0

Préparation pour la rentrée en ECG
Mathématiques approfondies - Corrigé

Exercice 1

(a) Faux, (b) Vrai, (c) Faux, (d) Faux, (e) Faux, (f) Vrai

Exercice 2

1. $P(x) = 4x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 3x - 2$, 2. $Q(x) = -6x^5 + 9x^4 + 2x^2 - x - 3$,
3. $R(x) = -6x^3 - 23x^2 - 16x - 3$.

Exercice 3

1. • Le plus petit multiple commun de 6 et de 4 est 12. Ainsi :

$$A = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{2}{12} - \frac{3}{12}}{2} = \frac{-\frac{1}{12}}{\frac{2}{1}} = -\frac{1}{12} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{24}$$

• Le plus petit multiple commun de 5 et de 15 est 15. Ainsi :

$$B = \frac{\frac{1}{5} + \frac{4}{15}}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{\frac{3}{15} + \frac{4}{15}}{\frac{5}{5} + \frac{2}{5}} = \frac{\frac{7}{15}}{\frac{7}{5}} = \frac{7}{15} \times \frac{5}{7} = \frac{1}{3}$$

• On a : $C = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}} = \dfrac{2 \times \sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \times \sqrt{\pi}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

2. • On a : $f(x) = \dfrac{4x^2}{1 - \frac{2-x}{2+x}} = \dfrac{4x^2}{\frac{2+x}{2+x} - \frac{2-x}{2+x}} = \dfrac{4x^2}{\frac{(2+x)-(2-x)}{2+x}} = \dfrac{\frac{4x^2}{1}}{\frac{2x}{2+x}} = \dfrac{4x^2}{1} \times \dfrac{2+x}{2x}.$

Finalement : $f(x) = 2x \times (2 + x)$.

• On a : $g(x) = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{-(x-1)} = \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x}{x-1} = 0.$

• On a : $h(x) = \dfrac{6x+4}{4-x^2} - \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{6x+4}{(2-x)(2+x)} - \dfrac{x}{2+x}.$

Ainsi : $h(x) = \dfrac{6x+4}{(2-x)(2+x)} - \dfrac{x(2-x)}{(2+x)(2-x)} = \dfrac{(6x+4) - x(2-x)}{(2-x)(2+x)}.$

Finalement : $h(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{(2-x)(2+x)} = \dfrac{(x+2)^2}{(2-x)(2+x)} = \dfrac{x+2}{2-x}.$

• On a : $u(x) = \dfrac{e^{2x} + 2e^x + 1}{1 + e^{-x}} = \dfrac{(e^x)^2 + 2e^x + 1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \dfrac{(e^x+1)^2}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \dfrac{\frac{(e^x+1)^2}{1}}{\frac{e^x+1}{e^x}}.$

Ainsi : $u(x) = \dfrac{(e^x+1)^2}{1} \times \dfrac{e^x}{e^x+1} = (e^x+1)e^x.$

• On a : $v(x) = \ln\left(\dfrac{e^{2x} + e^x}{e^{-2x} + e^{-x}}\right) = \ln\left(\dfrac{(e^x)^2 + e^x}{\frac{1}{e^{2x}} + \frac{1}{e^x}}\right) = \ln\left(\dfrac{e^x(e^x+1)}{\frac{1}{(e^x)^2} + \frac{1}{e^x}}\right).$

Ainsi : $v(x) = \ln\left(\dfrac{\frac{e^x(e^x+1)}{1}}{\frac{1+e^x}{(e^x)^2}}\right) = \ln\left(\dfrac{e^x(e^x+1)}{1} \times \dfrac{(e^x)^2}{1+e^x}\right).$

