22

Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 (Quelle dimension ?)

• On résout le système :

$$\begin{cases} 2x+y-z &= 0 \\ 3x+y+z &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z &= 0 \\ \quad -y+5z &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x &= -y+z = -4z \\ \ y &= 5z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= -2z \\ y &= 5z \end{cases}$$

Ainsi on peut ré-écrire $A = \Big\{(-2z, 5z, z),\ z \in \mathbb{R}\Big\} = Vect\Big((-2,5,1)\Big)$.
$\Big((-2,5,1)\Big)$ est donc une base de A : on en déduit $\dim(A) = 1$.

• $B = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, t = 2x-y+2z\Big\} = \Big\{(x,y,z,2x-y+2z),\ x,y,z \in \mathbb{R}\Big\}$.
On reconnait donc $B = Vect\Big((1,0,0,2),(0,1,0,-1),(0,0,1,2)\Big)$.
On vérifie facilement que la famille $\Big((1,0,0,2),(0,1,0,-1),(0,0,1,2)\Big)$ est libre : c'est donc une base de B.
On en déduit que $\dim(B) = 3$ (c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$).

• On voit facilement que $F = Vect\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right)$.
Cette famille de trois matrices est libre (vérifiez-le), c'est donc une base de F.
On en déduit que $\dim(F) = 3$.

• On réécrit : $G = \Big\{(X^2+2X+3)Q,\ Q \in \mathbb{R}_2[X]\Big\} = \Big\{(X^2+2X+3)(aX^2+bX+c),\ a,b,c \in \mathbb{R}\Big\}$
$= \Big\{aX^2(X^2+2X+3) + bX(X^2+2X+3) + c(X^2+2X+3),\ a,b,c \in \mathbb{R}\Big\}$
$= Vect\Big(\ X^2(X^2+2X+3),\ X(X^2+2X+3),\ X^2+2X+3\ \Big)$.
Cette famille de 3 polynômes est libre car ceux-ci sont de degrés échelonnés : c'est donc une base de G.
On en déduit que $\dim(G) = 3$.

• Déterminons toutes les suites de S, c'est à dire vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
Pour cela on résout l'équation caractéristique $x^2 = 4x - 4 \Longleftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)^2 = 0$.
L'équation a donc l'unique racine 2.
On sait donc que les suites de S sont de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n)2^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
En introduisant les suites $v = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (n2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a donc :

$$S = \Big\{\lambda v + \mu w,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\Big\} = Vect(v,w).$$

Les deux suites v et w sont clairement non-proportionnelles : (v,w) est une famille libre, donc une base de S.
On en déduit que $\dim(S) = 2$.

Exercice 2 (Un hyperplan de polynômes)

On réécrit :

$$\begin{aligned} F &= \Big\{P \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, P(1) = 0\Big\} = \Big\{P \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, (X-1) \text{ divise } P\Big\} \\ &= \Big\{(X-1)Q,\ Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\Big\} = \Big\{(X-1)(a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}),\ a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}\Big\} \\ &= \Big\{a_0(X-1) + a_1X(X-1) + \ldots a_{n-1}X^{n-1}(X-1),\ , a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}\Big\} \\ &= Vect\Big(X-1,\ X(X-1),\ \ldots\ , X^{n-1}(X-1)\Big). \end{aligned}$$

Ces n polynômes forment une famille libre car ils sont de degrés échelonnés : c'est donc une base de F.
On en déduit que $\dim(F) = n$, c'est à dire $\dim(F) = \dim(R_n[X])) - 1$: F est donc bien un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3 (Base ou pas ?)

1. On sait que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

(a) Famille de cardinal $2 < 3$: elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$! Ce n'est donc pas une base.

(b) Famille de cardinal $4 > 3$: elle n'est donc pas libre dans $\mathbb{R}^3$! Ce n'est donc pas une base.

