Variables aléatoires finies

Calculs de lois et d'espérances

Exercice 1 (Pour s'exercer)

Soit X une variable aléatoire de support $X(\Omega) = \{-2, 2, 3\}$, et de loi donnée par :
$P(X=-2) = a$, $P(X=2) = a + \dfrac{1}{3}$, $P(X=3) = \dfrac{1}{3}$.
1. Déterminer la valeur de a.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Calculer l'espérance et la variance de $2X+1$.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X^2$ et retrouver ainsi la valeur de $E(X^2)$.

Exercice 2 (Calcul de sommes)

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!], P(X=k) = C \times \dbinom{n}{k}$.
1. Déterminer la valeur de $C \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer $E(X)$ et $E(2^X)$.

Exercice 3 (Premier Pile)

On lance n fois de suite une pièce tombant sur Pile avec probabilité $p \in]0,1[$. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier Pile s'il existe, et égale à 0 si on n'obtient aucun Pile.

1. Déterminer la loi de X.
On pourra exprimer l'évènement $[X = k]$ en fonction des évènements A_i = "Obtenir pile au i-ème lancer".

2. (a) Exprimer $E(X)$ comme une somme.

(b) On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.
Calculer f' de deux façon différentes.
En déduire la valeur de $E(X)$.

3. On suppose maitenant que $p = \frac{1}{5}$.
Combien de lancers faut-il effectuer au minimum pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois Pile soit supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

Exercice 4 (Déjà vu)

On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 10. On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on obtient une boule déjà tirée auparavant. Exemple :

Si les 4 premiers tirages donnent $(3, 5, 1, 5)$, $N = 4$.

1. Quel est le support de N ?
2. Pour $k \in [\![1, 10]\!]$, interpréter l'évènement $[N > k]$.
   En déduire $P(N > k) = \dfrac{10!}{(10-k)!10^k}$.
3. Déterminer enfin la loi de probabilité de N.

Exercice 5 ("Uniformément uniforme")

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n.
Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, l'urne n°j contient j boules, numérotées de 1 à j. On choisit une urne uniformément au hasard, puis on tire une boule dans l'urne. On note X le numéro de la boule ainsi obtenue.

1. Sachant qu'on a choisi l'urne numéro j, quelle est la probabilité de tirer la boule numéro k ?
2. En déduire que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,
$P(X = k) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \dfrac{1}{j}$.
3. En inversant soigneusement les deux sommes, montrer que $E(X) = \dfrac{n+3}{4}$.

Exercice 6 (Urnes d'Ehrenfest)

On considère deux urnes A et B, ainsi qu'un total de $N > 2$ boules, numérotées de 1 à N.

- Initialement (au temps $n = 0$), la totalité des boules est dans l'urne A.
- Entre l'instant n et $n+1$, on effectue l'opération suivante : on choisit uniformément au hasard un numéro i compris entre 1 et N, et on transfère la boule numéro i dans l'urne où elle n'était pas.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de boules dans l'urne A.

1. Donner les lois de probabilité de X_0 et de X_1.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1, N-1]\!]$, justifier que (sous réserve que $P(X_n = k) > 0$)
$P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k+1) = \dfrac{N-k}{N}$
$P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k-1) = \dfrac{k}{N}$.

(b) Vérifier que cela reste vrai pour $k = 0$ et $k = N$.

(c) Que vaut la probabilité conditionnelle $P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = j)$ pour $j \notin \{k-1, k+1\}$?

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, N]\!]$,
$$P(X_{n+1} = k) = \frac{N-k+1}{N} P(X_n = k-1) + \frac{k+1}{N} P(X_n = k+1).$$

4. (a) À l'aide de changements d'indices appropriés, montrer que
$$E(X_{n+1}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \Big((N-2)k + N\Big) P(X_n = k).$$

(b) En déduire $E(X_{n+1}) = \left(1 - \dfrac{2}{N}\right) E(X_n) + 1$.

5. Déterminer $E(X_n)$ en fonction de n.
Que dire quand $n \to +\infty$?

Utilisation de lois usuelles

Exercice 7 (Reconnaître une loi)
Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, reconnaître la loi de probabilité (usuelle) de X.

(a) Une urne contient 12 boules : 6 vertes, 4 rouges et 2 noires. On tire successivement et avec remise 8 boules. On note X le nombre de boules rouges tirées.

(b) Une urne contient 12 boules : 6 vertes, 4 rouges et 2 noires. On tire successivement et avec remise 8 boules. On pose $X = 1$ si on obtient au moins une boule rouge et $X = 0$ sinon.

(c) Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire une boule au hasard et on note X le numéro obtenu.

(d) On range au hasard 10 t-shirts dans trois tiroirs de façon équiprobable et on note X le nombre de t-shirts rangés dans le premier tiroir.

(e) Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On les tire au hasard un à un sans remise jusqu'à obtenir le jeton numéro 1 et on note X le nombre de tirages effectués.

