

Espaces probabilisés généraux

Introduction et motivation

Jusqu'à maintenant, nous avons étudié des expériences aléatoires avec un nombre fini d'issues possibles. Celles-ci correspondaient donc à un univers Ω fini :

- On lance un dé à 6 faces : $\Omega =$
- On tire p boules avec remise dans une urne qui en contient n : $\Omega =$
- On lance une pièce n fois consécutives : $\Omega =$

Une expérience aléatoire pouvait ainsi être modélisée par un **espace probabilisé fini** : $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

Un évènement A étant un ensemble d'issue, c'est une partie de Ω : $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ était donc l'ensemble des évènements que l'on peut considérer.

À présent, on souhaiterait s'intéresser à des expériences aléatoires ayant une infinité d'issues possibles, c'est à dire pour lesquelles l'univers Ω est infini ! Deux exemples :

- On lance une pièce (éventuellement biaisée) une infinité de fois consécutivement :

$$\Omega =$$

Par exemple, l'issue $\omega = (Pile, Pile, Pile, \dots) \in \Omega$ correspond au fait de n'obtenir que des Piles.

- Le prochain bus arrivera dans 5 minutes maximum. On s'intéresse au temps d'attente (en minutes) :

$$\Omega =$$

Lorsque l'univers Ω est infini, il devient en fait compliqué et souvent inutile (voire parfois impossible !) de considérer n'importe quelle partie de Ω comme un évènement. L'ensemble des évènements que l'on peut considérer ne sera donc pas nécessairement $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier, mais seulement un sous-ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$!

1 Ensemble des évènements sur un univers quelconque

Définition 1 (Ensemble des évènements sur Ω)

Soit Ω un ensemble (fini ou infini) s'interprétant comme l'univers associé à une expérience aléatoire.

Un "ensemble des évènements sur Ω " est un ensemble satisfaisant :

- 1
- 2 **Stabilité par passage au complémentaire :**
- 3 **Stabilité par union dénombrable :**

Tout élément $A \in \mathcal{A}$ est alors appelé

Remarque 1

Le terme **dénombrable** signifie :

Plus précisément, un ensemble infini E est dit dénombrable s'il existe une bijection de \mathbb{N} dans E : chaque élément de E peut être "étiqueté" par un entier.

Exemples : Les ensembles \mathbb{N} , \mathbb{N}^* , \mathbb{Z} , \mathbb{N}^2 , \mathbb{Q} sont dénombrables. \mathbb{R} ou même $[0, 1]$ ne le sont pas !

Si A_1, A_2, \dots sont des éléments de \mathcal{A} on pourra ainsi considérer des unions finies ou infinies :

- Avec $I = \llbracket 1, n \rrbracket$: $\bigcup_{i \in I} A_i =$
- Avec $I = \mathbb{N}^*$: $\bigcup_{i \in I} A_i =$

Interprétation probabiliste de ces opérations :

- 1 On peut considérer
- 2 Si A est un évènement, on peut considérer
- 2 Si A_1, A_2, \dots, A_n sont des évènements, on peut considérer l'évènement :

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n =$$

De manière plus générale, pour une infinité d'évènements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, on peut à présent considérer :

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i =$$

À partir des propriétés 1, 2, 3, on a aussi "gratuitement" les propriétés suivantes :

Proposition 1 (Autres opérations avec les évènements)

Soit \mathcal{A} un ensemble des évènements sur Ω . Alors on a :

- 1 bis
- 2 bis **Stabilité par "privé de" :**
- 3 bis **Stabilité par intersection dénombrable :**

Preuve :

1 bis : $\emptyset =$

2 bis : Si $A, B \in \mathcal{A}$, on a $A \setminus B =$

3 bis : Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de \mathcal{A} , on a $\bigcup_{i \in I} A_i =$ □

Interprétation probabiliste de l'intersection :

- 3 bis Si A_1, A_2, \dots, A_n sont des évènements, on peut considérer l'évènement :

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n =$$

De manière plus générale, pour une infinité d'évènements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, on peut à présent considérer :

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i =$$

Exemples

Pour un univers Ω fixé, plusieurs choix sont a priori possibles pour l'ensemble des évènements \mathcal{A} !
Donnons quelques exemples :

- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ est un "ensemble des évènements" sur Ω . (On choisit souvent cela lorsque Ω est fini !)
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ est un "ensemble des évènements" sur Ω (Pas très intéressant...)
- Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors : $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est un "ensemble des évènements" sur Ω .
- Si $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ (expérience de lancer de dé) alors

$\mathcal{A} = \left\{ \emptyset, \{6\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \Omega \right\}$ est un "ensemble des évènements" sur Ω .

