25

Intégration sur un intervalle quelconque

Introduction et motivation

Rappel : (Intégration sur un segment)
Si $a, b \in \mathbb{R}$ et si f est une fonction définie et continue sur le segment $[a, b]$,
on a vu que l'on pouvait définir l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$ comme :

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est n'importe quelle primitive de f sur $[a, b]$.

On va généraliser cette notion pour définir l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle I quelconque !
Cet intervalle pourra être ouvert à gauche, ouvert à droite, ouvert des deux côtés, borné ou non-borné...

Exemples

- Une intégrale sur $I = [0, +\infty[$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$
- Une intégrale sur $I =]0, 1]$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$
- Une intégrale sur $I =]-\infty, +\infty[$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

Ce genre d'intégrale est parfois appelé "intégrale impropre" ou "intégrale généralisée".
L'approche que l'on va utiliser pour définir et étudier ces intégrales généralisées n'est pas sans rappeler celle employée pour les séries ! On verra notamment qu'on dispose à nouveau de "théorèmes de comparaison"...

1 Généralisation de l'intégration

1.1 Intégrale sur un intervalle $[a, b[$ (semi-ouvert à droite)

Définition 1 (Intégrale de f sur $[a, b[$)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soit $f \in C([a, b[, \mathbb{R})$.

Pour tout $x \in [a, b[$ fixé, f est continue sur le segment $[a, x]$, donc $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est bien définie.

L'intégrale $\displaystyle\int_{t\in[a,b[} f(t)dt$, souvent notée simplement $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ peut être de deux **natures** :

- On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **convergente** (ou qu'elle converge) lorsque :

$$\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt \text{ existe et est finie.}$$

Dans ce cas, on pose naturellement : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt.$

- Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **divergente** (ou qu'elle diverge).

Dans ce cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ n'est pas définie.

Remarques 1

- La borne supérieure b de l'intervalle $[a, b[$ peut être finie, ou bien égale à $+\infty$!
- On dit parfois que f est "intégrable" ou "non-intégrable" sur $[a, b[$.

Dessin :

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales suivantes. En cas de convergence, préciser la valeur de l'intégrale.

1. *Sur un intervalle non-borné* $[a, +\infty[$: (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$

2. *Sur un intervalle borné* $[a, b[$ $(b \in \mathbb{R})$: (a) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{2-t}dt$ (b) $\displaystyle\int_0^{1} \ln(1-t)dt$

1.(a) La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ (qui n'est pas un segment !)

Pour tout $x \in [0 + \infty[$, $\displaystyle\int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

Ceci montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}dt = 1$.

1.(b) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$ (qui n'est pas un segment !)

Pour tout $x \in [0 + \infty[$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Ceci montre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge.

2.(a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2-t}$ est continue sur l'intervalle $[1, 2[$ (qui n'est pas un segment !)
Elle n'est pas définie (ni même prolongeable par continuité) en 2.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2-t}dt$ ne désigne donc pas $\displaystyle\int_{t\in[1,2]} \frac{1}{2-t}dt$ mais bien $\displaystyle\int_{t\in[1,2[} \frac{1}{2-t}dt$...

Pour tout $x \in [1, 2[$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{2-t}dt = \Big[-\ln(2-t)\Big]_1^x = -\ln(2-x) \xrightarrow[x\to 2]{} +\infty$.

Ceci montre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2-t}dt$ diverge.

2.(b) La fonction $t \mapsto \ln(1-t)$ est continue sur l'intervalle $[0, 1[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)dt$ désigne donc ici $\displaystyle\int_{t\in[0,1[} \ln(1-t)dt$.

Pour tout $x \in [0, 1[$, $\displaystyle\int_0^x \ln(1-t)dt = -\int_1^{1-x} \ln(u)du = \Big[u\ln(u) - u\Big]_1^{1-x} = (1-x)\ln(1-x) - x$.

Ainsi $\lim_{x\to1^-}\displaystyle\int_0^x \ln(1-t)dt = \Big(\lim_{x\to1^-}(1-x)\ln(1-x)\Big) - 1 = \lim_{y\to0^+} y\ln(y) - 1 = 0 - 1 = -1$.

Ceci montre que l'intégrale converge et que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)dt = -1$.

Attention !

Lorsqu'une intégrale $\int_a^b f(t)dt$ désigne $\int_{t\in[a,b[} f(t)dt$ $\left(\text{et non } \int_{t\in[a,b]} f(t)dt\right)$,

on n'écrira surtout pas $\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$!

Cela n'aurait pas de sens, car f n'est pas définie en b, donc la primitive F non plus !

En revanche, pour tout $x \in [a,b[$, on peut bien affirmer : $\int_a^x f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_a^x = F(x) - F(a)$.

Il en résulte que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ existe et est finie,

et dans ce cas on a, par définition : $\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{x\to b^-} \Big[F(t)\Big]_a^x = \lim\limits_{x\to b^-} F(x) - F(a).}$

Proposition 1 (Intégrale "faussement impropre" (à droite))

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in C([a,b[,\mathbb{R})$.
On suppose que f est prolongeable par continuité en b. On note $\widetilde{f} \in C([a,b],\mathbb{R})$ ce prolongement.

Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge et $\int_{t\in[a,b[} f(t)dt = \int_{t\in[a,b]} \widetilde{f}(t)dt$.

Dessin :

Remarque 2

Dans ce genre de cas, on dit parfois que l'intégrale $\int_{[a,b[} f(t)dt$ est "faussement impropre"

puisqu'elle se ramène en fait à l'intégrale "propre" (sur un segment) $\int_{[a,b]} f(t)dt$.

Preuve de la Proposition 1 :

f étant prolongeable par continuité en b, la limite $\ell = \lim\limits_{t\to b^-} f(t)$ existe et est finie.

On sait alors qu'en posant $\widetilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [a,b[\\ \ell & \text{si } t = b \end{cases}$, on définit une fonction $\widetilde{f} \in C([a,b],\mathbb{R})$.

On peut donc introduire F, primitive de $\widetilde{f}$ sur le segment $[a,b]$.
Comme $\forall t \in [a,b[,\ F'(t) = \widetilde{f}(t) = f(t)$, F est également une primitive de f sur l'intervalle $[a,b[$.

Par suite, pour tout $x \in [a,b[$, $\int_a^x f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_a^x = F(x) - F(a) \xrightarrow[x\to b^-]{} F(b) - F(a)$.

Ceci montre que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge et que $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = \int_a^b \widetilde{f}(t)dt$. $\square$

Exemple

L'intégrale $\int_{-1}^0 \frac{\sin(t)}{t}dt$ désigne a priori $\int_{t\in[-1,0[} \frac{\sin(t)}{t}dt$: un problème se pose en 0.

Mais $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 : on sait donc que cette intégrale converge !

1.2 Intégrale sur un intervalle $]a,b]$ (semi-ouvert à gauche)

Définition 2 (Intégrale de f sur $]a,b]$)

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f \in C(]a,b],\mathbb{R})$.

Pour tout $x \in]a,b]$ fixé, f est continue sur le segment $[x,b]$, donc $\displaystyle\int_x^b f(t)dt$ est bien définie.

L'intégrale $\displaystyle\int_{t\in]a,b]} f(t)dt$, souvent notée simplement $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ peut être de deux **natures** :

- On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **convergente** (ou qu'elle converge) lorsque :

$$\lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt \text{ existe et est finie.}$$

Dans ce cas, on pose naturellement : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt.$

- Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **divergente** (ou qu'elle diverge).

Dans ce cas, la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ n'est pas définie.

Remarque 3

La borne inférieure a de l'intervalle $]a,b]$ peut être finie, ou bien égale à $-\infty$!

Dessin :

Exercice 2

Déterminer la nature des intégrales suivantes. En cas de convergence, préciser la valeur de l'intégrale.

1. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{2}{1+t^2}dt$.

1. Il s'agit de $\displaystyle\int_{t\in]0,1]} \ln(t)dt$.

Pour tout $x \in]0,1]$, $\displaystyle\int_x^1 \ln(t)dt = \Big[t\ln(t) - t\Big]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1$.

Ceci montre que l'intégrale converge et $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt = -1$.

2. Il s'agit de $\displaystyle\int_{t\in]-\infty,0]} \frac{2}{1+t^2}dt$.

Pour tout $x \in]-\infty,0]$, $\displaystyle\int_x^0 \frac{1}{1+t^2} = \Big[2\arctan(t)\Big]_x^0 = -2\arctan(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} -2 \times -\frac{\pi}{2} = \pi$.

Ceci montre que l'intégrale converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{2}{1+t^2}dt = \pi$.

Attention !

À nouveau, lorsqu'une intégrale $\int_a^b f(t)dt$ désigne $\int_{t\in]a,b]} f(t)dt$ $\left(\text{et non } \int_{t\in[a,b]} f(t)dt\right)$,

on n'écrira surtout pas $\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$!

Cela n'aurait pas de sens, car f n'est pas définie en a, donc la primitive F non plus !

En revanche, pour tout $x \in]a,b]$, on peut bien affirmer : $\int_x^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_x^b = F(b) - F(x)$.

Il en résulte que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^+} F(x)$ existe et est finie,

et dans ce cas on a, par définition : $\boxed{\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{x\to a^+} \Big[F(t)\Big]_x^b = F(b) - \lim\limits_{x\to a^+} F(x).}$

Le résultat précédent, concernant les prolongements par continuité, tient toujours :

Proposition 2 (Intégrale "faussement impropre" (à gauche))

Soient $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in C(]a,b],\mathbb{R})$.

On suppose que f est prolongeable par continuité en a. On note $\widetilde{f} \in C([a,b],\mathbb{R})$ ce prolongement.

Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge et $\int_{t\in]a,b]} f(t)dt = \int_{t\in[a,b]} \widetilde{f}(t)dt$.

Dessin :

Exemple

L'intégrale $\int_0^2 \frac{e^t-1}{t}dt$ désigne a priori $\int_{t\in]0,2]} \frac{e^t-1}{t}dt$: un problème se pose en 0.

Mais $f : t \mapsto \frac{e^t-1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 (en posant $f(0) = 1$, on a $f \in C([0,2],\mathbb{R})$).

