10

Continuité

1 Continuité en un point

Définition 1 (Continuité en un point)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit $x_0 \in I$.

- On dit que f est continue en x_0 lorsque f admet une limite finie en x_0.
Cette limite est alors nécessairement égale à $f(x_0)$ (cf. chapitre précédent)

Autrement dit :

$$f \text{ est continue en } x_0 \iff$$

- Si f n'est pas continue en x_0, on dit que x_0 est un point de discontinuité de f.

- On dit que f est continue à gauche (resp. à droite) en x_0 lorsque :

Remarque 1

Bien-sûr, pour que f soit continue en x_0, **il est nécessaire que f soit définie en x_0 !**

Proposition 1 (Continuité à gauche et à droite)

Soit $x_0 \in I$, qui n'est pas une extrémité de I.
f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0.

Preuve :

D'après le Théorème 1 du chapitre "Limites de fonctions",

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad \square$$

Exemple

La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue aux points entiers.
Si $k \in \mathbb{Z}$, elle est continue à droite en k, mais pas à gauche de k !
Elle est en revanche continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Dessin :

Exercice 1

On définit $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$. Montrer que f est continue en 0.

2 Fonctions continues

2.1 Définition et exemples fondamentaux

Définition 2 (Fonction continue sur un intervalle)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ (en pratique : un intervalle ou une union d'intervalles).

On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est continue sur le domaine D
lorsqu'elle est continue en tout point x_0 de D.

L'ensemble des fonctions continues sur D (et à valeurs dans $\mathbb{R}$) est noté

ou plus succinctement

Proposition 2 (Continuité des fonctions usuelles)

- Les polynômes et les fractions rationnelles (= quotient de deux polynômes),
- La valeur absolue $x \mapsto |x|$,
- Les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ (pour $\alpha \in \mathbb{R}$), la racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$,
- L'exponentielle exp, le logarithme ln,
- Les fonctions trigonométriques sin, cos, tan, arctan

sont toutes continues sur leurs domaines de définition.

Remarque 2

Ce domaine de définition n'est pas toujours un intervalle !

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x(x-1)}$ est continue en tout point de $D_f =$

2.2 Opérations et continuité

Proposition 3 (Somme, produit, quotient de fonctions continues)

Soient f et g deux fonctions continues sur un domaine D, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors les fonctions $f+g, \quad fg, \quad \lambda f \quad$ et $\quad \dfrac{f}{g}$ (lorsqu'elle existe) sont continues sur D.

Preuve :

Conséquence directe des règles de calcul de limites. Exemple pour la somme : pour tout $x_0 \in D$,
$\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f(x_0)+g(x_0) = (f+g)(x_0)$. $\square$

Proposition 4 (Composition de fonctions continues)

Si $f \in \mathcal{C}(D_f, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(D_g, \mathbb{R})$ avec $f(D_f) \subset D_g$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}(D_f, \mathbb{R})$.

Preuve :

Conséquence directe du résultat de composition de limites : pour tout $x_0 \in D_f$,
$\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{y \to f(x_0)} g(y) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$. □

Méthode : Continuité d'une fonction "élémentaire")

Après avoir déterminé le domaine de définition D_f d'une fonction f, on pourra souvent annoncer :

"f est continue sur D_f comme somme/produit/quotient/composée de fonctions usuelles".

Exemples

- $f : x \mapsto xe^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions usuelles.
- $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x-1}}{1+x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ comme composée et quotient de fonctions usuelles.

2.3 Prolongement par continuité en un point

Exercice 2

On pose $g : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. 1. Déterminer le domaine de définition de g.
2. Peut-on prolonger g en une fonction continue $\widetilde{g}$ sur un domaine plus grand ?

Dessin :

Théorème 1 (Prolongement par continuité)

Soit I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$.

Si f admet une limite finie ℓ en x_0, alors on peut prolonger f par continuité en x_0 :

La fonction $\widetilde{f}$ définie sur I par $\boxed{\forall x \in I, \quad \widetilde{f}(x) = \left\{ \right.}$

est appelée **prolongement par continuité** de f en x_0.

- La fonction $\widetilde{f}$ est continue en x_0.
- De plus, si f est continue sur $I \setminus \{x_0\}$, alors $\widetilde{f}$ est continue sur I tout entier.

