11

Espaces probabilisés finis - Corrigé

Exercice 1 (Décrire l'univers...)

1. $\Omega = \Big\{(x_1, x_2, x_3),\ x_1, x_2, x_3 \in [\![1, 12]\!]$ deux à deux distincts$\Big\}$
$Card(\Omega) = 12 \times 11 \times 10 = 1212.$

2. $\Omega = \Big\{(x_1, x_2),\ x_1, x_2 \in [\![1, 9]\!]\Big\} = [\![1, 9]\!]^2.$
$Card(\Omega) = 9^2 = 81.$

3. $\Omega = \Big\{(x_1, x_2),\ x_1, x_2 \in [\![1, 9]\!]$ avec $x_1 \neq x_2\Big\}.$
$Card(\Omega) = 9 \times 8 = 72.$

4. $\Omega = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in [\![1, 6]\!]\Big\} = [\![1, 6]\!]^n$
$Card(\Omega) = 6^n.$

Exercice 2 (Expression d'évènements)

(a) $B_2 \cup B_4 \cup B_6 \cup B_8 \cup B_{10} = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{5} B_{2i}.$
Il s'agit d'évènements deux à deux incompatibles, donc :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{5} B_{2i}\right) = \sum_{i=1}^{5} P(B_{2i}) = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

(b) $A_6 \cap B_6 \cap C_6.$
Il s'agit d'évènements mutuellement indépendants, donc : $P(A_6 \cap B_6 \cap C_6) = P(A_6)P(B_6)P(C_6) = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000}.$

(c) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{10} (A_i \cap B_i \cap C_i).$
Il s'agit d'une union d'évènements deux à deux incompatibles. Puis, par indépendance :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{10} (A_i \cap B_i \cap C_i)\right) = \sum_{i=1}^{10} P(A_i \cap B_i \cap C_i) = \sum_{i=1}^{10} P(A_i)P(B_i)P(C_i) = \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{10^3} = \frac{10}{10^3} = \frac{1}{100}.$$

(d) $\overline{A_2} \cap \overline{B_2} \cap \overline{C_2}.$
Il s'agit d'évènements mutuellement indépendants, donc : $P(\overline{A_2} \cap \overline{B_2} \cap \overline{C_2}) = P(\overline{A_2})P(\overline{B_2})P(\overline{C_2}) = \left(\dfrac{9}{10}\right)^3 = \dfrac{729}{1000}.$
(e) $(A_1 \cap B_1 \cap \overline{C_1}) \cup (A_1 \cap \overline{B_1} \cap C_1) \cup (\overline{A_1} \cap B_1 \cap C_1).$
Il s'agit d'une union d'évènements deux à deux incompatibles. Puis, par indépendance :

$$\begin{aligned}
P\Big((A_1 \cap B_1 \cap \overline{C_1}) \cup (A_1 \cap \overline{B_1} \cap C_1) \cup (\overline{A_1} \cap B_1 \cap C_1)\Big) &= P(A_1 \cap B_1 \cap \overline{C_1}) + P(A_1 \cap \overline{B_1} \cap C_1) + P(\overline{A_1} \cap B_1 \cap C_1) \\
&= P(A_1)P(B_1)P(\overline{C_1}) + P(A_1)P(\overline{B_1})P(C_1) + P(\overline{A_1})P(B_1)P(C_1) \\
&= 3 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{27}{1000}.
\end{aligned}$$

Exercice 3 (3 lancers)

Un résultat de l'expérience aléatoire est de la forme $(x_1, x_2, x_3) \in [\![1, 6]\!]^3$.
On est en situation d'équiprobabilité (chaque résultat a la même chance d'apparaître).
On peut donc utiliser la formule de Cardan.
(a) $\dfrac{6 \times 5 \times 4}{6 \times 6 \times 6} = \dfrac{5}{9}.$
(b) $1 - \dfrac{5 \times 5 \times 5}{6 \times 6 \times 6} = \dfrac{216 - 125}{216} = \dfrac{91}{216}$
(c) $\dfrac{\binom{3}{2} \times 5}{6 \times 6 \times 6} = \dfrac{3 \times 5}{6 \times 6 \times 6} = \dfrac{5}{72}.$

