21

Espaces probabilisés généraux - Corrigé

Exercice 1 (Lancers de pièce)

$A = A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_4}$

$B = \bigcap_{i=10}^{+\infty} \overline{A_i}$

$C = \bigcup_{i=10}^{+\infty} A_i$ ou encore $C = \overline{B} = \overline{\bigcap_{i=10}^{+\infty} \overline{A_i}}$

$D = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{+\infty} A_i \right)$.

Exercice 2 (Lancers de dé)

1. • Bien-sûr, $P(A_n) = \frac{1}{6}$

• $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, donc $\overline{B_n} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. Puisque les $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellements indépendants,

$$P(\overline{B}_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Ainsi $P(B_n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

• $C_n = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$. A nouveau, par indépendance,

$$P(C_n) = P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}) \times \ldots \times P(\overline{A_{n-1}}) \times P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6} = \frac{5^{n-1}}{6^n}.$$

2. $\overline{D} =$ "Ne jamais obtenir de 6 " $= \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$. Ainsi (toujours par indépendance) :

$$P(\overline{D}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0.$$

Ainsi $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1$: D est donc un évènement presque-sûr.
Autrement dit, on finira presque-sûrement par obtenir un 6.

3. $D = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$ (au moins l'un des B_n est réalisé).
On note qu'il s'agit d'une union croissante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n \subset B_{n+1}$ (si B_n est réalisé, B_{n+1} est réalisé).
Ainsi $P(D) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = 1.$

4. $D = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n$ (l'un des C_n est réalisé).
Cette fois, les évènements $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles, on a donc :

$$P(D) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

On reconnait bien-sûr la somme d'une série géométrique convergente, donc :

$$P(D) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{1}{6} \times 6 = 1.$$

Exercice 3 (Un jeu de hasard)

A chaque lancer (c'est à dire pour tout $k \geqslant 0$)

- La probabilité d'obtenir un multiple de 3 est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, c'est à dire $P(A_{2k+1}) = \frac{1}{3}$.
- La probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, c'est à dire $P(A_{2k+2}) = \frac{1}{2}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons F_{2n+1} l'évènement "Fred gagne le jeu exactement au $(2n+1)$-ième lancer".
Il peut s'écrire : $\quad F_{2n+1} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{2n}} \cap A_{2n+1}$.
Par indépendance mutuelle, on a

$$P(F_{2n+1}) = \underbrace{P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2})}_{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}} \times \ldots \times \underbrace{P(\overline{A_{2n-1}}) \times P(\overline{A_{2n}})}_{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}} \times \underbrace{P(A_{2n+1})}_{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons J_{2n+2} l'évènement "Jamy gagne le jeu exactement au $(2n+2)$-ième lancer".
Il peut s'écrire : $\quad J_{2n+2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{2n+1}} \cap A_{2n+2}$.
Par indépendance mutuelle, on a

$$P(J_{2n+2}) = \underbrace{P(\overline{A_1})}_{\frac{2}{3}} \times \underbrace{P(\overline{A_2}) \times P(\overline{A_3})}_{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}} \times \ldots \times \underbrace{P(\overline{A_{2n}}) \times P(\overline{A_{2n+1}})}_{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}} \times \underbrace{P(A_{2n+2})}_{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}.$$

3.(a) Notons F l'évènement "Fred gagne le jeu". Il s'écrit : $F = \bigcup_{n=0}^{+\infty} F_{2n+1}$.
Ces évènements sont deux à deux incompatibles, donc :

$$P(F) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} F_{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(F_{2n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

(b) Notons J l'évènement "Jamy gagne le jeu". Il s'écrit : $J = \bigcup_{n=0}^{+\infty} J_{2n+2}$.
Ces évènements sont deux à deux incompatibles, donc :

$$P(J) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} J_{2n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(J_{2n+2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Fred et Jamy ont donc la même chance de gagner !

