Séries - Corrigé

Exercice 1 (Convergente ou pas ?)

(a) La série est à termes positifs. On a $\dfrac{1}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente donc $\sum \dfrac{1}{n^2+1}$ est convergente.

(b) La série est à termes positifs (pour tout $n \geqslant 1,\ \sin(\frac{1}{n}) \geqslant 0$).
On a $\dfrac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente. On en déduit que $\sum \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est convergente.

(c) La série est à termes positifs (pour tout $n \geqslant 1,\ \cos\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant 0$).
On a $\dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \times 1 = \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge. On en déduit que $\sum \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$ diverge.

(d) La série est à termes positifs.
On a $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \dfrac{1}{(n(n+1))^{1/2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n^2)^{1/2}} = \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge. On en déduit que $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverge.

(e) La série n'est pas à termes positifs : étudions $\sum \left|\dfrac{\cos(n)}{n!}\right|$.
Pour tout $n \geqslant 1$, $\left|\dfrac{\cos(n)}{n!}\right| = \dfrac{|\cos(n)|}{n!} \leqslant \dfrac{1}{n!}$ et la série $\sum \dfrac{1}{n!}$ converge (série exponentielle).
On en déduit que $\sum \left|\dfrac{\cos(n)}{n!}\right|$ converge. Ainsi $\sum \dfrac{\cos(n)}{n!}$ converge absolument et donc converge.

(f) Par télescopage, $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{N} \Big(\ln(n-1) - \ln(n)\Big) = \ln(1) - \ln(N) = -\ln(N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\infty$.
Ainsi la série $\sum \ln\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$ diverge.

(g) La série est à termes positifs et $\dfrac{\ln(n)}{n^3} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^3}$ converge.

(h) La série est à termes positifs et $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. La série $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge donc $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ converge.

(i) La série est à termes positifs et $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$. La série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$ diverge.

Exercice 2 (Convergente ou pas ? #2)

(a) La série est à termes positifs et $\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2+n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{1}{n^{2-\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$.
Puisque $3/2 > 1$, la série $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge et donc $\sum \dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2+n+3}$ converge.

(b) La série n'est pas à termes positifs : on étudie $\sum |(-1)^n n e^{-n}| = \sum n e^{-n}$.
On a par exemple $ne^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (car $\dfrac{ne^{-n}}{\frac{1}{n^2}} = n^2 \times ne^{-n} = n^3 e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$).
$\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\sum ne^{-n}$ converge. Ainsi $\sum (-1)^n ne^{-n}$ est absolument convergente, donc convergente.

(c) On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\ln(n)} = +\infty \neq 0$. Il en résulte directement que $\sum \dfrac{n+1}{\ln(n)}$ diverge.

(d) La série est à termes positifs.
On a par exemple $\dfrac{\sqrt{n}}{n!} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (en effet $n^2\dfrac{\sqrt{n}}{n!} = \dfrac{n^{5/2}}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$). $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n!}$ converge.

(e) La série n'est pas à termes positifs : on étudie $\sum \left|\dfrac{(-3)^n}{n^n}\right| = \sum \dfrac{3^n}{n^n}$.
Puisque $n! \underset{n\to+\infty}{=} o(n^n)$ on a par exemple $\dfrac{3^n}{n^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{3^n}{n!}\right)$. La série exponentielle $\sum \dfrac{3^n}{n!}$ converge,
donc $\sum \dfrac{3^n}{n^n}$ converge. Ainsi $\sum \dfrac{(-3)^n}{n^n}$ est absolument convergente, donc convergente.

Exercice 3 (Sommes de séries usuelles)

