# 13

# Dérivation

## Pour s'exercer au calcul de dérivées

(a) $f(x)=3\cos(x)-2\sin(x)^2$ (b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ (c) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ (d) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{2+x}}\right)$

(e) $f(x)=\sin\left(2x^2+1\right)$ (f) $f(x)=(1-x)^x$ (g) $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x^2+1)^{3/2}}$ (h) $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

(i) $f(x)=\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2}$ (j) $f(x)=\tan(2x+1)$ (k) $f(x)=\dfrac{2x-1}{1+\cos(x)^2}$ (l) $f(x)=(3x+2)e^{x^2+x-1}$

## Dérivabilité en un point

**Exercice 1 (Problème en 0 ?)**
Etudier la dérivabilité en tout point de la fonction définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=|x|\sin(x^2+1)$.

---

**Exercice 2 (Prolongement $\mathcal{C}^1$)**

On pose $f(x)=x^3\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x\in\mathbb{R}^*$.

Montrer que $f$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

---

**Exercice 3 (Prolongement non dérivable)**

Soit $f: x\mapsto\cos(x)+x\ln(x^2)$.

1. Déterminer le domaine de définition et justifier que $f$ y est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0, mais que ce prolongement n'y est pas dérivable. Quelle interprétation peut-on faire graphiquement ?

---

**Exercice 4 (Prolongement non $C^1$)**

On pose $f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x\in\mathbb{R}^*$.

1. Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. Démontrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0. On appelle toujours $f$ ce prolongement : quelle valeur faut-il donc poser pour $f(0)$?

3. Montrer que $f$ ainsi re-définie est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

---

**Exercice 5 ("Raboutement" dérivable)**

Déterminer les valeurs des constantes $a,b\in\mathbb{R}$ pour que la fonction définie par
$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si } x<1\\ \sqrt{x} & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ ?
Faire une représentation graphique.

---

**Exercice 6 (Règle de L'Hôpital)**

1. Soit $a\in\mathbb{R}$ et $f$ et $g$ deux fonctions dérivables en $a$ satisfaisant : $f(a)=g(a)=0$ et $g'(a)\neq 0$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

2. A l'aide de cette règle, calculer les limites :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2x^2-x-1},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)}{\sin(x)+3x}.$$

## Dérivée et études de fonctions

**Exercice 7 (Montrer des inégalités)**

À l'aide d'une étude de fonction appropriée, montrer les inégalités suivantes :

(a) $\forall x\geqslant 0,\ \ 1-\dfrac{x^2}{2}\leqslant\cos(x)$

(b) $\forall x\geqslant 0,\ \ \sin(x)\geqslant x-\dfrac{x^3}{6}$.

---

**Exercice 8 (Une bijection)**

On pose $f(x)=x^2+\ln(1-x)$.

1. Montrer que $f$ réalise une bijection de son domaine de définition dans un intervalle que l'on déterminera.
2. Dresser le tableau de variations de $f^{-1}$ en précisant le comportement aux bornes.
3. Montrer que $f^{-1}$ est dérivable sur son domaine de définition et que

$\forall x\in D_{f^{-1}},\ \ (f^{-1})'(x)=\dfrac{f^{-1}(x)-1}{2f^{-1}(x)(f^{-1}(x)-1)+1}$.

4. Déterminer la valeur de $(f^{-1})'(0)$.

---

**Exercice 9 (Fonction arcinus)**

1. Montrer que la fonction sin réalise une bijection de $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ vers un intervalle à déterminer.

2. On note arcsin la bijection réciproque. Etudier son sens de variation, sa continuité, sa dérivabilité, et montrer que

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Tracer l'allure des graphes de sin et arcsin sur les intervalles considérés.

**Exercice 10 (Dérivée et parité/périodicité)**

Soit $f \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. On suppose que $f$ est paire. Que dire de $f'$ ? (le démontrer)

2. On suppose que $f$ est impaire. Même question.

3. On suppose que $f$ est $p$-périodique, pour un $p > 0$. Même question.

## Théorème de Rolle

**Exercice 11 (Racines du polynôme dérivé)**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ admettant $n$ racines distinctes. Faire un dessin. Montrer que $P'$ admet $n-1$ racines distinctes. Que peut-on en déduire pour $P''$ ?

