10

Continuité

Étude de continuité et prolongement

Exercice 1 (Continue ou pas ?)

Étudier la continuité en tout point de $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

(a) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ et $f(0) = 1$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $f(0) = 1$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x - \lfloor x \rfloor$

Exercice 2 (Prolongeable ou pas ?)

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, et justifier qu'elle y sont continues.

2. Peut-on prolonger ces fonctions par continuité aux bords du domaine de définition ? Si oui, définir le prolongement.

(a) $f(x) = \arctan\left(x^{-1}\right)$

(b) $f(x) = \dfrac{cos(x) - 1}{x}$ (c) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x}$

Exercice 3 ("Recollement" continu)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-1, 2] \\ \exp(ax + b) & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer des constantes a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Problème en 0)

On définit, pour tout $x > 0$, $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Montrer par l'absurde que f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

TVI et Théorème de la bijection

Exercice 5 (Une unique racine)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $P_n = X^n + X - 1$ admet une unique racine α_n dans $[0, 1]$.
2. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.

(Pour la limite, on pourra raisonner par l'absurde...)

Exercice 6 (Intersection de graphes)

Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ satisfaisant

$(f(a) - g(a))(f(b) - g(b)) < 0$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 7 (Étude d'une suite implicite)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x_n \in [1, n]$ tel que $\ln(x_n) + x_n = n$.

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

3. (a) Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{n} = 0$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n}$.

(b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{x_{n-1}} = 1$, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - x_{n-1})$.

Fonctions continues et bornes

Exercice 8 (Fonction continue périodique)

Montrer qu'une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.

Exercice 9 (Limite finie aux bords)

On souhaite montrer que tout fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$ est bornée. Soit donc $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $a = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ et $b = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$

(a) Justifier qu'il existe $A < 0$ et $A' > 0$ tels que $\forall x < A,\ a - 1 \leqslant f(x) \leqslant a + 1$
et $\forall x > A',\ b - 1 \leqslant f(x) \leqslant b + 1$.

(b) Justifier qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in [A', A],\ m \leqslant f(x) \leqslant M$.

(c) Conclure.

(d) Donner un exemple d'une telle fonction qui n'atteint pas ses bornes.

Exercice 10 (Graphes sans intersection)

Soient $f, g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ t.q $\forall x \in [0, 1], f(x) \neq g(x)$.

On suppose par exemple que $f(0) < g(0)$.

(a) Montrer que $\forall x \in [0, 1],\ f(x) < g(x)$.

(b) Plus précisément, montrer qu'il existe $\delta > 0$ fixé tel que $\forall x \in [0, 1], f(x) \leqslant g(x) - \delta$.

Problèmes divers

Exercice 11 (Une équation contraignante)

Soit f une fonction continue en 0 satisfaisant :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que f est constante.

Exercice 12 (Fonction Lipschitzienne)

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction.
On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que

$\forall (x,x') \in [0,1]^2, |f(x) - f(x')| \leqslant k|x - x'|.$

1. Montrer que f est continue sur $[0,1]$.
2. Montrer que f a un unique point fixe $\alpha \in [0,1]$.
3. On pose $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant |u_0 - \alpha| \times k^n$.
(b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 13 (Fonctions continues additives)

L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ satisfaisant :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble de ces fonctions.

0. Vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}, \quad a \times Id_{\mathbb{R}} \in \mathcal{A}$.

Soit maintenant $f \in \mathcal{A}$. On pose $a = f(1)$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x)$.

2. Montrer que f est impaire, et en déduire que l'égalité précédente reste vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.

3. Déduire que pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$,
$f\left(\frac{1}{q}\right) = a \times \frac{1}{q}$, puis que $f\left(\frac{p}{q}\right) = a \times \frac{p}{q}$.

4. On rappelle que tout réel est limite d'une suite de rationnel (par exemple : $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.)
Montrer finalement que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$.

5. Décrire explicitement l'ensemble $\mathcal{A}$.