2

Sommes et produits

Exercice 1 (Traduction)

- $S_1 = \sum_{k=0}^{n} 4^k$ • $S_2 = \sum_{k=0}^{5} (2k+1)^2$. • $S_3 = \prod_{k=1}^{n} \ln(2k)$ • $S_4 = \prod_{k=1}^{50} (-1)^k k$. • $S_5 = \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
- $S_6 = \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \frac{x^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{6} \frac{(-x)^k}{k+1}$.

Exercice 2 (Factorielles)

1. a) $\frac{1}{5!}$ b) $6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{10!}{5!}$.

2. a) $\frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$ b) $\frac{(n-1)!}{(n-4)!} = (n-1)(n-2)(n-3)$.

c) $\frac{(n^2-1)n!}{n-1} = \frac{(n-1)(n+1)n!}{n-1} = (n+1)n! = (n+1)!$.

3. $m \times (m+1) \times \ldots \times n = \frac{1 \times 2 \times \ldots \times (m-1) \times m \times (m+1) \times \ldots \times n}{1 \times 2 \times \ldots \times (m-1)} = \frac{n!}{(m-1)!}$.

Exercice 3 (Calcul de sommes)

- $\sum_{i=0}^{n} (2i+n+3) = 2\sum_{i=0}^{n} i + (n+3)\sum_{i=0}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} + (n+3)(n+1) = n(n+1) + (n+3)(n+1) = (2n+3)(n+1)$.
- $\sum_{k=2}^{n+1} n^3 = n^3 \sum_{k=2}^{n+1} 1 = n^3(n+1-2+1) = n^4$.
- $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.
- $\sum_{p=1}^{n} p(p-1) = \sum_{p=1}^{n} (p^2 - p) = \sum_{p=1}^{n} p^2 - \sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)}{6}$
$= \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$.
- $\sum_{k=n+1}^{2n} k = \sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(4n+2-n-1)}{2} = \frac{n(3n+1)}{2}$.
- Avec le changement d'indice $k = n+i$:
$\sum_{i=1}^{n} (n+i)^2 = \sum_{k=n+1}^{2n} k^2 = \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$.
- Avec le changement d'indice $i = k-2$:
$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{3^{k-2}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{3^i} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$.
- Avec le changement d'indice $i = n-k$:
$\sum_{k=1}^{n} (-3)^{n-k} = (-3)^{n-1} + (-3)^{n-2} + \ldots + (-3)^0 = \sum_{i=0}^{n-1} (-3)^i = \frac{1-(-3)^n}{1-(-3)} = \frac{1-(-3)^n}{4}$.
- $\sum_{k=0}^{2n} \frac{5^k - 2^{2k}}{2^k} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{5^k}{2^k} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{2^{2k}}{2^k} = \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{5}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{2n} 2^k = \frac{1-(\frac{5}{2})^{2n+1}}{1-\frac{5}{2}} - \frac{1-2^{2n+1}}{1-2}$
$= -\frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{5}{2}\right)^{2n+1}\right) + (1 - 2^{2n+1}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^{2n+1} - 2^{2n+1}$.

Exercice 4 (Calcul de produits)

- $\displaystyle\prod_{p=1}^{n}(p+1)^3 = \left(\prod_{p=1}^{n}(p+1)\right)^3 = \left(\prod_{i=2}^{n+1} i\right)^3 = \left(\prod_{i=1}^{n+1} i\right)^3 = ((n+1)!)^3$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^k = 2^1 \times 2^2 \times \ldots 2^n = 2^{1+2+\ldots+n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$
- $\displaystyle\prod_{p=1}^{n}\frac{2}{p^2} = \frac{\prod_{p=1}^{n} 2}{\prod_{p=1}^{n} p^2} = \frac{2^n}{\left(\prod_{p=1}^{n} p\right)^2} = \frac{2^n}{(n!)^2}$
- $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k(n-k+1) = \left(\prod_{k=1}^{n} k\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n}(n-k+1)\right) = n! \times \Big(n \times (n-1) \times \ldots \times 1\Big) = n! \times n! = (n!)^2$

