17

Introduction aux espaces vectoriels - Corrigé

Exercice 1 (EV ou pas EV ?)

A chaque fois, pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on vérifie en fait que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

(a) $E = \Big\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) \Big\}$. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
• E contient évidemment la fonction nulle (puisque si $f = 0$, on a bien $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = 0 = f(x)$).
• Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $f + \lambda g \in G$. Puisque f et g sont impaires, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f+\lambda g)(-x) = f(-x) + \lambda g(-x) = -f(x) + \lambda(-g(x)) = -(f(x) + \lambda g(x)) = -(f+\lambda g)(x).$$

Ceci montre que $f + \lambda g$ est impaire, c'est à dire $f + \lambda g \in E$.

(b) $E = \Big\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) = f(x) \Big\}$. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
• E contient évidemment la fonction nulle (puisque si $f = 0$, on a bien $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) = 0 = f(x)$).
• Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $f + \lambda g \in G$. Puisque f et g sont π-périodiques, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f+\lambda g)(x+\pi) = f(x+\pi) + \lambda g(x+\pi) = f(x) + \lambda g(x) = (f+\lambda g)(x).$$

Ceci montre que $f + \lambda g$ est π-périodique, c'est à dire $f + \lambda g \in E$.

(c) $E = \Big\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1} \Big\}$.
E n'est pas un espace vectoriel car il n'est pas stable par multiplication par un scalaire négatif !
Exemple : en posant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n$, on a $u \in E$ mais $-u \notin E$.

(d) $E = \Big\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Big\}$. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$.
• E contient évidemment la suite constante égale à 0 puisque celle-ci converge vers 0.
• Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que la suite $w = u + \lambda v$ appartient à E. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lambda \lim_{n\to+\infty} v_n = 0 + \lambda \times 0 = 0.$$

Ceci montre que $w \in E$.

(e) $E = \Big\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 3u_n \Big\}$. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
• E contient évidemment la suite constante égale à 0 puisque si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$,
on a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 3u_n$.
• Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que la suite $w = u + \lambda v$ appartient à E.
On sait que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 3u_n$ et $v_{n+3} = 2v_{n+2} - v_{n+1} + 3v_n$.
On doit montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+3} = 2w_{n+2} - w_{n+1} + 3w_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} w_{n+3} = u_{n+3} + \lambda v_{n+3} &= (2u_{n+2} - u_{n+1} + 3u_n) + \lambda(2v_{n+2} - v_{n+1} + 3v_n) \\ &= 2(u_{n+2} + \lambda v_{n+2}) - (u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + 3(u_n + \lambda v_n) \\ &= 2w_{n+2} - w_{n+1} + 3w_n. \end{aligned}$$

Ceci montre que $w \in E$.

(f) $E = \Big\{ u \in \mathbb{R}^N \,|\, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n + n \Big\}$.
E n'est pas un espace vectoriel car il ne contient pas la suite constante égale à 0.
(et d'ailleurs il n'est pas non plus stable par addition ou par multiplication par un scalaire...)

(g) $E = \Big\{ P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(2) = 0 \Big\}$. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
• E contient le polynôme nul (puisque si $P = 0$ on a bien $P(2) = 0$).
• Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $P + \lambda Q \in E$. On a : $(P + \lambda Q)(2) = P(2) + \lambda Q(2) = 0 + \lambda \times 0 = 0$.
Ceci montre que $P + \lambda Q \in E$.

(h) $E = \Big\{ P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(0) = 2 \Big\}$.
E n'est pas un espace vectoriel car il ne contient pas le polynôme nul.
(et d'ailleurs il n'est pas non plus stable par addition ou par multiplication par un scalaire...)

Exercice 2 (Plusieurs écritures)

(a) Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a les équivalences :

$$(x,y,z,t) \in F_1 \iff \begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ y-3z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+4z+t &= 0 \\ y &= 3z \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -4z-t \\ y &= 3z \end{cases}$$

Ainsi on peut ré-écrire $F_1 = \Big\{(-4z-t, 3z, z, t),\ z, t \in \mathbb{R}\Big\}$ (c'est la forme $\boxed{2}$).

Ensuite, $F_1 = \Big\{z(-4,3,1,0) + t(-1,0,0,1),\ z,t \in \mathbb{R}\Big\} = Vect\Big((-4,3,1,0), (-1,0,0,1)\Big)$ (c'est la forme $\boxed{3}$)

(b) $F_2 = \Big\{(a+2b, 3a, b, a-b),\ a, b \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{a(1,3,0,1)+b(2,0,1,-1),\ a,b \in \mathbb{R}\Big\} = Vect\Big((1,3,0,1),(2,0,1,-1)\Big)$.

