A rendre le **Jeudi 18 décembre 2025**

Devoir Maison n°3 : Méthode de Newton

Partie I : Cas général d'une fonction convexe

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant les hypothèses suivantes :

$\boxed{1}$ $f(a) < 0 < f(b)$ $\quad$ $\boxed{2}$ $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ et f' est strictement croissante sur $[a, b]$.
(on dit qu'une telle fonction est (strictement) convexe sur $[a, b]$)

1. Justifier que f s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]a, b[$.

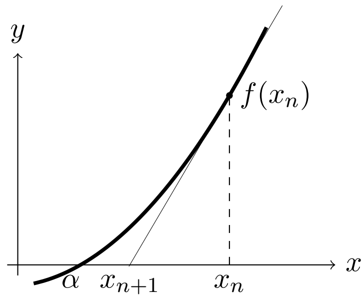
On cherche maintenant à montrer l'unicité de ce point d'annulation.

2. (a) Justifier que f' est de signe constant, ou bien s'annule exactement une fois sur $[a, b]$.
   (b) En distinguant différents cas selon le signe de f', montrer que f s'annule en un unique $\alpha \in]a, b[$, et que de plus : $\forall x \in [\alpha, b],\ f(x) \geqslant 0$ et $f'(x) > 0$.

Dans la suite, nous allons chercher à déterminer une valeur approchée de α à l'aide d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite avec la **méthode de Newton**. On définit :

$$x_0 = b \quad \text{et} \quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}.$$

3. Montrer que cette construction correspond à l'interprétation géométrique ci-contre.
   En supposant que x_n est construit, on trace la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_n. La valeur x_{n+1} correspond alors à l'abscisse du point d'intersection entre cette tangente et l'axe des abscisses.



4. Démontrer l'inégalité : $\forall (x, y) \in [a, b]^2,\ f(x) \geqslant f(y) + f'(y)(x - y)$.
   Indication : Appliquer l'égalité des accroissements finis et distinguer les cas $x \leqslant y$ et $x > y$.
   (Ceci signifie que le graphe de f est toujours au dessus de ses tangentes : propriété des fonctions convexes)
5. Déduire de cette inégalité que la fonction $F : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ est croissante sur $[\alpha, b]$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini et $\alpha \leqslant x_n$.
7. Etablir le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer finalement qu'elle converge vers α.

Partie II : Etude d'un exemple

Soit $N \geqslant 2$ un entier fixé. On souhaite calculer une valeur approchée de $\sqrt{N}$ à l'aide de la méthode de Newton. On considère pour cela la fonction $f : x \mapsto x^2 - N$, qui s'annule en $\alpha = \sqrt{N}$.

8. Vérifier que cette fonction f satisfait bien les hypothèses $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ sur le segment $[a, b] = [0, N]$.
9. Montrer que dans ce cas, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite avec la méthode de Newton devient :
$$x_0 = N, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right).$$
   (Méthode de Héron, connue depuis l'Egypte antique pour calculer des valeurs approchées de racines carrées.)
10. (a) Démontrer l'inégalité : $\forall (x, y) \in \left[\sqrt{N}, N\right]^2,\ |F(x) - F(y)| \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)|x - y|$, où F est la fonction introduite en question 5.
    (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad x_{n+1} - \sqrt{N} \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)(x_n - \sqrt{N})$.
    (c) En déduire finalement que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leqslant x_n - \sqrt{N} \leqslant \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)^n \sqrt{N}(\sqrt{N} - 1)$
    et retrouver ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{N}$.

(Tournez la page pour trois dernières questions sur Python...)

Partie III : Implémentation en Python

On souhaite utiliser Python pour calculer une approximation de $\sqrt{5}$ à l'aide de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de Héron (décrite en Partie II). Bien-sûr, on n'utilisera pas l'instruction `sqrt`, ce serait tricher !

11. Proposer une fonction qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de x_n.
12. Proposer une fonction qui prend en entrée un entier n et renvoie le vecteur `V = [` $x_0, x_1, \ldots, x_n$ `]` .
13. On veut enfin créer un programme qui permette de calculer une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à ε près.
    (a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier que pour tout $x \geqslant \sqrt{5}$, la condition $x^2 - 5 \leqslant 4\varepsilon$ garantit que $x - \sqrt{5} \leqslant \varepsilon$.
    (b) En déduire comment compléter le programme suivant pour renvoyer une approximation à ε près.

```
def appxo(eps) :
  x = 5
  while ............... :
    x = ........
  return x
```