Samedi 1 Février 2025

Devoir Sur Table n°4 – Corrigé

Exercice 1 : La "fonction moyenne"

1. *Etude de cas particuliers :* Pour chacune des fonctions f suivantes, calculer l'expression explicite de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, puis justifier que g est prolongeable par continuité en 0.

   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

   $$g(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}\cos(2t)dt = \frac{1}{2x}\Big[\frac{1}{2}\sin(2t)\Big]_{-x}^{x} = \frac{\sin(2x)-\sin(-2x)}{4x} = \frac{\sin(2x)+\sin(2x)}{4x} = \boxed{\frac{\sin(2x)}{2x}}.$$

   Avec les limites usuelles, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y} = 1$.

   Ainsi $\boxed{g \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, avec une intégration par partie :

   $$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} t\sin(t)dt = \frac{1}{2x}\left(\Big[-t\cos(t)\Big]_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x} -\cos(t)dt\right) \\ &= \frac{1}{2x}\left(-x\cos(x) - x\cos(-x) + \Big[\sin(t)\Big]_{-x}^{x}\right) \\ &= \frac{1}{2x}\left(-2x\cos(x)+\sin(x)-\sin(-x)\right) = \frac{2\sin(x)-2x\cos(x)}{2x} = \boxed{\frac{\sin(x)}{x} - \cos(x)}. \end{aligned}$$

   A nouveau, on calcule $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1 - \cos(0) = 0$.

   Ainsi $\boxed{g \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$.

   (c) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t^3e^{-t^2}}{1+t^6}$ semble compliquée, mais l'astuce est de remarquer qu'elle est impaire :

   $$f(-t) = \frac{(-t)^3e^{-(-t)^2}}{1+(-t)^6} = \frac{-t^3e^{-t^2}}{1+t^6} = -f(t).$$

   Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$ et donc simplement $\boxed{g(x) = 0}$.

   Evidemment, on a alors $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ et donc $\boxed{g \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$.

2. On revient au cas de $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ quelconque. On pourra introduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

   $$g(-x) = \frac{1}{-2x}\int_{x}^{-x} f(t)dt = \frac{1}{2x}\times\left(-\int_{x}^{-x} f(t)dt\right) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)dt = g(x).$$

   Ainsi $\boxed{g \text{ est paire sur } \mathbb{R}^*}$.

   (b) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

   $$g(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2x}\Big[F(t)\Big]_{-x}^{x} = \frac{F(x)-F(-x)}{2x}.$$

   Puisque $F' = f$ est continue, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

   Ainsi $\boxed{g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*}$ comme différence, composée et quotient de fonctions C^1.

   On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

   $$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{F(x)-F(-x)}{2x}\right) = \frac{(F'(x)+F'(-x))2x - (F(x)-F(-x))2}{4x^2} \\ &= \frac{f(x)+f(-x)}{2x} - \frac{1}{x}\frac{F(x)-F(-x)}{2x} = \boxed{\frac{f(x)+f(-x)}{2x} - \frac{g(x)}{x}}. \end{aligned}$$

(c) Comme on l'a vu, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{F(x)-F(-x)}{2x} = \frac{F(x)-F(0)+F(0)-F(-x)}{2x} \\ &= \frac{F(x)-F(0)}{2x} - \frac{F(-x)-F(0)}{2x} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x} + \frac{F(-x)-F(0)}{-x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0} + \frac{F(-x)-F(0)}{-x-0}\right). \end{aligned}$$

On reconnait ici des taux d'accroissements ! Par définition de la dérivée,

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{F(-x)-F(0)}{-x-0} = F'(0) = f(0)$$

Ainsi, on obtient $\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{2}(f(0)+f(0))$, c'est à dire effectivement $\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = f(0)}$.

