2

Sommes et produits

1 Somme de nombres

1.1 Symbole Σ

Définition 1 (Somme avec indices successifs)

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$. Soient $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ des nombres réels.

La somme de tous ces nombres se note : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$

Cette notation se lit : "Somme pour k allant de m à n des a_k".

On dit que :
- a_k est le terme général de la somme.
- k est l'indice de sommation.
- m et n sont les bornes de la somme.

Remarque 1

- L'indice de sommation k (qui parcourt les entiers de m jusqu'à n) est une variable muette : le nom qu'on lui donne est arbitraire, et il n'a de sens que "localement", à l'intérieur de la somme. On peut ainsi choisir un autre nom pour cet indice (en général on l'appelle i, j ou k) :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{indice=m}^{n} a_{indice}$$

En particulier, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$ ne peut pas dépendre de k.

- En revanche, les bornes m et n de la somme sont des entiers définis et fixés à l'avance !

La valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$ dépend (en général) de m et n.

- Si jamais $m > n$ alors la somme est "vide" : par convention on décide que $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$

Exemples

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} k = \sum_{i=0}^{5} i = 0+1+2+3+4+5 = 15.$
- $\displaystyle\sum_{j=2}^{4} 2^j = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 4+8+16 = 28.$
- $\displaystyle\sum_{\ell=2}^{2} \ell^2 = 2^2 = 4.$
- $\displaystyle\sum_{k=2}^{0} (k+1)^2 = 0$ car $2 > 0$.

Définition 2 (Somme avec indices généraux)

- La somme $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$ se note également : $\displaystyle\sum_{k\in[\![m,n]\!]} a_k$ ou encore $\displaystyle\sum_{m\leqslant k\leqslant n} a_k$.
- Plus généralement, si $A = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\} \subset \mathbb{N}$, on note $\displaystyle\sum_{k\in A} a_k = a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_p}$.

Exemples

- $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant 3} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1+4+9 = 14$
- $\displaystyle\sum_{k\in\{1,3,4\}} \frac{k}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} = \frac{8}{2} = 4.$

On peut construire un algorithme basique permettant de calculer des sommes de nombres, à l'aide d'une boucle `for`. (Cette syntaxe sera bientôt étudiée en Python)

Algorithme : Calculer une somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

```
S = 0
for k in range(0,n+1) : # k = 0 puis 1, puis ..., puis n
  S = S + a_k
print(S)
```

Exemple : Algorithme calculant la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{100}$:

```
S = 0
for k in range(1,101) : # k = 1,2,...,100
      S = S + 1/k
print(S)
```

1.2 Règles de calcul de sommes

Proposition 1 (Chasles, séparation et factorisation)

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$. Soient $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

- **Relation de Chasles :** Pour tout $j \in [\![m, n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{j} a_k + \sum_{k=j+1}^{n} a_k$
- **"Séparation" des sommes :** $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$
- **Factorisation :** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$

Preuve :

Il suffit d'écrire les sommes "avec des pointillés" pour constater que ces propriétés sont vraies :

- $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n = (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_j) + (a_{j+1} + a_{j+2} + \ldots + a_n)$
- $(a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \ldots (a_n + b_n) = (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \ldots + b_n)$
- $\lambda a_m + \lambda a_{m+1} + \ldots + \lambda a_n = \lambda(a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n)$ $\square$

Remarques 2

- Les deux dernières propriétés se généralisent facilement à des sommes avec indices généraux $\sum_{k \in A} a_k$.
- Pour résumer les deux dernières propriétés, on peut affirmer que le symbole $\sum$ est "linéaire" :

$$\text{Pour toutes constantes } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k + \mu \sum_{k=m}^{n} b_k$$

- La relation de Chasles permet en particulier d'"isoler" les termes extrémaux de la somme :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n.$$

Exemples

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} 5j^3 = 5\sum_{j=1}^{3} j^3 = 5(1^3+2^3+3^3) = 5\times 36.$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}(2k+3k^2) = 2\sum_{k=0}^{4} k + 3\sum_{k=0}^{4} k^2 = 2(0+1+2+3+4)+3(0+1^2+2^2+3^2+4^2) = 2\times 10+3\times 30 = 110.$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kn = n\sum_{k=1}^{n} k$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(1-k)+\sum_{i=1}^{4} i = \sum_{k=1}^{4}(1-k)+\sum_{k=1}^{4} k = \sum_{k=1}^{4}(1-k+k) = \sum_{k=1}^{4} 1 = 1+1+1+1 = 4.$

Attention !

