12

Systèmes linéaires - Corrigé

Exercice 1 (Systèmes échelonnés)

• (S_1) est un système triangulaire carré avec des coefficients diagonaux non-nuls : on sait donc qu'il admet une unique solution. On peut vérifier par le calcul que cette unique solution est $(\frac{-3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{3}{2})$.
• (S_2) est un système triangulaire "incomplet" : on aura une infinité de solutions (méthode de l'inconnue auxiliaire). L'ensemble des solutions est par exemple : $\{(2+y, y, -1+y),\ y \in \mathbb{R}\}$.
• (S_3) est également un système triangulaire "incomplet" une fois qu'on a retiré l'équation $0 = 0$. On a donc une infinité de solutions. L'ensemble des solutions est par exemple : $\{(1+z-t, z+t, z, t),\ z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$.
• (S_4) est aussi un sytème triangulaire "incomplet" : on a une infinité de solutions.
L'ensemble des solutions est par exemple : $\{(5+t, 4+3t, 4+2t, t),\ t \in \mathbb{R}\}$.
• (S_5) est un système triangulaire carré avec des coefficients diagonaux non-nuls : il y a donc une unique solution.
Le calcul montre que cette unique solution est $(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, 2, 0)$.

Exercice 2 (3 inconnues)

Dans ce corrigé, on se contente de donner l'ensemble des solutions sans détailler le pivot de Gauss.

- Solutions de (S_1) : $\{(1, 1, -1)\}$ (Système de Cramer)
- Solutions de (S_2) : $\emptyset$ (Système incompatible)
- Solutions de (S_3) : $\{(\frac{4}{3} - \frac{z}{3}, -\frac{2}{3} - \frac{z}{3}, z),\ z \in \mathbb{R}\}$.
- Solutions de (S_4) : $\{(3, 2, 1)\}$ (unique solution, mais on ne dira pas "système de Cramer", car il n'est pas carré)

Exercice 3 (4 inconnues)

Dans ce corrigé, on se contente de donner l'ensemble des solutions sans détailler le pivot de Gauss.

- Solutions de (S_1) : $\{(x, y, 5x+2y, 3x+\frac{5}{2}y),\ x, y \in \mathbb{R}\}$
- Solutions de (S_2) : $\{(2-2y-3t, y, 5+2t, t),\ y, t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4 (Quel second membre ?)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ fixés. On applique le pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=a \\ x+2y+z=b \\ 3x+y-2z=c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} x+2y+z=b \\ 2x+y-z=a \\ 3x+y-2z=c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} x+2y+z=b \\ -3y-3z=a-2b \\ -5y-5z=c-3b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} x+2y+z=b \\ y+z=\frac{2b-a}{3} \\ y+z=\frac{3b-c}{5} \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{r} x+2y+z=b \\ y+z=\frac{2b-a}{3} \\ 0=\frac{3b-c}{5}-\frac{2b-a}{3} \end{array}\right.$$

On voit donc que ce système admettra des solutions (et il en aura alors une infinité !) si et seulement si l'égalité $\dfrac{3b-c}{5} - \dfrac{2b-a}{3} = 0$ est satisfaite. On peut simplifier un peu cette condition :

$$\frac{3b-c}{5} - \frac{2b-a}{3} = 0 \iff 3(3b-c) - 5(2b-a) = 0 \iff 5a - 4b - 3c = 0$$

Exercice 5 (Systèmes et polynômes)

1. Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$: on peut donc écrire $Q = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcr} Q(-1) & = & 1 \\ Q(1) & = & -2 \\ Q(2) & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} a-b+c & = & 1 \\ a+b+c & = & -2 \\ 4a+2b+c & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} a-b+c & = & 1 \\ 2b & = & -3 \\ 6b-3c & = & -5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} a-b+c & = & 1 \\ 2b & = & -3 \\ -3c & = & 4 \end{array}\right.$$

On obtient donc l'unique solution : $(a, b, c) = (\frac{5}{6}, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{3})$.
Il y a ainsi un unique polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ satisfaisant les égalités voulues, c'est :

$$Q = \frac{5}{6}X^2 - \frac{3}{2}X - \frac{4}{3}.$$

---

2. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ fixé. On peut donc l'écrire $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Pour tout $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, on cherche à écrire $P = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k P_k$, c'est à dire :

$$\begin{aligned} a + bX + cX^2 + dX^3 &= \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot (X+1) + \lambda_2 \cdot (2X^2 - X + 1) + \lambda_3 \cdot (X^3 - 2X) \\ &= (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3)X + 2\lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on a donc les équivalences :

$$P = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k P_k \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 \qquad & = a \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 & = b \\ 2\lambda_2 \qquad\quad & = c \\ \lambda_3 & = d \end{array} \right.$$

Ce système étant triangulaire avec des coefficients diagonaux non-nuls, il est de Cramer : il admet une unique solution $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (et ce, indépendamment du second membre (a, b, c, d), c'est à dire des coefficients de P). On pourrait bien-sûr déterminer les valeurs de $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ en fonction de a, b, c, d, mais ce n'est pas demandé ici. On conclut qu'il existe un unique quadruplet $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que $P = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k P_k$.

