Devoir Sur Table n°3 – Corrigé

Exercice 1 : Etude d'une suite implicite

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}(x^n - 1)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
   (a) $f_n(x) = \dfrac{x}{x-1}(x^n - 1)$ a un sens lorsque $x \neq 1$. Ainsi, $\boxed{f_n \text{ est définie sur } \mathbb{R} \setminus \{1\}}$.
   Bien-sûr, $\boxed{f_n \text{ y est continue comme produit et quotient de fonctions usuelles (polynômes)}}$.
   (b) On calcule la limite :
   $$\lim_{x \to 1} f_n(x) = \lim_{x \to 1} x \times \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{y \to 0} \frac{(1+y)^n - 1}{y} = n \quad \text{(limite usuelle)}$$
   Ainsi, $\boxed{f_n \text{ est prolongeable par continuité en } 1}$. En notant toujours f_n ce prolongement :
   $$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1}(x^n - 1) & \text{si } x \neq 1, \\ n & \text{si } x = 1. \end{cases}}$$
2.
```python
def f(n,x) :
    if x == 1 :
        return n
    else :
        return (x / (x-1)) * (x**n - 1)
```
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que :
   - Si $x \neq 1$, $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1} = f_n(x)$.
   - Si $x = 1$, $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = \sum_{k=1}^{n} 1 = n = f_n(1)$.

   Ainsi, on a bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k}$.
   (b) On calcule la somme en Python :
```python
def f(n,x) :
    S = 0
    for k in range(1,n+1) :
        S = S + x**k
    return S
```
   ou bien, en utilisant l'instruction `np.sum` :
```python
import numpy as np
def f(n,x) :
    L = [x**k for k in range(1,n+1)]
    S = np.sum(L)
    return S
```
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a déjà dit que f_n était continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier, $\underline{f_n \text{ est continue sur } [0,1]}$.
   A partir de l'expression $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = x + x^2 + \ldots + x^n$, on voit facilement que $\underline{f_n \text{ est strictement croissante sur } [0,1]}$ (somme de fonctions strictement croissantes).
   Autrement on peut bien-sûr dériver : $\forall x \in]0,1[,\ f_n'(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} > 0$.
   Enfin $\underline{f_n(0) = 0 < 1 \text{ et } f_n(1) = n \geqslant 1}$.
   D'après le TVI avec stricte monotonie, $\boxed{\text{il existe un unique } x \in [0,1] \text{ tel que } f_n(x) = 1}$.
   On note ce réel $u_n \in [0,1]$. On aura donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(u_n) = 1$.

(b)
```
def suite(n) :
  x = 0
  while f(n,x) < 1 :
    x += 0.001
  return x
```

On part de la valeur $x = 0$, et on augmente cette valeur petit à petit, en ajoutant 0.001 à chaque étape. On quitte la boucle dès que $f_n(x) \geqslant 1$, c'est à dire dès que x dépasse la valeur u_n.
Il en résulte que $\boxed{\text{la valeur } x \text{ renvoyée est une approximation de } u_n \text{ à } 0.001 \text{ près}}$.
Précisément : $\quad x - 0.001 < u_n \leqslant x$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} x^k = \sum_{k=1}^{n} x^k + x^{n+1} = f_n(x) + x^{n+1}.$$

En particulier, $f_{n+1}(u_n) = \underbrace{f_n(u_n)}_{=1} + (u_n)^{n+1} = 1 + \underbrace{(u_n)^{n+1}}_{\geqslant 0}$ donc $\boxed{f_{n+1}(u_n) \geqslant 1}$.
Puisque on a aussi $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$, on en déduit que $f_{n+1}(u_n) \geqslant f_{n+1}(u_{n+1})$ et donc $u_n \geqslant u_{n+1}$ car la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $[0,1]$.
On a bien montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n \geqslant u_{n+1}$: $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$.

