27

Dérivées successives, formules de Taylor et développements limités

Introduction et motivation

La "Formule de Taylor" a déjà été évoquée dans le cas des polynômes.
Si $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\underline{\deg(P) \leqslant n}$ et a est un réel fixé, on peut écrire la **formule de Taylor à l'ordre n en a** :

$$\boxed{P(X) = P(a) + P'(a)(X-a) + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.}$$

Dans ce chapitre, nous allons généraliser cette formule de Taylor à des fonctions quelconques, pas forcément polynômiales. Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suffisament régulière, la formule de Taylor à l'ordre n en a donnera une **approximation de $f(x)$ par un polynôme en** x, lorsque x est au voisinage de a :

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Précisément, on écrira l'égalité :

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{polynôme de Taylor à l'ordre n}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{"reste"}}}$$

- La **formule de Taylor avec reste intégral** donnera une expression explicite du reste $R_n(x)$.
- L'**inégalité de Taylor-Lagrange** permettra de "contrôler le reste" en majorant simplement $\left|R_n(x)\right|$.
- Enfin, la **formule de Taylor-Young** précisera que $R_n(x) \underset{x\to a}{=} o\left((x-a)^n\right)$.

Cette dernière formule permettra d'écrire des **développements limités** pour les fonctions usuelles.

Exemple

On sait déjà que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, ce qui revient à dire $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.

Grâce à la formule de Taylor-Young, on pourra pousser ce développement à un ordre supérieur :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \text{ou bien, encore plus précisément :} \quad \sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \ \text{ etc...}$$

1 Dérivées successives

1.1 Définitions

Définition 1 (Dérivées successives d'une fonction)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou une union finie d'intervalles), $f : I \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.
Si f est k fois dérivable sur I (c'est à dire f est dérivable sur I, f' est dérivable sur I, etc...), on note $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de f. Ainsi, sous réserve de dérivabilité, on a :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'', \text{ et plus généralement : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ f^{(k)} = (f^{(k-1)})'.$$

On note $D^k(I,R)$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I.

Remarque 1

En particulier $D^1(I,\mathbb{R}) = D(I,\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions dérivables sur I).

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées successives du monôme $f : x \mapsto x^n$.
2. Calculer les dérivées successives de la fonction inverse $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
3. Calculer les dérivées successives des fonctions cos et sin.

Toutes ces fonctions sont (clairement) indéfiniment dérivables sur leur domaine de définition.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = x^n, \quad f'(x) = nx^{n-1}, \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \dots f^{(n)}(x) = n!, \quad f^{(n+1)}(x) = 0.$$

Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f(x) = x^{-1}, \quad f'(x) = (-1) \times x^{-2}, \quad f''(x) = (-1) \times (-2)x^{-3} \text{ etc...}$$

Par récurrence facile (faites-le !)

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(k)}(x) = (-1) \times (-2) \times \dots \times (-k) \times x^{-k-1} = (-1)^k\, k!\, x^{-k-1}.$$

3. On a $\cos' = -\sin, \quad \cos'' = -\cos \quad \cos^{(3)} = \sin$ et $\cos^{(4)} = \cos$.

On en déduit que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \cos^{(k)} = \begin{cases} \cos & \text{si } k \equiv 0[4]\ (k = 4k') \\ -\sin & \text{si } k \equiv 1[4]\ (k = 4k'+1) \\ -\cos & \text{si } k \equiv 2[4]\ (k = 4k'+2) \\ \sin & \text{si } k \equiv 3[4]\ (k = 4k'+3) \end{cases}$

De même : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sin^{(k)} = \begin{cases} \sin & \text{si } k \equiv 0[4]\ (k = 4k') \\ \cos & \text{si } k \equiv 1[4]\ (k = 4k'+1) \\ -\sin & \text{si } k \equiv 2[4]\ (k = 4k'+2) \\ -\cos & \text{si } k \equiv 3[4]\ (k = 4k'+3) \end{cases}$

Définition 2 (Fonction de classe C^k)

Soient I un intervalle (ou une union finie d'intervalles), $f : I \to \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.
On dit que f est de classe C^k sur I lorsque f est k fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ est continue sur I.
On note $\quad C^k(I, \mathbb{R}) \quad$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur I. Autrement dit :

$$C^k(I, \mathbb{R}) = \left\{ f \in D^k(I, \mathbb{R}) \mid f^{(k)} \in C(I, \mathbb{R}) \right\}.$$

Remarque 2

- Ceci vient généraliser la notion de classe C^1 vue auparavant.
- Une fonction de classe C^0 est simplement une fonction continue ! $\quad C^0(I, \mathbb{R}) = C(I, \mathbb{R})$.

Inclusions : • Par définition, $\boxed{C^k(I, \mathbb{R}) \subset D^k(I, \mathbb{R})}$

L'inclusion inverse est fausse : si f est seulement k fois dérivable, $f^{(k)}$ n'est pas forcément continue !

• $\boxed{D^{k+1}(I, \mathbb{R}) \subset C^k(I, \mathbb{R})}$. En effet si f est dérivable $(k+1)$ fois, alors $f^{(k)}$ est dérivable, donc continue.

L'inclusion inverse est fausse : si f est de classe C^k, f n'est pas forcément dérivable $(k+1)$ fois !

• Ainsi : $\boxed{C^k(I, \mathbb{R}) \subset D^k(I, \mathbb{R}) \subset C^{k-1}(I, \mathbb{R}) \subset D^{k-1}(I, \mathbb{R}) \subset \dots \subset C^1(I, \mathbb{R}) \subset D^1(I, \mathbb{R}) \subset C^0(I, \mathbb{R})}$.

Si f est de classe C^k, elle est donc aussi de classe C^{k-1}, C^{k-2}, $\dots$, C^1, C^0.

Définition 3 (Fonction de classe C^∞)

Soient I un intervalle (ou une union finie d'intervalles) et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est de classe C^∞ sur I lorsque f est "indéfiniment dérivable" sur I, c'est à dire :

$$f \text{ est } k \text{ fois dérivable sur } I \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

On note $C^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I. Autrement dit :

$$C^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} D^k(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{k=0}^{+\infty} C^k(I, \mathbb{R}).$$

Proposition 1 (Les fonctions "usuelles" sont de classe C^∞) (admis)

Toutes les fonctions usuelles présentées dans le chapitre # 13 "Dérivation"
sont de classe C^∞ sur leur domaine de dérivabilité.