Exercice 6 (Système à paramètre 1)

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On applique le pivot de Gauss en s'assurant à chaque fois de choisir un pivot non-nul ! (On ne peut pas choisir a comme pivot par exemple, à moins de supposer que $a \neq 0$...)

$$\left\{ \begin{array}{r} ax + y = 1 \\ x + a^2 y = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x + a^2 y = 0 \\ ax + y = 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x \quad + a^2 y = 0 \\ (1 - a^3) y = 1 \end{array} \right.$$

Ce dernier système triangulaire est de Cramer si et seulement ses coefficients diagonaux sont non-nuls, c'est à dire si et seulement si $1 - a^3 \neq 0$.

- Lorsque $a \neq 1$, on peut poursuivre la résolution pour trouver l'unique solution : $(x, y) = \left(\dfrac{-a^2}{1 - a^3}, \dfrac{1}{1 - a^3} \right)$
- Lorsque $a = 1$, le système est incompatible.

Exercice 7 (Système à paramètre 2)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, puisque la question est de savoir si le système est de Cramer, on peut se contenter d'étudier le système homogène associé ! (Rappelons qu'un système carré est de Cramer ssi son système homogène associé l'est). On remplace donc le second membre par des zéros.
Comme dans l'exercice précédent, on applique ensuite le pivot de Gauss en s'assurant de choisir toujours un pivot non-nul. On peut commencer par exemple par choisir le "$7x$" de la ligne 2 comme pivot :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} (3-\lambda)x & -y & +z & = 0 \\ 7x & +(-5-\lambda)y & +z & = 0 \\ 6x & -6y & +(2-\lambda)z & = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 7x & +(-5-\lambda)y & +z & = 0 \\ (3-\lambda)x & -y & +z & = 0 \\ 6x & -6y & +(2-\lambda)z & = 0 \end{array} \right.$$

On effectue les opérations : $L_2 \leftarrow 7L_2 - (3-\lambda)L_1$ et $L_3 \leftarrow 7L_3 - 6L_1$. (toujours possible, car $7 \neq 0$)
Après calcul et simplification, cela donne :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 7x & +(-5-\lambda)y & +z & = 0 \\ & (-\lambda^2 - 2\lambda + 8)y & +(\lambda+4)z & = 0 \\ & (6\lambda - 12)y & +(-7\lambda + 8)z & = 0 \end{array} \right.$$

On veut ensuite poursuivre en trouvant un pivot adéquat pour les "y". Dans cette optique, il peut être judicieux de factoriser les polynômes en λ : on remarque facilement que

$$-\lambda^2 - 2\lambda + 8 = -(\lambda - 2)(\lambda + 4) \quad \text{et} \quad 6\lambda - 12 = 6(\lambda - 2)$$

donc le système se ré-écrit :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 7x & +(-5-\lambda)y & +z & = 0 \\ & -(\lambda-2)(\lambda+4)y & +(\lambda+4)z & = 0 \\ & 6(\lambda-2)y & +(-7\lambda+8)z & = 0 \end{array} \right.$$

---

ou encore, en permutant les deux dernières lignes :

$$\left\{\begin{array}{llll} 7x & +(-5-\lambda)y & +z & =0 \\ & 6(\lambda-2)y & +(-7\lambda+8)z & =0 \\ & -(\lambda-2)(\lambda+4)y & +(\lambda+4)z & =0 \end{array}\right.$$

Puisque le "$(\lambda-2)$" est présent dans les deux coefficients de y sur les lignes 2 et 3, on voit qu'on peut poursuivre le pivot de Gauss en effectuant l'opération : $L_3 \leftarrow 6L_3+(\lambda+4)L_2$ pour supprimer "y" sur la dernière ligne. A nouveau, cette opération est possible quelque soit la valeur de λ (car $6 \neq 0$).
On obtient alors, après calcul et simplification :

$$\left\{\begin{array}{llll} 7x & +(-5-\lambda)y & +z & =0 \\ & 6(\lambda-2)y & +(-7\lambda+8)z & =0 \\ & & -7(\lambda-2)(\lambda+4)z & =0 \end{array}\right.$$

On a enfin terminé le pivot de Gauss et obtenu un système triangulaire carré !
Pour conclure, on sait que ce système triangulaire admet une unique solution (qui sera en l'occurence $(0,0,0)$, car le système est homogène) si et seulement si les coefficients diagonaux sont non-nuls. Notre système est donc de Cramer ssi les 3 conditions suivantes sont satisfaites :

$$7 \neq 0, \;\; 6(\lambda-2) \neq 0, \;\; -7(\lambda-2)(\lambda+4) \neq 0.$$

Ainsi, le système est de Cramer ssi $\lambda \notin \{2,-4\}$.

