17

Introduction aux espaces vectoriels

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1 (EV ou pas EV ?)

Ecrire chacun des ensembles suivants en termes mathématiques. S'agit-il d'un espace vectoriel ?
Si oui, le démontrer, sinon justifier.

(a) Ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$.

(b) Ensemble des fonctions π-périodiques sur $\mathbb{R}$.

(c) Ensemble des suites croissantes.

(d) Ensemble des suites qui convergent vers 0.

(e) Ensemble des suites satisfaisant :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 3u_n$.

(f) Ensemble des suites satisfaisant :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n + n$.

(g) Ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(2) = 0$.

(h) Ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 2$.

Exercice 2 (Plusieurs écritures)

Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ peut toujours s'écrire de trois façons différentes :

$\boxed{1}$ Comme ensemble des solutions d'un système linéaire homogéne, par exemple :

$F_1 = \Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0 \text{ et } y-3z = 0\Big\}$

$\boxed{2}$ En décrivant explicitement les éléments (forme paramétrique), par exemple :

$F_2 = \Big\{(a + 2b, 3a, b, a - b),\ \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\Big\}$

$\boxed{3}$ En donnant une famille génératrice (de préférence une base !), par exemple :

$F_3 = Vect\Big((0, 1, 2, 1), (1, 1, 0, 2)\Big)$

(a) Ré-écrire F_1 avec les façons $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$.
(b) Ré-écrire F_2 avec la façon $\boxed{3}$.
(c) Ré-écrire F_3 avec la façon $\boxed{2}$.
(d) Bonus (plus difficile) : ré-écrire F_3 façon $\boxed{1}$.

Espaces vectoriels engendrés ("Vect")

Exercice 3 (Egalité de Vect)

Montrer que :
$Vect\Big((1, 2, 0), (0, 1, 2)\Big) = Vect\Big((1, 3, 2), (1, 1, -2)\Big)$.

Exercice 4 (Simplification)

"Simplifier" au maximum les "$Vect$" suivants.
En déduire une base de F et de G.

(a) $F = Vect\Big((0, 1, -1), (1, 2, 3), (1, 1, 4), (0, 3, -3)\Big)$

(b) $G = Vect\Big((1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 1), (-1, 3, 1, -1)\Big)$.

Familles libres/liées

Exercice 5 (Dans $\mathbb{R}^3$)

On pose $v_1 = (2, 1, -1), v_2 = (0, 3, 2)$,
$v_3 = (-4, 2, 2)$ et $v_4 = (2, 4, 1)$.
Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. (v_1) 2. (v_1, v_2) 3. (v_1, v_3) 4. (v_1, v_2, v_3)
5. (v_1, v_2, v_4) 6. (v_1, v_2, v_3, v_4)

Exercice 6 (Polynômes, fonctions et suites)

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

(a) $(X^2 + 1,\ 2X^2 - X,\ X + 1)$.

(c) $(1,\ \cos,\ \cos^2,\ x \mapsto \cos(2x))$.

(d) $(f_1, \ldots, f_n)$ où, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $f_k : x \mapsto e^{kx}$.

(e) (u, v, w) où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$u_n = (-1)^n, \quad v_n = n \quad \text{et} \quad w_n = \dfrac{1}{n}$.

Bases

Exercice 7 (Coordonnées #1)

Déterminer la matrice des coordonnées de $(X - 3)^n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 8 ("Commutant" de A)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'ensemble E des matrices qui commutent avec A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Application : On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Déterminer une base de E.
(b) Quelles sont les coordonnées du vecteur $A \in E$ dans cette base ?

Exercice 9 (Un SEV de polynômes)

Soit : $F = \Big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'(1) = 0\Big\}$.
1. Montrer que F est un SEV de $\mathbb{R}[X]$ et en déterminer une base $\mathcal{B}$.
2. Vérifier que $P = 2X^2 - 4X + 2 \in F$.
Quelles sont les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 10 (Coordonnées #2)

Soient $u = (0, 1, 1)$, $v = (2, 0, -1)$, $w = (2, 1, 1)$.

(a) Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer la matrice des coordonnées de $(4, -1, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$

Exercice 11 (Recherche de base #1)

Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

(a) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 3z = 0\right\}$

(b) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\right\}$

(d) $\left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(2) = 0\right\}$

(f) $\left\{\begin{pmatrix} a & b & a+c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$

Exercice 12 (Recherche de base #2)

Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

(a) $\left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(1) = P(2) = 0\right\}$

(b) $\left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(1) = P'(1) = 0\right\}$

(c) $\left\{P \in \mathbb{R}_4[X] \,|\, \int_0^1 P(t)dt = 0\right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, a + b - d = 0\right\}$