- Pour "regrouper" deux sommes, il est indispensable qu'elles aient les mêmes bornes !

<u>Exemple :</u> $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k + \sum_{k=1}^{4} 3k^2 = \sum_{k=1}^{4}(k+3k^2)$ mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} k + \sum_{k=1}^{4} 3k^2 \neq \sum_{k=1}^{2}(k+3k^2)$

- La propriété de factorisation affirme que l'on peut "sortir" de la somme une <u>constante</u> multiplicative. En revanche, <u>on ne peut pas</u> "sortir" de la somme <u>un terme qui dépend de l'indice de sommation</u> !

<u>Exemple :</u> $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3\times 2^k = 3\times\sum_{k=1}^{n} 2^k$ mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\times 2^k \neq k\times\sum_{k=1}^{n} 2^k$ (d'ailleurs ceci n'a pas de sens !)

- Une somme de produits n'est pas égal (en général) au produit des sommes !

<u>Exemple :</u> $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\times 2^k \neq \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n} 2^k\right)$

Proposition 2 (Distributivité)

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $n', m' \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$ et $m' \leqslant n'$.
Soient $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_{m'}, b_{m'+1}, \ldots, b_{n'} \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=m'}^{n'} b_j\right) = \sum_{i=m}^{n}\left(\sum_{j=m'}^{n'} a_i b_j\right) = \sum_{j=m'}^{n'}\left(\sum_{i=m}^{n} a_i b_j\right)$$

Exemple

Développons le produit $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{3} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2} b_j\right)$ de ces deux façons différentes :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{3} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2} b_j\right) &= (a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2) = (a_1b_1+a_1b_2)+(a_2b_1+a_2b_2)+(a_3b_1+a_3b_2)\\ &= \sum_{j=1}^{2} a_1b_j + \sum_{j=1}^{2} a_2b_j + \sum_{j=1}^{2} a_3b_j = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{2} a_ib_j\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{3} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2} b_j\right) &= (a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2) = (a_1b_1+a_2b_1+a_3b_1)+(a_1b_2+a_2b_2+a_3b_2)\\ &= \sum_{i=1}^{3} a_ib_1 + \sum_{i=1}^{3} a_ib_2 = \sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{3} a_ib_j\right).\end{aligned}$$

1.3 Sommes usuelles

Théorème 1 (Sommes usuelles)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les sommes explicites suivantes :

- **Somme des 1 :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ et plus généralement, pour $m \leqslant n$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$ ♡

- **Somme des n premiers entiers :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ♡

- **Somme des n premiers carrés :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- **Somme des n premiers cubes :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

- **Somme géométrique :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}. & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ ♡

Preuve :

- Somme des 1 : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = n.$

Plus généralement, une somme " $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}$ " contient $n-m+1$ termes, donc $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} 1 = 1+1+\ldots+1 = n-m+1.$

- Somme des n premiers entiers : On va donner deux preuves.

\- Preuve du "petit Gauss" : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note que $(1+2+3+\ldots+n)+(n+(n-1)+\ldots+1) = (n+1)+(n+1)\ldots+(n+1) = n \times (n+1)$
Ceci montre que $2 \times \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$, d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

\- Preuve par récurrence :

Posons $\mathcal{P}(n)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Vérifions $\mathcal{P}(0)$: on a bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{0} k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On a bien montré $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

- Sommes de n premiers carrés/cubes : Par récurrence (à faire pour s'entraîner !)

- Somme géométrique : Si $x = 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$, CQFD. Soit maintenant $x \neq 1$.