Exercice 8 (Système à paramètre 3)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le système d'équation se ré-écrit en un système homogène :

$$\left\{\begin{array}{llll} -\lambda x & +2y & -z & =0 \\ 3x & +(-\lambda-2)y & & =0 \\ -2x & +2y & +(1-\lambda)z & =0 \end{array}\right.$$

Comme dans l'exercice précédent, on essaie de mener à bien un pivot de Gauss en choisissant, tant que c'est possible, des pivots non-nuls (qui fonctionnent pour toute valeur de λ). On peut par exemple choisir le "$3x$" comme pivot pour débuter :

$$\left\{\begin{array}{llll} 3x & +(-\lambda-2)y & & =0 \\ -\lambda x & +2y & -z & =0 \\ -2x & +2y & +(1-\lambda)z & =0 \end{array}\right.$$

On effectue alors les opérations : $L_2 \leftarrow 3L_2+\lambda L_1$ et $L_3 \leftarrow 3L_3+2L_1$ (toujours possible car $3 \neq 0$)
Après calcul et simplifications, cela donne :

$$(\star)\left\{\begin{array}{llll} 3x & +(-\lambda-2)y & & =0 \\ & (-\lambda^2-2\lambda+6)y & -z & =0 \\ & 2(1-\lambda)y & +(1-\lambda)z & =0 \end{array}\right.$$

On constate alors que $(1-\lambda)$ est présent partout en facteur sur la ligne 3.
On pourrait donc naturelleemnt traiter à part le cas où $\lambda=1$: pour $\lambda=1$, le système $(\star)$ se ré-écrit :

$$\left\{\begin{array}{llll} 3x & -3y & & =0 \\ & 3y & -z & =0 \\ & 0 & & =0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} 3x & -3y & & =0 \\ & 3y & -z & =0 \end{array}\right.$$

<u>Pour $\lambda=1$</u>, on trouve donc une infinité de solutions : $\boxed{\{(y,y,3y),\; y \in \mathbb{R}\}}$.

<u>Supposons à présent que $\lambda \neq 1$</u>. Dans ce cas, on peut diviser la dernière ligne de $(\star)$ par $(1-\lambda)$, et on obtient :

$$\left\{\begin{array}{llll} 3x & +(-\lambda-2)y & & =0 \\ & (-\lambda^2-2\lambda+6)y & -z & =0 \\ & 2y & +z & =0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} 3x & +(-\lambda-2)y & & =0 \\ & 2y & +z & =0 \\ & (-\lambda^2-2\lambda+6)y & -z & =0 \end{array}\right.$$

Pour simplifier le dernier calcul, on peut faire un pivot sur les "z" plutôt que les "y". On intervertit donc les variables :

$$\left\{\begin{array}{ccll} 3x & & +(-\lambda-2)y & =0 \\ & z & +2y & =0 \\ & -z & (-\lambda^2-2\lambda+6)y & =0 \end{array}\right.$$

On termine alors le pivot de Gauss avec l'opération : $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ (toujours possible) pour obtenir :

$$(\star\star)\left\{\begin{array}{ccll} 3x & & +(-\lambda-2)y & =0 \\ & z & +2y & =0 \\ & & (-\lambda^2-2\lambda+8)y & =0 \end{array}\right.$$

Pour finir, ce système triangulaire carré admet une unique solution si et seulement si ces coefficients diagonaux sont non-nuls, c'est à dire lorsque $-\lambda^2 - 2\lambda + 8 \neq 0$. Après calcul rapide, les solutions de cette équation sont $\lambda = 2$ et $\lambda = -4$. Ainsi :

- Le cas particulier $\underline{\lambda = 1}$ a été traité plus tôt : on a une infinité de solutions données par $\boxed{\{(y, y, 3y),\ y \in \mathbb{R}\}}$.
- Pour $\lambda \notin \{1, 2, -4\}$, le système est de Cramer et admet donc $\boxed{\text{l'unique solution } (0,0,0)}$.
- Pour $\lambda = 2$, on repart de $(\star\star)$ et le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{cccl} 3x & & -4y & =0 \\ & z & +2y & =0 \\ & & 0 & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccl} 3x & & -4y & =0 \\ & z & +2y & =0 \end{array}\right.$$

On trouve alors une infinité de solutions : $\boxed{\{(\frac{4}{3}y, y, -2y),\ y \in \mathbb{R}\}}$.

- Pour $\lambda = -4$, on repart de $(\star\star)$ et le système s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{cccl} 3x & & +2y & =0 \\ & z & +2y & =0 \\ & & 0 & =0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccl} 3x & & +2y & =0 \\ & z & +2y & =0 \end{array}\right.$$

On trouve alors une infinité de solutions : $\boxed{\{(-\frac{2}{3}y, y, -2y),\ y \in \mathbb{R}\}}$.