A rendre le **Lundi 22 Septembre 2025**

Devoir Maison n°1 : Raisonnement et rédaction

La qualité de la rédaction (annonces, introduction des variables, connecteurs logiques...) entrera en grande partie dans l'appréciation de la copie.

Les résultats non encadrés/soulignés/surlignés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1 : Une somme par récurrence

Démontrer par récurrence la formule suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1.$

Exercice 2 : Un famille de fonctions particulières

Dans cet exercice, on s'intéresse aux fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la propriété $(\star)$ suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2 \quad (\star)$$

1. Soit a un réel fixé et soit f_a la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_a(x) = e^{ax^2}$$

   Montrer que la fonction f_a satisfait la propriété $(\star)$.
2. Déterminer toutes les fonctions constantes satisfaisant la propriété $(\star)$.
3. Soit f une fonction satisfaisant la propriété $(\star)$. Montrer que la fonction $-f$, évidemment définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ (-f)(x) = -f(x)$$

   satisfait également la propriété $(\star)$.
4. Soit f une fonction satisfaisant la propriété $(\star)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'implication :

$$f(2x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

5. Soit f une fonction satisfaisant la propriété $(\star)$. On suppose également que :
   - f s'annule : il existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   - f est continue en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

   (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ f\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right) = 0.$

   (b) En déduire que $f(0) = 0$, puis que f est nécessairement la fonction nulle.
   (C'est à dire la fonction constante égale à 0)
