TP # 15

Représentations graphiques

Partie II - Représentations de fonctions

Rappelons que les fonctions d'affichage graphique `plt.plot` et `plt.show` sont issues de la bibliothèque `matplotlib.pyplot`, qu'il faut penser à importer avant toute chose :

Bibliothèque matplotlib.pyplot

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

Représenter un graphe de fonction

Tracer la courbe représentative d'une fonction f sur un intervalle revient théoriquement à afficher une infinité de points... Evidement Python en est incapable !
On affichera donc seulement un nombre fini de points, reliés par des lignes brisées.
Si ce nombre de points est suffisamment grand, on aura "l'illusion" d'une courbe lisse.

<u>Pour tracer la courbe représentative de f sur un segment $[a, b]$:</u>

$\boxed{1}$ Pour le vecteur des abscisses : `X = np.linspace(a,b,n)`

Rappel : ceci crée un vecteur composé de n points uniforméments répartis entre a et b.
On choisira typiquement $n = 100$ ou 1000.

$\boxed{2}$ Pour le vecteur des ordonnées : `Y = f(X)`

Remplacer directement `f(X)` par l'expression voulue.
Exemple, pour représenter la foncction $f : x \mapsto e^{-x^2}$: `Y = np.exp(-X**2)`.

$\boxed{3}$ Relier les points avec `plt.plot(X,Y)` puis afficher la représentation avec `plt.show()`.

Exercice 1

Afficher la courbe représentative de $x \mapsto x^2 + 1$ sur le segment $[-1, 1]$.

On commencera par tracer seulement $n = 5$ points, puis $n = 10$ et $n = 100$ points.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

X = ..................................

Y = .................................

plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

La courbe apparait "plus lisse" à mesure que le nombre de points tracés augmente !

Aspect de la figure obtenue pour $n = 5$:

Aspect de la figure obtenue pour $n = 100$:

Exercice 2

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $g(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Représenter la fonction f sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$.
(on s'assurera juste que 0 n'est pas contenu dans le vecteur des abscisses `X`...)

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt

X = ................................

Y = ................................

plt.plot(X,Y); plt.show()
```

De même, représenter g sur $[-2, 2] \setminus \{0\}$ et h sur $[-20, 20] \setminus \{0\}$.
Constater graphiquement que :

- f n'admet pas de limite en 0.
- g est prolongeable par continuité en posant $g(0) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) =$ ....
- h est prolongeable par continuité en posant $h(0) = \lim\limits_{x \to 0} h(x) =$ ....

Exercice 3

1. Déterminer l'équation de la tangente à la fonction ln au point d'abscisse 1 :

   $y =$ ....

2. Représenter sur une même figure la fonction ln (en bleu) et sa tangente (en rouge) sur le segment $[0.01, 3]$:

```
X = .......................................

Y = .......................................

Z = .......................................

plt.plot(X,Y); plt.plot(X,Z,'r'); plt.show()
```

Exercice 4

Polynômes de Taylor associés au cosinus.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit le polynôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

1. Compléter la relation suivante, pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1))!} x^{2(k+1)} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Compléter le programme suivant (sans utiliser de factorielle !) pour que la fonction `P` prenne en entrée un entier n et un réel x et renvoie la valeur de $P_n(x)$.

```
def P(n,x) :

    S = ....... ; a = .......

    for k in .......................... :

        S = S + a

        a = a * ................................

    return(S)
```

3. Représenter sur une même figure les fonctions cos (en bleu) et P_n (en rouge) sur le segment $[-5, 5]$. On commencera par prendre $n = 1$, puis $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt

n = 1

X = ..........................

Y = .........................

Z = .........................

plt.plot(X,Y)
plt.plot(X,Z,'r')

plt.ylim([-2, 2]) # On limite l'axe des ordonnees entre -2 et 2
plt.title( "n=" + str(n) ) # Titre du graphe donnant la valeur de n

plt.show()
```

Que constate-t-on à mesure que n augmente ?

Exercice 5

Polynômes de Taylor associés à l'exponentielle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Adapter les programmes de l'exercice précédent pour comparer les graphes des fonctions exp et de Q_n sur le segment $[-5, 5]$.
(On prendra $n = 1$, puis $n = 2, 3$, etc...)