Finalement : $v(x) = \ln\left((e^x)^3\right) = \ln(e^{3x}) = 3x.$

Exercice 4

- On a : $A = 2^{-1} - 3^{-2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{9}{18} - \dfrac{2}{18} = \dfrac{7}{18}$.
- On a : $B = \dfrac{3}{2^3} + \dfrac{2^{-2}}{4} = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{4} \times 2^{-2} = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{6}{16} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{7}{16}$.
- On a : $C = \dfrac{\frac{1}{2^n}}{4^n} = \dfrac{\frac{1}{2^n}}{\frac{4^n}{1}} = \dfrac{1}{2^n} \times \dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1}{2^n \times 4^n} = \dfrac{1}{(2 \times 4)^n} = \dfrac{1}{8^n} = \dfrac{1}{(2^3)^n} = \dfrac{1}{2^{3n}}$.
- On a : $D = \dfrac{1}{\frac{2^n}{4^n}} = \dfrac{4^n}{2^n} = \dfrac{(2^2)^n}{2^n} = \dfrac{2^{2n}}{2^n} = 2^{2n-n} = 2^n$.
- On a : $E = \dfrac{(-1)^n}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{\frac{(-1)^n}{1}}{\frac{(-1)^n}{2^n}} = \dfrac{(-1)^n}{1} \times \dfrac{2^n}{(-1)^n} = 2^n$.
- On a : $F = (2^n + 2^{n-1}) \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 2^{n-1} \times (2+1) \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 2^{n-1} \times 3 \times \dfrac{1}{3^n}$.

  Ainsi : $F = 2^{n-1} \times \dfrac{1}{3^{n-1}} = \dfrac{2^{n-1}}{3^{n-1}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.
- On a : $G = \dfrac{x^{2n} - 2x^{4n} + x^{6n}}{x^{2n} - 1} = \dfrac{x^{2n} - 2(x^{2n})^2 + (x^{2n})^3}{x^{2n} - 1}$.

  On peut mettre x^{2n} en facteur : $G = \dfrac{x^{2n} \times \left(1 - 2x^{2n} + (x^{2n})^2\right)}{x^{2n} - 1}$.

  On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$:

$$G = \frac{x^{2n} \times (1 - x^{2n})^2}{x^{2n} - 1} = \frac{x^{2n} \times \left(-(x^{2n} - 1)\right)^2}{x^{2n} - 1} = \frac{x^{2n} \times (-1)^2 \times (x^{2n} - 1)^2}{x^{2n} - 1}$$

  Finalement : $G = x^{2n} \times (x^{2n} - 1)$.
- En reconnaissant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, on a :

$$H = \frac{x^{2n} - 1}{x^n - 1} = \frac{(x^n)^2 - 1^2}{x^n - 1} = \frac{(x^n - 1)(x^n + 1)}{x^n - 1} = x^n + 1$$

Exercice 5

- $\ln(4) = \ln(2 \times 2) = 2\ln(2)$.
- $\ln(8e) = \ln(2^3) + \ln(e) = 3\ln(2) + 1$.
- $\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(2)$.
- $\ln(1/2) + \ln(2/3) + \ln(3/4) + \ln(4/5) + \ln(5/6)$
  $= \ln(1) - \ln(2) + \ln(2) - \ln(3) + \ln(4) - \ln(4) + \ln(5) - \ln(6) = -\ln(6)$.

Exercice 6

- $A = \sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.
- $B = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.
- $C = \sqrt{3} \times \sqrt{6} \times \sqrt{8} = \sqrt{3 \times 6 \times 8} = \sqrt{3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
- $D = \dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{21}} = \dfrac{\sqrt{7 \times 4}}{\sqrt{7 \times 3}} = \dfrac{\sqrt{7} \times \sqrt{4}}{\sqrt{7} \times \sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

  On préfère en général ne pas avoir de racine au dénominateur : $D = \dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 7

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition, $\sqrt{x^2}$ est l'unique réel positif dont le carré est x^2.
Or on a bien-sûr $|x| \geqslant 0$ et aussi $|x|^2 = x$ (puisque $|x| = x$ ou $-x$).
$|x|$ est ainsi un réel positif dont le carré est x^2. Conclusion : $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exercice 8

- L'ensemble de validité de (A) est $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, puisque les dénominateurs doivent être non nuls.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.
On a : $(A) \iff \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x}{x+1} \iff (x+1) \times (x+1) = x \times x \iff (x+1)^2 = x^2$
Ainsi : $(A) \iff x^2 + 2x + 1 = x^2 \iff 2x = -1 \iff x = -\dfrac{1}{2}$
Comme $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, l'équation (A) admet une unique solution : $-\frac{1}{2}$.

