3

Applications

Exercice 1 (Des fonctions numériques)

1) $f(\mathbb{R}_+) = [\sqrt{2}, +\infty[, \quad f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.
$f(]0,1]) =]\sqrt{2}, \sqrt{3}], \quad f^{-1}(]0,1]) = \emptyset$.
$f^{-1}([3,4]) = [\alpha, \beta]$ avec $f(\alpha) = 3$ et $f(\beta) = 4$, soit $\alpha = 7$ et $\beta = 14$.

2) En étudiant la fonction g, on obtient facilement le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/4$		1		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-9/8$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

De là on déduit $g(\mathbb{R}) = [-9/8, +\infty[$, $g([1,3]) = [g(1), g(3)] = [1, 14]$, $g(]-1,1]) = [-9/8, 2[$.
Ensuite, $g^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, g(x) > 0\} =]-\infty, -1/2[\cup]1, +\infty[$.
Enfin, $g^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, g(x) = 1\}$. On résout cette équation :

$$g(x) = 1 \iff 2x^2 - x - 1 = 1 \iff 2x^2 - x - 2 = 0.$$

Avec le discriminant, on obtient deux solutions : $\dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$. Ainsi $g^{-1}(\{1\}) = \left\{\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}, \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

3) En étudiant la fonction h, on obtient facilement le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \,\Vert\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \,\Vert\, -\infty$	$\nearrow$	0

$h(]-\infty, -1[) = \mathbb{R}_+^*, \quad h(]-1,1[) = \mathbb{R}, \quad h(]1,+\infty[) = \mathbb{R}_-^*, \quad h(]2,3[) =]h(2), h(3)[=]-2/3, -3/8[$
et $h^{-1}(\{0\}) = \{0\}, \quad h^{-1}(\mathbb{R}_+) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \,|\, h(x) \geqslant 0\} =]-\infty, -1[\cup[0,1[$.

Exercice 2 (Antécédents multiples)

1) Ensemble image : $f(\mathbb{N}) = \left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Or on note que $f(n) = \dfrac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$ Ainsi $f(\mathbb{N}) = \{0, 1\}$.

2) Les antécédents de 1 sont les entiers pairs : $f^{-1}(\{1\}) = \{n \in \mathbb{N} \,|\, f(n) = 1\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$.
Les antécédents de 0 sont les entiers impairs : $f^{-1}(\{0\}) = \{n \in \mathbb{N} \,|\, f(n) = 0\} = \{1, 3, 5, 7 \ldots\} = \{2k+1, k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 3 (Étude d'injectivité/surjectivité)

1) • Montrons que f est injective. Soient $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tels que $f(k_1) = f(k_2)$.
On a alors $2k_1 + 1 = 2k_2 + 1$ donc $2k_1 = 2k_2$ donc $k_1 = k_2$. Ceci montre que f est injective.

• f n'est pas surjective car (par exemple) $0 \in \mathbb{N}$ n'a pas d'antécédent par f.
Précisément, $f(\mathbb{N}) = \{2k+1, k \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} \neq \mathbb{N}$.

2) • Montrons que g est injective. Soient $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tels que $g(k_1) = g(k_2)$.
On a alors $k_1 - 1 = k_2 - 1$ donc $k_1 = k_2$. Ceci montre que g est injective.

• g est surjective puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $n = g(n+1)$ (avec $n + 1 \in \mathbb{N}^*$).
Autrement : $g(\mathbb{N}^*) = \{k - 1, k \in \mathbb{N}^*\} = \mathbb{N}$.

3) • Montrons que h est injective. Soient $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tels que $h(k_1) = h(k_2)$.
On a alors $k_1 + 1 = k_2 + 1$ donc $k_1 = k_2$. Ceci montre que h est injective.

• h n'est pas surjective car $0 \in \mathbb{N}$ n'a pas d'antécédent par h.
Précisément, $h(\mathbb{N}) = \{k+1, k \in \mathbb{N}\} = \{1,2,3,4,\ldots\} = \mathbb{N}^* \neq \mathbb{N}$.

Exercice 4 (Calcul de réciproques)

1) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $x \in]1,+\infty[$, on a les équivalences :

$$y = f(x) \iff y = \ln(x^2-1) \iff e^y = x^2 - 1 \iff x^2 = 1 + e^y \iff x = \sqrt{1+e^y} \text{ (puisque } x \geqslant 0)$$

Ceci montre que f est bijective et $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]1,+\infty[\\ y & \mapsto & \sqrt{1+e^y} \end{array}$

2) Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ fixé. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a les équivalences :

$$y = g(x) \iff y = \frac{x+2}{x+1} \iff (x+1)y = x+2 \iff xy + y = x+2 \iff x(y-1) = 2-y \iff x = \frac{2-y}{y-1}$$