Exercice 4 (Bulbes aléatoires)

On peut imaginer que les 10 bulbes sont numérotés de 1 à 10. Par exemple : les bulbes 1 à 4 donnent des fleurs rouges, les bulbes de 5 à 8 donnent des fleurs jaunes, les bulbes 9 et 10 donnent des fleurs roses.
On est en situation d'équiprobabilité : chaque bulbe a la même chance d'être sélectionné.
Le jardinier choisit 3 bulbes. Il y a deux façons possible de modéliser un résultat :

- On peut choisir que l'ordre ne compte pas $\{x_1, x_2, x_3\}$ avec les x_i dans $[\![1, 10]\!]$ et deux à deux distincts.
- On peut choisir que l'ordre compte (x_1, x_2, x_3) avec les x_i dans $[\![1, 10]\!]$ et deux à deux distincts.

En pratique, il suffit de choisir la modélisation que vous préférez. On donne ici les calculs résultant de ces deux choix de modélisation. Les deux conduisent évidemment aux même probabilités !

(a) On calcule plutôt la probabilité de ne pas avoir de fleur rouge :

- Si l'ordre de ne compte pas : $\dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{\frac{6\times5\times3}{3\times2\times1}}{\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}} = \dfrac{6\times5\times4}{10\times9\times8} = \dfrac{1}{6}$
- Si l'ordre compte : $\dfrac{6\times5\times4}{10\times9\times8} = \dfrac{1}{6}$.

La probabilité d'avoir au moins une fleur rouge est donc $1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.

(b) • Si l'ordre ne compte pas : $\dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{1}{6}$ • Si l'ordre compte : $\dfrac{6\times5\times4}{10\times9\times8} = \dfrac{1}{6}$.

(c) • Si l'ordre ne compte pas : $\dfrac{\binom{4}{3}+\binom{4}{3}+\binom{2}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{4+4+0}{120} = \dfrac{8}{120} = \dfrac{1}{15}$

- Si l'ordre compte : $\dfrac{(4\times3\times2)+(4\times3\times2)}{10\times9\times8} = \dfrac{4\times3\times2\times2}{10\times9\times8} = \dfrac{1}{15}$.

(d) • Si l'ordre ne compte pas : On a 4 possibilités pour la fleur rouge, 4 pour la fleur jaune, 2 pour la fleur rose.
La proba est donc : $\dfrac{4\times4\times2}{\binom{10}{3}} = \dfrac{4\times4\times2}{120} = \dfrac{4}{15}$.

- Si l'ordre compte : On a d'abord $3! = 6$ façons de choisir l'ordre dans lequel les couleurs arrivent.

Pour chacune de ces façons, on a 4 possibilités pour la fleur rouge, 4 pour la fleur jaune, 2 pour la fleur rose.
La proba est donc : $\dfrac{6\times4\times4\times2}{10\times9\times8} = \dfrac{4}{15}$.

Exercice 5 (Main au hasard)

On est en situation d'équiprobabilité : chaque carte a la même chance d'être choisir.
Comme dans l'Exercice 4, on peut choisir que l'ordre compte ou bien que l'ordre ne compte pas...
On décide ici que l'ordre des cartes dans une "main" ne compte pas.

(a) $\dfrac{\binom{13}{3}\times\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}} \simeq 8\%$

(b) On calcule plutôt la probabilité de l'évènement contraire : avoir uniquement des valeurs distinctes en main.
Pour construire un résultat avec des valeurs distinctes, on peut :

- Choisir d'abord 5 valeurs distinctes parmi 13 valeurs possibles : $\binom{13}{5}$ possibilités
- Puis choisir la couleur (pique,trèfle,coeur,carreau) de chacune de ces valeurs : 4^5 possibilités.

Ainsi, la probabilité d'avoir uniquement des valeurs distinctes est $\dfrac{\binom{13}{5}\times4^5}{\binom{52}{5}}$.