- L'ensemble de validité de (B) est $\mathbb{R}_+^*$, puisqu'on doit avoir $x > 0$ et $x + 1 > 0$ et $x + 2 > 0$ pour que les logarithmes soient définis.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme ln est bijective sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$(B) \iff \ln\big(x \times (x+1)\big) = \ln(x+2) \iff x \times (x+1) = x + 2$$

Ainsi : $(B) \iff x^2 + x = x + 2 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$
Comme $\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^*$ et $-\sqrt{2} \notin \mathbb{R}_+^*$, l'équation (B) admet une unique solution : $\sqrt{2}$.

- L'ensemble de validité de (C) est $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme ln est bijective sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$(C) \iff 2e^{-x} = e^{-2x} \iff \ln(2e^{-x}) = \ln(e^{-2x})$$

Avec les propriétés du logarithme, on obtient :

$$(C) \iff \ln(2) + \ln(e^{-x}) = \ln(e^{-2x}) \iff \ln(2) - x = -2x$$

Finalement : $(C) \iff -x + 2x = -\ln(2) \iff x = -\ln(2)$.
Ainsi l'équation (C) admet une unique solution : $-\ln(2)$.

- Le domaine de validité de (D) est $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(D) \iff (x+2)^2 = 1 \iff x + 2 = 1 \text{ ou } x + 2 = -1 \iff x = -1 \text{ ou } x = -3$$

Ainsi l'équation (D) admet deux solutions : -1 et -3.
(On pouvait aussi développer, passer tout du même côté et factoriser, ou bien utiliser une identité remarquable, mais c'est plus long.)

- L'équation (E) a un sens si et seulement si $x > 0$ et $\ln(x) \geqslant 0$, c'est-à -dire lorsque $x \geqslant 1$.

Soit $x \in [1, +\infty[$. Comme $t \mapsto t^2$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$(E) \iff \sqrt{\ln(x)} = \big(\ln(x)\big)^2 \iff \big(\sqrt{\ln(x)}\,\big)^2 = \Big(\big(\ln(x)\big)^2\Big)^2 \iff \ln(x) = \big(\ln(x)\big)^4$$

On ramène tout à gauche et on factorise :

$$(E) \iff \ln(x) - \big(\ln(x)\big)^4 = 0 \iff \ln(x)\Big(1 - \big(\ln(x)\big)^3\Big) = 0$$

Comme un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, on obtient :

$$(E) \iff \ln(x) = 0 \text{ ou } 1 - \big(\ln(x)\big)^3 = 0$$

Autrement dit : $(E) \iff x = 1$ ou $\big(\ln(x)\big)^3 = 1^3$.
Comme la fonction $t \mapsto t^3$ est bijective sur $\mathbb{R}$, on a finalement :

$$(E) \iff x = 1 \text{ ou } \ln(x) = 1 \iff x = 1 \text{ ou } x = e$$

On vérifie que $1 \in [1, +\infty[$ et $e \in [1, +\infty[$. Ainsi l'équation (E) admet deux solutions : 1 et e.

Exercice 9

- Le domaine de validité de (A) est $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $t = x^2$:

$$(A) \iff -2x^4 + 3x^2 + 2 = 0 \iff -2\big(x^2\big)^2 + 3x^2 + 2 = 0 \iff -2t^2 + 3t + 2 = 0$$

Discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times 2 = 9 + 16 = 25 = 5^2 > 0$.
L'équation $-2t^2 + 3t + 2 = 0$ admet donc deux solutions :

$$t_1 = \frac{-3-5}{2 \times (-2)} = \frac{-8}{-4} = 2 \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-3+5}{2 \times (-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

On reprend donc les équivalences précédentes :

$$(A) \iff -2t^2 + 3t + 2 = 0 \iff \left(t = 2 \text{ ou } t = -\frac{1}{2}\right)$$

c'est à dire (puisque $t = x^2$) : $(A) \iff x^2 = 2$ ou $\underbrace{x^2 = -\frac{1}{2}}_{\text{impossible}} \iff x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$.