6. (a) Par définition, u_2 est l'unique solution dans $[0,1]$ de l'équation $f_2(x) = 1$, c'est à dire $x + x^2 = 1$ i.e $x^2 + x - 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) = 5 > 0$.
On a donc les deux solutions $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
On élimine la solution négative pour conserver $\boxed{u_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.
On a évidemment $\sqrt{5} \geqslant 1$ donc $u_2 \geqslant 0$. De plus, on a les équivalences :

$$u_2 < 1 \Longleftarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1 \Longleftarrow -1 + \sqrt{5} < 2 \Longleftrightarrow \sqrt{5} < 3 \Longleftrightarrow 5 < 9 \quad \text{ce qui est bien vrai.}$$

Ainsi $\boxed{0 \leqslant u_2 < 1}$.

(b) <u>Attention :</u> Le fait que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n \in [0,1[$ ne suffit pas à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n = 0$.
<u>Contre-exemple</u> : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 1 - \dfrac{1}{n} \in [0,1[$ et pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0$. (vérifiez !)
Ici, puisque la suite est décroissante, on peut affirmer que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_2 \quad \text{et donc} \quad 0 \leqslant (u_n)^n \leqslant (u_2)^n.$$

Puisque $u_2 \in [0,1[$ (et c'est une constante !), $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} (u_2)^n = 0$.
On conclut avec le théorème des gendarmes que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n = 0}$.

7. On a vu que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0, donc converge vers un réel $\ell \in [0,1[$ (car $\ \forall n \geqslant 2, \ 0 \leqslant u_n \leqslant u_2 < 1$).
Revenons au fait que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ f_n(u_n) = 1$.
On reprend cette fois la première expression pour f_n : $\forall x \in [0,1[, \ f_n(x) = \dfrac{x}{x-1}(x^n - 1)$.
Pour tout $n \geqslant 2$, puisque $u_n \in [0,1[$, on obtient :

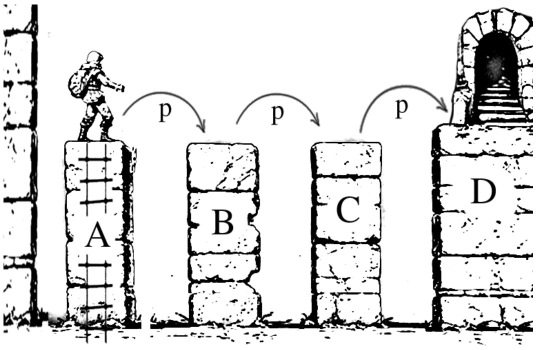
$$f_n(u_n) = 1 \text{ c'est à dire } \frac{u_n}{u_n - 1}((u_n)^n - 1) = 1.$$

En passant à la limite dans cette égalité quand $n \to +\infty$:

$$\frac{\ell}{\ell - 1}(0 - 1) = 1 \ \text{ i.e } \ \frac{-\ell}{\ell - 1} = 1 \ \text{ i.e } \ -\ell = \ell - 1 \ \text{ i.e } \ \ell = \frac{1}{2}.$$

Pour conclure, on a montré que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}}$.

Problème : Escape the dungeon



• Si un saut est réussi, l'aventurier rejoint la prochaine plateforme à l'instant suivant.
• Si un saut est raté, l'aventurier tombe au sol et doit remonter à l'échelle. À l'instant suivant, il revient ainsi sur la première plateforme A et doit tout recommencer.
• Si l'aventurier atteint la plateforme D à l'instant n, il rejoint la sortie du donjon. Par convention, on décide alors qu'il se situe en D pour tous les instants suivants.

Partie I : Relations de récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement : "L'aventurier se situe sur la plateforme A à l'instant n".
On introduit, de même, les évènements B_n, C_n et D_n pour les plateformes B, C et D.

