4

Nombres réels, fonctions numériques

1 Partie majorée/minorée de $\mathbb{R}$

Dans toute cette section, A désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1.1 Majorants, minorants

Définition 1 (Majorant, minorant)

Soient $m, M \in \mathbb{R}$.

• On dit que M est un majorant de A lorsque pour tout $x \in A$, $x \leqslant M$.
Si A admet au moins un majorant, on dit que A est majorée. Autrement dit :

$$A \text{ est majorée } \iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ x \leqslant M.$$

• On dit que m est un minorant de A lorsque pour tout $x \in A$, $x \geqslant m$.
Si A admet au moins un minorant, on dit que A est minorée. Autrement dit :

$$A \text{ est minorée } \iff \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ x \geqslant m.$$

Remarque 1

• Lorsque A est majorée, elle admet une infinité de majorants. En effet :
Si M est un majorant de A, alors tout $M' \in \mathbb{R}$ tel que $M' > M$ est aussi un majorant de A.

• Lorsque A est minorée, elle admet une infinité de minorants. En effet :
Si m est un minorant de A, alors tout $m' \in \mathbb{R}$ tel que $m' < m$ est aussi un minorant de A.

Exemples

• $A = [0,1]$ est majorée (par ex. par 2) et minorée (par ex. par -3). Plus précisément :
Tous les $M \geqslant 1$ sont des majorants de A, tous les $m \leqslant 0$ sont des minorants de A.

• $A = \mathbb{N}$ n'est pas majorée, mais est minorée (par ex. par -1). Plus précisément :
Tous les $m \leqslant 0$ sont des minorants de A.

• $A = \mathbb{R}_-$ est majorée (par ex. par 1), mais n'est pas minorée. Plus précisément :
Tous les $M \geqslant 0$ sont des majorants de A.

• $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est majorée (par ex. par 3), et minorée (par ex. par -1). Plus précisément :
Tous les $M \geqslant 1$ sont des majorants de A, tous les $m \leqslant 0$ sont des minorants de A.

Définition 2 (Partie bornée)

On dit que A est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée. Autrement dit :

$$A \text{ est bornée} \iff \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in A,\ m \leqslant x \leqslant M.$$

Proposition 1 (Caractérisation d'une partie bornée)

On a l'équivalence : A bornée $\iff \exists K \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in A,\ |x| \leqslant K$.

Preuve :

• Supposons A bornée : on peut introduire $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in A,\ m \leqslant x \leqslant M$.
Posons $K = max(M, -m)$.
Pour tout $x \in A$: $x \leqslant M \leqslant K$ et $-x \leqslant -m \leqslant K$. Ainsi, $-K \leqslant x \leqslant K$, c'est à dire $|x| \leqslant K$.
On a bien montré : $\forall x \in A,\ |x| \leqslant K$.

• Supposons qu'il existe $K \geqslant 0$ tel que $\forall x \in A,\ |x| \leqslant K$.
Ainsi on a $\forall x \in A,\ -K \leqslant x \leqslant K$.
Ceci montre que A est majorée par K, minorée par $-K$: A est donc bornée. □

1.2 Maximum, minimum

Définition 3 (Maximum, minimum)

• On appelle maximum de A un majorant de A qui est <u>un élément de A</u> :

$$M \text{ est un maximum de } A \iff (M \in A \text{ et } \forall x \in A,\ x \leqslant M).$$

• On appelle minimum de A un minorant de A qui est <u>un élément de A</u> :

$$m \text{ est un minimum de } A \iff (m \in A \text{ et } \forall x \in A,\ x \geqslant m).$$

Proposition 2 (Unicité du maximum/minimum)

S'il existe, le maximum de A est unique et on le note $\boxed{\max(A)}$.

S'il existe, le minimum de A est unique et on le note $\boxed{\min(A)}$.

Preuve :

Supposons que M_1 et M_2 soient tous deux des maxima de A. Alors :
• $M_1 \in A$ et M_2 est un majorant de A, donc $M_1 \leqslant M_2$.
• $M_2 \in A$ et M_1 est un majorant de A, donc $M_2 \leqslant M_1$.
Ceci montre que $M_1 = M_2$. Il en va de même pour les minima. □

Remarque 2

• Le maximum/minimum de A est aussi appelé "plus grand/petit élément de A".

Attention !

Le maximum ou le minimum de A n'existent pas toujours, même lorsque A est une partie bornée !

Exemples

• $A = [0, 1]$ est majorée par 1 et minorée par 0.
Comme $1 \in A$ et $0 \in A$, on peut dire que $\max(A) = 1$ et $\min(A) = 0$.

• $A = [0, 1[$ est majorée, mais n'admet pas de maximum.
Les majorants de A sont exactement les $M \geqslant 1$, et aucun d'entre eux n'est un élément de A !
On voit en revanche que 1 est le plus petit des majorants possibles...

• $A =]0, 1]$ est minorée, mais n'admet pas de minimum.
Les minorants de A sont exactement les $m \leqslant 0$, et aucun d'entre eux n'est un élément de A !
On voit en revanche que 0 est le plus grand des minorants possibles...

1.3 Borne supérieure, borne inférieure

Théorème 1 (Borne supérieure, borne inférieure) (Admis)

- Toute partie A de $\mathbb{R}$ non-vide et majorée admet un plus petit majorant.
  (minimum de l'ensemble des majorants de A)

Celui-ci est appelé borne supérieure de A et noté $\sup(A)$.

- Toute partie A de $\mathbb{R}$ non-vide et minorée admet un plus grand minorant.
  (maximum de l'ensemble des minorants de A)

Celui-ci est appelé borne inférieure de A et noté $\inf(A)$.

On retiendra :

$\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A
$\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A

(lorsqu'ils existent)

Ceci signifie :

$$\forall x \in A,\ x \leqslant \sup(A) \quad \text{et} \quad (\forall x \in A,\ x \leqslant M) \Longrightarrow M \geqslant \sup(A)$$
$$\forall x \in A,\ x \geqslant \inf(A) \quad \text{et} \quad (\forall x \in A,\ x \geqslant m) \Longrightarrow m \leqslant \inf(A)$$

Exemples

- $A = [0, 1]$ est majorée et minorée, donc admet une borne supérieure et inférieure.

Plus petit des majorants : 1, donc $\sup(A) = 1$.
Plus grand des minorants : 0, donc $\inf(A) = 0$.
Ici, les bornes supérieures et inférieures sont des éléments de A.
Ce sont donc un maximum et un minimum : $\sup(A) = \max(A) = 1$, $\inf(A) = \min(A) = 0$.

