\# 1

# Logique, symboles, raisonnement mathématique

## Logique et quantificateurs

**Exercice 1 (Traduction)**

Traduire les affirmations et leurs négations avec des quantificateurs :

1. Il existe $x \geqslant 0$ tel que $f(x) > -5x+2$.
2. $f$ s'annule au moins une fois sur $[0,1]$.
3. $f$ est constante sur $[0,1]$.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4.
6. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

---

**Exercice 2 ("Inversion" de quantificateurs)**

1. Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Relier les quantificateurs aux phrases correspondantes :

| | |
|---|---|
| $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$. • | • Toujours vrai |
| $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$. • | • Jamais vrai |
| $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$. • | • Vrai pour certaines fonctions |
| $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$. • | • Signifie que $f$ est constante |

2. Comparer : $\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x \leqslant k$
avec $\forall x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{R},\ e^x \leqslant k$

---

**Exercice 3 (Implications)**

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Indiquer si on a $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ ou $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ (ou aucun des trois).

| | |
|---|---|
| 1. $\mathcal{A}$ : "$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$" | $\mathcal{B}$ : "$x = \frac{\pi}{4}$" |
| 2. $\mathcal{A}$ : "$2\ln(x) \geqslant \ln(x+1)$" | $\mathcal{B}$ : "$x^2 \geqslant x+1$" |
| 3. $\mathcal{A}$ : "$x > \frac{1}{2}$" | $\mathcal{B}$ : "$\frac{1}{x} < 2$" |
| 4. $\mathcal{A}$ : "$x+y > 0$" | $\mathcal{B}$ : "$x > 0$ et $y > 0$" |
| 5. $\mathcal{A}$ : "$x+y > 0$" | $\mathcal{B}$ : "$x > 0$ ou $y > 0$" |
| 6. $\mathcal{A}$ : "$x = 0$" | $\mathcal{B}$ : "$\exists a > 0,\ \lvert x\rvert \leqslant a$" |
| 7. $\mathcal{A}$ : "$x = 0$" | $\mathcal{B}$ : "$\forall a > 0,\ \lvert x\rvert \leqslant a$" |

---

**Exercice 4 (Quelques équivalences)**

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence :
$(x+y)^2 = (x-y)^2 \iff (x = 0 \text{ ou } y = 0)$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $P$ le polynôme défini par :
$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^2 + bx$.

(a) On suppose que
$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) - P(x-1) = x$.
Déterminer les constantes $a$ et $b$.

(b) En déduire l'équivalence :
$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) - P(x-1) = x$
$\iff \quad \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \frac{x^2}{4}$.

## Récurrences

**Exercice 5 (Une suite récurrente)**

On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant $v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = 2v_n + \frac{1}{v_n}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n$ est bien défini et $v_n > 0$.

---

**Exercice 6 (Une décomposition)**

Montrer :
$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2, (3+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

---

**Exercice 7 (Divisibilité par 3)**

On rappelle qu'un entier $a$ est divisible par 3 si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 3k$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

---

**Exercice 8 (Une suite à récurrence linéaire double)**

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \geqslant 2,\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$.

1. Calculer les premiers termes de la suite puis conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.
2. Démontrer rigoureusement cette conjecture.

---

**Exercice 9 (Une suite de rationnels)**

On définit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant $w_1 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \frac{w_1}{n} + \frac{w_2}{n-1} + \ldots + \frac{w_n}{1}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \in \mathbb{Q}$.

## Ensembles

**Exercice 10 (Valide ou non ?)**

Soient $E = \{a, b, c\}$, $F = \{c, d\}$ et $G = \{e\}$.
Peut-on écrire les choses suivantes ? Si non, que faudrait-il écrire à la place ?

1. $a \subset E$ 2. $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$
3. $E \cap F = c$ 4. $E \cap F = \{\emptyset\}$

---

**Exercice 11 (Traduction)**

Écrire les ensembles suivants sous forme implicite, puis sous forme explicite :

1. Ensemble des entiers divisibles par 3
2. Ensemble des réels positifs dont le carré est un entier
3. Ensemble des couples de réels dont la somme vaut 1

---

**Exercice 12 (Ensembles et logique)**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Traduire les inégalités suivantes en terme d'appartenance à une partie de $\mathbb{R}$.

a) $(x \leqslant 2$ et $x \geqslant -1)$ ou $x > 3$
b) $x > 4$ et $(x \leqslant 6$ ou $x \geqslant 2)$

---

**Exercice 13 (Réunion de $n$ ensembles)**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ avec :

a) $\forall i \in [\![1, n]\!],\ A_i = [0, i]$
b) $\forall i \in [\![1, n]\!],\ A_i = [i, i+1[$.
c) $\forall i \in [\![1, n]\!],\ A_i = ]\frac{1}{i}, i]$

---

**Exercice 14 (Différence symétrique)**

Soient $A, B$ deux parties de $E$.
On pose $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

1. Faire un dessin.
2. Déterminer $A\Delta A, A\Delta E$ et $A\Delta\emptyset$.
3. (a) Montrer : $A\Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$.
(b) Déduire de (a) que $A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$.
(c) Déduire de (a) que $\overline{A\Delta B} = \overline{A}\Delta B$.
4. Montrer que $A\Delta B = \emptyset \Longleftrightarrow A = B$.

---

**Exercice 15 (Une partie de $\mathbb{N}^2$)**

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble
$E_r = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q = r\}$.

1. Expliciter $E_0$, $E_1$, $E_2$, $E_3$.
2. Représenter ces ensembles dans le plan $\mathbb{R}^2$.
3. Que dire de $E_r \cap E_{r'}$ pour $r \neq r'$ ?
4. Montrer : $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \exists ! r \in \mathbb{N},\ (p, q) \in E_r$.