

# Limites de fonctions

Dans ce chapitre,  $f$  désignera une fonction numérique.

## 1 Limite d'une fonction en un point

### 1.1 Limite finie en un point

#### Définition 1 (Limite finie en un point)

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $D = I$  ou  $D = I \setminus \{x_0\}$ . Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $x_0$  lorsque :

On note alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  ou bien  $\lim_{x_0} f = \ell$ .

#### Dessin :

Interprétation :  $f(x)$  peut devenir aussi proche que l'on veut de  $\ell$ , pourvu que  $x$  soit assez proche de  $x_0$  ! Quel que soit un seuil  $\varepsilon > 0$  fixé (aussi petit soit il), on peut toujours trouver un  $\delta > 0$  tel que

$$\forall x \in D, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Notons que la valeur de ce  $\delta$  dépend en général de  $\varepsilon$  (pour plus de clarté, on pourrait le noter  $\delta_\varepsilon$ ).

#### Remarque 1

On a l'équivalence :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff$

#### Exercice 1

En vérifiant la définition, montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ .

## 💬 Remarque 2

Bien-sûr, comme pour les suites, on ne sera presque jamais amené à calculer une limite en vérifiant cette définition. On préférera utiliser les règles de calculs, les limites usuelles, les encadrements, etc...

### ⚑ Proposition 1 (Unicité de la limite en un point)

Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  admet une limite finie en  $x_0$ , alors cette limite est unique.

#### Preuve rapide :

Même preuve que pour l'unicité de limite d'une suite !

Si  $\ell_1 < \ell_2$ ,  $f(x)$  ne peut pas "se rapprocher" à la fois de  $\ell_1$  et de  $\ell_2$  quand  $x$  tend vers  $x_0$ ...  $\square$

## 💬 Remarques 3

- Si  $f$  admet une limite en  $x_0$  et si  $f$  est définie en  $x_0$ , alors, nécessairement,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

La **limite** de  $f$  en  $x_0$  est nécessairement égale à la **valeur** de  $f$  en  $x_0$ .

On dira dans ce cas que  $f$  est *continue en  $x_0$* . (cf. chapitre suivant)

- Une fonction  $f$  peut avoir une limite (finie) en  $x_0$  même si  $f$  n'est pas définie en  $x_0$  !

On dira dans ce cas que  $f$  est *prolongeable par continuité en  $x_0$* . (cf chapitre suivant)

Exemple simple : Considérons  $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$ . Alors  $f$  n'est pas définie en 0, mais  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

### ✍ Dessin :

- Une fonction  $f$  peut ne pas admettre de limite en  $x_0$  (qu'elle soit ou non définie en  $x_0$ ). De nombreuses situations sont possibles dans ce cas...

### ✍ Dessin :

## 1.2 Limite infinie en un point

### ■ Définition 2 (Limite infinie en un point)

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $D = I \setminus \{x_0\}$ .

- On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $x_0$  lorsque :

On note alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ou bien  $\lim_{x_0} f = +\infty$

- On dit que  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $x_0$  lorsque :

On note alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  ou bien  $\lim_{x_0} f = -\infty$

### ❶ Dessin :

### ❷ Remarque 4

Si  $f$  admet une limite infinie en  $x_0$ ,  $f$  ne peut pas être définie en  $x_0$  !

### ■ Proposition 2 (Rappels : deux limites infinies usuelles)

- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) =$
- Si  $n \in \mathbb{N}^*$  est pair,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} =$

### ❶ Dessin :

### 1.3 Limite à droite, limite à gauche

#### ■ Définition 3 (Limites à droite et à gauche)

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $D = I$  ou  $D = I \setminus \{x_0\}$ . Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ .

- On dit que  $f$  admet une limite à gauche en  $x_0$  égale à  $\ell$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D,$$

- On dit que  $f$  admet une limite à gauche en  $x_0$  égale à  $+\infty$  lorsque :

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D,$$

- On dit que  $f$  admet une limite à gauche en  $x_0$  égale à  $-\infty$  lorsque :

$$\forall A < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D,$$

Si  $f$  admet une limite à gauche en  $x_0$ , elle est notée  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  ou bien  $\lim_{x < x_0} f(x)$ .

