24

Somme de sous-espaces vectoriels - Corrigé

Exercice 1 (Vrai ou Faux ?)

(a) Vrai.
(b) Faux : la somme n'est pas directe puisque $\mathbb{R}_3[X] \cap \mathbb{R}_2[X] = \mathbb{R}_2[X] \neq \{0\}$.
(c) Faux.
(d) Faux : en posant $v = 0_E$, on a $v \in F$ et $v \in G$. En revanche, si on suppose $v \neq 0_E$, c'est vrai !
(Puisque $F \cap G = \{0_E\}$ donc le seul vecteur appartenant à F et à G est le vecteur nul).
(e) Faux, le complémentaire $\overline{F}$ de F n'est même pas un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2 (Des sommes directes)

1. • Méthode 1 : On peut raisonner par concaténation des bases.
On montre facilement que $B_F = \Big((1,-1)\Big)$ est une base de F et $B_G = \Big((2,1)\Big)$ est une base de G.
Il est clair que $B = \Big((1,-1),(2,1)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$
(deux vecteurs non-colinéaires, donc famille libre de cardinal $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$).
Il en résulte que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

• Méthode 2 : il est clair que $\dim(F) = \dim(G) = 1$ donc $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^2)$.
De plus $F \cap G = \{(0,0)\}$ car si $v = (x,y) \in F \cap G$, on doit avoir $\begin{cases} x+y=0 \\ x = 2y \end{cases}$ d'où $(x,y) = (0,0)$.
Il en résulte que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

2. • Méthode 1 : on montre facilement que $B_F = \Big((-3,1,0),(-1,0,1)\Big)$ est une base de F
et que $B_G = \Big((1,0,1)\Big)$ est une base de G.
On vérifie alors que $B = \Big((-3,1,0),(-1,0,1),(1,0,1)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
(par exemple en montrant que c'est une famille de rang 3).
Il en résulte que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

• Méthode 2 : il est clair que $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 1$, on a donc $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3)$.
De plus $F \cap G = \{(0,0,0)\}$.
En effet, si $v = (x,y,z) \in F \cap G$, on a $x + 3y + z = 0$ et (x,y,z) est proportionnel au vecteur $(1,0,1)$.
On peut donc écrire, pour un $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x,y,z) = \lambda(1,0,1)$, ainsi :

$$\begin{cases} (x,y,z) = (\lambda, 0, \lambda) \\ x + 3y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda, y = 0, z = \lambda \\ \lambda + 0 + \lambda = 0 \end{cases} \iff (x,y,z) = (0,0,0).$$

Il en résulte que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

3. On montre facilement que $B_F = \Big((X-1), X(X-1)\Big)$ est une base de F
et que $B_G = \Big((X-2)(X-3)\Big)$ est une base de G.
• Méthode 1 : on a ainsi $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 1$ donc $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.
De plus, $F \cap G = \{0\}$. En effet, si $P \in F \cap G$, on a $P \in \mathbb{R}_2[X]$ avec $P(1) = P(2) = P(3) = 0$.
P admet donc 3 racines distinctes et $\deg(P) \leqslant 2$, donc $P = 0$.
On en déduit $F \oplus G = \mathbb{R}_2[X]$.

• Méthode 2 : On vérifie que $\mathcal{B} = \Big((X-1), X(X-1), (X-2)(X-3)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (calculer le rang, ou alors vérifier que c'est une famille libre). On en déduit $F \oplus G = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 3 (Une somme de S.E.V de $\mathbb{R}^3$)

(a) On montre facilement que $B_F = \Big((1,-2,0),(0,1,1)\Big)$ est une base de F

et que $B_G = \Big((-2,1,0),(-3,0,1)\Big)$ est une base de G.

• Méthode 1 : $\mathcal{B} = \Big((1,-2,0),(0,1,1),(-2,1,0),(-3,0,1)\Big)$ n'est évidemment pas une famille libre. Ce n'est donc pas une base de $F+G$. Ainsi F et G ne sont pas en somme directe.

• Méthode 2 : $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 2$. On n'a donc pas $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$
(car cela donnerait $\dim(F+G) = 4$, impossible puisque $F+G \subset \mathbb{R}^3$!)
Ainsi, F et G ne sont pas en somme directe.

