possibilités), puis $\dots$, puis le dernier x_n ($Card(A_n)$ possibilités).
Par principe multiplicatif, il y a $Card(A_1) \times Card(A_2) \times \dots \times Card(A_n)$ tels n-uplets.

- On rappelle que $E^n = E \times \dots \times E$ (n fois). D'après le point précédent,
$Card(E^n) = Card(E) \times \dots \times Card(E)$ (n fois), c'est à dire $Card(E^n) = Card(E)^n$. $\square$

Exemple

Soient $A = \{a, b\}$ et $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. On peut compter le nombre d'éléments de $A \times B$ sur une arbre :

Dessin :



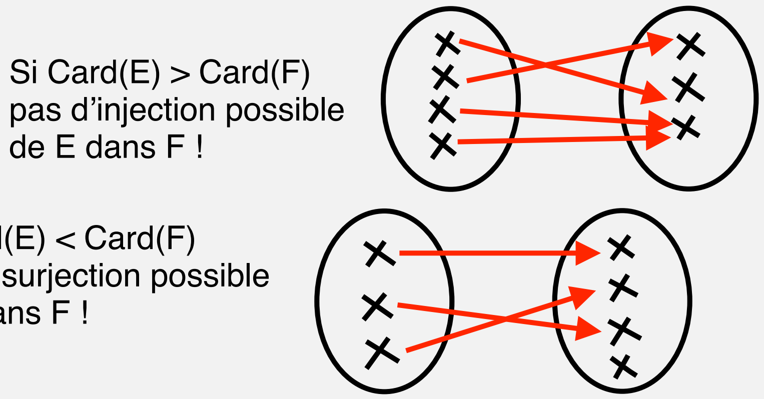
1.4 Cardinal et applications

Proposition 5 (Injections/surjections/bijections entre ensembles finis)

Soient E et F deux ensembles finis. Soit $f : E \to F$.

- Si $f : E \to F$ est injective, alors on a $Card(E) \leqslant Card(F)$.
- Si $f : E \to F$ est surjective, alors on a $Card(E) \geqslant Card(F)$.
- Si $f : E \to F$ est bijective, alors on $Card(E) = Card(F)$.

Dessin :



Principe de "bijection" : Si deux ensembles sont en bijection (c'est à dire s'il existe une application bijective de l'un dans l'autre), alors ils ont le même nombre d'éléments.

Exercice 3

Un crabe de déplace sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs : à l'instant 0, il part de l'origine (0), et à chaque étape il choisit de faire un pas vers la gauche ou bien un pas vers la droite.

Une "trajectoire" du crabe est $n+1$ uplet $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ donnant ses positions aux instants 0, 1, $\ldots n$.

Exemple : Une trajectoire du crabe pour $n = 4$: $(0, 1, 0, -1, -2)$

Combien y a-t-il de trajectoires possibles sur n pas ?

Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des trajectoires du crabe.

Une trajectoire $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{T}$ satisfait : $x_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + p_n$ avec $p_n \in \{-1, 1\}$.

Ainsi pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\quad x_k = \sum_{i=1}^{k} p_i$.

Le n-uplet $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \{-1, 1\}^n$ détermine donc entièrement la trajectoire du crabe !

$$\text{Autrement dit, } f : \begin{array}{ccc} \{-1,1\}^n & \to & \mathcal{T} \\ (p_1, \ldots, p_n) & \mapsto & \left(0,\ p_1,\ p_1 + p_2,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{n} p_i\right) \end{array} \text{ est clairement bijective.}$$

Ainsi $Card(\mathcal{T}) = Card(\{-1, 1\}^n) = Card(\{-1, 1\})^n = 2^n$.

2 Listes, arrangements, parties à p éléments

Un problème de dénombrement se ramène bien souvent à se demander comment "coder" les objets considérés dans l'énoncé en termes mathématiques. Ces objets prendront bien souvent la forme d'une liste/collection de valeurs (tirages de boules dans une urne, tirage de cartes dans un paquet...)

En particulier, il est essentiel de se poser deux questions :

- Est-ce que l'ordre des valeurs compte ?
- Les valeurs peuvent-elles se répéter ?

Exemples

Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire 3 boules dans cette urne.
Il y a plusieurs façons d'exécuter ce tirage !

