Samedi 30 Septembre 2023

Devoir Sur Table n°1 – Corrigé

Exercice 1 : Calculs de sommes et produits

1. (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3k(k+1) = 3\sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right) = 3\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$

$\displaystyle = 3\frac{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{6} = 3\frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = 3\frac{n(n+1)2(n+2)}{6} = \boxed{n(n+1)(n+2)}$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{2k+1} = \sum_{k=1}^{n}(2^2)^k \times 2 = 2\sum_{k=1}^{n} 4^k = 2\frac{4-4^{n+1}}{1-4} = \frac{2}{3}(4^{n+1}-4) = \boxed{\frac{8}{3}(4^n-1)}$.

(c) $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n}(3k) = 3^{2n-(n+1)+1}\prod_{k=n+1}^{2n} k = 3^n((n+1)\times(n+2)\times\ldots\times(2n))$

$\displaystyle = 3^n\frac{1\times 2\times\ldots\times n\times(n+1)\times(n+2)\times\ldots\times(2n)}{1\times 2\times\ldots\times n} = \boxed{3^n\frac{(2n)!}{n!}}$.

(d) $\displaystyle\prod_{k=3}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=3}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=3}^{n}\frac{(k+1)(k-1)}{k^2} = \prod_{k=3}^{n}\frac{k+1}{k}\times\prod_{k=3}^{n}\frac{k-1}{k}$ (télescopage)

$\displaystyle = \frac{n+1}{3}\times\frac{2}{n} = \boxed{\frac{2(n+1)}{3n}}$.

2. Ce programme calcule et affiche la valeur $\displaystyle S = \sum_{k=1}^{9} 4k^3$.

(Rappelons que `range(1,10)` correspond à `[1,2,3,4,5,6,7,8,9]`)

Un simple calcule donne : $\displaystyle S = 4\sum_{k=1}^{9} k^3 = 4\frac{9^2\times 10^2}{4} = 81\times 100 = \boxed{8100}$.

3. (a) Après calcul, $\boxed{(x+1)^5 = x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1}$.
(On peut faire le calcul "à la main" ou utiliser la formule du binôme si on la connait)

(b) D'une part, par télescopage, $S = (n+1)^5 - 1$. D'autre part :

$$S = \sum_{k=1}^{n}\Big((k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)-k^5\Big) = 5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= 5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5\frac{n(n+1)}{2} + n$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
5\sum_{k=1}^{n} k^4 &= S - 10\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= (n+1)^5 - 1 - 10\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= (n+1)^5 - (n+1) - 10\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5\frac{n(n+1)}{2} \\
&= (n+1)\Big((n+1)^4 - 1 - \frac{5}{2}n^2(n+1) - \frac{5}{3}n(2n+1) - \frac{5}{2}n\Big).
\end{aligned}$$

On calcule rapidement : $(n+1)^4 - 1 = n^4+4n^3+6n^2+4n = n(n^3+4n^2+6n+4)$.

Ainsi en factorisant par n :

$$5\sum_{k=1}^{n} k^4 = n(n+1)\Big(n^3+4n^2+6n+4-\frac{5}{2}n(n+1)-\frac{5}{3}(2n+1)-\frac{5}{2}\Big)$$

En multipliant par 6 :

$$\begin{aligned}30\sum_{k=1}^{n} k^4 &= n(n+1)\Big(6n^3+24n^2+36n+24-15n(n+1)-10(2n+1)-15\Big)\\ &= n(n+1)\Big(6n^3+9n^2+n-1\Big) = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).\end{aligned}$$

$\Big($On vérifie par le calcul que $(2n+1)(3n^2+3n-1) = 6n^3+9n^2+n-1)\Big)$

Finalement, on obtient bien $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}$.

Exercice 2 : Une bijection

1. Pour tout $t \in]-1,1[$, on a $1+t>0$ et $1-t>0$ donc $\dfrac{1+t}{1-t}>0$.

   Ainsi, $f(t) = \ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$ a bien un sens : $\boxed{\text{l'application } f \text{ est bien définie sur }]-1,1[}$.

2. Rappel : en Python, ln se dit "`np.log`" et non pas "`np.ln`" !

```python
import numpy as np

def f(t):
  y = np.log( (1+t)/(1-t) )
  return y
```

3. Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $t \in]-1,1[$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}y = f(t) \iff y = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \iff e^y = \frac{1+t}{1-t} \iff (1-t)e^y = 1+t\\ \iff e^y - te^y = 1+t \iff e^y - 1 = t(e^y+1) \iff t = \frac{e^y-1}{e^y+1}.\end{aligned}$$

   Ceci montre que $\boxed{f \text{ est bijective}}$ et l'application réciproque est : $\boxed{f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ y & \mapsto & \dfrac{e^y-1}{e^y+1}\end{array}}$

Exercice 3 : Une somme, plusieurs méthodes

1. Posons $\mathcal{P}(n)$: " $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}$ ".

   Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   <u>Initialisation :</u> Par convention, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{0} kx^k = 0$, et $\dfrac{0x^{n+2}-x+x}{(x-1)^2} = 0$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vérifiée.

