

## Devoir Maison n°2 – Corrigé

1. (a) Le support de  $X_1$  est  $X_1(\Omega) = \llbracket 0, p \rrbracket$ . Par ailleurs on a :

- $[X_1 = 0] = \overline{A_1}$ .
- Pour  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ ,  $[X_1 = k] = A_1 \cap \dots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}$ .
- $[X_1 = p] = A_1 \cap \dots \cap A_p$ .

(b) Au vu de l'énoncé, les événements  $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$  sont indépendants et  $P(A_i) = \frac{1}{2}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . On en déduit :

- $P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$ .
- Pour  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ ,  $P(X_1 = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$ .
- $P(X_1 = p) = \frac{1}{2^p}$ .

L'évènement "Tous les joueurs survivent au jeu" correspond à l'évènement  $[X_1 = p]$  : si le joueur 1 trouve le bon trajet pour rejoindre l'arrivée, tous les joueurs suivants peuvent suivre sereinement ce trajet également !

La probabilité que tous les joueurs survivent est donc  $\frac{1}{2^p}$ .

2. (a) • D'abord, si l'évènement  $[X_n = p]$  est réalisé, le joueur numéro  $(n+1)$  a vu le joueur numéro  $n$  avancer jusqu'à l'arrivée : il connaît donc lui-même le chemin pour rejoindre l'arrivée !

On a donc  $P_{[X_n=p]}(X_{n+1} = p) = 1$ .

- Si l'évènement  $[X_n = j]$  est réalisé (pour un  $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ ), le joueur numéro  $(n+1)$  a vu le joueur numéro  $n$  avancer jusqu'à la  $j$ -ième plateforme, puis tomber à la  $(j+1)$ -ième plateforme. Il connaît donc le bon trajet pour rejoindre la  $(j+1)$ -ième plateforme sans problème !

Ainsi pour  $0 \leq k \leq j$ ,  $P_{[X_n=j]}(X_{n+1} = k) = 0$ .

À partir de la  $(j+1)$ -ième plateforme, le joueur  $(n+1)$  a, à chaque saut, une chance sur deux de choisir la bonne dalle. Pour que  $X_{n+1} = k$  (avec  $j+1 \leq k < p$ ), il faut donc réaliser exactement  $k - (j+1)$  bons choix, puis 1 mauvais choix.

Ainsi pour  $j < k < p$ ,  $P_{[X_n=j]}(X_{n+1} = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-(j+1)} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j}$ .

Enfin, à partir de la  $(j+1)$ -ième plateforme, pour rejoindre la plateforme d'arrivée, le joueur  $(n+1)$  doit réaliser exactement  $p - (j+1)$  bons choix.

Ainsi  $P_{[X_n=j]}(X_{n+1} = p) = \left(\frac{1}{2}\right)^{p-j-1}$ .

(b) On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements  $([X_n = j])_{0 \leq j \leq p}$  :

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{j=0}^p P(X_n = j) P_{[X_n=j]}(X_{n+1} = k)$$

- Pour  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ , on sait que  $P_{[X_n=j]}(X_{n+1} = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \geq k \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j} & \text{si } j < k \end{cases}$  donc on obtient :

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{j=0}^{k-1} P(X_n = j) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j} = \sum_{j=0}^{k-1} P(X_n = j) \frac{2^j}{2^k} = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k-1} 2^j P(X_n = j).$$

- Pour  $k = p$ , on sait que  $P_{[X_n=j]}(X_{n+1} = p) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{p-j-1} & \text{si } j < p \\ 1 & \text{si } j = p \end{cases}$  donc on obtient :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = p) &= \sum_{j=0}^{p-1} P(X_n = j) \left(\frac{1}{2}\right)^{p-j-1} + P(X_n = p) \times 1 \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} P(X_n = j) \frac{2^j}{2^{p-1}} + P(X_n = p) = \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{j=0}^{p-1} 2^j P(X_n = j) + P(X_n = p). \end{aligned}$$

3.

```

import numpy as np
def loi_X1() :

    P= (1/2)**np.arange(1,p+2)

    P[p] = (1/2)**p

    return(P)

def iteration(P) :
    Q=np.zeros(p+1)
    for k in range(p+1) :
        S=0
        for j in range(k) :

            S = S + (2**j)*P[j]

        if k < p :
            Q[k] = (1/2**k)*S
        else :
            Q[k] = (1/2**(p-1))*S + P[p]
    return(Q)

def loi_X(n) :

    P = loi_X1()

    for k in range(n-1) :

        P = iteration(P)

    return(P)

```

4. (a) Pour  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , posons  $\mathcal{P}(n) : \forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{n-1}$ .