(c) $F_3 = Vect\Big((0,1,2,1),(1,1,0,2)\Big) = \Big\{a(0,1,2,1)+b(1,1,0,2),\ a,b \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{(b, a+b, 2a, a+2b),\ a,b \in \mathbb{R}\Big\}$.

(d) Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a les équivalences :

$$(x,y,z,t) \in F_3 \iff \exists a,b \in \mathbb{R},\ (x,y,z,t) = (b, a+b, 2a, a+2b) \iff \exists a, b \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = b \\ y = a+b \\ z = 2a \\ t = a+2b \end{cases}$$

$$\iff \exists a,b \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a = \frac{z}{2} \\ b = x \\ y = \frac{z}{2} + x \\ t = \frac{z}{2} + 2x \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{z}{2} + x \\ t = \dfrac{z}{2} + 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + \dfrac{z}{2} = 0 \\ 2x + \dfrac{z}{2} - t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 2y + z = 0 \\ 4x + z - 2t = 0 \end{cases}$$

Ainsi $F_3 = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x - 2y + z = 0 \text{ et } 4x + z - 2t = 0\Big\}$.

Exercice 3 (Egalité de Vect)

En effectuant des opérations élémentaires sur les vecteurs, on peut "simplifier" les Vect :

$$Vect\Big((1,3,2),(1,1,-2)\Big) = Vect\Big((1,3,2),(0,-2,-4)\Big) = Vect\Big((1,3,2),(0,1,2)\Big) = Vect\Big((1,2,0),(0,1,2)\Big).$$

Opérations effectuées dans l'ordre : $v_2 \leftarrow v_2 - v_1$, puis $v_2 \leftarrow -\frac{1}{2}\, v_2$ puis $v_1 \leftarrow v_1 - v_2$.

Exercice 4 (Simplification)

(a) $F = Vect\Big((0,1,-1),(1,2,3),(1,1,4),(0,3,-3)\Big)$

- Puisque $(0,3,-3) = 3 \cdot (0,1,-1)$, on peut le retirer : $F = Vect\Big((0,1,-1),(1,2,3),(1,1,4)\Big)$
- Avec l'opération $v_3 \leftarrow v_3 - v_2$: $F = Vect\Big((0,1,-1),(1,2,3),(0,-1,1)\Big) = Vect\Big((0,1,-1),(1,2,3)\Big)$.

On voit qu'on ne peut pas retirer d'autre vecteur puisque la famille $\Big((0,1,-1),(1,2,3)\Big)$ est libre (car composée de deux vecteurs non-colinéaires).

Ainsi, la famille $\Big((0,1,-1),(1,2,3)\Big)$ est libre et génératrice de F : c'est donc une base de F !

(b) $G = Vect\Big((1,-1,0,1),(1,1,1,1),(-1,3,1,-1)\Big)$.

- Avec l'opération $v_2 \leftarrow v_2 - 2v_1$: $G = Vect\Big((1,-1,0,1),(-1,3,1,-1),(-1,3,1,-1)\Big)$.
- On a deux fois le même vecteur, donc $G = Vect\Big((1,-1,0,1),(-1,3,1,-1)\Big)$.

A nouveau, cette dernière famille est libre car composée de deux vecteurs non-colinéaires.

Ainsi $\Big((1,-1,0,1),(-1,3,1,-1)\Big)$ est une famille libre et génératrice de G : c'est donc une base G !

Exercice 5 (Dans $\mathbb{R}^3$)

1. Libre car un seul vecteur non nul.

2. Libre car deux vecteurs non-colinéaires.

3. Libre car deux vecteurs non-colinéaires.

---

4. Vérifions si la famille est libre : pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a les équivalences :

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \iff a(2,1,-1) + b(0,3,2) + c(-4,2,2) = (0,0,0)$$
$$\iff (2a - 4c, a + 3b + 2c, -a + 2b + 2c) = (0,0,0) \iff \left\{ \begin{array}{rl} 2a - 4c & = 0 \\ a + 3b + 2c & = 0 \\ -a + 2b + 2c & = 0 \end{array} \right.$$

En resolvant ce système, on obtient l'unique solution $a = b = c = 0$.
Ceci montre que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

5. La famille (v_1, v_2, v_4) est liée car on remarque par exemple que $v_4 = v_1 + v_2$.

6. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est forcément liée, car la "sous-famille" (v_1, v_2, v_4) est déjà liée !
Par exemple, on a toujours $v_4 = v_1 + v_2$.