Cette intégrale est ainsi "faussement impropre" : elle converge !

1.3 Intégrale sur un intervalle ouvert $]a,b[$

Pour définir une intégrale sur un intervalle ouvert $]a,b[$, on décompose celui ci en $]a,c] \cup [c,b[$ pour se ramener aux cas des intervalles semi-ouverts vu précédemment !

Définition 3 (Intégrale de f sur $]a,b[$)

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soit $f \in C(]a,b[,\mathbb{R})$.

- On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{t\in]a,b[} f(t)dt$, notée plus simplement $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, est **convergente** lorsque :

$$\text{Il existe } c \in]a,b[\text{ tel que, les deux intégrales } \int_a^c f(t)dt \text{ et } \int_c^b f(t)dt \text{ convergent.}$$

On pose alors naturellement : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$

- Dans le cas contraire (c'est à dire dès que l'une des deux intégrales diverge !), on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **divergente**.

La nature et la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ne dépendent pas du choix du réel $c \in]a,b[$!

Preuve :

Soit F une primitive de f sur $]a,b[$. Quel que soit le réel $c \in]a,b[$ choisi, on a vu que :

- L'intégrale $\displaystyle\int_a^c f(t)dt = \int_{t\in]a,c]} f(t)dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to a^+} F(x)$ existe et est finie,

  et dans ce cas $\displaystyle\int_a^c f(t)dt = F(c) - \lim_{x\to a^+} F(x)$.

- L'intégrale $\displaystyle\int_c^b f(t)dt = \int_{t\in[c,b[} f(t)dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to b^-} F(x)$ existe et est finie,

  et dans ce cas $\displaystyle\int_c^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(c)$.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)$ converge si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to a^+} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to b^-} F(x)$ existent et sont finies.
Cette condition ne dépend donc pas du réel $c \in]a,b[$ choisi. De plus, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \left(F(c) - \lim_{x\to a^+} F(x)\right) + \left(\lim_{x\to b^-} F(x) - F(c)\right) = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Cette valeur ne dépend pas non plus du réel $c \in]a,b[$ choisi ! $\square$

Méthode : Étudier la nature d'une intégrale sur un intervalle ouvert

Si $f \in C(]a,b[,\mathbb{R})$, pour déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_{t\in]a,b[} f(t)dt$:

$\boxed{1}$ On choisit n'importe quelle valeur $c \in]a,b[$ (on prendra en général une valeur "simple").

$\boxed{2}$ On étudie les natures de $\displaystyle\int_a^c f(t)dt = \int_{t\in]a,c]} f(t)dt$ et de $\displaystyle\int_c^b f(t)dt = \int_{t\in[c,b[} f(t)dt$.

- Si les deux intégrales convergent, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge et vaut $\displaystyle\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.
- Si l'une des intégrales diverge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)$ diverge.

Exemples

- Si $f \in C(]0,+\infty[,\mathbb{R})$, pour étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$,

on étudie séparément les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ (comme vu précédemment)

- Si $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, pour étudier la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$,

on étudie séparément les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ (comme vu précédemment)

Attention !

L'existence de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)dt$ ne prouve pas la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$!

Contre-exemple : Comme la fonction $t \mapsto t$ est impaire, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\displaystyle\int_{-x}^{x} t\,dt = 0$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} tdt = 0$. Pourtant, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$ est divergente !

En effet, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tdt$ est divergente (puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x tdt = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2} = +\infty$).

Au passage (mais ce n'est pas utile de le préciser), l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 tdt$ est également divergente.

Exercice 3

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$. Il s'agit donc de l'intégrale $\displaystyle\int_{t\in]0,+\infty[}\frac{1}{\sqrt{t}}dt$.

- Nature de $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}dt$?

Pour tout $x \in]0,1]$, $\displaystyle\int_x^1\frac{1}{\sqrt{t}}dt = \Big[2\sqrt{t}\Big]_x^1 = 2-2\sqrt{x} \xrightarrow[x\to0^+]{} 2$.

Donc on a convergence et $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2$.

- Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}dt$?

Pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\displaystyle\int_1^x\frac{1}{\sqrt{t}}dt = \Big[2\sqrt{t}\Big]_1^x = 2\sqrt{x}-2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}$ diverge !

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}$ est divergente.

Le résultat concernant les prolongements par continuité tient toujours :

Proposition 3 (Intégrale "faussement impropre" (à gauche et à droite))

Soient $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a<b$ et $f \in C(]a,b[,\mathbb{R})$.
On suppose que f est prolongeable par continuité en a et en b.
On note $\tilde{f} \in C([a,b],\mathbb{R})$ ce prolongement.

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge et $\displaystyle\int_{t\in]a,b[} f(t)dt = \int_{t\in[a,b]}\tilde{f}(t)dt$.

1.4 Intégrale sur une union d'intervalles

Pour finir, on peut étendre la définition de l'intégrale à des fonctions continues sur un intervalle privé de certains points (ce qui revient à une union d'intervalle !)