Dessin :

Preuve du Théorème 1 :

- On a $\lim\limits_{x\to x_0} \widetilde{f}(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$. (Si ce n'est pas clair, considérer les limites à gauche/droite).

Comme par définition $\widetilde{f}(x_0) = \ell$, on obtient $\lim\limits_{x\to x_0} \widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(x_0)$: $\widetilde{f}$ est continue en x_0.

- Supposons de plus que f est continue sur $I \setminus \{x_0\}$. Vérifions alors que $\widetilde{f}$ est continue sur $I \setminus \{x_0\}$.

Soit $x_1 \in I \setminus \{x_0\}$, vérifions que $\lim\limits_{x\to x_1} \widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(x_1)$. On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_1} \widetilde{f}(x) &= \lim_{x\to x_1} f(x) \quad \Big(\text{car } f(x) = \widetilde{f}(x) \text{ au voisinage de } x_1 \Big) \\
&= f(x_1) \quad \Big(\text{car } f \text{ est continue en } x_1 \Big) \\
&= \widetilde{f}(x_1) \quad \Big(\text{car } f(x) = \widetilde{f}(x) \text{ pour } x \neq x_0 \Big), \text{ d'où le résultat.}
\end{aligned}$$

□

Méthode : Montrer qu'une fonction est prolongeable par continuité en un point.

Soit I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$.
(le point x_0 peut être une extrémité de I, ou bien être dans l'intérieur de I).

Pour montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en x_0, il faut et il suffit de vérifier que la limite $\ell = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe et est finie (i.e différente de $\pm\infty$).

On peut alors en "étendre" naturellement la définition de f au point x_0 en posant "$f(x_0) = \ell$".
Au lieu de "redéfinir" directement la fonction f, on introduit souvent une nouvelle fonction $\widetilde{f}$.

Exemple

Rappelons que pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est définie uniquement sur

En revanche, pour un exposant $\alpha > 0$, cette fonction est prolongeable par continuité en 0 !

On a en effet $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\alpha \ln(x)} = \lim\limits_{y\to -\infty} e^{\alpha y} = 0$ (car $\alpha > 0$).

Ainsi, on peut définir le prolongement par continuité : $\widetilde{f}(x) =$

Il s'agit alors d'une fonction définie et continue sur

3 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

3.1 Le théorème

Théorème 2 (Théorème des valeurs intermédiaires (TVI))

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ (i.e $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$).
Alors :

Dessin :

Remarques 3

- La notation $[f(a), f(b)]$ désigne : $\begin{cases} \text{Le segment } [f(a), f(b)] \text{ si } f(a) \leqslant f(b) \\ \text{Le segment } [f(b), f(a)] \text{ si } f(b) \leqslant f(a) \end{cases}$
- Notons qu'un tel réel c n'est pas forcément unique !

On verra que l'unicité nécessite une hypothèse supplémentaire sur f : la stricte monotonie.

Attention !

Le TVI ne décrit pas <u>toutes les valeurs atteintes</u> par f sur le segment $[a, b]$!

Il se contente d'affirmer que "toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par f sur $[a, b]$".

Ceci pourrait s'exprimer en disant : $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$.

L'inclusion réciproque est fausse en général !
(toutes les valeurs atteintes sur $[a, b]$ ne sont pas forcément entre $f(a)$ et $f(b)$)

<u>Exemple :</u> La fonction sin est continue sur le segment $I = [0, \frac{3\pi}{4}]$, $\sin(0) = 0$, $\sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'après le TVI, toute valeur λ entre 0 et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est atteinte par sin sur I.
Mais toutes les valeurs atteintes par sin sur I ne sont pas entre 0 et $\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Le TVI s'emploie souvent conjointement avec un tableau de variation.

Exemple

x	0		1		3
$f(x)$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

Si une fonction continue f admet ce tableau de variation, **d'après le TVI**, on peut affirmer :

- $\exists c_1 \in [0, 1], \ f(c_1) = 0$
- $\exists c_2 \in [1, 3], \ f(c_2) = -2$.

(par exemple !)

3.2 Algorithme de dichotomie

Preuve du TVI :

Dessin :

□

Cet **algorithme de dichotomie** peut être implémenté concrètement en Python pour déterminer une solution approchée d'une équation $f(c) = \lambda$ (d'inconnue c).

