26

Applications linéaires en dimension finie

Introduction et motivation

Rappels : Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Le noyau de f : $Ker(f) = \Big\{v \in E \mid f(v) = 0_F\Big\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
  L'application f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0_E\}$.
- L'image de f : $Im(f) = \Big\{f(v),\ v \in E\Big\} = \Big\{u \in F \mid \exists v \in E, u = f(v)\Big\}$ est un S.E.V de F.
  L'application f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.

Lorsque l'on travaille dans un espace vectoriel de dimension finie, on a vu que des "arguments de dimension" permettent de prédire et montrer qu'une famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre/génératrice ou une base de E.
On peut également déduire ces informations en calculant le rang de la famille $(v_1, \dots, v_p)$.

On va à présent étudier l'impact de ces "arguments de dimension" sur les applications linéaires. Notamment :
$\boxed{1}$ On va relier les dimensions de $Ker(f)$ et $Im(f)$, puis définir le rang d'une application linéaire f.

(Ce qui permettra de prédire et montrer qu'une application linéaire est injective/surjective/bijective.)

$\boxed{2}$ On va montrer qu'en dimension finie, une application linéaire peut être "codée" par une matrice.
On établira alors de multiples liens entre le calcul des applications linéaires et le calcul matriciel.

1 Théorème du rang, rang d'une application linéaire

1.1 Dimension du noyau et de l'image

Théorème 1 (Théorème du rang)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont de dimension finie, et on a l'égalité :

$$\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(E).$$

Preuve :

Notons $n = dim(E)$ et $p = dim(Ker(f))$. Comme $Ker(f) \subset E$ on a $p \leqslant n$.

On introduit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $Ker(f)$.
Puisque c'est une famille libre de E, on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E.

On sait alors que $Im(f) = Vect\Big(f(e_1), \dots, f(e_p), f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)\Big)$. (résultat connu)

Or puisque $e_1, \dots, e_p \in Ker(f)$ on a $f(e_1) = \ldots = f(e_p) = 0_F$.

Ainsi on a : $Im(f) = Vect\Big(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)\Big)$.

Vérifions que la famille $\Big(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)\Big)$ est libre : ce sera donc une base de $Im(f)$.

Pour tous $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F \iff f\left(\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F \iff \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i \in Ker(f) \iff \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i \in Vect(e_1, \dots, e_p).$$

Comme la famille $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots e_n)$ est libre, ceci n'est possible que si $\forall i \in [\![p+1, n]\!], \lambda_i = 0$.

Conclusion : la famille $\Big(f(e_{p+1}), \dots, f(e_n)\Big)$ est une base de $Im(f)$.
Comme elle contient $n-p$ vecteurs, on a $dim(Im(f)) = n - p = dim(E) - dim(Ker(f))$. $\square$

Remarque 1

Ainsi, plus le noyau $Ker(f)$ "est petit", plus l'image $Im(f)$ "est grande" (et inversement) !

- Si $Ker(f) = E$ i.e $\dim(Ker(f)) = \dim(E)$ et on a donc $\dim(Im(f)) = 0$, i.e $Im(f) = \{0_F\}$.
  Logique : c'est le cas où $\forall v \in E,\ f(v) = 0_F$ (f est l'application linéaire nulle).
- Si $Ker(f) = \{0_E\}$ i.e $\dim(Ker(f)) = 0$ et on a donc dans ce cas $\dim(Im(f)) = \dim(E)$.
  Notons qu'il s'agit de la dimension maximale possible pour $Im(f)$!

Exercice 1

On considère l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y,\ x+y+2z,\ y+z,\ -y-z) \end{array}$.

1. Sans aucun calcul : f est-elle surjective ?
2. Confirmer en calculant $Im(f)$.
3. Sans aucun calcul : f est-elle injective ?

1. On sait qu'on aura $\dim(Im(f)) + \dim(Ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
Ainsi $\dim(Im(f)) = 3 - \dim(Ker(f)) \leqslant 3$. Il est donc impossible que $Im(f) = \mathbb{R}^4$.
f n'est donc pas surjective !

2. On sait que

$$\begin{aligned} Im(f) &= Vect\Big(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\Big) = Vect\Big((1,1,0,0), (-1,1,1,-1), (0,2,1,-1)\Big) \\ &= Vect\Big((1,1,0,0), (-1,1,1,-1)\Big) \end{aligned}$$

On a déterminé une base $\Big((1,1,0,0), (-1,1,1,-1)\Big)$ de $Im(f)$.

3. On vient de voir que $\dim(Im(f)) = 2$. Donc $\dim(Ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(Im(f)) = 3 - 2 = 1$.
Ainsi $Ker(f) \neq \{0_E\}$: f n'est pas injective.

Le raisonnement employé dans la question 1. se généralise facilement :

Proposition 1 (Surjection/injection impossible)

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- Si $\dim(E) < \dim(F)$, alors f ne peut pas être surjective.
- Si $\dim(E) > \dim(F)$, alors f ne peut pas être injective.

Preuve :

D'après le Théorème du rang, $\dim(Kerf(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(E)$.

- Supposons $\dim(E) < \dim(F)$.

Alors $\dim(Im(f)) = \dim(E) - \dim(Ker(f)) \leqslant \dim(E) < \dim(F)$.
Il est donc impossible que $Im(f) = F$: f n'est pas surjective.

- Supposons $\dim(E) > \dim(F)$.

Alors $\dim(Ker(f)) = \dim(E) - \dim(Im(f)) \geqslant \dim(E) - \dim(F) > 0$.
(puisque $Im(f) \subset F$, on a $\dim(Im(f)) \leqslant \dim(F)$)
Il est donc impossible que $Ker(f) = \{0_E\}$: f n'est pas injective.

$\square$

Remarque 2

Pour retenir la "philosophie" de la Proposition 1 :

- Si $\dim(E) < \dim(F)$, on ne peut pas "recouvrir" F à partir de E : pas de surjection de E dans F.
- Si $\dim(E) > \dim(F)$, on ne peut pas "injecter" E dans F : pas d'injection de E dans F.

Ce résultat est similaire à celui qui concerne les applications entre ensembles finis :

- Si $Card(E) < Card(F)$, il n'existe pas de surjection de E dans F.
- Si $Card(E) > Card(F)$, il n'existe pas d'injection de E dans F.

Dessin :

Evoquons une dernière conséquence directe du Théorème du rang :

Proposition 2 (Noyau d'une forme linéaire non nulle)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit f une forme linéaire non-nulle sur E (c'est à dire $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ avec $f \neq 0$).

Alors $Im(f) = \mathbb{R}$ et $Ker(f)$ est un hyperplan de E.

Preuve :

- Puisque $Im(f) \subset \mathbb{R}$, on a $\dim(Im(f)) \leqslant \dim(\mathbb{R}) = 1$. Ainsi $\dim(Im(f)) \in \{0, 1\}$.

