27

Dérivées successives, formules de Taylor et DL - Corrigé

Exercice 1 (Calcul de dérivées)

1. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ comme quotient de fonctions usuelles. Pour tout $x \neq \frac{1}{2}$, on a :

$f^{(0)}(x) = (1-2x)^{-1}, \quad f^{(1)}(x) = (-1) \times (-2) \times (1-2x)^{-2},$
$f^{(2)}(x) = (-1) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (1-2x)^{-3}, \quad f^{(3)}(x) = (-1) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-3) \times (-2)(1-2x)^{-4}$

On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = (-1) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times \ldots \times (-n) \times (-2) \times (1-2x)^{-(n+1)}$$

c'est à dire $\quad f^{(n)}(x) = 2^n n! \times (1-2x)^{-(n+1)}$. (preuve facile par récurrence)

2. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ comme quotient de fonctions usuelles.
Après calcul, on a facilement : $\quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1/2}{x-1} - \dfrac{1/2}{x+1} = \dfrac{1}{2}\left((x-1)^{-1} - (x+1)^{-1}\right)$.
C'est à dire $f = \dfrac{1}{2}(f_1 + f_2)$ en notant $f_1 : x \mapsto (x-1)^{-1}$ et $f_2 : x \mapsto (x+1)^{-1}$.
On a sans difficulté, pour tout $x \notin \{-1, 1\}$, (calcul des premiers termes, conjecture, récurrence immédiate) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_1^{(n)}(x) = (-1)^n n! \cdot (x-1)^{-(n+1)} \quad \text{et} \quad f_2^{(n)}(x) = (-1)^n n! \cdot (x+1)^{-(n+1)}.$$

Puisque par linéarité $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} = \dfrac{1}{2}\left(f_1^{(n)} + f_2^{(n)}\right)$, on obtient ensuite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ f^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2}\left((x-1)^{-(n+1)} - (x+1)^{-(n+1)}\right).$$

3. h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions usuelles.
En notant $P : x \mapsto 2x^2 - x + 3$, on a : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = P(x)\exp(x)$.
On peut donc utiliser la formule de Leibniz pour dériver le produit : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)}(x) \exp^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)}(x) \times e^x = e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)}(x).$$

Puisque P est un polynôme de degré 2, on a $P^{(k)} = 0$ dès lorsque $k \geqslant 3$. Ainsi :

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= e^x \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} P^{(k)}(x) = e^x \left(P(x) + nP'(x) + \frac{n(n-1)}{2} P''(x)\right) \\ &= e^x \left(2x^2 - x + 3 + n(4x-1) + \frac{n(n-1)}{2} 4\right) = e^x \left(2x^2 + (4n-1)x + 2n^2 - 3n + 3\right). \end{aligned}$$

Exercice 2 (Forme générale de $f^{(n)}$)

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient et composition de fonctions usuelles.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: " $\exists P_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$ ".
Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : On a $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(0)}(x) = f(x) = e^{-1/x^2} = \dfrac{P_0(x)}{x^0} e^{-1/x^2}$ en posant $P_0(X) = 1 \in \mathbb{R}[X]$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Il existe donc $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$. En dérivant cette égalité :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{P_n(x)}{x^{3n}}\right) \times e^{-1/x^2} + \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \times \frac{d}{dx}\left(e^{1/x^2}\right) \\
&= \frac{P_n'(x)x^{3n} - 3nP_n(x)x^{3n-1}}{x^{6n}} e^{-1/x^2} - \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \\
&= \left(\frac{P_n'(x)}{x^{3n}} - \frac{3nP_n(x)}{x^{3n+1}}\right) e^{-1/x^2} - \frac{2P_n(x)}{x^{3n+3}} e^{-1/x^2} \\
&= \left(\frac{x^3 P_n'(x)}{x^{3n+3}} - \frac{3nx^2 P_n(x)}{x^{3n+3}}\right) e^{-1/x^2} - \frac{2P_n(x)}{x^{3n+3}} e^{-1/x^2} \\
&= \frac{x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x) - 2P_n(x)}{x^{3n+3}} e^{-1/x^2} = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}} e^{-1/x^2}
\end{aligned}$$

en posant le polynôme $P_{n+1}(X) = X^3 P_n'(X) - 3nX^2 P_n(X) - 2P_n(X) \in \mathbb{R}[X]$.
Ceci montre $\mathcal{P}(n+1)$ et achève la récurrence.