- Si les tirages sont successifs, avec remise : l'ordre des éléments compte, il peut y avoir répétition.

Exemple de résultat : 1er tirage : 4, 2ème tirage : 2, 3ème tirage : 2

- Si les tirages sont successifs, sans remise : l'ordre des éléments compte, pas de répétition.

Exemple de résultat : 1er tirage : 4, 2ème tirage : 1, 3ème tirage : 3

- Si on tire les trois boules d'un coup : l'ordre des éléments ne compte pas, pas de répétition.

Exemple de résultat : Ensemble des boules obtenues : $\{1, 3, 5\}$.

2.1 Listes

Définition 2 (p-liste)

Soit E un ensemble fini.

On appelle **p-liste d'éléments de** E (ou liste d'éléments de E de longueur p) tout p-uplet :

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad \text{avec} \quad x_1 \in E,\ x_2 \in E,\ \dots,\ x_p \in E.$$

(Autrement dit une p-liste de E est simplement un élément de E^p.)

Pour une p-liste : • L'ordre des éléments compte • Il peut y avoir des répétitions.

Si $Card(E) = n$, il y a $\boxed{n^p}$ p-listes d'éléments de E.

Preuve à garder en tête :
Pour construire une p-liste $(x_1, \dots, x_p)$ on a n choix pour le premier élément, n choix pour le deuxième, $\dots$, n choix pour le p-ième. Il y a donc $n \times \dots \times n = n^p$ p-listes possibles. □

Exemples

Dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: • $(3, 5) \neq (5, 3)$, $(1, 1)$ sont des 2-listes.

- $(3, 1, 2) \neq (2, 1, 3) \neq (1, 2, 3)$, $(5, 2, 2)$ sont des 3-listes.
- $(1, 4, 4, 3, 5)$ est un 6-liste.

Exercice 4

On lance un dé à 6 face trois fois de suite. On note, dans l'ordre les valeurs obtenues.
Combien y-a-t-il de résultat possibles ?

Les résultats sont de la forme (x_1, x_2, x_3) avec $x_1, x_2, x_3 \in [\![1, 6]\!]$.
Ce sont les 3-listes de l'ensemble $[\![1, 6]\!]$, qui est de cardinal 6.
Nombre de résultats possibles : $6^3 = 216$.

2.2 Arrangements, permutations

Définition 3 (p-arrangement)

Soit E un ensemble fini.

On appelle **p-arrangement d'éléments de** E (ou arrangement d'éléments de E de longueur p) tout p-uplet :

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad \text{avec} \quad x_1 \in E,\ x_2 \in E,\ \dots,\ x_p \in E \quad \underline{\text{deux à deux distincts}}.$$

(Autrement dit c'est une p-liste composée d'éléments 2 à 2 distincts.)

Pour un p-arrangement : • L'ordre des éléments compte • Il n'y a pas de répétition.

Si $Card(E) = n$, il y a $\boxed{\dfrac{n!}{(n-p)!}}$ p-arrangements d'éléments de E. (si $p \leqslant n$)

Preuve à garder en tête :
Pour construire un p-arrangement $(x_1, \dots, x_p)$ on a :
- n choix pour le premier élément ($x_1 \in E$)
- $n-1$ choix pour le deuxième ($x_2 \in E \setminus \{x_1\}$)
- $n-2$ choix pour le troisième ($x_3 \in E \setminus \{x_1, x_2\}$)
- $\dots$
- $(n-p+1)$ choix pour le p-ième ($x_p \in E \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$).

Il y a donc $n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements possibles. □

Remarque 1

Il n'y a pas de p-arrangements d'éléments de E pour $p > Card(E)$.

Exemples

Dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: • $(3, 5) \neq (5, 3)$ sont des 2-arrangements. $(1, 1)$ n'en est pas un.

- $(3, 1, 2) \neq (2, 1, 3) \neq (1, 2, 3)$ sont des 3-arrangements. $(5, 2, 2)$ n'en est pas un.

Exercice 5

4 personnes s'asseyent autour d'une table comportant 6 chaises.
Combien y a-t-il d'agencements possibles ? (on considère toutes les chaises distinctes).