Posons $\mathcal{P}(n)$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Vérifions $\mathcal{P}(0)$: on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1 = \frac{1-x}{1-x}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}+(1-x)x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

On a bien montré $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

$\square$

Exemples

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} i = \frac{10 \times 11}{2} = 55.$
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{6} j^2 = \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = 7 \times 13 = 91.$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 2^k = \frac{1-2^{11}}{1-2} = \frac{1-2^{11}}{-1} = 2^{11} - 1.$

Remarques 3

- Notons que les sommes de n premiers entiers/carrés/cubes peuvent aussi bien démarrer à 0 :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

- En revanche, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \neq \sum_{k=1}^{n} x^k$ car $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = x^0 + \sum_{k=1}^{n} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$.

On fera ainsi bien attention aux bornes de la somme lorsqu'on souhaite utiliser des formules usuelles !

Pour calculer des sommes, il faudra bien souvent se ramener aux formules des sommes usuelles, en utilisant les règles de calcul vues précédemment.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+1)$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} 3^{2j+1}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2^{-i}$.

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+1) = 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{3n(n+1)+2n}{2} = \frac{n(3(n+1)+2)}{2} = \frac{n(3n+5)}{2}.$

- $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} 3^{2j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} 3^{2j} \times 3 = \sum_{j=0}^{n-1} (3^2)^j \times 3 = 3\sum_{j=0}^{n-1} 9^j = 3\frac{1-9^n}{1-9} = \frac{3(9^n-1)}{8}.$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2^{-i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} - 1$

$\displaystyle = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 1 = 2 - \frac{1}{2^n} - 1 = 1 - \frac{1}{2^n}.$

Proposition 3 (Sommes usuelles avec bornes générales)

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$. On a les sommes explicites suivantes :

- **Somme des entiers "décalée" :** $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(m+n)\times(n-m+1)}{2}$.

- **Somme géométrique "décalée" :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{x^m - x^{n+1}}{1-x}. & \text{si } x \neq 1 \\ n-m+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ ♡

Preuve rapide :

- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{m-1} k = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m-1)m}{2} = \frac{n^2+n-m^2+m}{2} = \frac{(m+n)(n-m+1)}{2}$.

- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{m-1} x^k = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} - \dfrac{1-x^m}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1-m & \text{si } x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x^m - x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n-m+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. □

Exemples

- $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{(\frac{1}{2})^3 - (\frac{1}{2})^8}{1-\frac{1}{2}} = 2 \times \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^7$

- $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} 3^k = \frac{3^n - 3^{2n}}{1-3} = \frac{3^{2n}-3^n}{2} = \frac{3^n}{2}(3^n - 1)$.

1.4 Changement d'indice

Méthode : (Poser un changement d'indice dans une somme)

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$. Soit ℓ un entier fixé (souvent $\ell = 1,\ 2,\ -1$ ou -2)

Si un indice k parcourt les entier de m à n, l'indice $i = k + \ell$ parcourt les entiers de $m+\ell$ à $n+\ell$.

Dans une somme, poser le changement d'indice "$i = k+\ell$", c'est écrire : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_{k+\ell} = \sum_{i=m+\ell}^{n+\ell} a_i$

Pour poser le changement d'indice "$i = k + \ell$", il faut donc :

$\boxed{1}$ Transformer tous les $k+\ell$ en i (ou les k et $i-\ell$) à l'intérieur de la somme

$\boxed{2}$ Changer les bornes pour refléter les entiers parcourus par i.

Exemples

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1.$ (en posant $i = k-1$)

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (en posant $i = k+1$)

Attention !

Les changements d'indice doivent être de la forme $i = k + \ell$, ou éventuellement $i = \ell - k$, avec ℓ un entier fixé. On ne pas poser, par exemple, $i = 2k$ ou $i = 3k+1$!