Exercice 3 (Théorème de Rolle "itéré")

1. Faîtes un joli dessin.

2. On sait que f s'annule $n+1$ fois sur $[a,b]$: on peut donc introduire $n+1$ réels $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant b$ tels que $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n) = 0$. Ainsi, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,

$$f \text{ est continue sur } [x_i, x_{i+1}], \quad \text{dérivable sur }]x_i, x_{i+1}[\quad \text{et} \quad f(x_i) = f(x_{i+1}) \ (= 0).$$

D'après le théorème de Rolle, il existe donc un réel $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $f'(c_i) = 0$.

Ceci nous donne donc n réels distincts $c_0 < c_1 < \ldots < c_{n-1}$ tels que $f'(c_0) = f'(c_1) = \ldots = f'(c_{n-1}) = 0$.

Ainsi, f' s'annule (au moins) n fois sur $[a,b]$.

3. Il suffit d'itérer le raisonnement de la question 2.
On sait que f s'annule $n+1$ fois sur $[a,b]$, on en déduit que f' s'annule (au moins) n fois sur $[a,b]$.
Par suite, f'' s'annule (au moins) $n-1$ fois sur $[a,b]$, $f^{(3)}$ s'annule (au moins) $n-2$ fois sur $[a,b]$ etc...
Et pour finir, $f^{(n)}$ s'annule (au moins) $n-(n-1) = 1$ fois sur $[a,b]$!
Il existe donc au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 4 (Encadré par des polynômes)

1. La fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions usuelles.
On lui applique la formule de Taylor avec reste intégral en 0...

- A l'ordre 1 : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \displaystyle\int_0^x f''(t)(x-t)dt \quad$ c'est à dire :

$$e^{-x} = 1 - x + \int_0^x \underbrace{e^{-t}(x-t)}_{\geqslant 0} dt \quad \text{et donc} \quad e^{-x} \geqslant 1 - x.$$

- A l'ordre 2 : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + \displaystyle\int_0^x \frac{f^{(3)}(t)}{2}(x-t)^2 dt \quad$ c'est à dire :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \underbrace{-e^{-t}(x-t)^2}_{\leqslant 0} dt \quad \text{et donc} \quad e^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

2. La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions usuelles.
On lui applique la formule de Taylor avec reste intégrale en 0... On calcule rapidement les premières dérivées :

$$f(x) = \ln(1+x), \ \ f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \ \ f''(x) = -(1+x)^{-2} \ \ f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}, \ \ f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}.$$

- A l'ordre 2 : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + \displaystyle\int_0^x \frac{f^{(3)}(t)}{2}(x-t)^2 dt \quad$ c'est à dire :

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \underbrace{(1+t)^{-3}(x-t)^2}_{\geqslant 0} dt \quad \text{et donc} \quad \ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}.$$

• A l'ordre 3 : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \displaystyle\int_0^x \dfrac{f^{(4)}(t)}{6}(x-t)^3 dt$
c'est à dire :

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \int_0^x \underbrace{-(1+t)^{-4}(x-t)^3}_{\leqslant 0} dt \quad \text{et donc} \quad \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Exercice 5 (Des inégalités !)

1. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f : x \mapsto e^x$ à l'ordre 1 en 0.
Soit $x \in [0,1]$ fixé.

• Cherchons d'abord une constante $K > 0$ telle que $\forall t \in [0,x],\ |f^{(2)}(t)| \leqslant K$.
On a $\forall t \in [0,x],\ \left|f^{(2)}(t)\right| = e^t \leqslant e \qquad (\text{car } t \leqslant 1)$

• On a ainsi : $\left|f(x) - f(0) - f'(0)x\right| \leqslant e \cdot \dfrac{|x|^2}{2!}$ $\quad$ c'est à dire $\quad \left|e^x - 1 - x\right| \leqslant e \cdot \dfrac{x^2}{2}$.

2. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f : x \mapsto \tan(x)$ à l'ordre 2 en 0.
Soit $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ fixé.
Calculons rapidement les premières dérivées :
On a $f(t) = \tan(t)$ donc $f'(t) = 1 + \tan^2(t)$
donc $f''(t) = 2\tan(t)\tan'(t) = 2\tan(t)(1+\tan^2(t)) = 2\tan(t) + 2\tan^3(t)$
et donc $f^{(3)}(t) = 2\tan'(t) + 6\tan'(t)\tan^2(t) = 2 + 2\tan^2(t) + 6\tan^2(t) + 6\tan^4(t)$.

• Cherchons une constante $K > 0$ telle que $\forall t \in [0,x],\ |f^{(3)}(t)| \leqslant K$.
On a $\forall t \in [0,x],\ |f^{(3)}(t)| = 2 + 2\tan^2(t) + 6\tan^2(t) + 6\tan^4(t) \leqslant 2 + 2 + 6 + 6 = 16$.
(car $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ donc $|\tan(t)| \leqslant 1$)

• On a ainsi : $\left|f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} - \underbrace{f'(0)}_{=1}x - \underbrace{\dfrac{f''(0)}{2}}_{=0}x^2\right| \leqslant 14 \times \dfrac{|x|^3}{3!}$ $\quad$ c'est à dire $\left|\tan(x) - x\right| \leqslant \dfrac{8}{3}|x|^3$.

3. Soient $x, y \geqslant 1$ fixés. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ à l'ordre 2 en x.
Calculons rapidement les premières dérivées :
$f(t) = \dfrac{1}{t}$ donc $f'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$ donc $f''(t) = \dfrac{2}{t^3}$ donc $f^{(3)}(t) = -\dfrac{6}{t^4}$.

• Cherchons une constante $K > 0$ telle que $\forall t \in [x,y],\ |f^{(3)}(t)| \leqslant K$.
On a $\forall t \in [x,y],\ |f^{(3)}(t)| = \dfrac{6}{t^4} \leqslant \dfrac{6}{1} = 6 \qquad$ (car $t \geqslant 1$ puisqu'on a fixé $x, y \geqslant 1$).

• On a ainsi : $\left|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) - \dfrac{f''(x)}{2}(y-x)^2\right| \leqslant 6 \times \dfrac{|y-x|^3}{3!}$
c'est à dire $\quad \left|\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{y-x}{x^2} - \dfrac{(y-x)^2}{x^3}\right| \leqslant |y-x|^3$.

Exercice 6 (Une somme infinie célèbre)

1. Posons $f : x \mapsto \ln(1+x)$, fonction de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$.
Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on a :

$$f(x) = \ln(1+x), \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},$$
$$f^{(2)}(x) = -(1+x)^{-2}, \quad f^{(3)}(x) = (-1)\cdot(-2)\cdot(1+x)^{-3}, \quad f^{(4)}(x) = (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(1+x)^{-4}.$$

Par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(n)}(x) = (-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-(n-1))\cdot(1+x)^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\cdot(1+x)^{-n}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f à l'ordre n en 0.
Soit $x \in [0,+\infty[$ fixé.

• Cherchons une constante $K > 0$ telle que $\forall t \in [0,x],\ |f^{(n+1)}(t)| \leqslant K$.
On a $\forall t \in [0,x],\ |f^{(n+1)}(t)| = n!(1+t)^{-(n+1)} = \dfrac{n!}{(1+t)^{n+1}} \leqslant n!$
(car $1 + t \geqslant 1$ puisque $t \in [0,x]$ et on a pris $x \geqslant 0$)

• On a ainsi : $\left|f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant n! \times \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Et on a $f(0) = \ln(1) = 0$ et $\forall k \geqslant 1,\ f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ donc cela donne :

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{c'est à dire} \quad \left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

En choisissant le réel $x = 1$, on a : $\left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes (version "valeur absolue"), on déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2) \quad \text{c'est à dire} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

Exercice 7 (Expression "explicite" de $\cos(x)$)

1. On a :

$$\cos^{(0)} = \cos,\ \ \cos^{(1)} = -\sin,\ \ \cos^{(2)} = -\cos,\ \ \cos^{(3)} = \sin,\ \ \cos^{(4)} = \cos\,.$$

De là, par récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ \cos^{(4k)} = \cos,\ \ \cos^{(4k+1)} = -\sin,\ \ \cos^{(4k+2)} = -\cos,\ \ \cos^{(4k+3)} = \sin\,.$$

Ainsi, on voit que $\forall j \in \mathbb{N},\ \cos^{(2j+1)}(0) = 0$ et $\cos^{(2j)} = (-1)^j$.

2. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction cos à l'ordre $2n$ en 0. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
Pour tout $t \in [0, x]$, on a bien-sûr $|\cos^{(2n+1)}(t)| \leqslant 1$ (puisque $\cos^{(n)} = \pm\sin$).

Ainsi : $\left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \leqslant 1 \cdot \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Au vu de l'étude menée dans la question précédente, tous les termes impairs dans la somme sont nuls :

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{j=0}^{n} \frac{\cos^{(2j)}(0)}{(2j)!} x^{2j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j}.$$

Ainsi, on a bien : $\left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, il suffit de passer à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'inégalité précédente.
Par croissance comparée, on a évidemment $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$.

Le théorème des gendarmes nous apprend donc que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x)$

c'est à dire que $\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$.

Exercice 8 (Démonstration de Taylor-Young)

1. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f à l'ordre n en a. Soit $x \in [\alpha, \beta]$ fixé.
Il existe bien une certaine constante $K > 0$, (indépendante de x) telle que $\forall t \in [a, x],\ |f^{(n+1)}(t)| \leqslant K$.
Il suffit de choisir par exemple $K = \max_{t\in[\alpha,\beta]} \left|f^{(n+1)}(t)\right|$.
Ce maximum existe bien, car la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[\alpha, \beta]$.
(toute fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes)

L'inégalité de Taylor-Lagrange nous apprend bien que $\left|f(x) - P_n(x)\right| \leqslant K \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$
et c'est valable pour tout $x \in [\alpha, \beta]$.

2. Montrer que $f(x) - P_n(x) \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^n\right)$ revient à montrer que $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0$. ($n$ est fixé ici)

L'inégalité précédente nous donne : $\forall x \in [\alpha, \beta],\ \ \left|\frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n}\right| \leqslant K \frac{|x-a|}{(n+1)!}$ (avec K indépendante de x).

Puisque $\lim_{x\to a} K\dfrac{|x-a|}{(n+1)!} = 0$, le théorème des gendarmes nous apprend que $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-P_n(x)}{(x-a)^n} = 0$, d'où le résultat.

Exercice 9 (Calcul de DL)

Tous les "petits o" de cet exercice sont au voisinage de 0.

(a) On sait que $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ et

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}x^3 + o(x^3) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).$$

Ainsi, $\cos(x) - \sqrt{1+x} = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)$.

(b) On sait que $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$ et $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$ donc

$$e^x\sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

(c) On sait que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ donc

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \ln(1+x) \times \frac{1}{1+x} = \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right) = x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2).$$

(d) On sait que $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ donc $e^x - 1 = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et donc

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

(e) On sait que $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)$
et donc $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)$.
Ainsi $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x + \dfrac{1}{8}x^3 + o(x^3)$ et donc

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2x} = \frac{x + \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}x^2 + o(x^2).$$

(f) On sait que $\sin(y) = y - \dfrac{y^3}{6} + o(y^3)$ donc $\sin(3x) = 3x - \dfrac{(3x)^3}{6} + o(x^3) = 3x - \dfrac{9x^3}{2} + o(x^3)$.

(g) On sait que $\ln(1+y) = y - \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y^3}{3} + o(y^3)$
donc $\ln(1-x^3) = -x^3 - \dfrac{(-x^3)^2}{2} + \dfrac{(-x^3)^3}{3} + o(x^9) = -x^3 - \dfrac{x^6}{2} + o(x^8)$.