1. (a) • A l'instant 0, on sait que l'aventurier se situe en A :

$$\boxed{P(A_0) = 1, \quad P(B_0) = 0, \quad P(C_0) = 0, \quad P(D_0) = 0}.$$

• A l'instant 1 : soit le saut est réussi et l'aventurier est en B (proba p), soit le saut est raté et l'aventurier reste en A (proba $1-p$) :

$$\boxed{P(A_1) = 1-p, \quad P(B_1) = p, \quad P(C_1) = 0, \quad P(D_1) = 0}.$$

• A l'instant 2 : soit les deux premiers sauts sont réussis : il est en C (proba p^2), soit le premier saut est raté et le second réussi : il en est B (proba $(1-p)p$) soit le deuxième saut est raté : il est en A (proba $1-p$)

$$\boxed{P(A_2) = 1-p, \quad P(B_2) = (1-p)p, \quad P(C_2) = p^2, \quad P(D_0) = 0}.$$

(b) En fait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n) = 1}$?
On peut justifier cela en disant qu'un et un seul des évènements A_n, B_n, C_n, D_n est forcément réalisé. Pour le dire autrement, $\boxed{(A_n, B_n, C_n, D_n) \text{ est un système complet d'évènements}}$.
Il en résulte que : $\quad 1 = P(\Omega) = P(A_n \cup B_n \cup C_n \cup D_n) = P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n)$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique la formule des probabilités totales avec le S.C.E (A_n, B_n, C_n, D_n) :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) + P(D_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(A_{n+1}). \end{aligned}$$

Précisons la valeur des probabilités conditionnelles :
• Sachant que l'aventurier est en A, il y reste avec proba $1-p$ (quand il rate le premier saut) :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1-p.$$

• Sachant que l'aventurier est en B, il rejoint A avec proba $1-p$ (quand il rate le 2ème saut) :

$$P_{B_n}(A_{n+1}) = 1-p.$$

• Sachant que l'aventurier est en C, il rejoint A avec proba $1-p$ (quand il rate le 3ème saut) :

$$P_{C_n}(A_{n+1}) = 1-p.$$

• Sachant que l'aventurier est en D, il a quitté le donjon et restera indéfiniment en D :

$$P_{D_n}(A_{n+1}) = 0.$$

(Ou alors on peut dire que $P(D_n \cap A_{n+1}) = 0.$ directement).
En remplaçant, on obtient : $\boxed{P(A_{n+1}) = (1-p)P(A_n) + (1-p)P(B_n) + (1-p)P(C_n)}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Même chose, on peut appliquer la formule des probas totales :

$$P(B_{n+1}) = P(A_n) \times \underbrace{P_{A_n}(B_{n+1})}_{=p} + P(B_n) \times \underbrace{P_{B_n}(B_{n+1})}_{=0} + P(C_n) \times \underbrace{P_{C_n}(B_{n+1})}_{=0} + P(D_n) \times \underbrace{P_{D_n}(B_{n+1})}_{=0}$$
$$= pP(A_n).$$

Autrement, pour aller plus vite, on peut dire que pour être en B à l'instant $n+1$, il faut forcément être en A à l'instant n. Ainsi $B_{n+1} = A_n \cap B_{n+1}$ et donc :

$$P(B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) = P(A_n) \times p$$

Bref, on conclut que $\boxed{P(B_{n+1}) = pP(A_n)}$.
De même, pour être en C à l'instant $n+1$, il faut forcément être en B à l'instant n. Ainsi :

$$P(C_{n+1}) = P(B_n \cap C_{n+1}) = P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) = P(B_n) \times p$$

donc $\boxed{P(C_{n+1}) = pP(B_n)}$.
Enfin, pour être en D à l'instant $n+1$: soit on était en C à l'instant n (et on a réussi le saut), soit on était en déjà D à l'instant n (et on y reste automatiquement) :