(c) Famille de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$: c'est une base si et seulement si elle est libre. Vérifions si c'est le cas :

$$a(1,0,0) + b(1,1,1) + c(0,1,2) = (0,0,0) \Longleftrightarrow (a+b, b+c, b+2c) = (0,0,0) \Longleftrightarrow a = b = c = 0 \text{ (après calcul)}.$$

La famille est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(d) Famille de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$: c'est une base si et seulement si elle est libre.
Or elle est liée car par exemple $(1,1,1) = (1,0,0) + (0,1,1)$: ce n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^3$.

2. La famille $\mathcal{F}$ est de cardinal 4.

(a) $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$: la famille est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$ si et seulement si elle est libre.
On vérifie si c'est le cas :

$$aX^3 + b(X^3 - 1) + c(X^3 + X) + dX^2 = 0 \Longleftrightarrow (a+b+c)X^3 + dX^2 + cX - b = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ d &= 0 \\ c &= 0 \\ -b &= 0 \end{cases}$$

On a bien $a = b = c = d = 0$: la famille est libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) $\dim(\mathbb{R}_4[X]) = 5 > 4$: la famille ne peut pas être génératrice de $\mathbb{R}_4[X]$. Ce n'est donc pas une base.

3. On sait que $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$.

(a) La famille est de cardinal 4 : c'est donc une base si et seulement si elle est libre. Vérifions si c'est le cas :

$$a\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) + b\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) + c\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) + d\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b+c-d = 0 \\ a-b+c+d = 0 \\ a-b+c+d = 0 \\ a+b-c+d = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b+c-d = 0 \\ a-b+c+d = 0 \\ a+b-c+d = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a+b+c-d = 0 \\ -2b \quad +2d = 0 \\ -2c + 2d = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une infinité de solutions ! Par exemple : $(a,b,c,d) = (-1,1,1,1)$
Ainsi la famille n'est pas libre : ce n'est pas une base.

(b) Même raisonnement : c'est une base si et seulement si la famille est libre.

$$a\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) + b\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) + c\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) + d\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b+c \quad = 0 \\ a-b+c+d = 0 \\ a-b+c-d = 0 \\ a+b-c \quad = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b+c \quad = 0 \\ -2b \quad +d = 0 \\ -2b \quad -d = 0 \\ -2c \quad = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a+b+c \quad = 0 \\ -2b \quad +d = 0 \\ -2d = 0 \\ -2c \quad = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow a = b = c = d = 0.$$

La famille est libre, c'est donc bien une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4 (Génératrice ou pas ?)

On sait que $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.

(a) La famille est de cardinal $2 < 4$: elle ne peut pas être génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) La famille est de cardinal $3 < 4$: elle ne peut pas être génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.

(c) La famille est de cardinal 4. De plus elle est libre car les polynômes sont de degrés échelonnés !
C'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$. En particulier, c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.

(d) La famille est de cardinal $5 > 4$: elle est donc potentiellement génératrice...
La sous-famille $(X^3 - 2, X^2 + 2X, -1, X - 2)$ est déjà une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (4 polynômes de degrés échelonnés).
La sous-famille $(X^3 - 2, X^2 + 2X, -1, X - 2)$ est donc déjà génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$!
En rajoutant le dernier vecteur, c'est toujours une famille génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.

(e) La famille est de cardinal 5> 4 : elle est donc potentiellement génératrice...
Mais cette famille ne contient que des polynôme de degré 2 au maximum... Elle ne peut donc pas être génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$! Par exemple : $X^3 \notin Vect\Big(X^2 + X, X + 1, 3, X^2 + 1, 2X^2 - X + 1\Big)$.

Exercice 5 (Complétion/extraction)

1. La famille $\Big((1, 2, -1), (1, 1, 3)\Big)$ est libre. On cherche à la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$ en rajoutant un vecteur...
Choisissons un vecteur simple, pourquoi pas un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$?
Rajoutons par exemple le vecteur $(0, 0, 1)$. Vérifions que $\Big((1, 2, -1), (1, 1, 3), (0, 0, 1)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Pour cela, il suffit de vérifier qu'elle est libre : pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a(1,2,-1)+b(1,1,3)+c(0,0,1) = (0,0,0) \iff \begin{cases} a+b & = 0 \\ 2a+b & = 0 \\ -a+3b+c & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b & = 0 \\ -b & = 0 \\ 4b+c & = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0.$$