Exercice 10 (Se ramener à zéro)

1. Calculer le DL_2 de $\dfrac{3}{x}$ quand $x \to 2$ revient à calculer le DL_2 de $\dfrac{3}{2+y}$ quand $y \to 0$.

$$\frac{3}{2+y} = \frac{3}{2(1+\frac{y}{2})} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{1+\frac{y}{2}} \underset{y\to 0}{=} \frac{3}{2}\left(1 - \frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + o(y^2)\right) \underset{y\to 0}{=} \frac{3}{2} - \frac{3}{4}y + \frac{3}{8}y^2 + o(y^2).$$

Ainsi (en posant $x = 2+y$, c'est à dire $y = x-2$) :

$$\frac{3}{x} \underset{x\to 2}{=} \frac{3}{2} - \frac{3}{4}(x-2) + \frac{3}{8}(x-2)^2 + o((x-2)^2).$$

---

2. Calculer le DL_3 de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ quand $x \to 1$ revient à calculer le DL_3 de $\dfrac{\ln(1+y)}{1+y}$ quand $y \to 0$.

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+y)}{1+y} = \ln(1+y) \times \frac{1}{1+y} &\underset{y\to 0}{=} \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^2)\right)\left(1 - y + y^2 - y^3 + o(y^3)\right) \\ &\underset{y\to 0}{=} y - \frac{3}{2}y^2 + \frac{11}{6}y^3 + o(y^3).\end{aligned}$$

Ainsi (en posant $x = 1 + y$, c'est à dire $y = x - 1$) :

$$\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to 1}{=} (x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

Exercice 11 (Changement de variable corsé)

1. On a $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

2. C'est en fait ce qu'on pourrait appeler une "composition de DL" :

$$\begin{aligned}\ln(1+\sin(x)) &\underset{x\to 0}{=} \sin(x) - \frac{1}{2}\sin(x)^2 + \frac{1}{3}\sin(x)^3 + o(\sin(x)^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 + o(x^3)\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

(On a "développé" les expressions au carré et au cube en ne conservant que les termes d'ordre x^3 au maximum)

Exercice 12 (Pour une fois...)

Posons $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

La formule de Taylor-Young nous donne : $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$.

On calcule ces coefficients :

- $f(x) = \ln(1+e^x)$ donc $f(0) = \ln(2)$,
- $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ donc $f'(0) = \dfrac{1}{2}$,
- $f''(x) = \dfrac{e^x(1+e^x) - (e^x)(e^x)}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ donc $f''(0) = \frac{1}{4}$.

Ainsi : $\ln(1+e^x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$.

Exercice 13 (DL de $\tan$ malin !)

1. On sait que tan est de classe C^∞ au voisinage de 0 (par exemple sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). Ainsi, d'après la formule de Taylor-Young, tan admet un DL à n'importe quel ordre en 0, en particulier un DL à l'ordre 5.
Celui-ci est donné par :

$$\tan(x) = \underbrace{\tan(0)}_{=0} + \tan'(0)x + \underbrace{\frac{\tan''(0)}{2}}_{=0}x^2 + \frac{\tan^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \underbrace{\frac{\tan^{(4)}(0)}{4!}}_{=0}x^4 + \frac{\tan^{(5)}(0)}{5!}x^5 + o(x^5).$$

De plus, puisque tan est une fonction impaire, ce DL ne comporte que des puissances impaires !

On a donc bien : $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$ avec $a = \tan'(0)$, $b = \dfrac{\tan^{(3)}(0)}{3!}$, $c = \dfrac{\tan^{(5)}(0)}{5!}$.

2. De le même façon, d'après la formule de Taylor-Young, $\tan'$ admet le DL à l'ordre 4 en 0 :

$$\tan'(x) \underset{x\to 0}{=} (\tan')(0) + (\tan')'(0)x + \frac{(\tan')^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{(\tan')^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{(\tan')^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4)$$

---

c'est à dire :

$$\tan'(x) \underset{x\to 0}{=} \tan'(0) + \tan''(0) + \frac{\tan^{(3)}(0)}{2!}x^2 + \frac{\tan^{(4)}(0)}{3!}x^3 + \frac{\tan^{(5)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4).$$