- $A = [0, 1[$ est majorée, donc admet une borne supérieure.

Plus petit des majorants : 1, donc $\sup(A) = 1$.
Ce n'est pas un élément de A, donc A n'a pas de maximum.

- $A =]0, 1]$ est minorée, donc admet une borne inférieure.

Plus grand des minorants : 0, donc $\inf(A) = 0$.
Ce n'est pas un élément de A, donc A n'a pas de minimum.

On peut résumer ces observations dans la proposition suivante :

Proposition 3 (Max/min et borne sup/inf)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

- A admet un maximum $\Longleftrightarrow$ (A est majorée et $\sup(A) \in A$). Dans ce cas, $\max(A) = \sup(A)$.
- A admet un minimum $\Longleftrightarrow$ (A est minorée et $\inf(A) \in A$). Dans ce cas, $\min(A) = \inf(A)$.

Pour les intervalles de $\mathbb{R}$, on aura ainsi :

A	$\inf(A)$	$\min(A)$	$\sup(A)$	$\max(A)$
$[a, b]$	a	a	b	b
$[a, b[$	a	a	b	X
$]a, b]$	a	X	b	b
$]a, b[$	a	X	b	X
$[a, +\infty[$	a	a	X	X
$]a, +\infty[$	a	X	X	X
$]-\infty, b]$	X	X	b	b
$]-\infty, b[$	X	X	b	X
$]-\infty, +\infty[$	X	X	X	X

Méthode : Justifier l'existence d'une borne inférieure / supérieure

- Si $A \neq \emptyset$ et A est minorée, alors A admet une borne inférieure.
- Si $A \neq \emptyset$ et A est majorée, alors A admet une borne supérieure.

Exercice 1

Soit $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Montrer que A admet une borne inférieure et une borne supérieure.

S'agit-il d'un maximum/minimum ? Le démontrer.

$A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$.
On a bien-sûr $A \neq \emptyset$. De plus, A est minorée (par 0) et majorée (par 1).
Il en résulte que A admet une borne inférieure et une borne supérieure.

- 1 est majorant de A ($\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} \leqslant 1$) et $1 = \frac{1}{1} \in A$.

Ainsi $1 = \max(A) = \sup(A)$.

- 0 est un minorant de A ($\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} \geqslant 0$).

Montrons que $\inf(A) = 0$ c'est à dire que 0 est le plus grand des minorants de A.

Par l'absurde : supposons qu'il existe m un minorant de A tel que $m > 0$.
On aurait ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} \geqslant m > 0$. Cette inégalité est clairement fausse pour n assez grand !
Par exemple : posons $n = \lfloor \frac{1}{m} \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$. On a $n > \frac{1}{m}$, c'est à dire $\frac{1}{n} < m$: contradiction.

Comme $0 \notin A$, cette borne inférieure n'est pas un minimum.

SPOILER...

On pourra pour le moment admettre le résultat suivant ("Théorème de la limite monotone") :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\sup(A) = \ell$, et cette borne supérieure n'est pas atteinte (A n'admet pas de maximum).
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\inf(A) = \ell$, et cette borne inférieure n'est pas atteinte (A n'admet pas de minimum).

Proposition 4 (Inclusion et bornes supérieures/inférieures)

Soient A et B deux parties non-vides de $\mathbb{R}$.

- Si $A \subset B$ et si B est majorée, alors A est majorée et $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.
- Si $A \subset B$ et si B est minorée, alors A est minorée et $\inf(A) \geqslant \inf(B)$.

Preuve :

- On sait que $\forall x \in B,\ x \leqslant \sup(B)$. Comme $A \subset B$, on a en particulier $\forall x \in A,\ x \leqslant \sup(B)$.

Ainsi A est non-vide et majorée par $\sup(B)$, ce qui montre que $\sup(A)$ existe et $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.

- On sait que $\forall x \in B,\ x \geqslant \inf(B)$. Comme $A \subset B$, on a en particulier $\forall x \in A,\ x \geqslant \inf(B)$.

Ainsi A est non-vide et minorée par $\inf(B)$, ce qui montre que $\inf(A)$ existe et $\inf(A) \geqslant \inf(B)$. □

2 Généralités sur les fonctions numériques

2.1 Rappels préliminaires

Définition 4 (Fonction numérique)

On appelle fonction numérique (ou fonction réelle d'une variable réelle) toute application $f : D_f \to \mathbb{R}$, où D_f est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

D_f est le domaine de définition de la fonction f.

Si D est une partie de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur D.

Remarque 3

La majorité du temps, D_f est un intervalle ou une union d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 5 (Courbe représentative)

La courbe représentative (ou graphe) de f est

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)),\ x \in D_f\} \subset \mathbb{R}^2$$

2.2 Opérations sur les fonctions numériques

Définition 6 (Somme, produit, quotient)

Soient f et g deux fonctions définies sur un même domaine $D \subset \mathbb{R}$.

- La somme de f et g est la fonction $f + g$ définie par : $\forall x \in D,\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est définie par : $\forall x \in D,\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- Le produit de f et g est la fonction fg définie par : $\forall x \in D,\ (fg)(x) = f(x) \times g(x)$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut ainsi définir la fonction $f^k = f \times f \times \ldots \times f$ (k fois)
- Si pour tout $x \in D, g(x) \neq 0$, le quotient $\dfrac{f}{g}$ est défini par : $\forall x \in D,\ \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Définition 7 (Composition)

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques. Sur le domaine

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

on peut définir la fonction composée $g \circ f$ par : $\forall x \in D_{g \circ f},\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Définition 8 (Comparaison de deux fonctions)

Soient f et g deux fonctions définies sur un même domaine $D \subset \mathbb{R}$.

- On dit que $f \leqslant g$ lorsque : $\forall x \in D,\ f(x) \leqslant g(x)$.
- On dit que $f < g$ lorsque : $\forall x \in D,\ f(x) < g(x)$.

Définition 9 (Maximum, minimum de deux fonctions)

Soient f et g deux fonctions définies sur un même domaine D.

- La fonction $\max(f, g)$ est définie par $\forall x \in D,\ \max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x))$.
- La fonction $\min(f, g)$ est définie par $\forall x \in D,\ \min(f, g)(x) = \min(f(x), g(x))$.

