29

Compléments pour les études de fonctions : Extrema & Convexité

1 Extrema d'une fonction sur un intervalle

S P O I L E R . . .

On donne, dans cette partie, quelques outils pour l'étude rapide des extrema locaux d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Ces outils seront généralisés en deuxième année aux fonctions de plusieurs variables !

1.1 Rappels généraux

Définition 1 (Rappel : Extremum local / global)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.

• On dit que f admet un minimum (global) en x_0 lorsque
On note alors $f(x_0) =$

• On dit que f admet un maximum (global) en x_0 lorsque
On note alors $f(x_0) =$

• On dit que f admet un minimum (resp. maximum) local en x_0 lorsque :

• On dit que f admet un extremum global (resp. local) en x_0 si f admet un minimum ou un maximum global (resp. local) en x_0.

Remarques 1

• Un extremum global est en particulier un extremum local. L'inverse n'est pas vrai !

Dessin :

• Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ peut tout à faire être majorée ou minorée sur I, sans pour autant admettre un maximum ou un minimum ! Autrement dit, la borne supérieur $\sup(f)$ ou la borne inférieure $\inf(f)$ peut ne pas être "atteinte" par f.

Dessin :

• Le minimum/maximum de f sur I, s'il existe, peut éventuellement être atteint en plusieurs points.

Une fonction continue sur un intervalle n'y est pas forcément majorée ni minorée. Même lorsque c'est le cas, elle n'admet pas forcément de maximum ou de minimum.
En revanche, si l'intervalle est un segment, on rappelle le résultat suivant :

Théorème 1 (Théorèmes des bornes atteintes (admis))

Toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$ y est bornée et atteint ses bornes.
Autrement dit, si $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, f admet un minimum global et un maximum global sur I.

Dessin :

Ce théorème assure l'existence des extrema mais ne donne aucune information sur la valeur des extrema, ni sur les abscisses où ces extrema sont atteints...

1.2 Condition nécessaire/suffisante d'extremum local

Définition 2 (Point critique)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in D(I, \mathbb{R})$.
On dit que $x_0 \in I$ est un **point critique** de f lorsque

Proposition 1 (CONDITION NÉCESSAIRE d'extremum local)

Soit I un intervalle, $f \in D(I, \mathbb{R})$ et x_0 un point dans l'intérieur de I
(c'est à dire x_0 n'est pas une extrémité de l'intervalle I)

Si f admet un extremum local en x_0, alors

Interprétation graphique : La tangente au point d'abscisse x_0 est

Preuve :

Supposons que f admette un minimum local en x_0 (l'autre cas est similaire).

Ainsi, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$: $f(x) \geqslant f(x_0)$.

On en déduit, pour un tel x : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$ si $x > x_0$ et $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$ si $x < x_0$

En passant à la limite lorsque $x \to x_0^+$ (resp. $x \to x_0^-$) on obtient donc : $f'_d(x_0) \geqslant 0$ et $f'_g(x_0) \leqslant 0$.

Comme f est dérivable en x_0, on doit avoir $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ d'où $f'(x_0) = 0$. $\square$

Dessin :

Attention !

Ce résultat ne tient plus si x_0 est une extrémité de l'intervalle I !

Contre-Exemple : Sur $[1, 2]$, la fonction $f : x \mapsto x^2$ admet un minimum en 1 et un maximum en 2, mais pourtant la dérivée ne s'annule ni en 1 ni en 2.

Dessin :

Attention !

- f admet un extremum local en $x_0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x_0) = 0,$ mais la réciproque est fausse !

Contre-Exemple : La fonction $f : x \mapsto x^3$ (définie sur $\mathbb{R}$) vérifie $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un extremum local.

Dessin :

Le résultat de la Proposition 1 pourrait donc se reformuler ainsi : sur un intervalle ouvert, être un point critique est une **condition nécessaire** (mais pas suffisante !) pour réaliser un extremum local.