Exercice 2 : Une famille d'intégrales et de sommes infinies

Pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$ on introduit les notations suivantes :

$$I(a,b) = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a} dt, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ S_n(a,b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ak+b}, \qquad S(a,b) = \lim_{n\to+\infty} S_n(a,b)$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'en fait : $\forall a, b \in \mathbb{N}^*,\ \ I(a,b) = S(a,b)$.

1. Pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{b-1}}{1+t^a}$ est définie et continue sur $[0,1]$ (quotient de polynômes), donc $\boxed{\text{l'intégrale } I(a,b) \text{ est bien définie}}$.

2.
```
import numpy as np ; import matplotlib.pyplot as plt
def graphe(a,b) :
  X = np.linspace(0,1,1000)
  Y = (X**(b-1)) / (1 + X**a)
  plt.plot(X,Y) ; plt.show()
```

3. (a) $I(1,1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^0}{1+t^1} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 = \boxed{\ln(2)}$.

$I(2,1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^0}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

(b) Soit $a \in \mathbb{N}^*$. On a : $I(a,a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^a} dt = \left[\frac{\ln(1+t^a)}{a}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\ln(2)}{a}}$.

(c) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Rappelons que pour tout $t \in [0,1]$, $t^{a+1} \leqslant t^a$ et de même $t^b \leqslant t^{b-1}$.
On a donc facilement les inégalités :

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant \frac{t^b}{1+t^a} \leqslant \frac{t^{b-1}}{1+t^a} \leqslant \frac{t^{b-1}}{1+t^{a+1}} \leqslant t^{b-1}.$$

En intégrant ces inégalités ($\int_0^1$), on obtient bien : $\boxed{0 \leqslant I(a,b+1) \leqslant I(a,b) \leqslant I(a+1,b) \leqslant \frac{1}{b}}$.

En effet (pour la valeur tout à droite) : $\displaystyle\int_0^1 t^{b-1} dt = \left[\frac{t^b}{b}\right]_0^1 = \frac{1}{b}$.

(d) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité, on a :

$$\begin{aligned} I(a,b) + I(a,a+b) &= \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a} dt + \int_0^1 \frac{t^{a+b-1}}{1+t^a} dt = \int_0^1 \left(\frac{t^{b-1}}{1+t^a} + \frac{t^{a+b-1}}{1+t^a}\right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1+t^a)}{1+t^a} dt = \int_0^1 t^{b-1} dt = \left[\frac{t^b}{b}\right]_0^1 = \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

On a bien montré que $\boxed{I(a,b) + I(a,a+b) = \frac{1}{b}}$.

4. Attention : les n premiers termes de la suite sont bien ceux allant de $S_0(a,b)$ à $S_{n-1}(a,b)$. Notons par ailleurs que $S_0(a,b) = \frac{1}{b}$.

```
import numpy as np ; import matplotlib.pyplot as plt
def grapheS(a,b,n) :
  S = np.zeros(n) ; S[0] = 1/b
  for k in range(1, n) :
    S[k] = S[k-1] + (-1)**k / (a*k + b)
  X = np.arange(n) # [0, 1, ... , n-1]
  plt.plot(X,S) ; plt.show()
```

5. (a) Montrons que les suites $u = (S_{2n}(a,b))_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (S_{2n+1}(a,b))_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a classiquement :

$$u_{n+1} - u_n = S_{2n+2}(a,b) - S_{2n}(a,b) = \frac{-1}{a(2n+1)+b} + \frac{1}{a(2n+2)+b} < 0$$

$$v_{n+1} - v_n = S_{2n+3}(a,b) - S_{2n+1}(a,b) = \frac{1}{a(2n+2)+b} - \frac{1}{a(2n+3)+b} > 0$$

Ainsi, $\boxed{u \text{ est croissante et } v \text{ est décroissante}}$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{a(2n+1)+b} = 0$. Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0}$.

(b) Les suites u et v sont adjacentes, il en résulte, par théorème, qu'elle convergent vers un même réel $\ell \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \ell.$$

Ceci implique (encore par théorème) que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell$.