   <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} kx^k = \sum_{k=1}^{n} kx^k + (n+1)x^{n+1} &= \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2} + (n+1)x^{n+1}\\ &= \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x+(n+1)x^{n+1}(x-1)^2}{(x-1)^2}\\ &= \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x+(n+1)x^{n+1}(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}\\ &= \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x+(n+1)x^{n+3}-(2n+2)x^{n+2}+(n+1)x^{n+1}}{(x-1)^2}\\ &= \frac{(n+1)x^{n+3}-(n+2)x^{n+2}+x}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

   Ceci montre $\mathcal{P}(n+1)$ est achève la récurrence.

2. D'une part,

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x^j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} x^j\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{x^i - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}\left(\sum_{i=1}^{n} x^i - x^{n+1}\sum_{i=1}^{n} 1\right)$$
$$= \frac{1}{1-x}\left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x} - nx^{n+1}\right) = \frac{1}{1-x}\,\frac{x-x^{n+1}-(1-x)nx^{n+1}}{1-x} = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}.$$

D'autre part,

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x^j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} x^j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(x^j\sum_{i=1}^{j} 1\right) = \sum_{j=1}^{n} x^j j = \sum_{k=1}^{n} kx^k.$$

On a donc bien montré que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}}$.

3. (a) Par télescopage, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k) = a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1}$.

   (b) On a :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(b_{k+1}-b_k) + \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n}(a_k b_{k+1} - a_k b_k + a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_{k+1})$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k) = a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1.$$

   En passant la deuxième somme dans l'autre membre de l'égalité, on obtient bien :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k(b_{k+1}-b_k) = (a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1) - \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)b_{k+1}}$$

   (c) On applique la formule d'Abel du 3.(b) (avec $a_k = k$ et $b_k = x^k$) :

$$\sum_{k=1}^{n} k(x^{k+1}-x^k) = (n+1)x^{n+1} - x - \sum_{k=1}^{n}((k+1)-k)x^{k+1}$$
$$= (n+1)x^{n+1} - x - \sum_{k=1}^{n} x^{k+1} = (n+1)x^{n+1} - x - \sum_{j=2}^{n+1} x^j$$
$$= (n+1)x^{n+1} - x - \frac{x^2 - x^{n+2}}{1-x} = \frac{(n+1)x^{n+1}(1-x) - x(1-x) - x^2 + x^{n+2}}{1-x}$$
$$= \frac{(n+1)x^{n+1} - nx^{n+2} - x}{1-x} = \boxed{\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{x-1}}.$$

   (d) Par ailleurs, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(x^{k+1}-x^k) = \sum_{k=1}^{n} kx^k(x-1) = (x-1)\sum_{k=1}^{n} kx^k$.

   Avec le résultat du 3.(c), on a $\displaystyle(x-1)\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{x-1}$ et donc finalement

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}}.$$

Exercice 4 : Un critère d'injectivité

1. Supposons qu'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g\circ f = Id_E$. Montrons que f est injective.
   Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$, on doit montrer que $x_1 = x_2$.
   On a $f(x_1) = f(x_2)$, donc $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, c'est à dire $(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2)$.
   On obtient donc $Id_E(x_1) = Id_E(x_2)$, c'est à dire $x_1 = x_2$.
   $\boxed{\text{On a bien montré que } f \text{ est injective}}$, d'où l'implication voulue.

2. On suppose à présent f injective. On pose $\widetilde{F} = f(E)$ et on définit $\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} E & \to & \widetilde{F} \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$

   (a) C'est la proposition 4 du chapitre 3 du cours : une injection "réalise" une bijection.
   Pour donner quelques détails, on a "réduit" l'ensemble d'arrivée pour faire de $\widetilde{f}$ une surjection :
   - f est injective, donc $\widetilde{f}$ l'est également.
   - $\widetilde{f}$ est surjective car $\widetilde{f}(E) = f(E) = \widetilde{F}$ (ensemble image = ensemble d'arrivée)

   Ainsi $\boxed{\widetilde{f} \text{ est bijective}}$.

   (b) On pose l'application : $\forall y \in F,\ g(y) = \begin{cases} \widetilde{f}^{-1}(y) & \text{si } y \in \widetilde{F} \\ x_0 & \text{si } y \in F \setminus \widetilde{F}. \end{cases}$
   Vérifions qu'on a alors $g \circ f = Id_E$, c'est à dire : $\forall x \in E,\ g(f(x)) = x$.
   Pour tout $x \in E$, on a par définition $f(x) \in f(E)$, c'est à dire $f(x) \in \widetilde{F}$.
   Ainsi, par définition de g, $g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.
   On a donc montré $\boxed{\text{l'existence d'une application } g : F \to E \text{ telle que } g \circ f = Id_E}$.
   La question 2. démontre l'implication de la gauche vers la droite : on a donc l'équivalence voulue !

3. Un exemple possible :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{|x|} \end{array}$$

   f est clairement injective mais non surjective.
   On a bien $g \circ f = Id_{\mathbb{R}_+}$ puisque $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(f(x)) = \sqrt{|x^2|} = \sqrt{x^2} = x \quad (\text{car } x \geqslant 0)$.
   On peut faire encore plus élémentaire :

$$f : \{0\} \to \{0,1\} \text{ définie par } f(0) = 0. \quad f \text{ n'est clairement pas surjective.}$$
$$g : \{0,1\} \to \{0\} \text{ définie par } g(0) = 0 \text{ et } g(1) = 0. \quad \text{On a } g(f(0)) = 0 \quad \text{donc } g \circ f = Id_{\{0\}}\ .$$