Couples de variables aléatoires discrètes

Exercice 1 (Choix uniformément uniforme)
On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne numéo k contient k boules, numérotées de 1 à k.

On lance un dé à n faces équilibré, puis on tire au hasard une boule dans l'urne dont le numéro est indiqué par le dé.

On note X le numéro indiqué par le dé et Y le numéro de la boule tirée.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. En déduire la loi de Y.
3. Calculer $E(Y)$.

Exercice 2 (Loi du couple donnée)
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de support $\mathbb{N}^*$, dont la loi du couple est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^*, \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+j}}.$$

1. Déterminer la valeur de la constante a.
2. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 (Expériences indépendantes de même résultat ?)
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Indication : calculer de deux façons le coefficient de X^n dans le polynôme $P = (1 + X)^{2n}$.

2. Deux amis s'isolent dans deux pièces différentes et effectuent chacun n lancers successifs d'une pièce équilibrée, en notant le nombre total de "Pile" obtenus. Ils se rejoignent pour comparer leurs résultats.

Quelle est la probabilité qu'ils aient obtenu le même total ?

Exercice 4 (Couple géométrique)
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$. (avec $p, q \in]0, 1[$).

1. Quelle est la loi du couple (X, Y) ?

2. Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$.
On notera qu'il s'agit d'une loi géométrique $\mathcal{G}(\alpha)$, où l'on précisera la valeur de α en fonction de p et q.

3. On veut déterminer la loi de la somme $S = X + Y$.
(a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$P(S = n) = pq(1-q)^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^k$$

(b) Lorsque $p \neq q$, en déduire que pour tout $n \geqslant 2$

$$P(S = n) = \frac{pq}{p-q} \left((1-q)^{n-1} - (1-p)^{n-1}\right).$$

Donner également l'expression obtenue si $p = q$.

Exercice 5 (Calcul d'espérance)
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes de même loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ (avec $\lambda > 0$).

Montrer que $E\left(\dfrac{X}{1+Y}\right) = 1 - e^{-\lambda}$.

Exercice 6 (Loi conditionnelle)
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, de lois $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ (avec $\lambda, \mu > 0$).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P_{[X+Y=n]}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}.$$

Indication : Revenir à la définition de la probabilité conditionnelle...
$\Big($Autrement dit : la loi de X "conditionnellement à l'évènement $[X + Y = n]$" est $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$ $\Big)$.