Samedi 12 Avril 2025

Devoir Sur Table n°6 – Durée : 4h

L'utilisation de la calculatrice, des feuilles/notes de cours ou d'exercices est interdite.
La présentation, la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation de la copie.
Les résultats non encadrés/soulignés/surlignés ne seront pas pris en compte.

Problème 1 : S.E.V supplémentaires à partir d'un endomorphisme

Dans tout ce problème, E désignera un espace vectoriel.
On propose d'étudier différents cas où un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ permet d'obtenir une décomposition du type $E = F \oplus G$ (F et G seront des sous-espaces vectoriels de E définis à partir de l'endormophisme f)

On rappelle que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Partie I - Quelques exemples

1. Justifier que si f est un automorphisme de E, alors on a toujours $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

Dans la suite de cette partie, on se place dans le cas particulier $E = \mathbb{R}^3$ et on définit les endomorphismes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \frac{1}{3} \cdot (x+y+z, x+y+z, x+y+z) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y, x-y+z, -y+2z) \end{array}$$

2. Démontrer que f est un projecteur. En déduire que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.
3. Déterminer le noyau et l'image de g, puis montrer que $E = Ker(g) \oplus Im(g)$.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que l'endomorphisme $g - \lambda Id_E$ est injectif si et seulement si $\lambda \notin \{0, 1, 2\}$.
5. (a) Déterminer une base de $Ker(g)$, $Ker(g - Id_E)$ et $Ker(g - 2Id_E)$.
   (b) En déduire que $E = Ker(g) \oplus Ker(g - Id_E) \oplus Ker(g - 2Id_E)$.

Partie II - Les symétries

On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une *symétrie* lorsqu'il satisfait : $f^2 = Id_E$.
On définit dans ce cas les ensembles $E_1 = Ker(f - Id_E)$ et $E_{-1} = Ker(f + Id_E)$.

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Vérifier que l'endomorphisme $f : A \mapsto {}^tA$ est une symétrie.
   A quoi correspondent dans ce cas les ensembles E_1 et E_{-1} ?
   (b) Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Vérifier que l'endomorphisme $f : E \to E$ défini par
   $$\forall h \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \Big(f(h)\Big)(x) = h(-x)$$
   est une symétrie. A quoi correspondent dans ce cas les ensembles E_1 et E_{-1} ?

On suppose à présent que E est un espace vectoriel quelconque et que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie.

7. (a) Montrer que $E_1 \cap E_{-1} = \{0_E\}$.
   (b) Pour tout $v \in E$, montrer que $\frac{1}{2}(v + f(v)) \in E_1$ et $\frac{1}{2}(v - f(v)) \in E_{-1}$.
   (c) En déduire que l'on a : $E = E_1 \oplus E_{-1}$.
8. On introduit p (resp. q) le projecteur sur E_1 parallèlement à E_{-1} (resp. sur E_{-1} parallèlement à E_1).
   Montrer que $f = p - q$.

Ainsi, si $f \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie, elle s'écrit $f = p - q$, où p et q sont deux projecteurs associés.
Etudions la réciproque de cette affirmation.

9. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. On note p et q les projecteurs associés à la décomposition $E = F \oplus G$ et on définit l'endomorphisme $f = p - q$.
   Montrer que f est une symétrie.

Partie III - Décomposition à partir de polynômes annulateurs

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel quelconque et $f \in \mathcal{L}(E)$.

10. Dans cette question, on suppose que l'endomorphisme f satisfait : $f \circ (f - Id_E)^2 = 0$.
    (a) Déterminer des réels a_1, a_2, a_3 tels que $a_1 f + a_2 f^2 + a_3 f^3 = 0$.
    (b) Montrer que $Ker(f) \cap Im(f) = \{0_E\}$.
    (c) Montrer que $Id_E = (f - Id_E)^2 + f \circ (2Id_E - f)$. En déduire que tout $v \in E$ peut s'écrire comme une somme de deux vecteurs que l'on précisera.
    (d) Montrer finalement que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

11. Dans cette, question, on suppose que l'endomorphisme f satisfait : $f \circ (f - Id_E) \circ (f - 4Id_E) = 0$.
    En raisonnant comme dans la question 10., montrer à nouveau que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$ dans ce cas.