(c) Enfin, en notant E l'évènement "Le jeu finit par s'arrêter", on a $E = F \cup J$.
Cette union étant disjointe (évènements incompatibles) : $P(E) = P(F) + P(J) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
Autrement dit, presque-sûrement, le jeu finira bien par s'arrêter.

Exercice 4 (Le troisième six)

1. (a) On considère une suite de n lancers de dé. Le dé étant équilibré, on est en situation d'équiprobabilité.
On utilise donc la formule de Cardan : $P(A_n) = \dfrac{\text{Nombre de résultats où le 3ème six apparaît au } n\text{-ème lancer}}{\text{Nombre de résultats possibles pour } n \text{ lancers}}$
Le nombre total de résultats possibles est évidemment 6^n.
Pour construire un résultat où le 3-ème six apparaît au n-ème lancer :

- On choisit la position des deux premiers six, parmi $n-1$ positions disponibles : $\binom{n-1}{2}$ possibilités
- Le dernier lancer donne forcément 6 : 1 possibilité.
- Il reste à choisir la valeur obtenue pour les $n-3$ lancers où on n'obtient pas 6 : 5^{n-3} possibilités.

Ainsi on a bien $P(A_n) = \binom{n-1}{2} \dfrac{5^{n-3}}{6^n}$.

(b) Rappelons que pour tout $n \geqslant 3$, $\quad \binom{n-1}{2} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Ainsi (avec un changement de variable pour ramener l'indice de départ à 2) :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(n-1)(n-2)}{2} \times \frac{5^{n-3}}{6^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\frac{5^{n-2}}{6^{n+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6^3}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}.$$

On reconnait la somme d'une série géométrique dérivée d'ordre deux :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} P(A_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6^3} \times \frac{2}{(1-\frac{5}{6})^3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6^3} \times 2 \times 6^3 = 1.$$

(c) L'évènement $\overline{C}$ est "Le 3ème six apparaît au moins une fois", c'est à dire $\overline{C} = \bigcup_{n=3}^{+\infty} A_n$.

Puisque ces évènements sont deux à deux incompatibles, on a

$$P(\overline{C}) = P\left(\bigcup_{n=3}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=3}^{+\infty} P(A_n) = 1.$$

Ainsi $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 0$. Autrement dit l'évènement C est négligeable ou "presque impossible".
Presque-sûrement, on finira par obtenir le 3ème six.

2. (a) $B_n = \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \ldots \cap \overline{A_n} = \bigcap_{k=3}^{n} \overline{A_k} = \overline{\bigcup_{k=3}^{n} A_k}$.

(b) A nouveau, les évènements A_k étant deux à deux incompatibles,

$$P(B_n) = P\left(\overline{\bigcup_{k=3}^{n} A_k}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=3}^{n} A_k\right) = 1 - \sum_{k=3}^{n} P(A_k).$$

(c) $C = \bigcap_{n=3}^{+\infty} B_n$ (tous les B_n sont réalisés).
Il s'agit d'une intersection décroissante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset B_n$ (si B_{n+1} est réalisé, B_n est réalisé).
Ainsi :

$$P(C) = P\left(\bigcap_{n=3}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \sum_{k=3}^{n} P(A_k)\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=3}^{n} P(A_k) = 1 - \sum_{k=3}^{+\infty} P(A_k).$$

On a déjà vu en 1.(b) que $\sum_{k=3}^{+\infty} P(A_k) = 1$. On retrouve donc bien le fait que $P(C) = 0$.

Exercice 5 (Procédure de Von Neumann)

1. (a) Si l'on effectue deux lancers de pièces d'affilée,
- La probabilité d'obtenir deux fois Face est $p \times p = p^2$.
- La probabilité d'obtenir deux fois Pile est $(1-p) \times (1-p) = (1-p)^2$.