On a déjà vu dans la question précédente que $\tan''(0) = 0$ et $\tan^{(4)}(0) = 0$.
De plus, $\tan'(0) = a$, $\tan^{(3)}(0) = 3! \times b$ et $\tan^{(5)}(0) = 5! \times c$. En remplaçant, on obtient bien :

$$\tan'(x) \underset{x\to 0}{=} a + 3bx^2 + 5cx^4 + o(x^4).$$

3. On sait que $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$. Ainsi, au voisinage de 0, ceci donne

$$a + 3bx^2 + 5cx^4 + o(x^4) \underset{x\to 0}{=} 1 + (ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5))^2$$

c'est à dire

$$a + 3bx^2 + 5cx^4 + o(x^4) \underset{x\to 0}{=} 1 + a^2x^2 + 2abx^4 + o(x^4).$$

Par unicité des coefficient d'un DL, on peut identifier : $\begin{cases} a = 1 \\ 3b = a^2 \\ 5c = 2ab \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{3} \\ c = \frac{2}{15} \end{cases}$

On obtient ainsi, pour finir, le DL à l'ordre 5 en 0 de tan : $\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

Exercice 14 (Calcul de limites)

1. On a $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ c'est à dire $\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.
De plus, $(1+x)^{1/3} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{3}x + o(x)$ donc $(1+x)^{1/3} - 1 \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x}{3} + o(x)$ c'est à dire $(1+x)^{1/3} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{3}$.
On en déduit que $\dfrac{\ln(1+x) - x}{(1+x)^{1/3} - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x}{3}} = \dfrac{3x}{2} \to 0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{(1+x)^{1/3} - 1} = 0$.

2. $\dfrac{\sin(x)}{x} - e^x \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x + o(x^2)}{x} - (1 + x + o(x)) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x) - 1 - x + o(x) \underset{x\to 0}{=} -x + o(x)$ donc $\dfrac{\sin(x)}{x} - e^x \underset{x\to 0}{\sim} -x$.
$e^x + e^{-x} - 2 \underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \left(1 - x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 2 \underset{x\to 0}{=} x^2 + o(x^2)$ donc $e^x + e^{-x} - 2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.
On en déduit $\dfrac{\frac{\sin(x)}{x} - e^x}{e^x + e^{-x} - 2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x}{x^2} = -\dfrac{1}{x}$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - e^x}{e^x + e^{-x} - 2} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - e^x}{e^x + e^{-x} - 2} = +\infty$.

3. $n + n^2(\ln(n) - \ln(n+1)) = n + n^2 \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = n - n^2 \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = n - n^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
Puisque $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ on a $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to +\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
On en déduit $n - n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to +\infty}{=} n - n^2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to +\infty}{=} -\dfrac{1}{2} + o(1)$.
Ceci montre que $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \left(n + n^2(\ln(n) - \ln(n+1))\right) = \lim_{n\to +\infty} \left(n - n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}$.

4. $\dfrac{n}{\sin(\frac{1}{n})} - \dfrac{n}{\tan(\frac{1}{n})} = \dfrac{n\tan(\frac{1}{n}) - n\sin(\frac{1}{n})}{\sin(\frac{1}{n})\tan(\frac{1}{n})} = \dfrac{n\left(\tan(\frac{1}{n}) - \sin(\frac{1}{n})\right)}{\sin(\frac{1}{n})\tan(\frac{1}{n})}$.
On a $\tan(\frac{1}{n}) - \sin(\frac{1}{n}) \underset{n\to +\infty}{=} \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right) - \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{6n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) \underset{n\to +\infty}{=} \dfrac{1}{6n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.
Ainsi $\tan(\frac{1}{n}) - \sin(\frac{1}{n}) \underset{n\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{6n^3}$.
On en déduit $\dfrac{n}{\sin(\frac{1}{n})} - \dfrac{n}{\tan(\frac{1}{n})} = \dfrac{n\left(\tan(\frac{1}{n}) - \sin(\frac{1}{n})\right)}{\sin(\frac{1}{n})\tan(\frac{1}{n})} \underset{n\to +\infty}{\sim} \dfrac{n \times \frac{1}{6n^3}}{\frac{1}{n} \times \frac{1}{n}} = \dfrac{1}{6}$.
Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} \left(\frac{n}{\sin(\frac{1}{n})} - \frac{n}{\tan(\frac{1}{n})}\right) = \frac{1}{6}$.