Autrement dit, la suite $(S_n(a,b))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donc $\boxed{S(a,b) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(a,b)}$ a bien un sens !

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note que :

$$\begin{aligned}
S_n(a, a+b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ak + (a+b)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a(k+1)+b} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-1)^{j-1}}{aj+b} \\
&= -\sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-1)^j}{aj+b} = -\left(\sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^j}{aj+b} - \frac{1}{b}\right) \\
&= -\left(S_{n+1}(a,b) - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{b} - S_{n+1}(a,b).
\end{aligned}$$

En passant à la limite dans l'égalité $\boxed{S_n(a,a+b) = \frac{1}{b} - S_{n+1}(a,b)}$ quand n tend vers $+\infty$, on obtient $S(a,a+b) = \frac{1}{b} - S(a,b)$, et donc $\boxed{S(a,b) + S(a,a+b) = \frac{1}{b}}$.

On peut bien-sûr noter que c'est la même formule que celle obtenue pour les intégrale en 3.(d).

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer $S_n(a,b) = \displaystyle\int_0^1 t^{b-1}\left(\sum_{k=0}^{n}(-t^a)^k\right)dt$, on part du membre de droite :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^{b-1}\left(\sum_{k=0}^{n}(-t^a)^k\right)dt &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} t^{b-1}(-t^a)^k\right)dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{b-1} t^{ak}\right)dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ak+b-1}\right)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 t^{ak+b-1}dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale}
\end{aligned}$$

Pour finir, un calcul rapide (et déjà fait plusieurs fois) donne $\displaystyle\int_0^1 t^{ak+b-1}dt = \frac{1}{ak+b}$.

On obtient donc bien $\boxed{\displaystyle\int_0^1 t^{b-1}\left(\sum_{k=0}^{n}(-t^a)^k\right)dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{ak+b} = S_n(a,b)}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$. D'après la formule pour les sommes géométriques (car $-t^a \neq 1$) :

$$\sum_{k=0}^{n}(-t^a)^k = \frac{1-(-t^a)^{n+1}}{1-(-t^a)} = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{a(n+1)}}{1+t^a} = \frac{1}{1+t^a} - \frac{(-1)^{n+1}t^{a(n+1)}}{1+t^a}.$$

On en déduit que :

$$\left|\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n}(-t^a)^k\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}t^{a(n+1)}}{1+t^a}\right| = \frac{t^{a(n+1)}}{1+t^a} \leqslant t^{a(n+1)}.$$

On a bien montré : $\boxed{\displaystyle\left|\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n}(-t^a)^k\right| \leqslant t^{a(n+1)}}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. En remplaçant $I(a,b)$ par sa définition et $S(a,b)$ par l'expression du 6.(a), on obtient :

$$\begin{aligned}
\Big|I(a,b) - S_n(a,b)\Big| &= \left|\int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a}dt - \int_0^1 t^{b-1}\left(\sum_{k=0}^{n}(-t^a)^k\right)dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 \left(\frac{t^{b-1}}{1+t^a} - t^{b-1}\left(\sum_{k=0}^{n}(-t^a)^k\right)\right)dt\right| \quad \text{(par linéarité)} \\
&= \left|\int_0^1 t^{b-1}\left(\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n}(-t^a)^k\right)dt\right| \\
&\leqslant \int_0^1 t^{b-1}\left|\frac{1}{1+t^a} - \sum_{k=0}^{n}(-t^a)^k\right|dt \quad \text{(par l'inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \int_0^1 t^{b-1}t^{a(n+1)}dt \quad \text{(par l'inégalité du 6.(b))} \\
&= \int_0^1 t^{a(n+1)+b-1}dt = \frac{1}{a(n+1)+b} \quad \text{(calcul déjà fait plusieurs fois)}
\end{aligned}$$

On a bien montré que $\boxed{\displaystyle\Big|I(a,b) - S_n(a,b)\Big| \leqslant \frac{1}{a(n+1)+b}}$.