- On dit que  $f$  admet une limite à droite en  $x_0$  égale à  $\ell$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D,$$

- On dit que  $f$  admet une limite à droite en  $x_0$  égale à  $+\infty$  lorsque :

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D,$$

- On dit que  $f$  admet une limite à droite en  $x_0$  égale à  $-\infty$  lorsque :

$$\forall A < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D,$$

Si  $f$  admet une limite à droite en  $x_0$ , elle est notée  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  ou bien  $\lim_{x > x_0} f(x)$ .

#### ● Remarque 5

- Bien-sûr, si  $f$  est définie seulement "à gauche de  $x_0$ ", la notion de limite à gauche en  $x_0$  coïncide avec la notion de limite (tout court). De même pour la limite à droite.

Exemple : On a naturellement  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ .

#### ■ Proposition 3 (Rappels : quelques limites usuelles à gauche et à droite)

- Si  $n \in \mathbb{N}^*$  est impair,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} =$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} =$
- Si  $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$  (pour un  $k \in \mathbb{Z}$ ),  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \tan(x) =$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \tan(x) =$

#### ● Dessin :

## Théorème 1 (Lien entre limite à gauche / à droite / "tout court")

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et soit  $x_0$  un point de  $I$  qui n'est pas une extrémité de  $I$ .

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $D = I$  ou  $D = I \setminus \{x_0\}$ .

[1] Si  $f$  admet une limite (finie ou infinie) en  $x_0$ , alors elle admet une limite à gauche et une limite à droite en  $x_0$  et

[2] Réciproquement :

- Cas  $D = I \setminus \{x_0\}$  : Si  $f$  admet une limite à gauche et une limite à droite en  $x_0$  (finies ou infinies) et alors  $f$  admet une limite en  $x_0$  et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$$

- Cas  $D = I$  : Si  $f$  admet une limite à gauche et une limite à droite en  $x_0$  (finies ou infinies) et alors  $f$  admet une limite en  $x_0$  et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$$

### Exemple

Si  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\lim_{x \rightarrow k^-} \lfloor x \rfloor =$  et  $\lim_{x \rightarrow k^+} \lfloor x \rfloor =$  Ainsi la limite en  $k$  de  $\lfloor \cdot \rfloor$

Illustrons quelques situations possibles dans le cas où les limites à gauche et à droite existent et sont finies :

Cas  $D = I \setminus \{x_0\}$  :

### Dessin :

Cas  $D = I$  :

### Dessin :

## 2 Limite d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$



### Définition 4 (Limite finie ou infinie en $\pm\infty$ )

- Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $D$  contient un intervalle de la forme  $]C, +\infty[$ . Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $+\infty$  lorsque :

On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  lorsque :

On dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $+\infty$  lorsque :

Cette limite (finie ou infinie) est notée  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ou bien  $\lim_{+\infty} f$ .

- Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $D$  contient un intervalle de la forme  $]-\infty, C[$ . Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $-\infty$  lorsque :

On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $-\infty$  lorsque :

On dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $-\infty$  lorsque :

Cette limite (finie ou infinie) est notée  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ou bien  $\lim_{-\infty} f$ .

Illustration dans le cas  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  :

#### Dessin :

Bien-sûr, on a à nouveau unicité de la limite, lorsqu'elle existe.



### Proposition 4 (Unicité de la limite en l'infini)

Si  $f$  admet une limite (finie ou infinie) en  $+\infty$  ou  $-\infty$ , alors cette limite est unique.

### ■ Proposition 5 (Rappels : quelques limites usuelles finies en l'infini)

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} =$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} =$
- Plus généralement, pour tout réel  $\alpha < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha =$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x =$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) =$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) =$

### ■ Proposition 6 (Rappels : quelques limites usuelles infinies en l'infini)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) =$       •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) =$
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n =$
- Plus généralement, pour tout réel  $\alpha > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha =$       En particulier  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} =$
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor x \rfloor =$       et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \lfloor x \rfloor =$

#### 💬 Remarque 6

Bien entendu, certaines fonctions n'admettent pas de limite en  $+\infty$  ou en  $-\infty$ .