$$\begin{aligned} P(D_{n+1}) = P(C_n \cap D_{n+1}) + P(D_n \cap D_{n+1}) &= P(C_n) \times P_{C_n}(D_{n+1}) + P(D_n) \cap P_{D_n}(D_{n+1}) \\ &= P(C_n) \times p + P(D_n) \times 1, \end{aligned}$$

donc $\boxed{P(D_{n+1}) = pP(C_n) + P(D_n)}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le 2.(a),

$$P(A_{n+3}) = (1-p)P(A_{n+2}) + (1-p)P(B_{n+2}) + (1-p)P(C_{n+2}).$$

Or, d'après les formules du 2.(b),

$$P(B_{n+2}) = pP(A_{n+1}) \qquad \text{et} \qquad P(C_{n+2}) = pP(B_{n+1}) = p \times pP(A_n) = p^2P(A_n).$$

En remplaçant, on obtient bien :

$$\boxed{P(A_{n+3}) = (1-p)\Big(P(A_{n+2}) + pP(A_{n+1}) + p^2P(A_n)\Big)}.$$

3.
```
def proba(p,n) :
  u = 1 ; v = p ; w = 1-p # P(A0), P(A1) et P(A2)
  for k in range(1,n+1) : # ou range(n), n passages
    x = (1-p)*w + (1-p)*p*v + (1-p)*p*p*u
    u = v
    v = w
    w = x
  return u
```

Partie II : Recherche de racine et conséquences

On rappelle que $p \in]0,1[$ est une valeur fixée.
On cherche à montrer que l'équation $\quad (E) : \; x^3 = (1-p)(x^2 + px + p^2) \quad$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

4. On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - (1-p)(x^2 + px + p^2)$. Alors :
   - $\underline{f \text{ est continue}}$ sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme)
   - $f(0) = -(1-p)p^2$ donc $\underline{f(0) < 0}$ (car $p \in]0,1[$)
   - $f(1) = 1 - (1-p)(1+p+p^2) = p^3$ donc $\underline{f(1) > 0}$ (car $p \in]0,1[$).

   D'après le TVI, on conclut que $\boxed{f \text{ s'annule (au moins !) une fois dans }]0,1[}$.

5. Pour que $x = p$ soit une solution de (E), il faut et il suffit que :

$$\begin{aligned} p^3 = (1-p)(p^2 + p \times p + p^2) &\iff p^3 = 3(1-p)p^2 \iff p^3 = 3p^2 - 3p^3 \\ &\iff 4p^3 - 3p^2 = 0 \iff p^2(4p-3) = 0. \\ &\iff 4p - 3 = 0 \quad (\text{car } p \neq 0). \end{aligned}$$

   L'unique valeur de p telle que $x = p$ soit solution de (E) est donc $\boxed{p = \dfrac{3}{4}}$.

6. Soit $x \neq p$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(E) : x^3 = (1-p)(x^2+px+p^2) &\iff x^3(x-p) = (1-p)(x^2+px+p^2)(x-p) \quad (\text{car } x-p \neq 0) \\
&\iff x^3(x-p) = (1-p)(x^3-p^3) \quad (\text{en développant}) \\
&\iff x^3(x-p) = (1-p)x^3 - (1-p)p^3 \\
&\iff x^3(x-p) - x^3(1-p) = -(1-p)p^3 \\
&\iff x^3(x-1) = -(1-p)p^3 \\
&\iff x^3(1-x) = p^3(1-p) : (E')
\end{aligned}$$

On a bien montré que pour $x \neq p$, $\boxed{\text{l'égalité } (E) \text{ équivaut à } (E')}$.

7. (a) Puisque $p \in]0,1[$, on a $p^3(1-p) > 0$. Ainsi pour que x soit solution de (E'), on doit avoir :

$$x^3(1-x) > 0 \iff (x^3 > 0 \text{ et } x < 1) \text{ ou } \underbrace{(x^3 < 0 \text{ et } x > 1)}_{\text{impossible}} \iff 0 < x < 1.$$

Ceci montre que $\boxed{\text{toutes les solutions de } (E') \text{ sont dans l'intervalle }]0,1[}$.