A chaque fois, on commence par calculer la somme finie " $\sum_{n=0}^{N}$ " pour un $N \geqslant 0$:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^{n+1}} = \frac{1}{3}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = \frac{2}{3^{-1}}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 6\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[N\to+\infty]{} 6\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 6\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 6\times 3 = 18$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}} = 18$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{(-2)^{2n+1}}{n!} = -2\sum_{n=0}^{N}\frac{((-2)^2)^n}{n!} = -2\sum_{n=0}^{N}\frac{4^n}{n!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n}{n!} = -2e^4$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^{2n+1}}{n!} = -2e^4$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n e^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N}\frac{(-e)^n}{n!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-e)^n}{n!} = e^{-e}$ donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^n}{n!} = e^{-e}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{2n(n-1)}{3^n} = 2\sum_{n=0}^{N} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2\sum_{n=0}^{N} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 2\left(\frac{1}{3}\right)^2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$
donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n(n-1)}{3^n} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{(1-\frac{1}{3})^3} = \frac{2}{3^2}\times\frac{2\times 3^3}{2^3} = \frac{3}{2}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{n^2}{3^n} = \sum_{n=0}^{N} n^2\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{N}(n(n-1)+n)\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{N} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{N} n\left(\frac{1}{3}\right)^n$
$\displaystyle= \frac{1}{3^2}\sum_{n=0}^{N} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{3^2}\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{3^n} = \frac{1}{3^2}\times\frac{2}{(1-\frac{1}{3})^3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{3^2}\times\frac{2\times 3^3}{2^3} + \frac{1}{3}\times\frac{3^2}{2^2} = \frac{3}{4}+\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$.

Exercice 4 (D'autres sommes)

(a) Après étude, on note que $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$.
On peut réécrire cela en : $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+1} - \frac{1/2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)$.
Ainsi, par télescopage :

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2}-\frac{1}{3}\right)$$

et lorsque $N\to+\infty$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}-\frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}$.

(b) Après étude, on note que $\displaystyle\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n+1)(n-1)} = \frac{1/2}{n-1} - \frac{1/2}{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$.
On peut réécrire cela en : $\displaystyle\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.
Ainsi, par télescopage :

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{N}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}\right)$$

et lorsque $N\to+\infty$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Exercice 5 (Séries hyperboliques)

1. On note qu'il s'agit de la série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$, où l'on conserve seulement les termes d'indice pair/impair.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on remarque alors facilement que

$$S_N + T_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{N} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{2N+1} \frac{x^n}{n!} \text{ (somme partielle d'une série exponentielle)}$$

et

$$S_N - T_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{2N+1} \frac{(-1)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{2N+1} \frac{(-x)^n}{n!} \text{ (somme partielle d'une série exponentielle)}$$

2. D'après le 1., on déduit que $\lim\limits_{N\to+\infty}(S_N + T_N) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ et $\lim\limits_{N\to+\infty}(S_N - T_N) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = e^{-x}$.
Par suite, $S_N = \dfrac{(S_N+T_N)+(S_N-T_N)}{2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$
et $T_N = \dfrac{(S_N+T_N)-(S_N-T_N)}{2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.
Ceci montre que les séries sont convergentes et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Remarque : les fonctions $x \mapsto \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $x \mapsto \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ s'appellent respectivement cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.

Exercice 6 (Critère des séries alternées)

1.(a) Notons, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p = S_{2p}$ et $v_p = S_{2p+1}$. Etudions les sens de variation de ces suites.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$u_{p+1} - u_p = S_{2p+2} - S_{2p} = \sum_{n=0}^{2p+2} (-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{2p} (-1)^n a_n = (-1)^{2p+1} a_{2p+1} + (-1)^{2p+2} a_{2p+2} = -a_{2p+1} + a_{2p+2} \leqslant 0$$

car $a_{2p+2} \leqslant a_{2p+1}$ puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi, $\underline{(u_p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

$$v_{p+1} - v_p = S_{2p+3} - S_{2p+1} = \sum_{n=0}^{2p+3} (-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{2p+1} (-1)^n a_n = (-1)^{2p+2} a_{2p+2} + (-1)^{2p+3} a_{2p+3} = a_{2p+2} - a_{2p+3} \geqslant 0$$

car $a_{2p+3} \leqslant a_{2p+2}$ puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi, $\underline{(v_p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

Enfin, $v_p - u_p = \sum\limits_{n=0}^{2p+1} (-1)^n a_n - \sum\limits_{n=0}^{2p} (-1)^n a_n = (-1)^{2p+1} a_{2p+1} = -a_{2p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ (puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$).
Ainsi $\underline{\lim\limits_{p\to+\infty}(v_p - u_p) = 0}$.
Ceci montre donc que $u = (S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $v = (S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(b) Puisque ces deux suites sont adjacentes, on en déduit qu'elles convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$\lim_{p\to+\infty} S_{2p} = \ell = \lim_{p\to+\infty} S_{2p+1}.$$

Puisque les suites des termes pairs et impairs convergent vers une même limite, on en déduit que $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = \ell$.
Autrement dit, la série $\sum (-1)^n a_n$ converge (vers le réel ℓ).