Exercice 2

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$. À l'aide d'un changement d'indice, retrouver la formule pour la sommes décalée $\sum_{k=m}^{n} x^k$ à partir de celle pour la somme $\sum_{k=0}^{n} x^k$.

$$\sum_{k=m}^{n} x^k = \sum_{i=0}^{n-m} x^{i+m} = \sum_{i=0}^{n-m} x^i x^m = x^m \sum_{i=0}^{n-m} x^i = x^m \left(\frac{1-x^{n-m+1}}{1-x}\right) = \frac{x^m - x^{n+1}}{1-x}.$$

1.5 Sommes télescopiques

Proposition 4 (Sommes télecopiques)

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$. Soient $a_{m-1}, a_m, \ldots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{R}$.

On a : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$ et $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{m-1}$.

Preuve "avec des pointillés" :

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = (a_{m+1} - a_m) + (a_{m+2} - a_{m+1}) + (a_{m+3} - a_{m+2}) + \ldots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_m.$$

L'autre égalité est similaire. □

Preuve avec un changement d'indice :

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=m}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m+1}^{n+1} a_i - \sum_{k=m}^{n} a_k = \Big(\sum_{i=m+1}^{n} a_i + a_{n+1}\Big) - \Big(a_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k\Big)$$

$= a_{n+1} - a_m$. L'autre égalité est similaire. □

Méthode : Calculer une somme par "télescopage"

1. Mettre la somme sous la forme $\sum (a_{k+1} - a_k)$ ou bien $\sum (a_k - a_{k-1})$
2. Repérer les termes extrémaux : quel est l'indice le plus grand possible ? le plus petit possible ?
3. Conclure quant à la valeur de la somme (attention au signe !).

Exemples

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \sqrt{n+1} - 1$
- $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) - \ln(k)) = \ln(1) - \ln(n) = -\ln(n)$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Que vaut la somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^2 - k^2\right)$?
2. Montrer que $S = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k + n$.
3. Retrouver ainsi la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$.

1. Par télescopage, $S=\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^2-k^2\right)=(n+1)^2-1=n^2+2n=n(n+2)$.

2. En développant, $S=\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^2-k^2\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+2k+1-k^2\right)=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

donc $S=2\sum_{k=1}^{n}k+n$.

3. On en déduit que $S=n(n+2)=2\sum_{k=1}^{n}k+n$ donc $2\sum_{k=1}^{n}k=n(n+2)-n=n(n+1)$

et on retrouve $\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Pour finir, on déduit de cette méthode de "télescopage" l'identité suivante :

Théorème 2 (Une identité remarquable)

Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tous $a,b\in\mathbb{R}$, on a l'identité : $a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k}$. ♡

Preuve :

$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k}=\sum_{k=0}^{n-1}(a-b)a^kb^{n-1-k}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}b^{n-1-k}-a^kb^{n-k}\right)$
$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}b^{n-(k+1)}-a^kb^{n-k}\right)=a^{n-1+1}b^{n-(n-1+1)}-a^0b^{n-0}=a^n-b^n$.

La deuxième égalité est obtenue en prenant $a=x$ et $b=1$. □

Exemple

Pour $n=4$, on obtient la factorisation : $a^4-b^4=(a-b)(b^3+ab^2+a^2b+a^3)$

Remarques 4

• En prenant $a=x$ et $b=1$, on obtient en particulier l'égalité : $\boxed{x^n-1=(x-1)\sum_{k=0}^{n-1}x^k}$

• Pour $n=2$, on retrouve l'identité remarquable bien connue : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.
L'identité du théorème est une "généralisation" de cette formule !

• On verra bientôt une formule, impliquant également une somme, qui sera une "généralisation" de l'autre identité remarquable : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

2 Produit de nombres

2.1 Symbole $\prod$

Définition 3 (Produit avec indices successifs)

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$. Soient $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ des nombres réels.

Le produit de tous ces nombres se note : $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n$

Cette notation se lit : "Produit pour k allant de m à n des a_k".

On dit que :
- a_k est le terme général du produit.
- k est l'indice du produit.
- m et n sont les bornes du produit.