Exercice 1

Sans faire d'étude de fonction, déterminer le maximum de $f : x \mapsto x(1 - x)$ sur le segment $[0, 1]$.

On a vu que la condition précédente était nécessaire, mais pas suffisante : x_0 peut être un point critique sans pour autant que f y admette un extremum local. Si la fonction f est de classe C^2, on dispose d'une condition suffisante pour l'existence d'un minimum/maximum local :

Proposition 2 (CONDITION SUFFISANTE d'extremum local)

Soit I un intervalle, $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ et x_0 un point dans l'intérieur de I

- Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, alors
- Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$, alors

$\Big($ Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) = 0$, on ne peut rien conclure en général... $\Big)$

Preuve :

On applique la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en x_0 (fonctionne pour f de classe C^2 seulement...) :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Ainsi : $f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{=} \dfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$ donc $f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{\sim} \dfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$.

Au voisinage de x_0, le signe de $f(x) - f(x_0)$ est donc le même que celui de $f''(x_0)$, d'où le résultat. □

Exemple

Pour la fonction cos, de classe C^∞ sur $I = \mathbb{R}$:

- On a : $\cos'(0) =$ et $\cos''(0) =$

Ainsi, cos admet un maximum local (en fait global !...) en 0.

- On a : $\cos'(\pi) =$ et $\cos''(0) =$

Ainsi, cos admet un minimum local (en fait global !...) en π.

Dessin :

Exercice 2

Sans faire d'étude de fonction, déterminer les extrema locaux de $g : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

2 Convexité / Concavité

2.1 Définition et interprétation graphique

Définition 3 (Fonction convexe/concave)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est convexe sur I lorsque :

- On dit que f est concave sur I lorsque :

Remarque 2

Supposons $x_1 < x_2$, et donnons une interprétation du réel $\boxed{x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}$ pour $\lambda \in [0,1]$.

- On dit parfois que x est une **"combinaison convexe"** de x_1 et x_2.
- Ce réel peut aussi s'interpréter comme une **"moyenne pondérée"** de x_1 et x_2.

Plus λ est proche de 0, plus le "poids" accordé à x_1 est important.
Plus λ est proche de 1, plus le "poids" accordé à x_2 est important.
À mi-chemin, quand $\lambda = \frac{1}{2}$, on obtient la moyenne $x = \frac{x_1+x_2}{2}$.

Précisément, vérifions que le réel $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ parcourt exactement le segment $[x_1, x_2]$ lorsque λ parcourt $[0,1]$:

$\boxed{1}$ Pour tout $\lambda \in [0,1]$, en posant $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, on a

En effet :

$\boxed{2}$ Inversement, si $x \in [x_1, x_2]$, il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $x =$

En effet :

Soit f convexe sur I et $x_1 < x_2$ dans I.

Comparons la position de la courbe représentative de f et la "corde" tendue entre les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$.

Cette corde est d'équation :

$y =$

Pour $x \in [x_1, x_2]$ on a vu que l'on pouvait écrire

$x =$

Dessin :

Ainsi l'inégalité de convexité s'écrit :

donc en remplaçant par l'expression de λ :

C'est à dire : .

C'est valable pour tout $x \in [x_1, x_2]$. On a donc montré l'**interprétation graphique de convexité** :

La courbe représentative de f est de n'importe quelle corde qui y est "tendue" !

Proposition 3 (Caractérisation avec les cordes)

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est :

- Convexe sur I si et seulement si sa courbe représentative est en dessous de ses cordes.
- Concave sur I si et seulement si sa courbe représentative est au dessus de ses cordes.

Exemples

- Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont

Dessin :

- Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont

Dessin :

- La fonction $x \mapsto x^3$ est

Dessin :

- Les fonctions affines $x \mapsto ax + b$ sont

Notons que l'on a un lien évident entre convexité et un concavité :

Proposition 4 (De convexe à concave)

On a l'équivalence : f est concave sur $I \iff -f$ est convexe sur I.

On a donc également : f est convexe sur $I \iff -f$ est concave sur I.