Définition 4 (Intégrale de f sur $]x_0,x_1[\cup\ldots\cup]x_{n-1},x_n[$)

Soient $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.
On introduit des points $x_0,x_1,\ldots,x_n$ dans l'intervalle $]a,b[$: $\quad a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.
On suppose que f est une fonction continue sur $]a,b[$ sauf en $x_0,x_1,\ldots,x_n$.
Autrement dit, f est continue sur $]x_0,x_1[\cup]x_1,x_2[\cup\ldots\cup]x_{n-1},x_n[$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente lorsque :

$$\text{Les intégrales } \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt,\ \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt,\ \ldots,\ \int_{x_{n_1}}^{x_n} f(t)dt \text{ sont convergentes.}$$

On pose alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt=\int_{x_0}^{x_1} f(t)dt+\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt+\ldots+\int_{x_{n_1}}^{x_n} f(t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt.$

Dessin :

Remarque 4

Ceci inclut en particulier le cas des fonctions continues par morceaux, vu à la fin du Chapitre #16.

Exercice 4

On définit, pour tout $t\in\mathbb{R}$: $\quad f(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ e^{-t} & \text{si } t\geqslant 0\end{cases}$. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

Graphe de f :

f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

- L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dt=0$ est clairement convergente.
- On étudie $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-t}dt$: pour tout $x\geqslant 0$, $\quad\displaystyle\int_0^x e^{-t}dt=\Big[-e^{-t}\Big]_0^x=1-e^{-x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1.$

Ainsi, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

Conclusion : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=0+1=1$.

2 Propriétés de l'intégrale sur un intervalle quelconque

Les propriétés connues pour l'intégrale sur un segment se généralisent facilement à un intervalle quelconque.

Proposition 4 (Relation de Chasles)

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$.
Soit $I =]a, b[$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$. Soit $f \in C(I, \mathbb{R})$. Soit $c \in I$.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ convergent,
et dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Remarque 5

Dans le cas où $I = [a, b[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f(t)dt = \int_{t\in[a,c]} f(t)dt$ "converge" automatiquement !
Les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_{t\in[a,b[} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt = \int_{t\in[c,b[} f(t)dt$ sont donc de même nature.

Proposition 5 (Linéarité)

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$.
Soit $I =]a, b[$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$. Soient $f \in C(I, \mathbb{R})$ et $g \in C(I, \mathbb{R})$.
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ convergent, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b \Big(\lambda f(t) + \mu g(t)\Big)dt$ converge
et on a $\displaystyle\int_a^b \Big(\lambda f(t) + \mu g(t)\Big)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$.

Proposition 6 (Positivité et croissance)

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$.
Soit $I =]a, b[$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$. Soient $f \in C(I, \mathbb{R})$ et $g \in C(I, \mathbb{R})$.

- **Positivité :** Si $f \geqslant 0$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.
- **Croissance :** Si $f \leqslant g$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ sont convergentes, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

Remarque 6

Rappelons que ce résultat de "croissance" permet, en essence, "d'intégrer des inégalités" !
Il est en particulier utile pour encadrer une intégrale.

Proposition 7 (Stricte positivité, fonction positive d'intégrale nulle)

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$.
Soit $I =]a, b[$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$. Soit $f \in C(I, \mathbb{R})$.

- Soit $f \geqslant 0$. On suppose $f \neq 0$: il existe donc $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) > 0$.
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt > 0$.
- *Contraposée :* Soit $f \geqslant 0$. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$, alors $f = 0$.

Énonçons pour finir une généralisation du résultat connu sur les fonctions paires et impaires :

Proposition 8 (Intégrales d'une fonction paire / impaire)

Soit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Si f est paire ou impaire, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

En cas de convergence :

- Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$.
- Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$.

Preuve de la Proposition 8 :

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$ sont convergentes.

Il faut donc que :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt, \text{ donc } \quad \text{et} \quad \lim_{y\to-\infty}\int_y^0 f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^0 f(t)dt \quad \text{existent et soient finies.}$$

- Si f est paire : $\displaystyle\int_{-x}^{0} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{y\to-\infty}\int_y^0 f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt}$.
- Si f est impaire : $\displaystyle\int_{-x}^{0} f(t)dt = -\int_0^x f(t)dt$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{y\to-\infty}\int_y^0 f(t)dt = -\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt}$.

Dans les deux cas, il suffit donc que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt$ existe et soit finie !

Ainsi : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

En cas de convergence , les égalités encadrées donnent :

- Si f est paire : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt$.
- Si f est impaire : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt = -\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

Comme par définition $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)dt$, on obtient les résultats annoncés.

□

Exercice 5

Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \pi$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ étant paire,

la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}$ équivaut à la convergence de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$.

Pour tout $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \Big[\arctan(t)\Big]_0^x = \arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.

Ceci montre que l'intégrale converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \pi$.

3 Intégrales usuelles

3.1 Intégrales de Riemann

Théorème 1 (Convergence des intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \iff \alpha > 1 \qquad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \iff \alpha < 1$$

et plus généralement, quel que soit $c > 0$,

$$\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \iff \alpha > 1 \qquad \int_0^c \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \iff \alpha < 1$$

Dessin :

Preuve :

Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $c > 0$.

• L'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_c^x \frac{1}{t^\alpha} dt$ existe et est finie.