Ainsi, $\Big((1, 2, -1), (1, 1, 3), (0, 0, 1)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. La famille $\Big((1, 0, -1), (2, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 1, 1)\Big)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ (on va le voir au passage).
Retirons un vecteur pour en extraire une base de $\mathbb{R}^3$.
Par exemple, puisque $(1, 1, 1) = (0, 1, 2) + (1, 0, -1)$, on peut écrire

$$Vect\Big((1,0,-1),(2,1,1),(0,1,2),(1,1,1)\Big) = Vect\Big((1,0,-1),(2,1,1),(0,1,2)\Big).$$

On peut vérifier que la famille $\Big((1, 0, -1), (2, 1, 1), (0, 1, 2)\Big)$ est libre, et donc une base de $\mathbb{R}^3$: pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} a(1,0,-1)+b(2,1,1)+c(0,1,2) = (0,0,0) &\iff \begin{cases} a+2b & = 0 \\ b+c & = 0 \\ -a+b+2c & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+2b & = 0 \\ b+c & = 0 \\ 3b+2c & = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a+2b & = 0 \\ b+c & = 0 \\ -c & = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0. \end{aligned}$$

Exercice 6 (Une base de $\mathbb{R}_3[X]$)

1. C'est une famille de cardinal $4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$ et elle est libre puisque les polynômes sont de degrés échelonnés.
C'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Pour X, c'est facile : $X = X - a + a$ donc : $X = a \cdot 1 + 1 \cdot (X - a) + 0 \cdot (X - a)^2 + 0 \cdot (X - a)^3$.
Pour X^3, on peut fait plusieurs petits calculs de proche en proche, ou alors noter astucieusement que

$$X^3 = ((X-a)+a)^3 = (X-a)^3 + 3(X-a)^2 a + 3(X-a)a^2 + a^3$$

c'est à dire : $X^3 = a^3 \cdot 1 + 3a^2 \cdot (X - a) + 3a \cdot (X - a)^2 + 1 \cdot (X - a)^3$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, comment décomposer P sous la forme

$$P(X) = c_0 + c_1(X-a) + c_2(X-a)^2 + c_3(X-a)^3 \ ?$$

Il suffit d'appliquer la formule de Taylor à l'ordre 3 en a :

$$P(X)=\sum_{k=0}^{3}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k=P(a)+P'(a)(X-a)+\frac{P''(a)}{2}(X-a)^2+\frac{P^{(3)}(a)}{6}(X-a)^3.$$

Exercice 7 (Une autre base pour $\mathbb{R}_n[X]$)

La famille $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ est de cardinal $n+1=\dim(\mathbb{R}_n[X])$.
Pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit de montrer que c'est une famille libre.
Les polynômes sont tous de degré n : on ne peut donc pas utiliser l'argument "degrés échelonnés"...
Soient $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, supposons que $\lambda_0P_0+\lambda_1P_1+\ldots+\lambda_nP_n=0$ et montrons que $\lambda_0=\lambda_1=\ldots=\lambda_n$.
On sait que :

$$\lambda_0(1-X)^n+\lambda_1X(1-X)^{n-1}+\ldots+\lambda_{n-1}(1-X)X^{n-1}+\lambda_nX^n=0$$

En évaluant X en 1, on obtient $\lambda_n=0$. On peut donc ré-écrire :

$$\lambda_0(1-X)^n+\lambda_1X(1-X)^{n-1}+\ldots+\lambda_{n-1}(1-X)X^{n-1}=0$$

ce qui se réécrit :

$$(1-X)\Big(\lambda_0(1-X)^{n-1}+\lambda_1X(1-X)^{n-2}+\ldots+\lambda_{n-1}X^{n-1}\Big)=0$$

et on a donc ce qui se réécrit :

$$\lambda_0(1-X)^{n-1}+\lambda_1X(1-X)^{n-2}+\ldots+\lambda_{n-1}X^{n-1}=0.$$

A nouveau, en évaluent X en 1, on obtient $\lambda_{n-1}=0$.
On peut poursuivre le même raisonnement pour démontrer que $\forall i[\![0,n]\!],\ \lambda_i=0$.
Ainsi, la famille $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ est libre, donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 8 (Rang dans $\mathbb{R}^3$)