---

**Exercice 12 (Variante de Rolle)**

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$.

On veut montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f'(c) = 0$.

1. Faire un graphe illustrant cette situation.

On pose $g(x) = f(\frac{1-x}{x})$ pour $x \in ]0,1]$ et $g(0) = f(0)$.

2. Montrer que $g$ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

3. Appliquer le théorème de Rolle à $g$ et conclure.

---

**Exercice 13 (EAF "généralisé")**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que :

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

*Indication : Appliquer Rolle à une bonne fonction...*

## Accroissements finis

**Exercice 14 (IAF)**

Démontrer les inégalités suivantes :

(a) $\forall x \geqslant 2, \forall y \geqslant 2,\ \ |\ln(y) - \ln(x)| \leqslant \frac{1}{2}|y - x|$.

(b) $\forall x \in [0,1], \quad x \leqslant e^x - 1 \leqslant ex$.

(c) $\forall x > 0, \quad \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leqslant \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

---

**Exercice 15 (Fonction $\mathcal{C}^1$ sur un segment)**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Montrer qu'il existe toujours un $M > 0$ tel que : $\forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$.

---

**Exercice 16 (Somme infinie convergente)**

Soit $\alpha > 1$. En appliquant l'IAF à $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ sur $[k-1,k]$, montrer que la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^a}$ est majorée.
En déduire qu'elle converge.

**Exercice 17 (IAF et suites récurrentes : méthode générale)**

Soit $f$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.

On suppose que :

- $[a,b]$ est stable par $f$, i.e $f([a,b]) \subset [a,b]$.
- $\forall t \in ]a,b[,\ |f'(t)| \leqslant k$, avec $k \in ]0,1[$.

1. *Existence et unicité d'un point fixe*
(a) A l'aide du TVI, montrer que $f$ admet au moins un point fixe sur $[a,b]$.

(b) Justifier que pour tous $x, y \in [a,b]$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$.
En déduire que le point fixe est unique : on le note $\alpha \in [a,b]$.

2. *Etude de la suite récurrente*
On fixe $u_0 \in [a,b]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
(a) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant k|u_n - \alpha|$
(c) En déduire une majoration de $|u_n - \alpha|$, et finalement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ .

---

**Exercice 18 (Une suite récurrente)**

On pose $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n + 2}$.

On introduit la fonction associée : $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$.

1. (a) Déterminer le domaine de définition de $f$. Calculer $f'$, $f''$, puis dresser le tableau de variations de $f$.

(b) Déterminer $f([0,1])$.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.

(c) Montrer que $f$ admet un unique point fixe sur $[0,1]$, noté $\alpha$. Que dire de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, si elle existe ?

2.(a) Montrer que $\ \forall x \in [0,1],\ \dfrac{1}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$.

(b) En déduire que $\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$.

6. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
Conclure quant à $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

---

*Solutions des calculs de dérivées :*

(a) $-(3 + 4\cos(x))\sin(x)$ (b) $-\dfrac{x}{(x^2-4)^{3/2}}$

(c) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ (d) $\dfrac{x+5}{2(x^2+x-2)}$

(e) $4x\cos(1+2x^2)$ (f) $\left(\dfrac{x}{x-1} + \ln(1-x)\right)(1-x)^x$

(g) $\dfrac{-4x^2+3x+2}{(x^2+1)^{5/2}}$ (h) $-\dfrac{1}{1+x^2}$

(i) $-\dfrac{x^2+2}{x^3}e^{-x^2/2}$

(j) $\dfrac{2}{\cos^2(1+2x)} = 2(1+\tan^2(1+2x))$

(k) $\dfrac{2\Big(1+\cos^2(x) + (2x-1)\sin(x)\cos(x)\Big)}{(1+\cos^2(x))^2}$

(l) $(6x^2+7x+5)e^{x^2+x-1}$