Preuve :

C'est évident en remplaçant f par $-f$ dans l'inégalité de la Définition 3. □

L'inégalité de convexité de la Définition 3 se généralise sans trop de difficultés à n points :

Théorème 2 (Inégalité de convexité généralisée (ou inégalité de Jensen) (admis))

Soit f une fonction convexe sur l'intervalle I.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in [0,1]^n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Alors :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in I^n,$$

Remarques 3

• Si f est concave, on a bien-sûr l'inégalité inverse :

• Pour $n = 2$, on retrouve la définition de la convexité (en choisissant $\lambda = \lambda_2$, on a $(1-\lambda) = \lambda_1$)

• Puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, le réel $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ s'interprète à nouveau comme une **"moyenne pondérée"** des réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pour faire très simple, la convexité nous dit que :

...et c'est l'inverse pour une fonction concave !

2.2 Convexité pour les fonctions de classe C^1

Plutôt que de vérifier la définition (ce qui serait pénible !), il existe un moyen simple de montrer qu'une fonction de classe C^1 est convexe :

Proposition 5 (Critère pratique : caractérisation avec la dérivée) (admis)

Soit $f \in C^1(I, \mathbb{R})$. Alors f est :

• Convexe si et seulement si

• Concave si et seulement si

Remarques 4

• Ainsi, on pourrait dire qu'une fonction convexe "croît de plus en plus" et qu'une fonction concave "croît de moins en moins"... Attention : une fonction convexe/concave peut quand même changer de sens de variation !

• À l'aide de ce critère, on démontre très facilement toutes les affirmations faites précédemment :
$x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont concaves sur $\mathbb{R}_+^*$,
$x \mapsto x^3$ est concave sur $\mathbb{R}_-$, convexe sur $\mathbb{R}_+$. (Vérifiez-le !)

Lorsque f est de classe C^1, on dispose également d'une caractérisation avec les tangentes :

Proposition 6 (Caractérisation avec les tangentes) (admis)

Soit $f \in C^1(I, \mathbb{R})$. Alors f est :

• Convexe si et seulement si la courbe représentative de f est
c'est à dire :

• Concave si et seulement si la courbe représentative de f est
c'est à dire :

Dessin :

Ce dernier critère n'est pas très pratique pour démontrer qu'une fonction est convexe/concave... En revanche, c'est une conséquence utile de la convexité/concavité, qui permet d'obtenir rapidement diverses inégalités ! (voir un peu plus loin : Utilisation de la convexité/concavité)

2.3 Convexité pour les fonctions de classe C^2

A partir de la Proposition 5, on déduit immédiatement un autre critère lorsque la fonction est de classe C^2 :

Proposition 7 (Critère pratique : Caractérisation avec la dérivée seconde)

Soit $f \in C^2(I, \mathbb{R})$. Alors f est :
- Convexe sur I si et seulement si
- Concave sur I si et seulement si

Preuve :

C'est évident puisque $f'' \geqslant 0$ sur I si et seulement si f' est croissante sur I. $\square$

Exemples

- exp est bel et bien convexe sur $\mathbb{R}$ puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp''(x) =$
- ln est bel et bien concave sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln''(x) =$

2.4 Notion de point d'inflexion

Définition 4 (Point d'inflexion)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On dit que le point $A = (x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f lorsque f passe donc de convexe à concave ou de concave à convexe en x_0.

Dessin :

Proposition 8 (Point d'inflexion et dérivées)

- Si $f \in C^1(I, \mathbb{R})$, $A = (x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion si et seulement si :
- Si $f \in C^2(I, \mathbb{R})$, $A = (x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion si et seulement si :

Exemple

Si $f : x \mapsto x^3$, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) =$

On voit ainsi que f'' s'annule et change de signe en 0 : $(0,0)$ est donc un point d'inflexion.

