Lundi 5 janvier 2026

Concours Blanc n°1 – Corrigé

Problème 1 : Etude des racines d'une famille de polynômes

(Inspiré EML 2020 voie S)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le polynôme : $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-X)^k}{k!} = 1 - X + \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{6} + \ldots + \frac{(-X)^n}{n!}$.

1.
```python
def P(n,x) :
  S = 0 ; a = 1
  for k in range( n+1 ) : # k = 0, 1, ... , n
    S = S + a
    a = a * (-x)/(k+1)
  return S
```

Après le premier passage, on a $S = 1$ et $a = -x$
Après le deuxième passage, on a $S = 1 + (-x)$ et $a = (-x)^2/2$
Après le troisième passage, on a $S = 1 + (-x) + (-x)^2/2$ et $a = (-x)^3/6$, etc...

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on a $(-x) \geqslant 0$ et donc

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{(-x)^k}{k!}}_{\geqslant 0} \geqslant 1.$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ P_n(x) \neq 0$. On conclue que $\boxed{P_n \text{ n'a pas de racine dans } \mathbb{R}_-}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de la dérivation :

$$P_n' = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-X)^k}{k!}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \frac{((-X)^k)'}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{-k(-X)^{k-1}}{k!} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{k(-X)^{k-1}}{k!} \quad \text{(le terme quand } k=0 \text{ est nul)}$$
$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-X)^{k-1}}{(k-1)!} = -\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-X)^j}{(j)!} = -P_{n-1}.$$

Ainsi : $\boxed{P_n' = -P_{n-1}}$.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. Notons $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = P_{2n}(x)$ et $v_n = P_{2n+1}(x)$. Etudions leur sens de variation. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $u_{n+1} - u_n = P_{2n+2}(x) - P_{2n}(x) = \dfrac{(-x)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \dfrac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \underbrace{\dfrac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\leqslant 0}\left(\dfrac{-x}{2n+2} + 1\right)$.

On a donc :

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \iff \frac{-x}{2n+2} + 1 \geqslant 0 \iff 1 \geqslant \frac{x}{2n+2} \iff 2n+2 \geqslant x \iff n \geqslant \frac{x}{2} - 1.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (P_{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante à partir du moment où } n \geqslant \frac{x}{2} - 1}$.

- $v_{n+1} - v_n = P_{2n+3}(x) - P_{2n+1}(x) = \dfrac{(-x)^{2n+3}}{(2n+3)!} + \dfrac{(-x)^{2n+2}}{(2n+2)!} = \underbrace{\dfrac{(-x)^{2n+2}}{(2n+2)!}}_{\geqslant 0}\left(\dfrac{-x}{2n+3} + 1\right)$.

On a donc :

$$v_{n+1} - v_n \geqslant 0 \iff \frac{-x}{2n+3} + 1 \geqslant 0 \iff 1 \geqslant \frac{x}{2n+3} \iff 2n+3 \geqslant x \iff n \geqslant \frac{x-3}{2}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (P_{2n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante à partir du moment où } n \geqslant \frac{x-3}{2}}$.

De plus, on note que

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(P_{2n+1}(x)-P_{2n}(x)\Big)=\lim_{n\to+\infty}\frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=0 \text{ par croissance comparée.}$$

Ainsi $\boxed{\text{les suites } (P_{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (P_{2n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes (à partir d'un certain rang)}}$

(b) Soit $x\in\mathbb{R}_+$ fixé. On vient de voir que $(P_{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_{2n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc elles convergent vers la même limite. Il existe ainsi un réel $\ell\in\mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty}P_{2n}(x)=\ell=\lim_{n\to+\infty}P_{2n+1}(x).$$

Or on sait que ceci équivaut à dire simplement : $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n(x)=\ell$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x\in\mathbb{R}_+, \text{ la suite } (P_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}}$.

5. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: " $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ P_{2n+1}(x)\leqslant e^{-x}\leqslant P_{2n}(x)$ ",
et montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

- <u>Initialisation :</u> On doit montrer $\mathcal{P}(1)$: $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ 1-x\leqslant e^{-x}\leqslant 1$.

Inégalité de droite : On sait déjà que pour $x\in\mathbb{R}_+$, $e^{-x}\leqslant e^0=1$.
Inégalité de gauche : Vérifions que la fonction $f: x\mapsto e^{-x}-(1-x)$ est positive sur $\mathbb{R}_+$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f'(x)=-e^{-x}+1\geqslant 0$.
Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $f(0)=0$, on en déduit que $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(x)\geqslant 0$.
Ceci montre l'encadrement voulu.