Exercice 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
Déterminer l'expression de $\max(f, g)$ et tracer sa courbe représentative.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a les équivalences : $x \leqslant \sqrt{x} \iff x^2 \leqslant x \iff x = 0$ ou $x \leqslant 1 \iff x \in [0, 1]$.
Donc : $\max(x, \sqrt{x}) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } x \in [0,1] \\ x \text{ sinon} \end{cases}$ et on a la courbe représentative suivante :

2.3 Sens de variation d'une fonction numérique

Définition 10 (Croissance, décroissance, monotonie)

Une fonction numérique $f : D_f \to \mathbb{R}$ est dite :

- **Croissante** lorsque : $\forall (x, y) \in (D_f)^2, \ \Big(x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)\Big)$
- **Décroissante** lorsque : $\forall (x, y) \in (D_f)^2, \ \Big(x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)\Big)$
- **Strictement croissante** lorsque : $\forall (x, y) \in (D_f)^2, \ \Big(x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)\Big)$
- **Strictement décroissante** lorsque : $\forall (x, y) \in (D_f)^2, \ \Big(x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)\Big)$
- **Monotone** lorsque (f est croissante) ou (f est décroissante).
- **Strictement monotone** lorsque (f est strictement croissante) ou (f est strictement décroissante).

Remarque 4

On pourra retenir : une fonction (strictement) croissante préserve les inégalités (strictes).
Une fonction décroissante les "inverse".

Proposition 5 (Sens de variation et composition)

- La composée de deux fonctions ayant même sens de variation est croissante.
- La composée de deux fonctions de sens de variation contraires est décroissante.

Si les croissances/décroissances sont strictes, il en va de même pour la composition.

Exemples

Sans même faire d'étude de fonction, on peut affirmer que :

- La fonction $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, comme composée de fonctions strictement croissantes ($\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}_+$).
- La fonction $x \mapsto e^{1/x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, comme composée d'une fonction strictement croissante (exp sur $\mathbb{R}$) et d'une fonction strictement décroissante ($x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$).

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions strictement décroissantes ($x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$).

Énonçons et démontrons un résultat évoqué dans le chapitre "Applications" :

Proposition 6 (Stricte monotonie et injectivité)

Si $f : D_f \to \mathbb{R}$ est strictement monotone, alors elle est injective.

Preuve :

Traitons le cas où f est strictement croissante (l'autre cas est similaire).

Montrer que f est injective revient à montrer : $\forall (x_1, x_2) \in (D_f)^2,\ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Soient $x_1, x_2 \in D_f$ tels que $x_1 \neq x_2$. On distingue les cas :

- Si $x_1 < x_2$, alors on a $f(x_1) < f(x_2)$, donc $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Si $x_1 > x_2$, alors on a $f(x_1) > f(x_2)$, donc $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Dans les deux cas on a bien $f(x_1) \neq f(x_2)$, ce qui conclut la preuve. $\square$

2.4 Majoration, minoration

Définition 11 (Fonction majorée, minorée, bornée)

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction numérique.
On dit que f est majorée/minorée/bornée lorsque son ensemble image $f(D_f) = \{f(x),\ x \in D_f\}$ l'est.

Autrement dit :

- f est majorée $\Longleftrightarrow$ $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f,\ f(x) \leqslant M$
- f est minorée $\Longleftrightarrow$ $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f,\ f(x) \geqslant m$
- f est bornée $\Longleftrightarrow$ $\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall x \in D_f,\ |f(x)| \leqslant K$

On pourra également dire : $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de f, $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de f.

Exemples

- La fonction $x \mapsto x^2$ est minorée sur $\mathbb{R}$ (par 0, par -1...), mais n'y est pas majorée.
- La fonction sin est bornée sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) \in [-1, 1]$, c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leqslant 1$.

Définition 12 (Borne supérieure/inférieure d'une fonction)

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction numérique.
Lorsque cela existe, on note $\sup(f)$ (resp. $\inf(f)$) la borne inférieure (resp. supérieure) de $f(D_f)$.
Autrement dit :

$$\sup(f) = \sup(\{f(x),\ x \in D_f\}) \quad \text{et} \quad \inf(f) = \sup(\{f(x),\ x \in D_f\})$$

Remarque 5

D'après le théorème de la borne supérieure/inférieure (pour les parties de $\mathbb{R}$) : toute fonction majorée admet une borne supérieure, toute fonction minorée admet une borne inférieure !

Définition 13 (Maximum/minimum d'une fonction)

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction numérique.
Lorsque la borne $\sup(f)$ est un maximum (resp. la borne $\inf(f)$ est un minimum), on dit que la fonction f admet un maximum (resp. minimum), et on note : $\max(f) = \sup(f)$
(resp. $\min(f) = \inf(f)$).

Plus précisément, pour $x_0 \in D_f$,

- On dit que f atteint son maximum en x_0 lorsque : $\forall x \in D_f,\ f(x) \leqslant f(x_0)$.
  On a alors $\max(f) = f(x_0)$.
- On dit que f atteint son minimum en x_0 lorsque : $\forall x \in D_f,\ f(x) \geqslant f(x_0)$.
  On a alors $\min(f) = f(x_0)$.
- On dit que f admet un extremum en x_0 si elle atteint un maximum ou un minimum en x_0.

Attention !

Une fonction peut admettre une borne supérieure mais pas de maximum, ou une borne inférieure mais pas de minimum !

Exemples

- 0 est le minimum de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$. C'est donc également sa borne inférieure.
- 0 est la borne inférieure de exp sur $\mathbb{R}$. Cependant ce n'est pas un minimum !

Dessin :

Remarque 6

Si $\max(f)$ existe alors sa valeur est unique, mais ce maximum peut être atteint en différents points du domaine de définition ! De même pour $\min(f)$.

Dessin :

Notations : Pour une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$, on notera parfois :

$$\sup(f) = \sup_{x \in D_f} f(x), \qquad \inf(f) = \inf_{x \in D_f} f(x),$$

$$\max(f) = \max_{x \in D_f} f(x), \qquad \min(f) = \min_{x \in D_f} f(x),$$

Exercice 3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Déterminer $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ et $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. S'agit-il d'un minimum/maximum ?

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f'(x) \geqslant 0 \iff 1-x^2 \geqslant 0 \iff x^2 \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x \leqslant 1$.

On en déduit le tableau de variation suivant :

Ainsi : $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(-1) = \dfrac{-1}{2} = \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ $\quad$ et $\quad$ $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(1) = \dfrac{1}{2} = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Définition 14 (Extremum local)

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction numérique et $x_0 \in D_f$.