Puisque f n'est pas l'application nulle, on a $Im(f) \neq \{0\}$ et donc $\dim(Im(f)) \neq 0$.
Ainsi, $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ de dimension 1 : c'est forcément $Im(f) = \mathbb{R}$.

- D'après le Théorème du rang : $\dim(Ker(f)) = \dim(E) - \dim(Im(f)) = \dim(E) - 1$.

Autrement dit, $Ker(f)$ est un hyperplan de E. $\square$

Exemple

Soit $F = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\Big\}$.
On peut à présent annoncer **sans calcul** que F est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, c'est à dire $\dim(F) = 2$!

En effet : F est le noyau de la forme linéaire non nulle $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & 2x + y - z \end{array}$

1.2 Rang d'une application linéaire

Définition 1 (Rang d'une application linéaire)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque.
Le rang d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, est défini par : $rg(f) = \dim(Im(f))$.

Remarques 3

- Notons dès à présent que $\boxed{\text{la seule application de rang nul est l'application linéaire nulle}}$:

$$rg(f) = 0 \Longleftrightarrow dim(Im(f)) = 0 \Longleftrightarrow Im(f) = \{0_F\} \Longleftrightarrow \forall v \in E,\ f(v) = 0_F \Longleftrightarrow f = 0$$

- Le rang de f étant la dimension de son image, l'égalité du Théorème 1 peut se ré-écrire :

$$\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(E) \quad i.e \quad \dim(Ker(f)) + rg(f) = \dim(E)$$

d'où le nom "Théorème du rang" ! (parfois "formule du rang")

En pratique, le calcul du rang de f revient au calcul du rang d'une famille de vecteurs :

Proposition 3 (Calcul pratique du rang de f)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque.
On introduit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Alors pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\quad rg(f) = rg\Big(f(e_1), \dots, f(e_n)\Big)$.

Preuve :
Puisque $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $\quad Im(f) = Vect\Big(f(e_1), \dots, f(e_n)\Big)$.
Ainsi $\quad rg(f) = dim(Im(f)) = dim\Big(Vect\Big(f(e_1), \dots, f(e_n)\Big)\Big) = rg\Big(f(e_1), \dots, f(e_n)\Big)$,
par définition du rang d'une famille de vecteurs. □

L'intérêt fondamental du rang est le suivant :

Théorème 2 (Rang et injectivité / surjectivité)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un espace vectoriel quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$\boxed{1}$ On a toujours $\quad rg(f) \leqslant \dim(E) \quad$ avec égalité si et seulement si f est **injective** :

$$\boxed{rg(f) = \dim(E) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est injective}}$$

(et donc, si $rg(f) < \dim(E)$, $\quad f$ n'est pas injective.)

$\boxed{2}$ On a toujours $\quad rg(f) \leqslant \dim(F)$, $\quad$ avec égalité si et seulement si f est **surjective** :

$$\boxed{rg(f) = \dim(F) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est surjective}}$$

(et donc, si $rg(f) < \dim(F)$, $\quad f$ n'est pas surjective)

Preuve :

$\boxed{1}$ D'après le Théorème du rang, $rg(f) = \dim(Im(f)) = \dim(E) - \dim(Ker(f)) \leqslant \dim(E)$.
De plus : $\quad rg(f) = \dim(E) \Longleftrightarrow \dim(Ker(f)) = 0 \Longleftrightarrow Ker(f) = \{0_E\} \Longleftrightarrow f$ est injective.

$\boxed{2}$ Puisque $Im(f) \subset F$, par définition, $rg(f) = \dim(Im(f)) \leqslant \dim(F)$
De plus : $\quad rg(f) = \dim(F) \Longleftrightarrow \dim(Im(f)) = \dim(F) \Longleftrightarrow Im(f) = F \Longleftrightarrow f$ est surjective. □

Remarque 4

On notera l'analogie très claire entre ce théorème et celui concernant le rang d'une famille de vecteurs. Là où le rang d'une famille de vecteur permet de déterminer si celle-ci est libre et /ou génératrice, le rang d'une application linéaire permet de déterminer si celle-ci est injective et/ou surjective !

Exercice 2

1. Calculer le rang de l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x+z, x+y-z+t, 2x+y+t). \end{array}$

Est-elle injective ? Surjective ?

2. Calculer le rang de l'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & 3P - XP' \end{array}$ Est-elle injective ? Surjective ?

1.

$$\begin{aligned} rg(f) &= rg\Big(f(1,0,0,0), f(0,1,0,0), f(0,0,1,0), f(0,0,0,1)\Big) = rg\Big((1,1,2),(0,1,1),(1,-1,0),(0,1,1)\Big) \\ &= rg\Big((1,1,2),(0,1,1),(0,-2,-2),(0,1,1)\Big) = rg\Big((1,1,2),(0,1,1)\Big) = 2 \end{aligned}$$

Ainsi $rg(f) < \dim(\mathbb{R}^4)$ et $rg(f) < \dim(R^3)$: f n'est ni injective ni surjective.

2. Rappelons que $(1, X, X^2, X^3)$ est une base (la base canonique) de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$\begin{aligned} rg(\varphi) &= rg\Big(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)\Big) = rg\Big(3-0, 3X-X, 3X^2-X(2X), 3X^3-X(3X^2)\Big) \\ &= rg\Big(3, 2X, X^2, 0\Big) = rg\Big(1, X, X^2\Big) = 3. \end{aligned}$$

Ainsi $rg(\varphi) < \dim(\mathbb{R}_3[X])$ et $rg(\varphi) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$: φ n'est pas injective mais est surjective.

1.3 Conséquence importante : isomorphismes en dimension finie

Rappel : On dit que deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes lorsqu'il existe un **isomorphisme** (i.e une application linéaire bijective) de E dans F.
Lorsque E et F sont de dimensions finies, on a : E et F sont isomorphes $\iff \dim(E) = \dim(F)$.

Revenons sur ce résultat, à la lumière des notions introduites dans ce chapitre :

- Si $\dim(E) \neq \dim(F)$, une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ ne peut pas être un isomorphisme.

(Proposition 1 : si $\dim(E) < \dim(F)$, f n'est pas surjective ; si $\dim(E) > \dim(F)$, f n'est pas injective)

- Si $\dim(E) = \dim(F)$, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ peut être un isomorphisme, mais ce n'est pas automatique !

On a le résultat fondamental suivant :

Théorème 3 (Application linéaire entre espaces de même dimension)

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie avec $\underline{dim(E) = dim(F)}$.
Alors pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a les équivalences :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ bijective.}$$

Preuve :
f est injective $\iff rg(f) = dim(E) \iff rg(f) = dim(F) \iff f$ est surjective.
Ceci équivaut donc aussi au fait que f est bijective ! $\square$

Remarques 5

- Ainsi, lorsque $\dim(E) = \dim(F)$, il suffit de montrer qu'une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est injective (ou surjective) pour que ce soit automatiquement un isomorphisme !