(b) Comme suggéré, on pose $\forall x \in]0,1[,\ \varphi(x) = x^3(1-x)$.
Notons que résoudre l'équation (E') revient à chercher les $x \in]0,1[$ tels que $\varphi(x) = \varphi(p)$.
φ est dérivable sur $]0,1[$ et :

$$\forall x \in]0,1[,\ \varphi(x) = x^3 - x^4 \ \text{ donc } \ \varphi'(x) = 3x^2 - 4x^3 = x^2(3-4x).$$

On voit ainsi que $\varphi'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant \dfrac{3}{4}$. On obtient donc le tableau de variations :

x	0		$\frac{3}{4}$		1
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$\varphi(\frac{3}{4})$	$\searrow$	0

On distingue alors deux cas :

- Si $p = \dfrac{3}{4}$, il y a un unique réel $x \in]0,1[$ tel que $\varphi(x) = \varphi(p)$: c'est $x = \frac{3}{4}$.

Ainsi : $\boxed{\text{Si } p = \dfrac{3}{4}, \text{ l'équation } (E') \text{ admet l'unique solution } \tfrac{3}{4}, \text{ c'est à dire } p.}$

- Si $p \neq \dfrac{3}{4}$, on a $\varphi(p) < \varphi(\frac{3}{4})$ (puisque φ atteint son maximum en $\frac{3}{4}$).

D'après le TVI avec stricte monotonie, il existe donc deux valeurs $x \in]0,1[$ telles que $\varphi(x) = \varphi(p)$: une solution dans l'intervalle $]0, \frac{3}{4}[$ et une solution dans l'intervalle $]\frac{3}{4}, 1[$.
Bien-sûr, on a $\varphi(p) = \varphi(p)$, donc $x = p$ est l'une de ces deux solutions.

Ainsi : $\boxed{\text{Si } p \neq \dfrac{3}{4}, \text{ l'équation } (E') \text{ admet deux solutions : } p, \text{ et une autre valeur dans }]0,1[.}$

8. Raboutons consciencieusement tous les argument...

- Premier cas : $p = \dfrac{3}{4}$.

Dans ce cas, on a vu en question 5. que $x = p$ était solution de (E).
De plus, c'est la seule. En effet, si $x \neq p$ était une autre solution de (E), il faudrait que x soit solution de (E'). Or (dans le cas $p = \frac{3}{4}$) la seule solution de (E') est p : impossible !
Ainsi, (E) admet une unique solution (qui est p, c'est à dire $\frac{3}{4}$).

- Second cas : $p \neq \frac{3}{4}$

Dans ce cas, on a vu en question 5. que $x = p$ n'était pas solution de (E).
Pour que x soit solution de (E), il faut donc que $x \neq p$ et que x soit solution de (E').
Or (dans le cas $p \neq \frac{3}{4}$) (E') admet une unique solution différente de p.
Ainsi, (E) admet bien une unique solution (une valeur dans $]0,1[$ différente de p).

Conclusion : Dans tous les cas, $\boxed{\text{on a montré que l'équation } (E) \text{ admet une unique solution}}$ (qui, de plus, appartient à l'intervalle $]0,1[$).

Dans toute la suite, on note $\alpha \in]0,1[$ l'unique solution de l'équation (E).