Lorsque les inégalités de la Définition 10 ne sont pas vraies sur D_f tout entier,
mais seulement sur $D_f \cap I$ où I est un intervalle ouvert contenant x_0,
on dira que $f(x_0)$ est un maximum local / minimum local / extremum local.

On peut alors noter $\quad f(x_0) = \max\limits_{x\in D_f\cap I} f(x) \quad$ ou $\quad f(x_0) = \min\limits_{x\in D_f\cap I} f(x)$

Dessin :

2.5 Parité d'une fonction

Définition 15 (Fonction paire/impaire)

On dit que $f : D_f \to \mathbb{R}$ est **paire** lorsque : $\begin{cases} \bullet \text{ Pour tout } x \in D_f, \text{ on a } -x \in D_f \\ \bullet\ \forall x \in D_f,\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

On dit que $f : D_f \to \mathbb{R}$ est **impaire** lorsque : $\begin{cases} \bullet \text{ Pour tout } x \in D_f, \text{ on a } -x \in D_f \\ \bullet\ \forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Exemples

- Fonctions paires : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \cos(x)$, fonctions constantes...
- Fonctions impaires : $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \sin(x)$...

Remarque 7

Si f est impaire et $0 \in D_f$, on a nécessairement $f(0) = 0$.

Interprétation graphique de la parité :

- f est paire $\iff \mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (symétrie axiale).
- f est impaire $\iff \mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine $(0,0)$ (symétrie centrale)

Conséquence : Si f est une fonction paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur $D_f \cap \mathbb{R}_+$.
Le comportement sur $D_f \cap \mathbb{R}_-$ est ensuite déduit par symétrie !

Exercice 4

1. Montrer que la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x^2/2}$ est paire.
Sans étude de fonction, dessiner l'allure de son graphe.

2. Montrer que la fonction g définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est impaire.
Sans étude de fonction, dessiner l'allure de son graphe.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(-x) = e^{-(-x)^2/2} = e^{-x^2/2} = f(x)$ donc f est paire.
$x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:
On en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Allure du graphe :

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad g(-x) = \dfrac{-x}{1+|-x|} = \dfrac{-x}{1+|x|} = -\dfrac{x}{1+|x|} = -g(x)$ donc g est impaire.

Pour tout $x \geqslant 0$, $\quad g(x) = \dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$. On voit donc que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Allure du graphe :

2.6 Périodicité

Définition 16 (Fonction périodique)

Soit $p > 0$. On dit que $f : D_f \to \mathbb{R}$ est **périodique de période** p (ou p-**périodique**) lorsque :

$$\begin{cases} \bullet \text{ Pour tout } x \in D_f, \text{ on a } x + p \in D_f \\ \bullet\ \forall x \in D_f,\ f(x+p) = f(x) \end{cases}$$

Remarques 8

Si f est p-périodique, alors f est aussi $2p$-périodique, $3p$-périodique...
Plus généralement, kp est une période de f pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples

Fonctions périodiques usuelles : cos, sin, tan, fonctions constantes

Interprétation graphique de la périodicité :

f est p-périodique $\iff \mathcal{C}_f$ est invariant par translation "d'un multiple de p le long de l'axe des abscisses".

Conséquence : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique de période $p > 0$, il suffit de l'étudier sur $[0, p[$ (ou sur n'importe quel intervalle $[a, a+p[$ pour $a \in \mathbb{R}$). Le comportement ailleurs est déduit par translation !

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
Montrer que f est 1-périodique. Sans étude de fonction, dessiner l'allure de son graphe.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x+1) = x + 1 - \lfloor x+1 \rfloor = x + 1 - (\lfloor x \rfloor + 1) = x - \lfloor x \rfloor = f(x)$.
Donc f est 1-périodique. Pour tout $x \in [0, 1[$: $f(x) = x - 0 = x$.

Allure du graphe :

3 Fonctions usuelles

3.1 Valeur absolue

Définition 17 (Valeur absolue)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on définit la valeur absolue de x par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

ou bien, de manière équivalente,

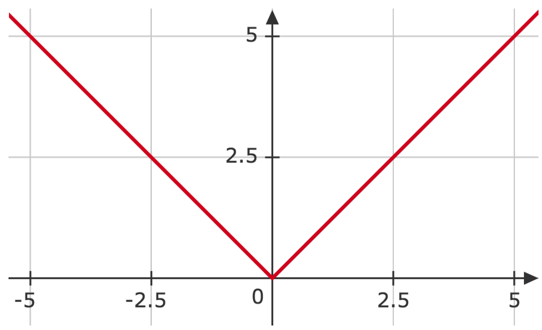
$$|x| = \max(x, -x).$$

Remarque 9

On a aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \sqrt{x^2}$.

Fonction : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \lvert x \rvert$	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$



Domaine de définition : $\mathbb{R}$

Signe : Positif

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}^*$

Dérivée : $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Parité : Paire

Proposition 7 (Propriétés de valeur absolue)

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

- $|x| \geqslant 0$
- $|-x| = |x|$
- $|x| = 0 \iff x = 0$
- $|xy| = |x||y|$
- Pour $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $a \geqslant 0$, on a :

- $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$,
- $|x| \geqslant a \iff x \leqslant -a$ ou $x \geqslant a$

Remarque 10

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y|$ s'interprète naturellement comme la distance entre x et y.

Exercice 6

- $|x - 2| = 3 \iff x = -1$ ou $x = 5$
- $|x - 3| < 1 \iff x \in]2, 4[$
- $|x - 1| \geqslant 2 \iff x \in]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$

Attention !

On ne peut pas "passer à la valeur absolue dans une inégalité" !
$x \leqslant y$ n'implique pas $|x| \leqslant |y|$ en général ! (la fonction $|\cdot|$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$...)

Théorème 2 (Inégalités triangulaires)

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a les inégalités suivantes :

- **Première inégalité triangulaire :** $|x+y| \leqslant |x| + |y|$
- **Seconde inégalité triangulaire :** $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y| \leqslant |x| + |y|$

Preuve :

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

- Puisque $|x| = max(x, -x)$, notons qu'on a toujours $x \leqslant |x|$ et $-x \leqslant |x|$. Ainsi :

- $x \leqslant |x|$ et $y \leqslant |y|$ donc $x + y \leqslant |x| + |y|$.
- $-x \leqslant |x|$ et $-y \leqslant |y|$ donc $-x - y \leqslant |x| + |y|$.

Il en résulte que $|x+y| = max(x+y, -x-y) \leqslant |x| + |y|$: d'où la première inégalité triangulaire.