- <u>Hérédité :</u> Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ P_{2n+3}(x)\leqslant e^{-x}\leqslant P_{2n+2}(x)$$

\- *Inégalité de droite :* Vérifions que la fonction $g_n: x\mapsto P_{2n+2}(x)-e^{-x}$ est positive sur $\mathbb{R}_+$.
g_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ g_n'(x)=P_{2n+2}'(x)+e^{-x}=-P_{2n+1}(x)+e^{-x}\geqslant 0$.
(d'après $\mathcal{P}(n)$, car $P_{2n+1}(x)\leqslant e^{-x}$)
Ainsi g_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et puisque $g_n(0)=0$, on en déduit : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ g_n(x)\geqslant 0$.

\- *Inégalité de gauche :* Vérifions que la fonction $f_n: x\mapsto e^{-x}-P_{2n+3}(x)$ est positive sur $\mathbb{R}_+$.
f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f_n'(x)=-e^{-x}-P_{2n+3}'(x)=-e^{-x}+P_{2n+2}(x)=g_n(x)\geqslant 0$.
Ainsi f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et puisque $f_n(0)=0$, on en déduit : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f_n(x)\geqslant 0$.

Ceci montre l'encadrement voulu et achève la récurrence.

(b) Soit $x\in\mathbb{R}_+$ fixé. On a vu qu'il existait $\ell\in\mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n(x)=\ell$.

En passant à la limite dans l'encadrement $P_{2n+1}(x)\leqslant e^{-x}\leqslant P_{2n}(x)$, on obtient $\ell\leqslant e^{-x}\leqslant\ell$, c'est à dire $\ell=e^{-x}$.
Conclusion : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \lim\limits_{n\to+\infty}P_n(x)=e^{-x}}$

6. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après 2., P_{2n} n'a pas de racine dans $\mathbb{R}_-$. De plus, puisque

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ P_{2n}(x)\geqslant e^{-x}>0$$

P_{2n} n'a pas non plus de racine dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi $\boxed{P_{2n} \text{ n'a pas de racine réelle}}$.

(b) Soit $n\in\mathbb{N}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que P_{2n+1} admet deux racines réelles $\alpha_1<\alpha_2$.
Puisque $P_{2n+1}(\alpha_1)=0=P_{2n+1}(\alpha_2)$, d'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c\in]\alpha_1,\alpha_2[$ tel que $P_{2n+1}'(c)=0$. Or $P_{2n+1}'=-P_{2n}$: on a donc trouvé un réel c tel que $P_{2n}(c)=0$.
Contradiction, car on vient de voir que P_{2n} n'a pas de racine réelle !

Conclusion : $\boxed{P_{2n+1} \text{ a au maximum une racine réelle}}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que $P'_{2n+1} = -P_{2n}$.
Puisque P_{2n} est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas, d'après le TVI il reste de signe strictement constant sur $\mathbb{R}$! Puisque $P_{2n}(0) = 1$, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{2n}(x) > 0 \ \text{ donc } \ P'_{2n+1}(x) = -P_{2n}(x) < 0.$$

Ainsi, P_{2n+1} est strictement décroissant sur $\mathbb{R}$.
De plus, $P_{2n+1}(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} P_{2n+1}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P_{2n+1}(x) = -\infty$
(car c'est un polynôme de degré impair et de coeff dominant négatif).
On a ainsi le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$P_{2n+1}(x)$	$+\infty$ $\searrow$	1 $\searrow$	$-\infty$

D'après le TVI avec stricte monotonie, on en déduit qu'il existe $\boxed{\text{un unique } \alpha_n > 0 \text{ tel que } P_{2n+1}(\alpha_n) = 0}$.
C'est bien l'unique racine de P_{2n+1} sur $\mathbb{R}$ (car encore une fois, il n'y a pas de racine dans $\mathbb{R}_-$).
Enfin, c'est une racine simple, car $P'_{2n+1}(\alpha_n) < 0$ donc $\boxed{P_{2n+1}(\alpha_n) \neq 0}$.
Etablir, en justifiant, le tableau de variation complet de P_{2n+1} sur $\mathbb{R}_+$.
Déduire que le polynôme P_{2n+1} admet une unique racine, notée $\alpha_n > 0$, et que c'est une racine simple.

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} P_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-X)^k}{k!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-X)^{2i}}{(2i)!} + \sum_{i=0}^{n} \frac{(-X)^{2i+1}}{(2i+1)!} \quad \text{(en séparant les indices pairs et impairs)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{(-X)^{2i}}{(2i)!} + \frac{(-X)^{2i+1}}{(2i+1)!} \right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{X^{2i}}{(2i!)} \left(1 - \frac{X}{2i+1}\right) \end{aligned}$$

On a bien montré : $\boxed{P_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k!)} \left(1 - \frac{X}{2k+1}\right)}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule précédente :

- $P_{2n+1}(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k!)} \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{(2k!)}}_{>0} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)}_{>0}$

donc $\boxed{P_{2n+1}(1) > 0}$.

- $P_{2n+1}(2n+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)^{2k}}{(2k!)} \left(1 - \frac{2n+1}{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{(2n+1)^{2k}}{(2k!)}}_{>0} \left(\underbrace{1 - \frac{2n+1}{2k+1}}_{<0} \right)$

donc $\boxed{P_{2n+1}(2n+1) < 0}$.