La probabilité d'avoir (au moins) une paire en main est donc : $1 - \dfrac{\binom{13}{5}\times4^5}{\binom{52}{5}} \simeq 49\%$.

(c) $\dfrac{4\times\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \simeq 0,2\%$.

Exercice 6 (Petits calculs)

1. Dans ce cas, on sait que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
On a donc $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

2. Dans ce cas, on sait que $A \cup B = B$.
On a donc $P(B) = P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

3. Dans ce cas, on sait que $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$ donc $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$.
Cette égalité nous apprend que $1 - \frac{1}{2} = (1 - \frac{1}{3}) \times P(\overline{B})$. Ainsi $P(\overline{B}) = \dfrac{3}{4}$ et donc $P(B) = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 7 (Inégalité de Boole)

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: "Si $A_1, \dots, A_n$ sont des évènements alors $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$."

- Initialisation : Pour $n = 1$, la propriété est évidente, pour tout évènement A_1, on a $P(A_1) \leqslant P(A_1)$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soient $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ des évènements. Supposons que $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.

Alors : $P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = P\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) \leqslant P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + P(A_{n+1})$.

En effet, pour tous évènements A et B, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
donc on a toujours $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$.

En utilisant la propriété de récurrence, on en déduit :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k), \quad \text{ce qui achève la récurrence.}$$

Exercice 8 (Le dé truqué)

L'univers est ici $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Par hypothèse, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall k \in [\![1, 6]\!],\ P(\{k\}) = C \times k$.

(a) On sait que $P(\Omega) = 1$, c'est à dire $P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1$.

Ceci nous apprend que $\sum_{k=1}^{6} P(\{k\}) = 1$. On obtient donc :

$$\sum_{k=1}^{6} C \times k = 1 \iff C \times \sum_{k=1}^{6} k = 1 \iff C \times \frac{6 \times 7}{2} = 1 \iff C = \frac{1}{21}.$$

Ainsi, on a déterminé la probabilité de chaque numéro : $\forall k \in [\![1, 6]\!],\ P(\{k\}) = \dfrac{k}{21}$.

(b) On veut calculer $P(\{2, 4, 6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \dfrac{2}{21} + \dfrac{4}{21} + \dfrac{6}{21} = \dfrac{2 + 4 + 6}{21} = \dfrac{12}{21} = \dfrac{4}{7}$.

Exercice 9 (Filtre anti-spam)

On introduit les évènements A = "Un mail est un spam" et B = "Un mail est éliminé".
Les données de l'énoncé peuvent alors se traduire ainsi :

$$P(A) = 70\% = 0.7, \qquad P_A(B) = 95\% = 0.95, \qquad P_{\overline{A}}(B) = 2\% = 0.02$$

1. C'est $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 30\% = 0.3$

2. C'est $P(B)$, que l'on peut calculer avec la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) = \frac{7}{100} \times \frac{95}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{2}{100} = \frac{70 \times 95 + 30 \times 2}{100 \times 100} = \frac{671}{1000} = 0.671 = 67.1\%$$

3. C'est $P_B(\overline{A})$, que l'on peut calculer avec la formule de Bayes :

$$P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{30}{100} \times \frac{2}{100}}{\frac{671}{1000}} = \frac{30 \times 2}{6710} = \frac{6}{671} \simeq 0.89\%$$

---

4. Le logiciel fait mal son travail lorsque :
• Un mail est un spam et n'est pas éliminé ou bien • Un mail est bienvenu et est éliminé.

On calcule donc la probabilité de l'évènement $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
C'est une union de deux évènements incompatibles, donc :

$$\begin{aligned} P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) &= P(A)P_A(\overline{B}) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) \\ &= \frac{70}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{2}{100} \\ &= \frac{70 \times 5 + 30 \times 2}{100 \times 100} = \frac{41}{1000} = 4.1\%. \end{aligned}$$

Exercice 10 (L'énigme du "faux-positif")
On introduit les évènements $A =$ "Un bloc contient du diamant" et $B =$ "Le détecteur indique du diamant". Les données de l'énoncé peuvent alors se traduire ainsi :

$$P(A) = 1\%, \quad P_A(B) = 1 \text{ (ou même carrément } A \subset B), \quad , P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 90\%$$