(d) En passant à la limite dans l'inégalité précédente quand $n \to +\infty$, on obtient $|I(a,b) - S(a,b)| \leqslant 0$ c'est à dire $|I(a,b) - S(a,b)| = 0$ et donc $\boxed{I(a,b) = S(a,b)}$.

7. On a déjà fait tous les calculs, il suffit de tout mettre bout à bout :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1} = S(1,1) = I(1,1) = \boxed{\ln(2)}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = S(2,1) = I(2,1) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

Problème : Fonction génératrice d'une variable aléatoire

Partie I - Pour des lois usuelles

1. Dans ce cas, on a $X(\Omega) = \{c\}$ et $P(X = c) = 1$. Ainsi la fonction génératrice devient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = t^c P(X = c) \ \text{ c'est à dire } \boxed{G_X(t) = t^c}.$$

2. Dans ce cas, on a $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(X = 0) = 1 - p$, $P(X = 1) = p$. Ainsi la fonction génératrice devient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = t^0 P(X = 0) + t^1 P(X = 1) \text{ c'est à dire } \boxed{G_X(t) = pt + 1 - p}.$$

3. Dans ce cas, on a $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \dfrac{1}{n}$. Ainsi :

$$\underline{\forall t \neq 1}, \quad G_X(t) = \sum_{k=1}^{n} t^k P(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} t^k = \frac{1}{n} \frac{t - t^{n+1}}{1 - t} = \boxed{\frac{t(1 - t^n)}{n(1 - t)}}.$$

et lorsque $t = 1$, on a : $G_X(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \boxed{1}$.

4. Dans ce cas, on a $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1 - p)^{n-k} = \boxed{(pt + 1 - p)^n}.$$

Partie II - Propriétés générales

5. $\boxed{\text{La fonction } G_X \text{ est une fonction polynômiale}}$.

Si ça ne semble pas clair, en notant par exemple $X(\Omega) = \{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$ (avec $n_1, n_2, \ldots, n_p \in \mathbb{N}$),

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = P(X = n_1) t^{n_1} + P(X = n_2) t^{n_2} + \ldots + P(X = n_p) t^{n_p}.$$

C'est bien l'expression d'un polynôme... Il en résulte bien-sûr qu'on peut le dériver autant qu'on veut.

6. (a) $G_X(1) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = \boxed{1}$.

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} t^k P(X = k)$, donc par linéarité de la dérivée :

$$(G_X)'(t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k \in X(\Omega)} t^k P(X = k) \right) = \sum_{k \in X(\Omega)} \frac{d}{dt}(t^k) P(X = k) = \sum_{k \in X(\Omega)} k t^{k-1} P(X = k).$$

En particulier, on obtient $(G_X)'(1) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} k P(X = k)$, c'est à dire par définition $\boxed{(G_X)'(1) = E(X)}$.

(c) En dérivant une seconde fois, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (G_X)''(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} k(k - 1) t^{k-1} P(X = k).$$

Ainsi $(G_X)''(1) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} k(k - 1) P(X = k)$ et on reconnait $\boxed{(G_X)''(1) = E(X(X - 1))}$

(avec le théorème de transfert).

Par suite, avec la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E\Big(X(X - 1) + X\Big) - E(X)^2 = E(X(X - 1)) + E(X) - E(X)^2$$

ce qui donne donc : $\boxed{V(X) = (G_X)''(1) + (G_X)'(1) - (G_X)'(1)^2}$

ou encore $\boxed{V(X) = (G_X)''(1) + (G_X)'(1)\Big(1 - (G_X)'(1)\Big)}$

$(G_X)''(1)$ sous la forme de l'espérance d'une certaine variable aléatoire.

7. En question 4., on a vu que si X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (pt + 1 - p)^n.$$

En dérivant : $(G_X)'(t) = np(pt + 1 - p)^{n-1}$ et $(G_X)''(t) = n(n - 1)p^2(pt + 1 - p)^{n-1}$.