D'après le TVI, il en résulte que P_{2n+1} s'annule entre 1 et $2n+1$, c'est à dire : $\boxed{\alpha_n \in]1, 2n+1[}$.

9.
```
def approx_alpha(n,eps) :
  a = 1 ; b = 2n+1
  while b-a > eps :
    c = (a+b)/2
    if P(2*n+1,c) < 0 :
      b = c
    else :
      c = c
    return a
```

On a vu que $\alpha_n \in]1, 2n+1[$, on peut donc appliquer l'algorithme de dichotomie sur le segment $[1, 2n+1]$ (d'où $a = 1$ et $b = 2n+1$ au départ). Le reste de l'algorithme est classique, en précisant tout de même que P_{2n+1} est décroissant : il passe de positif à négatif ! Ainsi, si jamais $P_{2n+1}(c) < 0$, c'est bien la valeur b (bord droit du segment) qu'il faut mettre à jour, et non a ! (on peut s'en convaincre sur un dessin).

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule du 8.(a), on a

$$P_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k!)}\left(1 - \frac{X}{2k+1}\right) \quad \text{et} \quad P_{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^{2k}}{(2k!)}\left(1 - \frac{X}{2k+1}\right).$$

En faisant la différent, on obtient bien : $\boxed{P_{2n+1} = P_{2n-1} + \frac{X^{2n}}{(2n)!}\left(1 - \frac{X}{2n+1}\right)}$.

Evaluons cette égalité en α_{n-1} (qui est la racine de P_{2n-1}) :

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(\alpha_{n-1}) &= P_{2n-1}(\alpha_{n-1}) + \frac{(\alpha_{n-1})^{2n}}{(2n)!}\left(1 - \frac{\alpha_{n-1}}{2n+1}\right) \\ &= \underbrace{\frac{(\alpha_{n-1})^{2n}}{(2n)!}}_{>0}\underbrace{\left(1 - \frac{\alpha_{n-1}}{2n+1}\right)}_{>0} \end{aligned}$$

En effet, on sait que $\alpha_{n-1} \in]1, 2n-1[$, donc en particulier, $\alpha_{n-1} < 2n+1$ et donc $1 - \frac{\alpha_{n-1}}{2n+1} > 0$.

Ainsi, on a : $\boxed{P_{2n+1}(\alpha_{n-1}) > 0}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on vient de voir que :

$$P_{2n+1}(\alpha_{n-1}) > 0 \ \text{ i.e } \ P_{2n+1}(\alpha_{n-1}) > P_{2n+1}(\alpha_n) \ \text{ et donc } \ \alpha_{n-1} < \alpha_n$$

car P_{2n+1} est strictement décroissant sur $\mathbb{R}$. On a donc montré : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \alpha_{n-1} < \alpha_n$.

$\boxed{\text{La suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc strictement croissante}}$.

On suppose à présent que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ.

11. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left|P'_{2n+1}(x)\right| = \left|-P_{2n}(x)\right| = \left|P_{2n}(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{(-x)^k}{k!}\right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{|-x|^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant e^x.$$

(On a utilisé l'inégalité admise dans l'énoncé). Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}_+ n, \quad \left|P'_{2n+1}(x)\right| \leqslant e^x}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
On applique l'IAF à la fonction P_{2n+1}, qui est dérivable sur le segment $[\alpha_n, \ell]$.
(Notons que puisque $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a forcément $\alpha_n \leqslant \ell$).
On on a : $\quad \forall t \in [\alpha_n, \ell], \ \left|P'_{2n+1}(t)\right| \leqslant e^t \leqslant e^\ell$.

Ainsi, l'IAF nous apprend que : $\boxed{\left|P_{2n+1}(\ell) - P_{2n+1}(\alpha_n)\right| \leqslant e^\ell |\ell - \alpha_n|}$.

12. D'abord, $P_{2n+1}(\alpha_n) = 0$, par définitio de α_n. L'inégalité précédente devient donc :

$$\left|P_{2n+1}(\ell)\right| \leqslant e^\ell |\ell - \alpha_n|.$$

Passons à la limite quand $n \to +\infty$ dans cette inégalité.
- D'après le résultat du 5.(b), on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\ell) = e^{-\ell}$.
- Puisqu'on a supposé que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |\ell - \alpha_n| = 0$.

On obtient ainsi : $\quad e^{-\ell} \leqslant 0$ (avec $\ell \in \mathbb{R}$), ce qui évidemment est une contradiction !

<u>Conclusion :</u> $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante qui ne converge pas, donc d'après le théorème de la limite monotone, on a nécessairement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty}$.