On sait ici que le détecteur indique du diamant et on voudrait connaître la probabilité que le bloc en contienne effectivement. Autrement dit, on veut calculer $P_B(A)$. On peut utiliser la formule de Bayes :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)} = \frac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)}$$

ce qui donne :

$$P_B(A) = \frac{\frac{1}{100} \times 1}{\frac{1}{100} \times 1 + \frac{99}{100} \times \frac{10}{100}} = \frac{10}{10+99} = \frac{10}{109} \simeq 9.2\%$$

Bien que le détecteur soit positif, la probabilité que le bloc de l'individu louche contienne effectivement du diamant est seulement d'environ 9.2% : c'est assez faible ! Ceci nous conduit à ne pas accepter l'offre.

Précisément, si l'on choisit d'accepter l'offre, notre gain total à l'issue de la transaction est :

$$\begin{cases} +800€ & \text{avec probabilité } \frac{10}{109} \simeq 9.2\% \\ -200€ & \text{avec probabilité } 1 - \frac{10}{109} = \frac{99}{109} \simeq 90.8\% \end{cases}$$

Le gain moyen est ainsi de : $800 \times \frac{10}{109} + (-200) \times \frac{99}{109} = -\frac{11800}{109} \simeq -108$ €.

En moyenne, on perd environ 108€ en acceptant l'offre : ce ne serait pas raisonnable !

Exercice 11 (Chaîne de Markov)
1. D'après l'énoncé, A_0 est l'évènement certain, donc $P(A_0) = 1$.
Il est clair au vu du graphique que $P(A_1) = \frac{1}{3}$.
Enfin, pour calculer A_2, on peut appliquer la formule des probabilités totales (et/ou dessiner un arbre de probabibilités) :

$$P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{9}.$$

2. Généralisons le raisonnement que l'on vient d'avoir.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $(A_n, \overline{A_n})$ est un système complet d'évènements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times \frac{1}{3} + P(\overline{A_n}) \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu.

3. Pour simplifier les notations, notons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = P(A_n)$.
Puisque $P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n)$, la relation de la question précédente peut se ré-écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}(1 - u_n) = -\frac{1}{6}u_n + \frac{1}{2}.$$

On voit ainsi que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

Introduisons $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = -\dfrac{1}{6}\alpha + \dfrac{1}{2}$, i.e $\dfrac{7}{6}\alpha = \dfrac{1}{2}$ i.e $\alpha = \dfrac{3}{7}$.

On sait alors qu'en posant $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \dfrac{3}{7}$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{6}$.

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times (-\frac{1}{6}) = (u_0 - \frac{3}{7}) \times (-\frac{1}{6})^n = \frac{4}{7} \times (-\frac{1}{6})^n$ (puisque $u_0 = P(A_0) = 1$).

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + \frac{3}{7} = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \times (-\frac{1}{6})^n$.

On a ainsi déterminé l'expression : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(A_n) = \dfrac{3}{7} + \dfrac{4}{7} \times \left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$

4. Puisque $-1 < -\dfrac{1}{6} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{6}\right)^n = 0$ et on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = \dfrac{3}{7}$.

Interprétation : au bout d'un très grand nombre de sauts,
la probabilité que la grenouille se situe sur le nénuphar A est d'environ $\dfrac{3}{7}$.

Exercice 12 (La ruine du joueur)

1. • Si le capital de départ du joueur est 0€, il est immédiatement et automatiquement ruiné ! On a donc $u_0 = 1$.
• Si le capital de départ du joueur est N€, il a immédiatement atteint sont objectif et arrête de jouer.
Il n'est donc pas ruiné : $u_N = 0$.

