21

Espaces probabilisés généraux

Unions et intersections infinies

Exercice 1 (Lancers de pièce)
On lance indéfiniment une pièce de monnaie.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on définit l'événement :
A_i ="Obtenir Pile au i-ème lancer.".
Ecrire les événements suivants à l'aide des A_i :
A ="Les deux premiers lancers donnent Pile, le 4ème Face".
B ="N'obtenir que des Faces à partir du 10ème lancer".
C ="Obtenir au moins un Pile à partir du 10ème lancer".
D ="N'obtenir que des Piles à partir d'un moment".

Exercice 2 (Lancers de dé)
On lance indéfiniment un dé équilibré.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements :

- A_n ="Obtenir 6 au n-ième lancer."
- B_n = "Obtenir au moins un 6 au cours des n premiers lancers."
- C_n = "Le premier 6 est obtenu au n-ième lancer."
- D = "Obtenir au moins un 6."

1. Calculer $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$.
2. Exprimer $\overline{D}$ en fonction des A_i et en déduire $P(D)$.
3. Exprimer D en fonction des B_i et retrouver $P(D)$.
4. Exprimer D en fonction des C_i et retrouver $P(D)$.

Quelques énoncés pour s'exercer

Exercice 3 (Un jeu de hasard)
Fred et Jamy lancent tour à tour un dé équilibré. Fred gagne s'il obtient un multiple de 3 ; Jamy gagne s'il obtient un nombre pair. Le jeu s'arrête lorsque l'un des deux gagne.

Comme le pari de Fred est le plus improbable, c'est lui qui lance le dé en premier ! Fred joue donc aux rangs impairs et Jamy aux rangs pairs.

Pour tout $k \geqslant 0$, on note ainsi :
A_{2k+1} = "Multiple de 3 au $(2k+1)$-ième lancer" et
A_{2k+2} = "Nombre pair au $2k+2$-ième lancer"

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité que Fred gagne le jeu exactement au $(2n+1)$-ième lancer.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité que Jamy gagne le jeu exactement au $(2n+2)$-ième lancer.

3. En déduire les probabilités :
(a) Que Fred gagne le jeu
(b) Que Jamy gagne le jeu
(c) Que le jeu finisse par s'arrêter.

Exercice 4 (Le troisième six)
On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un six pour la troisième fois.

1. Pour $n \geqslant 3$, on note A_n l'évènement :

"Le 3ème six apparaît au n-ième lancer".

(a) Montrer que $P(A_n) = \binom{n-1}{2}\dfrac{5^{n-3}}{6^n}$.

(b) En déduire (par le calcul) que $\sum_{n=3}^{+\infty} P(A_n) = 1$.

(c) On note C = "Le 3ème six n'apparait jamais". Déduire des questions précédentes que $P(C) = 0$.

2. Pour tout $n \geqslant 3$, on note B_n l'évènement :

"Le 3ème six n'est pas encore apparu au n-ième lancer".

(a) Exprimer B_n en fonction des évènements A_k.
(b) En déduire $P(B_n)$ en fonction des $P(A_k)$.
(c) Exprimer l'évènement C en fonction des évènements B_k et retrouver le fait que $P(C) = 0$.

Exercice 5 (Procédure de Von Neumann)
(Ou comment réaliser une expérience équilibrée avec une pièce déséquilibrée...)

On dispose d'une pièce déséquilibrée, donnant Face avec la probabilité $p \in]0,1[$. Deux joueurs J1 et J2 aimeraient jouer à un jeu équilibré avec cette pièce...
On jette la pièce deux fois d'affilée,

- Si on a 2 fois le même résultat, on recommence.
- Si on obtient Pile puis Face, on considère que J1 gagne et on s'arrête.
- Si on obtient Face puis Pile, on considère que J2 gagne et on s'arrête.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit les évènements :
A_k = "Le jeu s'arrête à l'étape k"
A = "Le jeu finit par s'arrêter"
S = "Le jeu finit par s'arrrêter et J1 gagne".

1.(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$P(A_k) = (p^2 + (1-p)^2)^{k-1} \times 2p(1-p).$$

(b) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = 1$.
Qu'en déduit-on pour l'évènement A ?

2. (a) Montrer (rigoureusement !) que
$$P(S) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) P_{A_k}(S).$$

(b) Justifier que $P_{A_k}(S) = \dfrac{1}{2}$. En déduire $P(S)$.