Ce résultat est à rapprocher de son analogue pour les familles de vecteurs : lorsque $Card(\mathcal{F}) = \dim(E)$,

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice de } E \iff \mathcal{F} \text{ est une base de } E\ .$$

- **Cas particulier important :** Le résultat s'applique en particulier lorsque $F = E$, c'est à dire dans le cas d'un **endomorphisme** $f \in \mathcal{L}(E)$.

En dimension finie, un endomorphisme injectif/surjectif est automatiquement un **automorphisme**.

Méthode : Montrer qu'une application est un isomorphisme

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie avec $\dim(E) = \dim(F)$.
Pour montrer qu'une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomorphisme :

- On justifie que f est injective (c'est souvent le plus facile !).
On peut par exemple fixer un vecteur $v \in E$ et montrer que $f(v) = 0_F \Longrightarrow v = 0_E$.
- Alternativement, on justifie que f est surjective.

On conclut : "Puisque $\dim(E) = \dim(F)$, f est automatiquement bijective."

Exercice 3

Isomorphisme de Lagrange (le retour).

Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts et $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{array}$.

Montrer que f est un isomorphisme.

- Il est clair que f est linéaire (vérifiez-le !)
- Montrons que f est injective, c'est à dire que $Ker(f) = \{0\}$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$, c'est à dire $P(x_0) = P(x_1) = \ldots = P(x_n) = 0$.
Puisque P admet $n+1$ racines distinctes et $\deg(P) \leqslant n$, on a nécessairement $P = 0$.
Ceci montre que f est injective.

- Puisque $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$, f est automatiquement bijective.

On a bien montré que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Conclusion : $\forall (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \exists ! P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall i \in [\![0,n]\!],\ P(x_i) = y_i$.

Notons que cet argument est souvent utile dans des contextes "abstraits" comme l'Exercice précédent.
Lorsque l'application f est simple et explicite, on s'en sort aussi en calculant le rang.

Exercice 4

Montrer que $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, -x+2y-z, x+3z) \end{array}$ est un automorphisme.

Il est clair que h est linéaire et :

$$\begin{aligned} rg(h) &= rg(h(1,0,0), h(0,1,0), h(0,0,1)) = rg((1,-1,1),(1,2,0),(0,-1,3)) \\ &= rg((1,-1,1),(0,3,-1),(0,-1,3)) = rg((1,-,1,1),(0,3,-1),(0,0,8)) = 3. \end{aligned}$$

Ainsi $rg(h) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$: h est injective et surjective. C'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2 Représentations matricielles

2.1 Représentation matricielle d'un vecteur dans une base

Rappel : Si $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E, tout vecteur $v\in E$, s'écrit de manière unique comme $v=\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_n e_n$. Les scalaires $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont les **coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$**.

La **matrice colonne des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$** est : $Mat_{\mathcal{B}}(v)=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$.

Le choix d'une base de E permet ainsi d'"identifier" les vecteurs de E à des matrices colonnes.

Exemples

- Dans la base canonique $\mathcal{B}=\Big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\Big)$ de $\mathbb{R}^3$, le vecteur $v=(1,-2,2)$ s'écrit

$$v=1(1,0,0)-2(0,1,0)+2(0,0,1) \text{ et donc } Mat_{\mathcal{B}}(v)=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

- Dans la base canonique $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, le polynôme $P=2(X-1)^2$ s'écrit

$$P=2-4X+2X^2 \text{ et donc } Mat_{\mathcal{B}}(P)=\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}.$$

Attention !

La matrice des coordonnées de v dépend de la base de E choisie !

Exemple : Soit $v=(1,-2,2)\in\mathbb{R}^3$.

- Dans la base $\mathcal{B}=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$, $Mat_{\mathcal{B}}(v)=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

- Dans la base $\mathcal{B}'=((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$, $Mat_{\mathcal{B}'}(v)=\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$.

  (En effet : $v=(1,-2,2)=(1,1,1)-3(0,1,1)+4(0,0,1)$.)

Définition 2 (Matrice passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$)

Soient $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ et $\mathcal{B}'=(e'_1,\ldots,e'_n)$ deux bases de E.
On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** la matrice carrée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
formée en fusionnant les matrices colonnes : $\Big[Mat_{\mathcal{B}}(e'_1),Mat_{\mathcal{B}}(e'_2),\ldots,Mat_{\mathcal{B}}(e'_n)\Big]$.
Autrement dit : la j-ème colonne de $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ contient les coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$.

Dessin :

Remarque 6

On retiendra : $\boxed{\text{la matrice de passage } P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \quad \text{exprime "la nouvelle base" } (\mathcal{B}') \text{ dans "l'ancienne" } (\mathcal{B}).}$

Exercice 5

Soient $e_1 = (1,-1)$ et $e_2 = (2,3)$. Soient $e'_1 = e_1 + e_2 = (3,2)$ et $e'_1 = e_1 - e_2 = (-1,-4)$.
Il est clair que $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.
Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Puisque $e'_1 = e_1 + e_2$ et $e'_2 = e_1 - e_2$, $\quad P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Théorème 4 (Formule de changement de base)

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E.
Soit $v \in E$ et $Mat_{\mathcal{B}}(v)$, $Mat_{\mathcal{B}'}(v)$ les matrices colonnes de ses coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
Alors : $\quad Mat_{\mathcal{B}}(v) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} Mat_{\mathcal{B}'}(v).$

Remarque 7

- Moyen mnémotechnique : cette formule ressemble à une "relation de Chasles".
  Les "$\mathcal{B}$" sont côte à côte, les "$\mathcal{B}'$" sont côte à côte.

- Attention : cette formule exprime les coordonnées de v dans "l'ancienne base" en fonction de celles dans "la nouvelle base" !
Si on veut aller dans l'autre sens, on a bien-sûr symétriquement : $\boxed{Mat_{\mathcal{B}'}(v) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} Mat_{\mathcal{B}}(v).}$
(mais il faut dans ce cas calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$!)

- On peut en fait montrer que $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

Preuve du Théorème 4:

Notons $Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Mat_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Par définition de la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, on peut écrire : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $e'_k = \sum_{i=1}^{n} p_{i,k} e_i$.

Puisque les x'_j sont les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}'$, on peut écrire :

$$v = \sum_{k=1}^{n} x'_k e'_k = \sum_{j=1}^{n} x'_k \left(\sum_{i=1}^{n} p_{i,k} e_i \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x'_k p_{i,k} e_i = \sum_{i=1}^{n} \Bigg(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_{i,k} x'_k}_{x_i} \Bigg) e_i$$

Ainsi, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} x'_k$, ce qui correspond à : $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. $\square$

Exercice 6

On reprend les bases $\mathcal{B} = ((1,-1),(2,3))$ et $\mathcal{B}' = ((3,2),(-1,-4))$ de l'Exercice 5.
Posons $v = (3,2) - 2 \cdot (-1,-4) = (5,10) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $Mat_{\mathcal{B}'}(v)$ et $Mat_{\mathcal{B}}(v)$.