En particulier, $(G_X)'(1) = np$ et $(G_X)''(1) = n(n - 1)p^2$.

En remplaçant dans les formules précédentes, on retrouve facilement $\boxed{E(X) = np}$ et $\boxed{V(X) = np(1 - p)}$.

8. Supposons que $G_X = G_Y$, c'est à dire que $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = G_Y(t)$. Ceci s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} P(X=k)t^k = \sum_{k=0}^{m} P(Y=k)t^k.$$

Autrement dit, on a l'égalité de deux polynômes (ou fonctions polynômiales).
On sait que ceci implique que les polynômes ont le même degré et les mêmes coefficients.
Cela donne donc : $m = n$ et $\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = P(Y=k)$.
Ainsi $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ont la même loi de probabilité}}$.

9. (a) Soit $k \in [\![0, n+m]\!]$. Puisque $Z = X+Y$, pour que l'évènement $[X+Y=k]$ soit réalisé, il faut qu'on ait "$X=0$ et $Y=k$" ou "$X=1$ et $Y=k-1$" ou "$X=2$ et $Y=k-2$" etc...
En passant en revue toutes les valeurs possibles pour X (de 0 à n), on obtient :

$$\begin{aligned}
P(Z=k) &= P\Big(([X=0]\cap[Y=k]) \cup ([X=1]\cap[Y=k-1]) \cup \ldots \cup [X=n]\cap[Y=k-n]\Big) \\
&= P\left(\bigcup_{i=0}^{n} [X=i]\cap[Y=k-i]\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} P\left([X=i]\cap[Y=k-i]\right) \quad \text{(car les évènements sont 2 à 2 incompatibles)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} P(X=i)P(Y=k-i) \quad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y\text{)}
\end{aligned}$$

Notons que certains termes dans cette somme sont éventuellements nuls, si jamais $k-i<0$ c'est à dire si $i>k$.

On a bien montré que $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0,n+m]\!], \quad P(Z=k) = \sum_{i=0}^{n} P(X=i)P(Y=k-i)}$.

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Puisque $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,m]\!]$, il est clair que le support de $Z = X+Y$ est $Z(\Omega) = [\![0,n+m]\!]$. On calcule alors :

$$G_Z(t) = \sum_{k=0}^{m+n} P(Z=k)t^k = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i=0}^{n} P(X=i)P(Y=k-i)\right)t^k = \sum_{k=0}^{m+n}\sum_{i=0}^{n} P(X=i)P(Y=k-i)t^k.$$

On peut intervertir les deux sommes :

$$G_Z(t) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{m+n} P(X=i)P(Y=k-i)t^k\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(P(X=i)\sum_{k=0}^{m+n} P(Y=k-i)t^k\right).$$

En posant le changement $j = k-i$ dans la somme sur k :

$$G_Z(t) = \sum_{i=0}^{n}\left(P(X=i)\sum_{j=-i}^{m+n-i} P(Y=j)t^{i+j}\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(P(X=i)\ t^i \times \sum_{j=-i}^{m+n-i} P(Y=j)t^j\right).$$

Enfin, on note que si j parcourt les valeurs de $-i$ à $m+n-i$ (avec $i \in [\![0,n]\!]$ fixé), en particulier j parcourt toutes les valeurs de 0 à m. Par ailleurs $P(Y=j)=0$ si $j<0$ ou si $j>m$.
On a donc :

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ \sum_{j=-i}^{m+n-i} P(Y=j)t^j = \sum_{j=0}^{m} P(Y=j)t^j = G_Y(t)$$

En remplaçant, on obtient finalement :

$$G_Z(t) = \sum_{i=0}^{n}\Big(P(X=i)\ t^i \times G_Y(t)\Big) = \left(\sum_{i=0}^{n} P(X=i)t^i\right) \times G_Y(t) = G_X(t)\times G_Y(t).$$

On a bien montré que $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ G_Z(t) = G_X(t)\times G_Y(t)}$.