En pratique : lorsque l'univers Ω est infini, il est très rare que l'on décrive explicitement l'ensemble des évènements \mathcal{A} considéré! On se contentera souvent d'admettre que certains évènements intéressants A_1, A_2, \dots appartiennent bien à \mathcal{A} . On sait alors que l'on peut considérer tous les évènements construits comme union, intersection, complémentaire de ceux-ci.

Exercice 1

On lance une pièce une infinité de fois consécutivement. (On peut donc considérer $\Omega = \{Pile, Face\}^{\mathbb{N}^*}$).

On admet qu'il existe un ensemble des évènements \mathcal{A} adéquat, de sorte que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k =$ "Obtenir Pile au k -ème lancer" appartient à \mathcal{A} . Exprimer les évènements :

- $A =$ "N'obtenir que des Faces à partir du 10-ème lancer"
- $B =$ "Obtenir au moins un Pile"
- $C_k =$ "Obtenir Pile pour la première fois au k -ème lancer". (pour $k \in \mathbb{N}^*$)
- $D =$ "On obtient le premier Pile après un nombre pair de lancers".

Pour finir, maintenant que l'on dispose d'unions infinies d'ensembles, on peut aussi généraliser la notion de système complet d'évènements à une infinité d'évènements :

Définition 2 (Système complet d'évènements)

Soit Ω un univers et \mathcal{A} un "ensemble des évènements" sur Ω .

Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de \mathcal{A} .

(Il peut donc y avoir un nombre fini ou infini d'évènements!)

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'évènements** (S.C.E) lorsque :

- 1 Ils sont **deux à deux incompatibles** : $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
- 2 Leur réunion donne Ω tout entier : $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Cela revient à dire :

Exemples

- On lance une pièce indéfiniment. Notons, comme dans l'Exercice 1,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, C_k = \text{"Obtenir Pile pour la première fois au } k\text{-ème lancer"}.$$

Rajoutons $C_0 =$ "Ne pas obtenir de Pile".

Alors : $(C_i)_{i \in \mathbb{N}} = (C_0, C_1, C_2, \dots)$ est un système complet d'évènements.

(car il y a toujours un et un seul de ces évènements qui se réalise...)

- On lance une pièce indéfiniment. Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i =$ "Obtenir exactement i Piles".

Rajoutons $A_\infty =$ "Obtenir une infinité de Piles".

Alors $(A_\infty, A_0, A_1, A_2, \dots)$ est un système complet d'évènements.

2 Espace probabilisé général

2.1 Probabilité sur un univers quelconque

Rappel : Dans le cas d'un univers Ω fini, une probabilité P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ satisfaisait la propriété d'additivité :

$$\text{Si } A_1, \dots, A_n \text{ sont deux à deux incompatibles, } P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

On va maintenant demander ce que cette propriété soit valable non seulement pour une union finie mais aussi pour une union infinie (dénombrable) d'évènements ! On parle de σ -additivité.

Définition 3 (Probabilité sur \mathcal{A} , espace probabilisé)

Soit Ω un univers (fini ou infini) et \mathcal{A} un "ensemble des évènements" sur Ω .

Une probabilité sur \mathcal{A} est une application $P : \begin{matrix} \mathcal{A} & \xrightarrow{\quad} \\ & \mapsto P(A) \end{matrix}$ satisfaisant les propriétés :

1 σ -**additivité** : Pour $I \subset \mathbb{N}$, si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'évènements deux à deux incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) =$$

2 **Proba de l'évènement certain** : $P(\Omega) = 1$

Lorsque Ω est un ensemble (fini ou infini), \mathcal{A} un "ensemble des évènements" sur Ω et P une probabilité sur \mathcal{A} , on dit que le triplet (Ω, \mathcal{A}, P) est un **espace probabilisé**.

Remarque 2

Dans le cas d'une famille infinie d'ensemble $(A_i)_{i \in I}$ la somme $\sum_{i \in I} P(A_i)$ est une somme infinie !
Pour que celle-ci soit bien définie, il faut que la série associée soit convergente...

Preuve du fait que $\sum_{i \in I} P(A_i)$ est bien définie :

Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements deux à deux incompatibles.

□

Par suite, on a toutes les propriétés habituelles pour le calcul des probabilités.

Proposition 2 (Propriétés d'une probabilité)

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. Pour tous événements $A, B \in \mathcal{A}$,

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ • $P(\emptyset) = 0$ • $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$ • $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Sur un univers fini, on avait vu qu'une probabilité P était entièrement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires $P(\{\omega\})$ pour $\omega \in \Omega$. (cf. Chapitre #11, Théorème 1)
C'est toujours le cas sur un univers infini dénombrable :

Théorème 1 (Probabilité sur un univers dénombrable)

Soit Ω un univers infini dénombrable : on peut donc écrire $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$.

Soient p_1, p_2, \dots des réels positifs tels que la série $\sum p_n$ est convergente et

Alors il existe une unique probabilité P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que $\forall n \geq 1, P(\{\omega_n\}) = p_n$.