La décomposition de v dans la base $\mathcal{B}'$ est : $v = (3,2) - 2 \cdot (-1,-4)$.
Par définition, on a donc $Mat_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. D'après la formule de changement de base :

$$Mat_{\mathcal{B}}(v) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} Mat_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ceci signifie que la décomposition de v dans la base $\mathcal{B}$ est : $v = -1 \cdot (1,-1) + 3 \cdot (2,3)$ (effectivement, cela fait $(5,10)$)

2.2 Représentation matricielle d'une application linéaire.

Rappel : Si $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E, une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs $u_1 = f(e_1), \ldots, u_p = f(e_p)$.

En effet, tout vecteur $v \in E$ s'écrit $v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et on a alors $f(v) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$.

Définition 3 (Matrice d'une application linéaire dans deux bases)

Soit E un espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, ..., e_p)$.
Soit F un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_n)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

On appelle **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$** la matrice $Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ formée en fusionnant les matrices colonnes : $\Big[Mat_{\mathcal{B}_\mathcal{F}}(f(e_1)), Mat_{\mathcal{B}_\mathcal{F}}(f(e_2)), \ldots, Mat_{\mathcal{B}_\mathcal{F}}(f(e_p))\Big]$.

Autrement dit : la j-ème colonne de $Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$ contient les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

Dessin :

Exercice 7

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (7x-3y, -x+2y, 8y) \end{array}$

Donner la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$.

1. On travaille avec les bases : $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = (\underbrace{(1,0)}_{=e_1}, \underbrace{(0,1)}_{=e_2})$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (\underbrace{(1,0,0)}_{=e'_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{=e'_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{=e'_3})$

On a :
$$f(e_1) = f(1,0) = (7,-1,0) \quad \text{donc} \quad f(e_1) = 7\cdot e'_1 + (-1)\cdot e'_2 + 0\cdot e'_3$$
$$f(e_2) = f(0,1) = (-3,2,8) \quad \text{donc} \quad f(e_2) = (-3)\cdot e'_1 + 2\cdot e'_2 + 8\cdot e'_3$$

Ainsi : $Mat_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}(f) = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

2. On travaille avec les bases : $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_3[X]} = (1, X, X^2, X^3)$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_2[X]} = (1, X, X^2)$

On a :
$$g(1) = 0 \quad \text{donc} \quad g(1) = 0\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2$$
$$g(X) = 1 \quad \text{donc} \quad g(X) = 1\cdot 1 + 0\cdot X + 0\cdot X^2$$
$$g(X^2) = X \quad \text{donc} \quad g(X) = 0\cdot 1 + 1\cdot X + 0\cdot X^2$$
$$g(X^3) = 3X^2 \quad \text{donc} \quad g(X) = 0\cdot 1 + 0\cdot X + 3\cdot X^2$$

Ainsi : $Mat_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}_2[X]},\mathcal{B}_{\mathbb{R}_3[X]}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Remarque 8

Lorsque les espaces de départ et d'arrivée disposent de bases dites "canoniques"
(donc pour la plupart des espaces vectoriels étudiés : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$), on cherchera en général à déterminer et étudier $M = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$, où $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont les bases canoniques !

Pour ce choix de bases, on dit parfois que M est la matrice canoniquement associée à f.

Dans le cas où f est un endomorphisme (i.e $f \in \mathcal{L}(E,E)$),
on se contente en général de choisir la même base de E "au départ et à l'arrivée" :

Définition 4 (Matrice d'un endomorphisme dans une seule base)

Soit E un espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, ..., e_p)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

La matrice $Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(f)$ est simplement notée $Mat_{\mathcal{B}_E}(f)$.

On l'appelle **matrice de f dans la base $\mathcal{B}_E$**. Notons qu'il s'agit d'une matrice carrée !

Exercice 8

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & XP' + P. \end{array}$ Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. On considère l'endomorphisme : $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$.

Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Que remarque-t-on ?

1. Dans la base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_3[X]} = (1, X, X^2, X^3)$, on a : $f(1) = 1$, $f(X) = 2X$, $f(X^2) = 3X^2$, $f(X^3) = 4X^3$.

Ainsi $Mat_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}_3[X]}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2. Dans la base $\mathcal{B} = (\underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}_{=e_1}, \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}_{=e_2}, \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}_{=e_3})$,

$$f(e_1) = A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot e_1 + (-1)\cdot e_2 + 1\cdot e_3.$$
$$f(e_2) = A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} = 0\cdot e_1 + 2\cdot e_2 + 2\cdot e_3.$$
$$f(e_3) = A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 3\cdot e_3.$$

Ainsi $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = A.$

Remarque 9

Plus généralement, on peut montrer que quelle que soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $f_A : \begin{array}{ccc}\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\\ X & \mapsto & AX\end{array}$ est A.

(démonstration laissée en exercice)

On revient à présent au cas général où $F \neq E$. On note $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$.
On a vu que, en fixant des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ de E et de F, on pouvait faire correspondre à une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une unique matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. En fait l'inverse est également vrai : à une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ fixée, on peut faire correspondre une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$!

Théorème 5 (Correspondance entre matrices et applications linéaires)

Soit E un espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B}_E$.
Soit F un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}_F$.

• Pour toute $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on peut considérer la matrice $M = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

• Inversement, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,
il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $M = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Autrement dit, l'application $\Phi : \begin{array}{ccc}\mathcal{L}(E, F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})\\ f & \mapsto & Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)\end{array}$ est une bijection !

Étudions cette correspondance, dans un sens et dans l'autre, sur des exemples concrets.

Exercice 9

Déterminer l'unique endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ admettant la matrice $M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$

dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note la base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = (\underbrace{(1,0,0)}_{=e_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{=e_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{=e_3})$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $Mat_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(f) = M$. On lit sur cette matrice que :

$$f(e_1) = 1\cdot e_1 + (-1)\cdot e_2 + 0\cdot e_3 \quad \text{c'est à dire : } f((1,0,0)) = (1,-1,0)$$
$$f(e_2) = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 3\cdot e_3 \quad \text{c'est à dire : } f((0,1,0)) = (0,1,3)$$
$$f(e_3) = 2\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 4\cdot e_3 \quad \text{c'est à dire : } f((0,0,1)) = (2,0,4)$$

Par suite, on peut déterminer entièrement l'endomorphisme f : pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = f\Big(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)\Big) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1)$$

ce qui donne, en remplaçant : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + 2z, -x + y, 3y + 4z)$.

Attention !

Évidemment, le choix des bases "au départ" et "à l'arrivée" est important !
Si on considère des bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}'_E$ de E et $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}'_F$ de F, en général $Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \neq Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f)$.

Exercice 10

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (7x-3y, -x+2y, 8y) \end{array}$.

1. Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$
2. De même en choisissant la base $\mathcal{C} = \Big((1,1),(-1,1)\Big)$ de $\mathbb{R}^2$ (et la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

1. Dans les bases $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = ((1,0),(0,1))$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$:

$$f(1,0) = (7,-1,0), \quad f(0,1) = (-3,2,8)$$

on voit donc que : $Mat_{\mathcal{B}_{\mathcal{R}^3},\mathcal{B}_{R^2}}(f) = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Dans les bases $\mathcal{C} = ((1,1),(-1,1))$ et $B_{\mathbb{R}^3} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$:

$$f(1,1) = (4,1,8), \quad f(-1,1) = (-10,3,8)$$

on voit donc que : $Mat_{\mathcal{B}_{\mathcal{R}^3},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & 3 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 11

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer l'unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ admettant la matrice M dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer l'unique application linéaire $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ admettant la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la base $\mathcal{C} = \Big((1,2),(2,1)\Big)$ de $\mathbb{R}^2$. Comparer.

1. Dans les bases $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = ((1,0),(0,1))$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$,
pour que $Mat_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}(f) = M$, on doit avoir (lu sur la matrice) :

$$f(1,0) = (1,-1,3) \text{ et } f(0,1) = (2,0,4).$$

Il en résulte, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = f(x(1,0) + y(0,1)) = xf(1,0) + y(0,1)$
c'est à dire : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x+2y, -x, 3x+4y)$.

2. Dans les bases $\mathcal{C} = ((1,2),(2,1))$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$,
pour que $Mat_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{C}}(g) = M$, on doit avoir (lu sur la matrice) :

$$g(1,2) = (1,-1,3) \text{ et } g(2,1) = (2,0,4).$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Cherchons $g(x,y)$. On a : $(x,y) = \frac{-x+2y}{3} \cdot (1,2) + \frac{2x-y}{3} \cdot (2,1)$.
Il en résulte, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = \frac{-x+2y}{3} \cdot g(1,2) + \frac{2x-y}{3} \cdot g(2,1)$

c'est à dire : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = \Big(x, \dfrac{x-2y}{3}, \dfrac{5x+2y}{3}\Big)$.

Citons deux exceptions notables : l'application nulle et l'application identité.

Proposition 4 (Matrice de l'application nulle dans n'importe quelles bases)

Soient E un espace vectoriel de dimension p, F une espace vectoriel de dimension n.
Notons ici $f \in \mathcal{L}(E,F)$ l'application nulle, c'est à dire : $\forall v \in E,\ f(v) = 0_F$.
Alors quelles que soient les bases $\mathcal{B}_E$ de E et $\mathcal{B}_F$ de F, $Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) = 0_{n,p}$. (matrice nulle $n \times p$)

Preuve rapide :
Notant $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$, on a $\forall j \in [\![1,p]\!],\ f(e_j) = 0_F$. Chaque colonne de la matrice est nulle. $\square$

Proposition 5 (Matrice de l'application identité dans n'importe quelle base)

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Quelle que soit la base $\mathcal{B}_E$ de E, $Mat_{\mathcal{B}_E}(Id_E) = I_n$. (matrice identité $n \times n$)

Preuve rapide :
Notant $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$, on a $\forall j \in [\![1,n]\!],\ Id_E(e_j) = e_j$. Ceci correspond à la matrice identité. $\square$

Attention !

Dans la correspondance matrice/application linéaire, le choix des espaces vectoriels est également important ! Une même matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ peut tout à fait être "représentée" par des applications linéaires au départ d'espaces E (et/ou à l'arrivée dans des espaces F) différents.

Exercice 12

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Déterminer l'unique endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice canoniquement associée est M.
2. Déterminer l'unique endomorphisme $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice canoniquement associée est M.

1. On lit sur la matrice que : $f(1,0,0) = (1,-1,0)$ $f(0,1,0) = (0,1,3)$ $f(0,0,1) = (2,0,4)$
Puis, $f(x,y,z) = f\Big(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)\Big) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1)$
c'est à dire : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x+2z, -x+y, 3y+4z)$.
2. On lit sur la matrice que : $g(1) = 1 - X$ $g(X) = X + 3X^2$ $g(X^2) = 2 + 4X^2$
Puis, pour tout $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$g(P) = a \cdot g(1) + b \cdot g(X) + c \cdot g(X^2) = a(1-X) + b(X+3X^2) + c(2+4X^2)$$

c'est à dire : $g(a + bX + cX^2) = (a+2c) + (-a+b)X + (3b+4c)X^2$.

3 Calcul matriciel et applications linéaires

3.1 Ecriture matricielle de l'image d'un vecteur

Théorème 6 (Image d'un vecteur, version matricielle)

Soit E un espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B}_E$.
Soit F un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}_F$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On note $A = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Soit $x \in E$. On note $X = Mat_{\mathcal{B}_E}(x) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. (Matrice des coordonnées de x)

Soit $y \in F$. On note $Y = Mat_{\mathcal{B}_F}(y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. (Matrice des coordonnées de y)

Alors : $y = f(x) \iff Y = AX.$

Pour le dire autrement : $Mat_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)Mat_{\mathcal{B}_E}(x).$

Preuve :

Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$.

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $A = (a_{i,j})_{i\in[\![1,n]\!],j\in[\![1,p]\!]}$.

Par définition de la matrice des coordonées X, $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$, et donc par linéarité $f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j)$.

Or, par définition de A, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$, donc $f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right) e_i'$.

Ainsi, en identifiant les coordonnées dans la base $\mathcal{B}_F$,

dire que $y = f(x)$ c'est dire que $\forall i \in [\![1,n]\!], y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$, c'est à dire exactement que $Y = AX$. $\square$

Méthode : Image et noyau de f via sa matrice.

Soit E muni d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$. Soit F muni d'une base $\mathcal{B}_F$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
On suppose que l'on connait la matrice $A = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$.

- **Image :** On sait que $Im(f) = Vect(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

Les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$ (dans la base $\mathcal{B}_F$) sont

$$Y_1 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad Y_p = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad : \quad \text{ce sont les colonnes de } A!$$

Ainsi, une famille génératrice de $Im(f)$ se lit **sur les colonnes de** A.

- **Noyau :** On sait que $Ker(f) = \{v \in E \mid f(v) = 0_F\}$.

En notant X la matrice des coordonnés d'un vecteur $v \in E$, on a : $f(v) = 0_E \iff AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, déterminer le noyau de f revient à résoudre le système linéaire $AX = 0$,
c'est à dire le système linéaire homogène lu **sur les lignes de** A.

Exercice 13

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice canoniquement associée est $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les vecteurs $f((1,-1,1))$ et $f((1,2,3))$.
2. Déterminer $Im(f)$. 3. Déterminer $Ker(f)$.

1. Matrice des coordonnées de $(-1,1,1)$ dans la base canonique : $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Matrice des coordonnées de $f(-1,1,1)$ dans la base canonique : $\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&1&0\\1&3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$

Ainsi $f(-1,1,1)=(-2,2,-2)$.

De même : $\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&1&0\\1&3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-5\end{pmatrix}$ donc $f(1,2,3)=(0,1,-5)$.