Partie III - Pokémon

10. En retournant la première carte, David peut avoir découvert 0 ou 1 carte holographique (qui est forcément nouvelle). Ainsi $\boxed{X_1(\Omega) = \{0, 1\}}$.

    La probabilité que la première carte soit holographique est bien-sûr $\dfrac{r}{N}$.

    On a donc $\boxed{P(X_1 = 1) = \dfrac{r}{N} \text{ et } P(X_1 = 0) = 1 - \dfrac{r}{N}}$. On reconnait une loi de Bernoulli : $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{r}{N})}$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    X_n est le nombre de cartes holographiques distinctes découvertes par David après n cartes retournées.
    Dans tous les cas, ce nombre ne peut pas excéder r, le nombre total de cartes holographiques existantes.
    On a donc $\boxed{X_n(\Omega) \subset [\![0, r]\!]}$.
    De plus, ce nombre ne peut pas excéder n, le nombre de cartes retournées à ce stade.
    On a donc $\boxed{X_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]}$.
    En fait, précisément, $\boxed{X_n(\Omega) = [\![0, \min(n, r)]\!]}$.
    (c'est à dire $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ pour tout $n \leqslant r$ et $X_n(\Omega) = [\![0, r]\!]$ pour tout $n > r$).

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, r]\!]$.
    L'évènement $[X_n = k]$ signifie que David a découvert exactement k cartes holographiques différentes après n retournements. Cela signifie qu'à l'étape d'avant ($n-1$ retournement), il avait forcément déjà découvert $k-1$ ou k cartes holographiques différentes. Ainsi :

    $$[X_n = k] = ([X_{n-1} = k-1] \cap [X_n = k]) \cup ([X_{n-1} = k] \cap [X_n = k])$$

    et donc :

    $$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P\Big([X_{n-1} = k-1] \cap [X_n = k]\Big) + P\Big([X_{n-1} = k] \cap [X_n = k]\Big) \\ &= P(X_{n-1} = k-1) P_{[X_{n-1}=k-1]}(X_n = k) + P(X_{n-1} = k) P_{[X_{n-1}=k]}(X_n = k). \end{aligned}$$

    (Ceci peut aussi s'exprimer avec une formule des probabilités totales). Ensuite :
    • Si l'évènement $[X_{n-1} = k-1]$ est réalisé, au bout de $n-1$ retournements, David a découvert $k-1$ cartes holographiques distinctes. Pour que $[X_n = k]$, il faut donc qu'au n-ème retournement il découvre une des $r - (k-1)$ cartes holographiques qu'il n'a pas encore obtenu :

    $$P_{[X_{n-1}=k-1]}(X_n = k) = \frac{r - (k-1)}{N} = \frac{r - k + 1}{N}.$$

    • Si l'évènement $[X_{n-1} = k]$ est réalisé, au bout de $n-1$ retournements, David a découvert k cartes holographiques distinctes. Pour que $[X_n = k]$, il faut donc qu'au n-ème retournement il ne découvre pas de nouvelle carte holographique, c'est à dire qu'il tombe soit sur l'une de k cartes holographiques déjà obtenue, soit sur l'une des $N - r$ cartes non-holographiques :

    $$P_{[X_{n-1}=k-1]}(X_n = k) = \frac{k + N - r}{N} = \frac{N - r + k}{N}.$$

    En remplaçant, on obtient : $\boxed{P(X_n = k) = \dfrac{N - r + k}{N} P(X_{n-1} = k) + \dfrac{r - k + 1}{N} P(X_{n-1} = k-1)}$.

13. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En principe on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ g_n(t) = G_{X_n}(t) = \displaystyle\sum_{k \in X_n(\Omega)} t^k P(X_n = k)$.