(a) Cette famille de deux vecteurs est libre : $rg(\mathcal{F}_1)=2$.
Ce n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
(b) Cette famille de trois vecteurs est clairement libre (mais ils faut le démontrer rapidement !). $rg(\mathcal{F}_2)=3$.
C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Avec quelques opérations élémentaires, on note que

$$\begin{aligned}rg(\mathcal{F}_3)&=rg\Big((1,0,1),(0,1,0),(1,1,0),(0,0,1)\Big)\\&=rg\Big((1,0,0),(0,1,0),(1,1,0),(0,0,1)\Big)=rg\Big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\Big)=3.\end{aligned}$$

C'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$, mais pas une famille libre.
(d) Avec quelques opérations élémentaires (pivot de Gauss) :

$$\begin{aligned}rg(\mathcal{F}_4)&=rg\Big((1,2,3),(3,2,1),(1,1,1)\Big)=rg\Big((1,2,3),(0,-4,-8),(0,-1-2)\Big)\\&=rg\Big((1,2,3),(0,1,2)\Big)=2.\end{aligned}$$

Ce n'est ni une famille génératrice, ni une famille libre.

Exercice 9 (Rang dans $\mathbb{R}[X]$)

1. On écrit les polynômes sous forme développée, et on raisonne avec des opérations élémentaires, similairement à ce qui se passe dans $\mathbb{R}^4$...

$$rg\begin{pmatrix}P_0,\\P_1,\\P_2,\\P_3,\\P_4,\\P_5\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}&&&1\\&&X&-1\\&2X^2&&+2\\2X^3&-3X^2&+X&\\X^3&&&\\X^3&&-2X&+1\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}X^3&&&\\X^3&&-2X&+1\\2X^3&-3X^2&+X&\\&2X^2&&+2\\&&X&-1\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} X^3 & & & \\ & & -2X & +1 \\ & -3X^2 & +X & \\ & 2X^2 & & +2 \\ & & X & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} X^3 & & & \\ & 2X^2 & & +2 \\ & -3X^2 & +X & \\ & & -2X & +1 \\ & & X & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} X^3 & & & \\ & X^2 & & +1 \\ & -3X^2 & +X & \\ & & -2X & +1 \\ & & X & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} X^3 & & & \\ & X^2 & & +1 \\ & & X & +3 \\ & & -2X & +1 \\ & & X & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} X^3 & & & \\ & X^2 & & +1 \\ & & X & +3 \\ & & & 7 \\ & & & -4 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} X^3 & & & \\ & X^2 & & +1 \\ & & X & +3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= rg\Big(X^3, X^2+1, X+3, 1\Big) = 4$$

car cette dernière famille est libre (polynômes de degrés échelonnés).

2. La famille est de cardinal 6 et de rang $4 < 6$: elle n'est donc pas libre.

3. Les mêmes opérations effectuées en question 1. montrent que

$$Vect(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) = Vect(X^3, X^2+1, X+3, 1) = \mathbb{R}_3[X].$$

En effet, cette dernière famille est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (car elle est libre et de cardinal $4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$).

Exercice 10 (Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)

1. De même que dans l'exercice précédent, on effectue une espèce de "pivot de Gauss" :

$$rg(A, B, C, D, E) = rg\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$= rg\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = rg\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$$

$$= rg\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = rg\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$$

$$= rg\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = rg\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = 3$$

car cette dernière famille est clairement libre.