Exemples

- Les fonctions $x \mapsto x^4$, exp, sin, cos, arctan sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- ln est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
- **Attention :** $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, mais de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ seulement !
- **Attention :** Pour un exposant $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^\alpha$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ seulement !

(Rappelons que $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ n'a de sens que pour $x > 0$.)

1.2 Dérivées et opérations

Proposition 2 (Somme et multiplication par une constante)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient f et g deux fonctions n fois dérivables (resp. de classe C^n) sur I. Alors :
- $f + g$ est n fois dérivable (resp. de classe C^n) sur I et

$$\forall x \in I, \quad (f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$$

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est n fois dérivable (resp. de classe C^n) sur I et

$$\forall x \in I, \ (\lambda f)^{(n)}(x) = \lambda\, f^{(n)}(x).$$

Preuve :

Récurrence immédiate à partir des propriétés pour une seule dérivée. □

Remarque 3

Ainsi : $E = D^n(I, \mathbb{R})$ (ou $E = C^n(I, \mathbb{R})$ ou $E = C^\infty(I, \mathbb{R})$) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$,
et l'application $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f^{(n)} \end{array}$ est linéaire !

Théorème 1 (Produit : Formule de Leibniz)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient f et g deux fonctions n fois dérivables (resp. de classe C^n) sur I.
Alors le produit fg est n fois dérivable (resp. de classe C^n) sur I et

$$\forall x \in I, \ (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x)$$

Preuve du Théorème 1 :

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{P}(n) \ : \ \text{" Si } f,g \in D^n(I,\mathbb{R}) \text{ alors } fg \in D^n(I,\mathbb{R}) \text{ et } (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \text{ "}$$

• Initialisation : $\mathcal{P}(0)$: $(fg)^{(0)} = fg = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vrai et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Soient $f,g \in D^{n+1}(I,\mathbb{R})$. D'après $\mathcal{P}(n)$, $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.
Cette fonction est ainsi dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables, et :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\Big)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.
\end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence. Si de plus $f,g \in C^n(I,\mathbb{R})$ on voit d'après l'expression obtenue que $(fg)^{(n)}$ est continue (somme et produit de fonctions continues) : c'est donc que $fg \in C^n(I,\mathbb{R})$! □

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto x^2 e^{-x}$. Calculer $f^{(n)}$ pour tout $n \geqslant 2$.

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions usuelles.
Et notant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$ et $f_2(x) = e^{-x}$, on a clairement

$$f_1'(x) = 2x, \ f_1''(x) = 2, \ f_1^{(k)}(x) = 0 \text{ pour } k > 2 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \ f_2^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) = (f_1 f_2)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_1^{(k)}(x) \times f_2^{(n-k)}(x) &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} f_1^{(k)}(x) \times (-1)^{n-k} e^{-x} \\
&= x^2 \times (-1)^n e^{-x} + n \cdot 2x \times (-1)^{n-1} e^{-x} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \times (-1)^{n-2} e^{-x} \\
&= (-1)^n e^{-x} \Big(x^2 - 2nx + n(n-1) \Big).
\end{aligned}$$

Proposition 3 (Quotient)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient f et g deux fonctions n fois dérivables (resp. de classe C^n) sur I.

Si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^n$) sur I.

Proposition 4 (Composition)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ de sorte que $f(I) \subset J$.
Si f et g sont n fois dérivables (resp. de classe C^n)
alors la fonction $g \circ f$ est n fois dérivable (resp. de classe C^n) sur I.

Méthode : Régularité d'une fonction "élémentaire"

Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité D d'une fonction f, on pourra souvent annoncer :

"f est de classe C^∞ sur D comme somme/produit/quotient/composée de fonctions usuelles."

2 Formules de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange

2.1 Formule de Taylor avec reste intégral.

Théorème 2 (Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n en a)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$.
Alors pour tout $a \in I$ et $x \in I$ (avec $a \leqslant x$ ou bien $x \leqslant a$) :

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{P_n(x)=\text{polynôme de Taylor à l'ordre } n \text{ en a}} + \underbrace{\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt}_{R_n(x)=\text{reste intégral}}$$

Cas particulier $a = 0$: $\quad \forall x \in I,\ f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \displaystyle\int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$

Remarques 4

- Dans le cas particulier où $f = P$ est un polynôme de dégré inférieur à n, on a $f^{(n+1)} = 0$.
Le reste intégral est donc nul et on retrouve la formule de Taylor pour des polynômes !

- Dans le cas d'une fonction quelconque (non polynomiale), on a $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.
Le reste $R_n(x)$ mesure l'erreur que l'on commet dans l'apprixomation $f(x) \simeq P_n(x)$.
$R_n(x)$ est nul quand $x = a$, est "petit" quand x est au voisinage de a, grandit quand x s'éloigne de a.
En pratique, plus l'ordre n est grand, plus le reste $R_n(x)$ est petit, et donc plus l'approximation $f(x) \simeq P_n(x)$ est satisfaisante au voisinage de a !

- La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n est ici énoncée pour f de classe C^∞.
En fait, il est suffisant que f soit de classe C^{n+1}. (de sorte que l'intégrale soit bien définie).

Preuve du Théorème 2 :

Soient $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$, $a \in I$ et $x \in I$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{P}(n) : \quad "f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt"$$

- Initialisation $(n = 0)$: On a bien $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)dt$ car $\displaystyle\int_a^x f'(t)dt = \Big[f(t)\Big]_a^x = f(x) - f(a)$.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$, i.e : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$.