Remarque 5

- À nouveau, l'indice k (qui parcourt les entiers de m jusqu'à n) est une variable muette !

En particulier, la valeur du produit $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k$ ne peut pas dépendre de k.

- En revanche, les bornes m et n de la somme sont des entiers définis et fixés à l'avance !

La valeur du produit $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k$ dépend (en général) de m et n.

- Si jamais $m > n$ alors le produit est "vide" : par convention on décide que $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = 1$.

Exemples

- $\displaystyle\prod_{k=1}^{5} k = \prod_{i=1}^{5} i = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$
- $\displaystyle\prod_{j=2}^{4} 2^j = 2^2 \times 2^3 \times 2^4 = 2^{2+3+4} = 2^9 = 512.$
- $\displaystyle\prod_{\ell=2}^{2} \ell^2 = 2^2 = 4.$
- $\displaystyle\prod_{k=2}^{0} (k+1)^2 = 1$ car $2 > 0$.

Définition 4 (Produit avec indices généraux)

- Le produit $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k$ se note également : $\displaystyle\prod_{k \in [\![m,n]\!]} a_k$ ou encore $\displaystyle\prod_{m \leqslant k \leqslant n} a_k$.
- Plus généralement, si $A = \{i_1, i_2, \dots, i_p\} \subset \mathbb{N}$, on note $\displaystyle\prod_{k \in A} a_k = a_{i_1} \times a_{i_2} \times \dots \times a_{i_p}$.

On peut construire un algorithme permettant de calculer des produits de nombres, à l'aide d'une boucle `for` (="pour").

Algorithme : Calculer un produit $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k$

```
P = 1
for k in range(0,n+1) : # k = 0 puis 1 puis ... puis n
  P = P * a_k
print(P)
```

Exemple : On veut un algorithme calculant la valeur du produit $\displaystyle\prod_{k=3}^{50} \frac{k^2-1}{k}$.

```
P = 1
for k in range(3,51) : # k = 3,4,5,...,50
   P = P * (k**2-1)/k
print(P)
```

2.2 Règles de calcul de produits

Proposition 5 (Multiplication, quotient, puissance, exposant, factorisation)

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$. Soient $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_m, b_{m+1}, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

- **Pseudo-Relation de Chasles :** Pour tout $j \in [\![m, n-1]\!]$, $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = \left(\prod_{k=m}^{j} a_k\right) \times \left(\prod_{k=j+1}^{n} a_k\right)$
- **Séparation par multiplication :** $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} (a_k \times b_k) = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \times \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right)$
- **Séparation par quotient :** $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k}{\displaystyle\prod_{k=m}^{n} b_k}$ (si $\forall k \in [\![m, n]\!],\ b_k \neq 0$)
- **Puissance :** $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} (a_k)^p = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)^p$ ($p \in \mathbb{N}$ ou éventuellement $p \in \mathbb{R}$)
- **Exposants :** $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} x^{a_k} = x^{\sum_{k=m}^{n} a_k}$ ($x \in \mathbb{R}$ de sorte que les puissances aient un sens)
- **“Factorisation” :** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} (\lambda\, a_k) = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k$ ($n-m+1 =$ nombre de termes dans le produit)

Preuve :

Il suffit d'écrire les produits “avec des pointillés” pour constater que tout cela est vrai.
C'est un bon moyen de retrouver ces propriétés si on a un doute !

- $a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n = (a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_j) \times (a_{j+1} \times a_{j+2} \times \dots \times a_n)$
- $(a_m \times b_m) \times (a_{m+1} \times b_{m+1}) \times \dots (a_n \times b_n) = (a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n) \times (b_m \times b_{m+1} \times \dots \times b_n)$
- $\dfrac{a_m}{b_m} \times \dfrac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \times \dots \times \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n}{b_m \times b_{m+1} \times \dots \times b_n}$
- $(a_m)^p \times (a_{m+1})^p \times \dots \times (a_n)^p = (a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n)^p$
- $x^{a_m} \times x^{a_{m+1}} \times \dots \times x^{a_n} = x^{a_m + a_{m+1} + \dots + a_n}$
- $(\lambda a_m) \times (\lambda a_{m+1}) \times \dots \times \lambda a_n = \lambda^{n-m+1} \times (a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n)$ □