Un agencement est de la forme : (x_1, x_2, x_3, x_4), où x_i désigne le numéro de la chaise de la i-ème personne, i.e $x_i \in [\![1, 6]\!]$. Deux personnes ne peuvent pas s'asseoir sur la même chaise, les x_i sont 2 à 2 distincts. Il s'agit donc des 4-arrangements de $[\![1, 6]\!]$.

Nombre d'agencements possibles : $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

Le cas des p-arrangements de E lorsque $p = Card(E)$ est d'un intérêt particulier.

Définition 4 (Permutation)

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

On appelle **permutation** des éléments de E (ou permutation de E) tout n-uplet :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{avec} \quad x_1 \in E,\ x_2 \in E,\ \dots,\ x_n \in E \quad \underline{\text{deux à deux distincts}}.$$

(Autrement dit c'est un n-arrangement, où $n = Card(E)$.)

Une permutation de E est donc une liste où chaque élément de E apparaît une et une seule fois. C'est une façon de "ranger" les éléments de E dans un certain ordre.

Si $Card(E) = n$, il y a $\boxed{n!}$ permutations de E.

Preuve à garder en tête :
Pour construire une permutation $(x_1, \dots, x_n)$ on a :
- n choix pour le premier élément ($x_1 \in E$)
- $n-1$ choix pour le deuxième ($x_2 \in E \setminus \{x_1\}$)
- ...
- 1 choix pour le n-ième ($x_n \in E \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$).

Il y a donc $n \times (n-1) \dots \times 1 = n!$ permutations possibles. □

Remarque 2

Ainsi, il y a $n!$ façons de "ranger" n éléments distincts dans tous les ordres possibles !

Exemples

Dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$: $(3, 4, 2, 5, 1) \neq (4, 1, 3, 2, 5) \neq (1, 2, 3, 4, 5)$ sont des permutations.

Exercice 6

Dans cet exercice, on appelle "anagramme" d'un mot tout mot formé avec le même jeu de lettres (qu'il soit dans le dictionnaire ou non !)

Combien les mots suivants ont-ils d'anagrammes ?

(a) LIT (b) MATHS (c) TEST (d) ABRACADABRA

(a) Nombre de façon de "ranger" 3 lettres distinctes : $3! = 6$: LIT, LTI, ILT, ITL, TLI, TIL.

(b) Nombre de façon de "ranger" 5 lettres distinctes : $5! = 120$.

(c) Le mot a 4 lettres. T se répète 2 fois.
Il y a 4! façons de ré-ordonner le lettres si on considère qu'elles sont toutes distinctes.
Mais on compte alors T_1EST_2 et T_2EST_1 comme deux mots différents !
Chaque mot est compté autant de fois qu'il y a de permutations de T_1 et T_2 : $2! = 2$ fois.
Finalement le nombre d'anagramme est : $\dfrac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12$.

(d) Le mot a 11 lettres. A se répète 5 fois, B se répète 2 fois, R se répète 2 fois.
Il y a 11! façons de ré-ordonner les lettres si on considère qu'elles sont toutes distinctes.
Mais chaque mot est alors compté $5! \times 2! \times 2!$ fois (nombre de permutations des A, des B, des R).
Nombre d'anagrammes : $\dfrac{11!}{5!2!2!} = 166\,320$.

2.3 Parties à p éléments

Rappel : Si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, c'est à dire l'ensemble de tous les ensembles inclus dans E.

Exemple

Pour $E = \{1, 2, 3, 4\}$, on a :

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset, \\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\} \\ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \\ \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3\} \\ \{1, 2, 3, 4\} \end{array} \right\}$$

Rappelons que $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 2, 2, 3, 1\}$.

Proposition 6 (Nombre de parties de E)

Soit E un ensemble fini. Alors si $Card(E) = n$, $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Preuve :

Puisque $Card(E) = n$, notons $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Construire une partie $A \in \mathcal{P}(E)$, revient à choisir lesquels de e_i appartiennent à A. On choisit ainsi :

- Si $e_1 \in A$ ou non (2 possibilités).
- Si $e_2 \in A$ ou non
- $\ldots$
- Si $e_n \in A$ ou non.

