# 15

# Variables aléatoires finies

Rappels généraux de probabilités : Une expérience aléatoire avec un nombre fini d'issues peut être modélisée par un **espace probabilisé fini**. Il s'agit d'un triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, où :

• L'**univers** $\Omega$ est l'ensemble des issues, c'est à dire l'ensemble des résultats possibles pour l'expérience.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

• $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de $\Omega$, s'interprète comme l'**ensemble des évènements**.
Un évènement $A$ peut donc se voir comme une partie de $\Omega$ : l'ensemble des issues qui conduisent à sa réalisation.

• La **probabilité** $P$ est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ satisfaisant certaines propriétés ($P(\Omega) = 1$ et la probabibilité d'une union disjointe est la somme des probabilités).

## 1 Notion de variable aléatoire finie

Supposons que l'on étudie une expérience aléatoire modélisée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
Dans de nombreux cas, la quantité à laquelle on s'intéresse est un réel (noté $X(\omega)$), dont la valeur dépend de l'issue de l'expérience ($\omega \in \Omega$).
Ceci conduit à la définition d'une **variable aléatoire réelle**, qui n'est rien de plus qu'une application

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array} \qquad \text{(à une issue, on associe une valeur réelle)}$$

L'issue $\omega \in \Omega$ de l'expérience étant, en un sens, "aléatoire", le réel associé $X(\omega)$ l'est également.
Dans les cas qui nous intéressent (pour l'instant), l'univers $\Omega$ est fini. L'expérience aléatoire n'a qu'un nombre fini d'issues possibles, et donc la variable aléatoire réelle $X$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs : on parle de **variable aléatoire (réelle) finie**.

**Définition 1 (Variable aléatoire finie)**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.

• Une **variable aléatoire réelle discrète finie** (ou simplement **variable aléatoire finie**),

est une application $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega). \end{array}$

• Le **support** de $X$, noté $X(\Omega)$, est l'ensemble des valeurs prises par $X$.

**Exemples**

1 On lance une pièce de monnaie. On gagne 1 euro si on obtient Pile, on ne gagne rien sinon.
L'univers associé à l'expérience aléatoire est : $\Omega = \{Pile, Face\}$

On note $X$ le gain obtenu : cela fait de $X$ une variable aléatoire finie.
( Précisément, c'est la fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par : $X(Pile) = 1$ et $X(Face) = 0.$ )
Le support de $X$ est : $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

2 On lance deux dés à 6 faces successivement.
L'univers associé à l'expérience aléatoire est : $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.
On note $X$ la somme des valeurs des deux dés : cela fait de $X$ une variable aléatoire finie.
( Précisément, c'est la fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x,y) \in \Omega, \quad X((x,y)) = x + y.$ )
Le support de $X$ est : $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$

$\boxed{3}$ On lance trois dés à 6 faces successivement.
L'univers associé à l'expérience aléatoire est : $\Omega = [\![1,6]\!]^3$.
On note $X$ le nombre de 6 obtenus : cela fait de $X$ une variable aléatoire finie.
( C'est bien une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$, un peu plus compliquée à décrire... )
Le support de $X$ est : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\} = [\![0, 3]\!]$.

### Remarque 1

Bien souvent, dans un énoncé, une variable aléatoire est définie par le biais d'une phrase ("le gain obtenu", "la somme des valeurs des dés", "le nombre de 6 obtenus"). Concrètement, il est assez rare que l'on ait besoin de décrire l'univers $\Omega$ ou l'application $X$ de manière explicite.

On peut ensuite penser à la variable aléatoire $X$ comme à un "nombre aléatoire".
De fait, on a envie de pouvoir considérer les évènements "$X$ est égal à 3", "$X$ est supérieur à 2", etc...

### Définition 2 (Évènements associés à une variable aléatoire finie)

Soit $X$ une variable aléatoire finie sur $\Omega$. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

- On note $[X = x]$ l'évènement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \in \mathcal{P}(\Omega)$.
- On note $[X \leqslant x]$ l'évènement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
- On note $[X \geqslant x]$ l'évènement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
- On note $[X < x]$ l'évènement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
- On note $[X > x]$ l'évènement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\} \in \mathcal{P}(\Omega)$
- Plus généralement, si $E$ est une partie de $\mathbb{R}$,
  on note $[X \in E]$ l'évènement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in E\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

### Remarque 2

Ainsi, l'évènement $[X = 2]$ par exemple, est l'ensemble des issues $\omega \in \Omega$ pour lesquelles la valeur de $X$ associée ($X(\omega)$) est égale à 2. C'est un ensemble d'issues, donc c'est bien une partie de $\Omega$, c'est à dire ce que l'on appelle un évènement !

Pour le dire plus "savamment", en se rappelant que $X$ est une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$, on a en fait

$$[X = x] = X^{-1}(\{x\}), \quad [X \leqslant x] = X^{-1}(]-\infty, x]) \quad \text{et plus généralement} \quad [X \in E] = X^{-1}(E).$$

(au sens de l'image réciproque d'une partie de $\mathbb{R}$ par l'application $X : \Omega \to \mathbb{R}$...)

### Exemples

$\boxed{1}$ Pile ou Face : L'événement $[X = 1]$ est "Obtenir Pile".
En terme de parties de $\Omega$ : $[X = 1] = \{Pile\}$.

$\boxed{2}$ Somme de deux dés : Rappelons que l'univers est $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.

- L'événement $[X = 4]$ est "La somme des deux dés vaut 4".

En termes de parties de $\Omega$ : $[X = 4] = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$

- L'évènement $[X \geqslant 10]$ est "La somme des deux dés vaut au moins 10".

En termes de parties de $\Omega$ : $[X \geqslant 10] = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

Notons qu'on peut écrire naturellement : $[X \geqslant 10] = [X = 10] \cup [X = 11] \cup [X = 12]$
(Dire que "$X \geqslant 10$", c'est dire que "$X = 10$" ou "$X = 11$" ou "$X = 12$".)

**Proposition 1 (Système complet d'évènements associé à $X$)**

Soit $X$ une variable aléatoire finie sur $\Omega$. On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ son support.

Alors $\Big([X = x_1],\ [X = x_2],\ \dots,\ [X = x_n]\Big)$ est un système complet d'événements.

On l'appelle le système complet d'événements associé à $X$ .

**Preuve :**

C'est évident puisque quelle que soit l'issue $\omega \in \Omega$ de l'expérience aléatoire, $X(\omega)$ prendra l'une des valeurs possibles $x_1, \dots, x_n$. Autrement, un et un seul des évènements $[X = x_i]$ sera toujours réalisé.
□

# 2 Loi de probabilité

## 2.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire finie

Lorsqu'un énoncé porte sur des variables aléatoires, dans la majorité des cas, ni l'univers $\Omega$, ni l'application $X$ ne seront exprimés de manière explicite ! Ce qui compte, bien souvent, c'est en fait de déterminer la **loi de probabilité** des variables aléatoires mises en jeu.