    Or on a vu en question 11. que $X_n(\Omega) \subset [\![0, r]\!]$.
    On peut donc considérer la somme pour $k \in [\![0, r]\!]$ (quitte à ce que certaines termes soit nuls)

    On a donc bien : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ g_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} t^k P(X_n = k)}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$. C'est sans doute le calcul le plus complexe de ce sujet... On a :

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \sum_{k=0}^{r} t^k P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{r} t^k \left(\frac{N-r+k}{N} P(X_{n-1} = k) + \frac{r-k+1}{N} P(X_{n-1} = k-1) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{r} \frac{N-r+k}{N} t^k P(X_{n-1} = k) + \sum_{k=0}^{r} \frac{r-k+1}{N} t^k P(X_{n-1} = k-1). \end{aligned}$$

Ensuite, on pose le changement $j = k-1$ dans la seconde somme :

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \sum_{k=0}^{r} \frac{N-r+k}{N} t^k P(X_{n-1} = k) + \sum_{j=-1}^{r-1} \frac{r-j}{N} t^{j+1} P(X_{n-1} = j) \\ &= \sum_{k=0}^{r} \frac{N-r+k}{N} t^k P(X_{n-1} = k) + \sum_{j=0}^{r} \frac{r-j}{N} t^{j+1} P(X_{n-1} = j) \text{ (on ajoute/retire des termes} = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{r} \frac{N-r+k}{N} t^k P(X_{n-1} = k) + \sum_{k=0}^{r} \frac{r-k}{N} t^{k+1} P(X_{n-1} = k) \text{ (on renomme } j \text{ en } k) \\ &= \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{N-r+k}{N} t^k + \frac{r-k}{N} t^{k+1} \right) P(X_{n-1} = k). \end{aligned}$$

On ré-exprime l'expression entre parenthèse pour distinguer les termes en t^k et les termes en kt^k :

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{N-r+rt}{N} t^k + \frac{(1-t)}{N} kt^k \right) P(X_{n-1} = k) \\ &= \frac{N-r+rt}{N} \sum_{k=0}^{r} t^k P(X_{n-1} = k) + \frac{(1-t)}{N} \sum_{k=0}^{r} kt^k P(X_{n-1} = k) \\ &= \frac{N-r+rt}{N} \sum_{k=0}^{r} t^k P(X_{n-1} = k) + \frac{t(1-t)}{N} \sum_{k=0}^{r} kt^{k-1} P(X_{n-1} = k). \end{aligned}$$

On reconnait enfin $g_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{r} t^k P(X_{n-1} = k)$ et $g'_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{r} kt^{k-1} P(X_{n-1} = k)$.

On a donc bien obtenu : $\boxed{g_n(t) = \frac{N-r+rt}{N} g_{n-1}(t) + \frac{t(1-t)}{N} g'_{n-1}(t)}$. Ouf !

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Avec les résultats du 6.(a) et (b), on sait que $g_n(1) = 1$ et $g'_n(1) = E(X_n)$.
L'objectif est donc de calculer $g'_n(1)$. En dérivant la relation précédente par rapport à t, on obtient :

$$g'_n(t) = \frac{r}{N} g_{n-1}(t) + \frac{N-r+rt}{N} g'_{n-1}(t) + \frac{1-2t}{N} g'_{n-1}(t) + \frac{t(1-t)}{N} g''_{n-1}(t).$$

En évaluant en $t = 1$, on obtient :

$$g'_n(1) = \frac{r}{N} \times 1 + g'_{n-1}(1) - \frac{1}{N} g'_{n-1}(1) + 0$$

c'est à dire effectivement $\boxed{E(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_{n-1}) + \frac{r}{N}}$.

15. (a) En notant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = E(X_n)$, on note qu'il s'agit d'une suite arithmético-géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{N}\right) u_n + \frac{r}{N}.$$

On cherche ainsi $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\alpha + \frac{r}{N}$, c'est à dire $\alpha = r$.
On pose ensuite $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \alpha = u_n - r$. On a alors facilement

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{N}\right) v_n.$$

Il en résulte que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n v_0 = -r\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$
(car $v_0 = E(X_0) - r = -r$ puisque $X_0 = 0$)
Pour finir, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + r = -r\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n + r$.