2. On lit sur les colonnes de A que

$$\begin{aligned}Im(f)&=Vect\Big((1,-1,1),(-2,1,3),(1,0,-4)\Big)=Vect\Big((1,-1,1),(0,-1,5)(0,1,-5)\Big)\\&=Vect\Big((1,-1,1),(0,-1,5)\Big).\end{aligned}$$

3. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z)\in Ker(f)\iff\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&1&0\\1&3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{ll}x-2y+z&=0\\-x+y&=0\\x+3y-4z&=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ll}x-2y+z&=0\\-y+z&=0\\5y-5z&=0\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{ll}x-2y+z&=0\\-y+z&=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ll}x&=2y-z=z\\y&=z\end{array}\right.$$

Donc $Ker(f)=\{(z,z,z),\ z\in\mathbb{R}\}=Vect\Big((1,1,1)\Big)$.

3.2 Matrice de $f+\lambda g$

Rappel : Si $f,g\in\mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on définit l'application linéaire $f+\lambda g\in\mathcal{L}(E,F)$ par :

$$f+\lambda g:\begin{array}{ccc}E&\to&F\\v&\mapsto&f(v)+\lambda g(v).\end{array}$$

Cette somme et cette multiplication par un scalaire font de $\mathcal{L}(E,F)$ un espace vectoriel.

Proposition 6 (Somme et multiplication par un scalaire)

Soit E un espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B}_E$.
Soit F un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}_F$.

Soient $f,g\in\mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors :

$$Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f+g)=Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)+Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g)\quad\text{et}\quad Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\lambda f)=\lambda\cdot Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$$

Preuve :
Montrons directement que $Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f+\lambda g)=Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)+\lambda\cdot Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g)$.
Notons $\mathcal{B}_E=(e_1,\dots,e_p)$ et $\mathcal{B}_F=(f_1,\dots,f_n)$.
Notons $A=Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)=(a_{i,j})$, $B=Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g)=(b_{i,j})$ et $C=Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f+\lambda g)=(c_{i,j})$.
Par définition des matrices A et B, pour tout $j\in[\![1,p]\!]$, on a

$$f(e_j)=\sum_{i=1}^n a_{i,j}f_i\quad\text{et}\quad g(e_j)=\sum_{i=1}^n b_{i,j}f_i\quad\text{donc}\quad(f+\lambda g)(e_j)=\sum_{i=1}^n(a_{i,j}+\lambda b_{i,j})f_i.$$

On reconnait donc que $c_{i,j}=a_{i,j}+\lambda b_{i,j}$, c'est à dire $C=A+\lambda B$. $\square$

Conséquence : L'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \end{array}$ est linéaire.

On a vu en Théorème 5 que Φ est une bijection : c'est donc un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$!

Ceci nous apprend en particulier que $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \times p = \dim(E) \times \dim(F)$.

Corollaire 1 (Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$)

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie : $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$.
En particulier, $\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(E)^2$ et $\dim(\mathcal{L}(E,\mathbb{R})) = \dim(E)$.

Exemples

- Les applications linéaires $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ sont toutes de la forme

$$f : (x,y,z) \mapsto (ax+by+cz, \alpha x + \beta y + \gamma z) \text{ avec } a,b,c,\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}.$$

On voit donc bien que $\dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)) = 6$.

- Plus généralement, les applications linéaires $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)$ sont toutes de la forme

$$f : (x_1,\dots,x_p) \mapsto \Big(a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,p}x_p \,,\, a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,p}x_p \,,\, \ldots \,,\, a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,p}x_p\Big)$$

avec $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On voit donc bien que $\dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)) = n \times p$.

- En particulier, les formes linéaires $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$ sont toutes de la forme

$$f : (x_1,\dots,x_p) \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_px_p$$

avec $a_1,\dots,a_p \in \mathbb{R}$. On voit donc bien que $\dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})) = p$.

3.3 Matrice de $g \circ f$

Rappel : Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ on peut définir l'application linéaire $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

Théorème 7 (Composition d'applications et produit matriciel)

Soit E un espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B}_E$.
Soit F un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}_F$.
Soit G un espace vectoriel de dimension q, muni d'une base $\mathcal{B}_G$.

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors : $Mat_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g) \times Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$

Remarque 10

Moyen mnémotechnique : cette formule ressemble encore une fois à une "relation de Chasles".
Ceci justifie l'écriture $Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$ pour la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Preuve :
Notons $\mathcal{B}_E = (e_1,\dots,e_p)$, $\mathcal{B}_F = (f_1,\dots,f_n)$, et $\mathcal{B}_G = (g_1,\dots,g_q)$.
Notons $B = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) = (b_{i,j})$, $A = Mat_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g) = (a_{i,j})$ et $C = Mat_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = (c_{i,j})$.

Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $f(e_j) = \sum_{k=1}^n b_{k,j} f_k$ donc $(g \circ f)(e_j) = g(f(e_j)) = \sum_{k=1}^n b_{k,j} g(f_k)$.

Or $g(f_k) = \sum_{i=1}^q a_{i,k} g_i$, donc $(g \circ f)(e_j) = \sum_{k=1}^n b_{k,j} \sum_{i=1}^q a_{i,k} g_i = \sum_{i=1}^q \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right) g_i$.

On reconnait donc que $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$, c'est à dire exactement $C = AB$. $\square$

Exercice 14

On considère $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y-z, x-z) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x, x-y, 2x). \end{array}$

1. Donner les matrices canoniquement associées à f et g.
2. En déduire la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

1. Dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: $Mat(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Mat(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

2. Dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $Mat(g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

3.4 Puissances d'un endomorphisme, puissances d'une matrice carrée

Rappel : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, on définit $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$ (avec la convention $f^0 = Id_E$).

Proposition 7 (Matrice de f^k)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B}_E$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$Mat_{\mathcal{B}_E}(f^k) = (Mat_{\mathcal{B}_E}(f))^k$$

Preuve :

Récurrence immédiate à partir du Théorème 7. □

Grâce à la correspondance entre application linéaire et matrices, on comprend que les règles de calcul concernant les combinaison linéaires et les puissances d'endomorphismes sont les mêmes que celles des matrices carrées. En particulier, on peut être amené à considérer des polynômes d'endomorphismes :

Définition 5 (Polynôme d'endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par : $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$.

Proposition 8 (Polynôme d'endomorphisme et polynôme de matrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B}_E$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors : $Mat_{\mathcal{B}_E}(P(f)) = P\Big(Mat_{\mathcal{B}_E}(f)\Big)$.

Preuve :

Il suffit de combiner les résultats du Théorème 7 et la Proposition 8 :

$$Mat_{\mathcal{B}_E}(P(f)) = Mat_{\mathcal{B}_E}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k Mat_{\mathcal{B}_E}(f^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k (Mat_{\mathcal{B}_E}(f))^k = P\Big(Mat_{\mathcal{B}_E}(f)\Big).$$ □

Les règles connues pour les polynômes de matrices s'appliquent également aux polynômes d'endomorphismes.