Exemples

- $\displaystyle\prod_{j=1}^{3} (5j^2) = 5^3 \prod_{j=1}^{3} j^2 = 5^3 \left(\prod_{j=1}^{3} j\right)^2 = 5^3 \times (1 \times 2 \times 3)^2 = 5^3 \times 6^2$
- $\displaystyle\prod_{k=2}^{4} (2k^2 2^k) = 2^3 \times \left(\prod_{k=2}^{4} k^2\right) \times \left(\prod_{k=2}^{4} 2^k\right) = 2^3 \times \left(\prod_{k=2}^{4} k\right)^2 \times 2^{2+3+4} = 2^3 \times (2 \times 3 \times 4)^2 \times 2^9 = 2^{18} \times 3^2.$

Si l'on ne voit pas directement quelles règles de calcul utiliser pour avancer, il est souvent utile d'écrire le produit "avec des pointillés", puis de simplifier l'expression petit à petit.

Exemple

$$\frac{\prod_{i=1}^{5} i}{\prod_{i=1}^{5} i^2} = \frac{1 \times 2 \times \ldots \times 5}{1^2 \times 2^2 \times \ldots \times 5^2} = \frac{1}{1 \times 2 \times \ldots \times 5} = \frac{1}{120}.$$

Attention !

- Pour "regrouper" deux produits, il est indispensable qu'ils aient les mêmes bornes !

Exemple : $\prod_{k=1}^{4} k \times \prod_{k=1}^{4} 3k^2 = \prod_{k=1}^{4} (k \times 3k^2)$ mais $\prod_{k=1}^{2} k \times \prod_{k=1}^{4} 3k^2 \neq \prod_{k=1}^{2} (k \times 3k^2)$

- La propriété de factorisation affirme que l'on peut "sortir" d'un produit une constante multiplicative (attention à la puissance !).

En revanche, on ne peut pas "sortir" du produit un terme qui dépend de l'indice !

Exemple : $\prod_{k=1}^{n} (3 \times 2^k) = 3^n \times \prod_{k=1}^{n} 2^k$ mais $\prod_{k=1}^{n} (k \times 2^k) \neq k^n \times \prod_{k=1}^{n} 2^k$ (ceci n'a pas de sens !)

- Un produit de sommes n'est pas égal (en général) à la somme des produits !

Exemple : $\prod_{k=1}^{n} (k + 2^k) \neq \prod_{k=1}^{n} k + \prod_{k=1}^{n} 2^k$

2.3 Exemples de calcul

Contrairement aux sommes, il n'y a pas, à proprement parler de "produit usuels" à connaître.
Cependant, la valeur d'un produit s'exprime assez souvent à l'aide d'une factorielle :

Définition 5 (Factorielle)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le produit $1 \times 2 \times \ldots \times n = \prod_{k=1}^{n} k$ est appelé "factorielle n" et est noté $n!$.

Par convention, on pose $0! = 1$.

On a : $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, etc ...

De même que pour les sommes, on pourra utiliser à bon escient des changements d'indice ainsi que des produits "télescopiques".

Méthode : Calculer un produit par "télescopage"

1. Mettre le produit sous la forme $\prod \frac{a_{k+1}}{a_k}$ ou bien $\prod \frac{a_k}{a_{k-1}}$
2. Repérer les termes extrémaux : quel est l'indice le plus grand possible ? le plus petit possible ?
3. Conclure quant à la valeur du produit.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les produits : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(3k)$, $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(k+1)^2$ $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})$.

- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(3k) = 3^n \times \prod_{k=1}^{n} k = 3^n \times n!$
- $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(k+1)^2 = \left(\prod_{k=1}^{n}(k+1)\right)^2 = (2\times 3\times \ldots \times (n+1))^2 = (1\times 2\times 3\times \ldots \times (n+1))^2 = ((n+1)!)^2.$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k}) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} = \frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\ldots\times\frac{n+1}{n} = (n+1).$

3 Somme doubles

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
On considère maintenant une famille de nombres $(a_{i,j})$ indexée par deux indices i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.