Il suffit de construire progressivement les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$: on a toujours l'encadrement $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, et cet encadrement devient de plus en plus précis à mesure que n augmente !

Exercice 3

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = x^2 - 2 - \ln(x)$.

1. Justifier qu'il existe $c \in [1, 2]$ tel que $f(c) = 0$. On admet qu'un tel c est unique.

2. Compléter le programme suivant pour que l'appel de `dichotomie(eps)` (pour un `eps`$= \varepsilon > 0$) renvoie deux valeurs encadrant c à `eps` près.

```
import numpy as np

def f(x) :

    y = ............................

    return(y)

def dichotomie(eps) :

    a=1 ; b=2

    while ................ :

        c = (a+b)/2

        if .............. :

            a = .......

        else :

            b = .......

    return(a,b)
```

3.3 Applications du TVI

Corollaire 1 (Changement de signe et annulation)

• Si une fonction continue change de signe sur un intervalle, alors elle s'annule au moins une fois sur cet intervalle.

• Contraposée : Si une fonction continue ne s'annule pas sur un intervalle, alors elle est de signe constant sur cet intervalle.

Exercice 4

Retrouver le fait (déjà évoqué !) que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine.

Méthode : Monter qu'une équation admet (au moins) une solution

On considère une équation de la forme $\boxed{f(x) = \lambda}$, d'inconnue x. $(\lambda \in \mathbb{R}$ est fixé$)$.

On veut montrer que cette équation admet au moins une solution sur l'intervalle I.

$\boxed{1}$ Affirmer (en justifiant éventuellement) que f est continue sur I.

$\boxed{2}$ Monter que λ se situe entre deux valeurs atteintes par f
(Pour cela, on peut éventuellement dresser le tableau de variation de f sur I.)

$\boxed{3}$ Citer le Théorème des Valeurs Intermédiaires et conclure.

Remarque : Pour une équation de la forme $f(x) = g(x)$ d'inconnue x,
on posera plutôt $h(x) = f(x) - g(x)$ pour se ramener à l'équation $\boxed{h(x) = 0}$ d'inconnue x.
On applique le TVI à la fonction h pour espérer conclure.

Exercice 5

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x = e^{-nx}$ admet (au moins) une solution dans $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue.
Montrer que f admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.

3.4 Autre interprétation du TVI : image d'un intervalle par une fonction continue

Définition 3 (Qu'est-ce qu'un intervalle ?)

- **Segment :** Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \leqslant y$, le segment $[x, y]$ est défini par :

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R} \mid x \leqslant z \leqslant y\}$$

- **Intervalle :** On dit qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si elle satisfait :

$$\text{Pour tous } x, y \in I \text{ avec } x \leqslant y, \quad [x, y] \subset I.$$

Autrement dit, tout segment tracé entre deux points de I reste dans I.
(Cette propriété s'appelle la convexité.)

Remarque 4

Bien-sûr, concrètement, on sait qu'un intervalle I est nécessairement de la forme :

$$[a, b] \text{ ou }]a, b] \text{ ou } [a, b[\text{ ou }]a, b[\quad \text{avec } a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \text{ et } b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Le Théorème des Valeurs Intermédiaires a la conséquence suivante :

Proposition 5 (Image d'un intervalle par une fonction continue)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Alors l'ensemble image $f(I) = \{f(x),\ x \in I\}$ est

On peut résumer cette propriété ainsi :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est

Preuve :

$\square$

Remarque 5

On utilise en fait "intuitivement" cette propriété depuis longtemps, lorsque l'on lit l'image directe d'un intervalle par une fonction (continue) sur un tableau de variation ou sur un graphe !

Exercice 6

On considère $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$. Déterminer $f([1, 2])$, $f(]-1, 1[)$ et l'ensemble image $f(\mathbb{R})$.

4 Théorème de la bijection

Le Théorème de la bijection monotone a déjà été évoqué (en "spoiler") dans le chapitre "Applications". On peut à présent en donner un énoncé précis.

Théorème 3 (Théorème de la bijection (monotone))

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I.

Alors f réalise une bijection de I dans $J = f(I)$, qui est également un intervalle.

La bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est

Son sens de variation est

Preuve partielle :

Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, strictement monotone.