Proposition 9 (Règles de calcul pour les polynômes d'endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,

- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $(P+Q)(A) = P(A) + Q(A)$ et $(PQ)(A) = P(A) \times Q(A)$.
- Dans $\mathcal{L}(E)$: $(P+Q)(f) = P(f) + Q(f)$ et $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

Conséquence de cette proposition : Tous les calculs usuels mettant en jeu des polynômes (factorisation, développement...) tiennent toujours avec des polynômes d'endomorphismes !
(En prenant soin de "remplacer X par f", "remplacer 1 par Id_E" et "remplacer $\times$ par $\circ$" !)

Exemples

- On sait que $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on peut donc écrire :

$$(f - Id_E)^3 = f^3 - 3f^2 + 3f - Id_E.$$

- Après factorisation, on trouve que $X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$f^3 - 3f + 2Id_E = (f - Id_E)^2 \circ (f + 2Id_E).$$

Définition 6 (Polynôme annulateur)

On dit que $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur d'un endormophisme $f \in \mathcal{L}(E)$ lorsque $P(f) = 0$.

Exemple

Si f est un projecteur de E, on sait que $f^2 = f$.
Ainsi, le polynôme $P = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de f : $P(f) = f^2 - f = 0$.

Exercice 15

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par : $f : (x, y, z) \mapsto (2x, y, y+z)$.

1. Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $(f - Id_E)^2 \circ (f - 2Id_E) = 0$.
3. En déduire que f est inversible et déterminer f^{-1}.

1. $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Posons $P(X) = (X-1)^2(X-2)$.

$P(M) = (M - I_3)^2(M - 2I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (calcul)

Ainsi, la matrice de $P(f)$ dans la base canonique est $P(M) = 0_3$.
On en déduit donc que $P(f) = 0$ (application nulle). Cela donne bien $(f - Id_E)^2 \circ (f - 2Id_E) = 0$.

3. En développant, $P(X) = (X^2 - 2X + 1)(X - 2) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$. On a donc :

$$f^3 - 4f^2 + 5f - 2Id_E = 0 \iff f^3 - 4f^2 + 5f = 2Id_E \iff (f^2 - 4f + 5Id_E) \circ f = 2Id_E$$
$$\iff \frac{1}{2}(f^2 - 4f + 5Id_E) \circ f = Id_E.$$

Ceci montre que $f \in GL(E)$ et $f^{-1} = \frac{1}{2}(f^2 - 4f + 5Id_E)$.
(car on a bien $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id_E$).

3.5 Isomorphismes et matrices inversibles

Rappel : Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est un isomorphisme (ce qui n'est possible que si $\dim(E) = \dim(F)$), la bijection réciproque est également une application linéaire : $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

Théorème 8 (Isomorphisme matrice inversible)

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}_E$.
Soit F un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}_F$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

$$f \text{ est un isomorphisme} \iff Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \text{ est une matrice inversible}$$

Dans ce cas, la matrice de $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ dans les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$ est donnée par :

$$Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f^{-1}) = \left(Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)\right)^{-1}$$

Preuve :

• Si f est un isomorphisme, on peut introduire f^{-1} et on a : $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$.
En passant aux matrices, cela nous donne :

$$Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f^{-1}) \times Mat_{\mathcal{B}_F\mathcal{B}_E}(f) = I_n \quad \text{et} \quad Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \times Mat_{\mathcal{B}_E\mathcal{B}_F}(f^{-1}) = I_n.$$

Ceci montre que $Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$ est inversible d'inverse $Mat_{\mathcal{B}_E\mathcal{B}_F}(f^{-1})$.

• Si $A = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$ est inversible, on dispose de la matrice $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On peut donc introduire l'unique $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g) = A^{-1}$.
Les égalités matricielles $A^{-1}A = I_n$ et $AA^{-1} = I_n$ nous apprennent que : $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$.
Ceci montre que f est bijective (de réciproque $f^{-1} = g$). $\square$

Exercice 16

Soit f l'application linéaire $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P - P' \end{array}$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
3. En déduire que f est un isomorphisme et exprimer $f^{-1}(P)$ pour $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On calcule A^{-1} avec la méthode que l'on souhaite (résolution de système ou bien Gauss-Jordan)
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On en déduit que f est bijective (donc un isomorphisme) et que la matrice de f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On lit donc que :

$f^{-1}(1) = 1, \quad f^{-1}(X) = 1 + X \quad f^{-1}(X^2) = 2 + 2X + X^2.$

Ainsi, pour tout $P = a_0 + a_1X + a_2X^2, \quad f(P) = a_0f(1) + a_1f(X) + a_2f(X^2), \quad$ soit

$f(P) = a_0 + a_1(1 + X) + a_2(2 + 2X + X^2) = (a_0 + a_1 + 2a_2) + (a_1 + 2a_2)X + a_2X^2.$

Conséquences pour l'inversibilité des matrices

À l'aide de la correspondance entre isomorphismes et matrices inversibles, on peut établir quelques résultats supplémentaire sur les matrices les matrices inversibles :

Rappel : Par définition, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible lorsqu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$. On a alors $B = A^{-1}$.

Théorème 9 ("Un seul côté suffit")

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ satisfont $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles et on a $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

Preuve :

On introduit f (resp. g) l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique (notée $\mathcal{B}$) est A (resp. B). Ainsi l'égalité matricielle se traduit :

$$AB = I_n \iff Mat_{\mathcal{B}}(f)Mat_{\mathcal{B}}(g) = Mat_{\mathcal{B}}(Id_E) \iff Mat_{\mathcal{B}}(f \circ g) = Mat_{\mathcal{B}}(Id_E) \iff f \circ g = Id_E.$$

Ainsi, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $v = f(g(v)) \in Im(f)$: on voit donc que $Im(f) = \mathbb{R}^n$, donc f est surjective.
Puisque f est un endomorphisme surjectif en dimension finie, f est automatiquement bijectif !
On peut donc introduire la réciproque $f^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
Puisque $\quad f \circ g = id_E \quad$ on a $\quad f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ id_E \quad$ i.e $\quad f^{-1} = g$.
En revenant aux matrices : $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible et

$$A^{-1} = (Mat_{\mathcal{B}}(f))^{-1} = Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = Mat_{\mathcal{B}}(g) = B.$$

On déduit bien sûr que B est inversible et $B^{-1} = A$.

$\square$

Proposition 10 (Inversibilité et système homogène)

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a les équivalences :

$$A \text{ est inversible} \iff \text{Le système homogène } AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a pour unique solution } X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Preuve :

On introduit l'unique endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dont la matrice dans la base canonique est A.
Notons que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, notant $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ la matrice de ses coordonnées, on a

$$f(v) = 0_{\mathbb{R}^n} \iff AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, résoudre l'équation $AX = 0$ revient à déterminer le noyau $Ker(f)$!
On peut affirmer :

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible } &\iff f \text{ est bijective } \iff f \text{ est injective } \iff Ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \\ &\iff AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a pour unique solution } X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

4 Rang d'une matrice

4.1 Définition et calcul

Définition 7 (Rang d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On appelle rang de A et on note $rg(A)$ le rang de la famille des vecteurs colonnes de A.