Or en intégrant par parties :

$$\int_a^x \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{u(t)} \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{v'(t)} dt = \left[f^{(n+1)}(t) \times \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x - \int_a^x f^{(n+2)}(t) \times \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1} dt.$$

En injectant ceci dans l'égalité précédente, on obtient bien $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

$\square$

Exercice 3

1. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 4 en 0 pour la fonction cos.
2. En déduire la majoration : $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \cos(x) \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

On a bien-sûr $\cos \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La formule de Taylor voulue s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \cos(0) + \cos'(0)x + \frac{\cos''(0)}{2!}x^2 + \frac{\cos^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{\cos^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \int_0^x \frac{\cos^{(5)}(t)}{4!}(x-t)^4 dt.$$

On calcule :

$$\bullet \cos(0) = 1 \qquad \bullet \cos'(0) = -\sin(0) = 0$$
$$\bullet \cos^{(2)}(0) = -\cos(0) = -1 \qquad \bullet \cos^{(3)}(0) = \sin(0) = 0$$
$$\bullet \cos^{(4)}(0) = \cos(0) = 1 \qquad \bullet \cos^{(5)} = -\sin$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \int_0^x \frac{\sin(t)}{24}(x-t)^4 dt.$$

2. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\displaystyle\int_0^x \underbrace{\frac{\sin(t)}{24}}_{\geqslant 0} \underbrace{(x-t)^4}_{\geqslant 0} dt \geqslant 0.$

Pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$: $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{24}(x-t)^4 dt = -\int_x^0 \underbrace{\frac{\sin(t)}{24}}_{\leqslant 0} \underbrace{(x-t)^4}_{\geqslant 0} dt \geqslant 0.$

Ainsi, pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{24}(x-t)^4 dt \geqslant 0$ et donc $\cos(x) \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

À mesure que l'ordre n augmente dans la formule de Taylor, le polynôme $P_n(x)$ donne une approximation de plus en plus précise de $f(x)$ au voisinage de a. Dans le cas de la fonction cos en 0, on a :

$$P_0(x) = 1, \quad P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Dessin :

Remarque 5

- L'approximation $f(x) \simeq P_0(x) = f(a)$ revient à approcher le graphe de f par celui d'une fonction constante égale à $f(a)$.
- L'approximation $f(x) \simeq P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ revient à approcher le graphe de f par sa tangente au point d'abscisse a.
- De manière générale, le polynôme de Taylor P_n est l'unique polynôme de degré au plus n tel que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$.

2.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

On vient de voir qu'au voisinage de a, une fonction f suffisament régulière peut-être "approchée" par le polynôme de Taylor $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Le Théorème suivant permet de contrôler l'erreur d'approximation $|f(x) - P_n(x)|$ à l'aide d'une inégalité.

Théorème 3 (Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n en a (ou "entre a et x"))

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$. Soient $a \in I$ et $x \in I$.

Soit $K > 0$ une constante telle que $\boxed{|f^{(n+1)}| \leqslant K \text{ sur } [a,x]}$ i.e : $\forall t \in [a,x],\ |f^{(n+1)}(t)| \leqslant K$.

Alors :

$$\left| f(x) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{\text{polynôme de Taylor à l'ordre } n \text{ en } a} \right| \leq K \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Autrement dit :

$$\left| f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \right| \leq K \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Cas particulier $a = 0$: $$\left| f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right) \right| \leq K \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Remarques 6

- Notons que l'on peut toujours trouver une constante $K > 0$ comme dans l'énoncé du Théorème 3, car la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a,x]$ et toute fonction continue sur un segment y est bornée (et atteint ses bornes).

Attention : cette "constante" K peut éventuellement dépendre de x !

- À nouveau, ce Théorème est ici énoncé pour une fonction f de classe C^∞. Pour appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n, il est en fait suffisant que f soit de classe C^{n+1}.

- Dans le cas $n = 0$, on retrouve **l'inégalité des accroissements finis (IAF) !** En notant $x = b$:

$$\text{Si } |f'| \leqslant K \text{ sur } [a,b], \quad |f(b) - f(a)| \leqslant K|b-a|.$$

Preuve du Théorème 3 :

D'après la formule de Taylor avec reste intégral : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$

Supposons $a \leqslant x$ (l'autre cas est similaire avec un signe moins...)

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = \left| \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \right| &\leqslant \int_a^x \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \right| dt \\
&= \int_a^x \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{n!}(x-t)^n dt \\
&\leqslant K \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = K \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^x \\
&= K \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

$\square$

Méthode : Repérer une utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange

Lorsque l'on demande de majorer une quantité du type $\left|f(x)-P(x)\right|$, où f est une fonction de classe C^∞ et P est un polynôme, c'est bien souvent l'inégalité de Taylor-Lagrange qu'il faut utiliser !

$\boxed{1}$ Introduire la fonction f et affirmer qu'elle est de classe C^∞.

$\boxed{2}$ Annoncer et écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n en a, sachant que :

- Si la majoration est donnée par l'énoncé, repérer le terme $|x-a|^{n+1}$ dans le majorant et déduire les valeurs de a et n à choisir.
- Sinon :

- L'ordre n est en général le degré du polynôme P.

- Le point a est très souvent 0. (Sinon, $P(x)$ est exprimé en termes de "puissances de $(x-a)$").

Exemple

Si $P(x)=1+(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2$, on appliquera l'inégalité à l'ordre 2 en $a=1$.

$\boxed{3}$ Calculer les valeurs $f^{(k)}(a)$ pour $k\in[\![0,n]\!]$, déterminer $K>0$ telle que $|f^{(n+1)}|\leqslant K$ sur $[a,x]$.

Exercice 4

Montrer que : $\quad\forall x\geqslant 0,\ \left|\sqrt{1+x}-1-\dfrac{1}{2}x\right|\leqslant\dfrac{x^2}{8}.$

Posons $\forall x\geqslant 0,\ f(x)=\sqrt{1+x}$. $\quad f$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions usuelles.
Tâchons d'appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 en 0 :

Pour tout $x\geqslant 0$, si on détermine $K>0$ tel que $|f''|\leqslant K$ sur $[0,x]$, $\quad\left|f(x)-f(0)-f'(0)x\right|\leqslant K\dfrac{x^2}{2}$

- On a $f(0)=1$.
- Pour tout $x\geqslant 0$, $\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ donc $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Pour tout $x\geqslant 0$, $\quad f'(x)=\dfrac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$ donc $f''(x)=-\dfrac{1}{4}(1+x)^{-3/2}=-\dfrac{1}{4(1+x)^{3/2}}$.

Ainsi, pour tout $x\geqslant 0$ fixé : $\quad\forall t\in[0,x],\quad\left|f''(t)\right|=\dfrac{1}{4(1+x)^{3/2}}\leqslant\underbrace{\dfrac{1}{4}}_{K}.$

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne donc bien :

$$\left|\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x\right|\leqslant\frac{1}{4}\times\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{8}.$$

Une application : **Convergence des séries exponentielles.**

Exercice 5

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On souhaite démontrer que $\quad e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

1.Pour tout $n \in \mathbb{N}$, majorer $\left| e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right|$ à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange.