• On a déjà vu (cf. chapitre "Fonctions numériques usuelles") qu'une fonction strictement monotone est injective. Ainsi f est injective, donc réalise automatiquement une bijection de I dans son image $J = f(I)$.

• On sait que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle (Proposition 5), donc $J = f(I)$ est un intervalle.

• Si f est strictement croissante, alors f^{-1} également. En effet : soient $x, y \in I$ avec $x < y$.
Si on avait $f^{-1}(x) \geqslant f^{-1}(y)$, alors en composant par f : $x \geqslant y$, absurde ! Donc $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$.

• De même, si f est strictement décroissante, alors f^{-1} également.

• On admet que f^{-1} est continue sur J. (Preuve délicate "avec des ε"...)

$\square$

Remarques 6

• Comme d'habitude, l'intervalle $J = f(I)$ se lit facilement à partir du tableau de variation de f !
Dans le cas où f est strictement croissante par exemple :

x	a	b
$f(x)$	α $\nearrow$	β

– Si $I = [a, b]$ alors $f(I) = [\alpha, \beta]$.

– Si $I =]a, b]$ alors $f(I) =]\alpha, \beta]$.

– Si $I = [a, b[$ alors $f(I) = [\alpha, \beta[$.

– Si $I =]a, b[$ alors $f(I) =]\alpha, \beta[$.

On note en particulier que : $f([a, b]) =$

• **Rappel :** On sait que la courbe représentative de f^{-1} est la symétrique de celle de f par apport à la diagonale $y = x$. On retrouve ainsi, sur un dessin, la continuité et le sens de variation de f^{-1}.

Dessin :

Corollaire 2 (TVI avec stricte monotonie)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$.
Alors :

Preuve :

D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[a, b]$ vers $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. L'unique réel c tel que $f(c) = \lambda$ est tout bonnement $c = f^{-1}(\lambda)$! $\square$

Méthode : Monter qu'une équation admet une unique solution

On considère une équation de la forme $\boxed{f(x) = \lambda}$, d'inconnue x. ($\lambda \in \mathbb{R}$ est fixé).
On veut montrer que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle I.

$\boxed{1}$ Affirmer (en justifiant éventuellement) que f est continue et strictement monotone sur I.

$\boxed{2}$ Monter que λ se situe entre deux valeurs atteintes par f
(Pour cela, on peut éventuellement dresser le tableau de variation de f sur I.)

$\boxed{3}$ Citer le Théorème de la bijection et conclure.

Remarque : Pour une équation de la forme $f(x) = g(x)$ d'inconnue x,
on posera plutôt $h(x) = f(x) - g(x)$ pour se ramener à l'équation $\boxed{h(x) = 0}$ d'inconnue x.

Exercice 7

Étude d'une suite implicite.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x = e^{-nx}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.
On note cette solution $u_n \in \mathbb{R}_+$.

2. En notant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leqslant f_{n+1}$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4. En raisonnant pas l'absurde, montrer que $\ell = 0$.

5 Fonction continue sur un segment

Théorème 4 (Théorème des bornes atteintes (admis))

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors :

Remarque 7

Ce résultat est faux si l'on ne se place pas sur un segment !
Si f est une fonction continue sur un intervalle I ouvert au moins d'un côté, il est possible que :

- f ne soit pas majorée et/ou pas minorée
- f soit bornée mais n'atteigne pas sa borne supérieure et/ou sa borne inférieure.

Dessin :

Ce Théorème peut également s'interpréter de la manière suivante :

Proposition 6 (Image d'un segment par une fonction continue)

Soit f une fonction sur un segment $[a, b]$.

Alors en notant $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, on a $f([a, b]) =$

On peut résumer cette propriété ainsi :

L'image d'un segment par une fonction continue est

Preuve :

$\square$

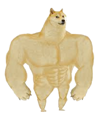
À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Justifier qu'une fonction est continue lorsque c'est nécessaire.
- Étudier la continuité d'une fonction en un point particulier.
- Montrer qu'une fonction est prolongeable par continuité en un point.
- Utiliser le TVI et le Théorème de la bijection pour montrer qu'une équation admet une (unique) solution.

Pour suivre

- Étudier une suite implicite de type $f_n(u_n) = 0$.
- Connaître et exploiter le Théorème des bornes atteintes



Pour les ambitieux

- Connaître parfaitement l'algorithme de dichotomie et savoir le programmer en Python.