9

Limites de fonctions

Exercice 1 (Factorisation)

Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{3x^2-x+1}{5x^3+x^2-7}$ pour $a=-\infty$ et $a=0$

(b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{e^x+3x-1}{x^2+1}$ pour $a=+\infty$ et $a=-\infty$

(c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ pour $a=+\infty$ et $a=-\infty$

Exercice 2 (Se ramener à des limites usuelles)

Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{1/3}-1}{x-1}$

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x^2}}-1\right)$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\Big(\ln(1+x)-\ln(x)\Big)$

Exercice 3 (Un peu de tout)

Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\tan(x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 4 (Encadrements et limite)

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x^2}$.

2. Soit $\alpha>0$.
À l'aide d'une étude de fonction appropriée, montrer que pour tout $x\geqslant 1$, $\ln x\leqslant \frac{2}{\alpha}x^{\alpha/2}$.
Retrouver ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$.

3. À l'aide d'études de fonctions, montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad 1+x\leqslant e^x\leqslant 1+xe^x.$$

Retrouver ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$.

Exercice 5 (Une autre définition de exp...)

Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$e^x=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

Exercice 6 (Limite à gauche/droite)

Les fonctions suivantes admettent-elles une limite à gauche/à droite/tout court en x_0 ?

(a) $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ en $x_0=0$

(b) $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=x\lfloor x\rfloor$ en $x_0=0$

(c) $h(x)=\begin{cases} x^2\ln x & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leqslant 0\end{cases}$ en $x_0=0$

(d) $\varphi(x)=\begin{cases} (x+1)^x & \text{si } x>-1\\ e^{-1} & \text{si } x\leqslant -1\end{cases}$ en $x_0=-1$

(e) $\psi(x)=\begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{|x-2|}\right) & \text{si } x\neq 2\\ 1 & \text{si } x=2\end{cases}$ en $x_0=2$

Exercice 7 (Sortez les ε !)

Soit I un intervalle ouvert, $x_0\in I$ et f une fonction définie sur I.

(a) On suppose que $\ell=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\in\mathbb{R}$ existe.
Montrer que f est bornée au voisinage de x_0,
(i.e il existe un intervalle J contenant x_0, dont x_0 n'est pas une extrémité, tel que f est bornée sur J.)

(b) On suppose que $\ell>0$. Montrer que f est strictement positive au voisinage de x_0.
(i.e il existe un intervalle J contenant x_0, dont x_0 n'est pas une extrémité, tel que f est strictement positive sur J.)