Samedi 27 Septembre 2025

Devoir Sur Table n°1 – Corrigé

Exercice 1 : Récurrence et produits

1. On a $u_1 = (1+\frac{1}{2})u_2$ donc $u_1 = \dfrac{3}{2}u_2$ c'est à dire $u_2 = \frac{2}{3}u_1$ donc $\boxed{u_2 = \dfrac{2}{3}}$.

   Puis $u_2 = (1+\frac{1}{4})u_3$ donc $u_2 = \dfrac{5}{4}u_3$ c'est à dire $u_3 = \frac{4}{5}u_2$ donc $\boxed{u_2 = \dfrac{8}{15}}$.

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 2, \quad u_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$.

   Initialisation : On a bien $u_2 = \dfrac{2}{3} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ car $P_2 = 2$ et $Q_2 = 3$.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 2$ fixé. Supposons que $u_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$ et montrons que $u_{n+1} = \dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$.

   On sait que $u_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)u_{n+1}$ c'est à dire $\dfrac{P_n}{Q_n} = \frac{2n+1}{2n} \times u_{n+1}$.

   On a donc $u_{n+1} = \dfrac{P_n}{Q_n} \times \dfrac{2n}{2n+1} = \dfrac{P_n \times 2n}{Q_n \times (2n+1)}$.

   Or : $P_n \times 2n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(2i) \times (2n) = \prod_{i=1}^{n}(2i) = P_{n+1}$

   et : $Q_n \times (2n+1) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(2i+1) \times (2n+1) = \prod_{i=1}^{n}(2i+1) = Q_{n+1}$.

   On a donc montré $u_{n+1} = \dfrac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, $\boxed{\text{ce qui achève la récurrence}}$.

3. Soit $n \geqslant 2$ fixé.

   (a) On calcule : $P_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(2i) = 2^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1} i = \boxed{2^{n-1}(n-1)!}$.

   (b) Il faut remarque que

   $$P_n \times Q_n = \Big(2 \times 4 \times \ldots \times (2n-2)\Big) \times \Big(3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)\Big) = 2 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)$$

   donc $\boxed{P_n \times Q_n = (2n-1)!}$.

   (c) On a $P_n \times Q_n = (2n-1)!$ donc $Q_n = \dfrac{(2n-1)!}{P_n}$ c'est à dire $\boxed{Q_n = \dfrac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}}$.

4. Soit $n \geqslant 2$. On a vu en question 2. que $u_n = \dfrac{P_n}{Q_n}$.

   En remplaçant par les expressions que l'on a déterminé, on obtient :

   $$u_n = P_n \times \frac{1}{Q_n} = 2^{n-1}(n-1)! \times \frac{2^{n-1}(n-1)!}{(2n-1)!} = \frac{(2^{n-1})^2((n-1)!)^2}{(2n-1)!}.$$

   Ainsi, finalement : $\boxed{u_n = \dfrac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-1)!}}$.

Exercice 2 : Etude de deux bijections

1. L'expression $f(t) = \ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$ est bien défini si et seulement si :

   $$t \neq 1 \text{ et } \frac{1+t}{1-t} > 0 \iff (1+t>0 \text{ et } 1-t>0) \text{ ou } (1+t<0 \text{ et } 1-t<0) \iff -1<t<1$$

   Ainsi le domaine de définition de f est $\boxed{I =]-1, 1[}$.

   On considère ainsi, dans la suite, l'application $f : I \to \mathbb{R}$.

2. Ne pas oublier d'importer la bibliothèque numpy !

```
import numpy as np
def f(t) :
    if -1 < t and t < 1 :
        y = np.log( (1+t)/(1-t) )
        return y
    else :
        print("Erreur !")
```

3. Montrons que $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est bijective et déterminons f^{-1}.
Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a les équivalences :

$$y = f(x) \iff y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \iff e^y = \frac{1+x}{1-x} \iff (1-x)e^y = 1+x$$
$$\iff e^y - xe^y = 1+x \iff e^y - 1 = x(1+e^y) \iff x = \frac{e^y-1}{e^y+1}.$$

Ceci montre que $\boxed{f \text{ est bijective et } f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ y & \mapsto & \dfrac{e^y-1}{e^y+1} \end{array}}$.

