16

Intégration sur un segment

Introduction : l'intégrale vue comme une aire

Définition 1 (Intégrale = aire)

Soient $a \leqslant b$ et $f \in C([a,b],\mathbb{R})$.

On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ (ou de a à b) et on note : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$

l'**"aire sous la courbe de f"**, c'est à dire l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ (cf. dessin ci-contre).

Dessin :

Dessin :

Si la fonction f n'est pas positive sur $[a,b]$, par convention, l'aire "en dessous de l'axe des abscisses" est comptée négativement.

Par exemple, pour le dessin ci-contre, on a

$$\int_a^b f(t)dt = Aire(\mathcal{A}) - Aire(\mathcal{B}) + Aire(\mathcal{C}).$$

Exemples

- Fonction constante : $\forall t \in [a,b],\ f(t) = c \in \mathbb{R}$,

Dessin :

$\displaystyle\int_a^b f(t)$ correspond à l'aire d'un rectangle.

Ainsi $\displaystyle\int_a^b c dt = c(b-a).$

- Fonction identité : $\forall t \in [a,b],\ f(t) = t \in \mathbb{R}$,

Dessin :

$\displaystyle\int_a^b f(t)$ correspond à l'aire d'un rectangle + celle d'un triangle rectangle.

$$\text{Ainsi } \int_a^b t\,dt = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = ab - a^2 + \frac{b^2+a^2-2ab}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$$

Si cette définition de $\int_a^b f(t)dt$ est claire lorsqu'il s'agit de l'aire d'une surface simple, elle devient assez floue pour une fonction plus "générale" ! Comment donner un sens mathématiquement rigoureux à l'aire d'une surface, en général ?...

Une idée (celle du français Cauchy et de l'allemand Riemann !) consiste à approcher l'aire sous la courbe f par la somme d'aires de rectangles. (cf. dessin)

La construction rigoureuse de l'intégrale de cette manière soulève cependant des difficultés techniques.

Nous reviendrons dans ce chapitre sur cette idée d'approximation par des rectangles.

Dessin :

Pour définir rigoureusement l'intégrale, on va plutôt emprunter un autre chemin :

L'intégration est l'opération "réciproque" de la dérivation. (Théorème fondamental de l'analyse)

Précisément : Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$.

On pose $\forall x \in [a,b]$, $\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)dt}$. Alors F est dérivable sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$, $\boxed{F'(x) = f(x)}$.

Preuve "géométrique" :

Soit $x \in [a,b]$. On doit montrer que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

Pour simplifier, plaçons nous dans le cas d'une fonction f croissante sur $[a,b]$.
Pour le dessin, prenons $h > 0$. (Preuve similaire si $h < 0$)

Dessin :

On constate que $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$.
Par croissance de f, on peut majorer et minorer cette aire par celle de rectangles :

$$f(x) \times h \leqslant \underbrace{\int_x^{x+h} f(t)dt}_{F(x+h)-F(x)} \leqslant f(x+h) \times h.$$

On obtient donc : $f(x) \leqslant \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant f(x+h)$.
Puisque f est continue sur $[a,b]$, on a $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$.
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$, c'est à dire $F'(x) = f(x)$. $\square$

Ainsi, en pratique, le calcul d'une intégrale $\int_a^b f(t)dt$ se ramènera à la détermination d'une **primitive** de f, c'est à dire d'une fonction F dont la dérivée est f.

1 Primitives d'une fonction sur un intervalle

1.1 Généralités

Définition 2 (Primitive sur un intervalle)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur l'intervalle I lorsque :

$$F \text{ est dérivable sur } I \quad \text{et} \quad F' = f\ .$$

Exemples

- Une primitive de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est : $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$. Une autre primitive est : $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + 1$.
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est : $\ln$ Une autre primitive est : $x \mapsto \ln(x) - 4$.

Remarques 1

- On verra que **toute fonction continue sur un intervalle y admet (au moins) une primitive** !

- Il existe des fonctions (non continues, du coup !) qui n'admettent pas de primitives.
Par exemple, on peut montrer qu'il n'existe pas de fonction dérivable F telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \lfloor x \rfloor$.
Autrement dit, la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

- Notons qu'il existe aussi des fonctions non continues qui admettent tout de même une primitive.