On peut représenter ces nombres dans un tableau à n lignes et p colonnes. L'indice i correspond au numéro de ligne, l'indice j au numéro de colonne : $a_{i,j}$ est l'élément situé ligne i, colonne j.

$$\begin{array}{cccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{array}$$

Remarque 6

Il y a ainsi $n \times p$ termes au total.

3.1 Somme double "libre"

Dans un premier temps, on souhaite sommer tous les nombres présents dans le tableau.

Définition 6 (Somme double)

La somme de tous ces nombres se note : $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}$ ou $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}$.

Lorsque $n = p$, cette somme se note plus simplement $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$.

Exemple

Pour $n = p = 2$, on a $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 2} a_{i,j} = a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,1} + a_{2,2}$

Cette somme de tous les éléments du tableau peut être calculée de deux manières différentes :

1 Commencer par sommer ligne par ligne, puis faire la somme des résultats obtenus :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = (a_{1,1}+\ldots+a_{1,p})+\ldots+(a_{n,1}+\ldots+a_{n,p}) = \sum_{i=1}^{n}(a_{i,1}+\ldots+a_{i,p}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right).$$

Cela correspond à l'algorithme Python suivant :

Algorithme :

```
S = 0
for i in range(1,n+1) :  # i = 1,2,...,n
    for j in range(1,p+1) : # j = 1,2,...,p
        S = S + a_(i,j)
print(S)
```

2 Commencer par sommer colonne par colonne, puis faire la somme des résultats obtenus :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = (a_{1,1}+\ldots+a_{n,1})+\ldots+(a_{1,p}+\ldots+a_{n,p}) = \sum_{j=1}^{p}(a_{1,j}+\ldots+a_{n,j}) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right).$$

Cela correspond à l'algorithme suivant (qui renvoie le même résultat que le précédent !) :

Algorithme :

```
S = 0
for j in range(1,p+1) :  # j = 1,2,...,p
    for i in range(1,n+1) : # i = 1,2,...,n
        S = S + a_(i,j)
print(S)
```

On vient donc de démontrer la proposition suivante :

Proposition 6 (Calcul de sommes doubles)

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right).$$

Plus généralement, on note A et B deux sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$.
On rappelle que $A\times B = \Big\{(i,j) \mid i\in A, j\in B\Big\}$. À tout couple $(i,j)\in A\times B$, on associe $a_{i,j}\in\mathbb{R}$.

$$\sum_{(i,j)\in A\times B} a_{i,j} = \sum_{i\in A}\left(\sum_{j\in B} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in B}\left(\sum_{i\in A} a_{i,j}\right)$$

Exercice 5

Soient $n,p\in\mathbb{N}$. Calculer la somme double : $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} ij$.

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} ij = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} ij = \sum_{i=1}^{n} i\sum_{j=1}^{p} j = \sum_{i=1}^{n} i\frac{p(p+1)}{2} = \frac{p(p+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{p(p+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2}.$$

3.2 Somme double "avec contraintes"

Revenons au tableau de nombres précédent, en nous restreignant au cas où $p = n$. Le tableau est ainsi carré :

$$\begin{array}{|cccccc|}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n}
\end{array}$$

• On souhaite sommer uniquement les termes $a_{i,j}$ tels que $\boxed{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$.
Ce sont les termes situés au-dessus de la diagonale principale (diagonale comprise).