4. Montrons que $g : \begin{array}{ccc}]\frac{1}{2}, +\infty[& \to &]-\infty, 1[\\ x & \mapsto & 4x(1-x) \end{array}$ bijective et déterminons g^{-1}.
Soit $y \in]-\infty, 1[$ fixé. Pour tout $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$, on a les équivalences suivantes :

$$y = g(x) \iff y = 4x(1-x) \iff y = 4x - 4x^2 \iff 4x^2 - 4x + y = 0.$$

On résout cette équation polynomiale (d'inconnue x).
Le discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4y = 16 - 16y = 16(1-y) > 0$ car $y < 1$.
L'équation admet donc les deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{16(1-y)}}{8} = \frac{1 - \sqrt{1-y}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{16(1-y)}}{8} = \frac{1 + \sqrt{1-y}}{2}.$$

Or, on cherche ici exclusivement une solution $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$.
Puisque $\sqrt{1-y} > 0$ (car $y < 1$), il est clair que $x_1 < \frac{1}{2}$ et $x_2 > \frac{1}{2}$.
x_2 est donc la seule solution qui convient.
Pour conclure les équivalences, on obtient : $y = g(x) \iff x = \dfrac{1+\sqrt{1-y}}{2}$.

Ceci montre que $\boxed{g \text{ est bijective de réciproque } g^{-1} : \begin{array}{ccc}]-\infty, 1[& \to &]\frac{1}{2}, +\infty[\\ y & \mapsto & \dfrac{1+\sqrt{1-y}}{2} \end{array}}$.

5. Pour que $h(x) = f(g(x))$ ait un sens, il faut que $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$ et que $g(x) \in]-1,1[$.
Etudions la fonction g sur l'intervalle $]\frac{1}{2}, +\infty[$. g y est dérivable et :

$$\forall x \in]\frac{1}{2}, +\infty[, \quad g'(x) = 4 - 8x = 8(\frac{1}{2} - x) < 0.$$

Ainsi, on obtient facilement le tableau de variations :

x	$1/2$	$+\infty$
$g(x)$	1 ↘	$-\infty$

D'après le TVI, on voit qu'il existe un unique $\alpha \in]1/2, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = -1$.
On aura alors $g(x) \in]-1,1[$ exactement sur l'intervalle $]\frac{1}{2}, \alpha[$.

Déterminons pour finir la valeur de ce α. On résout pour cela l'équation :

$$g(x) = -1 \iff 4x - 4x^2 = -1 \iff 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 16 + 16 = 2 \times 16 > 0$.
On a donc deux solutions : $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{2 \times 16}}{8} = \dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

et on conserve seulement celle qui est supérieur à 1/2, soit $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Conclusion : $\boxed{\text{le domaine de définition de } h = f \circ g \text{ est }]\tfrac{1}{2}, \alpha[\text{, avec } \alpha = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

6. On peut s'épargner des calculs car on a déjà déterminé les réciproques de f et g.
On a $h :]\frac{1}{2}, \alpha[\to \mathbb{R}$. Pour tous $y \in \mathbb{R}$ et $x \in]\frac{1}{2}, \alpha[$, on a les équivalences :

$$y = h(x) \iff y = f(g(x)) \iff f^{-1}(y) = g(x) \iff x = g^{-1}(f^{-1}(y))$$

(Essentiellement, on a $h = f \circ g$ donc on retrouve $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.)
Ainsi $\boxed{h \text{ est bijective}}$, et sa réciproque $h^{-1} : \mathbb{R} \to]\frac{1}{2}, \alpha[$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, \ \ h^{-1}(y) = g^{-1}(f^{-1}(y)) = g^{-1}\left(\frac{e^y - 1}{e^y + 1}\right) &= \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{e^y - 1}{e^y + 1}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{e^y + 1} + \sqrt{e^y + 1 - (e^y - 1)}}{2\sqrt{e^y + 1}} = \frac{\sqrt{e^y + 1} + \sqrt{2}}{2\sqrt{e^y + 1}} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient bien : $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \ h^{-1}(y) = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + e^y}}{2\sqrt{1 + e^y}}}$.