(b) Au vu des bases déterminées en (a),

$$F+G = Vect\Big(1,-2,0),(0,1,1),(-2,1,0),(-3,0,1)\Big).$$

On vérifie facilement que cette famille de 4 vecteurs est génératrice de $\mathbb{R}^3$: soit en effectuant des opérations élémentaires pour se ramener à $\Big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\Big)$, soit plus simplement en montrant que c'est une famille de rang 3 ! Ainsi, on a bien $F+G = Vect\Big(1,-2,0),(0,1,1),(-2,1,0),(-3,0,1)\Big) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 4 (Supplémentaires à trouver)

1. On complète la famille $(1,0,1),(1,1,2)$ en une base de $\mathbb{R}^3$. On peut par exemple rajouter $(0,0,1)$: on vérifie facilement que $B = \Big((1,0,1),(1,1,2),(0,0,1)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (calculer le rang par exemple).
En posant $G = Vect((0,0,1))$, on a alors $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ (cela se voit par concaténation des bases)

2. On complète la famille $\Big((1,0,0,1),(1,0,1,2)\Big)$ en une base de $\mathbb{R}^4$.
On peut par exemple rajouter les deux vecteurs $(1,0,0,0)$ et $(0,1,0,0)$.
On vérifie facilement que $B = \Big((1,0,0,1),(1,0,1,2),(1,0,0,0),(0,1,0,0)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ (calculer le rang).
En posant $G = Vect\Big(1,0,0,0),(0,1,0,0)\Big)$, on a alors $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

3. On sait qu'une base de $\mathbb{R}_2[X]$ est $(1, X, X^2)$.
En ajoutant les deux polynômes X^3 et X^4, on obtient la famille $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ qui est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.
Ainsi, en posant $G = Vect(X^3, X^4)$, on a $\mathbb{R}_2[X] \oplus G = \mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 5 (Supplémentaires en dim. infinie)

F est l'ensemble des fonctions constantes.
G est l'ensemble des fonctions continues qui s'annulent en 0.
Pour montrer que $C(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F \oplus G$, on peut montrer que toute fonction $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$.

Soit $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ fixée.

• Analyse : supposons qu'il existe $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$ telles que $f = f_1 + f_2$.
f_1 est une fonction constante : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = c$.
On a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f_1(x) + f_2(x) = c + f_2(x)$ donc $f(0) = c + f_2(0) = c$.
Ainsi $c = f(0)$ et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = f(x) - c$.
Les fonctions f_1 et f_2 sont donc nécessairement données par :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(0) \end{array} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - f(0) \end{array}$$

• Synthèse : en posant $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(0) \end{array}$ et $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - f(0) \end{array}$
on a bien $f_1 \in F$, $f_2 \in G$ et $f = f_1 + f_2$.

Conclusion : on a bien montré que $C(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice 6 (Somme de trois S.E.V)

Une base de F est $B_F = \left(X^2, X^4\right)$. Une base de G est $B_G = \left(X\right)$. Une base de H est $B_H = \left(X^3\right)$.
On a $F + G + H = Vect\left(X^2, X^4, X, X^3\right)$.
La famille $\left(X^2, X^4, X, X^3\right)$ est libre (polynômes de degrés échelonnés) : c'est donc une base de $F + G + H$.
D'après le théorème de concaténation des bases, on en déduit que la somme $F + G + H$ est directe.
On a ainsi $F \oplus G \oplus H = Vect\left(X^2, X^4, X, X^3\right)$.

Exercice 7 (Un projecteur dans $\mathbb{R}^4$)

1. $B_F = \big((1,1,1,1),(1,1,1,0)\big)$ est une base de F.
$B_G = \big((1,1,0,0),(1,0,0,0)\big)$ est une base de G.
On montre facilement que $B = \big((1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0,)(1,0,0,0)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ (calculer son rang par exemple). Il en résulte que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

2. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ fixé. On cherche sa décomposition dans la base B précédente.
Déterminons les réels a, b, c, d tels que

$$(x,y,z,t) = a(1,1,1,1) + b(1,1,1,0) + c(1,1,0,0) + d(1,0,0,0)$$
$$\iff \begin{cases} a+b+c+d = x \\ a+b+c = y \\ a+b = z \\ a = t \end{cases} \iff \begin{cases} d = x-y \\ c = y-z \\ b = z-t \\ a = t \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$(x,y,z,t) = \underbrace{t \cdot (1,1,1,1) + (z-t) \cdot (1,1,1,0)}_{\in F} + \underbrace{(y-z) \cdot (1,1,0,0) + (x-y) \cdot (1,0,0,0)}_{\in G}.$$

Cette décomposition permet de déterminer l'expression des projecteurs p et q associés à $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.
Le projecteur p sur F parallèlement à G et donc donné par :

$$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ \ p((x,y,z,t)) = t \cdot (1,1,1,1) + (z-t) \cdot (1,1,1,0) = (z,z,z,t).$$

Exercice 8 (Projecteurs dans $\mathbb{R}^3$)