2. Conclure.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a évidemment $\exp \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
De plus $\forall k \in \mathbb{N},\ \exp^{(k)} = \exp$, donc son polynôme de Taylor à l'ordre n en 0 est :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^0}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Pour majorer $\left| e^x - P_n(x) \right|$, appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n "entre 0 et x".
Déterminons un réel $K > 0$ tel que $|\exp^{(n+1)}| \leqslant K$ sur $[0, x]$:

$$\forall t \in [0, x], \quad |\exp^{(n+1)}(t)| = |e^t| = e^t \leqslant \underbrace{1 + e^x}_{K} \quad \text{(fonctionne si } x \geqslant 0 \text{ ou } x \leqslant 0)$$

Ainsi, on obtient :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant (1 + e^x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. À x fixé, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (par croissances comparées classiques).
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = 0$, c'est à dire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$,
c'est à dire $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

3 Formule de Taylor-Young et développements limités

3.1 Notion de développement limité

Rappel : (Croissance comparée des monômes, pour $p, n \in \mathbb{N}$).

- Au voisinage de $+\infty$, $\boxed{\text{Pour } p < n, \quad x^p \underset{x \to +\infty}{=} o(x^n)}$

- Mais au voisinage de 0, au contraire,

$$\boxed{\text{Pour } p < n, \quad x^n \underset{x \to 0}{=} o(x^p)} \ !$$

<u>Exemples :</u> $x^2 \underset{x \to 0}{=} o(x)$, $\quad x^3 \underset{x \to 0}{=} o(x^2)$, etc...

- Plus généralement, au voisinage de $a \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\text{Pour } p < n, \quad (x-a)^n \underset{x \to a}{=} o((x-a)^p)}$$

Dessin :

Définition 4 (DL d'ordre n en a)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et I un intervalle contenant a. Soit f une fonction définie sur I ou $I \setminus \{a\}$.
On dit que f admet un **développement limité (DL) d'ordre n en a**
lorsqu'il existe des réels $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Pour rappel, cela signifie que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + h(x) \quad \text{avec} \quad h(x) \underset{x \to a}{=} o((x-a)^n)$$

ou encore que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

<u>Un DL d'ordre n en 0 s'écrit plus simplement :</u> $f(x) \underset{x \to 0}{=} c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n)$.

Exemples

- Si $f(x) = 2 + 3x - 2x^2 + x^3$, on peut écrire les développements limités en 0 :

<u>À l'ordre 0 :</u> $f(x) \underset{x \to 0}{=} 2 + o(1)$

<u>À l'ordre 1 :</u> $f(x) \underset{x \to 0}{=} 2 + 3x + o(x)$

<u>À l'ordre 2 :</u> $f(x) \underset{x \to 0}{=} 2 + 3x - 2x^2 + o(x^2)$

<u>À l'ordre 3 :</u> $f(x) \underset{x \to 0}{=} 2 + 3x - 2x^2 + x^3 + o(x^3)$

<u>À l'ordre $n \geqslant 4$:</u> $f(x) \underset{x \to 0}{=} 2 + 3x - 2x^2 + x^3 + o(x^n)$

- On sait que $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$, ce qui s'écrit aussi : $e^x - 1 \underset{x \to 0}{=} x + o(x)$.

Cela donne le développement limité à l'ordre 1 en 0 : $e^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + o(x)$.

- On sait que $1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$, ce qui s'écrit aussi : $1 - \cos(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{x^2}{2} + o(\frac{x^2}{2}) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Cela donne le développement limité à l'ordre 2 en 0 : $\cos(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Proposition 5 (Unicité du DL)

Si f admet un développement limité d'ordre n en a, ce développement est unique (c'est à dire qu'il y a unicité des coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_n$).

Preuve :

Supposons que l'on puisse écrire (avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to a} \widetilde{\varepsilon}(x) = 0$)

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$$
$$f(x) = \widetilde{c}_0 + \widetilde{c}_1(x-a) + \ldots + \widetilde{c}_n(x-a)^n + (x-a)^n\widetilde{\varepsilon}(x)$$

alors, en faisant la différence, on obtient

$$0 = (c_0 - \widetilde{c}_0) + (c_1 - \widetilde{c}_1)(x-a) + \ldots + (c_n - \widetilde{c}_n)(x-a)^n + (x-a)^n(\varepsilon(x) - \widetilde{\varepsilon}(x)).$$

En divisant par $(x-a)^n$ (pour tout $x \neq a$) :

$$0 = \frac{(c_0 - \widetilde{c}_0)}{(x-a)^n} + \frac{(c_1 - \widetilde{c}_1)}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + (c_n - \widetilde{c}_n) + (\varepsilon(x) - \widetilde{\varepsilon}(x)).$$

Lorsque $x \to a$, on voit que l'on doit avoir $c_i - \widetilde{c}_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,
sinon le membre de droite tend vers $\pm\infty$ (ou bien vers $c_n - \widetilde{c}_n \neq 0$) ! Ainsi, $\forall i \in [\![0, n]\!],\ c_i = \widetilde{c}_i$. □

Remarque 7

Ainsi, lorsqu'il existe, on pourra bien parler **<u>du</u>** développement limité de f à l'ordre n en a.

Avant de rentrer dans le calcul concret des développements limités, énonçons deux résultats généraux utiles.

Proposition 6 (Développement limité d'ordre inférieur)

Si f admet un développement limité d'ordre n en a de la forme

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

alors pour tout $p < n$, f admet un développement limité d'ordre p au voisinage de a, donné par :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_p(x-a)^p + o((x-a)^p).$$

Preuve rapide :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_p(x-a)^p + \underbrace{c_{p+1}(x-a)^{p+1} + \ldots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)}_{o((x-a)^p)}.$$ □

Exemple

Si l'on sait que le DL à l'ordre 3 en 0 de f est : $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x^2 + x^3 + o(x^3)$, alors :

<u>À l'ordre 2 :</u> $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x^2 + o(x^2)$ <u>À l'ordre 1 :</u> $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x)$

Proposition 7 (DL en 0 d'une fonction paire / impaire)

On suppose que f admet un développement limité d'ordre n en 0 de la forme

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n).$$

• Si f est paire, alors ce développement ne comporte que des puissances paires.
Autrement dit : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ k$ impair $\Rightarrow c_k = 0$.

• Si f est impaire, alors ce développement ne comporte que des puissances impaires.
Autrement dit : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ k$ pair $\Rightarrow c_k = 0$.