2.(a) La série est convergente d'après le résultat du 1, avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$,
qui est bien décroissante et tend vers 0.
Mais cette série n'est pas absolument convergente ! En effet la série $\sum \left| \dfrac{(-1)^n}{n+1} \right| = \sum \dfrac{1}{n+1}$ (série harmonique) est divergente.

(b) D'une part, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-t)^n dt = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-t)^n dt = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^n dt = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-t)^n = \frac{1-(-t)^{N+1}}{1-(-t)} = \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t}$ et donc

$$\int_0^1 \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}dt = \Big[\ln(t+1)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}dt = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}dt.$$

Ainsi, l'égalité entre les deux nous donne bien $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}dt.$

(c) Il suffit de démontrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}dt = 0$ pour obtenir $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$

Pour tout $N \geqslant 0$, on a $\displaystyle\Big|\int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}dt\Big| \leqslant \int_0^1 \Big|\frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\Big|dt = \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t}dt.$
On a ensuite l'encadrement :

$$\forall t \in [0,1],\ \ 0 \leqslant \frac{t^{N+1}}{1+t} \leqslant t^{N+1}$$

donc en intégrant, on obtient $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t}dt \leqslant \int_0^1 t^{N+1}dt$, c'est à dire $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t}dt \leqslant \frac{1}{N+2}.$
D'après le théorème des gendarmes, on déduit $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t}dt = 0.$
Puisque $\displaystyle\Big|\int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}dt\Big| \leqslant \int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t}dt$, on en déduit finalement $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}dt = 0$
c'est à dire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$

Exercice 7 (Série de Riemann divergente)

1. Puisque $\alpha \in]0,1[$, en particulier $\alpha \leqslant 1$ et donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

2. En reproduisant la preuve développée dans le cours pour les séries de Riemann, on obtient l'encadrement :

$$\forall N \geqslant 2,\quad \int_1^N \frac{1}{t^\alpha}dt + \frac{1}{N^\alpha} \leqslant S_N \leqslant \int_1^N \frac{1}{t^\alpha}dt.$$

On calcule l'intégrale : $\displaystyle\int_1^N \frac{1}{t^\alpha}dt = \Big[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big]_1^N = \frac{N^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$. Ainsi :

$$\forall N \geqslant 2,\quad \frac{N^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} + \frac{1}{N^\alpha} \leqslant S_N \leqslant \frac{N^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} + 1.$$

3. En divisant cet encadrement par $\dfrac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, puisque $1-\alpha > 0$ et $\alpha > 0$, on obtient :

$$\forall N \geqslant 2,\quad \underbrace{1 - \frac{1}{N^{1-\alpha}} + \frac{1-\alpha}{N^\alpha N^{1-\alpha}}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{}1} \leqslant S_N \times \frac{1-\alpha}{N^{1-\alpha}} \leqslant \underbrace{1 - \frac{1}{N^{1-\alpha}} + \frac{1-\alpha}{N^{1-\alpha}}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{}1}$$

D'après le théorème des gendarmes, on obtient $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{S_N}{\frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}} = 1$, c'est à dire $\displaystyle S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$

Exercice 8 (Série de Riemann convergente)

1. Puisque $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

2. On s'inspire de la preuve développée dans le cours pour les séries de Riemann. Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}dt \leqslant \frac{1}{(n-1)^\alpha}$$

puis en sommant pour $n \in [\![N+1, p]\!]$:

$$\sum_{n=N+1}^{p} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_N^p \frac{1}{t^\alpha} dt \leqslant \sum_{n=N+1}^{p} \frac{1}{(n-1)^\alpha}$$

c'est à dire

$$\sum_{n=N+1}^{p} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_N^p \frac{1}{t^\alpha} dt \leqslant \sum_{n=N}^{p-1} \frac{1}{n^\alpha}$$

c'est à dire

$$\sum_{n=N+1}^{p} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_N^p \frac{1}{t^\alpha} dt \leqslant \sum_{n=N+1}^{p} \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{N^\alpha} - \frac{1}{p^\alpha}.$$

Enfin, on peut faire tendre p vers $+\infty$:

- $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{p} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = R_N.$
- $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \int_N^p \frac{1}{t^\alpha} dt = \lim_{p\to+\infty} \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_N^p = \lim_{p\to+\infty} \frac{p^{-\alpha+1} - N^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$

Comme $-\alpha+1<0$, on obtient : $\displaystyle = \frac{-N^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \frac{N^{-(\alpha-1)}}{\alpha-1} = \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}.$

- $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p^\alpha} = 0.$

Ainsi, on obtient bien l'encadrement : $\displaystyle R_N \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} \leqslant R_N + \frac{1}{N^\alpha}.$

3. On obtient l'encadrement de R_N pour tout $N \geqslant 1$:

$$\frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^\alpha} \leqslant R_N \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}.$$

Puisque $\displaystyle\frac{1}{N^\alpha} = o\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)$, les deux termes extrémaux dans l'encadrement sont équivalents à $\displaystyle\frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}$.
On prévoit donc que $\displaystyle R_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}$.
Montrons-le en multipliant l'encadrement précédent par $(\alpha-1)N^{\alpha-1}$:

$$\underbrace{1-(\alpha-1)N^{-1}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 1} \leqslant (\alpha-1)N^{\alpha-1} \times R_N \leqslant 1.$$

D'après le théorème des gendarmes, on déduit : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \Big((\alpha-1)N^{\alpha-1} \times R_N\Big) = 1,$
c'est à dire en effet $\displaystyle R_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}$.

Exercice 9 (Fonction définie par une série)

1. Pour tout $x \geqslant 0$, la série $\displaystyle\sum \frac{1}{2^n+x}$ est à termes positifs et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{1}{2^n+x} \leqslant \frac{1}{2^n}$.
Puisque la série géométrique $\displaystyle\sum \frac{1}{2^n}$ converge, on en déduit que $\displaystyle\sum \frac{1}{2^n+x}$ converge également.
2. Soit $x \geqslant 0$. On commence avec des sommes finies : pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n+2x} = \frac{1}{1+2x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n+2x} = \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^{n-1}+x} = \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2^n+x}.$$

Lorsque $N \to +\infty$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n+2x} \to f(2x)$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2^n+x} \to f(x)$, ainsi on obtient bien :

$$f(2x) = \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{2} f(x)$$

3. Montrons que f est décroissante : Soient x et y positifs avec $x \leqslant y$, montrons que $f(x) \geqslant f(y)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n + x \leqslant 2^n + y$ donc $\dfrac{1}{2^n + x} \geqslant \dfrac{1}{2^n + y}$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n + x} \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n + y} \quad \text{c'est à dire} \quad f(x) \geqslant f(y).$$

4. f est décroissante et minorée sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de la limite monotone (pour les fonctions !), on en déduit que f admet une limite finie en $+\infty$, que l'on note $\ell \in \mathbb{R}$.
En passant à la limite dans l'égalité $f(2x) = \dfrac{1}{1+2x} + \frac{1}{2} f(x)$ lorsque $x \to +\infty$, on obtient $\ell = 0 + \frac{1}{2}\ell$ et donc finalement $\ell = 0$. Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 10 (Séries de Bertrand)

On appelle "séries de Bertrand" les séries de la forme $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. On suppose $\alpha < 1$. Vérifions que $\dfrac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}\right)$:

$$\frac{1/n}{1/(n^\alpha \ln(n)^\beta)} = \frac{n^\alpha \ln(n)^\beta}{n} = n^{\alpha - 1} \ln(n)^\beta \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{car } \alpha - 1 < 0 \text{ (croissances comparées)}$$

Puisque la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, on en déduit que la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ diverge également.

2. On suppose $\alpha > 1$.
(a) Si $\beta \geqslant 0$, on a pour tout $n \geqslant 3$: $\dfrac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$.
Puisque $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge, on en déduit que $\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge également.

(b) Soit $\beta < 0$. Soit $\alpha' \in]1, \alpha[$, vérifions que $\dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{\alpha'}}\right)$:

$$\frac{1/(n^\alpha \ln(n)^\beta)}{1/n^{\alpha'}} = \frac{n^{\alpha'}}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{\ln(n)^{-\beta}}{n^{\alpha - \alpha'}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{car } \alpha - \alpha' > 0 \text{ (croissances comparées)}$$

Puisque $\alpha' > 1$, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha'}}$ converge et donc la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ converge également.