**Définition 3 (Loi de probabilité d'un variable aléatoire finie)**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, et $X$ une variable aléatoire finie sur $\Omega$.
On appelle **loi de probabilité de** $X$ (ou "loi de $X$") la donnée de :

$\boxed{1}$ Le support de $X$ : $X(\Omega)$

$\boxed{2}$ La valeur des probabilités $P([X = x])$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

On retiendra que la somme de ces probabilités vaut toujours 1 : $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1.$

**Remarques 3**

• Pour simplifier les notations, on note souvent $P(X = x)$ plutôt que $P([X = x])$.
De même, on écrira $P(X \leqslant x)$ plutôt que $P([X \leqslant x])$, etc...

• Autrement dit, connaître la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie $X$, c'est connaître :

$\boxed{1}$ Les valeurs que $X$ peut prendre. $\boxed{2}$ Avec quelle probabilité $X$ prend chacune de ces valeurs.

**Preuve du fait que la somme vaut 1 :**

Notons le support $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
On a vu que $\Big([X = x_1], \dots, [X = x_n]\Big)$ est un système complet d'évènements.

On a donc l'union disjointe : $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} [X = x_i] = \Omega.$

Ainsi $\displaystyle P\left(\bigcup_{i=1}^{n} [X = x_i]\right) = P(\Omega) = 1$, c'est à dire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P([X = x_i]) = 1$ i.e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$

ou encore $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1.$ □

**Exercice 1**

Déterminer la loi de probabilité de $X$ dans les exemples $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$.
(On considère des pièces et des dés équilibrés !).

$\boxed{1}$ On lance une pièce équilibrée. $\Omega = \{Pile, Face\}$. On a équiprobabilité.

- Le support de $X$ est $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
- $P(X=0) = P(\{Face\}) = \frac{1}{2}$ et $P(X=1) = P(\{Pile\}) = \frac{1}{2}$.

On peut résumer la loi de probabilité de $X$ dans un tableau :

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

$\boxed{2}$ On lance deux dés, on s'intéresse à la somme. $\Omega = [\![1,6]\!]^2$. On a équiprobabilité.

- Le support de $X$ est : $X(\Omega) = [\![2,12]\!]$.
- Pour tout $k \in [\![2,12]\!]$, par équiprobabilité, $P(X=k) = \dfrac{Card([X=k])}{Card(\Omega)} = \dfrac{Card([X=k])}{36}$.

Et on a :

$[X=2] = \{(1,1)\}$ donc $P(X=2) = \dfrac{1}{36}$.

$[X=3] = \{(1,2),(2,1)\}$ donc $P(X=3) = \dfrac{2}{36}$.

$[X=4] = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ donc $P(X=4) = \dfrac{3}{36}$.

$[X=5] = \ldots$

$[X=6] = \ldots$

$[X=7] = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ donc $P(X=7) = \dfrac{6}{36}$.

$[X=8] = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$ donc $P(X=8) = \dfrac{5}{36}$.

$[X=9] = \ldots$

$[X=10] = \ldots$

$[X=11] = \ldots$

$[X=12] = \{(6,6)\}$ donc $P(X=12) = \dfrac{1}{36}$.

On peut résumer la loi de probabilité de $X$ dans un tableau :

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

Ou sur un diagramme en bâtons :

$\boxed{3}$ On lance 3 dés, on s'intéresse au nombre de 6. $\Omega = [\![1,6]\!]^3$. On a équiprobabilité.

- Le support de $X$ est : $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$.
- $P(X=0) = \dfrac{\text{Nb de résultats sans 6}}{\text{Nb de résultats}} = \dfrac{5^3}{6^3} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^3$

$P(X=1) = \dfrac{\text{Nb de résultats avec un 6}}{\text{Nb de résultats}} = \dfrac{\binom{3}{1}5^2}{6^3} = \dbinom{3}{1}\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^2$

$P(X=2) = \dfrac{\text{Nb de résultats avec deux 6}}{\text{Nb de résultats}} = \dfrac{\binom{2}{1}5}{6^3} = \dbinom{3}{2}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\dfrac{5}{6}$

$P(X=2) = \dfrac{\text{Nb de résultats avec trois 6}}{\text{Nb de résultats}} = \dfrac{1}{6^3} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^3$

On verra qu'il s'agit d'une "loi binomiale"...

### Méthode : Calcul de probabilités à partir de la loi de $X$

Si l'on connaît la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie $X$, alors on peut calculer la probabilité de n'importe quel évènement associé à $X$ : pour toute partie $E \subset \mathbb{R}$,

$$P(X \in E) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap E} P(X = x).$$

### Exercice 2

On rappelle la variable aléatoire de l'exemple $\boxed{2}$ (somme de deux dés équilibrés).
On rappelle que sa loi de probabilité est donnée par :

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

Calculer les probabilités suivantes :

(a) $P(X \in \{3, 5, 6\})$ (b) $P(X \leqslant 4)$ (c) $P(X > 8)$ (d) $P(3 < X \leqslant 7)$ (e) $P(X \leqslant \pi)$
(f) $P(X \text{ est pair})$.

(a) L'évènement $[X \in \{3, 4, 6\}]$ s'écrit comme l'union disjointe $[X = 3] \cup [X = 4] \cup [X = 6]$.

$$P\Big([X \in \{3, 4, 6\}]\Big) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 6) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

(b) $P(X \leqslant 4) = P\Big(\bigcup_{k=2}^{4} [X = k]\Big) = \sum_{k=2}^{4} P(X = k) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$

(c) $P(X > 8) = \sum_{k=9}^{12} P(X = k) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$

(d) $P(3 < X \leqslant 7) = \sum_{k=4}^{7} P(X = 4) = \frac{18}{36}.$

(e) $P(X \leqslant \pi) = P\Big([X = 2] \cup [X = 3]\Big) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$

(d) $P(X \text{ est pair}) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{6} [X = 2k]\Big) = \sum_{k=1}^{6} P(X = 2k) = \frac{1 + 3 + 5 + 5 + 3 + 1}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$

### Remarque 4

On retiendra en particulier que si $X$ est à valeurs entières (c'est à dire si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$), alors pour $m, n \in \mathbb{N}$,

$$P(X \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k), \qquad P(m \leqslant X \leqslant n) = \sum_{k=m}^{n} P(X = k), \qquad \text{etc...}$$

Il arrive parfois qu'un énoncé donne directement la loi de probabilité d'une variable aléatoire, en occultant totalement l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ sous-jacent.

### Méthode : Vérifier qu'une loi de probabilité est "valide"

Supposons que l'on pose : $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(X = x_i) = p_i$.
Ceci définit bien une loi de probabilité si :

$$\boxed{1} \text{ Pour tout } i \in [\![1, n]\!],\ p_i \geqslant 0. \qquad \boxed{2} \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

### Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère une variable aléatoire finie $X$ de support $[\![1, 2n]\!]$, dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in [\![1, 2n]\!], \quad P(X = k) = a\,k, \qquad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la valeur de la constante $a$. 2. Quelle est la probabilité que $X$ soit pair ?