9. (a) On commence par définir la fonction $f(x) = x^3 - (1-p)(x^2 + px + p^2)$ en Python.
Attention : l'utilisateur devra fournir en entrée la valeur de x, mais aussi la valeur de p.

```
def f(p,x) :
    y = x**3 - (1-p)*(x**2 + p*x + p**2)
    return y
```

Ensuite, on applique l'algorithme classique de dichotomie pour déterminer une approximation de la valeur où f s'annule sur $]0,1[$.

```
def dichotomie(p,eps) :
  a = 0 ; b = 1
  while b-a > eps :
    c = (a+b)/2
    if f(p,c) < 0 :
      a = c
    else :
      b = c
  return a
```

(b) Notons que ce programme nous renvoie une approximation de α par valeur inférieure (car on renvoie "a" seulement, et non pas l'encadrement "(a,b)" complet).
Puisque a est une valeur approchée de α à ε près par valeur inférieure, on aura $a \leqslant \alpha \leqslant a + \varepsilon$.
Ici, avec $a = 0.91894$ et $\varepsilon = 0.001$, cela donne l'encadrement : $\boxed{0.91894 \leqslant \alpha \leqslant 0.91994}$.

10. Soit $C = \max\left(1, \frac{1-p}{\alpha}, \frac{1-p}{\alpha^2}\right)$. (On prend la plus grande de ces trois valeurs).
Par définition, on a donc $C \geqslant 1$, $C \geqslant \frac{1-p}{\alpha}$ et $C \geqslant \frac{1-p}{\alpha^2}$.
Montrons par récurrence triple que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(A_n) \leqslant C\alpha^n$.
Initialisation : On vérifie la propriété pour $n \in \{0,1,2\}$.
Les valeurs de $P(A_0), P(A_1), P(A_2)$ ont été données en question 1.
- $P(A_0) = 1 \leqslant C$ car $C \geqslant 1$.
- $P(A_1) = 1 - p \leqslant C \times \alpha$ car $C \geqslant \frac{1-p}{\alpha}$.
- $P(A_2) = 1 - p \leqslant C\alpha^2$ car $C \geqslant \frac{1-p}{\alpha^2}$. (Ceci explique pourquoi on a choisi cette valeur de C)

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que

$$P(A_n) \leqslant C\alpha^n, \quad P(A_{n+1}) \leqslant C\alpha^{n+1}, \quad P(A_{n+2}) \leqslant C\alpha^{n+2},$$

et montrons que $P(A_{n+3}) \leqslant C\alpha^{n+3}$. On utilise la relation de récurrence établie en 2.(c) :

$$P(A_{n+3}) = (1-p)\Big(P(A_{n+2}) + pP(A_{n+1}) + p^2 P(A_n)\Big)$$

donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$$P(A_{n+3}) \leqslant (1-p)\Big(C\alpha^{n+2} + pC\alpha^{n+1} + p^2 C\alpha^n\Big)$$

c'est à dire

$$P(A_{n+3}) \leqslant C\alpha^n \times (1-p)\Big(\alpha^2 + p\alpha + p^2\Big).$$

Puisque α est la solution de l'équation (E), on a $\alpha^3 = (1-p)(\alpha^2 + p\alpha + p^2)$, donc ceci donne :

$$P(A_{n+3}) \leqslant C\alpha^n \times \alpha^3$$

c'est à dire $P(A_{n+3}) \leqslant C\alpha^{n+3}$, ce qui achève la récurrence.

11. (a) On vient de voir que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant P(A_n) \leqslant C\alpha^n$. Rappelons que $\alpha \in]0,1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = 0$.

    D'après le théorème des gendarmes, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 0}$.

    Pour $P(B_n)$ et $P(C_n)$, on peut se rappeler des relations de récurrences du 2.(b) :

    $$\forall n \in \mathbb{N},\quad P(B_{n+1}) = pP(A_n), \quad P(C_{n+1}) = pP(B_n).$$

    Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} p \times P(A_{n-1}) = 0}$ puis $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(C_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} p \times P(B_{n-1}) = 0}$.

    (b) On se rappelle que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n) = 1$ (vu en 1.(b)).

    Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ P(D_n) = 1 - \underbrace{P(A_n) - P(B_n) - P(C_n)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$, d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(D_n) = 1}$.