    Indication : Pour la décomposition du (*c*), on cherchera un polynôme P de degré 1 tel que $1 = \frac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X)$.

12. *Généralisation.*
    Dans cette question, on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et des réels $a_1, a_2, \dots, a_p$ avec $a_1 \neq 0$ tels que $a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_p f^p = 0$. On souhaite montrer à nouveau que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

    En raisonnant par analyse-synthèse, montrer que pour tout $v \in E$, il existe un unique couple $(v_1, v_2) \in Ker(f) \times Im(f)$ (dont on déterminera l'expression en fonction de f et v) tel que $v = v_1 + v_2$.

Exercice : Temps moyen d'apparition d'un "Triple Pile"

On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. On admet que cette expérience peut être modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de sorte à pouvoir considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $A_n =$ "Obtenir Pile au n-ème lancer ". On note X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer où l'on obtient Pile pour la troisième fois d'affilée. On pose $X = 0$ si on n'obtient jamais trois Pile d'affilée.

L'objectif de cet exercice est de calculer l'espérance de X.

1. Déterminer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X=3)$.

2. (a) Justifier que les quatre évènements $\overline{A_1}$, $A_1 \cap \overline{A_2}$, $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}$, et $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ forment un système complet d'évènements.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 4$,

$$P(X=n) = \frac{1}{2}P(X=n-1) + \frac{1}{4}P(X=n-2) + \frac{1}{8}P(X=n-3).$$

Pour tout $N \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit :

$$F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} x^n P(X=n) \quad \text{et} \quad G_N(x) = \sum_{n=1}^{N} n x^{n-1} P(X=n).$$

Sous réserve d'existence (c'est à dire de convergence des séries), on définit également les sommes infinies :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n P(X=n) \quad \text{et} \quad G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} P(X=n).$$

3. (a) Montrer que l'équation $x^3 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$, et que $\alpha \in]0,1[$.
   (b) Montrer que $\frac{1}{\alpha}$ est l'unique solution de l'équation $\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = 1$
   (c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad P(X=n) \leqslant \alpha^n$.
   (d) En déduire que les sommes infinies $F(x)$ et $G(x)$ sont bien définies lorsque $x \in]-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}[$.

4. (a) Montrer, pour tout $N \geqslant 4$ et $x \in \mathbb{R}$, l'égalité :

$$8F_N(x) = x^3 + 4xF_{N-1}(x) + 2x^2 F_{N-2}(x) + x^3 F_{N-3}(x)$$

(b) En déduire que pour tout $x \in]-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}[, \quad F(x) = \dfrac{x^3}{8-4x-2x^2-x^3}$.
On justifiera que le dénominateur de cette fraction est non-nul.

(c) Calculer, en justifiant, la valeur de $F(1)$,
puis déduire que l'on finit presque-sûrement par observer trois Pile d'affilée.

5. (a) En utilisant de nouveau l'égalité du 4.(a), montrer que pour tout $x \in]-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}[$,

$$G(x) = \frac{3x^2 + F(x)(4+4x+3x^2)}{8-4x-2x^2-x^3}$$

(b) En déduire finalement que X admet une espérance et $E(X) = 14$.