1. Déjà il faut que $a \geqslant 0$. De plus, on doit avoir $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$, c'est à dire :

$$\sum_{k=1}^{2n} P(X = k) = 1 \iff \sum_{k=1}^{2n} ak = 1 \iff a \sum_{k=1}^{2n} k = 1 \iff a \times \frac{2n(2n+1)}{2} = 1 \iff a = \frac{1}{n(2n+1)}.$$

2. L'évènement "$X$ est pair" s'écrit comme l'union disjointe $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} [X = 2k]$ donc :

$$P(X \text{ est pair}) = \sum_{k=1}^{n} P(X = 2k) = \sum_{k=1}^{n} a \times 2k = 2a \sum_{k=1}^{n} k = 2a\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{n(2n+1)} = \frac{n+1}{2n+1}.$$

### Attention !

Deux variables aléatoires qui ont la même loi de probabilité ne sont pas forcément égales !

Exemple : On lance une pièce équilibrée.

On pose $X = 1$ si on obtient Pile et $X = 0$ sinon. On pose $Y = 1$ si on obtient Face et $Y = 0$ sinon.
Alors $X$ et $Y$ ont la même loi de probabilité : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$P(X = 0) = P(Y = 0) = \frac{1}{2}, \qquad P(X = 1) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

Mais pourtant $X \neq Y$ (en fait $Y = 1 - X$).

## 2.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire finie

**Définition 4 (Fonction de répartition)**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $X$ une variable aléatoire finie sur $\Omega$.

On appelle **fonction de répartition de** $X$ la fonction $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leqslant x).$$

### Remarques 5

- La notion de fonction de répartition sera exploitée davantage en deuxième année.
- Pour une variable aléatoire finie $X$, la fonction de répartition est en fait constante par morceaux.

### Exercice 4

Calculer et représenter la fonction de répartition de $X$, dont la loi de probabilité est donnée par :

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $1/6$ | $1/3$ | $1/2$ |

D'abord, on a $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1$ : il s'agit donc bien d'une loi de probabilité "valide".

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimons $F_X(x)=P(X \leqslant x)$ :

- Pour $x<1$, $F_X(x)=0$
- Pour $1 \leqslant x<2$, $F_X(x)=P(X=1)=\frac{1}{6}$.
- Pour $2 \leqslant x<3$, $F_X(x)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.
- Pour $3 \leqslant x$, $F_X(x)=1$.

Cette méthode se généralise à n'importe quelle variable aléatoire finie :

**Méthode : Expression de la fonction de répartition**

Notons le support : $X(\Omega)=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec $x_1<x_2<\ldots<x_n$.

- Si $x<x_1$, $\quad F_X(x)=P(X \leqslant x)=0$.
- Si $x_i \leqslant x<x_{i+1}$ pour un $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$F_X(x)=P(X \leqslant x)=P(X=x_1)+P(X=x_2)+\ldots+P(X=x_i).$$

- Si $x \geqslant x_n$, alors $F_X(x)=P(X \leqslant x)=1$.

**Dessin :**

La fonction de répartition $F_X$ contient toute l'"information" concernant la loi de probabilité de $X$.

**Théorème 1 (La fonction de répartition "caractérise la loi")**

Deux variables aléatoires finies ont la même fonction de répartition si et seulement si elles ont la même loi de probabilité.

**Preuve rapide :**

- Si $X$ et $Y$ ont la même loi de probabilité, c'est à dire si $X(\Omega)=Y(\Omega)=\{x_1, \ldots, x_p\}$ et pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $P(X=x_i)=P(Y=y_i)$, alors il est facile de vérifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x)=F_Y(x)$.
(Calcul de la fonction de répartition à partir de la loi de probabilité expliqué en page précédente).
- Inversement, on sait lire sur le graphe de $F_X$ le support $\{x_1, \ldots, x_p\}$ de $X$ ainsi que les probabilités $P(X=x_i)$. Deux variables ayant même fonction de répartition ont donc même loi de probabilité. $\square$

Dans certains cas, il sera plus simple de calculer d'abord la fonction de répartition, et d'en déduire ensuite la loi de probabilité. Il est dans tous les cas utile de savoir passer facilement de l'une à l'autre !

**Proposition 2 (Calcul de probabilités à partir de $F_X$)**

Soit $X$ une variable aléatoire finie et $F_X$ sa fonction de répartition.

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $\quad P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Si $X$ est à valeurs entières, c'est à dire $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

- $P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) = F_X(k) - F_X(k-1)$.
- $P(X = k) = P(X < k+1) - P(X < k)$.
- $P(X = k) = P(X \geqslant k) - P(X \geqslant k+1)$.
- $P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$.

**Preuve (méthode à retenir) :**

Comme $a \leqslant b$, l'évènement $[a < X \leqslant b]$ se ré-écrit $[X \leqslant b] \setminus [X \leqslant a]$ (avec $[X \leqslant b] \subset [X \leqslant a]$).
Donc : $P(a < X \leqslant b) = P([X \leqslant b] \setminus [X \leqslant a]) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a) = F_X(b) - F_X(a)$.

Si $X$ est à valeur entières, dire que "$X = k$" revient à dire "On a $X \leqslant k$ mais pas $X \leqslant k-1$".
Donc : $P(X = k) = P([X \leqslant k] \setminus [X \leqslant k-1]) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) = F_X(k) - F_X(k-1)$.

De même dans les autres cas, en remarquant que :
$[X = k] = [X < k+1] \setminus [X < k]$
$[X = k] = [X \geqslant k] \setminus [X \geqslant k+1]$
$[X = k] = [X > k-1] \setminus [X > k]$

$\square$

**Exercice 5**

On lance $n$ dés à 6 faces équilibrés.

On note $X$ la plus grand valeur obtenue, $Y$ la plus petite valeur obtenue.

1. Quelle est le support de $X$ ? de $Y$ ?

2. Pour $k \in [\![1, 6]\!]$, interpréter l'évènement $[X \leqslant k]$, puis calculer $P(X \leqslant k)$.
En déduire la loi de probabilité de $X$.

3. Adapter ce raisonnement pour calculer la loi de probabilité de $Y$.

1. $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1, 6]\!]$.

2. Soit $k \in [\![1, 6]\!]$.
L'évènement $[X \leqslant k]$ signifie : "Toutes les valeurs tirées sont inférieures ou égales à $k$".

Par équiprobabilité : $P(X \leqslant k) = \dfrac{\text{Nombre d'issues où toutes les valeurs sont } \leqslant k}{\text{Nombre d'issues possibles}} = \dfrac{k^n}{6^n} = \left(\dfrac{k}{6}\right)^n$.

On en déduit que :

$P(X = 1) = P(X \leqslant 1) = \dfrac{1}{6^n}$.

Pour $k \in [\![2, 6]\!]$, $\quad P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) = \dfrac{k^n - (k-1)^n}{6^n}$.
En fait cette formule reste valable pour $k = 1$. On a donc la loi :

$$\forall k \in [\![1, 6]\!], \quad P(X = k) = \frac{k^n - (k-1)^n}{6^n}.$$

3. Pour $k \in [\![1,6]\!]$, $[Y \geqslant k]$ signifie "Toutes les valeurs tirées sont supérieures ou égales à $k$".
Ainsi : $P(Y \geqslant k) = \dfrac{\text{Nombre d'issues où toutes les valeurs sont } \geqslant k}{\text{Nombre d'issues possibles}} = \dfrac{(7-k)^n}{6^n} = \left(\dfrac{7-k}{6}\right)^n$.