(possible car $y-1 \neq 0$) Ceci montre que g est bijective et $g^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ y & \mapsto & \dfrac{2-y}{y-1} \end{array}$

3) Soit $y \in [0,+\infty[$ fixé. Pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a les équivalences :

$$y = h(x) \iff y = \sqrt{x(x-1)} \iff y^2 = x(x-1) \text{ (car } y \geqslant 0) \iff x^2 - x - y^2 = 0.$$

On résout cette équation polynomiale de degré 2, d'inconnue x : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-y^2) = 1 + 4y^2 > 0$.
L'équation admet donc les deux solutions $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{1+4y^2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1+4y^2}}{2}$.
Or, rappelons que l'on cherche une solution $x \in [1,+\infty[$ de l'équation !
Puisque $1+4y^2 \geqslant 1$, il est clair que $x_1 \leqslant 0$ et $x_2 \in [1,+\infty[$. Ainsi la solution à conserver est x_2.
Autrement dit, pour $x \in [1,+\infty[$, on a l'équivalence : $\quad x^2 - x - y^2 = 0 \iff x = x_2$.
On a donc montré : $\quad y = h(x) \iff x = \dfrac{1+\sqrt{1+4y^2}}{2}$.

Ceci montre que h est bijective et $h^{-1} : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & [1,+\infty[\\ y & \mapsto & \dfrac{1+\sqrt{1+4y^2}}{2} \end{array}$

4) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a les équivalences :

$$(a,b) = \varphi((x,y)) \iff (a,b) = (x+y, x-y) \iff \begin{cases} x+y = a \\ x-y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a-b}{2} \end{cases} \text{ (après résolution)}$$

$$\iff (x,y) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right).$$

Ceci montre que φ est bijective et $\quad \varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \mapsto & \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2}\right) \end{array}$

Exercice 5 (Calcul de composées)

1) • $D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\} = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} = [0,1[\cup]1,+\infty[$.
Puis, pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.

• $D_{g\circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mid \dfrac{1}{x-1} \in \mathbb{R}_+\right\} =]1,+\infty[$

Puis, pour tout $x \in]1,+\infty[$, $\quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\dfrac{1}{x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

2) • $D_{f\circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}\right\}$.
En se rappelant que $\quad \cos(x) = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi \quad$ et $\cos(x) = -1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$,
on a $\cos(x) \in \{-1,1\}$ si et seulement si x est un multiple de π ! Ainsi : $\quad D_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.

Puis, pour tout $x \in D_{f\circ g}$, $\quad (f\circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{1}{1-\cos(x)^2}$.

- $D_{g\circ f} = \left\{x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \middle|\ \dfrac{1}{1-x^2} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$.

Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $\quad (g\circ f)(x) = g(f(x)) = \cos\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)$.

3) • $D_{f\circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (2x, x^2-2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\right\} = \{x \in \mathbb{R},\ \mid x^2-2 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.

Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$, $\quad (f\circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

- $D_{g\circ f} = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \,\middle|\, \dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

Puis, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, $\quad (g\circ f)((a,b)) = \left(2\times\frac{a}{b}, \frac{a^2}{b^2}-2\right)$.

Exercice 6 (Composition et bijections)

1. Soit $y \in [1,+\infty[$ fixé. Pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a les équivalences :

$$y = f(x) \iff y = \frac{x+\frac{1}{x}}{2} \iff 2y = x + \frac{1}{x} \iff 2yx = x^2+1 \iff x^2 - 2yx + 1 = 0.$$

On résout l'équation polynomiale de degré 2 : $\quad \Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2-1) \geqslant 0$ (car $y \geqslant 1$).

Les solutions sont donc $x_1 = \dfrac{2y - \sqrt{4(y^2-1)}}{2} = y - \sqrt{y^2-1}$ $\quad$ et $\quad x_2 = \dfrac{2y+\sqrt{4(y^2-1)}}{2} = y + \sqrt{y^2-1}$.

Rappelons que l'on cherche les solutions $x \in [1,+\infty[$. On conserve donc seulement $x = x_2$. En effet :

Puisque $y \in [1,+\infty[$, on a $x_2 = y + \sqrt{y^2-1} \geqslant y \geqslant 1$, donc $x_2 \in [1,+\infty[$.

Par ailleurs, pour tout $y \geqslant 1$, $\quad x_1 = y - \sqrt{y^2-1} \leqslant 1$.

Preuve de cette inégalité : pour $y \geqslant 1$, on a les équivalences

$$y - \sqrt{y^2-1} \leqslant 1 \iff y - 1 \leqslant \sqrt{y^2-1} \iff (y-1)^2 \leqslant y^2 - 1 \iff y^2 - 2y + 1 \leqslant y^2 - 1 \iff 2 \leqslant 2y \iff y \geqslant 1.$$

(Notons que dans le cas d'égalité $y = 1$, on a $x_1 = x_2 = 1$. $\quad$ Dans le cas où $y > 1$, on a $x_1 = y - \sqrt{y^2-1} < 1$.)