Exercice 6 (Polynômes, fonctions et suites)

(a) Vérifions si la famille est libre : pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a les équivalences :

$$a(X^2 + 1) + b(2X^2 - X) + c(X + 1) = 0 \iff (a + 2b)X^2 + (-b + c)X + (a + c) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rl} a + 2b & = 0 \\ -b + c & = 0 \\ a + c & = 0 \end{array} \right.$$

En résolvant ce système, on trouve facilement $a = b = c = 0$. La famille est donc libre !

(c) La famille est liée car la fonction $f : x \mapsto \cos(2x)$ est combinaison linéaire des fonctions 1 et $\cos^2$.
En effet (en se rappelant de quelques formules de trigo) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) = \cos(x + x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = \cos(x)^2 - (1 - \cos(x)^2) = -1 + 2\cos(x)^2.$$

Ainsi, $f = -1 + 2\cos^2$.

(d) Montrons que la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est libre.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Supposons que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n = 0$ et montrons que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = 0$.
On suppose ainsi $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x) = 0.\quad$ c'est à dire $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{kx} = 0.$
Ceci peut également se ré-écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (e^x)^k = 0 \ \text{ c'est à dire }\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(e^x) = 0 \quad \text{où} \quad P(X) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X^k.$$

On voit donc que le polynôme P admet une infinité de racines (les e^x pour tout $x \in \mathbb{R}$), c'est donc qu'il est nul !
Ainsi, chacun de ses coefficients sont nuls, c'est à dire $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \lambda_k = 0$.

On a bien montré que la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est libre.

(e) Montrons que la famille (u, v, w) est libre.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons que $a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w = 0$ (suite nulle) et montrons que $a = b = c = 0$.
On suppose ainsi : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ au_n + bv_n + cw_n = 0, \quad$ c'est à dire $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a(-1)^n + b \times n + \dfrac{c}{n} = 0.$

• Première méthode : On peut prendre des valeurs particulières pour n ($n = 1, 2, 3$ par exemple), obtenir un système d'équations sur a, b, c et en déduire qu'ils sont nuls.

• Autrement, on note que si $b \neq 0$, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(a(-1)^n + b \times n + \frac{c}{n} \right) = \pm\infty$, impossible car ceci doit être nul !
On a donc nécessairement $b = 0$, et on obtient $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a(-1)^n + \dfrac{c}{n} = 0.$
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a(-1)^n = -\dfrac{c}{n}$. On en déduit $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a(-1)^n = 0$.
Or puisque $(-1)^n$ n'a pas de limite quand $n \to +\infty$, la seule possibilité est que $a = 0$!
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{c}{n} = 0$, et donc pour finir $c = 0$.

Exercice 7 (Coordonnées #1)

D'après la formule du binôme, on sait que

$$(X-3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (-3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3)^{n-k} \cdot X^k$$

On a ainsi identifié les coefficients de $(X-3)^n$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$:

$$Mat_{\mathcal{B}}((X-3)^n) = \begin{pmatrix} \binom{n}{0}(-3)^n \\ \binom{n}{1}(-3)^{n-1} \\ \binom{n}{2}(-3)^{n-2} \\ \vdots \\ \binom{n}{n}(-3)^0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 ("Commutant" de A)

1. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fixée. Notons $E = \left\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, AB = BA\right\}$. Montrons que E est un SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- D'abord, E contient bien-sûr la matrice nulle car $A \times 0 = 0 \times A = 0$.
- Soient $B_1, B_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $B_1 + \lambda B_2 \in E$:

$$\begin{aligned} A(B_1 + \lambda B_2) &= AB_1 + \lambda AB_2 = B_1 A + \lambda B_2 A \;\; (\text{car } B_1 \in E \text{ et } B_2 \in E) \\ &= (B_1 + \lambda B_2)A. \end{aligned}$$

Ceci montre que $B_1 + \lambda B_2 \in A$ et achève la preuve.