On en déduit , pour $k \in [\![1,5]\!]$, $P(Y=k) = P(Y \geqslant k) - P(Y \geqslant k+1) = \left(\dfrac{7-k}{6}\right)^n - \left(\dfrac{6-k}{6}\right)^n$.

Cette formule reste valable pour $k=6$. On a donc la loi :

$$\forall k \in [\![1,6]\!], \quad P(Y=k) = \frac{(7-k)^n - (6-k)^n}{6^n}.$$

### 2.3 "Transfert" d'une variable aléatoire (composition par une fonction)

Rappelons qu'une variable aléatoire n'est rien de moins qu'une application

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array} \qquad \text{(à une issue, on associe une valeur réelle)}$$

**Définition 5 (Transfert de $X$ par une fonction $g$)**

Soit $X$ une variable aléatoire finie sur $\Omega$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

En posant : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = g(X(\omega))$

on définit une nouvelle variable aléatoire finie $Y$, que l'on note simplement $Y = g(X)$.

On dit que $Y$ est le "transfert de $X$ par $g$".

**Exemples**

Si $X$ une variable aléatoire finie, on pourra ainsi parler des variables aléatoires finies :

$$2X+1, \quad X^2, \quad e^X, \quad |X|, \quad \text{etc...}$$

**Proposition 3 (Loi de probabilité de $g(X)$)**

Soit $X$ une variable aléatoire finie sur $\Omega$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Le support de la variable aléatoire $g(X)$ est l'image du support de $X$ par la fonction $g$.

Autrement dit : c'est $g(X(\Omega))$.

- Pour tout $y \in g(X(\Omega))$, on a : $\qquad P(g(X)=y) = \displaystyle\sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} P(X=x)$

où on rappelle que $g^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = y\}$ est l'ensemble des antécédents de $y$ par $g$.

**Preuve rapide :**

- Si le support de $X$ est $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors par définition l'ensemble des valeurs prises par $g(X)$ est $\{g(x_1), \ldots, g(x_n)\}$, c'est à dire $g(X(\Omega))$.

- Soit $y \in g(X(\Omega))$. L'évènement $[g(X)=y]$ signifie exactement "$X$ est un antécédent de $y$ par $g$", donc se ré-écrit :

$$[g(X)=y] = [X \in g^{-1}(y)] = \bigcup_{x \in g^{-1}(y)} [X=x] \quad \text{(union disjointe)}$$

On conclut en passant aux probabilités. $\square$

**Calculs pratiques de la loi de probabilité d'un transfert :**

**Exemples**

Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

- Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, le support de $Y = aX + b$ est $Y(\Omega) = \{ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b\}$ et pour tout $y \in Y(\Omega)$

$$P(Y = y) = P(aX + b = y) = P(aX = y - b) = P\left(X = \frac{y - b}{a}\right).$$

- Le support de $Z = |X|$ est $Z(\Omega) = \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ et pour tout $z \in Z(\Omega)$,

$$P(Z = z) = P(|X| = z) = P([X = z] \cup [X = -z]) = \begin{cases} P(X = 0) & \text{si } z = 0 \\ P(X = -z) + P(X = z) & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

**Exercice 6**

On considère une variable aléatoire finie $X$ ayant la loi de probabilité suivante :

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $1/6$ | $1/3$ | $1/2$ |

Déterminer la loi de probabilité de $Y = (2X - 3)^2$.

Le support de $X$ est : $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
Le support de $Y = (2X - 3)^2$ est donc $Y(\Omega) = \{(2 - 3)^2, (4 - 3)^2, (6 - 3)^2\} = \{1, 9\}$.
On note que :

$$\begin{aligned} P(Y = 1) = P((2X - 3)^2 = 1) &= P(2X - 3 = -1 \text{ ou } 2X - 3 = 1) \\ &= P([2X - 3 = -1] \cup [2X - 3 = 1]) \\ &= P(2X - 3 = -1) + P(2X - 3 = 1) \\ &= P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Puis $P(Y = 9) = 1 - P(Y = 1) = \frac{1}{2}$.

# 3 Espérance et variance

## 3.1 Espérance d'une variable aléatoire finie

### a) Définition et calcul

**Définition 6 (Espérance de $X$)**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $X$ une variable aléatoire finie sur $\Omega$.

On appelle **espérance de** $X$ le réel $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.

Autrement dit, si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\quad E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$.

L'espérance de $X$ s'interprète comme **la moyenne des valeurs prises par** $X$, pondérée par les probabilités de chacune de ces valeurs.

**Exemple**

On lance un dé à 6 faces équilibré, et on note $X$ le numéro obtenu.

Le support de $X$ est $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

Il en résulte :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

**Exercice 7**

On reprend la variable aléatoire $X$ correspondant à la somme de deux dés équilibrés.

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

Calculer $E(X)$.

$$E(X) = \sum_{k=2}^{12} kP(X = k) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36}$$
$$+ 8 \times \frac{5}{36} + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36}.$$

On obtient $E(X) = \frac{252}{36} = 7$. **En moyenne**, la somme de deux dés à 6 faces équilibrés vaut 7.

**Exercice 8**

On reprend la variable aléatoire de l'exercice 3 : son support est $X(\Omega) = [\![1, 2n]\!]$ et sa loi est

$$\forall k \in [\![1, 2n]\!], \; P(X = k) = a\,k \quad \text{où on avait déterminé que } a = \frac{1}{n(2n+1)}.$$

Déterminer $E(X)$ en fonction de $n$.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{2n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{2n} ak^2 = a \times \sum_{k=1}^{2n} k^2 = \frac{1}{n(2n+1)} \times \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} = \frac{4n+1}{3}.$$

**b) Linéarité de l'espérance**

**Théorème 2 (Linéarité de l'espérance)**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires finies sur $\Omega$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
On peut considérer la variable aléatoire finie $Z = aX + bY$.
(C'est l'application $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = aX(\omega) + bY(\omega)$).

On a alors : $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

**Preuve (peut être admise) :**

Rappelons que les variables aléatoires sont définies sur un univers fini $\Omega$.

Notons $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ de sorte que $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$.

On rappelle que l'évènement $A_i = [X = x_i]$ correspond à la partie de $\Omega$ : $A_i = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, en remarquant que l'on peut toujours écrire $A_i = \bigcup_{\omega \in A_i} \{\omega\}$, on a :

$$x_i \times P(X = x_i) = x_i \times P(A_i) = x_i \times P\left(\bigcup_{\omega \in A_i} \{\omega\}\right) = x_i \sum_{\omega \in A_i} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A_i} x_i \times P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A_i} X(\omega) P(\{\omega\}).$$

(car, par définition, pour tout $\omega \in A_i$, $X(\omega) = x_i$).

En revenant à l'espérance, on obtient $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\omega \in A_i} X(\omega) \times P(\{\omega\})$.

En se rappelant que les $A_i = [X = x_i]$, pour $i \in [\![1, n]\!]$, forment un système complet d'évènements (cf. Proposition 1), on a l'union disjointe $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. La somme " $\sum_{i=1}^{n} \sum_{\omega \in A_i}$ " revient donc à " $\sum_{\omega \in \Omega}$ ".