Précisément, cette probabilité est donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(A) =$$

Preuve :

La même que dans le cas fini, sauf que les ensemble/unions/sommes peuvent être infinis... □

Exercice 2

On considère l'univers $\Omega = \mathbb{N}$ avec l'ensemble des événements $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

On munit (Ω, \mathcal{A}) d'une probabilité P satisfaisant : $\forall n \in \mathbb{N}, P(\{n\}) = \frac{a}{2^n}$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la valeur de la constante a .
2. On choisit un entier "au hasard", selon la probabilité P .
Quelle est la probabilité que cet entier soit pair ?

2.2 Théorème de la limite monotone

Énonçons à présent quelques résultats permettant de calculer un bon nombre de probabilités d'union/d'intersection infinies d'évènements.

Théorème 2 (Théorème de la limite monotone)

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'évènements.

- **Union croissante** : Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, c'est à dire si

$$\text{alors} \quad P \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) =$$

- **Intersection décroissante** : Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, c'est à dire si

$$\text{alors} \quad P \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right) =$$

Remarques 3

- Bien-sûr cela tient toujours pour des unions/intersections démarrant à l'indice $n = 1$ ou $n = 2...$
- Rappelons l'interprétation de l'inclusion d'évènements :

$A_n \subset A_{n+1}$ signifie que

On a bien-sûr l'inverse pour une famille décroissante d'évènements.

Preuve du Théorème 2 :

□

Exercice 3

On lance une pièce équilibrée indéfiniment.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n =$ "Obtenir au moins une fois Face au cours n premiers lancers".

1. Calculer $P(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la probabilité d'obtenir Face au moins une fois.

Remarque 4

Notons que $P(A) = 1$, mais A n'est pas pour autant l'évènement certain $A = \Omega$!

(En effet $\bar{A} =$ "Obtenir uniquement des Piles" $= \{(Pile, Pile, Pile, \dots)\}$ donc $A \neq \emptyset$.)

Définition 4 (Évènement presque sûr)

Un évènement $A \in \mathcal{A}$ est dit **presque sûr** lorsque

On dira aussi que " A se réalise presque sûrement".

Exemple

Si on lance une pièce indéfiniment, l'évènement "Obtenir Face au moins une fois" est presque sûr. Autrement dit, on obtient Face au moins une fois **presque** sûrement.

Le Théorème de la limite monotone (Théorème 2) a la conséquence très pratique suivante :

Théorème 3 (Conséquence du Théorème de la limite monotone)

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'évènements (quelconque!)

Alors on a :

$$\bullet P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \quad \bullet P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) =$$

Remarques 5

- Cela tient toujours pour des unions/intersections démarrant à l'indice $n = 1$ ou $n = 2...$
- Ici, la famille d'évènements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas besoin d'être croissante ou décroissante !

Pour calculer la probabilité d'une union/intersection infinie, on peut donc d'abord calculer la probabilité de l'union/intersection finie, puis passer à la limite.

Preuve du Théorème 3 :

On pose : $\forall N \in \mathbb{N}, B_N = \bigcup_{n=0}^N A_n$.

Il est clair (ou vérifiez-le!) que la famille $(B_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante et que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{N=0}^{+\infty} B_N$.

En appliquant le Théorème de la limite monotone à $(B_N)_{N \in \mathbb{N}}$, on a ainsi :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{N=0}^{+\infty} B_N\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P(B_N) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right).$$

L'autre point se montre de même en posant cette fois $B_N = \bigcap_{n=0}^N A_k$.

□

Exercice 4

On lance une pièce équilibrée indéfiniment. On pose B = "Obtenir uniquement des Faces". Calculer $P(B)$.

Remarque 6

Notons que $P(B) = 0$, mais B n'est pas pour autant l'évènement impossible \emptyset !

Définition 5 (Évènement négligeable)

Un évènement $B \in \mathcal{A}$ est dit **négligeable** lorsque

3 Conditionnement et indépendance

3.1 Probabilités conditionnelles et formules classiques

Définition 6

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) \neq 0$.

Pour tout événement $B \in \mathcal{A}$ on pose $P_A(B) =$

$P_A : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ est une probabilité sur \mathcal{A} , appelée probabilité conditionnelle "sachant A ".

Toutes les propriétés de la probabilité conditionnelle vues dans le cadre d'un espace probabilisé fini restent vraies dans le cas général. Notons que le Théorème de la limite monotone et ses conséquences s'appliquent aussi en remplaçant P par P_A (puisque P_A est aussi une probabilité!)

Rappelons les trois formules utiles mettant en jeu les probabilités conditionnelles.

Proposition 3 (Formule des probabilités totales (généralisée))

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements (fini ou infini!)

