

Semaines 1 et 2

Logique, ensembles, sommes et produits

• Énoncés / formules à connaître :

Logique, raisonnement, ensembles

- Notions d'implications entre propositions logiques.
- Maîtrise de différents types de raisonnement : direct, contraposée, absurde, analyse-synthèse...
- Rédaction d'une récurrence simple, double, éventuellement forte.
- Utilisation des quantificateurs.
- Union/intersection (pour une famille finie d'ensemble), complémentaire.
- Propriétés : $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B$, $(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B$, $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$, $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i}$, etc...

Sommes et produits

- Sommes classiques : $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=1}^n k^3$, $\sum_{k=0}^n x^k$, développement de $a^n - b^n$
- Notion de factorielle ($n!$)
- Calcul de sommes et produits par changement d'indice ou télescopage.
- Calcul de somme double : $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j}$, $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$, $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}$.

• Démonstrations à connaître :

- Formules de Morgan : $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$ et $\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$.
- Calcul de $\sum_{k=1}^n k$ (preuve "du petit Gauss" ou bien par récurrence).
- Calcul de $\sum_{k=0}^n x^k$ (par récurrence).
- Identité $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.