- D'après la première inégalité triangulaire :

$|x-y| = |x + (-y)| \leqslant |x| + |-y| = |x| + |y|$: d'où l'inégalité de droite.

De plus :

- $|x| = |(x-y) + y| \leqslant |x-y| + |y|$ donc $|x| - |y| \leqslant |x-y|$.
- $|y| = |(y-x) + x| \leqslant |y-x| + |x| = |x-y| + |x|$ donc $|y| - |x| \leqslant |x-y|$

Il en résulte que $\big||x| - |y|\big| = max(|x| - |y|, |y| - |x|) \leqslant |x-y|$: d'où l'inégalité de gauche.

$\square$

Corollaire 1 (Inégalité triangulaire généralisée)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, a_n, \dots, a_n$ des nombres réels. On a l'inégalité : $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

Preuve :

Récurrence facile ! Si la propriété est vraie au rang n, alors au rang $n+1$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| + |a_{n+1}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|.$$

$\square$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels tels que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ |a_k - b_k| \leqslant 1$.

Déterminer une majoration de $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k\right|$.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

3.2 Partie entière

Définition 18 (Partie entière)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle partie entière de x le plus grand entier inférieur ou égal à x.
En d'autres termes, la partie entière de x est l'unique $n \in \mathbb{Z}$ tel qu'on ait l'encadrement :

$$n \leqslant x < n+1.$$

La partie entière de x est notée $\lfloor x \rfloor$.

On retiendra : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1}$

De manière équivalente : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x}$

Exemples

$\lfloor 5.3 \rfloor = 5$, $\quad \lfloor -3.2 \rfloor = -4$, $\quad \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0$, $\quad \left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor = -1$, $\quad \lfloor 3 \rfloor = 3$.

Fonction : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$.

Domaine de définition : $\mathbb{R}$

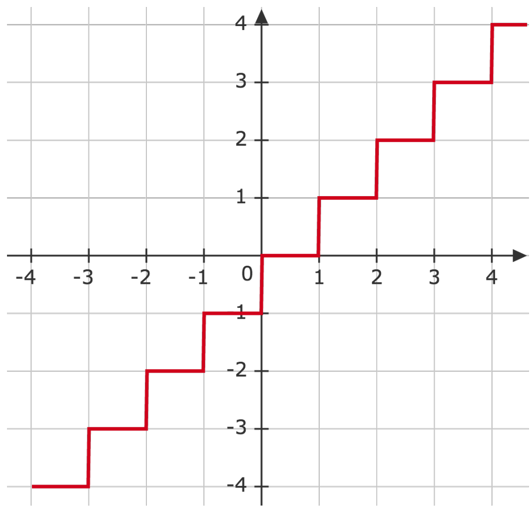
Sens de variation : Croissante

Signe : Négatif sur $\mathbb{R}_-$, positif sur $\mathbb{R}_+$

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Dérivée : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad f'(x) = 0$

Parité : Aucune



Remarques 11

- La partie entière est à bien distinguer de l'entier "le plus proche" de x, ou de la "troncature" :

Pour $x = 5.85$: $\quad \lfloor x \rfloor = 5$, $\quad$ "Troncature" $= 5$, $\quad$ "Entier le plus proche" $= 6$.
Pour $x = -3.6$: $\quad \lfloor x \rfloor = -4$, $\quad$ "Troncature" $= -3$, $\quad$ "Entier le plus proche" $= -4$.

- La partie entière $\lfloor x \rfloor$ est parfois appelée "partie entière inférieure".

Exercice 8

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \ r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad r_n \in \mathbb{Q} \quad$ et $\quad |x - r_n| \leqslant \dfrac{1}{10^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\lfloor 10^n x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $10^n \in \mathbb{N}$ donc $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \in \mathbb{Q}$.

Par définition, on a : $\quad 10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x$

donc $x - \dfrac{1}{10^n} < \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \leqslant x$ c'est à dire $x - \dfrac{1}{10^n} < r_n \leqslant x$.

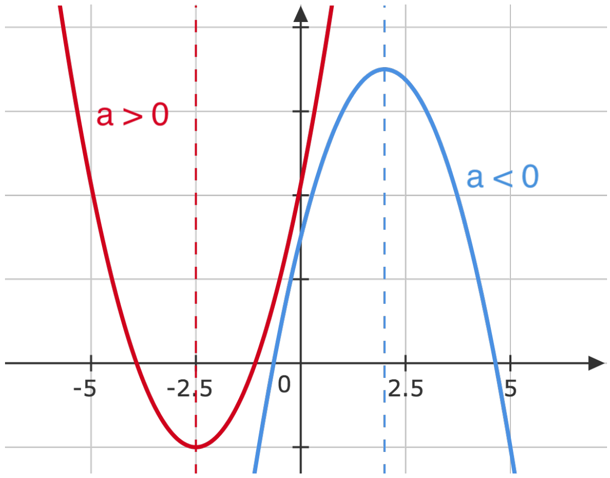
On en déduit $0 \leqslant x - r_n < \dfrac{1}{10^n}$, d'où finalement $|x - r_n| = x - r_n < \dfrac{1}{10^n}$.

3.3 Polynômes du second degré

Fonction : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax^2+bx+c \end{array}$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$ $a > 0$	$+\infty$ ↘	$f(-\frac{b}{2a})$	↗ $+\infty$
$f(x)$ $a < 0$	$-\infty$ ↗	$f(-\frac{b}{2a})$	↘ $-\infty$



Domaine de définition : $\mathbb{R}$

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$

Parité : Aucune en général

Signe : Dépend de l'étude des racines...

Dérivée : $f'(x) = 2ax + b$

Axe de symétrie : Droite verticale $x = \dfrac{-b}{2a}$

Calcul des racines, signe : Forme canonique : $f(x) = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

En notant $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ on a 3 cas possibles :

- Si $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$ $a > 0$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$ $a < 0$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- Si $\Delta = 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution ("double") : $x = -\dfrac{b}{2a}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$ $a > 0$		$+$	0	$+$	
$f(x)$ $a < 0$		$-$	0	$-$	

- Si $\Delta < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$ $a > 0$		$+$	
$f(x)$ $a < 0$		$-$	

Lien racines / coefficients : Si $\Delta > 0$, $\quad x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $\quad x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

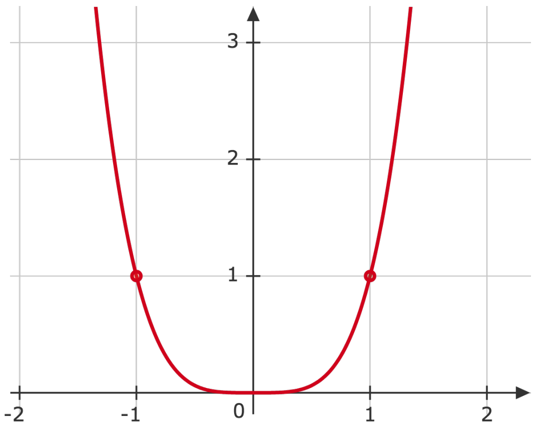
3.4 Fonctions puissances entières positives

Définition 19 (Puissances entières positives)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit : $x^n = x \times x \times \ldots \times x$ (n fois).
Ainsi par convention (produit vide) : $x^0 = 1$.