2. (a) Déterminons toutes les matrices qui commutent avec A : pour tout $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} AB = BA &\iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -a-c & -b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-b & a-b \\ 2c-d & c-d \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2a+c = 2a-b \\ 2b+d = a-b \\ -a-c = 2c-d \\ -b-d = c-d \end{cases} \iff \begin{cases} c = -b \\ 2b+d = a-b \end{cases} \iff \begin{cases} c = -b \\ d = a-3b \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi B est de la forme : $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-3b \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On peut donc expliciter l'ensemble E :

$$\begin{aligned} E = \left\{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, AB = BA\right\} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-3b \end{pmatrix},\, a, b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},\, a, b \in \mathbb{R}\right\} \\ &= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Cette dernière famille est de plus libre, car les deux matrices sont non-colinéaires !

On a donc déterminé une base E : $\quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\right)$.

(b) On peut noter simplement que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

La matrice des coordonnées de A dans la base $\mathcal{B}$ est ainsi : $\quad Mat_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : En "transformant" un peu la base $\mathcal{B}$ obtenue ($v_2 \leftarrow 2v_1 + v_2$),
on peut ainsi voir que (I_3, A) est une autre base de E.

Exercice 9 (Un SEV de polynômes)

1. Pour tout $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$, on a les équivalences :

$$P \in F \iff P'(1) = 0 \iff 3a + 2b + c = 0 \iff c = -3a - 2b.$$

Ainsi, les polynômes de F sont de la forme $P = aX^3 + bX^2 + (-3a - 2b)X + d$ avec $a, b, d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F &= \Big\{ aX^3 + bX^2 + (-3a-2b)X + d,\ a, b, d \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\{ a(X^3 - 3X) + b(X^2 - 2X) + d \cdot 1,\ a, b, d \in \mathbb{R} \Big\} \\ &= Vect\Big(X^3 - 3X,\ X^2 - 2X,\ 1 \Big). \end{aligned}$$

La famille $\Big(X^3 - 3X,\ X^2 - 2X,\ 1 \Big)$ est ainsi génératrice de F.
De plus elle est libre (polynômes de degrés échelonnés), c'est donc une base de F !

2. On a bien $P = 2X^2 - 4X + 2 \in \mathbb{R}_3[X]$, de plus $P'(1) = 4 - 4 = 0$. On a donc bien $P \in F$.
Puisque $\mathcal{B} = \Big(X^3 - 3X,\ X^2 - 2X,\ 1 \Big)$ est une base de F, on sait qu'il existe des réels (uniques) $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = a(X^3 - 3X) + b(X^2 - 2X) + c \cdot 1.$$

On peut identifier les coefficients et résoudre le système pour trouver les valeurs $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Ou alors, on peut repérer les valeurs qui fonctionnent : $a = 0, b = 2, c = 2$.

Ainsi la matrice de coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$ est : $Mat_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 (Coordonnées #2)

(a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ quelconque, fixé. Vérifions qu'il existe un unique $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$(x, y, z) = a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w = a(0, 1, 1) + b(2, 0, -1) + c(2, 1, 1).$$

Cette égalité se ramène au système :

$$\begin{cases} 2b + 2c &= x \\ a + \quad c &= y \\ a - b + c &= z \end{cases} \iff \begin{cases} 2b + 2c &= x \\ a + \quad c &= y \\ -b &= z - y \end{cases} \iff \begin{cases} 2c &= x + 2(z - y) \\ a + \quad c &= y \\ -b &= z - y \end{cases} \iff \begin{cases} a + \quad c &= y \\ -b &= z - y \\ 2c &= x + 2z - 2y \end{cases}$$

Les coefficients diagonaux de ce système triangulaire sont non-nuls : il s'agit donc d'un système de Cramer !
Il existe donc une unique solution (a, b, c) à ce système : ceci prouve que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Il suffit de finir la résolution du système dans le cas où $(x, y, z) = (4, -1, 1)$:

$$\begin{cases} a + \quad c &= -1 \\ -b &= 2 \\ 2c &= 8 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -5 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases}$$

On peut vérifier qu'on a effectivement : $(4, -1, 1) = -5(0, 1, 1) - 2(2, 0, -1) + 4(2, 1, 1)$.

Ainsi la matrice des coordonnées dans la base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est : $Mat_{\mathcal{B}}\Big((4, -1, 1)\Big) = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 (Recherche de base #1)

(a) $\Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 3z = 0 \Big\} = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -2x + 3z \Big\} = \Big\{ (x, -2x + 3z, z),\ x, z \in \mathbb{R} \Big\}$
$= \Big\{ x(1, -2, 0) + z(0, 3, 1),\ x, z \in \mathbb{R} \Big\} = Vect\Big((1, -2, 0), (0, 3, 1) \Big)$.
Cette famille est composée de deux vecteurs non-colinéaires, elle est donc libre !
On a donc déterminé une base : $\Big((1, -2, 0), (0, 3, 1) \Big)$.

