11

Espaces probabilisés finis

Univers et évènements

Exercice 1 (Décrire l'univers...)
Dans chacun des cas suivants, décrire l'univers Ω et préciser son cardinal.

1. Douze chevaux (n°1 à 12) participent à une course hippique. On s'intéresse au résultat du tiercé.

2. Une urne contient 9 boules, numérotées de 1 à 9. On effectue 2 tirages d'une boule avec remise.

3. Une urne contient 9 boules, numérotées de 1 à 9. On effectue 2 tirages d'une boule sans remise.

4. On lance n fois un dé à 6 faces et on note les différentes valeurs obtenues ($n \geqslant 1$).

Exercice 2 (Expression d'évènements)
Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire trois boules successivement, avec remise.
Pour tout $i \in [\![1, 10]\!]$, on note A_i (resp. B_i, C_i) l'événement "Tirer la boule n°i au premier (resp. deuxiéme, troisiéme) tirage".
Exprimer les événements suivants à l'aide des A_i, B_i, C_i, puis en déduire leur probabilité.
(a) La deuxième boule tirée porte un numéro pair.
(b) On obtient trois fois la boule n°6.
(c) On obtient trois fois la même valeur.
(d) On ne tire jamais la boule n°2.
(e) On tire exactement deux fois la boule numéro 1.

Probas et dénombrement

Exercice 3 (3 lancers)
On lance 3 fois un dé à 6 faces équilibré et on note les numéros obtenus.
Quelle est la probabilité d'obtenir :
(a) des nombres tous différents ?
(b) au moins un 6 ?
(c) exactement deux 6 ?

Exercice 4 (Bulbes aléatoires)
Un jardinier a acheté un sachet de 10 bulbes de tulipes. L'étiquette indique que 4 bulbes donnent des fleurs rouges, 4 bulbes donnent des fleurs jaunes, les 2 autres donnent des tulipes roses. Le jardinier plante 3 bulbes. Quelle est la probabilité d'obtenir :
(a) au moins une tulipe rouge ?
(b) des tulipes roses ou rouges uniquement ?
(c) des tulipes d'une seule couleur ?
(d) des tulipes de toutes les couleurs ?

Exercice 5 (Main au hasard)
On tire au hasard 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité :
(a) D'avoir exactement 3 coeurs ?
(b) D'avoir (au moins) une paire ?
(c) D'avoir 5 cartes de la même couleur ?

Manipulation de probabilités

Exercice 6 (Petits calculs)
Soient A et B des événements tels que $P(A) = \frac{1}{3}$ et $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Calculer $P(B)$ dans les cas suivants :
1. A et B sont incompatibles.
2. $A \subset B$. 3. A et B sont indépendants.

Exercice 7 (Inégalité de Boole)
Montrer par récurrence l'inégalité :
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Exercice 8 (Le dé truqué)
Un dé à 6 faces est truqué : la probabilité d'obtenir $k \in [\![1, 6]\!]$ est proportionnelle à k.
(a) Déterminer la probabilité de chaque numéro.
(b) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Exercice 9 (Filtre anti-spam)
On considère que 70% des mails reçus sont des spams. Un logiciel anti-spam tente d'éliminer les spams : 95% des spams sont éliminés, mais 2% des mails bienvenus sont aussi éliminés...

Quelle est la probabilté :
1. Qu'un mail soit bienvenu ?
2. Qu'un mail soit éliminé ?
3. Qu'un mail éliminé soit bienvenu ?
4. Que le logiciel fasse mal son travail ?

Exercice 10 (L'énigme du "faux-positif")
Seuls 1% des blocs puisés dans une mine contiennent du diamant. Un bloc contenant du diamant peut être revendu 1000 €, un bloc n'en contenant pas ne vaut rien. On possède un détecteur plutôt fiable :

• Si un bloc contient du diamant, le détecteur l'indique systématiquement.

• Si un bloc n'en contient pas, le détecteur indique le bon résultat 90% du temps.