Fonction : $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$ avec $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{n \text{ pair}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^n$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

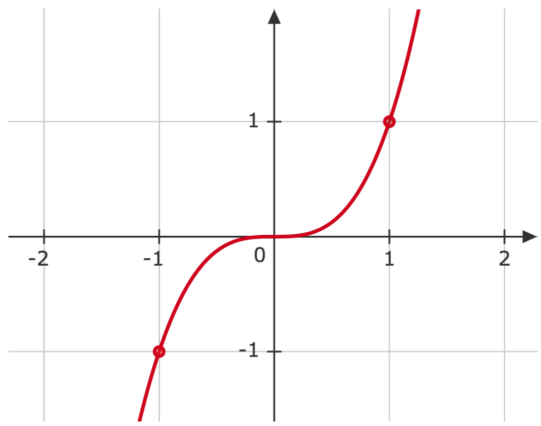


Domaine de définition : $\mathbb{R}$ **Signe :** Positif

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$ **Dérivée :** $f'(x) = n\,x^{n-1}$ **Parité :** Paire

Fonction : $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$ avec $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{n \text{ impair}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^n$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Domaine de définition : $\mathbb{R}$

Signe : Négatif sur $\mathbb{R}_-$, positif sur $\mathbb{R}_+$

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$ **Dérivée :** $f'(x) = n\,x^{n-1}$ **Parité :** Impaire

Remarque 12

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^6 = (-1)^6 \times x^6 = x^6$ mais $(-x)^7 = (-1)^7 \times x^7 = -x^7$.

Règles de calcul / Propriétés : $x^{n+m} = x^n x^m$, $(x^n)^m = x^{nm}$ $(xy)^n = x^n y^n$, $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$
$(n, m \in \mathbb{N})$

3.5 Fonctions puissances entières négatives

Définition 20 (Puissances entières négatives)

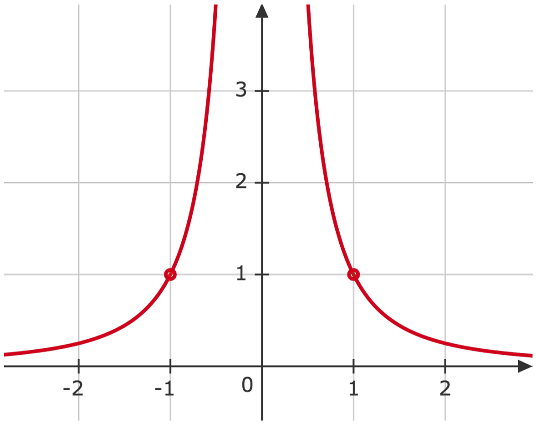
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on définit : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

Ainsi, en particulier : $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$.

Fonction : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{-n} \end{array}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{n \text{ pair}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)=x^{-n}$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

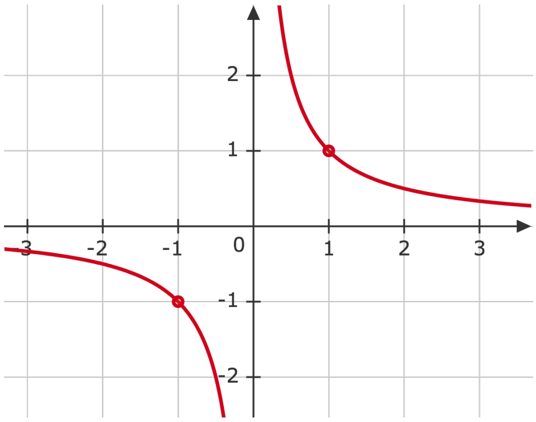


Domaine de définition : $\mathbb{R}^*$ **Signe :** Positif

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}^*$ **Dérivée :** $f'(x) = -n\,x^{-n-1} = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$ **Parité :** Paire

Fonction : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{-n} \end{array}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{n \text{ impair}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)=x^{-n}$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0



Domaine de définition : $\mathbb{R}^*$

Signe : Négatif sur $\mathbb{R}_-^*$, positif sur $\mathbb{R}_+^*$

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}^*$ **Dérivée :** $f'(x) = -n\,x^{-n-1} = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$ **Parité :** Impaire

Règles de calcul / Propriétés : $x^{n+m} = x^n x^m$, $\quad (x^n)^m = x^{nm} \quad (xy)^n = x^n y^n$, $\quad \left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$

$(n, m \underline{\in \mathbb{Z}})$

3.6 Exponentielle

Définition 21 (Fonction exponentielle)

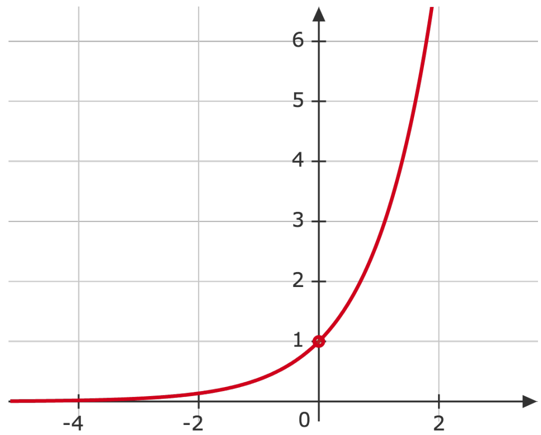
On admet qu'il existe une unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant :

$$f' = f \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1.$$

On note cette fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le réel $\exp(x)$ se note aussi e^x

Fonction : $\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp(x)$	0 ↗	$+\infty$



Domaine de définition : $\mathbb{R}$

Signe : Strictement positif

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}$ **Dérivée :** $\exp'(x) = e^x$ **Parité :** Aucune