Or : $\displaystyle\int_c^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_c^x = \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - c^{1-\alpha})$.

Pour que la limite lorsque $x \to +\infty$ soit finie, il faut que $1 - \alpha < 0$, c'est à dire $\alpha > 1$.

• L'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_x^c \frac{1}{t^\alpha} dt$ existe et est finie.

Or : $\displaystyle\int_x^c \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_x^c = \frac{1}{1-\alpha}(c^{1-\alpha} - x^{1-\alpha})$.

Pour que la limite lorsque $x \to 0$ soit finie, il faut que $1 - \alpha > 0$, c'est à dire $\alpha < 1$.

Dans le cas $\alpha = 1$, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ divergent car

une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est ln et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$. □

Remarques 7

• On voit facilement en poursuivant les calculs de la preuve que :

Pour $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}$ et pour $\alpha < 1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}$ (à retrouver rapidement)

• Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est divergente,

puisqu'au moins l'une des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ ou $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ diverge !

Proposition 9 (Intégrales de Riemann "décalées")

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

$$\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt \text{ converge } \iff \alpha < 1 \qquad \int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt \text{ converge } \iff \alpha < 1$$

Preuve :

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ est continue sur $]a, b]$.

L'intégrale $\displaystyle\int_{t \in]a,b]} \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\lim_{x \to a} \int_x^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ existe et est finie.

Or : $\displaystyle\int_x^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt = \int_{x-a}^{b-a} \frac{1}{u^\alpha} du = \left[\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x-a}^{b-a} = \frac{1}{1-\alpha}\left((b-a)^{1-\alpha} - (x-a)^{1-\alpha}\right).$

Pour que la limite lorsque $x \to a$ soit finie, il faut que $1 - \alpha > 0$, c'est à dire $\alpha < 1$.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ est continue sur $[a, b[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_{t \in [a,b[} \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\lim_{x \to b} \int_a^x \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ existe et est finie.

Or : $\displaystyle\int_a^x \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt = -\int_{b-a}^{b-x} \frac{1}{u^\alpha} du = \int_{b-x}^{b-a} \frac{1}{u^\alpha} du = \left[\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{b-x}^{b-a} = \frac{1}{1-\alpha}\left((b-a)^{1-\alpha} - (b-x)^{1-\alpha}\right).$

Pour que la limite lorsque $x \to b$ soit finie, il faut que $1 - \alpha > 0$, c'est à dire $\alpha < 1$.

À nouveau, dans le cas $\alpha = 1$, on peut reprendre les calculs précédents.
Cette fois, les primitives sont logarithmiques et on montre que les intégrales divergent. □

3.2 Intégrales exponentielles

Théorème 2 (Convergence des intégrales exponentielles)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge $\iff \alpha > 0$.

Preuve :

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-\alpha t} dt$ existe et est finie.

- Considérons d'abord $\alpha \neq 0$: on a $\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t} dt = \left[\frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha t}\right]_0^x = \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha}.$

Pour que la limite quand $x \to +\infty$ soit finie, il faut que $\alpha > 0$.

- Dans le cas $\alpha = 0$, on obtient $\displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t} dt = \int_0^x dt = x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ donc l'intégrale diverge. □

Remarque 8

On voit facilement en poursuivant les calculs de la preuve que :

Pour $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}.$ (à retrouver rapidement)

4 Nature des intégrales de fonctions positives

Nous allons à présent énoncer des résultats permettant de déterminer "à l'oeil" la nature de l'intégrale d'une fonction positive. On notera la similarité avec les résultats mis en place pour les séries à termes positifs.

Ces résultats seront annoncés dans le cas d'une intégrale sur un intervalle semi-ouvert à droite : $\displaystyle\int_{t\in[a,b[} f(t)dt$.

À chaque fois, on a un résultat parfaitement analogue pour un intervalle semi-ouvert à gauche : $\displaystyle\int_{t\in]a,b]} f(t)dt$.

4.1 Critère de convergente pour l'intégrale d'une fonction positive

Théorème 3 (Nature de l'intégrale d'une fonction positive sur $[a, b[$)

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est majorée sur $[a, b[$.

c'est à dire : $\exists M > 0,\ \forall x \in [a, b[,\ \displaystyle\int_a^x f(t)dt \leqslant M$.

- En cas de convergence, pour tout $x \in [a, b[$, $\displaystyle\int_a^x f(t)dt \leqslant \int_a^b f(t)dt$.
- En cas de divergence, on a $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt = +\infty$

Preuve :

Comme f est positive, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est croissante sur $[a, b[$.

(Puisqu'elle y est dérivable, de dérivée $F' = f \geqslant 0$).

D'après le Théorème de la limite monotone (pour les fonctions), la limite $\displaystyle\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$ existe et est finie si et seulement si cette fonction est majorée. Sinon, cette limite est $+\infty$. □

Remarque 9

Ce résultat et à rapprocher de son équivalent pour les séries : une série à termes positifs $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

4.2 Théorèmes de comparaison pour des intégrales de fonctions positives

Théorème 4 (Comparaison : Inégalités et nature des intégrales)

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$.

On suppose que $\boxed{0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)}$ au voisinage de b.

- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge .
- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge .

Remarques 10

- Pour la comparaison des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, il était nécessaire d'avoir $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ seulement à partir d'un certain rang (i.e "pour n assez grand").

Ici, de même, il est nécessaire d'avoir $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ seulement au voisinage de b (i.e "pour t assez proche de b").

- Pour une intégrale sur $]a, b]$, le résultat s'adapte avec une comparaison au voisinage de a.

Il en va de même pour les résultats qui vont suivre.

✎ Exercice 6

Déterminer la nature de $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt$.

Il s'agit de $\displaystyle\int_{t\in[1/2,+\infty[} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt$: étudions la convergence en $+\infty$...

La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ est positive au voisinage de $+\infty$: on peut bien utiliser les théorèmes de comparaison !

Au voisinage de $+\infty$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \leqslant \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ (dès que $t \geqslant 1$).

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ diverge, on en déduit que $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt$ diverge.

♛ Théorème 5 (Comparaison : Négligeabilité et nature des intégrales)

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$.
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$, positives au voisinage de b.

On suppose que $\boxed{f(t) \underset{t\to b}{=} o(g(t))}$.

- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge .
- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge .

✎ Exercice 7

Déterminer la nature des intégrales : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ et $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln(t)}dt$.

- Il s'agit de $\displaystyle\int_{t\in[0,+\infty[} e^{-t^2}dt$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est positive.

On a (par exemple) : $e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.

Il en résulte que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \underbrace{\int_0^1 e^{-t^2}dt}_{\text{intégrale sur un segment : OK !}} + \int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge !

(Attention : on n'aurait pas pu dire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}$ converge !...)

- Il s'agit de $\displaystyle\int_{t\in]0,1/2]} \frac{1}{\sqrt{t}\ \ln(t)}dt$: étudions la convergence en 0...

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}\ln(t)}$ est négative sur $]0, 1/2]$!

On se ramène au cas positif avec $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{-1}{\sqrt{t}\ln(t)}dt$: on peut utiliser les théorèmes de comparaison.

On a facilement $\dfrac{-1}{\sqrt{t}\ln(t)} \underset{t\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{1/2} \frac{1}{t^{1/2}}dt$ converge.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln(t)}$ converge.

Théorème 6 (Comparaison : Équivalent et nature des intégrales)

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$.
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$, positives au voisinage de b.

On suppose que $\boxed{f(t) \underset{t \to b}{\sim} g(t)}$.

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Remarque 11

On notera bien que ce théorème permet de comparer la **nature** des deux séries, mais n'établit aucun lien entre les **valeurs** des intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)$!

Exercice 8

Soit $\alpha > 0$. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^\alpha} dt$

La fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{(1+t^2)^\alpha}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$: le "problème" se pose en $+\infty$.

Notons que la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^\alpha} dt$ est la même que celle de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^\alpha} dt$.

(Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^\alpha}$ "converge" automatiquement)

Au voisinage de $+\infty$, $\quad \dfrac{t^2}{(1+t^2)^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t^2}{t^{2\alpha}} = \dfrac{1}{t^{2(\alpha-1)}}$.

Les intégrales $\quad \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^\alpha} dt \quad$ et $\quad \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2(\alpha-1)}} dt$ sont donc de même nature.

Ainsi, l'intégrale converge ssi $2(\alpha - 1) > 1$ c'est à dire $\alpha > \frac{3}{2}$.

5 Convergence absolue

On vient de voir comment déterminer, par comparaison, la nature d'une intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ dans le cas d'une fonction f positive (au moins au voisinage du point qui "pose problème").

Bien-sûr, si la fonction f est négative, on se ramène au cas précédent avec $-\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b -f(t)dt$.

Que dire dans le cas d'une fonction dont le signe n'est pas constant (au voisinage de a ou de b) ?
Comme pour les séries, on est amené à introduire la notion de convergence absolue !

Définition 5 (Convergence absolue)

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$.
Soit $I =]a, b]$ ou $I = [a, b[$ ou $I =]a, b[$. Soit $f \in C(I, \mathbb{R})$.

On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ **converge absolument** (CVA), ou qu'elle est absolument convergente lorsque :

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.

Théorème 7 (Convergence absolue implique convergence)

Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge absolument, alors elle converge.

On a de plus : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$ **(Inégalité triangulaire pour une intégrale généralisée)**

Preuve rapide :

On utilise la même astuce que pour les séries ! On définit les fonctions f_+ et f_- par :

$$\forall x \in [a, b[, \qquad f_+(x) = \max(f(x), 0) \qquad f_-(x) = \max(-f(x), 0).$$

On montre facilement que :
- f_+ et f_- sont continues et positives sur $[a, b[$. • $f = f_+ - f_-$ • $|f| = f_+ + f_-$.

Traitons par exemple le cas d'une intégrale sur $[a, b[$.
Puisque $f_+ \leqslant |f|$ et $f_- \leqslant |f|$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ converge, d'après le Théorème (de comparaison) 4, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f_+(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b f_-(t)dt$ convergent.