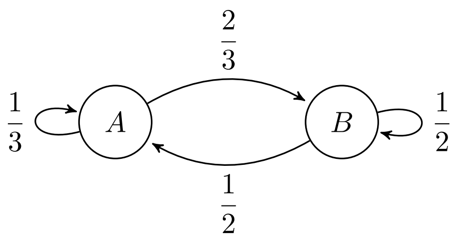
À l'entrée de la mine, un individu louche vous propose d'acheter un bloc pour seulement 200 €.
En le passant au détecteur, celui-ci indique qu'il contient du diamant ! Faut-il accepter l'offre ?

Exercices classiques

Exercice 11 (Chaîne de Markov)

Dans une mare avec deux nénuphars A et B, une grenouille saute aléatoirement :

- À l'instant $n = 0$, elle se situe sur le nénuphar A.
- Entre l'instant n et l'instant $n+1$, indépendamment des mouvements effectués précédemment, elle choisit de sauter avec les probabilités indiquées sur le graphique suivant :



Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note :
A_n ="La grenouille se situe en A au temps n"

1. Calculer $P(A_0)$, $P(A_1)$ et $P(A_2)$.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{2}P(\overline{A_n}).$$
3. En déduire l'expression de $P(A_n)$ en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$?

Exercice 12 (La ruine du joueur)

Un joueur s'installe devant une machine à sous.
À chaque partie, il gagne 1€ avec probabilité $p > 0$ et perd 1 euro avec probabilité $q = 1 - p$.

On suppose qu'un partie n'est pas équilibrée : $p \neq q$ (vraisemblablement, $q > p$ ...)

Le joueur s'arrête :

- Soit s'il est ruiné (logique).
- Soit s'il atteint la somme de N € qu'il s'est fixée comme objectif.

Pour tout $n \in [\![0, N]\!]$, on note R_n l'événement : "Le joueur, ayant un capital de départ de n €, fini ruiné." On note $u_n = P(R_n)$.

1. Donner les valeurs de u_0 et de u_N.
2. En distinguant les cas selon le résultat de la première partie, montrer que :
$\forall n \in [\![1, N-1]\!],\ u_n = pu_{n+1} + qu_{n-1}$.
3. En déduire l'expression : $u_n = \dfrac{(q/p)^n - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N}$.

Exercice 13 (Urnes au hasard)

On considère N urnes $U_1, \ldots, U_N$, telles que U_j contient j boules blanches et $N+1-j$ boules noires.

1. On tire une boule dans une urne choisie uniformément au hasard.
a) Quelle est la probabilité que la boule soit blanche ?
b) Si on sait que la boule est blanche, quelle est la probabilité qu'elle provienne de "U_1 ou U_N" ?
2. On tire simultanément n boules dans une même urne, choisie uniformément au hasard ($1 \leqslant n \leqslant N$). Quelle est la probabilité qu'elles soient toutes blanches ?
3. Montrer par récurrence sur $N \geqslant n$ que
$$\sum_{j=n}^{N} \binom{j}{n} = \binom{N+1}{n+1},$$
puis simplifier la probabilité précédente.

Inspiré ESCP 2019 (voie T)

Dans une ville, l'étude des bulletins météo laisse penser que le temps qu'il fait un jour donné dépend du temps qu'il a fait la veille, et ce de la façon suivante :

- S'il fait beau un jour donné, la probabilité que cela continue le lendemain est $\frac{4}{5}$.
- S'il fait mauvais temps un jour donné, la probabilité que cela continue le lendemain est $\frac{2}{5}$.

On s'intéresse à une période débutant le jour 1, jour au cours duquel il a fait beau.
Pour tout $n \geqslant 1$, on note B_n l'évènement "Il faut beau le jour n" et $u_n = P(B_n)$.

1. Quelle est la valeur de u_1 ?
2. À l'aide de la formule de la probabilité totale, montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}(1 - u_n)$.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Comment interpréter ce résultat ?