Problème 2 : La ruine du joueur

Un casino dispose d'une machine à sous dont le comportement est le suivant :

- Pour jouer une partie, un joueur doit d'abord payer le coût d'entrée de 1€.
- A l'issue de la partie, le joueur reçoit : $\begin{cases} 0€ & \text{avec probabilité } p \\ 2€ & \text{avec probabilité } q \\ 3€ & \text{avec probabilité } r, \end{cases}$ où $p, q, r \in]0, 1[$ avec $p + q + r = 1$.

Le gain moyen relatif d'un joueur à l'issue d'une seule partie est ainsi : $(0 \cdot p + 2 \cdot q + 3 \cdot r) - 1$.
On note ce gain $g = 2q + 3r - 1$.

Un joueur qui s'installe devant la machine à sous enchaine les parties successives. Si, à un moment quelconque au cours du jeu, son capital est réduit à 0€, il ne peut plus continuer : on dit qu'il finit ruiné. Notons qu'il est possible, a priori, qu'un joueur ne finisse jamais ruiné, c'est à dire qu'il continue de jouer indéfiniment.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement : "Un joueur ayant un capital de départ de n€ finit ruiné",
et on note $u_n = P(A_n)$. On cherche, dans ce problème, à déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Partie I - Transcription matricielle

1. (a) Si le joueur a un capital de départ de 0€, alors il est immédiatement ruiné. L'évènement A_0 est donc l'évènement certain, et $\boxed{u_0 = 1}$.

   (b) Il semble intuitif que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ soit décroissante}}$: plus un joueur a un capital de départ élevé, moins il a de chance de finir ruiné à un moment.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On introduit les évènements suivants :

$$\begin{aligned} G_0 &= \text{" Le joueur gagne 0€ à la première partie"} \\ G_2 &= \text{" Le joueur gagne 2€ à la première partie"} \\ G_3 &= \text{" Le joueur gagne 3€, à la première partie"} \end{aligned}$$

   Les évènements (G_0, G_2, G_3) forment un système complet d'évènement, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(G_0)P_{G_0}(A_{n+1}) + P(G_2)P_{G_2}(A_{n+1}) + P(G_3)P_{G_3}(A_{n+1}) \\ &= p \cdot P_{G_0}(A_{n+1}) + q \cdot P_{G_2}(A_{n+1}) + r \cdot P_{G_3}(A_{n+1}). \end{aligned}$$

   Explicitons maintenant les probabilités qu'un joueur avec un capital de départ de $n+1$ € finisse ruiné SACHANT G_0, G_2 ou G_3 :

   - Conditionnellement à G_0, après la première partie, le joueur a désormais un capital de n €.
   Sa probabilité de finir ruiné est donc équivalente à $u_n = P(A_n)$. Ainsi : $P_{G_0}(A_{n+1}) = u_n$.
   - Conditionnellement à G_2, après la première partie, le joueur a désormais un capital de $n + 2$ €.
   Sa probabilité de finir ruiné est donc équivalente à $u_{n+2} = P(A_{n+2})$. Ainsi : $P_{G_2}(A_{n+1}) = u_{n+2}$.
   - Conditionnellement à G_3, après la première partie, le joueur a désormais un capital de $n + 3$ €.
   Sa probabilité de finir ruiné est donc équivalente à $u_{n+3} = P(A_{n+3})$. Ainsi : $P_{G_3}(A_{n+1}) = u_{n+3}$.

   On obtient donc bien : $\boxed{u_{n+1} = pu_n + qu_{n+2} + ru_{n+3}}$.

Pour toute la suite du problème, on introduit la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} -\frac{q}{r} & \frac{1}{r} & -\frac{p}{r} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

les matrices colonnes $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (pour $n \in \mathbb{N}$) et le polynôme $P = rX^3 + qX^2 - X + p \in \mathbb{R}[X]$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

Or, $u_{n+1} = pu_n + qu_{n+2} + ru_{n+3}$, donc on a $u_{n+3} = -\frac{q}{r}u_{n+2} + \frac{1}{r}u_{n+1} - \frac{p}{r}u_n$.

Ainsi : $\begin{cases} u_{n+3} &= -\frac{q}{r}u_{n+2} + \frac{1}{r}u_{n+1} - \frac{p}{r}u_n \\ u_{n+2} &= u_{n+2} \\ u_{n+1} &= u_{n+1} \end{cases}$.

On remarque donc que $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{q}{r} & \frac{1}{r} & -\frac{p}{r} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ c'est à dire $\boxed{X_{n+1} = MX_n}$.

(b) On en déduit par récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = M^n X_0}$.

Initialisation : $X_0 = I_3 X_0 = M^0 X_0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $X_n = M^n X_0$.

Alors, $X_{n+1} = MX_n = M(M^n X_0) = M^{n+1} X_0$, ce qui achève la récurrence.

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de la matrice colonne X_n en fonction de M, n et X_0.