Par principe multiplicatif, il y a $2 \times \ldots \times 2 = 2^n$ telles parties $A \in \mathcal{P}(E)$. □

Définition 5 (Parties à p éléments)

Une **partie à p éléments** de E est un sous-ensemble de E ayant p éléments :

$$\left\{x_1, x_2, \ldots, x_p\right\} \quad \text{avec} \quad x_1 \in E,\ x_2 \in E,\ \ldots,\ x_p \in E \quad \underline{\text{deux à deux distincts}}.$$

Dans une partie à p éléments :

- L'ordre ne compte pas
- Il n'y a pas de répétition.

Si $Card(E) = n$, il y a $\boxed{\binom{n}{p}}$ parties à p éléments de E, où :

- Si $p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}^{p \text{ termes}}}{p \times (p-1) \ldots \times 1} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
- Si $p > n$, $\displaystyle\binom{n}{p} = 0$.

Les quantités $\displaystyle\binom{n}{p}$ se lisent **"p parmi n"** et s'appellent les **coefficients binomiaux.**

Preuve à garder en tête :

Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Pour construire une partie à p éléments $\left\{x_1, \ldots, x_p\right\}$ on a :

- n choix pour le premier élément ($x_1 \in E$)
- $n - 1$ choix pour le deuxième ($x_2 \in E \setminus \{x_1\}$)
- $\ldots$
- $(n - p + 1)$ choix pour le p-ième ($x_p \in E \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}\}$).

Cela conduit à $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ possibilités.

Mais on a ici tenu compte de l'ordre des éléments : chaque partie a été comptée $p!$ fois (nombre de permutations de p éléments). On a donc finalement $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ parties à p éléments possibles. □

Exemples

Reprenons l'exemple précédent avec $E = \{1,2,3,4\}$.
On peut compter le nombre de parties à 0,1,2,3,4 éléments et constater qu'en effet :

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!4!} = 1, \quad \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = 4, \quad \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6, \quad \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!1!} = 4, \quad \binom{4}{4} = \frac{4!}{4!0!} = 1$$

Remarque 3

Pour calculer un coefficient binomial pour des valeurs numériques données, il est en général préférable d'utiliser la formule avec les "produits successifs" plutôt que la version "compacte" avec des factorielles :

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 4 = 120.$$

Concrètement, $\binom{n}{p}$ est le **nombre de façons de choisir p éléments distincts parmi n, sans tenir compte de leur ordre**.

Exercice 7

On considère un jeu traditionnel de 52 cartes. Combien existe-t-il de mains de 4 cartes ?

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des différentes cartes, de sorte que $Card(\mathcal{C}) = 52$.

Une main de 4 cartes est de la forme $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ avec les $x_i \in \mathcal{C}$ deux à deux distincts : c'est donc une partie de $\mathcal{C}$ à 4 éléments.

Nombre de mains possibles : $\binom{52}{4} = \frac{52!}{4!48!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49}{4 \times 3 \times 2} = 270\,725.$

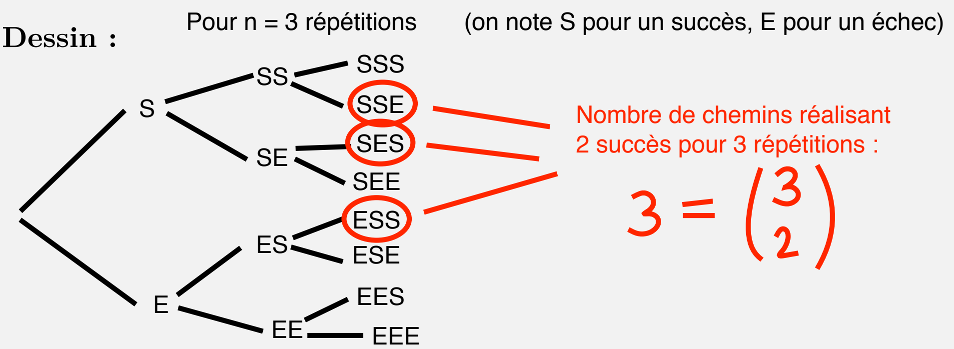
On dispose aussi d'une autre interprétation des coefficients binomiaux.

Proposition 7 (Nombre de chemins à p succès)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$.

$\binom{n}{p}$ est le nombre de chemins réalisant p succès pour n répétitions dans un arbre binaire.