Preuve de la Proposition 7 :

Le DL de f en 0 s'écrit : $f(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k + x^n\varepsilon(x)$, où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Ainsi : $f(-x)=\sum_{k=0}^{n} c_k(-x)^k+(-x)^n\varepsilon(-x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k x^k + x^n \times \underbrace{\Big((-1)^n\varepsilon(-x)\Big)}_{\xrightarrow[x\to 0]{}0}$

On obtient donc le DL : $f(-x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k x^k + o(x^n)$.

• Si f est paire, on a : $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n) = f(-x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k x^k + o(x^n)$.

Par unicité du DL, on peut identifier les coefficients : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ c_k=(-1)^k c_k$.
D'où $c_k=0$ si k est impair.

• Si f est impaire, on a : $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n) = -f(-x) = -\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k x^k + o(x^n)$.

Par unicité du DL, on peut identifier les coefficients : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ c_k=(-1)^{k+1} c_k$.
D'où $c_k=0$ si k est pair. □

Exemples

Admettons, l'espace d'un instant, que la fonction cos admet des développement limités à n'importe quel ordre en 0.
On a déjà vu que le DL à l'ordre 2 en 0 était : $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.
Comme cos est paire, ses DL ne peuvent contenir que des puissances paires !
Le DL à l'ordre 3 est donc nécessairement : $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$.
Le prochain terme non nul n'apparait qu'à l'ordre 4, où l'on aura : $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$.

3.2 Formule de Taylor-Young et développement limités usuels

Une nouvelle fois, déterminer un développement limité $f(x) \underset{x\to a}{=} c_0+c_1(x-a)+\ldots+c_n(x-a)^n+o((x-a)^n)$, c'est approcher la valeur $f(x)$ par le polynôme $P(x)=c_0+c_1(x-a)+\ldots+c_n(x-a)^n$ au voisinage de a, l'"erreur d'approximation" étant prise en compte par le terme $+o((x-a)^n)$.

Sans surprise, lorsque f est suffisament régulière, ce polynôme n'est autre que le polynôme de Taylor $P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. C'est ce qu'affirme le Théorème suivant.

Théorème 4 (Formule de Taylor-Young à l'ordre n en a) (admis)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ et $f\in C^\infty(I,\mathbb{R})$.
Alors pour tout $a\in I$, f admet un développement limité à l'ordre n en a, donné par :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n).$$

<u>Cas particulier $a=0$:</u> $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0)+f'(0)\,x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$.

Remarque 8

Ce théorème est ici énoncé pour une fonction f de classe C^∞ : on le démontrera en exercice.
En travaillant un peu (beaucoup !), on peut montrer que la formule de Taylor-Young à l'ordre n est en fait valable dès que f est n-fois dérivable.

Exercice 6

Déterminer le dévelopement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction arctan.

La fonction arctan est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc d'après la formule de Taylor-Young :

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \arctan(0) + \arctan'(0)x + \frac{\arctan''(0)}{2}x^2 + \frac{\arctan^{(3)}(0)}{6}x^3 + o(x^3).$$

On calcule les coefficients de ce DL :

- $\arctan(0) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ donc $\arctan'(0) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ donc $\arctan''(0) = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan^{(3)}(x) = \dfrac{-2(1+x^2)^2 + 2x \times 4x(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$ donc $\arctan^{(3)}(0) = -2$.

Conclusion : $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Remarque : La fonction arctan étant impaire, on pouvait prévoir d'avance que son DL en 0 ne comporte que des puissances impaires !

Remarque 9

Le Théorème 4 affirme que si f est de classe C^∞, son **unique** développement limité à l'ordre n en a est donné par la formule de Taylor-Young.

Conséquence : Si une fonction f de classe C^∞ admet le développement limité

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

on a alors $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, ce qui permet d'accéder aux valeurs de dérivées en 0.

Exemple

On admet que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+\sin(x))$ admet le DL suivant en 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Puisque f est de classe C^∞ ("au voisinage de 0", par exemple sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$),

d'après la formule de Taylor-Young, on a : $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2}x^2 + \dfrac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + o(x^3)$.

En identifiant les coefficients (unicité du DL), on en déduit :

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f^{(3)}(0) = 1. \quad \text{(ce que l'on peut aussi vérifier par le calcul)}$$

Attention !

Si une fonction f admet un DL d'ordre n en a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

on ne peut pas affirmer pour autant qu'elle est automatiquement n fois dérivable en a !

Exercice 7

On pose $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$.

f admet ainsi un développement limité d'ordre 2 en 0 : $f(x) \underset{x\to 0}{=} 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + o(x^2)$.
On va voir en revanche qu'elle n'est pas deux fois dérivable en 0...

2. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
(b). Vérifier que f' n'est pas dérivable en 0.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{f(x)}{x^2} = x\underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{borné}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. On a donc bien $f(x) = o(x^2)$.

2. (a) • Dérivée sur $\mathbb{R}^*$: f est dérivable (et même C^∞ !) sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions usuelles, et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 \times -\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

• Dérivée en 0 : f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et continue en 0 (car $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$)

De plus on voit que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.
D'après le théorème de prolongement de la dérivée, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2.(b) On calcule le taux d'acroissement, pour $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{f'(x)}{x} = 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ceci n'a pas de limite quand $x \to 0$! C'est donc que f' n'est pas dérivable en 0.

En appliquant la formule de Taylor-Young, on déduit les développement limités en 0 des fonctions usuelles (qui sont toutes de classe C^∞ sur leur domaine) :

Théorème 5 (Développement limités à l'ordre n en 0 pour les fonctions usuelles)

- $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$

- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$

  On en déduit : $-\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$

- $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^p\dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p}\right)$ (ou $o(x^{2p+1})$)

- $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p\dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+1}\right)$ (ou $o(x^{2p+2})$)

- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

  En particulier (pour $\alpha = -1$) : $\dfrac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

  On en déduit : $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n)$

Preuve du Théorème 5 :

Pour chaque fonction, on calcule les dérivées sucessives et on applique la formule de Taylor-Young. ☐

Exemples

- DL à l'ordre 3 en 0 pour e^x : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.
- DL à l'ordre 4 en 0 pour $\ln(1+x)$: $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + o(x^4)$.
- DL à l'ordre 3 en 0 pour $\sin(x)$: $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$
- DL à l'ordre 4 en 0 pour $\sin(x)$: $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)$.
- DL à l'ordre 2 en 0 pour $\sqrt{1+x}$: $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + o(x^2)$

  donc : $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$.