Montrons par récurrence que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ .

- Initialisation : pour  $n = 1$ ,  $\mathcal{P}(1)$  s'écrit :  $\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, P(X_1 = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$ .

C'est bien vrai d'après la question 1.(b).

- Hérédité : soit  $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$ , montrons  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ , d'après 2.(b), on a :

$$\begin{aligned}
 P(X_{n+1} = k) &= \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k-1} 2^j P(X_n = j) = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k-1} 2^j \frac{1}{2^{j+1}} \binom{j}{n-1} \quad \text{d'après } \mathcal{P}(n) \\
 &= \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{j}{n-1} = \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{j=n-1}^{k-1} \binom{j}{n-1} = \frac{1}{2^{k+1}} \binom{(k-1)+1}{(n-1)+1} \quad \text{d'après la formule de Pascal} \\
 &= \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k}{n}. \quad \text{On a bien vérifié } \mathcal{P}(n+1), \text{ ce qui achève la récurrence.}
 \end{aligned}$$

(b) Pour tout  $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ , on a, d'après 2.(b) :

$$\begin{aligned}
 P(X_{n+1} = p) &= \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{j=0}^{p-1} 2^j P(X_n = j) + P(X_n = p) = \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{j=0}^{p-1} 2^j \frac{1}{2^{j+1}} \binom{j}{n-1} + P(X_n = p) \quad \text{d'après 4.(a)} \\
 &= \frac{1}{2^p} \sum_{j=0}^{p-1} \binom{j}{n-1} + P(X_n = p) = \frac{1}{2^p} \sum_{j=n-1}^{p-1} \binom{j}{n-1} + P(X_n = p) \\
 &= \frac{1}{2^p} \binom{p}{n} + P(X_n = p) \quad \text{d'après la formule de Pascal.}
 \end{aligned}$$

On a donc 
$$P(X_{n+1} = p) - P(X_n = p) = \frac{1}{2^p} \binom{p}{n}.$$

5. (a) Pour  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , justifions l'égalité  $[S > k] = [X_{N-k} = p]$  :

• Montrons l'inclusion  $[X_{N-k} = p] \subset [S > k]$ .

Si l'évènement  $[X_{N-k} = p]$  est réalisé, le joueur numéro  $(N - k)$  survit au jeu et rejoint l'arrivée. Dès lors, tous les joueurs suivants savent également rejoindre l'arrivée ! On sait donc que (au moins) les joueurs portant les numéros  $(N - k)$  à  $N$  survivent. Cela fait (au moins)  $k + 1$  survivants : l'évènement  $[S > k]$  est réalisé.

• Montrons l'inclusion  $[S > k] \subset [X_{N-k} = p]$ .

Si l'évènement  $[S > k]$  est réalisé, il y a au moins  $k + 1$  survivants. Ainsi, les  $(k + 1)$  derniers joueurs (au moins) parviennent à l'arrivée ! En particulier, le joueur numéro  $(N - k)$  parvient à l'arrivée : l'évènement  $[X_{N-k} = p]$  est réalisé.

Par suite, on peut noter que  $[S = k] = [S > k-1] \setminus [S > k]$ , c'est à dire :  $[S = k] = [X_{N-k+1} = p] \setminus [X_{N-k} = p]$ .

(b) Puisque le support de  $S$  est  $S(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket$ , on a  $E(S) = \sum_{k=0}^N kP(S = k) = \sum_{k=1}^N kP(S = k)$ .

D'après 5.(a), pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $P(S = k) = P(X_{N-k+1} = p) - P(X_{N-k} = p)$

et donc, d'après 4.(b),  $P(S = k) = \frac{1}{2^p} \binom{p}{N-k}$ .

En remplaçant dans la somme, on obtient bien :  $E(S) = \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^N k \binom{p}{N-k}$ .

6. Image me représentant le plus après avoir conçu ce sujet :