Ainsi l'équation (A) admet deux solutions : $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

- L'équation (B) a un sens si et seulement si $x > 0$ et $x + 1 > 0$, c'est à dire lorsque $x > 0$ (car dans ce cas on a aussi $x + 1 > 0$). Le domaine de validité est donc $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction ln est bijective sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(B) \iff \ln(x)+\ln(x+1) = 0 \iff \ln\big(x(x+1)\big) = \ln(1) \iff x(x+1) = 1 \iff x^2+x-1 = 0.$$

Après calcul, l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Pour conclure, il reste à voir si ces solutions sont bien dans $\mathbb{R}_+^*$.
Or $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$, donc on a $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$. On conserve donc seulement x_2 !
On en déduit que l'équation (B) admet une unique solution : $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

- Le domaine de validité de (C) est $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $e^x \neq 0$, on peut multiplier par e^x et on a :

$$(C) \iff 1 - 2e^x = \frac{e^{-x}}{3} \iff e^x \times (1 - 2e^x) = e^x \times \frac{e^{-x}}{3} \iff e^x - 2(e^x)^2 = \frac{1}{3}$$

En posant $t = e^x$, on obtient $(C) \iff -2t^2 + t - \dfrac{1}{3} = 0$.
Discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times \big(-\frac{1}{3}\big) = 1 - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3} < 0$.
On en déduit que l'équation $-2t^2 + t - \frac{1}{3} = 0$ n'admet pas de solution.
Ainsi l'équation (C) n'admet pas de solution !

- Le domaine de validité de (D) est $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$(D) \iff x - \sqrt{x} = \frac{3}{2} \iff x - \frac{3}{2} = \sqrt{x}$$

Si $x < \frac{3}{2}$, alors l'égalité $x - \frac{3}{2} = \sqrt{x}$ ne peut pas être vérifiée puisqu'on doit avoir $\sqrt{x} \geqslant 0$.
On suppose donc pour la suite que $x \in [\frac{3}{2}, +\infty[$.
Comme la fonction $t \mapsto t^2$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$(D) \iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 \iff x^2 - 3x + \frac{9}{4} = x \iff x^2 - 4x + \frac{9}{4} = 0.$$

Après calcul, l'équation $x^2 - 4x + \frac{9}{4} = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = 2 + \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Pour conclure, il reste à voir si ces solutions sont dans $[\frac{3}{2}, +\infty[$.
Or $\sqrt{7} > \sqrt{4} = 2$, donc $\frac{\sqrt{7}}{2} > 1$.
Ainsi : $x_1 = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2} < 2 - 1 = 1 < \frac{3}{2}$ et : $x_2 = 2 + \frac{\sqrt{7}}{2} > 2 + 1 = 3 \geqslant \frac{3}{2}$.
On en déduit que l'équation (D) admet une unique solution : $2 + \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Exercice 10

1. On étudie le signe de la différence :

$$\frac{2}{7} - \frac{3}{8} = \frac{2 \times 8}{7 \times 8} - \frac{3 \times 7}{8 \times 7} = \frac{16 - 21}{56} = -\frac{5}{56} \leqslant 0 \quad \text{d'où : } \frac{2}{7} \leqslant \frac{3}{8}$$

2. On calcule : $\dfrac{1}{\ln(2)} - \dfrac{2}{\ln(3)} = \dfrac{\ln(3) - 2\ln(2)}{\ln(2) \times \ln(3)} = \dfrac{\ln(3) - \ln(2^2)}{\ln(2) \times \ln(3)} = \dfrac{\ln(3) - \ln(4)}{\ln(2) \times \ln(3)}$.
Comme $2 > 1$ et $3 > 1$, on a $\ln(2) > 0$ et $\ln(3) > 0$.
De plus comme ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a : $\ln(3) < \ln(4)$.
On en déduit que : $\dfrac{1}{\ln(2)} - \dfrac{2}{\ln(3)} = \dfrac{\ln(3) - \ln(4)}{\ln(2)\ln(3)} < 0$, d'où : $\dfrac{1}{\ln(2)} < \dfrac{2}{\ln(3)}$.

3. On a : $25 < 29 < 36$.
Par stricte croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$, on a : $\sqrt{25} < \sqrt{29} < \sqrt{36}$.
Ainsi : $5 < \sqrt{29} < 6$.

Exercice 11

1. On étudie le signe de la différence. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(1 + x)^2 - 4x = (1 + 2x + x^2) - 4x = 1 - 2x + x^2 = (1 - x)^2 \geqslant 0$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, (1 + x)^2 \geqslant 4x$.

2. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 \leqslant 2 + \cos(x) \leqslant 3$.
De même : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < 1 \leqslant 2 + \sin(x) \leqslant 3$.
Par inverse de nombres strictement positifs : $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{1} \geqslant \dfrac{1}{2 + \sin(x)} \geqslant \dfrac{1}{3}$.
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 \leqslant 2 + \cos(x) \leqslant 3$ et $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2 + \sin(x)} \leqslant 1$.
En multipliant ces inégalités de nombres positifs, on obtient le résultat demandé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{1}{3} \leqslant \frac{2 + \cos(x)}{2 + \sin(x)} \leqslant 3$$

3. On étudie les variations de la fonction $f : x \mapsto 2\ln(x) - x$ pour en déduire son signe.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{2}{x} - 1 = \dfrac{2-x}{x}$.
Ainsi $f'(x)$ est du signe de $2-x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$2(\ln(2)-1)$	$\searrow$	

$$\begin{aligned} f(2) &= 2\ln(2) - 2 \\ &= 2(\ln(2)-1) \end{aligned}$$

Or $\ln(2) \approx 0{,}7$ donc : $2(\ln(2)-1) < 0$.
On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \leqslant 2(\ln(2)-2) < 0$.
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2\ln(x) - x < 0$, et finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2\ln(x) < x$.
(Notons qu'il n'a pas été nécessaire de calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$!)

Exercice 12

• L'ensemble de validité de (A) est $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, puisque les dénominateurs doivent être non nuls.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$. Il ne faut surtout pas multiplier par x et par $x+1$ dans l'inégalité, puisque les signes de x et de $x+1$ ne sont pas connus ! La bonne méthode consiste à tout mettre à gauche puis à réduire au même dénominateur :

$$(A) \iff \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} \leqslant 0 \iff \frac{(x+1)\times(x+1) - x \times x}{x \times (x+1)} \leqslant 0$$

Ainsi : $(A) \iff \dfrac{(x+1)^2 - x^2}{x(x+1)} \leqslant 0 \iff \dfrac{2x+1}{x(x+1)} \leqslant 0.$
On s'aide d'un tableau de signes, construit pour x dans l'ensemble de validité $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
x		$-$	$\|\|$	$-$	$\|$	$-$	$\|\|$	$+$	
$x+1$		$-$	$\|\|$	$+$	$\|$	$+$	$\|\|$	$+$	
$2x+1$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$\frac{2x+1}{x(x+1)}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Ainsi : $(A) \iff \frac{2x+1}{x(x+1)} \leqslant 0 \iff x < -1$ ou $-\frac{1}{2} \leqslant x < 0$.
L'inéquation (A) admet donc pour ensemble de solutions : $]-\infty, -1[\cup [-\frac{1}{2}, 0[$.

• L'inéquation (B) a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $t^2 \leqslant 1 \iff -1 \leqslant t \leqslant 1$, on a :

$$(B) \iff (x+2)^2 \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x+2 \leqslant 1 \iff -3 \leqslant x \leqslant -1$$

Ainsi l'inéquation (B) admet pour ensemble de solutions : $[-3, -1]$.

• L'inéquation (C) a un sens si et seulement si $2x - 1 \geqslant 0$, c'est-à -dire si et seulement si $x \geqslant \frac{1}{2}$.
Soit $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$. Comme $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$(C) \iff \sqrt{2x-1} > x \iff \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 > x^2 \iff 2x - 1 > x^2 \iff 0 > x^2 - 2x + 1$$

En reconnaissant une identité remarquable, on obtient : $(C) \iff 0 > (x-1)^2$.
Or un carré est toujours positif, donc cette dernière inégalité n'est jamais vérifiée !
Ainsi l'inéquation (C) n'admet pas de solution.

• L'inéquation (D) a un sens si et seulement si $x > 0$ et $2x > 0$ et $3x > 0$, c'est-à -dire lorsque $x > 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$(D) \iff \ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x) \leqslant 3 \iff \ln\big(x\times 2x\times 4x\big) \leqslant 3 \iff \ln(8x^3) \leqslant 3$$

Comme la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$(D) \iff e^{\ln(8x^3)} \leqslant e^3 \iff 8x^3 \leqslant e^3 \iff x^3 \leqslant \frac{e^3}{2^3}$$

Comme la fonction $t \mapsto t^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il vient enfin :

$$(D) \iff x^3 \leqslant \left(\frac{e}{2}\right)^3 \iff x \leqslant \frac{e}{2}$$

On n'oublie par que l'on a pris x dans $\mathbb{R}_+^*$ au départ !
Ainsi l'inéquation considérée admet pour ensemble de solutions : $]0, \frac{e}{2}]$.