Exemples : cos et sin.

## 3 Calculs de limites

Dans la suite, on aura parfois besoin que certains propriétés soient vérifiées "localement", au voisinage de certains points.

### ■ Définition 5 (Voisinage)

- Si  $a \in \mathbb{R}$ , on appelle voisinage de  $a$  tout intervalle contenant  $a$  et dont  $a$  n'est pas une extrémité.
- On appelle voisinage de  $+\infty$  tout intervalle de la forme  $]A, +\infty[$  ou  $[A, +\infty[$ .
- On appelle voisinage de  $-\infty$  tout intervalle de la forme  $]-\infty, A[$  ou  $]-\infty, A]$ .

Si  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , on dit qu'une propriété  $\mathcal{P}(x)$  est vraie "au voisinage de  $a$ " lorsqu'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que pour tout  $x \in V$ ,  $\mathcal{P}(x)$  est vraie.

#### 👉 Exemple

- On a  $x^2 \leq |x|$  au voisinage de 0.
- On a  $\ln(x) \leq x$  au voisinage de  $+\infty$

### 3.1 Limites usuelles

Les limites usuelles suivantes permettent de lever la plupart des indéterminées.

#### 👑 Théorème 2 (Croissances comparées en $+\infty$ )

Pour tous  $a, b, c > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{cx}}{x^a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{cx}}{(\ln x)^a} =$

#### 👑 Théorème 3 (Limites usuelles en 0) (admis pour le moment)

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} =$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} =$
- Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} =$  En particulier,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} =$

### 3.2 Opérations sur les limites

Dans les tableaux suivant, on considère des limites en  $a$ , avec  $a \in \mathbb{R}$  ou bien  $a = \pm\infty$ .

**Limite d'une somme :**

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$						

**Limite d'un produit :**

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$									

**Limite d'un quotient :** (si  $g(x) \neq 0$  "au voisinage de  $a$ " )

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$\ell \neq 0$	0	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$								

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\ell < 0$ ou $0^-$	$\ell > 0$ ou $0^+$	$\ell < 0$ ou $0^-$	$\ell > 0$ ou $0^+$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$					

#### 💬 Remarque 7

- Ici,  $0^+$  signifie :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  et  $f(x) > 0$  "au voisinage de 0".
- Ici,  $0^-$  signifie :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  et  $f(x) < 0$  "au voisinage de 0".

Comme pour les limites de suites, on fera également bon usage de la **factorisation** pour lever d'éventuelles indéterminées. Dans une somme, il est souvent utile de factoriser par "le plus grand terme".

## Exercice 2

Calculer les limites suivantes.

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 2x^2 - x + 1)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln(x))$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x + \sqrt{x}}$$

### 3.3 Composition de limites

#### Théorème 4 (Limite d'une fonction composée)

Soient  $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

Soit  $f$  une fonction définie "au voisinage" de  $a$  et  $g$  une fonction définie "au voisinage" de  $b$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  et si  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = b$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = b$

#### Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( 2 + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 2} \ln(y) = \ln(2) \quad (\text{car } \ln \text{ est continue en } 2).$$

Comme dans l'exemple précédent, les calculs de limites mettant en jeu une composition se ramène souvent à poser un "changement de variable".

#### Méthode : "Changement de variable" dans un calcul de limite

Pour déterminer une limite de la forme  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x))$  :

- [1] Poser " $y = f(x)$ " et noter que lorsque  $x \rightarrow a$ , on a  $y \rightarrow b$ .
- [2] En déduire que  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} g(y)$ .

## Exercice 3

$$1. \text{Déterminer } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{2x}.$$

$$2. \text{Déterminer } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$3. \text{Croissances comparées en } 0 : \text{montrer que } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$4. \text{Croissance comparée en } -\infty : \text{montrer que } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

(On pourra retenir ces deux derniers résultats)

### Théorème 5 (Limites et suites)

Soient  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ .

Soit  $f$  une fonction telle que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) =$

### Exercice 4

Démontrer par l'absurde que les fonctions cos et sin n'admettent pas de limite en  $+\infty$ .