Remarque 10

Ces développement limités usuels viennent "préciser" les équivalents usuels déjà connus :

- On savait que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, c'est à dire $\sin(x) = x + o(x)$ (c'est le DL à l'ordre 1 !)
- On savait que $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$, c'est à dire $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ (DL à l'ordre 1), etc...

Dans la suite du cours (et dans la plupart des exercices), on concentrera nos efforts sur les développements limités en 0, car on peut toujours s'y ramener :

Méthode : Se ramener à un développement limité en 0

Si l'on est amené à vouloir déterminer le développement limité d'une fonction f en un point $a \neq 0$, on peut souvent se ramener aux développements en 0 avec un simple "changement de variable" :

$\boxed{1}$ Considérer la fonction donnée par $g(y) = f(a+y)$.

$\boxed{2}$ Établir le développement limité de g en 0 à l'ordre voulu.

$\boxed{3}$ Puisque $f(x) = g(x-a)$, remplacer y par $x-a$ dans l'expression obtenue.

Exercice 8

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $x \to \ln(x)$ en 1.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $x \to e^x$ en 2.

1. Pour étudier $\ln(x)$ quand $x \to 1$, on s'intéresse à $\ln(1+y)$ quand $y \to 0$.

On sait que $\ln(1+y) \underset{y\to 0}{=} y - \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y^3}{3} + o(y^3)$. Ainsi, en "posant" $x = 1+y$ (i.e $y = x-1$) :

$$\ln(x) \underset{x\to 1}{=} (x-1) + -\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + o((x-1)^3).$$

2. Pour étudier e^x quand $x \to 2$, on s'intéresse à e^{2+y} quand $y \to 0$.

On sait que $e^{2+y} = e^2 e^y \underset{y\to 0}{=} e^2\Big(1 + y + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y^3}{6} + o(y^3)\Big) = e^2 + e^2 y + \dfrac{e^2}{2}y^2 + \dfrac{e^2}{6}y^3 + o(y^3)$.

Ainsi, en "posant" $x = 2+y$ (i.e $y = x-2$) :

$$e^x \underset{x\to 2}{=} e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2}(x-2)^2 + \frac{e^2}{6}(x-2)^3 + o((x-2)^3)$$

3.3 Opérations et calculs de développements limités

Pour calculer le DL d'une fonction f de classe C^∞, on peut toujours utiliser la formule de Taylor-Young. Néanmoins (comme vu dans l'exercice 6 pour arctan), cette méthode est assez lourde en calcul...
On ne l'emploiera donc qu'en dernier recours !

En pratique, il est souvent beaucoup plus rapide d'utiliser les DL des fonctions usuelles et de savoir calculer rapidement le DL d'une somme et/ou d'un produit de fonctions.

a) Somme et produit de DL

Proposition 8 (Combinaison linéaire de DL)

Soient f et g admettant les développement limités d'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} \widetilde{c}_0 + \widetilde{c}_1 x + \ldots + \widetilde{c}_n x^n + o(x^n).$$

Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ admet le développement limité d'ordre n en 0 :

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \underset{x\to 0}{=} (\lambda c_0 + \mu \widetilde{c}_0) + (\lambda c_1 + \mu \widetilde{c}_1)x + \ldots (\lambda c_n + \mu \widetilde{c}_n)x^n + o(x^n).$$

La preuve de ce résultat est évidente en se rappelant les propriétés déjà évoquées des "petits o" :

- $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$ • $C \times o(x^n) = o(x^n)$ et donc : $\lambda \times o(x^n) + \mu \times o(x^n) = o(x^n)$

Exercice 9

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de l'expression $1 - 2\cos(x) - \sin(x)$ quand $x \to 0$.

DL à l'ordre 3 en 0 pour cos : $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$

DL à l'ordre 3 en 0 pour sin : $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$. On en déduit :

$$\begin{aligned} 1 - 2\cos(x) - \sin(x) &= 1 - 2\Big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\Big) - \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) \\ &= 1 - 2 + x^2 - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = -1 - x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

Proposition 9 (Produit de DL)

Soient f et g admettant les développement limités d'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} \widetilde{c}_0 + \widetilde{c}_1 x + \ldots + \widetilde{c}_n x^n + o(x^n).$$

Alors $f \times g$ admet un développement limité d'ordre n en 0. Celui-ci est obtenu en effectuant le produit

$$\Big(c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n\Big) \times \Big(\widetilde{c}_0 + \widetilde{c}_1 x + \ldots + \widetilde{c}_n x^n\Big)$$

et en ne conservant **que les termes de degré inférieur ou égal à n**.

La preuve de ce résultat est évidente en développant le produit

$$f(x) \times g(x) \underset{x\to 0}{=} \Big(c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n)\Big) \times \Big(\widetilde{c}_0 + \widetilde{c}_1 x + \ldots + \widetilde{c}_n x^n + o(x^n)\Big)$$

et en se rappelant les propriétés déjà évoquées des "petits o" :

- Si $k \geqslant n$, $x^k = o(x^n)$ • $C \times o(x^n) = o(x^n)$ • $x^k \times o(x^n) = o(x^n)$ • $o(x^n) \times o(x^n) = o(x^n)$

Attention !

Bien que le produit $\left(c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n\right) \times \left(\widetilde{c}_0 + \widetilde{c}_1 x + \ldots + \widetilde{c}_n x^n\right)$ puisse donner un polynôme de degré $2n$, celui-ci ne correspond pas au développement limité de fg à l'ordre $2n$!

Pour trouver le DL de $f \times g$ à l'ordre n, il faut (en général) **connaître ceux de f et de g à l'ordre n.**

Exercice 10

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de $(1+x)^{1/3} \times \ln(1+x)$ quand $x \to 0$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de $\dfrac{e^x}{1+x}$ quand $x \to 0$.

1. DL à l'ordre 2 pour $(1+x)^{1/3}$: $(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \dfrac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$.

DL à l'ordre 2 pour $\ln(1+x)$: $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. On en déduit :

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/3} \times \ln(1+x) &= \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3})x^2 + o(x^2) \\ &= x - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

<u>Remarque :</u> En fait on aurait pu se contenter d'un DL d'ordre 1 pour $(1+x)^{1/3}$...