Ainsi, la probabilité d'obtenir 2 fois le même résultat est : $p^2 + (1-p)^2$.
La probabilité d'obtenir 2 fois résultats différents est donc

$$1 - (p^2 + (1-p)^2) = 1 - (p^2 + 1 + p^2 - 2p) = 2p - 2p^2 = 2p(1-p).$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'évènement A_k correspond à obtenir $k-1$ fois d'affilé le même résultat (sur deux lancers de pièce), puis obtenir deux résultats différents (sur deux lancers de pièce).
Les lancers étant tous indépendants, on a effectivement :

$$P(A_k) = \left(p^2 + (1-p)^2\right)^{k-1} \times 2p(1-p)$$

(b) C'est un calcul qui met en jeu une série géométrique.
En notant $x = p^2 + (1-p)^2$, notons que l'on a bien $x \in]-1,1[$ et donc la série $\sum x^n$ est convergente.
$\Big($ En effet, une simple étude de fonction polynomiale montre que : $\forall p \in]0,1[,\ \ p^2 + (1-p)^2 \in]0,1[.$ $\Big)$

Par suite :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = 2p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}\left(p^2+(1-p)^2\right)^{k-1} = 2p(1-p)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(p^2+(1-p)^2\right)^{n} = 2p(1-p)\times\frac{1}{1-(p^2+(1-p)^2)}$$

On a déjà calculé $1-(p^2+(1-p)^2) = 2p(1-p)$, d'où finalement $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = 1$.

L'évènement A peut s'écrire $A = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ (l'un des A_k) est réalisé.

Puisque ces évènements sont deux à deux incompatibles, $P(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = 1$.

Ainsi, l'évènement A est presque-sûr : presque-sûrement, le jeu finit par s'arrêter.

2. (a) Notons que $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ n'est pas tout à fait un système complet d'évènements ! (car il est possible que le jeu ne s'arrête jamais et donc aucun des A_k n'est réalisé). Ajoutons l'évènement $\overline{A}$ ("le jeu ne s'arrête pas") à cette collection d'évènements. Il est alors clair que $(\overline{A}, A_1, A_2, A_3, \ldots)$ est un système complet d'évènements ! (Un et un seul de ces évènements est toujours réalisé).

On applique alors la formule des probabilités totales :

$$P(S) = \underbrace{P(\overline{A}\cap S)}_{=0 \text{ car } P(\overline{A})=0} + \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k\cap S) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k\cap S) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k)P_{A_k}(S).$$

(b) La probabilité $P_{A_k}(S)$ correspond à la probabilité, sachant que le jeu s'arrête à l'étape k, que le joueur J1 gagne. Autrement dit, sachant que l'on obtient deux résultats différents sur deux lancers de pièces, quelle est la probabilité que l'on obtienne "Pile puis Face" ?

Sur deux lancers de pièce successifs, on peut calculer :
- La probabilité de l'évènement B_1 = "Obtenir Pile puis Face" : $P(B_1) = (1-p)p$.
- La probabilité de l'évènement B_2 = "Obtenir Face puis Pile" : $P(B_2) = p(1-p)$.
- La probabilité de B_3 = "Obtenir deux résultats différents" : $P(B_3) = (1-p)p + p(1-p) = 2(1-p)p$.

Ainsi, la probabilité d'obtenir "Pile puis Face" sachant que l'on a obtenu deux résultats différents est :

$$P_{B_3}(B_1) = \frac{P(B_1\cap B_3)}{P(B_3)} = \frac{P(B_1)}{P(B_3)} = \frac{(1-p)p}{2(1-p)p} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, on a bien pour tout $k \geqslant 1$, $P_{A_k}(S) = \dfrac{1}{2}$.
Pour finir :

$$P(S) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k)P_{A_k}(S) = \sum_{k=1}^{+\infty}(P(A_k)\times\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la probabilité que le joueur J1 gagne est $\dfrac{1}{2}$. Bien-sûr (puisque le jeu finit presque-sûrement par s'arrêter), la probabilité que le joueur J2 gagne est alors $1-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$: ce jeu est donc équilibré !