Exercice 8 (Loi de Rademacher)
Soit $p \in]0,1[$. On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par :
$P(X = 1) = p$ et $P(X = -1) = 1 - p$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. On pose $Y = \dfrac{1+X}{2}$. Quelle est la loi de Y ?
3. On pose $Z = \dfrac{1-X}{2}$. Quelle est la loi de Z ?

Exercice 9 (Espérance et variance d'une loi binomiale)
Soient $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

1. (a) Montrer que pour $k \geqslant 1$, $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.
(b) En déduire $E(X) = np$.
2. (a) Montrer que pour $k \geqslant 2$,
$k(k-1)\dbinom{n}{k} = n(n-1)\dbinom{n-2}{k-2}$.
(b) En déduire $E(X(X-1)) = n(n-1)p^2$.
(c) En déduire $E(X^2)$ puis $V(X) = np(1-p)$.

Exercice 10 (Un jeu d'argent)
Une urne contient v boules vertes et r boules rouges. Un joueur y tire n boules avec remise. À chaque boule verte il gagne 2 euros, à chaque rouge il en perd 1. On note X le nombre de boules vertes tirées, Y le nombre de boules rouges tirées.
On note G le gain (relatif : il peut être négatif!) du joueur à l'issue des n tirages.

1. Déterminer la loi de X, $E(X)$ et $V(X)$.
2. Exprimer G en fonction de X et Y.
Quelle relation lie X et Y ? En déduire une expression de G en fonction de X et n, puis $E(G)$ et $V(G)$.
3. À quelle condition sur les nombres v, r le jeu est-il équitable, c'est à dire que le gain moyen du joueur est nul ?

Exercice 11 (Urnes de Polya)
Une urne contient initialement une boule rouge et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne et après chaque tirage, on replace dans l'urne la boule tirée en ajoutant une boule supplémentaire de la même couleur. De cette façon, on rajoute une nouvelle boule dans l'urne à chaque tirage.

On note X_n le nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Quel est le support de la variable aléatoire X_n ?
2. (a) Déterminer la loi de X_1.
(b) Déterminer la loi de X_2 en distinguant les valeurs prises par X_1.
3. Démontrer par récurrence que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,n]\!])$.
Pour l'hérédité, on utilisera la formule des probabilités totales en distinguant les valeurs prises par X_n.

Exercice 12 (Marche aléatoire du crabe)
Un crabe se déplace sur un axe gradué en faisant des pas successifs d'une unité vers la droite avec probabilité $p \in]0,1[$ ou d'une unité vers la gauche avec probabilité $q = 1-p$. Initialement, le crabe se trouve à l'origine 0. On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n \in \mathbb{Z}$ la position du crabe au bout de n pas.

1. Quel est le support de X_0 ? De X_1 ? Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer précisément le support de X_{2n} et de X_{2n+1}.
2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, ntons D_n le nombre de pas vers la droite effectués par le crabe après n pas. Quelle est la loi de D_n ?
(b) Exprimer X_n en fonction de D_n.
En déduire $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
Déterminer précisément la loi de X_{2n} et X_{2n+1}.

Extrait ECRICOME 2009

Dans tout ce problème, a et b désignent des entiers naturels tous deux non nuls et l'on note $N = a + b$.

On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, au "hasard" et "avec remise" d'une boule, en procédant de la manière suivante :
• Lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
• Lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais est remplacée dans cette urne par une boule blanche et l'on procède alors au tirage suivant.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note X_n le nombre aléatoire de boules noires obtenues au cours des n premiers tirages. Par convention, $X_0 = 0$. Pour tous entiers $n \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$, on note $p_{n,k} = P(X_n = k)$.

On remarquera ainsi que $p_{0,0} = 1$ et que $p_{n,k} = 0$ si $k > n$ ou si $k > b$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $p_{n,0}$ puis $p_{n,n}$. Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}$?

2. Démontrer la formule suivante, valable pour tous les entiers naturels n et k non nuls :

$$Np_{n,k} = (a + k)p_{n-1,k} + (b + 1 - k)p_{n-1,k-1}$$

3. Calcul de l'espérance de X_n :

(a) A l'aide la formule obtenue dans la question précédente, démontrer la formule pour $n \geqslant 1$:

$$NE(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} [b + k(N - 1)]p_{n-1,k}$$

puis justifier que

$$E(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_{n-1}) + \frac{b}{N}$$

(b) En utilisant la dernière formule établie à la question 3. (a), prouver que, pour tout entier naturel n, on a

$$E(X_n) = b\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]$$

4. Calcul de la variance de X_n : On introduit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = E(X_n(X_n - 1)).$$

(a) A l'aide la formule obtenue dans la question II.2, montrer que l'on a :

$$Nu_n = \sum_{k=1}^{n-1} [k(k - 1)(a + b - 2) + 2(b - 1)k]p_{n-1,k}.$$

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait à la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \left(1 - \frac{2}{N}\right) u_{n-1} + \frac{2b(b - 1)}{N} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right].$$

(c) A l'aide d'une récurrence, démontrer que la formule suivante est valable pour tout entier naturel n :

$$u_n = b(b - 1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

(d) Donner alors la valeur de $V(X_n)$ puis préciser sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.