    $\boxed{\text{Interprétation :}}$ Au bout d'un temps n très long, l'aventurier a (presque) 100% de chance de s'être echappé du donjon.

On note Z l'évènement " L'aventurier finit (à un moment) par s'échapper du donjon ".

12. Soit $n \in \mathbb{N}$.
    Si l'évènement D_n est réalisé, alors l'aventurier a quitté le donjon à l'instant n.
    En particulier, l'évènement Z est réalisé. Ceci montre que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D_n \subset Z}$.
    Il en résulte que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(D_n) \leqslant P(Z) \leqslant 1$.
    Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} P(D_n) = 1$, d'après le théorème des gendarmes, on conclut : $\boxed{P(Z) = 1}$.
    On dit, dans ce genre de cas, que l'aventurier finira "presque-sûrement" par s'échapper du donjon.

Partie III : Nombre de tentatives

Pour finir, on segmente le parcours aléatoire de l'aventurier en différentes "tentatives" :

- L'aventurier démarre en A, et tente d'effectuer 3 sauts pour atteindre D : c'est la première tentative.
- Si l'aventurier tombe, il remonte sur la plateforme A et recommence : c'est une nouvelle tentative.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note T_k l'évènement : "L'aventurier atteint la sortie au bout de k tentatives exactement".
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n l'évènement : "L'aventurier atteint la sortie en n tentatives ou moins".

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\boxed{S_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} T_k}$ (c'est une union disjointe, les T_k étant 2 à 2 incompatibles)

14. L'évènement T_1 signifie que l'aventurier sort du donjon dès sa première tentative, c'est à dire qu'il réussit ses trois premiers sauts d'affilée. Autrement dit, $\boxed{T_1 = B_1 \cap C_2 \cap D_3}$.
    Chaque saut ayant une probabilité p d'être réussi, indépendamment des précédents,
    on a bien-sûr $\boxed{P(T_1) = p \times p \times p = p^3}$.
    On peut aussi expliquer cela avec la formule des probabilités composées :

    $$P(T_1) = P(B_1 \cap C_2 \cap D_3) = \underbrace{P(B_1)}_{=p} \times \underbrace{P_{B_1}(C_2)}_{=p} \times \underbrace{P_{B_1 \cap C_2}(D_3)}_{=p} = p^3.$$

15. (a) Soit $k \geqslant 2$.
    - Si T_k est réalisé, l'aventurier atteint la sortie au bout de la k-ème tentative, et pas avant.

    Ainsi, ni T_1, ni T_2, ..., ni T_{k-1} ne sont réalisés. Ceci montre que $\boxed{T_k \subset \bigcap\limits_{i=1}^{k-1} \overline{T_i}}$.

• Conditionnellement à l'évènement $\overline{T_1} \cap \ldots \cap \overline{T_{k-1}}$, c'est à dire en sachant que l'aventurier n'a pas atteint la sortie durant les $k-1$ premières tentatives, la probabilité qu'il y arrive à la k-ème revient à la probabilité qu'il réussisse trois sauts consécutifs : c'est p^3.
(Même situation que pour le calcul de $P(T_1)$ précédemment).
Ainsi : $\boxed{P_{\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\ldots\cap\overline{T_{k-1}}}(T_k) = p^3}$.

• Enfin, puisque $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$, on obtient ici :

$$P_{\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\ldots\cap\overline{T_{k-1}}}(\overline{T_k}) = 1 - P_{\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\ldots\cap\overline{T_{k-1}}}(T_k)$$

c'est à dire $\boxed{P_{\overline{T_1}\cap\overline{T_2}\cap\ldots\cap\overline{T_{k-1}}}(\overline{T_k}) = 1 - p^3}$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on utilise la formule des probabilités composées :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{T_i}\right) = \underbrace{P(\overline{T_1})}_{=1-p^3} \times \underbrace{P_{\overline{T_1}}(\overline{T_2})}_{=1-p^3} \times \underbrace{P_{\overline{T_1}\cap\overline{T_2}}(\overline{T_3})}_{=1-p^3} \times \ldots \times \underbrace{P_{\overline{T_1}\cap\ldots\cap\overline{T_{k-1}}}(\overline{T_k})}_{=1-p^3}$$

d'où : $\boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{T_i}\right) = (1-p^3)^k}$.