Problème 2 : Lois discrètes suivant la relation de Panjer

Dans ce problème, on s'intéresse aux variables aléatoires discrètes X, de support inclus dans $\mathbb{N}$, dont la loi de probabilité satisfait la *relation de Panjer* : il existe des constantes réelles $a < 1$ et $b > 0$ telles que

$$(\star) \quad P(X=0) \in]0,1[\quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(X=k-1).$$

Partie I : Calcul des probabilités avec Python

1. Pour tous réels $a < 1$ et $b > 0$, on considère la suite $(p_k)_{k \geqslant 0}$ définie par :

$$p_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}.$$

(a) Compléter la définition de la fonction `suite_p`, qui prend en entrée des réels a, b et un entier n, et renvoie le vecteur contenant les valeurs $(p_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$. **On recopiera le programme sur sa copie.**

```
import numpy as np
def suite_p(a,b,n) :
    P = np.zeros(...) ; P[0] = 1
    for k in range(...) :
        P[k] = ......
    return(P)
```

(b) Soit X une variable aléatoire discrète satisfaisant $(\star)$ pour certains réels $a < 1$ et $b > 0$.
Justifier que $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = p_k \times P(X=0)$.

(c) On considère dans cette question $a = 0$, $b = 2$ et X une variable aléatoire satisfaisant $(\star)$.

```
P = suite_p(0,2,1000) ; s = np.sum(P); print(s)
```

Les instructions ci-dessus affichent : `s` $\simeq 7,4$. Expliquer pourquoi $P(X=0) \simeq \mathtt{s}^{-1} \simeq 0,14$.

Partie II : Espérance et variance

On considère une variable aléatoire discrète X, de support inclus dans $\mathbb{N}$, satisfaisant $(\star)$ pour certains réels $a < 1$ et $b > 0$.

2. (a) Justifier que $a + b \geqslant 0$.

(b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = a\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)P(X=k) + b\sum_{k=0}^{n-1} P(X=k)$.

(c) En déduire, pour tout $n \geqslant 1$,

$$(1-a)\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} P(X=k) - anP(X=n) \quad \text{puis} \quad \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \leqslant \frac{a+b}{1-a}.$$

(d) En déduire que X admet une espérance, puis que $E(X) = \dfrac{a+b}{1-a}$.

3. (a) En en appliquant le même raisonnement à la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k)$, montrer rigoureusement que X^2 admet une espérance, puis exprimer $E(X^2)$ en fonction de a et b.

(b) Etablir finalement que $V(X) = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$

Partie III : Relation de Panjer et lois usuelles

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale négative $\mathcal{BN}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$, lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \binom{n+k-1}{k} p^k (1-p)^n.$$

On admettra que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \tbinom{n+k-1}{k} p^k = \frac{1}{(1-p)^n}$, de sorte que ceci définit bien une loi de probabilité.

4. *Cas particulier :* on suppose que X suit la loi binomiale négative $\mathcal{BN}(1,p)$ pour un $p \in]0,1[$.
   Reconnaître la loi de probabilité de $Y = X+1$.

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire discrète X, de support inclus dans $\mathbb{N}$, satisfaisant $(\star)$ pour certains réels $a < 1$ et $b > 0$. On cherche à montrer que X suit forcément une loi de probabilité usuelle, en distinguant les valeurs de a et b.

5. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad P(X=k) = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \left(a + \frac{b}{i}\right) \times P(X=0)$.

- On suppose, d'abord, que $a = 0$.

6. Montrer que X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
   (*Le poisson Steve...* ♫)

- On suppose à présent que $a < 0$.

7. (a) Montrer que la suite $(P(X=k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est nulle à partir d'un certain rang.
   Indication : On pourra raisonner par l'absurde en supposant que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X=k) > 0$.
   Ainsi, il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(X=r) \neq 0$ et $\forall k > r,\ P(X=k) = 0$.
   (b) Justifier que $b = -a(r+1)$.
   (c) Etablir que pour tout $k \in [\![0,r]\!]$, $\quad P(X=k) = \dbinom{r}{k}(-a)^k \times P(X=0)$.
   (d) Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

- On suppose finalement que $0 < a < 1$. Par commodité, on se limite au cas où $\frac{b}{a} \in \mathbb{N}$.

8. (a) Etablir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\quad P(X=k) = \dbinom{\frac{b}{a}+k}{k} a^k \times P(X=0)$.
   (b) En déduire que X suit une loi binomiale négative dont on précisera les paramètres.

$\star\star\star$ Fin du sujet $\star\star\star$