Remarque 11

Notons dès à présent que la seule matrice de rang nul est la matrice nulle.

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad rg(A) = rg\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = rg\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2.$

Théorème 10 (Rang de la transposée (admis))

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\quad rg({}^tA) = rg(A)$

Conséquence : Le rang de A est aussi égal au rang de la famille des vecteurs lignes de A !

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad rg(A) = rg\Big((1,1,2),(2,1,1)\Big) = 2.$

Méthode : Calcul pratique du rang d'une matrice

Pour calculer le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on applique des opérations élémentaires sur les lignes et/ou sur les colonnes pour "simplifier" petit à petit la matrice.

- Dès qu'on repère une ligne qui est combinaison linéaire d'une autre, on peut la retirer.
(En particulier, on peut toujours retirer une ligne nulle)
- Dès qu'on repère une colonne qui est combinaison linéaire d'une autre, on peut la retirer.
(En particulier, on peut toujours retirer une ligne colonne)
- Lorsque l'on parvient à une famille de lignes libre (ou à une famille de colonnes libre), le rang est égal au nombre de lignes (ou de colonnes)

Exercice 17

Déterminer le rang de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$rg(B) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = 4$$

(On va voir dans un instant qu'on peut en déduire que B est inversible !)

4.2 Rang d'une matrice, rang d'une application linéaire

Théorème 11 (Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B}_E$.
Soit F un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}_F$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Le rang de l'application f est égal au rang de sa matrice dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Autrement dit : $rg(f) = rg\Big(Mat_{\mathcal{B}_F\mathcal{B}_E}(f)\Big)$.

Preuve (peut être admise en première lecture) :

Posons $M = Mat_{\mathcal{B}_\mathcal{F},\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et montrons que $rg(f) = rg(M)$.

Considérons l'application $\psi : \begin{array}{ccc} Im(f) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ v & \mapsto & Mat_{\mathcal{B}_F}(v) \end{array}$. Il est clair que ψ est linéaire.

- Notons $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$.

On sait que $Im(f) = Vect\Big(f(e_1), \dots, f(e_p)\Big)$ donc $\Big(f(e_1), \dots, f(e_p)\Big)$ est génératrice de $Im(f)$.

Il en résulte : $Im(\psi) = Vect\Big(\psi(f(e_1)), \dots, \psi(f(e_p))\Big) = Vect\Big(\underbrace{Mat_{\mathcal{B}_F}(f(e_1))}_{\text{1ère colonne de } M}, \dots, \underbrace{Mat_{\mathcal{B}_F}(f(e_p))}_{p\text{-ème colonne de } M}\Big)$.

Ainsi : $rg(\psi) = \dim(Im(\psi)) = rg\Big(\underbrace{Mat_{\mathcal{B}_F}(f(e_1))}_{\text{1ère colonne de } M}, \dots, \underbrace{Mat_{\mathcal{B}_F}(f(e_p))}_{p\text{-ème colonne de } M}\Big)$.

On a donc $\underline{rg(\psi) = rg(M)}$.

- Il est clair que l'application ψ est injective (car si $Mat_{\mathcal{B}_F}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $v = 0_F$).

D'après la formule du rang : $\underbrace{\dim(Im(\psi))}_{=rg(\psi)} + \underbrace{\dim(Ker(\psi))}_{=0} = \underbrace{\dim(Im(f))}_{=rg(f)}$ donc $\underline{rg(\psi) = rg(f)}$.

Conclusion : $rg(f) = rg(M)$. □

Remarque 12

Notons que la formule du Théorème 11 ne dépend pas du choix des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.
Le rang d'une application linéaire est égal au rang de sa matrice <u>dans n'importe quelles bases</u> !

Une autre option pour calculer le rang d'une application linéaire est donc de calculer le rang de sa matrice dans des bases données. Le résultat suivant découle directement du Théorème 2.

Corollaire 2 (Rang de la matrice et surjectivité / injectivité / bijectivité)

Soit E un espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathcal{B}_E$.
Soit F un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{B}_F$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $M = Mat_{\mathcal{B}_F\mathcal{B}_E}(f) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors :

$\boxed{1}$ **Comparaison au nombre de colonnes :** on a toujours $rg(M) \leqslant p$ et :

$$\boxed{rg(M) = p \iff f \text{ est injective}}$$

$\boxed{2}$ **Comparaison au nombre de lignes :** on a toujours $rg(M) \leqslant n$ et :

$$\boxed{rg(M) = n \iff f \text{ est surjective}}$$

Exercice 18

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & XP + P' \end{array}$

1. Déterminer la matrice A de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Calculer $rg(A)$. L'application f est-elle surjective ? injective ?

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $rg(A) = rg \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$

On en déduit que $rg(f) = 3$.

Comme $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ avec $dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$ et $dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$,
f est injective mais pas surjective.

Pour finir, le rang d'une matrice donne une nouvelle façon de montrer son inversibilité !
Puisqu'une matrice carrée est inversible si et seulement si un endomorphisme associé est bijectif, on déduit de ce qui précède le résultat suivant :

Proposition 11 (Rang d'une matrice et inversibilité)

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\quad M$ est inversible $\iff rg(M) = n$.

Preuve :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme admettant la matrice M dans la base canonique. Alors :

$$M \text{ est inversible } \iff f \in GL(\mathbb{R}^n) \iff rg(f) = \dim(R^n) \iff rg(f) = n \iff rg(M) = n. \qquad \square$$

Exercice 19

Montrer rapidement que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible.

$$rg(A) = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{=}_{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2} rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est triangulaire avec des coefficients diagonaux non-nuls, donc elle est inversible, donc de rang 3. Ainsi $rg(A) = 3$, et on conclut que A est inversible.

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Enoncer et exploiter le Théorème du rang.
- Calculer le rang d'une application linéaire.
- Déduire du rang de f l'injectivité/surjectivité/bijectivité.
- Montrer facilement qu'une application est un isomorphisme.
- Déterminer une matrice de changement de base.
- Déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases données.
- Déterminer l'unique application admettant la matrice M dans des bases données.
- Faire le lien entre calcul d'applications et calcul de matrices.
  (matrice de $f+g$, de λf, de $g \circ f$, de f^k, inversibilité...)
- Calculer le rang d'une matrice.
- En déduire l'injectivité/surjectivité/bijectivité d'une application linéaire associée.

Pour suivre

- Prévoir quand une application ne peut pas être injective/surjective.
- Repérer le noyau d'une forme linéaire et en déduire sa dimension.
- Déterminer rapidement $Im(f)$ et $Ker(f)$ à partir d'une matrice.
- Connaître et savoir expliquer la dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.
- Manipuler des polynômes d'endomorphismes $P(f)$.
- Montrer que f est inversible à partir d'un polynôme annulateur.
- Etudier l'inversibilité d'une matrice à l'aide du rang.

Pour les ambitieux

- Comprendre et maîtriser les preuves du cours.
- Maitriser les exercices classiques.
  (Valeurs propres, diagonalisation des projecteurs)