2. DL à l'ordre 3 pour e^x : $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

DL à l'ordre 3 pour $\dfrac{1}{1+x}$: $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{1+x} = e^x \times (1+x)^{-1} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)\right) \\ &= 1 + (1-1)x + (1 - 1 + \frac{1}{2})x^2 + (-1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6})x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).\end{aligned}$$

<u>Remarque :</u> Ici, il était bel et bien nécessaire d'avoir un DL d'ordre 3 pour les deux fonctions !

Remarque 11

Il n'y a pas vraiment de méthode simple pour déterminer le DL d'un quotient $\frac{f}{g}$: on se ramènera à $f \times g^{-1}$ (comme dans l'exercice précédent). On peut cependant "diviser par x^p" dans un DL :

Exercice 11

Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.

DL à l'ordre 3 en 0 pour sin : $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Donc : $\dfrac{\sin(x)}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)$. (se rappeler que "$o(x^3)$" signifie "$x^3 \times \varepsilon(x)$"...)

b) "Changement de variable" dans un DL

La "composition" de développement limités (DL de $f(g(x))$) n'est pas au programme d'ECG. Il est cependant utile, occasionellement, d'effectuer un "changement de variable" dans un développement limité :

Si f admet le DL en 0 $\quad f(x) \underset{x\to 0}{=} c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n)\quad$ et si $\quad u(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0,\quad$ alors :

$$f(u(x)) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1 u(x) + \ldots + c_n u(x)^n + o(u(x)^n).$$

Listons quelques changements de variables classiques.

- On a déjà évoqué que le changement $u(x) = x - a$ (pour passer d'un DL en a à un DL en 0).

- On pourra utiliser sans problème des changements linéaires : $u(x) = 2x$, $u(x) = -x$ etc...

Exercice 12

Déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+2x} - 1 - x$.

On sait que $\sqrt{1+y} \underset{y\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{8}y^2 + o(y^2)$.

Donc $\sqrt{1+2x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}(2x) - \dfrac{1}{8}(2x)^2 + o((2x)^2) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

Et donc $\sqrt{1+2x} - 1 - x \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Remarque : On en déduit l'équivalent : $\sqrt{1+2x} - 1 - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

- Le changement $u(x) = x^p$ peut aussi s'avérer utile :

Méthode : Développement limité en 0 de $f(x^p)$

Si f admet le DL à l'ordre n en 0 : $f(x) \underset{x\to 0}{=} c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n)$, alors pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$f(x^p) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1 x^p + \ldots + c_n x^{np} + o(x^{np}).$$

On notera qu'à partir du DL de $f(x)$ à l'ordre n, on obtient le DL de $f(x^p)$ à l'ordre np !

Exercice 13

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \ln(1+x^2)$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 6 en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1+8x^3}$

1. On sait que $\ln(1+y) \underset{y\to 0}{=} y - \dfrac{y^2}{2} + o(y^2)$ donc : $\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)$.

2. On sait que $\dfrac{1}{1+y} \underset{x\to 0}{=} 1 - y + y^2 + o(y^2)$

donc $\dfrac{1}{1+8x^3} = \dfrac{1}{1+(2x)^3} \underset{x\to 0}{=} 1 - (2x)^3 + (2x)^6 + o((2x)^6) \underset{x\to 0}{=} 1 - 8x^3 + 64x^6 + o(x^6)$.

• Dans certains exercices où l'on souhaite décrire le comportement d'une fonction au voisinage de $+\infty$, on peut être amené à utiliser le changement $u(x) = \frac{1}{x}$ pour se ramener à nouveau à un DL en 0 :

Méthode : Établir un "développement limité en $+\infty$"

On souhaite établir : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} c_0 + \frac{c_1}{x} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

$\boxed{1}$ Considérer la fonction donnée par $g(y) = f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\boxed{2}$ Établir le DL de g à l'ordre n en 0.

$\boxed{3}$ Puisque $f(x) = g(\frac{1}{x})$, remplacer y par $\frac{1}{x}$ dans l'expression obtenue.

Exercice 14

Déterminer des coefficients c_0, c_1, c_2 tels que : $\frac{x}{x+1} \underset{x\to+\infty}{=} c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

On note que $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$. On utilise donc le DL à l'ordre 2 de $\frac{1}{1+y}$ en 0.

(Ou alors, ce qui revient au même, si $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(y) = f(\frac{1}{y}) = \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}+1} = \frac{1}{1+y}$)

On sait que $\frac{1}{1+y} \underset{y\to0}{=} 1 - y + y^2 + o(y^2)$

donc : $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to0}{=} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

• Enfin, dans un DL, on peut également remplacer x par le terme général d'une suite.
Si $f(x) \underset{x\to0}{=} c_0 + c_1x + ... + c_px^p + o(x^p)$ et si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors :

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} c_0 + c_1u_n + ... + c_pu_n^p + o(u_n^p).$$

Ceci est souvent utilisé pour $u_n = \frac{1}{n}$.

Exercice 15

Etablir le développement asymptotique : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

On note que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$.

Or $\sqrt{1+y} \underset{y\to0}{=} 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)$.

Donc : $\sqrt{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Exercice 16

On souhaite montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.

Cela revient à montrer que la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$ converge vers un $K > 0$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ré-exprimer "simplement" $v_n = \ln(u_n)$.
2. On pose $w_n = v_{n+1} - v_n$. Montrer que $w_n = 1 - (n+\frac{1}{2})\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.
3. Déterminer un équivalent de w_n quand $n \to +\infty$.
4. Conclure à l'aide de la série $\sum w_n$.

1. $v_n = \ln\left(\dfrac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}\right) = \ln(n!) - \ln((\frac{n}{e})^n) - \ln(\sqrt{n}) = \ln(1\times 2\times\ldots\times n) - n(\ln(n) - \ln(e)) - \frac{1}{2}\ln(n)$

donc $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(k) - n\ln(n) + n - \frac{1}{2}\ln(n)$.

2. $w_n = v_{n+1} - v_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\ln(k) - (n+1)\ln(n+1) + n + 1 - \frac{1}{2}\ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n}\ln(k) - n\ln(n) + n - \frac{1}{2}\ln(n)\right)$

$= \ln(n+1) - (n+1)\ln(n+1) + n\ln(n) + 1 - \frac{1}{2}\ln(n+1) + \frac{1}{2}\ln(n)$

$= 1 - n\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = 1 - (n+\dfrac{1}{2})\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

Ainsi : $w_n = 1 - (n+\frac{1}{2})\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

3. On a $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ donc $\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Ainsi $w_n = 1 - (n+\frac{1}{2})\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = 1 - 1 + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{3n^2} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{4n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc $w_n = -\dfrac{1}{3n^2} + \dfrac{1}{4n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = -\dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

On en déduit que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}$.