Exercice 5 (Exponentielle et logarithme)

1. - $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\exp(kx) = \sum_{k=0}^{n} e^{kx} = \sum_{k=0}^{n}(e^x)^k$, donc :

Si $e^x \neq 1$ (c'est à dire si $x \neq 0$) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\exp(kx) = \frac{1-(e^x)^{n+1}}{1-e^x} = \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x}$

Si $e^x = 1$ (c'est à dire si $x = 0$) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\exp(kx) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\exp(k+x) = \sum_{k=0}^{n} e^{k+x} = \sum_{k=0}^{n} e^k e^x = e^x \sum_{k=0}^{n} e^k = e^x\frac{1-e^{n+1}}{1-e}$
- $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\exp(kx) = \prod_{k=0}^{n} e^{kx} = e^0 \times e^x \times e^{2x} \times \ldots \times e^{nx} = e^{x+2x+\ldots+nx} = e^{x(1+2+\ldots+n)} = e^{x\frac{n(n+1)}{2}}$
- $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\exp(k+x) = \prod_{k=0}^{n} e^{k+x} = \prod_{k=0}^{n}(e^k e^x) = (e^x)^{n+1}\prod_{k=0}^{n} e^k = (e^x)^{n+1}e^{0+1+2+\ldots+n} = (e^x)^{n+1}e^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$= e^{(n+1)x+(n+1)\frac{n}{2}} = e^{(n+1)(x+\frac{n}{2})}$

2. - $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(kx) = \ln(x)+\ln(2x)+\ldots+\ln(nx) = \ln(x \times 2x \times \ldots \times nx) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} kx\right)$

$\displaystyle= \ln\left(x^n\prod_{k=1}^{n} k\right) = \ln(x^n n!)$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(x^k) = \sum_{k=1}^{n} k\ln(x) = \ln(x)\sum_{k=1}^{n} k = \ln(x)\frac{n(n+1)}{2}$
- Si $\ln(x) \neq 1$ (c'est à dire si $x \neq e$) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\ln(x))^k = \frac{\ln(x)-\ln(x)^{n+1}}{1-\ln(x)}$

Si $\ln(x) = 1$ (c'est à dire si $x = e$) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\ln(x))^k = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$

- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\ln(x^k) = \prod_{k=1}^{n}(k\ln(x)) = \ln(x)^n\prod_{k=1}^{n} k = \ln(x)^n n!$

Exercice 6 (Décomposition astucieuse)

1. On cherche a et b réels tels que pour tout $x \notin \{0,1\}$,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x+1} \iff \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)} \iff 1 = a(x+1)+bx \iff 1 = (a+b)x+a.$$

Il suffit de choisir a et b pour que $a+b=0$ et $a=1$. On peut choisir $a=1$ et $b=-1$.

2. On a vu dans le 1. que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \quad \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ par téléscopage.}$$

Exercice 7 (Somme des carrés)

Par téléscopage, $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1^3 = (n+1)^3 - 1$.

Par ailleurs, en développant le cube : $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1)$.

Ainsi : $S = 3\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$. On a donc l'égalité :

$$\begin{aligned}
3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n = (n+1)^3 - 1 &\iff \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{3} = \frac{(n+1)^3 - 1}{3} \\
&\iff \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)^3 - n - 1}{3} - \frac{n(n+1)}{2} \\
&\iff \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)^2 - 1)}{3} - \frac{(n+1)n}{2} \\
&\iff \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2(n+1)^2 - 2) - (n+1)3n}{6} \\
&\iff \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2(n+1)^2 - 3n - 2)}{6} \\
&\iff \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{6} = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

On a bien retrouvé la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 8 (Sommes avec parité)

$S_n + T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Dans le cas où n est pair, on peut écrire $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Dans ce cas :

$S_n = \displaystyle\sum_{k \in \{2,4,\dots,2p-2,2p\}} k = \sum_{i=1}^{p} 2i = 2\sum_{i=1}^{p} i = 2\frac{p(p+1)}{2} = p(p+1)$.