2. Soit $n \in [\![1, N-1]\!]$. Notons $A =$ "Le joueur gagne sa première partie". On a, d'après l'énoncé, $P(A) = p$.
Puisque $(A, \overline{A})$ est un système complet d'évènements, la formule des probabilités totales donne :

$$u_n = P(R_n) = P(A)P_A(R_n) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(R_n) = p \times P_A(R_n) + q \times P_{\overline{A}}(R_n).$$

• Sachant que le joueur a gagné sa première partie, tout se passe comme si son "nouveau capital de départ" était de $n+1$€. La probabilité qu'il finisse ruiné est donc $P_A(R_n) = P(R_{n+1}) = u_{n+1}$.
• Sachant que le joueur a perdu sa première partie, tout se passe comme si son "nouveau capital de départ" était de $n-1$€. La probabilité qu'il finisse ruiné est donc $P_{\overline{A}}(R_n) = P(R_{n-1}) = u_{n-1}$.
On a donc montré la relation : $u_n = pu_{n+1} + qu_{n-1}$, valable pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$.

3. On reconnait ici une suite à récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in [\![1, N-1]\!],\ \ u_{n+1} = \frac{1}{p}u_n - \frac{q}{p}u_{n-1}$$

ou encore, pour le dire autrement :

$$\forall n \in [\![0, N-2]\!],\ \ u_{n+2} = \frac{1}{p}u_{n+1} - \frac{q}{p}u_n.$$

On applique donc la méthode de l'équation caractéristique. Cherchons les racines de l'équation :

$$x^2 = \frac{1}{p}x - \frac{q}{p} \iff x^2 - \frac{1}{p}x + \frac{q}{p} = 0 \iff px^2 - x + q = 0.$$

Rappelons que $q = 1-p$.
On remarque que $x = 1$ est une solution évidente, puisque $p - 1 + q = p - 1 + (1-p) = 0$.
En notant α l'autre solution, on sait que l'on doit avoir $1 \times \alpha = \dfrac{q}{p}$
(Il est utile de se souvenir du lien entre somme/produit des racines et coefficients d'un polynôme de degré 2 !)
La deuxième solution est donc $\dfrac{p}{q}$, ce que l'on peut aussi vérifier à la main :

$$p\frac{q^2}{p^2} - \frac{q}{p} + q = \frac{q^2 - q + qp}{p} = \frac{q^2 - q + q(1-q)}{p} = 0.$$

Puisque, par hypothèse, $p \neq q$, les deux solutions 1 et $\dfrac{q}{p}$ sont distinctes.

On sait alors que le terme général sera de la forme : $u_n = \lambda \times 1^n + \mu \times \left(\dfrac{q}{p}\right)^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ à déterminer.

En se rappelant que $u_0 = 1$ et $u_N = 0$, on obtient un système linéaire de deux équations :

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda + \mu\left(\dfrac{q}{p}\right)^N = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda = 1 - \mu \\ (1-\mu) + \mu\left(\dfrac{q}{p}\right)^N = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda = 1 - \mu \\ \mu\left(\left(\dfrac{q}{p}\right)^N - 1\right) = -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda = 1 - \mu \\ \mu = \dfrac{1}{1 - (\frac{q}{p})^N} \end{array}\right.$$

d'où finalement $\mu = \dfrac{1}{1-(\frac{q}{p})^N}$ et $\lambda = -\dfrac{(\frac{q}{p})^N}{1-(\frac{q}{p})^N}$. On obtient donc bien l'expression voulue pour u_n :

$$\forall n \in [\![0,N]\!],\ u_n = -\frac{(\frac{q}{p})^N}{1-(\frac{q}{p})^N} + \frac{1}{1-(\frac{q}{p})^N} \times \left(\frac{q}{p}\right)^n = \frac{(q/p)^n - (q/p)^N}{1-(q/p)^N}.$$

Exercice 13 (Urnes au hasard)

1. Notons pour tout $j \in [\![1,N]\!]$, $\quad U_j =$ "Choisir l'urne n°j".
Notons $B =$ "Tirer une boule blanche".

Les données de l'énoncé se traduisent alors ainsi :

- $P(U_1) = P(U_2) = \ldots = P(U_N) = \dfrac{1}{N}$. (l'urne est choisie uniformément au hasard)
- Pour tout $j \in [\![1,N]\!]$, $\quad P_{U_j}(B) = \dfrac{j}{N+1}$ (si l'on tire dans l'urne j, la probabilité d'obtenir une boule blanche est la proportion de boule blanche dans l'urne j, c'est à dire $\frac{j}{N+1}$).