Règles de calcul / Propriétés : $e^{x+y} = e^x e^y, \quad (e^x)^y = e^{xy}, \quad e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}, \quad e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

Nombre d'Euler : $e = exp(1) \simeq 2.7$

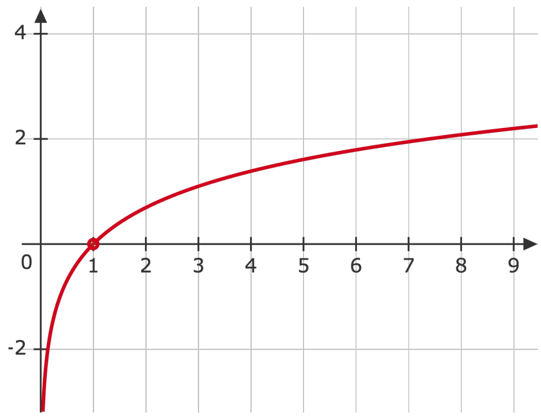
3.7 Logarithme (népérien)

Définition 22 (Fonction logarithme népérien)

La fonction exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
On peut donc introduire sa bijection réciproque $\exp^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.
Cette réciproque est appelée logarithme (népérien) et notée ln.

Fonction : $\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$

x	0	$+\infty$
$\ln(x)$	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$



Domaine de définition : $\mathbb{R}_+^*$

Signe : Négatif sur $]0, 1]$, Positif sur $[1, +\infty[$

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}_+^*$ **Dérivée :** $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

Règles de calcul / Propriétés : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x, \qquad \forall x > 0,\ e^{\ln(x)} = x$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \ln(x^y) = y\ln(x), \qquad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

3.8 Fonctions puissances réelles

Rappel : Si $n \in \mathbb{N}$, $x^n = x \times \ldots \times x$ (n fois) et $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$. Comment définir $x^{2/3}$ ou x^π ?...

Définition 23 (Puissance réelle)

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (on n'est donc pas dans le cas d'une puissance entière).

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit : $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)) = e^{\alpha \ln(x)}$.

Remarque 13

Cette définition est bien cohérente avec le cas où $\alpha = n \in \mathbb{N}$, car d'après les propriétés de exp et ln :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{n \ln(x)} = e^{\ln(x^n)} = x^n.$$

De même si $\alpha = -n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

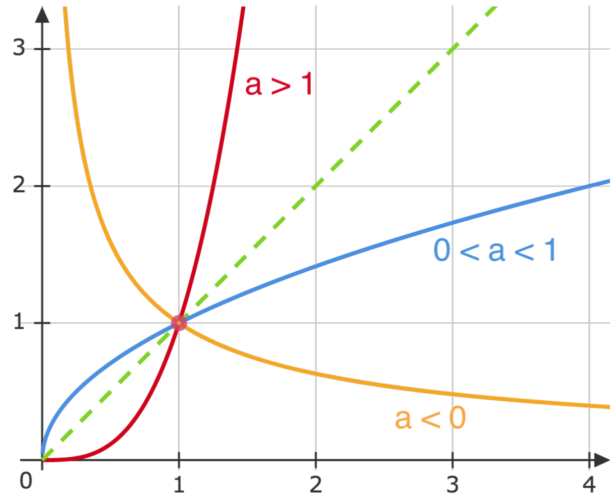
Attention !

Si l'exposant α n'est pas un entier relatif, la quantité x^α est définie uniquement pour $x > 0$.

Exemple : $2^{\sqrt{2}}$ est bien défini, mais $(-1)^{\sqrt{2}}$ n'a pas de sens !

Fonction : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha \end{array}$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

x	0	$+\infty$
x^α, $\alpha > 0$	0 ↗	$+\infty$
x^α, $\alpha < 0$	$+\infty$ ↘	0



Domaine de définition : $\mathbb{R}_+^*$

Domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}_+^*$

Signe : Strictement positif

Dérivée : $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$

Règles de calcul : $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$

Cas particulier important : Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, $x^{1/n}$ est la racine n-ième de x.
C'est l'unique réel positif qui, élevé à la puissance n, donne x :

$$x^{1/n} > 0 \text{ et } (x^{1/n})^n = x^{\frac{n}{n}} = x$$

On peut ainsi écrire : $\boxed{\forall x > 0, \ x^{1/n} = \sqrt[n]{x}}$

En particulier, $\boxed{\forall x > 0, \ x^{1/2} = \sqrt{x}}$

Remarque 14

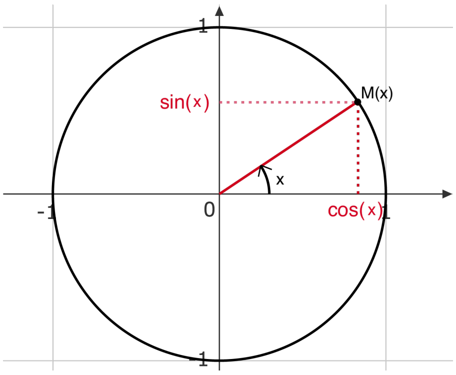
$x \mapsto \sqrt{x}$ est défini en $x = 0$, mais pas $x \mapsto x^{1/2}$! C'est la seule différence entre ces deux fonctions.

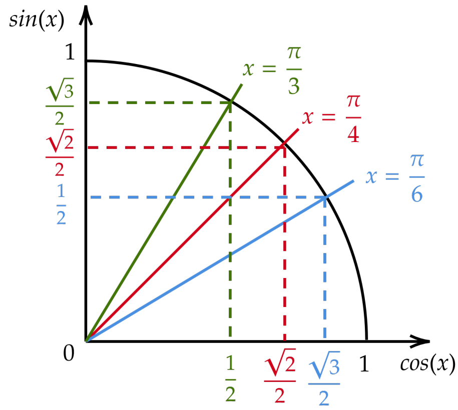
3.9 Cosinus et sinus

Définition 24 (Fonctions trigonométriques)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $M(x)$ le point d'angle x sur le cercle trigonométrique, dans un repère orthonormé.

- Le cosinus de x, noté $\cos(x)$ est l'abscisse de $M(x)$.
- Le sinus de x, noté $\sin(x)$ est l'ordonnée de $M(x)$.