Au final, on obtient une autre formule pour l'espérance : $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$.
(valable pour n'importe quelle variable aléatoire finie).

À partir de cette formule, la linéarité devient évidente : pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} E(aX + bY) = \sum_{\omega \in \Omega} \Big(aX + bY\Big)(\omega) P(\{\omega\}) &= \sum_{\omega \in \Omega} \Big(aX(\omega) + bY(\omega)\Big) P(\{\omega\}) \\ &= a \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) + b \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P(\{\omega\}). \\ &= aE(X) + bE(Y). \end{aligned}$$

□

**Exemple**

On lance deux dés à 6 faces équilibrés.
On note $X_1$ le résultat du premier dé, $X_2$ le résultat du deuxième.
$X_1$ et $X_2$ ont la même loi de probabilité, donc la même espérance (déjà calculée en page précédente) :

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = 3,5.$$

On peut alors retrouver, par linéarité, l'espérance de la somme des deux dés de l'Exercice 7 :

$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 3,5 + 3,5 = 7.$

Par récurrence immédiate, on obtient :

**Corollaire 1 (Linéarité généralisée)**

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires finies et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

On a : $E\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k E(X_k)$.

Ce résultat de linéarité permet en particulier de calculer très facilement l'espérance d'une transformation affine d'une variable aléatoire $X$.

**Proposition 4 (Espérance d'une variable aléatoire constante)**

Soit $X$ une variable aléatoire constante égale à $c \in \mathbb{R}$ : $X(\Omega) = \{c\}$ et $P(X = c) = 1$.

Alors on a $E(X) = c$.
Autrement dit, l'espérance d'une variable aléatoire constante est égale à cette constante.

**Preuve :**

C'est évident car, comme $X(\Omega) = \{c\}$, $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = cP(X = c) = c \times 1 = c$. □

**Corollaire 2 (Espérance d'une transformation affine)**

Soit $X$ une variable aléatoire finie et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $E(aX + b) = aE(X) + b$.

**Preuve :**

Par linéarité de l'espérance (en voyant $b$ comme une variable aléatoire constante) :

$$E(aX + b) = aE(X) + E(b) = aE(X) + b.$$ □

**Exercice 9**

On considère à nouveau la variable aléatoire $X$ de l'Exercice 8. On a vu que $E(X) = \dfrac{4n+1}{3}$.

On pose $Y = \dfrac{3X - 1}{4}$. Calculer $E(Y)$.

$$E(Y) = E\left(\frac{3X-1}{4}\right) = E\left(\frac{3}{4}X - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}E(X) - \frac{1}{4} = \frac{3E(X) - 1}{4} = \frac{3 \times \frac{4n+1}{3} - 1}{4} = \frac{4n}{4} = n.$$

Profitons-en pour introduire un point de vocabulaire :

**Définition 7 (Variable aléatoire centrée)**

- On dit qu'une variable aléatoire finie $X$ est **centrée** lorsque $E(X) = 0$.
- Si $X$ est une variable aléatoire finie quelconque, alors $X - E(X)$ est une variable aléatoire centrée.

**Preuve du deuxième point :**

Posons $m = E(X) \in \mathbb{R}$. Par linéarité, $E(X - m) = E(X) - E(m) = E(X) - m = E(X) - E(X) = 0$.
La variable aléatoire $X - m$ est donc bien centrée. □

**Exemple**

Soit $X$ la variable aléatoire correspondant à la somme de deux dés équilibrés :

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

Posons $Y = X - 7$. Sans calculer la loi de probabilité de $Y$, on peut affirmer :
$E(Y) = E(X - 7) = E(X) - 7 = 7 - 7 = 0$.

### c) Théorème de transfert

On vient de voir qu'il était aisé de calculer l'espérance de $Y = aX + b$, connaissant celle de $X$.
On peut alors se demander comment calculer l'espérance d'un transfert $Y = g(X)$ plus général...

**Théorème 3 (Théorème de transfert)**

Soit $X$ une variable aléatoire finie sur $\Omega$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a :

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x).$$

Autrement dit, si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$,

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)P(X = x_i).$$

**Preuve (peut être admise) :**

Notons $Y = g(X)$.
On a donc, par définition $E(g(X)) = E(Y) = \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} y \times P(Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \times P(g(X) = y)$.
Or, d'après la Proposition 3, on sait que $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$ et que pour tout $y \in g(X(\Omega))$,

$$P(g(X) = y) = \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} P(X = x).$$

En remplaçant : $E(g(X)) = \displaystyle\sum_{y \in g(X(\Omega))} \left( y \times \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} P(X = x) \right) = \sum_{y \in g(X(\Omega))} \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} y \times P(X = x)$

c'est à dire $E(g(X)) = \displaystyle\sum_{y \in g(X(\Omega))} \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} g(x) \times P(X = x)$. $\quad (x \in g^{-1}(y)$ donc $g(x) = y)$

Pour finir, en se creusant les méninges, on remarque que " $\displaystyle\sum_{y \in g(X(\Omega))} \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})}$ " revient à " $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)}$ "...

Finalement, on a bien : $\quad E(g(X)) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$. $\square$

**Remarques 6**

- Lorsque $g = Id_{\mathbb{R}}$ (c'est à dire pour $g(x) = x$), on retrouve la définition de l'espérance :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

- Quelques cas particuliers utiles : $\quad E(|X|) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} |x|P(X = x) \qquad E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x)$

- On notera que le Théorème de transfert ne nécessite pas d'avoir calculé la loi de $g(X)$ (ce qui peut être un peu pénible...) Pour calculer $E(g(X))$, **il suffit de connaître la loi de probabilité de $X$ !**

**Exercice 10**

Soit $X$ une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par :

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ |

Calculer $E(X^2)$ et $E\left(2^X\right)$.

La formule de transfert s'écrit ici : $E(g(X)) = \sum_{k=0}^{3} g(k)P(X=k)$.

- $E(X^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2 P(X=k) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^3 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{9}{4} = \frac{13}{4} = 3,25$.
- $E\left(2^X\right) = \sum_{k=0}^{3} 2^k P(X=k) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} + 8 \times \frac{1}{4} = \frac{3+4+4+12}{6} = \frac{23}{6}$.

### d) Espérance et inégalités

**Proposition 5 (Espérance d'une variable aléatoire positive)**

Soit $X$ une variable aléatoire finie à valeurs positives : $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$. (ou encore $P(X \geqslant 0) = 1$).
Alors $E(X) \geqslant 0$.
De plus on a égalité si et seulement si $X$ est constante égale à 0 : $E(X) = 0 \iff P(X=0) = 1$.

**Preuve :**

On sait que $\forall x \in X(\Omega),\ x \geqslant 0$. Donc : $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \underbrace{x}_{\geqslant 0} \underbrace{P(X=x)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$.