Exercice 13

• Le domaine de validité de (A) est $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $t = x^2$:

$$(A) \iff -2x^4+3x^2+2 \geqslant 0 \iff -2\big(x^2\big)^2+3x^2+2 \geqslant 0 \iff -2t^2+3t+2 \geqslant 0$$

Discriminant : $\Delta = 3^2 - 4\times(-2)\times 2 = 9+16 = 25 = 5^2 > 0$.
Le polynôme $t \mapsto -2t^2+3t+2$ admet donc deux racines :

$$t_1 = \frac{-3-5}{2\times(-2)} = \frac{-8}{-4} = 2 \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-3+5}{2\times(-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Comme $a = -2 < 0$, on obtient le tableau de signes suivant :

t	$-\infty$		$-1/2$		2		$+\infty$
$-2t^2+3t+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On reprend les équivalences précédentes : $\quad (A) \iff -2t^2+3t+2 \geqslant 0 \iff -\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 2.$

Or $t = x^2$: $\quad (A) \iff -\frac{1}{2} \leqslant x^2 \leqslant 2 \iff x^2 \leqslant 2 \iff -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}.$

On a pu supprimer l'inégalité $-\frac{1}{2} \leqslant x^2$ puisqu'elle est toujours vraie.
Ainsi l'inéquation (A) admet pour ensemble de solutions : $\big[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\,\big]$.

• L'inéquation (B) a un sens si et seulement si $x > 0$ (dans ce cas on a aussi $x+1>0$).
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$(B) \iff \ln(x)+\ln(x+1) \leqslant 0 \iff \ln\big(x(x+1)\big) \leqslant \ln(1) \iff x(x+1) \leqslant 1 \iff x^2+x-1 \leqslant 0.$$

Après calcul, le signe du polynôme $x \mapsto x^2+x-1$ est donné par :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2+x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

On reprend les équivalences précédentes :

$$(B) \iff x^2+x-1 \leqslant 0 \iff \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

On se rappelle que les solutions de l'inéquation sont à chercher dans $\mathbb{R}_+^*$!
Or $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$, donc : $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$.
Ainsi l'inéquation (B) admet pour ensemble de solutions : $\big]0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,\big]$.
• L'inéquation (C) a un sens si et seulement si $2-x \geqslant 0$, c'est-à -dire si et seulement si $x \leqslant 2$.
Soit $x \in]-\infty, 2]$.

On souhaite passer au carré dans l'inégalité : il faut pour cela que les deux membres de l'inégalité soient de même signe, ici positifs.
On note que si $x < 0$, alors l'inégalité $x > \sqrt{2-x}$ ne peut pas être vérifiée puisqu'une racine carrée est un nombre positif ! On suppose donc pour la suite que $x \in [0,2]$.
Comme la fonction $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$(C) \iff x > \sqrt{2-x} \iff x^2 > \left(\sqrt{2-x}\right)^2 \iff x^2 > 2-x \iff x^2+x-2 > 0$$

Après calcul, le signe du polynôme $x \mapsto x^2+x-2$ est donné par :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

On reprend les équivalences précédentes :

$$(C) \iff x^2+x-2 > 0 \iff (x < -2 \text{ ou } x > 1)$$

On rappelle que les solutions de l'inéquation sont à chercher dans $[0,2]$.
Finalement, l'inéquation (C) admet pour ensemble de solutions : $]1,2]$.

Exercice 14

• L'expression $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car on a toujours $x^2+4 > 0$).
Ainsi le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en notant $u(x) = \sqrt{x^2+4}$, on peut dériver $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ en $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$.
Puisque $u'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$, cela donne : $f'(x) = -\dfrac{x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$.
En rappelant que $\sqrt{a} = a^{1/2}$ et en d'après les règles de calcul de puissance, ceci s'écrit également :