4. Le calcul montre que :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} -\frac{q}{r} & \frac{1}{r} & -\frac{p}{r} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{q^2}{r^2} + \frac{1}{r} & -\frac{q}{r^2} - \frac{p}{r} & \frac{pq}{r^2} \\ -\frac{q}{r} & \frac{1}{r} & -\frac{p}{r} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} -\frac{q^3}{r^3} - \frac{2q}{r^2} - \frac{p}{r} & \frac{q^2}{r^3} + \frac{1}{r^2} + \frac{pq}{r^2} & -\frac{pq^2}{r^3} - \frac{p}{r^2} \\ \frac{q^2}{r^2} + \frac{1}{r} & -\frac{q}{r^2} - \frac{p}{r} & \frac{pq}{r^2} \\ -\frac{q}{r} & \frac{1}{r} & -\frac{p}{r} \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite :

$$\begin{aligned} P(M) &= rM^3 + qM^2 - M + pI_3 \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{q^3}{r^2} - \frac{2q}{r} - p & \frac{q^2}{r^2} + \frac{1}{r} + \frac{pq}{r} & -\frac{pq^2}{r^2} - \frac{p}{r} \\ \frac{q^2}{r} + 1 & -\frac{q}{r} - p & \frac{pq}{r} \\ -q & 1 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{q^3}{r^2} + \frac{q}{r} & -\frac{q^2}{r^2} - \frac{pq}{r} & \frac{pq^2}{r^2} \\ -\frac{q^2}{r} & \frac{q}{r} & -\frac{pq}{r} \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\qquad - \begin{pmatrix} -\frac{q}{r} & \frac{1}{r} & -\frac{p}{r} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P \text{ est un polynôme annulateur de } M}$.

Partie II - Etude d'un cas particulier à gain moyen positif

Dans cette partie du problème, on étudie le cas particulier où $p = q = \frac{3}{8}$ et $r = \frac{1}{4}$.

5. Ici, $g = 2q + 3r - 1 = 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{2}$. Ainsi $\boxed{g = \frac{1}{2} > 0}$.

6. Ici, $\boxed{M = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$. Pour définir cette matrice en Python :

```
import numpy as np
M = np.array( [ [-3/2, 4, -3+2], [1,0,0], [0,1,0] ])
```

7. Ici, $P = \frac{1}{4}X^3 + \frac{3}{8}X^2 - X + \frac{3}{8}$.
On remarque que 1 est une racine de P : $P(1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - 1 + \frac{3}{8} = 0$.
On sait donc qu'on peut factoriser P par $(X-1)$.
En posant la division euclidienne, on trouve : $P = (X-1)(\frac{1}{4}X^2 + \frac{5}{8}X - \frac{3}{8})$,
c'est à dire $P = \frac{1}{4}(X-1)(X^2 + \frac{5}{2}X - \frac{3}{2})$.
Après calcul, le polynôme $X^2 + \frac{5}{2}X - \frac{3}{2})$ admet deux racines : $\frac{1}{2}$ et -3.
Ainsi, on obtient la factorisation complète : $\boxed{P = \frac{1}{4}(X-1)(X-\frac{1}{2})(X+3)}$.
(Attention à ne pas oublier de mettre le coefficient dominant en facteur).
Ainsi $\boxed{P \text{ admet 3 racines simples : } 1, \frac{1}{2} \text{ et } -3}$.

Pour tout réel λ fixé, on note (S_λ) le système : $MX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

8. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a les équivalences :

$$(S_\lambda) \iff MX = \lambda X \iff MX - \lambda X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (-\frac{3}{2} - \lambda)x & +4y & -\frac{3}{2}z & = 0 \\ x & -\lambda y & & = 0 \\ & y & -\lambda z & = 0 \end{cases}$$

On échange L_1 et L_2 :

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} x & -\lambda y & & = 0 \\ (-\frac{3}{2} - \lambda)x & +4y & -\frac{3}{2}z & = 0 \\ & y & -\lambda z & = 0 \end{cases}$$

On effectue l'opération : $L_2 \leftarrow L_2 + (\frac{3}{2} + \lambda)L_1$. On obtient :

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} x & -\lambda y & & = 0 \\ & (4 - \frac{3}{2}\lambda - \lambda^2)y & -\frac{3}{2}z & = 0 \\ & y & -\lambda z & = 0 \end{cases}$$

On échange L_2 et L_3 :

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} x & -\lambda y & & = 0 \\ & y & -\lambda z & = 0 \\ & (4 - \frac{3}{2}\lambda - \lambda^2)y & -\frac{3}{2}z & = 0 \end{cases}$$

Pour finir, on effectue l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - (4 - \frac{3}{2}\lambda - \lambda^2)L_2$:

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} x & -\lambda y & & = 0 \\ & y & -\lambda z & = 0 \\ & & \Big(-\frac{3}{2} + 4\lambda - \frac{3}{2}\lambda^2 - \lambda^3\Big)z & = 0 \end{cases}$$

Rappelons que $P(X) = \frac{1}{4}X^3 + \frac{3}{8}X^2 - X + \frac{3}{8}$.
On remarque ainsi que : $\Big(-\frac{3}{2} + 4\lambda - \frac{3}{2}\lambda^2 - \lambda^3\Big) = -4P(\lambda)$.
La dernière ligne du système est donc équivalente à : $P(\lambda) \cdot z = 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{On a montré que } (S_\lambda) \text{ est équivalent à : } \begin{cases} x & -\lambda y & & = 0 \\ & y & -\lambda z & = 0 \\ & & P(\lambda) \cdot z & = 0 \end{cases}}$

A l'aide du pivot de Gauss, ramener le système (S_λ) à un système triangulaire équivalent.

9. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On sait (d'après le cours) que la matrice $M - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si son système homogène associé est de Cramer, c'est à dire lorsque l'équation $(M - \lambda I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
admet l'unique solution $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Or, on a les équivalences :

$$(M - \lambda I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff MX - \lambda X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff MX = \lambda X \iff (S_\lambda).$$

Ainsi, la matrice $M-\lambda I_3$ est inversible si et seulement si le système (S_λ) est de Cramer.
Le système triangulaire de la question précédente est de Cramer ssi ses coefficients diagonaux sont non-nuls, autrement dit lorsque $P(\lambda)\neq 0$.

Conclusion : $\boxed{M-\lambda I_3 \text{ est inversible} \iff P(\lambda)\neq 0 \iff \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{1,\frac{1}{2},-3\}}$.

(Les racines de P ont été déterminées en question 7).

10. (a) Au lieu de reprendre (S_1) depuis le début, prenons plutôt le système triangulaire qui lui est équivalent :

$$(S_1) \iff \begin{cases} x & -y & & = 0 \\ & y & -z & = 0 \\ & & P(1)\cdot z & = 0 \end{cases}$$

Or, puisque $P(1)=0$ justement, il nous reste :

$$(S_1) \iff \begin{cases} x & -y & & = 0 \\ & y & -z & = 0 \end{cases} \iff x=y=z.$$

L'ensemble des solutions $X=\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\right)$ de (S_1) est donc : $\boxed{\left\{\left(\begin{smallmatrix} x\\ x\\ x\end{smallmatrix}\right),\ x\in\mathbb{R}\right\}}$.

Si on impose $x=1$, on obtient la $\boxed{\text{solution particulière } X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$.

(b) Un rapide calcul permet de voir que

$$M\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\4\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\1\\2\end{smallmatrix}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\4\end{smallmatrix}\right) \quad \text{et} \quad M\left(\begin{smallmatrix}-9\\3\\-1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}27\\-9\\3\end{smallmatrix}\right)=-3\left(\begin{smallmatrix}-9\\3\\-1\end{smallmatrix}\right).$$

Ainsi, $\boxed{X=\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\4\end{smallmatrix}\right) \text{ est solution de } (S_{\frac{1}{2}})}$ et $\boxed{X=\left(\begin{smallmatrix}-9\\3\\-1\end{smallmatrix}\right) \text{ est solution de } (S_{-3})}$.

On définit la matrice $Q=\begin{pmatrix}1&1&-9\\1&2&3\\1&4&-1\end{pmatrix}$, obtenue en "fusionnant" les matrices colonnes susmentionnées.

11. Montrer que Q est inversible. Pour tout $X=\left(\begin{smallmatrix} x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\right)$, on a les équivalences suivantes :

$$QX=0 \iff \begin{cases} x+y-9z & =0 \\ x+2y+3z & =0 \\ x+4y-z & =0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-9z & =0 \\ y+12z & =0 \\ 3y+8z & =0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-9z & =0 \\ y+12z & =0 \\ -28z & =0 \end{cases}$$

Ce système est triangulaire avec des coefficients diagonaux non-nuls, donc est de Cramer.
Ceci montre que $\boxed{Q \text{ est inversible}}$.

12. On cherche une matrice de la forme $D=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$ de sorte que $MQ=QD$. Calculons :

$$MQ=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&4&-\frac{3}{2}\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-9\\1&2&3\\1&4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&27\\1&1&-9\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$QD=\begin{pmatrix}1&1&-9\\1&2&3\\1&4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&-9c\\a&2b&3c\\a&4b&-c\end{pmatrix}$$

On voit donc que $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=-3$ conviennent. (Encore ces trois valeurs !)

On choisit donc $\boxed{D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&-3\end{pmatrix}}$.

13. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad M^n = QD^nQ^{-1}$.
<u>Initialisation :</u> $M^0 = I_3$ et $QD^0Q^{-1} = QI_3Q^{-1} = QQ^{-1} = I_3$: ok!
<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $M^n = QD^nQ^{-1}$. Alors :

$$M^{n+1} = MM^n = (MQ)D^nQ^{-1} = (QD)D^nQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1},$$

en utilisant le fait que $MQ = QD$. Ceci achève la récurrence.

14. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On a vu en 3.(b) que $X_n = M^n X_0$, c'est à dire ici $X_n = QD^nQ^{-1}X_0$.
Puisque D est une matrice diagonale, on peut calculer D^n immédiatement. On obtient donc :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} Q^{-1}X_0.$$

Sans chercher à calculer les coefficients de Q^{-1} ni même de X_0, on sait que $Q^{-1}X_0$ sera une certaine matrice colonne avec des valeurs numériques constantes, disons :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Ceci donne :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \cdot (\frac{1}{2})^n \\ c_3 \cdot (-3)^n \end{pmatrix}, \quad \text{avec } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

On peut calculer ce produit avec la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ pour obtenir l'expression du coefficient de la dernière ligne u_n :

$$u_n = c_1 + 4c_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - c_3 \cdot (-3)^n.$$

On a bien montré qu'il existait des constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ telles que
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = a + b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + c \cdot (-3)^n}$.

(b) Il faut ici se rappeler que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = P(A_n)$, donc en particulier $u_n \in [0, 1]$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $c \neq 0$.
Dans ce cas, il est clair que l'on aura pas $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$. On peut par exemple dire que

$$u_{2n} = a + b\left(\frac{1}{4}\right)^n + c \cdot 9^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pm\infty \quad \text{(en fonction du signe de } c\text{)}.$$

Contradiction ! Ainsi, on doit avoir $\boxed{c = 0}$.

Il en résulte que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + b\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
En se rappelant que $u_0 = 1$, on a la relation $a + b = 1$, donc $b = 1 - a$.
Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a + (1 - a)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Partie III - Cas d'un jeu à gain moyen nul

On revient à présent au cas général où le joueur reçoit : $\begin{cases} 0€ & \text{avec probabilité } p \\ 2€ & \text{avec probabilité } q \\ 3€ & \text{avec probabilité } r, \end{cases}$

où p, q, r sont des réels quelconques de $]0,1[$ tels que $p+q+r=1$.

Dans cette partie du problème, on suppose de plus que le gain moyen relatif est nul : $g = 2q+3r-1 = 0$.

15. (a) On est de retour au cas général, où $P(X) = rX^3 + qX^2 - X + p$.
    - On note que $P(1) = r+q-1+p = 0$ car $p+q+r=1$. Ainsi, 1 est une racine de P.
    - De plus, $P' = 3rX^2 + 2qX - 1$ donc : $P'(1) = 3r+2q-1 = g = 0$ car on a supposé que la gain moyen relatif est nul.
    - Enfin, $P'' = 6rX + 2q$ donc $P''(1) = 6r + 2q > 0$ donc $P''(1) \neq 0$.

    Conclusion : $\boxed{\text{1 est une racine double de } P}$.

    (b) Puisque 1 est racine double de P, P est divisible par $(X-1)^2$.
    Puisque P est de degré 3, on peut donc l'écrire sous la forme :
    $$P(X) = rX^3 + qX^2 - X + p = (X-1)^2(aX+b), \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}$$
    On peut développer et identifier les coefficients de chaque côté, ou bien remarquer (de tête) que :
    - Le coefficient dominant est r, ce qui impose $a = r$.
    - Le coefficient constant est p, ce qui impose $b = p$.

    On obtient donc : $P(X) = (X-1)^2(rX+p)$ c'est à dire $\boxed{P(X) = r(X-1)^2(X+\frac{p}{r})}$.

    On en déduit que P admet la racine simple $\boxed{\alpha = -\frac{p}{r}}$.

    Vérifions pour finir que $-\frac{p}{r} < 1$.

    On sait que $p+q+r=1$ et $2q+3r-1=0$ donc $p+q+r = 2q+3r$ et donc $p = q+2r > r$.

    Il en résulte que $\frac{p}{r} > 1$ et donc $\boxed{\alpha \in]-1, +\infty[}$.

16. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n le reste dans la division euclidienne de X^n par P.

    (a) On doit avoir $\deg(R_n) < \deg(P)$, c'est à dire $\deg(R_n) < 3$.

    Ainsi $\boxed{R_n \text{ est un polynôme de degré au plus 2}}$.

    On peut donc lui appliquer la $\boxed{\text{formule de Taylor à l'ordre 2 en 1}}$ pour obtenir :
    $$R_n(X) = R_n(1) + R_n'(1)(X-1) + \frac{R_n''(1)}{2}(X-1)^2.$$

    (b) La division euclidienne s'écrit :
    $$X^n = P(X)\,Q_n(X) + R_n(X), \quad \text{où } Q_n \text{ est le quotient (inconnu).}$$
    En évaluant en 1, puisque $P(1) = 0$, on obtient $1^n = R_n(1)$ donc $\boxed{R_n(1) = 1}$.

    On peut ensuite dériver des deux côtés de l'égalité pour obtenir :
    $$nX^{n-1} = P'(X)Q_n(X) + P(X)Q_n'(X) + R_n'(X) <:$$
    En évaluant en 1, puisque $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$ (car 1 est racine double de P), on obtient :
    $n1^{n-1} = R_n'(1)$ et donc $\boxed{R_n'(1) = n}$.