- Supposons $E(X) = 0$.
Tous les termes étant positifs, pour que la somme soit nulle il faut que chacun des termes soit nul.
On a donc : $\forall x \in X(\Omega),\ x\,P(X=x) = 0$.
On en déduit que pour $x \in X(\Omega) \cap \mathbb{R}^*$, $P(X=x) = 0$.
Il en résulte que $P(X \neq 0) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap \mathbb{R}^*} P(X=x) = 0$ et donc $P(X=0) = 1$.
- Inversement, si $P(X=0) = 1$, $X$ est constante égale à 0 et on sait donc que $E(X) = 0$. □

**Attention !**

Cette dernière équivalence ne vaut que pour des variables aléatoire à valeurs positives.
Il existe évidemment des variables aléatoires d'espérance nulle, qui ne sont pas constantes égales à 0 !

Exemple :

| $x$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $1/2$ | $1/2$ |

On a $E(X) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$.

**Corollaire 3 (Croissance de l'espérance)**

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires finies telles que $P(X \leqslant Y) = 1$.
(On dit parfois qu'on a $X \leqslant Y$ "presque sûrement", c'est à dire avec probabilité 1).
Alors $E(X) \leqslant E(Y)$.
En particulier, pour tout $c \in \mathbb{R}$ :

- Si $P(X \leqslant c) = 1$ alors $E(X) \leqslant c$
- Si $P(X \geqslant c) = 1$ alors $E(X) \geqslant c$.

**Preuve :**

En posant $Z = Y - X$, on a par hypothèse $P(Z \geqslant 0) = P(X \leqslant Y) = 1$.
D'après la Proposition 5, on déduit $E(Z) \geqslant 0$, c'est à dire $E(Y) - E(X) \geqslant 0$, i.e $E(X) \leqslant E(Y)$.

Les points suivants s'obtiennent en choisissant pour $Y$ (ou pour $X$)
une variable aléatoire constante égale à $c$ (puisqu'alors $E(c) = c$). □

### 3.2 Variance, écart-type d'une variable aléatoire finie

#### a) Définition et calcul

**Définition 8 (Variance, écart-type de $X$)**

Soit $X$ une variable aléatoire finie sur $\Omega$.

- On appelle **variance de** $X$ le réel $V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big)$.

Notant $m = E(X) \in \mathbb{R}$, le théorème de transfert donne donc l'expression :

$$V(X) = E((X-m)^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x-m)^2 P(X=x).$$

- On appelle **écart-type de** $X$ le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

La variance de $X$ (et l'écart type) mesurent **"l'écart à la moyenne"**, c'est à dire la dispersion des valeurs de $X$ par rapport à son espérance $E(X)$.

- Une variance "faible" signifie que $X$ prend typiquement des valeurs proches de sa moyenne $E(X)$.
- Une variance "élevée" signifie que $X$ peut prendre des valeurs assez éloignées de sa moyenne $E(X)$.

**Remarque 7**

La variable aléatoire $(X - E(X))^2$ est positive, donc par positivité de l'espérance, $\boxed{V(X) \geqslant 0}$.
Ceci garantit que $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \geqslant 0$ existe bien !

**Proposition 6 (Formule de Koenig-Huygens)**

Soit $X$ une variable aléatoire finie. Alors : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

**Preuve :**

Notons $m = E(X) \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} V(X) = E((X-m)^2) = E(X^2 - 2mX + m^2) &= E(X^2) - 2m \underbrace{E(X)}_{m} + m^2 \\ &= E(X^2) - 2m^2 + m^2 \\ &= E(X^2) - m^2 = E(X^2) - E(X)^2. \end{aligned}$$

□

On utilisera **pratiquement toujours la formule de Koenig-Huygens** pour calculer une variance.

**Exercice 11**

On considère à nouveau la variable aléatoire $X$ de l'Exercice 8 :

$$\forall k \in [\![1, 2n]\!],\ P(X=k) = a\,k \quad \text{où on avait déterminé que } a = \frac{1}{n(2n+1)}.$$

On a vu que $E(X) = \dfrac{4n+1}{3}$. Calculer $V(X)$.

On utilise $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ : il reste à calculer $E(X^2)$. D'après le théorème de transfert :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{2n} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{2n} k^2 \times ak = a \times \sum_{k=1}^{2n} k^3 = \frac{1}{n(2n+1)} \times \frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4} = n(2n+1).$$

Ainsi $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = n(2n+1) - \left(\dfrac{4n+1}{3}\right)^2 = \dfrac{(2n-1)(n+1)}{9}$.

### b) Propriétés

**Proposition 7 (Cas de la variance nulle)**

Soit $X$ une variable aléatoire finie. On a l'équivalence :

$$V(X) = 0 \iff \exists c \in \mathbb{R}, P(X = c) = 1.$$

Autrement dit, $X$ est de variance nulle si et seulement si c'est une variable aléatoire constante.

**Preuve :**

Posons $m = E(X)$ et $Y = (X - m)^2$, de sorte que $V(X) = E(Y)$ par définition.
Comme $Y$ est une variable aléatoire positive, d'après la Proposition 5, on a les équivalences :

$$V(X) = 0 \iff E(Y) = 0 \iff P(Y = 0) = 1 \iff P((X - m)^2 = 0) = 1 \iff P(X = m) = 1.$$

Ainsi : $V(X) = 0 \iff X$ est une variable aléatoire constante (égale à sa moyenne $E(X)$). $\square$

**Proposition 8 (Variance d'une transformation affine)**

Soit $X$ une variable aléatoire finie et $a, b \in \mathbb{R}$, Alors : $V(aX + b) = a^2V(X)$.

**Preuve :**

Posons $Y = aX + b$. En utilisant la linéarité de l'espérance, on a

$$(Y - E(Y))^2 = (aX + b) - E(aX + b))^2 = (aX + b - aE(X) - b)^2 = (a(X - E(X)))^2 = a^2(X - E(X))^2$$

et donc

$$V(Y) = E\Big((Y - E(Y))^2\Big) = E\Big(a^2(X - E(X))^2\Big) = a^2E\Big((X - E(X))^2\Big) = a^2V(X).$$

$\square$

Terminons avec un dernier point de vocabulaire :

**Définition 9 (Variable aléatoire centrée réduite)**

- On dit qu'une variable aléatoire finie $X$ est **centrée réduite** lorsque $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.
- Si $X$ est une variable aléatoire finie avec $\sigma(X) \neq 0$, alors $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

**Preuve du second point :**

Rappelons que $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$. Notons $m = E(X) \in \mathbb{R}$ et $\sigma = \sigma(X) \in \mathbb{R}^*$.

On a alors $X^* = \dfrac{X - m}{\sigma}$, c'est à dire $X^* = \dfrac{1}{\sigma}X - \dfrac{m}{\sigma}$. Ainsi :

- $E(X^*) = E\left(\dfrac{1}{\sigma}X - \dfrac{m}{\sigma}\right) = \dfrac{1}{\sigma}E(X) - \dfrac{m}{\sigma} = \dfrac{m}{\sigma} - \dfrac{m}{\sigma} = 0.$
- $V(X^*) = V\left(\dfrac{1}{\sigma}X - \dfrac{m}{\sigma}\right) = \left(\dfrac{1}{\sigma}\right)^2 V(X) = \dfrac{1}{\sigma^2} \times \sigma^2 = 1.$ $\square$

## 4 Lois finies usuelles

Dans certains cadres particuliers, à partir de l'expérience aléatoire décrite, on sera tout de suite en mesure de **reconnaitre que la variable aléatoire** $X$ à laquelle on s'intéresse **suit une loi de probabilité connue** : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale... On pourra alors, entre autres choses, donner directement les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$ sans calcul nécessaire !