Exercice 3 : Formule d'Abel pour le calcul de somme

1. (a) On calcule :

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k(b_{k+1} - b_k) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \Big(a_k(b_{k+1} - b_k) + (a_{k+1} - a_k) b_{k+1}\Big) = \sum_{k=1}^{n-1} \Big(a_{k+1} b_{k+1} - a_k b_k\Big).$$

On reconnait une somme télescopique, qui vaut $a_n b_n - a_1 b_1$.

Ainsi : $\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} a_k(b_{k+1} - b_k) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) b_{k+1} = a_n b_n - a_1 b_1}$.

(b) Il suffit de "passer" la deuxième somme de l'autre côté de l'égalité pour obtenir la formule d'Abel :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} a_k(b_{k+1} - b_k) = (a_n b_n - a_1 b_1) - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) b_{k+1}.}$$

2. (a) La formule d'Abel (en choisissant $a_k = k$ et $b_k = (-1)^k$) donne :

$$\begin{aligned} T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k\Big((-1)^{k+1} - (-1)^k\Big) &= n(-1)^n - (-1) - \sum_{k=1}^{n-1} (k + 1 - k)(-1)^{k+1} \\ &= (-1)^n n + 1 - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} = (-1)^n n + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+2} \\ &= (-1)^n n + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k = (-1)^n n + 1 + \frac{-1 - (-1)^n}{2} \\ &= (-1)^n n + 1 - \frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{2} = (-1)^n n + \frac{1 - (-1)^n}{2} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{T_n = (-1)^n n + \dfrac{1 - (-1)^n}{2}}$.

(b) Par ailleurs,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k\Big((-1)^{k+1} - (-1)^k\Big) = \sum_{k=1}^{n-1} k(-1)^k((-1)-1) = \boxed{-2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k k}.$$

On note ensuite que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k - (-1)^n n = S_n - (-1)^n n$.

Il en résulte que $T_n = -2(S_n - (-1)^n n)$ soit $\boxed{T_n = -2S_n + 2(-1)^n n}$.

(c) On vient de voir que $T_n = -2S_n + 2(-1)^n n$ donc $S_n = -\dfrac{1}{2}T_n + (-1)^n n$.

En rempla !ant T_n par son expression du 2.(a) :

$$S_n = -\frac{1}{2}\left((-1)^n n + \frac{1-(-1)^n}{2}\right) + (-1)^n n = \boxed{\frac{(-1)^n n}{2} + \frac{(-1)^n}{4} - \frac{1}{4}}$$

(d)
```
def somme_alterne(n) :
  S = (-1)**n * n / 2 + (-1)**n / 4 - 1 /4
  return S
```

3. (a) $A_n(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k = \boxed{\frac{(n-1)n}{2}}$.

(b) Soit $x \neq 1$. On a :

$$(x-1)A_n(x) = (x-1)\sum_{k=1}^{n-1} kx^k = \sum_{k=1}^{n-1} k(x-1)x^k = \sum_{k=1}^{n-1} k(x^{k+1} - x^k).$$

On applique la formule d'Abel (avec $a_k = k$ et $b_k = x^k$) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
(x-1)A_n(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} k(x^{k+1} - x^k) = (nx^n - x) - \sum_{k=1}^{n-1}(k+1-k)x^{k+1} \\
&= (nx^n - x) - \sum_{k=1}^{n-1} x^{k+1} = (nx^n - x) - \sum_{i=2}^{n} x^i \\
&= (nx^n - x) - \frac{x^2 - x^{n+1}}{1-x} = (nx^n - x) + \frac{x^2 - x^{n+1}}{x-1} \\
&= \frac{(x-1)(nx^n - x) + x^2 - x^{n+1}}{x-1} \\
&= \frac{nx^{n+1} - x^2 - nx^n + x + x^2 - x^{n+1}}{x-1} \\
&= \frac{(n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{x-1}.
\end{aligned}$$

Il reste à diviser cela par $(x-1)$ pour obtenir : $\boxed{A_n(x) = \dfrac{(n-1)x^{n+1} - nx^n + x}{(x-1)^2}}$.

(c)
```
def somme_A(n,x) :
  a = (n-1) * x **(n+1) - n *x**n + x
  b = (x-1)**2
  return (a/b)
```

⋆⋆⋆ Fin du sujet ⋆⋆⋆