Enfin, puisque $f = f_+ - f_-$, par linéarité (Proposition 5), l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

L'inégalité triangulaire s'obtient en passant à la limite dans $\displaystyle\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leqslant \int_a^x |f(t)dt|$ quand $x \to b^-$.
□

Remarques 12

• Bien-sûr, si f est une fonction positive, la convergence absolue revient simplement à la convergence.

• La réciproque de ce théorème n'est pas vraie : il existe des intégrales qui sont convergentes mais pas absolument convergentes.

On peut par exemple montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt$ est divergente,

mais $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est tout de même convergente.

Exercice 9

Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+t^2} dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} dt$.

- $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{1+t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$, mais n'est pas de signe constant au voisinage de $+\infty$.

On s'intéresse donc plutôt à $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{1+t^2}\right| dt$.

Pour tout $t \geqslant 1$, $\displaystyle\left|\frac{\cos(t)}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{1+t^2}\right| dt$ est convergente, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+t^2} dt$ est convergente.

- Pour tout $t \in]0, 1]$, $\displaystyle\left|\frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}$ est convergente.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}}\right| dt$ converge, donc que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}} dt$ converge.

6 Quelques outils classiques

6.1 Intégration par parties : à faire "sur un segment" !

L'intégration par partie, vue dans le Chapitre #16, permet de ré-exprimer des intégrales du type $\int_a^b u'(t)v(t)dt$. Aucun résultat d'intégration par partie pour des intégrales généralisée (c'est à dire sur $[a,b[$ ou $]a,b]$ ou $]a,b[$) n'est donné dans le programme ! Si l'on a besoin de poser une intégration par partie dans une intégrale généralisée, on effectuera donc celle-ci dans une "vraie intégrale" (c'est à dire **sur un segment**) avant de passer à la limite.

Exercice 10

Pour tout $x>0$, on pose $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Vérifier que cette intégrale est bien définie pour tout $x>0$.
2. Montrer que pour tout $x>0$, $\quad \Gamma(x+1)=x\times\Gamma(x)$.

1. Soit $x>0$. La fonction $t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

• Nature de $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt=\int_{t\in]0,1]} t^{x-1}e^{-t}dt$?

On a $t^{x-1}e^{-t}\underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}=\dfrac{1}{t^{1-x}}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ converge car $1-x<1$ (puisque $x>0$).

On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge.

• Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt=\int_{t\in[1,+\infty[} t^{x-1}e^{-t}dt$?

On a $t^{x-1}e^{-t}\underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. (En effet : $t^2\times t^{x-1}e^{-t}=t^{x+1}e^{-t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ par croissance comparée).

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge. On en déduit que $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge bien pour $x>0$!

2. Soit $x>0$. $\quad\Gamma(x+1)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x}e^{-t}dt$.

On a envie d'effectuer une IPP pour "abaisser la puissance de t".
Mais on ne peut pas la poser dans une intégrale généralisée !
On fixe donc deux réels $0<a<b$ et on écrit :

$$\int_a^b \underbrace{t^x}_{u(t)}\underbrace{e^{-t}}_{v'(t)}dt=\Big[-t^xe^{-t}\Big]_a^b+\int_a^b xt^{x-1}e^{-t}dt=a^xe^{-a}-b^xe^{-b}+x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}dt.$$

On passe ensuite à la limite quand $a\to 0$ et $b\to+\infty$.
Les intégrales convergent d'après la question 1.
Puisque $a^xe^{-a}\xrightarrow[a\to 0]{}0$ et $b^xe^{-b}\xrightarrow[b\to+\infty]{}0$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} t^xe^{-t}dt=0+x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt\quad\text{c'est à dire}\quad\Gamma(x+1)=x\times\Gamma(x).$$

S P O I L E R . . .

La fonction Γ définie dans cet exercice sera étudiée davantage en deuxième année...

6.2 Changement de variable dans une intégrale généralisée

Comme pour l'IPP, on pourrait effectuer un changement de variable d'abord sur un segment, puis passer à la limite... Mais le programme nous fournit un résultat pour l'appliquer directement dans une intégrale généralisée :

Théorème 8 (Changement de variable dans une intégrale généralisée)

Soit $\varphi \in C^1(]a,b[,\mathbb{R})$, <u>strictement monotone</u>.
Notons $\alpha = \lim\limits_{t\to a^+} \varphi(t)$ et $\beta = \lim\limits_{t\to b^-} \varphi(t)$, de sorte que φ réalise une bijection de $]a,b[$ dans $]\alpha,\beta[$.
Soit f une fonction continue sur $]\alpha,\beta[$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(u)du$ sont de même nature,
et en cas de convergence, elles sont égales.

Remarques 13

- Comme d'habitude, les changements de variables non-affines seront indiqués dans les énoncés.
- Ce résultat fonctionne également avec les intervalles $[a,b[$ (et donc $[\alpha,\beta[$) ou $]a,b]$ (et donc $]\alpha,\beta]$).

Méthode : Effectuer un changement de variable dans une intégrale généralisée

On souhaite étudier l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ à l'aide d'un changement de variable $u = \varphi(t)$:

$\boxed{0}$ Annoncer que φ est C^1 et strictement croissante/décroissante sur $]a,b[$.