2.5 Utilisation de la convexité/concavité

a) Pour montrer des inégalités

Après avoir montré qu'une fonction est convexe/concave en utilisant le critère pratique de la Proposition 5 ou de la Proposition 7, on peut déduire facilement un certain nombre d'inégalités...

$\boxed{1}$ En utilisant directement la définition de la convexité/concavité (Définition 3)

Exercice 3

Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}, \quad e^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \dfrac{e^a + e^b}{2}$.

$\boxed{2}$ En utilisant l'inégalité de convexité généralisée (Théorème 2).

On choisira généralement :

Exercice 4

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n > 0$, montrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Pour s'exercer :

Exercice 5

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n > 0$, montrer : $\quad \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

$\boxed{3}$ En effectuant une comparaison entre fonction et tangente (Proposition 6).

Exercice 6

Établir les inégalités suivantes :

1. $\forall x > -1, \ \ln(1+x) \leqslant x$. 2. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \ \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

b) Pour établir des extrema globaux

D'après la Proposition 7, une fonction f de classe C^2 et convexe satisfait $f'' \geqslant 0$ sur I.
En couplant cela à la Proposition 2 (condition suffisante d'extremum local), on en déduit que tout point critique (i.e tel que $f'(x_0) = 0$) à l'intérieur de I est automatiquement un minimum local.
En fait on peut montrer qu'il s'agit même d'un minimum GLOBAL ! On a le résultat général suivant :

Théorème 3 (Minimum/maximum global pour une fonction convexe/concave)

Soit $f \in C^1(I, \mathbb{R})$ et x_0 un point dans l'intérieur de I.

- Si f est convexe, alors : $f'(x_0) = 0 \Longleftrightarrow$
- Si f est concave, alors : $f'(x_0) = 0 \Longleftrightarrow$

Remarque 5

À nouveau, cela ne fonctionne pas si x_0 est une extrémité de l'intervalle...

c) Pour approfondir une étude de fonction

S'intéresser à la convexité/concavité d'une fonction, déterminer l'équation de la tangente aux éventuels points d'inflexion, permet de préciser grandement l'allure d'un graphe !

Exercice 7

Faire l'étude complète des fonctions suivantes : domaine de définition, tableau de variation complet, extrema (locaux/globaux ?), convexité/concavité, points d'inflexion, équations des tangentes aux points d'inflexion, et enfin graphe.

1. $f : x \mapsto \ln(x)^2$. 2. $h : x \mapsto (1-x)\ln(1-x) - x\ln(x)$.

Pour finir, ajoutons ici une dernière méthode, mentionnée dans le programme, qui peut être utile lors d'une étude de fonction "avancée" :

Méthode : Asymptote oblique à une courbe représentative en $\pm\infty$.

On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est à **asymptote** à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque :

(resp.).

- Pour déterminer l'équation d'une asymptote éventuelle (disons en $+\infty$) :

$\boxed{1}$ Déterminer (si elle existe !) la limite : $a =$

$\boxed{2}$ Déterminer (si elle existe !) la limite : $b =$: on a trouvé l'asymptote.

- Pour situer la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette asymptote (disons en $+\infty$) :

Étudier le signe de (éventuellement pour x au voisinage de $+\infty$)

Exercice 8

On pose $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et donner son tableau de variations complet.
2. Déterminer la droite asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$. Situer la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette asymptote, puis dessiner l'allure du graphe de f avec son asymptote.
3. Sur ce graphe, prévoir la convexité/concavité de f, puis le vérifier par le calcul.

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Déterminer les extrema locaux d'une fonction en étudiant les points critiques.
- Montrer qu'une fonction de classe C^1 ou C^2 est convexe/concave.
- Connaître les différentes caractérisations de la convexité/concavité.
- Déterminer un point d'inflexion.

Pour suivre

- Utiliser la convexité pour démontrer des inégalités.
- Connaître le résultat concernant les extrema globaux des fonctions convexes.
- Intégrer la convexité, les points d'inflexions à une étude de fonction.

Pour les ambitieux

- Déterminer une asymptote oblique à une courbe représentative.