Dessin :



Preuve rapide de la Proposition 7 :

Notant S pour un succès et E pour un échec, un chemin menant à p succès pour n répétitions est un anagramme du "mot" : $\underbrace{SS\ldots S}_{p \text{ fois}}\,\underbrace{EE\ldots E}_{n-p \text{ fois}}$. C'est un mot de n lettres, qui contient p fois "S" et $(n-p)$ fois "E". Il y a donc $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ tels anagrammes (cf. Exercice 6). C'est bien $\binom{n}{p}$! $\square$

3 Dénombrement en résumé : application aux tirages

De nombreuses situations dans des énoncés d'exercices de dénombrement (ou de probabilités élémentaires) peuvent se ramener à un "tirage dans une urne". Pour dénombrer le nombre de résultats possibles, il s'agit alors d'évaluer si un résultat est représenté par une liste, un arrangement ou une partie (ordre ? répétitions ?) On emploie alors la formule correspondante.

Méthode : (p tirages dans une urne contenant n boules)

On considère une urne contenant n objets distinguables : disons des boules, numérotées de 1 à n.
On effectue p tirages dans cette urne.

- **Tirages successifs, avec remise** : l'ordre compte, il peut y avoir répétition.

  Nombre de résultats possibles : $\boxed{n^p}$.

- **Tirages successifs, sans remise** : l'ordre compte, pas de répétition.

  Nombre de résultats possibles : $\boxed{n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$.

- **Tirages simultanés (on tire p boules "d'un coup")** : l'ordre ne compte pas, pas de répétition.

  Nombre de résultats possibles : $\boxed{\dbinom{n}{p}}$.

Plus rarement : on peut considérer un cas ou **l'ordre ne compte pas, mais il peut y avoir répétition.**

Exemple : On considère une urne contenant les boules 1, 2, $\dots n$ une infinité de fois.
On tire p boules "d'un seul coup" dans cette urne.

Dans ce cas, le nombre de résultats possibles est $\boxed{\dbinom{n+p-1}{p}}$

Preuve :

Un "résultat" de cette expérience revient à donner, parmi les p boules tirées, combien portent le numéro 1, combien portent le numéro 2, etc...

On peut imaginer que l'on dispose de n boites alignées, numérotées de 1 à n.
On range chaque boule tirée dans la boite correspondant à son numéro.

Calculer le nombre de résultats de l'expérience se ramène donc à calculer combien de façon il y a de ranger p boules dans n boites distinctes !

Maintenant, à la place des n boites alignées, on peut imaginer $n-1$ "murs" séparants les p boules.

Exemple : Pour $n = 3$ boites et $p = 4$ boules, illustrons quelques résultats possibles :

OO|O|O |OO|OO O|O|OO OOO|O| OOOO| |

On cherche ainsi le nombre d'anagrammes du "mot" OO . . . O | | . . . | (avec p "O" et $n-1$ "|").
C'est un mot de $n+p-1$ lettres, qui contient p fois "O" et $n-1$ fois "|".

Il y a donc $\dfrac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$ tels anagrammes. (cf. Exercice 6).

Cela donne bien $\dbinom{n+p-1}{p}$. □

Exercice 8

Une urne contient 10 jetons numérotés de 0 à 9.

1. On pioche 3 jetons, un par un et avec remise.

(a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

(b) Combien de tirages contiennent le jeton 3 ?

(c) Combien de tirages ne contiennent que des jetons pairs ?

2. Mêmes questions lorsque les pioches sont sans remise.

3. Mêmes questions lorsque les 3 jetons sont tirés simultanément.

1. L'ordre compte, répétition possible.

(a) Tirages possibles : $10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000$.

(b) Il est plus simple de se demander combien de tirages ne contiennent pas 3.
Il y en a : $9 \times 9 \times 9 = 9^3 = 729$.
Il y a donc $1000 - 729 = 271$ tirages qui contiennent 3.

(c) Il y a 5 numéros pairs possibles.
Tirages avec uniquement des jetons pairs : $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$.

2. L'ordre compte, pas de répétition.

(a) Tirages possibles : $10 \times 9 \times 8 = 720$.

(b) Tirages ne contenant pas 3 : $9 \times 8 \times 7 = 504$.
Tirages contenant 3 : $720 - 504 = 216$.