### 4.1 Variable aléatoire certaine

**Définition 10 (Variable aléatoire certaine)**

On dit qu'une variable aléatoire $X$ est **certaine** (ou encore "constante") lorsqu'elle ne prend qu'une seule valeur : il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) = \{c\}$ et donc $P(X = c) = 1$.

Résumons ce qui a déjà été vu sur les variables aléatoire certaines :

**Proposition 9 (Espérance et variance d'une variable aléatoire certaine)**

Si $X$ est une variable aléatoire certaine égale à $c$, alors $E(X) = c$ et $V(X) = 0$.

### 4.2 Loi uniforme

**Définition 11 (Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire finie $X$ suit la **loi uniforme sur** $[\![1, n]\!]$ si :

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Pour dire "$X$ suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$", on note : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

**Remarque 8**

Il s'agit bien d'une loi de probabilité "valide" puisque : $\frac{1}{n} \geqslant 0$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$.

**Reconnaître une loi uniforme :** Si $X$ prend des valeurs entre 1 et un certain entier $n$ et que chacune des ces valeurs a la même chance d'apparaître, on peut affirmer que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

**Exemples**

- On lance un dé à 6 faces équilibré et on note $X$ le nombre obtenu : on a $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 6]\!])$
- Plus généralement, si on lance un dé à $n$ faces équilibré, le nombre obtenu suit la loi $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

**Proposition 10 (Espérance et variance d'une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$)**

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$, alors : $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

**Preuve :**

- $E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \times P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$.
- $E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \times P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$.

donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}$

$= \frac{(n+1)(4n+2-3(n+1))}{12} = \frac{(n+1)(n-1}{12} = \frac{n^2-1}{12}$. □

**Exercice 12**

On dispose d'une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10.
On en tire une au hasard, et on note $X$ le numéro obtenu. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

On reconnait que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,10]\!])$. On a donc $E(X) = \dfrac{11}{2} = 5.5$ et $V(X) = \dfrac{10^2-1}{12} = \dfrac{99}{12} = 8.25$.

On peut généraliser cela à une variable aléatoire uniforme entre deux entiers :

**Définition 12 (Loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$)**

Soient $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a \leqslant b$. On dit qu'une variable aléatoire finie $X$ suit la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$ si :

$$X(\Omega) = [\![a,b]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![a,b]\!],\ P(X=k) = \frac{1}{b-a+1}.$$

Pour dire "$X$ suit la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$", on note : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$.

**Exercice 13**

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$. On pose $Y = X - a + 1$.
Reconnaître la loi de probabilité de $Y$. En déduire $E(X)$ et $V(X)$ en fonction de $a$ et $b$.

Comme $X(\Omega) = [\![a,b]\!]$ et $Y = X - a + 1$, on a $Y(\Omega) = [\![1, b-a+1]\!]$.

De plus pour tout $k \in [\![1, b-a+1]\!]$, $P(Y=k) = P(X-a+1=k) = P(X=k+a-1) = \dfrac{1}{b-a+1}$.

On reconnait donc que $Y$ suit la loi uniforme sur $[\![1, b-a+1]\!]$,
c'est à dire $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ avec $n = b-a+1$.

On en déduit :

$$E(X) = E(Y+a-1) = E(Y) + a - 1 = \frac{n+1}{2} + a - 1 = \frac{b-a+2}{2} + a - 1 = \frac{a+b}{2}.$$

$$V(X) = V(Y+a-1) = V(Y) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}.$$

**Remarque 9**

On retiendra au moins que si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$, $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ (logique : c'est la moyenne de $a$ et $b$)

## 4.3 Loi de Bernoulli

**Définition 13 (Loi de Bernoulli de paramètre $p$)**

Soit $p \in [0,1]$. On dit qu'une variable aléatoire finie $X$ suit la **loi de Bernoulli de paramètre** $p$ si :

$$X(\Omega) = \{0,1\} \quad \text{et} \quad P(X=1) = p, \quad P(X=0) = 1-p.$$

Pour dire "$X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$", on note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

**Remarque 10**

Il s'agit évidemment d'une loi de probabilité valide puisque : $p \geqslant 0$, $1-p \geqslant 0$ et $p + (1-p) = 1$.

**Reconnaître une loi de Bernoulli :** Si $X$ prend uniquement les valeurs 0 ou 1,
alors on peut affirmer que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, avec le paramètre $p = P(X=1)$.

**Exemples**

- On lance une pièce équilibrée. On pose $X = 1$ si on obtient Pile, $X = 0$ si on obtient Face.
  On a alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.
- Plus généralement, si la pièce a une probabilité $p$ de donner Pile (et donc $1-p$ de donner Face), on a $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
- On dispose d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega, P)$ modélisant une certaine expérience aléatoire.

Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un évènement quelconque. On lui associe la variable aléatoire notée $\mathbf{1}_A$, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin \Omega. \end{cases} \qquad \text{("indicatrice" de } A)$$

Autement dit, $\mathbf{1}_A$ vaut 1 si l'évènement $A$ est réalisé, et vaut 0 sinon.
La variable aléatoire $\mathbf{1}_A$ suit ainsi une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, de paramètre $p = P(\mathbf{1}_A = 1) = P(A)$.

**Proposition 11 (Espérance et variance d'une loi de Bernoulli de paramètre $p$)**

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors : $\quad E(X) = p \qquad$ et $\qquad V(X) = p(1-p)$.

**Preuve :**

- $E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times \underbrace{P(X = 1)}_{p} = p$.
- $E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) = p$ donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$.

$\square$

## 4.4 Loi binomiale

**Définition 14 (Loi binomiale de paramètres $n$ et $p$)**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.
On dit qu'une variable aléatoire finie $X$ suit **la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$** si :

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, n]\!], \; P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Pour dire "$X$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$", on note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

**Remarques 11**

- Il s'agit bien d'une loi de probabilité valide car pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geqslant 0$ et :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \Big(p + (1-p)\Big)^n = 1^n = 1. \quad \text{(d'après la formule du binôme)}$$

- Dans le cas particulier $n = 1$ : $\boxed{\text{La loi } \mathcal{B}(1, p) \text{ est la loi de Benoulli } \mathcal{B}(p)}$

Pour l'interprétation de cette loi binomiale, nous avons d'abord besoin d'introduire un peu de vocabulaire.

**Définition 15 (Épreuve de Bernoulli)**

On appelle **épreuve de Bernoulli de paramètre** $p \in [0, 1]$ toute expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles :

- L'une, appelée "succès", dont la probabilité de réalisation est $p$.
- L'autre, appelée "échec", dont la probabilité de réalisation est $1 - p$.

**Exemple**

On lance une pièce qui tombe sur pile avec probabilité $p \in [0, 1]$.
On considère qu'il y a succès si on obtient Pile : c'est une épreuve de Bernoulli.