$$f'(x) = -\frac{x}{(x^2+4)(x^2+4)^{1/2}} = -\frac{x}{(x^2+4)^{3/2}}.$$

• L'expression $g(x) = \ln\left(\dfrac{x-3}{x^2-4}\right)$ a un sens lorsque $\dfrac{x-3}{x^2-4} > 0$,
c'est à dire $(x-3 > 0$ et $x^2-4 > 0)$ ou bien $(x-3 < 0$ et $x^2-4 < 0)$,
c'est à dire $(x > 3$ et $(x > 2$ ou $x < -2)$ $)$ ou bien $(x < 3$ et $-2 < x < 2)$,
c'est à dire $x > 3$ ou bien $-2 < x < 2$. Ainsi le domaine de définition de g est $D_g =]-2,2[\cup]3,+\infty[$.
Pour tout $x \in D_g$, en notant $u(x) = \dfrac{x-3}{x^2-4}$, on peut dériver $g(x) = \ln(u(x))$ en $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
Puisque $u'(x) = \dfrac{(x^2-4)-(x-3)\times 2x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-x^2+6x-4}{(x^2-4)^2}$, cela donne :

$$g'(x) = \frac{-x^2+6x-4}{(x^2-4)^2} \times \frac{x^2-4}{x-3} = \frac{-x^2+6x-4}{(x^2-4)(x-3)}.$$

• L'expression $h(x) = (3x+2)e^{x^2+x-1}$ a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi le domaine de définition de h est $D_h = \mathbb{R}$.
En notant $u(x) = 3x+2$ et $v(x) = x^2+x-1$, on peut dériver $h(x) = u(x)e^{v(x)}$ en

$$h'(x) = u'(x)\cdot e^{v(x)} + u(x)\cdot v'(x)e^{v(x)} = 3e^{x^2+x-1} + (3x+2)\cdot(2x+1)e^{x^2+x-1} = \Big(6x^2+7x+5\Big)e^{x^2+x-1}$$

Exercice 15

1. L'expression $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ a un sens lorsque $x-1 \neq 0$.
Le domaine de définition de f est ainsi $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on calcule :

$$f'(x) = \frac{(2x+1)\cdot(x-1)-(x^2+x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}.$$

Puisque $(x-1)^2$ est toujours positif, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de x^2-2x-2.
Déterminons les solutions de l'équation $x^2-2x-2=0$.
$\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 12 > 0$. Les deux solutions sont donc $\dfrac{2\pm\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2\pm 2\sqrt{3}}{2} = 1\pm\sqrt{3}$.
L'expression x^2-2x-2 est ainsi négative entre $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$, positive à l'extérieur.
Il en va donc de même pour $f'(x)$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	α	$\searrow$	$-\infty \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites de f en $-\infty, 1^-, 1^+, +\infty$ sont intuitives. Les valeurs α et β sont :

$$\begin{aligned}\alpha = f(1-\sqrt{3}) &= \frac{(1-\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})+1}{1-\sqrt{3}-1} = \frac{1-2\sqrt{3}+3+1-\sqrt{3}+1}{-\sqrt{3}} \\ &= \frac{6-3\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = \frac{-6\sqrt{3}+3\cdot 3}{3} = 3-2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta = f(1+\sqrt{3}) &= \frac{(1+\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})+1}{1+\sqrt{3}-1} = \frac{1+2\sqrt{3}+3+1+\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{6+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}+3\cdot 3}{3} = 3+2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

2. L'expression $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ a un sens lorsque $x>0$. Le domaine de définition de g est donc $D_g = \mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on calcule :

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

Ainsi, on a : $g'(x) \geqslant 0 \iff 1-\ln(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \leqslant 1 \iff x \leqslant e$.
g' est ainsi positive sur $]0,e[$, négative sur $]e,+\infty[$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

La limite en 0 est claire. La limite en $+\infty$ est 0 par un résultat classique de croissances comparées.
La valeur en e est $g(e) = \dfrac{\ln(e)}{e} = \dfrac{1}{e} = e^{-1}$.
Déduisons-en l'inégalité voulue. On souhaite montrer $\pi^e < e^\pi$, c'est à dire :

$$\pi^e < e^\pi \iff \ln(\pi^e) < \ln(e^{pi}) \iff e\ln(\pi) < \pi\ln(e) \iff \frac{\ln(\pi)}{\pi} < \frac{\ln(e)}{e} \iff g(\pi) < g(e).$$

Cette dernière inégalité est bien vraie, puisqu'on voit sur le tableau de variation que
la fonction g atteint son maximum au point e : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\},\ g(x) < g(e)$.
En particulier, on a bien $g(\pi) < g(e)$ et on en déduit que $\pi^e < e^\pi$.