(c) Tirages avec uniquement des jetons pairs : $5 \times 4 \times 3 = 60$.

3. L'ordre ne compte pas, pas de répétition.

(a) Tirages possibles : $\binom{10}{3} = \dfrac{10!}{3! \times 7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$.

(b) Tirages ne contenant pas 3 : $\binom{9}{3} = \dfrac{9!}{3! \times 6!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$.
Tirages contenant 3 : $120 - 84 = 36$.

(c) Tirages avec uniquement des jetons pairs : $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3! \times 2!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$.

Remarque : les résultats du 3. sont ceux du 2. divisés par $3! = 6$.

4 Propriétés des coefficients binomiaux

Pour $p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \ldots \times 1}$ et pour $p > n$, $\displaystyle\binom{n}{p} = 0$.

Proposition 8 (Somme des coefficients binomiaux)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Preuve "combinatoire" :

Soit E un ensemble à n éléments (par exemple $E = \{1, 2, \ldots, n\}$).

Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, notant $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties à p éléments. de E, on a

$$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{p=0}^{n} \mathcal{P}_p(E) \quad \text{(union disjointe)}$$

Ainsi $\displaystyle Card(\mathcal{P}(E)) = \sum_{p=0}^{n} Card(\mathcal{P}_p(E))$, c'est à dire $\displaystyle 2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$. □

Proposition 9 (Propriétés diverses)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les propriétés suivantes :

- **Symétrie :** Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- **Premiers/derniers coefficients :** $\displaystyle\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\displaystyle\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- **"Diagonale" :** Si $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$

Preuve :
Vérifier directement les propriétés avec la formule $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. □

Proposition 10 (Formule de Pascal)

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Preuve :

Si $p > n$, cette égalité est simplement : $0 + 0 = 0$.

Traitons le cas $p \in [\![0, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \frac{(p+1)n! - (n-p)n!}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!((n+1)-(p+1))!} = \binom{n+1}{p+1}
\end{aligned}$$

□

On représente souvent les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$ dans le **triangle de Pascal**.
La formule de Pascal (Proposition 10) permet de reconstruire ce tableau très rapidement !

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

$$\binom{n}{p} \quad + \quad \binom{n}{p+1}$$
$$= \quad \binom{n+1}{p+1}$$

Théorème 1 (Formule du binôme de Newton)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Remarque 4

- Bien-sûr, par symétrie on a aussi $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

Les coefficients binomiaux mis en jeu se lisent sur la n-ième ligne du triangle de Pascal :

- Pour $n = 1$, on obtient $(a+b)^1 = a + b$.
- Pour $n = 2$, on obtient $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. (identité remarquable bien connue !)
- Pour $n = 3$, on obtient $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- Pour $n = 4$, on obtient $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Preuve du Théorème 1 :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: "$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$" est vraie.

- Initialisation : $\mathcal{P}(0)$: $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0$ est bien vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + a^{n+1}\right) + \left(b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-j+1} + a^{n+1}\right) + \left(b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j}\right)
\end{aligned}$$

On a effectué le changement $j = k+1$ dans la première somme, et renommé k en j dans la seconde.
En réunissant les sommes, puis en utilisant la formule de Pascal (Proposition 10) :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right) a^j b^{n+1-j} + a^{n+1} \\
&= b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j} + a^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j}.
\end{aligned}$$

Donc $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$, ce qui achève la récurrence. $\square$

Exercice 9

1. Retrouver par le calcul le fait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$. 2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$.

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Utiliser le principe additif et les formules du crible.
- Interpréter un énoncé de dénombrement pour savoir quelle formule utiliser (liste, arrangement ou partie).
- Connaître les propriétés des coefficients binomiaux.

Pour suivre

- Utiliser le principe multiplicatif dans des cas généraux.
- Penser à dénombrer $\overline{A}$ plutôt que A (lorsque c'est plus simple)
- Calculer un nombre d'anagrammes.
- Retrouver rapidement le triangle de Pascal.
- Calculer des sommes mettant en jeu les coefficients binomiaux.

Pour les ambitieux

- Utiliser le principe de "bijection" pour dénombrer un ensemble.
- Repérer les énoncés se ramenant à "ranger p boules dans n boîtes" et pouvoir redémontrer la formule.