Intuitivement, la probabilité de "rater" une tentative (conditionnellement au fait qu'on ait raté les précédentes) est toujours de $1-p^3$. Il s'agit ici de rater les k premières tentatives successives.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a vu que $S_n = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$. Autrement dit, $\overline{S_n} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{T_i}$ avec la loi de (De) Morgan.

Ainsi : $P(S_n) = 1 - P(\overline{S_n}) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{T_i}\right)$ d'où $\boxed{P(S_n) = 1 - (1-p^3)^n}$

16. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On a vu en 15.(a) que $T_k \subset \bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{T_i}$. Ainsi, $T_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{T_i}\right) \cap T_k$. Il en résulte :

$$P(T_k) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{T_i}\right) \cap T_k\right) = \underbrace{P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{T_i}\right)}_{=(1-p^3)^{k-1}} \times \underbrace{P_{\overline{T_1}\cap\ldots\cap\overline{T_{k-1}}}(T_k)}_{=p^3}$$

Ainsi : $\boxed{P(T_k) = (1-p^3)^{k-1}p^3}$. (On rate les $k-1$ premières tentatives, on réussit la k-ème)

(b) Rappelons que $S_n = \bigcup_{k=1}^{n} T_k$ et que cette union est disjointe. On obtient donc :

$$\begin{aligned} P(S_n) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{n} T_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(T_k) = \sum_{k=1}^{n} (1-p^3)^{k-1}p^3 \\ &= p^3 \sum_{k=1}^{n} (1-p^3)^{k-1} = p^3 \sum_{j=0}^{n-1} (1-p^3)^j \\ &= p^3 \times \frac{1-(1-p^3)^n}{1-(1-p^3))} \end{aligned}$$

en utilisant la formule pour les sommes géométriques. En simplifiant, on retrouve $\boxed{P(S_n) = 1 - (1-p^3)^n}$.

17. (a) Rappelons encore une fois que $p \in]0,1[$, donc $p^3 \in]0,1[$ et donc $1-p^3 \in]0,1[$.
Il en résulte que $\lim_{n\to+\infty} (1-p^3)^n = 0$ et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(S_n) = 1}$.
Rappelons que l'évènement S_n est "L'aventurier atteint la sortie en n tentatives ou moins".
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si S_n est réalisé, alors en particulier l'aventurier a fini par quitter le donjon, donc Z est réalisé. Ceci montre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \subset Z$.
On conclut classiquement que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_n) \leqslant P(Z) \leqslant 1$,
puis par théorème des gendarmes $\boxed{P(Z) = 1}$.

(b) Généralisation : Au lieu de 3 sauts, on suppose que l'aventurier doit effectuer $N \in \mathbb{N}^*$ sauts consécutifs pour rejoindre la plateforme D (la probabilité pour chaque saut étant toujours p).

Dans ce cas, la probabilité de "réussir une tentative" devient p^N au lieu de p^3.
En adaptant les raisonnements précédents, on trouve cette fois : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_n) = 1 - (1-p^N)^n}$

A nouveau, on a facilement $\lim\limits_{n \to +\infty} P(S_n) = 1$, et on déduit de $P(S_n) \leqslant P(Z) \leqslant 1$ que $\boxed{P(Z) = 1}$.
Ainsi, même si le nombre N de sauts conécutifs à effectuer est très grand, la probabilité que l'aventurier finisse à un moment ou à un autre par atteindre la sortie est de 1. On dit que l'aventurier finira presque-sûrement par s'échapper du donjon.