(a) Puisque $(U_1, U_2, \ldots, U_N)$ est un système complet d'évènements, on applique la formule des probabilités totales :

$$P(B) = \sum_{j=1}^{N} P(U_j \cap B) = \sum_{j=1}^{N} P(U_j)P_{U_j}(B) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} \times \frac{j}{N+1} = \frac{1}{N(N+1)} \sum_{j=1}^{N} j = \frac{1}{N(N+1)} \frac{N(N+1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

(b) On veut calculer $P_B(U_1 \cup U_N) = P_B(U_1) + P_B(U_N)$. D'après la formule de Bayes :

$$P_B(U_1) = \frac{P(U_1)P_{U_1}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{N} \times \frac{1}{N+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{N(N+1)}$$

et

$$P_B(U_N) = \frac{P(U_N)P_{U_N}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{N} \times \frac{N}{N+1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2N}{N(N+1)}$$

Ainsi : $P_B(U_1 \cup U_N) = \dfrac{2}{N(N+1)} + \dfrac{2N}{N(N+1)} = \dfrac{2(1+N)}{N(N+1)} = \dfrac{2}{N}$.

2. Notons à présent $A =$ "Les n boules tirées sont blanches".
Les données de l'énoncé se traduisent ainsi :

- $P(U_1) = P(U_2) = \ldots = P(U_N) = \dfrac{1}{N}$. (l'urne est choisie uniformément au hasard)
- Pour tout $j \in [\![1,N]\!]$:

- Si $j < n$, $P_{U_j}(A) = 0$ (impossible de tirer n boules blanches, puisque l'urne n°j en contient seulement j)
- Si $j \geqslant n$, $P_{U_j}(A) = \dfrac{\binom{j}{n}}{\binom{N+1}{n}}$ (c'est la formule de Cardan : nombre de résultats où les n boules tirées sont blanches sur nombre de résultats total)

Remarque : puisque, par convention $\dbinom{j}{n} = 0$ lorsque $j < n$, on peut écrire dans tous les cas $P_{U_j}(A) = \dfrac{\binom{j}{n}}{\binom{N+1}{n}}$.

A nouveau, en appliquant la formule des probabilités totales :

$$P(A) = \sum_{j=1}^{N} P(U_j \cap A) = \sum_{j=n}^{N} P(U_j)P_{U_j}(A) = \sum_{j=n}^{N} \frac{1}{N} \times \frac{\binom{j}{n}}{\binom{N+1}{n}} = \frac{1}{N}\binom{N+1}{n}^{-1} \sum_{j=n}^{N} \binom{j}{n}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Montrons par récurrence que pour tout $N \geqslant n$, $\underbrace{\sum_{j=n}^{N} \binom{j}{n} = \binom{N+1}{n+1}}_{\mathcal{P}(N)}$

- Initialisation : Pour $N = n$, la propriété est bien vérifiée :

$$\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$$

- Hérédité : Soit $N \geqslant n$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(N)$. Alors :

$$\sum_{j=n}^{N+1} \binom{j}{n} = \sum_{j=n}^{N} \binom{j}{n} + \binom{N+1}{n} = \binom{N+1}{n+1} + \binom{N+1}{n} = \binom{N+2}{n+1}.$$

La dernière égalité est une utilisation de la formule de Pascal.
On a bien montré $\mathcal{P}(N+1)$, ce qui achève la récurrence.

On peut à présent simplifier la probabilité obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{N} \binom{N+1}{n}^{-1} \sum_{j=n}^{N} \binom{j}{n} = \frac{1}{N} \binom{N+1}{n}^{-1} \binom{N+1}{n+1} \\ &= \frac{1}{N} \times \frac{n!(N+1-n)!}{(N+1)!} \times \frac{(N+1)!}{(n+1)!(N-n)!} = \frac{1}{N} \times \frac{N+1-n}{n+1}. \end{aligned}$$

Finalement : $P(A) = \dfrac{N-n+1}{N(n+1)}$.