Bref, pour $y \in [1,+\infty[$ et $x \in [1,+\infty[$, on a l'équivalence : $\quad y = f(x) \iff x = y + \sqrt{y^2-1}$.

Ceci montre que f est bijective et $f^{-1} : \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \to & [1,+\infty[\\ y & \mapsto & y + \sqrt{y^2-1} \end{array}$

2) On peut noter que $h = f\circ g$, où l'application g est donnée par : $\quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & [1,+\infty[\\ x & \mapsto & e^x \end{array}$.

(En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad f(g(x)) = \dfrac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = h(x)$).

Il est clair que g est bijective, de réciproque $g^{-1} : \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R}+ \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$.

Puisque f et g sont bijective, $h = f\circ g$ est bijective, de réciproque $h^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}$.

Exprimons explicitement cette composition : pour tout $x \in [1,+\infty[$,

$$h^{-1}(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}(x + \sqrt{x^2-1}) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

Exercice 7 (Interprétation graphique)

Faites de jolis dessins ! L'astuce pour le e) est de dessiner une fonction non-continue (sinon c'est impossible !)
L'astuce pour le f) est de dessiner une fonction croissante, mais pas strictement (avec un "palier", donc...)

Exercice 8 (Vrai ou faux ?)

1) Vrai. Preuve :
Soit $f : E \to F$ une application injective et A une partie de E.

Montrons que la restriction $f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est injective.
Soient $x_1, x_2 \in A$ tels que $f_{|A}(x_1) = f_{|A}(x_2)$. On a donc $f(x_1) = f(x_2)$. Par injectivité de f, on en déduit $x_1 = x_2$.
Ceci montre que $f_{|A}$ est injective.

2) Faux. On peut penser à la fonction $x \mapsto x^2$, qui est injective au départ de $\mathbb{R}_+$, mais pas au départ de $\mathbb{R}$.

3) Faux. Par exemple, l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est surjective,

mais la restriction $f_{|[0,1]} : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ ne l'est évidemment pas.

4) Vrai. Preuve :
Soit $f : E \to F$ une application surjective et E' un ensemble contenant E ($E \subset E'$).
Soit $g : E' \to F$ un prolongement de f, c'est à dire que $\forall x \in E,\ g(x) = f(x)$. Montrons que g est surjective.

Soit $y \in F$. Par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Puisque $x \in E$, on a $f(x) = g(x)$, on peut donc aussi écrire $y = g(x)$.
Ceci montre que g est surjective.

Exercice 9 (Injectivité/surjectivité d'une composée)

On a $f : E \to F, \quad g : F \to G, \quad$ donc $g \circ f : E \to G$.

1) Supposons $g \circ f$ injective. Montrons que f est injective.
Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Montrons que $x_1 = x_2$.

On sait que $f(x_1) = f(x_2)$, donc $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, c'est à dire $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$.
Puisque $g \circ f$ est injective, cette égalité implique que $x_1 = x_2$. Ceci montre bien que f est injective.

2) Supposons $g \circ f$ surjective. Montrons que g est surjective.
Soit $z \in G$. Montrons qu'il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.

Puisque $g \circ f$ est surjective, on sait qu'il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = z$.
On a ainsi $g(f(x)) = z$. Ainsi en posant $y = f(x) \in F$, on a bien $g(y) = z$. Ceci montre bien que g est surjective.

Exercice 10 (Application unipotente)

1) Supposons f injective. Montrons que $f = Id_E$, c'est à dire que $\forall x \in E,\ f(x) = x$.

Soit $x \in E$. Puisque $f \circ f = f$, on a $f(\,f(x)\,) = f(x)$.
(Autrement dit, on a $f(x_1) = f(x_2)$, avec $x_1 = f(x)$ et $x_2 = x$).
Par injectivité de f, on en déduit que $f(x) = x$.
C'est valable pour tout $x \in E$, on a donc bien montré le résultat voulu.

2) Supposons f surjective. Montrons que $f = Id_E$, c'est à dire que $\forall x \in E,\ f(x) = x$.

Soit $x \in E$. Puisque f est surjective, on sait qu'il existe $x' \in E$ tel que $f(x') = x$.
En composant par f, on obtient $f(f(x')) = f(x)$.
Puisque $f \circ f = f$, cette égalité donne $f(x') = f(x)$.
Puisque $f(x') = x$, on obtient $x = f(x)$: c'est le résultat voulu !

3) En considérant par exemple la fonction constante $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$,

- On a évidemment $f \neq Id_{\mathbb{R}}$. Pour rappel, $Id_{\mathbb{R}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 1 = f(x), \quad$ d'où $f \circ f = f$.