(b) $\Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z \Big\} = \Big\{ (x, x, x) \in \mathbb{R}^3,\ x \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\{ x(1, 1, 1),\ x \in \mathbb{R} \Big\} = Vect\Big((1, 1, 1) \Big)$.
Cette famille est composée d'un seul vecteur non-nul, elle est donc libre !

On a donc déterminé une base : $\Big((1,1,1)\Big)$.

(d) $\Big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(2)=0\Big\} = \Big\{(X-2)Q,\ Q \in \mathbb{R}_2[X]\Big\} = \Big\{(X-2)(aX^2+bX+c),\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$
$= \Big\{a(X-2)X^2 + b(X-2)X + c(X-2),\ a,b,c \in \mathbb{R}\Big\} = Vect\Big((X-2)X^2,\ (X-2)X,\ X-2\Big)$.
De plus, cette famille est libre car composée de polynômes de degrés échelonnés.
On a donc déterminé une base : $\Big((X-2)X^2,\ (X-2)X,\ X-2\Big)$.

(f) $\left\{\begin{pmatrix} a & b & a+c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$
$= Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
On peut ensuite vérifier facilement que cette famille est libre (faites-le !).
On a donc déterminé une base : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 12 (Recherche de base #2)
(a) Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a les équivalences :

$$P(1)=P(2)=0 \iff \exists Q \in \mathbb{R}_1[X],\ P=(X-1)(X-2)Q \iff \exists a,b \in \mathbb{R},\ P=(X-1)(X-2)(aX+b).$$

L'ensemble se ré-écrit : $\Big\{a(X-1)(X-2)X + b(X-1)(X-2),\ a,b \in \mathbb{R}\Big\} = Vect\Big((X-1)(X-2)X, (X-1)(X-2)\Big)$.
De plus cette famille est libre (deux polynômes non-proportionnels).
On a donc déterminé une base : $\Big((X-1)(X-2)X,\ (X-1)(X-2)\Big)$.

(b) Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a les équivalences (1 est racine double...) :

$$P(1)=P'(1)=0 \iff \exists Q \in \mathbb{R}_1[X],\ P=(X-1)^2Q \iff \exists a,b \in \mathbb{R},\ P=(X-1)^2(aX+b).$$

L'ensemble se ré-écrit : $\Big\{a(X-1)^2X + b(X-1)^2,\ a,b \in \mathbb{R}\Big\} = Vect\Big((X-1)^2X, (X-1)^2\Big)$.
De plus cette famille est libre (deux polynôme non-proportionnels).
On a donc déterminé une base : $\Big((X-1)^2X, (X-1)^2\Big)$.

(c) Pour tout $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in \mathbb{R}_4[X]$, on a les équivalences :

$$\int_0^1 P(t)dt = 0 \iff \int_0^1 \Big(at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e\Big)\,dt = 0 \iff \Big[a\frac{t^5}{5} + b\frac{t^4}{4} + c\frac{t^3}{3} + d\frac{t^2}{2} + et\Big]_0^1 = 0$$
$$\iff \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} + \frac{d}{2} + e = 0 \iff e = -\frac{a}{5} - \frac{b}{4} - \frac{c}{3} - \frac{d}{2}.$$

Ainsi, un polynôme P dans l'ensemble est de la forme :

$$P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX - \frac{a}{5} - \frac{b}{4} - \frac{c}{3} - \frac{d}{2} = a(X^4 - \frac{1}{5}) + b(X^3 - \frac{1}{4}) + c(X^2 - \frac{1}{3}) + d(X - \frac{1}{2}).$$

avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. L'ensemble est donc : $Vect\Big(X^4 - \frac{1}{5},\ X^3 - \frac{1}{4},\ X^2 - \frac{1}{3},\ X - \frac{1}{2}\Big)$.
Cette famille de 4 polynômes est libre, car ceux-ci sont de degrés échelonnés.
On a donc déterminé une base : $\Big(X^4 - \frac{1}{5},\ X^3 - \frac{1}{4},\ X^2 - \frac{1}{3},\ X - \frac{1}{2}\Big)$.

(d) L'ensemble se ré-écrit $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b \end{pmatrix},\ a,b,c \in \mathbb{R}\right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
On peut montrer que cette famille est libre (faites-le !). On a donc déterminé une base.