Puisque $p = \dfrac{n}{2}$, on obtient donc $S_n = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{n}{2} + 1\right) = \dfrac{n(n+2)}{4}$.

Puis : $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2} - S_n = \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{n(n+2)}{4} = \dfrac{n(2n+2)}{4} - \dfrac{n(n+2)}{4} = \dfrac{n^2}{4}$.

- Dans le cas où n est impair, on peut écrire $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. On a toujours :

$S_n = \displaystyle\sum_{k \in \{2,4,\dots,2p-2,2p\}} k = \sum_{i=1}^{p} 2i = 2\sum_{i=1}^{p} i = 2\frac{p(p+1)}{2} = p(p+1)$.

Cette fois $p = \dfrac{n-1}{2}$, on obtient donc $S_n = \dfrac{n-1}{2}\left(\dfrac{n-1}{2} + 1\right) = \dfrac{(n-1)(n+1)}{4}$.

Puis : $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2} - S_n = \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{(n-1)(n+1)}{4} = \dfrac{2n(n+1)}{4} - \dfrac{(n-1)(n+1)}{4} = \dfrac{(n+1)^2}{4}$.

Exercice 9 (Produits avec parité)

$P_n \times Q_n = \prod_{k=1}^{n} k = n!$.

- Dans le cas où n est pair, on peut écrire $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$. Dans ce cas :

$P_n = \prod_{k\in\{2,4,\dots,2p-2,2p\}} k = \prod_{i=1}^{p} 2i = 2^p p!$.

Puisque $p = \frac{n}{2}$, on obtient donc $S_n = 2^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2})!$. Puis : $Q_n = \frac{n!}{P_n} = \frac{n!}{2^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2})!}$.

- Dans le cas où n est impair, on peut écrire $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. On a toujours :

$P_n = \prod_{k\in\{2,4,\dots,2p-2,2p\}} k = \prod_{i=1}^{p} 2i = 2^p p!$.

Cette fois $p = \frac{n-1}{2}$, on obtient donc $S_n = 2^{\frac{n-1}{2}}(\frac{n-1}{2})!$. Puis : $Q_n = \frac{n!}{P_n} = \frac{n!}{2^{\frac{n-1}{2}}(\frac{n-1}{2})!}$.

Exercice 10 (Dérivation)

La fonction f est bien dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, puisque c'est un polynôme !

- D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$.

donc $f'(x) = 0 + 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$ c'est à dire $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

- D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, on sait que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

En dérivant cette expression : $f'(x) = \frac{-(n+1)x^n \times (1-x) - (1-x^{n+1}) \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

On en déduit finalement : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

Exercice 11 (Télescopage)

- $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k) - \ln(k+1)\Big) = \ln(1) - \ln(n+1) = -\ln(n+1)$.
- $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k} \times \frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) + \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)\right)$

$= \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) + \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(2) + \ln(1) - \ln(n) = \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(2)$

$= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$.

- $\sum_{k=1}^{n-1} k \times k! = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1-1) \times k! = \sum_{k=1}^{n-1} ((k+1)k! - k!) = \sum_{k=1}^{n-1} ((k+1)! - k!) = n! - 1$.
- $\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{k}{k!} - \frac{1}{k!}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{k}{k(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right) = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right) = 1 - \frac{1}{n!}$.

Exercice 12 (Décomposition astucieuse II)

1. On cherche a, b, c réels tels que pour tout $x \notin \{-2,-1,0\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} &\iff \frac{2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)} \\
&\iff 2 = a(x+1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x+1) \\
&\iff 2 = a(x^2+3x+2) + b(x^2+2x) + c(x^2+x) \\
&\iff 2 = (a+b+c)x^2 + (3a+2b+c)x + 2a.
\end{aligned}$$

Il suffit de choisir a, b, c pour que : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=2 \end{cases}$. En résolvant on obtient : $a=1$, $b=-2$, $c=1$.