Pour tout événement $B \in \mathcal{A}$, $P(B) =$

(avec la convention $P_{A_i}(B) = 0$ si jamais $P(A_i) = 0$ dans cette formule)

Preuve rapide :

Puisque $(A_i)_{i \in I}$ est un SCE, $B = \Omega \cap B = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$ et cette union est disjointe.

Par σ -additivité : $P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} P(A_i)P_{A_i}(B)$. (car $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$) \square

Remarque 7

Notons que le système complet d'événements peut à présent être composé d'une infinité d'événements : dans ce cas les sommes $\sum_{i \in I}$ sont des sommes infinies.

Proposition 4 (Formule de Bayes)

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. Alors : $P_B(A) =$

Proposition 5 (Formule des probabilités composées)

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

Soient A_1, \dots, A_n des événements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) =$$

Remarque 8

La formule des probabilités composées est la même qu'avant : **elle ne fonctionne que pour une intersection finie d'événements!** Pour la probabilité d'une intersection infinie, on utilisera le Théorème de la limite monotone ou sa conséquence...

3.2 Indépendance

Dans un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) général, les définitions d'indépendance mutuelle, indépendance 2 à 2, ainsi que les propriétés liées à celle-ci, restent valables. La nouveauté est que l'on peut considérer une famille infinie d'évènements indépendants.

Définition 7 (Indépendance deux à deux, indépendance mutuelle)

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, $I \subset \mathbb{N}$ (fini ou infini) et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements.

- On dit que ces évènements sont **deux à deux indépendants** lorsque :

$$\forall (i, j) \in I^2, (i \neq j) \implies P(A_i \cap A_j) =$$

- On dit que ces évènements sont **mutuellement indépendants** lorsque :

Pour tout ensemble fini $J \subset I$,

Remarques 9

- Rappelons que ces deux notions ne sont pas équivalentes : si les $(A_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants (considérer $J = \{i, j\}$), en revanche la réciproque n'est pas vraie...
- Cas typique d'indépendance mutuelle : Si on répète une infinité de fois la même épreuve sans modification des conditions (lancer de pièce, de dé, etc...) et si pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, l'évènement A_i concerne **uniquement la i -ème épreuve**, alors on peut affirmer (sans démonstration) que les évènements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants !

Attention !

L'indépendance mutuelle ne permet de considérer que des intersections et des produits **finis** ! Pour une intersection infinie, on utilisera la conséquence du Théorème de la limite monotone :

$$P \left(\bigcap_{j=0}^{+\infty} A_j \right) =$$

Proposition 6 (Indépendance et évènements contraires (admis))

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, $I \subset \mathbb{N}$ (fini ou infini) et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements.

Pour tout $i \in I$, on pose $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$.

Si les $(A_i)_{i \in I}$ sont deux à deux indépendants (resp. mutuellement indépendants), alors les $(B_i)_{i \in I}$ sont deux à deux indépendants (resp. mutuellement indépendants).

Exercice 5

Une urne contient r boules rouges, v boules vertes et b boules blanches.

On note $N = r + v + b$ le nombre total de boules. On effectue une infinité de tirages avec remise.

Calculer la probabilité de $A =$ "Tirer la première boule verte avant la première boule rouge".

☞ Méthode : Récapitulatif pour les unions/intersections infinies.

- Pour calculer $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$:

[1] Si les évènements A_n sont deux à deux incompatibles : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

[2] Si la famille d'évènements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$.

[3] Sinon : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right)$.

On se ramène donc à la probabilité d'une union finie $P\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right)$.

(il peut être plus simple de passer au complémentaire, ou bien se laisser guider par l'énoncé...)

- Pour calculer $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$:

[1] Si la famille d'évènements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante : $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$.

[2] Sinon : $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^N A_n\right)$.

On se ramène donc à la probabilité d'une intersection finie $P\left(\bigcap_{n=0}^N A_n\right)$:

- Si les A_n sont mutuellement indépendants, $P\left(\bigcap_{n=0}^N A_n\right) = \prod_{n=0}^N P(A_n)$.

- Sinon on peut utiliser la formule des probabilités composées...

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :



Au minimum

- Manipuler des unions/intersections infinies et leur interprétation probabiliste.
- Exprimer un événement comme union/intersection/complémentaire d'autres.
- Montrer qu'une famille d'événements forme un système complet d'événements.
- Utiliser les propriétés déjà connues (probas conditionnelles, indépendance...)
- Utiliser le Théorème de la limite monotone et ses conséquences.



Pour suivre

- Calculer $P(A)$ à partir de la donnée des probabilités $P(\{\omega\})$ pour $\omega \in \Omega$.
- Utiliser le vocabulaire "presque sûr" et "négligeable".



Pour les ambitieux

- Bien connaître la définition théorique d'une probabilité.
- Manipuler théoriquement la définition d'un "ensemble des événements".