    (c) En partant à nouveau de l'égalité
    $$X^n = P(X)\,Q_n(X) + R_n(X), \quad \text{où } Q_n \text{ est le quotient (inconnu).}$$
    on peut évaluer en α (car $P(\alpha) = 0$) pour obtenir $\boxed{R_n(\alpha) = \alpha^n}$.

    Or, on a vu qu'on pouvait écrire
    $$R_n(X) = R_n(1) + R_n'(1)(X-1) + C(X-1)^2, \quad \text{avec } C = R_n''(1)$$
    ce qui donne :
    $$R_n(X) = 1 + n(X-1) + C(X-1)^2.$$
    On peut déterminer C en évaluant ceci en α :
    $$\alpha^n = 1 + n(\alpha-1) + C(\alpha-1)^2 \iff C = \frac{\alpha^n - 1 - n(\alpha-1)}{(\alpha-1)^2} \iff C = \frac{1}{(1-\alpha)^2}(\alpha^n - 1 + n(1-\alpha)).$$
    On a ainsi : $\boxed{R_n(X) = 1 + n(X-1) + \frac{1}{(1-\alpha)^2}\Big(\alpha^n - 1 + n(1-\alpha)\Big)(X-1)^2.}$

17. Soit $n \in \mathbb{N}$. Revenons encore une fois à la division euclidienne :

$$X^n = P(X)\,Q_n(X) + R_n(X), \quad \text{où } Q_n \text{ est le quotient (inconnu).}$$

Cette égalité entre polynôme conduit à l'égalité entre matrices carrées :

$$M^n = P(M)\,Q_n(M) + R_n(M).$$

Or, puisque P est un polynôme annulateur de M (vu en question 4.), il reste seulement

$$M^n = R_n(M).$$

En remplaçant avec l'expression de $R_n(X)$ déterminée précédemment, on trouve :

$$M^n = I_3 + n(M - I_3) + \frac{1}{(1-\alpha)^2}\Big(\alpha^n - 1 + n(1-\alpha)\Big)(M - I_3)^2.$$

Rassemblons les termes différemment :

$$M^n = \left(I_3 - \frac{1}{(1-\alpha)^2}(M-I_3)^2\right) + \alpha^n \cdot \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2}(M-I_3)^2\right) + n \cdot \left((M-I_3) + \frac{1}{1-\alpha}(M-I_3)^2\right).$$

Au final, on peut écrire $\boxed{M^n = A + \alpha^n \cdot B + n \cdot C}$ avec :

$$\boxed{A = I_3 - \frac{1}{(1-\alpha)^2}(M-I_3)^2}, \qquad \boxed{B = \frac{1}{(1-\alpha)^2}(M-I_3)^2}, \ ; \ \boxed{C = (M-I_3) + \frac{1}{1-\alpha}(M-I_3)^2}.$$

18. (a) Il faut à nouveau se rappeler que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ est donné par $X_n = M^n X_0$,

c'est à dire ici :

$$X_n = AX_0 + \alpha^n \cdot BX_0 + n \cdot CX_0$$

Or, les coefficients de la matrice colonne X_n sont des probabilités, donc sont toujours compris dans $[0,1]$!
On sait que $\alpha \in]-1, +\infty[$, donc le terme α^n est de signe alterné, et divergent.
Si jamais la matrice colonne BX_0 avait un coefficient non-nul, alors il est clair que pour n assez grand, l'un des coefficients de X_n n'appartiendrait pas à $[0,1]$. (Raisonnement similaire à celui détaillé en 14.(b)).

On doit ainsi avoir $\boxed{BX_0 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)}$.

Pour la même raison, on doit également avoir $\boxed{CX_0 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)}$, sans quoi les coefficients de X_n ne peuvent pas rester bornés quand n tend vers $+\infty$.

(b) On vient de voir que $BX_0 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ et $CX_0 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, ce qui s'écrit :

$$\frac{1}{(1-\alpha)^2}(M-I_3)^2 X_0 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right) \quad \text{et} \quad (M-I_3)X_0 + \frac{1}{1-\alpha}(M-I_3)^2 X_0 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right).$$

En faisant la différence de ces deux égalités, on déduit :

$$(M-I_3)X_0 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right) \text{ i.e } MX_0 - X_0 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$$

et donc $\boxed{MX_0 = X_0}$.

19. En se rappelant que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = MX_n$, puisque $MX_0 = X_0$,
on conclut par récurrence immédiate que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = X_0}$.

Ceci signifie que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ et donc en particulier : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 = 1}$.

Interprétation : Lorsque le jeu est à gain moyen nul, un joueur qui joue une succession infinie de parties finira presque-sûrement par être ruiné (la proba de finir ruiné est 1), et ce quel que soit son capital de départ !