**Proposition 12 (Interprétation de la loi binomiale)**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre $p$.
Soit $X$ la variable aléatoire comptant le nombre de succès au cours de $n$ répétitions indépendantes de cette épreuve de Bernoulli. Alors on a $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

**Preuve (avec un arbre de probabilités) :**

On répète $n$ fois notre épreuve de Bernoulli. Notons $S$ pour un succès et $E$ pour un échec.
Pour $n = 3$ par exemple, on a l'arbre de probabilités suivant :

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, l'évènement $[X = k]$ signifie : "Obtenir exactement $k$ succès".

• Chaque chemin réalisant exactement $k$ succès est réalisé avec probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ ($k$ succès et $n-k$ échecs).

• Il y a $\binom{n}{k}$ tels chemins (cf. chapitre 8 "Dénombrement", Proposition 7)

Ainsi : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. □

Ceci permet de reconnaître quand une variable aléatoire introduite dans un énoncé suit une loi binomiale.

**Reconnaître une loi binomiale :** Si $X$ peut s'interpréter comme le nombre de "succès" obtenus au cours de répétitions indépendantes d'une même épreuve, alors on peut affirmer que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, où :

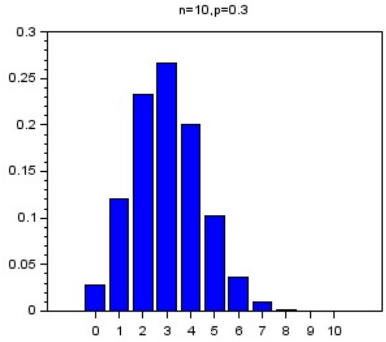
- $n \in \mathbb{N}^*$ est le nombre de fois où l'épreuve est répétée,
- $p \in [0,1]$ est la probabilité de succès sur une seule épreuve.

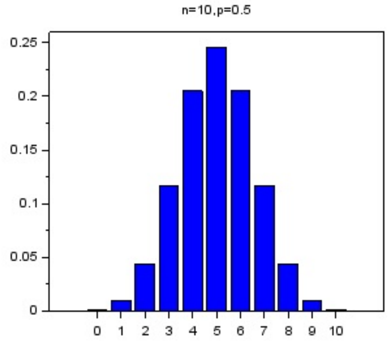
**Exemples**

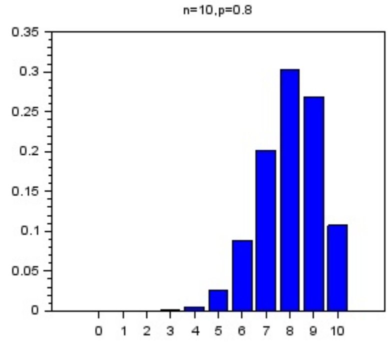
• On effectue $n$ lancers de pièce successifs.
A chaque lancer, on obtient Pile avec probabilité $p \in [0;1]$ et face avec probabilité $q = 1-p$.
(La valeur de $p$ est constante et les lancers sont indépendants)
Soit $X$ le nombre de Pile obtenus au cours des $n$ lancers. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

• Tirages avec remise.
Une urne contient $r$ boules rouges et $b$ boules blanches. On effectue $n$ tirages avec remise.
Soit $X$ le nombre de boules blanches tirées au cours de ces $n$ tirages.
On peut voir cette succession de tirages comme $n$ répétitions indépendantes de la même épreuve (car il y a remise d'un tirage à l'autre).
Obtenir un succès à l'épreuve (tirer une boule blanche), se fait avec probabilité $p = \frac{b}{r+b}$.
$X$ compte le nombre de tels succès sur $n$ répétitions, donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{b}{r+b}\right)$.

Diagramme en bâton de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ pour $n=10$ et différentes valeurs de $p$ :




### Exercice 14

Un QCM est composé de 10 questions, pour lesquelles 4 réponses possibles sont proposées.
Un élève répond au hasard à chacune des questions.
Exprimer la probabilité qu'au moins la moitié des réponses soient bonnes.

On note $X$ le nombre de bonnes réponses données.
$X$ compte donc le nombre de succès (obtenir une réponse juste) sur 10 répétitions de la même épreuve : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10, \frac{1}{4})$.

On sait donc que $\forall k \in [\![0,10]\!]$, $P(X=k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}$.

Ainsi $P(X \geqslant 5) = \sum_{k=5}^{10} P(X=k) = \sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k} \simeq 0,078 = 7,8\%$.

### Proposition 13 (Espérance et variance d'une loi Binomiale de paramètres $n$ et $p$)

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

**Preuve :**

- $E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

On rappelle que pour $k \geqslant 1$, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, donc $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} E(X) &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^{j+1}(1-p)^{n-j-1} = np\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^j(1-p)^{(n-1)-j} \\ &= np(p+(1-p))^{n-1} = np. \end{aligned}$$

(D'après la formule du binôme de Newton).

- Calcul similaire pour la variance : cf. feuille d'exercice #15. □

### Remarque 12

On pourra retenir que c'est "$n$ fois" l'espérance et la variance d'une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ !

### Exercice 15

Un QCM est composé de 10 questions, pour lesquelles 4 réponses possibles sont proposées.
Un élève répond au hasard à chacune des questions.
Combien de bonnes réponses obtient-il en moyenne ?

On note $X$ le nombre de bonnes réponses données : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10, \frac{1}{4})$.
On a donc $E(X) = 10 \times \dfrac{1}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$.

**À savoir faire à l'issue de ce chapitre :**

Au minimum

- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire $X$ de "petit support" (par exemple $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$) en la donnant dans un tableau.
- Connaître et manipuler les évènements relatifs à $X$.
- Calculer leur probabilité à l'aide de la loi de probabilité de $X$.

- Calculer l'espérance d'une variable aléatoire.
- Calculer $E(g(X))$ avec le Théorème de transfert.
- Calculer la variance d'une variable aléatoire avec la formule de Koenig-Huygens.

(Pour les calculs d'espérance : on révisera les formules des "sommes usuelles" !)

- Connaître les lois usuelles (certaine, uniforme, Bernoulli, binomiale) ainsi que leur espérance et variance.
- Savoir reconnaître ces lois usuelles dans un énoncé.

Pour suivre

- Connaître la définition "théorique" d'une variable aléatoire finie.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire de support quelconque (par exemple $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$...)
- Calculer la loi de probabilité d'un transfert $g(X)$ à partir de la loi de $X$.
- Calculer la fonction de répartition $F_X$ d'une variable aléatoire finie.
- Déterminer la loi de $X$ en utilisant les évènements $[X \leqslant k]$, $[X > k]$, etc...
- Déterminer une loi de probabilité ou une relation de récurrence en utilisant la formule des probabilités totales.

Pour les ambitieux

- Reconnaitre quand il est plus simple de calculer les probabilités de $[X \leqslant k]$ ou $[X \geqslant k]$ (etc...) pour déterminer la loi de $X$.
- Retrouver les propriétés de la loi $\mathcal{U}([\![a, b]\!])$ en se ramenant à $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$.
- Comprendre et maîtriser toutes les preuves du cours.