$\boxed{1}$ Poser $u = \varphi(t)$ et $du = \varphi'(t)\, dt$ $\Big($ pour s'en souvenir : $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{d\varphi(t)}{dt} = \varphi'(t)$ $\Big)$

$\boxed{2}$ Ré-exprimer $g(t)dt$ <u>uniquement en fonction de u et du</u> : $g(t)dt = f(u)du$.

$\boxed{3}$ Changer les bornes : quand $t \to a$, $u = \varphi(t) \to \alpha$, quand $t \to b$, $u = \varphi(t) \to \beta$.

On obtient finalement : $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(u)du$.
Cette nouvelle intégrale est de même nature que la première, et lui est égale en cas de convergence !

Exercice 11

Déterminer la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt$ à l'aide du changement de variable $u = \ln(t)$.

La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est de classe C^1 et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

On pose $u = \ln(t)$ et donc $du = \dfrac{1}{t}\, dt$.

Ainsi : $\dfrac{1}{t\ln(t)^\beta}dt = \dfrac{1}{u^\beta}du$.

Enfin : quand $t = 2$, on a $u = \ln(2)$, quand $t \to +\infty$, on a $u = \ln(t) \to +\infty$.

Ainsi, les intégrales $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt$ et $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{1}{u^\beta}du$ sont de même nature.

Conclusion : l'intégrale converge si et seulement si $\beta > 1$.

6.3 Bonus : comparaison série-intégrale

On a déjà évoqué la méthode de comparaison série-intégrale, qui pouvait permettre entre autres choses de déterminer la nature d'une série (cf. Chapitre #20 pour le détail de la méthode).
Celle-ci permet à présent de faire le lien entre nature d'une série et nature d'une intégrale.

Le résultat suivant n'est **pas au programme** : il ne peut donc pas être invoqué dans un exercice !
En revanche, il peut être utile de savoir le re-démontrer dans un cas particulier.

Proposition 10 (Comparaison série-intégrale)

Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$.

Alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature (convergente ou divergente).

Dessin :

Preuve :

Puisque f est décroissante, pour tout $n \geqslant 1$: $\forall t \in [n, n+1], \quad f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n)$

En intégrant pour $t \in [n, n+1]$: $\quad f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n)$

En sommant pour $n = 1, \ldots, N-1$: $\quad \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$

C'est à dire, en notant $S_N = \sum_{n=1}^{N} f(n)$, $\boxed{S_N - f(1) \leqslant \int_1^N f(n)dt \leqslant S_{N-1}}$. (valable pour tout $N \geqslant 1$)

• Si $(S_N)_{N\geqslant 1}$ converge : dans ce cas elle est majorée par un réel $M > 0$, et l'inégalité montre que

$$\forall N \geqslant 1, \quad \int_1^N f(t)dt \leqslant M.$$

Pour tout $x \geqslant 1$, en prenant un entier $N \geqslant x$ (par ex. $N = \lfloor x \rfloor + 1$), on a $\int_1^x f(t)dt \leqslant \int_1^N f(t)dt \leqslant M$.

Ainsi $f \geqslant 0$ et la fonction $x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ est majorée, donc (Théorème 3) $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge !

• Si $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors l'inégalité montre que

$$\forall N \geqslant 1, \quad S_n \leqslant f(1) + \int_1^N f(t)dt \leqslant f(1) + \int_1^{+\infty} f(t)dt.$$

Ainsi la sére $(S_N)_{N\geqslant 1}$ est à termes positifs et majorée (par $M = f(1) + \int_1^{+\infty} f(t)dt$), donc converge !

□

✎ Exercice 12

On a vu dans l'exercice précédent que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2}dt$ était convergente.

En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Pour tout $n \geqslant 3$, $\quad \dfrac{1}{(n)\ln(n)^2} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t\ln(t)^2}dt.$

En sommant pour $n = 3, \ldots, N$: $\quad \displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n(\ln(n)^2} \leqslant \sum_{n=3}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t\ln(t)^2}dt = \int_2^N \frac{1}{t(\ln(t))^2}dt.$

Ainsi : $\quad \forall N \geqslant 3, \ \displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n(\ln(n))^2} \leqslant M = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2}dt.$

La série à termes positifs $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ est majorée, donc elle converge !

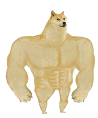
À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Reconnaître si l'on intègre sur l'intervalle $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$.
- Déterminer la nature et/ou la valeur d'une intégrale avec un calcul de limite.
- Connaître la nature des intégrales usuelles (Riemann et exponentielles)
- Déterminer la nature d'une intégrale avec un théorème de comparaison (avec une inégalité, un "petit o" ou un équivalent)
- Exploiter, au besoin, la convergence absolue.

Pour suivre

- Reconnaître le cas d'une fonction "prolongeable par continuité".
- Exploiter la parité/imparité.
- Utiliser le critère de convergence "par majoration" (Théorème 3)
- Effectuer une IPP sur un segment puis passer à la limite.
- Effectuer un changement de variable dans une intégrale généralisée.



Pour les ambitieux

- Utiliser un changement de variable non-affine sans indication.
- Mener à bien une comparaison série-intégrale spontanément.