4. L'équivalent nous permet d'affirmer que $w_n < 0$ à partir d'un certain rang.
On peut donc utiliser les théorèmes de comparaison.
Puisque la série $\sum -\dfrac{1}{12n^2} = -\dfrac{1}{12}\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que la série $\sum w_n = \sum(v_{n+1} - v_n)$ converge également.
Or la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et la série telescopique $\sum(v_{n+1} - v_n)$ sont de même nature.
On en déduit que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$.
Enfin, puisque $\forall n \geqslant 1,\ u_n = e^{v_n}$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $e^\ell = K > 0$.

Remarque 12

La constante est en fait $K = \sqrt{2\pi}$. La formule de Stirling complète est donc : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

3.4 Utilisation des développements limités

a) Calcul de limites et d'équivalents

On a déjà vu dans les exercices et applications précédentes que les développements limités permettaient de déterminer des limites et des équivalents. Précisons cela en une Proposition :

Proposition 10 (Développement limité, limite et équivalent)

On suppose que f admet le DL : $f(x) \underset{x\to 0}{=} c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n)$. Alors :

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = c_0$.

$\boxed{2}$ Au voisinage de 0, $f(x)$ est équivalent au premier terme non nul dans son développement limité.

Preuve rapide :

$\boxed{1}$ $f(x) \underset{x\to 0}{=} c_0 + \underbrace{c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n)}_{=o(1)}$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} c_0 + o(1)$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = c_0$.

$\boxed{2}$ Notons c_p (pour $p \in [\![0, n]\!]$) le premier coefficient non nul dans le DL.

Ainsi : $f(x) \underset{x\to 0}{=} c_p x^p + \underbrace{c_{p+1} x^{p+1} + \ldots c_n x^n + o(x^n)}_{=o(x^p)} = c_p x^p + o(x^p) = c_p x^p + o(c_p x^p)$.

Ceci signifie exactement que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} c_p x^p$. □

Exercice 17

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}$.

Il s'agit d'une limite indéterminée.
On ne peut pas s'en sortir avec les équivalents usuels...
On utilise donc un DL !

$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$ donc $\sqrt{1+x} - 1 - \dfrac{x}{2} \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$.

On en déduit $\dfrac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{1}{8} + o(1)$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} = -\dfrac{1}{8}$.

(Ou alors, $\sqrt{1+x} - 1 - \dfrac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{8}$ et même conclusion en divisant par x^2...)

Exercice 18

Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{1}{1+x} - \cos(x) + \sin(x)$ au voisinage de 0.

Il faut pousser le DL jusqu'au premier terme non nul.

$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$, $\quad \cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\quad \sin(x) = x + o(x^2)$.

Donc : $\dfrac{1}{1+x} - \cos(x) + \sin(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + o(x^2)$ d'où $\dfrac{1}{1+x} - \cos(x) + \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{3}{2}x^2$.

b) DL d'ordre 0 et 1, position par rapport à la tangente

On a déjà vu que l'existence d'un développement limité à l'ordre n en a n'implique pas forcément que f est n fois dérivable en a : il existe des contre-exemples "pathologiques" comme celui de l'Exercice 7.
En revanche, c'est bien vrai dans le cas particulier $n = 1$.

Proposition 11 (Cas particuliers des DL d'ordre 0 et 1) (admis par commodité)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.

- f admet un développement limité d'ordre 0 en a si et seulement si f est continue en a.

Ce DL est alors : $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$.

- f admet un développement limité d'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a.

Ce DL est alors : $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$.

Notons surtout que le développement limité à l'ordre 1 en a donne automatiquement accès à l'équation de la **tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse** a : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Méthode : Position du graphe par rapport à la tangente

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a, admettant le développement limité :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_p(x-a)^p + o((x-a)^p) \quad \text{avec } p \geqslant 2 \text{ et } c_p \neq 0.$$

Alors :

$\boxed{1}$ L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a est : $y = c_0 + c_1(x-a)$.

$\boxed{2}$ On peut situer localement le graphe de f par rapport à cette tangente en étudiant le signe de la différence $f(x) - (c_0 + c_1(x-a))$ au voisinage de a.
D'après le développement limité, $f(x) - (c_0 + c_1(x-a)) \underset{x\to a}{=} c_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$
donc $f(x) - (c_0 + c_1(x-a)) \underset{x\to a}{\sim} c_p(x-a)^p$. Ceci permet d'en déterminer le signe.

Exercice 19

1. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de exp en 0.
   Déterminer la position de la courbe par rapport à cette tangente, au voisinage de 0.
2. Mêmes questions avec la fonction sin.

1. On a le DL : $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Ainsi :

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est : $y = 1 + x$.
- On a $e^x - (1+x) = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $e^x - (1+x) \sim \dfrac{x^2}{2}$.

On en déduit, au voisinage de 0 : $e^x - (1+x) \geqslant 0$, c'est à dire $e^x \geqslant 1 + x$.
La courbe est donc (localement) au dessus de sa tangente.

2. On a le DL : $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$. Ainsi :

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est : $y = x$.
- On a $\sin(x) - x = -\dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ donc $\sin(x) - x \sim -\dfrac{x^3}{6}$. (positif pour $x \leqslant 0$, négatif pour $x \geqslant 0$).

On en déduit, au voisinage de 0 : $\sin(x) \geqslant x$ pour $x \leqslant 0$, $\sin(x) \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$.
La courbe est donc au dessus de sa tangente en 0^-, en dessous en 0^+.
On dit que 0 est un "point d'inflexion" pour sin : la courbe y traverse sa tangente.

Dessin :

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Justifier qu'une fonction est de classe C^k ou C^∞.
- Calculer des dérivées successives.
- Connaître les DL usuels en 0.
- Calculer des DL à partir de ceux-ci (somme, produit, changement de variable...)
- Déterminer des limites et des équivalents en utilisant les DL.

Pour suivre

- Appliquer la formule de Leibniz
- Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral.
- Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- Calculer un DL à l'aide de la formule de Taylor-Young.

Pour les ambitieux

- Reconnaître facilement les contextes d'application de Taylor reste intégral ou Taylor-Lagrange.
- Prendre l'habitude d'utiliser spontanément des DL.