2. La famille (A, B, C, D, E) est de cardinal 5 et de rang $3 < 5$: elle n'est donc pas libre.
Elle est de rang $3 < 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ donc elle n'est pas non plus génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

En fait, les opérations effectuées en 1. montrent que

$$Vect(A, B, C, D, E) = Vect\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & a\end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R}\right\} \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Exercice 11 (Polynômes de Lagrange (le retour))

1. (a) Pour tous $i, k \in [\![0, n]\!]$, on a $\quad L_i(x_k) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = k \\ 0 \text{ si } i \neq k \end{cases}$

(b) La famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est de cardinal $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$.
Pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit donc de montrer que c'est une famille libre !
Soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Supposons que $\lambda_0 L_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n L_n = 0$ et montrons que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k = 0$.
On sait que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(X) = 0$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ fixé, en évaluant en x_k on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \underbrace{L_i(x_k)}_{=0 \text{ si } i \neq k} = 0 \Longleftrightarrow \lambda_i \underbrace{L_k(x_k)}_{=1} = 0 \Longleftrightarrow \lambda_k = 0.$$

Ceci montre bien que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k = 0$, d'où le résultat !

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ fixé. Puisque $\mathcal{B} = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on sait qu'il existe un unique $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que P se décompose :

$$P = \lambda_0 L_0 + \lambda_1 L_1 + \ldots + \lambda_n L_n = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i.$$

On recherche les coefficients $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$...
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ fixé, en évaluant à nouveau en x_k, on obtient :

$$P(x_k) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_k) = \lambda_k L_k(x_k) = \lambda_k.$$

Ainsi, en fait : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k = P(x_k)$. Ainsi la décomposition de P dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i.$$

3. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a la décomposition $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$. On a donc l'équivalence :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(x_k) = y_k \Longleftrightarrow P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i.$$

L'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ satisfaisant $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(x_k) = y_k$ est ainsi : $\quad P(X) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(X).$

Exercice 12 (Indice de nilpotence d'un endomorphisme)

1. Puisque $p \in \mathbb{N}^*$ est le plus petit entier tel que $f^p = 0$, on sait que $f^{p-1} \neq 0$, c'est à dire que f^{p-1} n'est pas l'application nulle. Ainsi, par définition, il existe un $x_0 \in E$tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$.

2. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \ldots + \lambda_{p-2} f^{p-2}(x_0) + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0_E.$$

Montrons que $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-1} = 0$. En composant l'égalité précédente par f, par linéarité (et $f(0_E) = 0_E$) :

$$\lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f^2(x_0) + \ldots + \lambda_{p-2} f^{p-1}(x_0) + \lambda_{p-1} f^p(x_0) = 0_E$$

et puisque $f^p = 0$, cela donne :

$$\lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f^2(x_0) + \ldots + \lambda_{p-2} f^{p-1}(x_0) = 0_E.$$

On peut poursuivre ce raisonnement : si on compose à nouveau par f,

$$\lambda_0 f^2(x_0) + \lambda_1 f^3(x_0) + \ldots + \lambda_{p-3} f^{p-1}(x_0) = 0_E \text{ etc...}$$

On obtient ainsi la succession d'égalité suivante :

$$\begin{array}{lllll}
\lambda_0 x_0 & +\lambda_1 f(x_0) & +\dots & +\lambda_{p-2} f^{p-2}(x_0) & +\lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0_E \\
\lambda_0 f(x_0) & +\lambda_1 f^2(x_0) & +\dots & +\lambda_{p-2} f^{p-1}(x_0) = 0_E & \\
\vdots & & & & \\
\lambda_0 f^{p-2}(x_0) & +\lambda_1 f^{p-1}(x_0) = 0_E & & & \\
\lambda_0 f^{p-1}(x_0) = 0_E & & & &
\end{array}$$

Puisque $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$, la dernière égalité nous donne $\lambda_0 = 0$.
En remontant à la ligne précédente, on obtient ensuite $\lambda_1 = 0$...
En remontant les lignes une par une, on finit bien par avoir $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-1} = 0$.
Ceci montre que la famille est libre !

3. La famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est de cardinal p, et est une famille libre de E.
On a donc nécessairement $p \leqslant \dim(E)$, c'est à dire $p \leqslant n$.

Si jamais $p = n$, alors $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)$ est une famille libre de E, de cardinal $n = \dim(E)$.
C'est donc une base de E.