On obtient finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_n) = r\left(1 - (1 - \tfrac{1}{N})^n\right)}$

(b) De l'expression précédente, puisque $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n = 0$, on déduit $\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = r}$.

Notons que si on n'a pas l'expression précédente, on peut aussi 'deviner' la limite (en admettant qu'elle existe) en passant à la limite dans la relation de la question 14...

Cette valeur est cohérente car, à mesure que le nombre n de cartes retournées augmente, on s'attend à ce que David finisse par découvrir l'intégralité des r cartes holographiques existantes ! $\boxed{\text{Quand } n \text{ est très grand, on devine que } X_n \text{ se rapproche de } r}$, et donc il est logique de trouver $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = r$.

16. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a déjà vu en question 14 qu'en dérivant la relation $(\star)$ on obtenait :

$$g_n'(t) = \frac{r}{N} g_{n-1}(t) + \frac{N-r+rt}{N} g_{n-1}'(t) + \frac{1-2t}{N} g_{n-1}'(t) + \frac{t(1-t)}{N} g_{n-1}''(t).$$

En dérivant de nouveau on obtient :

$$\begin{aligned} g_n''(t) &= \frac{r}{N} g_{n-1}'(t) + \frac{r}{N} g_{n-1}'(t) + \frac{N-r+rt}{N} g_{n-1}''(t) - \frac{2}{N} g_{n-1}'(t) + \frac{1-2t}{N} g_{n-1}''(t) \\ &\quad + \frac{1-2t}{N} g_{n-1}''(t) + \frac{t(1-t)}{N} g_{n-1}^{(3)}(t) \\ &= \frac{2r-2}{N} g_{n-1}'(t) + \frac{N-r+2+(r-4)t}{N} g_{n-1}''(t) + \frac{t(1-t)}{N} g_{n-1}^{(3)}(t). \end{aligned}$$

En évaluant en $t = 1$, on obtient : $g_n''(1) = \frac{2r-2}{N} g_{n-1}'(1) + \frac{N-2}{N} g_{n-1}''(1)$

c'est à dire : $\boxed{g_n''(1) = \frac{2r-2}{N} E(X_{n-1}) + \left(1-\frac{2}{N}\right) g_{n-1}''(1)}$

(b) On peut ici se rappeler du lien entre $G_X''(1)$ et $V(X)$, résultat établi en 6.(c) :

$$V(X) = (G_X)''(1) + (G_X)'(1)(1-(G_X)'(1))$$

Avec la variable X_n, (et puisque $g_n = G_{X_n}$), cela donne :

$$V(X_n) = g_n''(1) + g_n'(1)(1-g_n'(1)) = g_n''(1) + E(X_n)(1-E(X_n)).$$

On a déjà vu que $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = r$. Par ailleurs, avec l'expression donnée par l'énoncé :

$$\lim_{n\to+\infty} g_n''(1) = \lim_{n\to+\infty} r(r-1)\left(1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^n - 2\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right) = r(r-1).$$

Il en résulte :

$$\lim_{n\to+\infty} V(X_n) = \lim_{n\to+\infty} \Big(g_n''(1) + E(X_n)(1-E(X_n))\Big) = r(r-1) + r(1-r) = 0.$$

On trouve effectivement $\boxed{\lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0}$.

<u>Interprétation</u> (non demandée) : On a déjà dit qu'à mesure que n augmente, X_n se rapproche de la valeur constante r. On s'attend à ce que quand n est très grand, la loi de probabilité de X_n soit à peu près celle d'une variable aléatoire constante égale à r.

La variance d'une variable aléatoire constante étant nulle, le fait que $\lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0$ est cohérent.