Exercice 15 (Calcul d'équivalents)

1. $\sqrt{1+2x}-\cos(x)-\sin(x) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{(2x)}{2}-\frac{(2x)^2}{8}+\frac{(2x)^3}{16}+o(x^3)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)$
$\underset{x\to 0}{=} \frac{2}{3}x^3+o(x^3)$. Ainsi $\sqrt{1+2x}-\cos(x)-\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{3}x^3$.

2. Posons $y=\frac{1}{x}$ (et donc $x=\frac{1}{y}$). On a :

$$e^{1/x}-\frac{x(x-1)}{1+x^2}=e^y-\frac{\frac{1}{y}(\frac{1}{y}-1)}{1+\frac{1}{y^2}}\times\frac{y^2}{y^2}=e^y-\frac{1-y}{y^2+1}=e^y-(1-y)\times\frac{1}{1+y^2}.$$

On a $e^y \underset{y\to 0}{=} 1+y+o(y)$ et $\frac{1}{1+y^2} \underset{y\to 0}{=} 1-y^2+o(y^2)=1+o(y)$.
Ainsi $e^y-(1-y)\times\frac{1}{1+y^2} \underset{y\to 0}{=} 1+y+o(y)-(1-y)(1+o(y))=1+y-1+y+o(y)=2y+o(y)$.
En revenant à $y=\frac{1}{x}$, on obtient :

$$e^{1/x}-\frac{x(x-1)}{1+x^2} \underset{x\to+\infty}{=} \frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 16 ("DL en $+\infty$")

1. Puisque $e^y \underset{y\to 0}{=} 1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2)$ on a $e^{1/x} \underset{x\to 0^+}{=} 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ainsi :

$$f(x)=(x+1)e^{1/x} \underset{x\to+\infty}{=} (x+1)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=(x+1)+\frac{x+1}{x}+\frac{x+1}{2x^2}+o\left(\frac{x+1}{x^2}\right)$$
$$=x+2+\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Notons que $\frac{x+1}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$ donc $o\left(\frac{x+1}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. Pour $x>0$, on peut réécrire :

$$g(x)=\sqrt{x^4(1+\frac{1}{x})}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

On a $\sqrt{1+y} \underset{y\to 0}{=} 1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{8}+o(y^2)$ et $\sin(y) \underset{y\to 0}{=} y-\frac{y^3}{6}+o(y^3)$ donc :

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}}\times\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$
$$\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{7}{24x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Ainsi, finalement :

$$g(x)=x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{7}{24x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x+\frac{1}{2}-\frac{7}{24x}+o\left(\underset{x\to 0}{=}\frac{1}{x^2}\right).$$

On obtient donc $a=1$, $b=\frac{1}{2}$ et $c=-\frac{7}{24}$.

Exercice 17 (DL et position de la tangente)

1. $f(x)=\ln(1+x)\times(1+x^2)^{-1/2}-\cos(x)$ donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} (x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3))\times(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))$$
$$\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)x^3+o(x^3)-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)) \underset{x\to 0}{=} -1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3).$$

2. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0 est donc $y = -1 + x$. De plus,

$$f(x) - (-1+x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{donc} \quad f(x) - (-1+x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}.$$

On en déduit que f traverse sa tangente en 0. Précisément :
$f(x) - (-1+x) > 0$, donc $f(x) > -1 + x$ "au voisinage de 0^-" et $f(x) - (-1+x) < 0$, donc $f(x) < -1 + x$ "au voisinage de 0^+".

Exercice 18 (DL et dérivabilité)

1. f est évidemment de classe C^1 (et même C^∞) sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et quotient de fonctions usuelles.
On a :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \times x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

2. On sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$.
L'existence de ce DL à l'ordre 1 implique que f est dérivable en 0 et : $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

2. Pour résumer, on a vu que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
Pour montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, il reste seulement à vérifier que f' est continue en 0, c'est à dire que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0)$.
On doit donc vérifier que : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} = -\frac{1}{2}$.
On sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc

$$x - (1+x)\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - (1+x)(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \ \text{ donc } \ x - (1+x)\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

On a donc $\dfrac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x^2 \times 1} = -\dfrac{1}{2}$, d'où le résultat !