2. D'après le 1., pour tout $k \geqslant 1$, on peut écrire $\dfrac{2}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{2}{k+1} + \dfrac{1}{k+2}$

c'est à dire $\dfrac{2}{k(k+1)(k+2)} = \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) + \left(\dfrac{1}{k+2} - \dfrac{1}{k+1}\right)$.

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{-(n+2)+n+1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Exercice 13 (Libres)

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} 2^{2i-j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} 4^i \left(\frac{1}{2}\right)^j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(4^i \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{1}{2}\right)^j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(4^i \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{p+1}}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \sum_{i=1}^{n} 4^i\left(1 - \frac{1}{2^p}\right)$

$\displaystyle= \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)\sum_{i=1}^{n} 4^i = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)\frac{4-4^{n+1}}{1-4} = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)\frac{4^{n+1}-4}{3} = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right)(4^n - 1)$.

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{p} 2\right) = \sum_{i=0}^{n} 2(p+1) = (n+1)\times 2(p+1) = 2(n+1)(p+1)$.

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{n} 1 + \sum_{j=1}^{n} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(ni + \frac{n(n+1)}{2}\right) = n\sum_{i=1}^{n} i + \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} 1$

$= n\dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{n(n+1)}{2}n = n^2(n+1)$.

Exercice 14 (Avec contraintes)

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 1 = \sum_{i=0}^{n-1}(n-i) = n\sum_{i=0}^{n-1} 1 - \sum_{i=0}^{n-1} i = n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i = n^2 - \frac{(n-1)n}{2} = n\left(n - \frac{n-1}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{i^3}{j^2}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j^2}\sum_{i=1}^{j} i^3\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j^2}\frac{j^2(j+1)^2}{4}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)^2}{4} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}(j+1)^2$. Avec le changement d'indice $k = j+1$ on obtient :

$\displaystyle= \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n+1} k^2 = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n+1} k^2 - 1\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - 1\right)$

c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n}(i+j)\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(i\sum_{j=i+1}^{n} 1 + \sum_{j=i+1}^{n} j\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(i(n-i) + \left(\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{i} j\right)\right)$

$\displaystyle= \sum_{i=0}^{n-1}\left(i(n-i) + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{3}{2}i^2 + (n - \frac{1}{2})i + \frac{n(n+1)}{2}\right)$

$\displaystyle= -\frac{3}{2}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 + (n - \frac{1}{2})\sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=0}^{n-1} 1$ ... après calcul et simplification, on obtient : $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$.

Exercice 15 (En distinguant des cas)

a) Puisque $\min(i,j) = \begin{cases} j \text{ si } & j \leqslant i \\ j \text{ sinon} \end{cases}$, on peut calculer en séparant la somme en deux morceaux :

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + i\sum_{j=i+1}^{n} 1\right)$

$\displaystyle= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + i(n-i)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}i^2 + (n + \frac{1}{2})i\right) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + (n + \frac{1}{2})\sum_{i=1}^{n} i$.

... après calcul et simplification on obtient : $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) Avec la même méthode on obtient : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max(i,j)=\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$.

c) Cette fois il faut noter que $|i-j|=\begin{cases} i-j \text{ si } & j\leqslant i \\ j-i \text{ sinon} & \end{cases}$.

Avec le même genre de calcul, on obtient : $\displaystyle\frac{n(n+1)(n-1)}{3}$.

Exercice 16 (Somme et carré)

Il suffit de remarquer que la quantité dont on parle est en fait $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$.

En effet : $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_j=\sum_{1\leqslant i=j\leqslant n}^{n}x_ix_j+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}x_ix_j$

$\displaystyle=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$ (par symétrie)

$\displaystyle=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j.$

Puisqu'on sait que le carré $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$ est toujours positif, on en déduit immédiatement le résultat.