1. $B_F = \big((1,2,-1)\big)$ est une base de F, $B_G = \big((1,0,1),(1,1,1)\big)$ est une base de G.
On vérifier facilement que $B = \big((1,2,-1),(1,0,1),(1,1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (calculer le rang par exemple).
On en déduit bien que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On cherche sa décomposition dans la base B précédente :

$$(x,y,z) = a(1,2,-1) + b(1,0,1) + c(1,1,1)$$
$$\iff \begin{cases} a+b+c = x \\ 2a \quad\ +c = y \\ -a+b+c = z \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c &= x \\ \ \ -2b-c &= y-2x \\ \ \ 2b+2c &= z+x \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c &= x \\ \ \ -2b-c &= y-2x \\ \qquad\quad c &= -x+y+z \end{cases} \iff \begin{cases} a &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z \\ b &= \frac{3}{2}x - y - \frac{1}{2}z \\ c &= -x+y+z \end{cases}$$

On obtient donc, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x,y,z) = \underbrace{(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z) \cdot (1,2,-1)}_{\in F} + \underbrace{(\frac{3}{2}x - y - \frac{1}{2}z) \cdot (1,0,1) + (-x+y+z) \cdot (1,1,1)}_{\in G}$$

Le projecteur p sur F parallèlement à G est donné par :

$$p((x,y,z)) = (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z) \cdot (1,2,-1) = \Big(\frac{x-z}{2}, x-z+\frac{-x+z}{2}\Big).$$

Le projecteur q sur G parallèlement à F est donné par :

$$q((x,y,z) = (\frac{3}{2}x - y - \frac{1}{2}z) \cdot (1,0,1) + (-x+y+z) \cdot (1,1,1) = \Big(\frac{x+z}{2}, -x+y+z, \frac{x+z}{2}\Big)$$

Exercice 9 (Sur quoi / parallèlement à quoi ?)

1. g est évidemment un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Pour montrer que c'est un projecteur, il faut vérifier que $g^2 = g$, c'est à dire $g \circ g = g$.
Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$g(g(x,y,z)) = g(x-2z, y+z, 0) = \Big(x+2z-0, y+z+0, 0\Big) = (x+2z, y+z, 0) = g((x,y,z)).$$

Ceci montre donc que g est un projecteur.

2. On sait alors que g est le projecteur sur $F = Im(g)$, parallèlement à $G = Ker(f)$.

- On calcule $Im(g)$:

$$Im(g) = Vect\Big(g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1)\Big) = Vect\Big((1,0,0),(0,1,0),(-2,1,0)\Big) = Vect\Big((1,0,0),(0,1,0)\Big).$$

(Cette dernière famille est une base de F)

- On calcule $Ker(g)$:

$$\begin{aligned} Ker(g) &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-2z, y+z, 0) = (0,0,0)\Big\} = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x-2z=0,\ \ y+z=0\Big\} \\ &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x=2z,\ \ y=-z\Big\} = \Big\{(2z,-z,z),\ z \in \mathbb{R}\Big\} = Vect\Big((2,-1,1)\Big). \end{aligned}$$

(Cette dernière famille est une base de G)

Remarque : on peut bel et bien constater que $Im(g) \oplus Ker(g) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 10 (Somme de projecteurs)

On sait que p et q sont des projecteurs, c'est à dire que $p^2 = p$ et $q^2 = q$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} p+q \text{ est un projecteur } &\Longleftrightarrow (p+q)^2 = p+q \Longleftrightarrow (p+q)\circ(p+q) = p+q \\ &\Longleftrightarrow p^2 + p\circ q + q \circ p + q^2 = p+q \\ &\Longleftrightarrow p + p\circ q + q\circ p + q = p+q \quad (\text{car } p^2 = p \text{ et } q^2 = q) \\ &\Longleftrightarrow p\circ q + q \circ p = 0 \\ &\Longleftarrow p \circ q = 0 \text{ et } q \circ p = 0. \end{aligned}$$

Pour conclure, il nous reste à montrer l'implication $p\circ q + q\circ p = 0 \Longrightarrow p\circ q = 0$ et $q \circ p = 0$.
Supposons que $p\circ q + q \circ p = 0$ et montrons que $p \circ q = 0$ et $q \circ p = 0$.
On a $p \circ q = -q \circ p$. Puisque $p = p^2$, on a les égalités suivantes :

$$p\circ q = p^2 \circ q = p\circ(p\circ q) = p\circ(-q\circ p) = -p\circ(q\circ p) = -(p\circ q)\circ p = (q\circ p)\circ p = q \circ p^2 = q\circ p.$$

Ainsi $\;p\circ q = -q\circ p\;$ et $\;p\circ q = q\circ p$. Ceci entraine évidemment $p \circ q = 0$ et $q\circ p = 0$.