### Théorème 6 (Passage à la limite dans une inégalité (large !))

Soit  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  et soient  $f$  et  $g$  satisfaisant  $f(x) \leq g(x)$  "au voisinage de  $a$ ".

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$ , alors on a :

### Remarque 8

Pour pouvoir utiliser ce théorème, il faut avoir justifié au préalable l'existence des limites !

## ⚠️ Attention !

Il est possible de passer à la limite uniquement dans des inégalités larges !

Si on a  $f(x) < g(x)$  au voisinage de  $a$ , on ne peut pas conclure que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ .

(En revanche, comme en particulier  $f(x) \leq g(x)$ , on pourra conclure  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ )

Exemple : Posons, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = 0$  et  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

On a  $f(x) < g(x)$  pour tout  $x > 0$  mais  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

(L'inégalité stricte n'est pas préservée à la limite)

## 4 Théorèmes de convergence

### 4.1 Théorème des gendarmes

#### 👑 Théorème 7 (Théorème des gendarmes)

Soit  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  et soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  satisfaisant  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  "au voisinage de  $a$ ".

Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

#### 👉 Corollaire 1 (Théorème des gendarmes, version "valeur absolue")

Soient  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ,  $\ell \in \mathbb{R}$  et soient  $f$  et  $h$  satisfaisant  $|f(x) - \ell| \leq h(x)$  "au voisinage de  $a$ ".

Si  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .

Comme pour les suites, il existe un résultat équivalent pour les limites infinies.

#### 👑 Théorème 8 (Théorème des gendarmes, version "limite infinie")

Soit  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  et soient  $f$  et  $g$  satisfaisant  $f(x) \leq g(x)$  "au voisinage de  $a$ ".

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

### 4.2 Théorème de la limite monotone.

#### 👑 Théorème 9 (Théorème de la limite monotone)

Soit  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . On considère une fonction  $f$  sur l'intervalle  $I = ]a, b[$ .

- Supposons  $f$  croissante sur l'intervalle  $I = ]a, b[$ .
- **À l'intérieur de  $I$**  :  $f$  admet en tout point  $x_0 \in ]a, b[$  une limite finie à droite et à gauche, et on a

- **Bord gauche de  $I$**  :  $f$  admet une limite à droite en  $a$ . Plus précisément :

- Si  $f$  est minorée sur  $]a, b[$ , cette limite est finie :  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) =$
- Sinon,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) =$

- **Bord droit de  $I$**  :  $f$  admet une limite à gauche en  $b$ . Plus précisément :

- Si  $f$  est majorée sur  $]a, b[$ , cette limite est finie :  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) =$
- Sinon,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) =$

- Supposons  $f$  décroissante sur l'intervalle  $I = ]a, b[$ .
- À l'intérieur de  $I$  :  $f$  admet en tout point  $x_0 \in ]a, b[$  une limite finie à droite et à gauche, et on a

- **Bord gauche de  $I$**  :  $f$  admet une limite à droite en  $a$ . Plus précisément :

- Si  $f$  est majorée sur  $]a, b[$ , cette limite est finie :  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) =$

- Sinon,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) =$

- **Bord droit de  $I$**  :  $f$  admet une limite à gauche en  $b$ . Plus précisément :

- Si  $f$  est minorée sur  $]a, b[$ , cette limite est finie :  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) =$

- Sinon,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) =$

### Dessin :

### À savoir faire à l'issue de ce chapitre :



Au minimum

- Connaître les définitions de limite avec des quantificateurs.
- Déterminer la limite d'expressions explicites (à l'aide des limites usuelles et des règles de calcul).
- Utiliser le théorème des gendarmes pour déterminer une limite.
- Passer correctement à la limite dans une inégalité.



Pour suivre

- Poser des "changements de variables" pour se ramener à des limites usuelles.
- Démontrer l'existence ou la non-existence d'une limite en étudiant les limites à gauche et à droite.
- Utiliser le théorème de la limite monotone pour justifier l'existence d'une limite.



Pour les ambitieux

- Manipuler la définition de la limite "avec des  $\varepsilon$ " quand c'est nécessaire.