3. On suppose finalement $\alpha = 1$.
(a) Soit $\beta < 0$. On a alors $\dfrac{1}{n \ln(n)^\beta} = \dfrac{\ln(n)^{-\beta}}{n}$ (avec $-\beta > 0$) et donc $\dfrac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n \ln(n)^\beta}\right)$.
Puisque la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, on en déduit que $\sum \dfrac{1}{n \ln(n)^\beta}$ diverge également.

(b) Soit $\beta \geqslant 0$.
On note que pour tout $t > 1$, $\dfrac{1}{t \ln(t)^\beta} = \dfrac{1}{t} \ln(t)^{-\beta} = \ln'(t) \times \ln(t)^{-\beta}$. Ainsi :

- Si $\beta \neq 1$, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t \ln(t)^\beta}$ est $t \mapsto \dfrac{\ln(t)^{-\beta + 1}}{-\beta + 1}$
- Si $\beta = 1$, une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t \ln(t)}$ est $t \mapsto \ln(\ln(t))$.

On effectue une comparaison série-intégrale. Notons $S_N = \sum\limits_{n=2}^{N} \dfrac{1}{n \ln(n)^\beta}$.

Puisque $t \mapsto \dfrac{1}{t \ln(t)^\beta}$ est décroissante, pour tout $n \geqslant 3$,

$$\frac{1}{n \ln(n)^\beta} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t \ln(t)^\beta} dt \leqslant \frac{1}{(n-1) \ln(n-1)^\beta}$$

donc en sommant, pour tout $N \geqslant 3$:

$$\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n \ln(n)^\beta} \leqslant \sum_{n=3}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t \ln(t)^\beta} dt \leqslant \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n-1) \ln(n-1)^\beta}$$

---

c'est à dire

$$S_N - \frac{1}{2\ln(2)^\beta} \leqslant \int_2^N \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt \leqslant S_N - \frac{1}{N\ln(N)^\beta}$$

d'où finalement l'encadrement

$$\boxed{\frac{1}{N\ln(N)^\beta} + \int_2^N \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt \leqslant S_N \leqslant \frac{1}{2\ln(2)^\beta} + \int_2^N \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt. \quad (\star)}$$

- Traitons d'abord le cas $\beta \neq 1$. Dans ce cas :

$$\int_2^N \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt = \Big[\frac{\ln(t)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\Big]_2^N = \frac{\ln(N)^{-\beta+1} - \ln(2)^{-\beta+1}}{-\beta+1}.$$

(a) Si $-\beta+1>0$, c'est à dire <u>si $\beta<1$</u>, on a ainsi $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_2^N \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt = +\infty$.
Dans ce cas, l'inégalité de gauche dans $(\star)$ nous apprend que $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = +\infty$. La série est donc <u>divergente</u> !
(b) Si $-\beta+1<0$, c'est à dire <u>si $\beta>1$</u>, on a alors :

$$\int_2^N \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt = \frac{\ln(2)^{-\beta+1} - \ln(N)^{-\beta+1}}{\beta-1} \leqslant \frac{\ln(2)^{-\beta+1}}{\beta-1}.$$

L'inégalité de droite de $(\star)$ nous donne : $\quad S_N \leqslant \frac{1}{2\ln(2)^\beta} + \frac{\ln(2)^{-\beta+1}}{\beta-1}$.
La série est à termes positifs et majorée (autrement dit la suite (S_N) est croissante et majorée).
On en déduit que la série est <u>convergente</u>.

- Traitons pour finir le cas <u>$\beta=1$</u>. Dans ce cas :

$$\int_2^N \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt = \int_2^N \frac{1}{t\ln(t)}dt = \Big[\ln(\ln(t))\Big]_2^N = \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(2)).$$

On a ainsi $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_2^N \frac{1}{t\ln(t)^\beta}dt = +\infty$. L'inégalité de gauche dans $(\star)$ nous apprend que $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = +\infty$.
La série est donc <u>divergente</u>.

Conclusion : la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ est convergente si et seulement si $\beta>1$.

Pour résumer tout ce qui a été fait dans cet exercice :

La série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si : $\left\{ \begin{array}{c} \alpha>1 \\ \text{ou} \\ \alpha=1 \text{ et } \beta>1. \end{array} \right.$