On peut à nouveau procéder de deux manières différentes :

$\boxed{1}$ Commencer par sommer ligne par ligne :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = (a_{1,1} + \ldots + a_{1,n}) + (a_{2,2} + \ldots + a_{2,n}) + \ldots + (a_{n,n})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (a_{i,i} + \ldots + a_{i,n}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \right)$$

Cela correspond à l'algorithme suivant :

Algorithme :

```
S = 0
for i in range(1,n+1) :  # i = 1,2,...,n
    for j in range(i,n+1) : # j = i,i+1,...,n
        S = S + a_(i,j)
print(S)
```

$\boxed{2}$ Commencer par sommer colonne par colonne :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = (a_{1,1}) + (a_{1,2} + a_{2,2}) + \ldots + (a_{1,n} + \ldots + a_{n,n})$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (a_{1,j} + \ldots + a_{j,j}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} \right)$$

Cela correspond à l'algorithme suivant :

Algorithme :

```
S = 0
for j in range(1,n+1) :  # j = 1,2,...,n
    for i in range(1,j+1) : # i = 1,2,...,j
        S = S + a_(i,j)
print(S)
```

• On souhaite sommer uniquement les termes $a_{i,j}$ tels que $\boxed{1 \leqslant i < j \leqslant n}$.
Ce sont les termes situés au-dessus de la diagonale principale (diagonale non comprise).

On peut à nouveau procéder de deux manières différentes :

$\boxed{1}$ Commencer par sommer ligne par ligne :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j} = (a_{1,2} + \ldots + a_{1,n}) + (a_{2,3} + \ldots + a_{2,n}) + \ldots + (a_{n-1,n})$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i,i+1} + \ldots + a_{i,n}) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} \right)$$

Cela correspond à l'algorithme suivant :

Algorithme :

```
S = 0
for i in range(1,n) :  # i = 1,2,...,n-1
    for j in range(i+1,n+1) : # j = i+1,i+2,...,n
        S = S + a_(i,j)
print(S)
```

$\boxed{2}$ Commencer par sommer colonne par colonne :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j} = (a_{1,2}) + (a_{1,3} + a_{2,3}) + \ldots + (a_{1,n} + \ldots + a_{n-1,n})$$
$$= \sum_{j=2}^{n} (a_{1,j} + \ldots + a_{j-1,j}) = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i_1 j} \right)$$

Cela correspond à l'algorithme suivant :

Algorithme :

```
S = 0
for j in range(2,n+1) :  # j = 2,...,n
    for i in range(1,j) : # i = 1,2,...,j-1
        S = S + a_(i,j)
print(S)
```

Au final, on a démontré la proposition suivante :

Proposition 7 (Calcul de sommes et produits doubles "avec contraintes")

- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} \right).$
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} \right).$

Exercice 6

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes doubles : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$ et $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} i$.

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (j+1) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1 \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)+2n}{2} = \frac{n(n+3)}{4}$$

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} i = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n-1} i \sum_{j=i+1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} (ni - i^2) = n \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2$$
$$= n \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{3(n-1)n^2 - (n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)n(3n-2n+1)}{6}$$
$$= \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

Pour finir, on comprend que l'on peut définir des sommes doubles avec des ensembles indices assez généraux. On se permet donc d'introduire la définition générale suivante :

Définition 7 (Somme double générale)

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{N}^2$ composé d'un nombre fini d'éléments : E est donc un ensemble de couples (i, j) avec $i, j \in \mathbb{N}$. A chaque couple $(i, j) \in E$, on associe un nombre $a_{i,j}$.

La somme de tous ces $a_{i,j}$ se note $\displaystyle\sum_{(i,j) \in E} a_{i,j}$.

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Manipuler les symboles $\sum$ et $\prod$.
- Connaître les formules de sommes usuelles marquées d'un ♡.
- Utiliser formules usuelles et règles de calculs pour calculer sommes et produits.
- Poser un changement d'indice.
- Manipuler, simplifier des expressions contenant des factorielles.

Pour suivre

- Connaître toutes les formules de sommes usuelles.
- Utiliser des sommes et des produits télescopiques.
- Calculer une somme double "libre".
- Calculer une somme double "avec contraintes".

Pour les ambitieux

- Calculer une somme distinguant les entiers pairs et impairs.
- Calculer une somme double en distinguant les cas $i < j$, $i = j$, $j < i$.

(min, max, valeur absolue...)