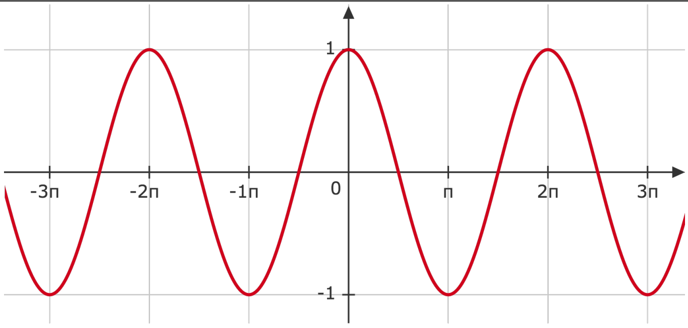
Le dessin précédent donne les valeurs particulières :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Connaissant celles-ci, on peut rapidement retrouver les autres valeurs particulières (en $-\frac{\pi}{2}$, en $\frac{3\pi}{4}$...) en dessinant le cercle trigonométrique.

Fonction : $\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

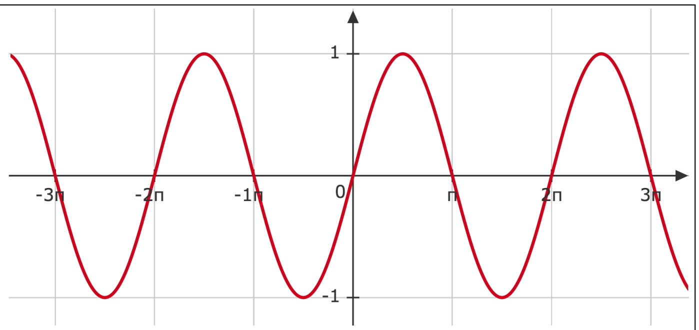


Domaine de définition : $\mathbb{R}$ **Domaine de dérivabilité :** $\mathbb{R}$ **Dérivée :** $\cos'(x) = -\sin(x)$

Parité : Paire **Périodicité :** 2π-périodique

Fonction : $\sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0



Domaine de définition : $\mathbb{R}$ **Domaine de dérivabilité :** $\mathbb{R}$ **Dérivée :** $\sin'(x) = \cos(x)$

Parité : Impaire **Périodicité :** 2π-périodique

Règles de calcul / Propriétés : $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$

En particulier : $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$

3.10 Tangente et arctangente

Définition 25 (Fonction tangente)

On note que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = 0 \iff x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

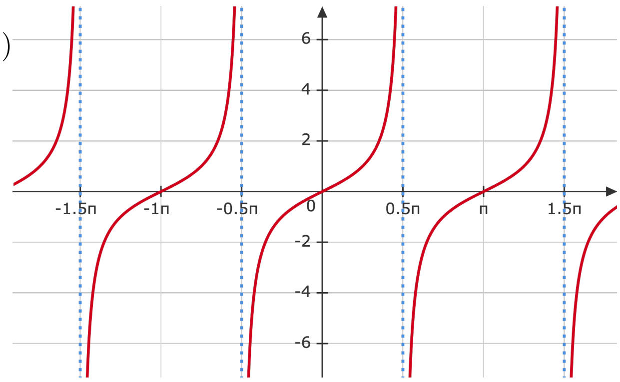
Ainsi, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ on peut définir : $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

À l'aide des valeurs particulières de cos et sin, on peut facilement trouver celles de tan. Les autres peuvent être retrouvées par imparité et par périodicité.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonction : $\tan : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	$\|\ -\infty$	$\nearrow\ 0\ \nearrow$	$+\infty\ \|$



Domaine de définition : $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ **Domaine de dérivabilité :** $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Dérivée : $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$

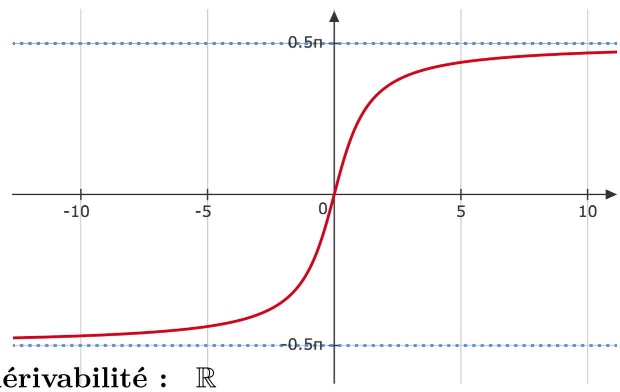
Parité : Impaire **Périodicité :** π-périodique

Définition 26 (Fonction arctangente)

La fonction tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.
On peut donc introduire la bijection réciproque $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Cette réciproque est appelée arctangente et notée arctan.

Fonction : $\arctan : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto & \arctan(x) \end{array}$

x	$-\infty$	0	∞
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow\ 0\ \nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



Domaine de définition : $\mathbb{R}$ **Domaine de dérivabilité :** $\mathbb{R}$

Dérivée : $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Parité : Impaire **Périodicité :** Aucune

Propriétés : $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan(x)) = x, \qquad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \arctan(\tan(x)) = x$

En particulier on trouve : $\arctan(0) = 0, \quad \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$

Attention !

La fonction arctan est la bijection réciproque de la fonction tan restreinte à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Ainsi, la quantité $\arctan(\tan(x))$ est bien définie pour tout x dans le domaine de définition de tan, mais n'est égale à x que pour $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$!

Exemple : $\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} + \pi$

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Justifier l'existence d'une borne supérieure/inférieure.
- Déterminer le sup/inf/max/min d'une partie de $\mathbb{R}$.
- Manipuler des valeurs absolues en distinguant éventuellement les cas.
- Manipuler l'inégalité triangulaire.
- Maîtriser le vocabulaire lié aux fonctions numériques .
(sens de variation, majorant/minorant, sup/inf, max/min...)
- Mener très rapidement l'étude d'une fonction polynomiale de degré 2.
- Connaitre les propriétés et règles de calcul des fonctions puissances.
(en faisant notamment attention aux ensembles de définition !)
- Connaitre les propriétés et règles de calcul des fonctions exp et ln.
- Connaitre les propriétés et règles de calcul des fonctions cos, sin, tan, arctan.
Savoir rapidement retrouver des valeurs particulières.

Pour suivre

- Manipuler la partie entière.
- Étudier rapidement une fonction : domaine, variations, allure du graphe.
- Utiliser la parité/imparité ou la périodicité pour réduire le domaine de l'étude.
- Utiliser les formules d'addition de cos et sin pour déterminer d'autres formules.

Pour les ambitieux

- Démontrer rigoureusement qu'un réel est la borne sup/inf d'une partie de $\mathbb{R}$.
(quand il ne s'agit pas d'un maximum/minimum)