Exemple : En posant $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

On a déjà vu (feuille d'exercices chapitre #13) que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa dérivée est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
Cette fonction f n'est pas continue en 0, mais admet une primitive sur $\mathbb{R}$: F.

Proposition 1 (Ensemble des primitives de f sur un intervalle)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f admet une primitive F sur I, alors elle en admet une infinité.
Précisément, l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme

$$G : x \mapsto F(x) + C, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Autrement dit, toutes les primitives de f sont égales à une constante additive près.

Preuve :
Soit F une primitive de f sur I : on a donc $F \in D(I, \mathbb{R})$ et $F' = f$.

- Si $\forall x \in I,\ G(x) = F(x) + C$ pour un $C \in \mathbb{R}$,
alors G est dérivable sur I (somme de fonctions dérivables) et $\forall x \in I,\ G'(x) = F'(x) = f(x)$.
G est donc une primitive de f sur I.

- Inversement, si G est une primitive de f sur I, on a $G \in D(I, \mathbb{R})$ et $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$.

Ainsi $(G - F)$ est constante sur I : il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ G(x) - F(x) = C$,
c'est à dire : $\forall x \in I,\ G(x) = F(x) + C$. □

Exemple

Les primitives de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions : $x \mapsto \dfrac{x^3}{3} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Attention !

Ainsi il n'y a pas unicité des primitives d'une fonction f !
Pour cette raison, on parlera bien d'**une** primitive de f et non de "la" primitive.

En revanche, on peut obtenir l'unicité si l'on impose la valeur en un point :

Corollaire 1 ("Unique primitive telle que...")

Soit I un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Si f admet une primitive sur I, alors il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Preuve :
On suppose que f admet une certaine primitive sur I. Notons cette primitive $\widetilde{F}$.
Toute autre primitive de f est alors de la forme $F : x \mapsto \widetilde{F}(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.
On a les équivalences : $F(x_0) = y_0 \iff \widetilde{F}(x_0) + C = y_0 \iff C = (y_0 - \widetilde{F}(x_0)) \in \mathbb{R}$.
Ainsi, un seul choix de la constante $C \in \mathbb{R}$ permet de garantir l'égallité $F(x_0) = y_0$!
L'unique primitive de f telle que $F(x_0) = y_0$ est donc : $F : x \mapsto \widetilde{F}(x) + (y_0 - \widetilde{F}(x_0))$. □

Exemples

- ln est l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.
- arctan est l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

1.2 Calcul de primitives

Proposition 2 (Primitives de fonctions usuelles)

Fonction f	Une primitive F (sur un intervalle de D_f)
$x \mapsto \lambda \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \lambda x$
$x \mapsto x^\alpha \ (\alpha \neq -1)$	$x \mapsto \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(\lvert x\rvert)$
$\exp$	$\exp$
$\cos$	$\sin$
$\sin$	$-\cos$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan$
$1+\tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$	$\tan$

Preuve :
Remarquer simplement que la dérivée de la fonction de droite donne celle de gauche... □

Remarques 2

- La formule pour $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est un cas particulier de celle pour $x \mapsto x^\alpha$, dans le cas $\alpha = -\frac{1}{2}$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet les primitives : $x \mapsto \ln(x) + C$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $\quad x \mapsto \ln(-x) + C$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 1

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^5}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On ré-écrit $\dfrac{1}{x^5} = x^{-5}$. Une primitive est donc par exemple $x \mapsto \dfrac{x^{-5+1}}{-5+1}$ c'est à dire $x \mapsto -\dfrac{1}{4x^4}$.

Proposition 3 (Primitives et linéarité)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si les fonctions f et g admettent les primitives F et G sur I,

alors la fonction $\lambda f + \mu g$ admet la primitive $\lambda F + \mu G$ sur I.

- Plus généralement : soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Si les fonctions $f_1, \dots, f_n$ admettent les primitives $F_1, \dots, F_n$ sur I,
alors la fonction $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ admet la primitive $F = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k F_k$ sur I.

Preuve :
Par linéarité de la dérivée, $F' = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k F_k\right)' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k F_k' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = f$. □

Exercice 2

Déterminer une primitive des fonctions suivantes (sur un intervalle à déterminer) :

(a) $f : x \mapsto 3\cos(x)$ (b) $g : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 2$ (c) $h : x \mapsto \dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{3}{x}$

(a) Une primitive de cos sur $\mathbb{R}$ est sin.
Par linéarité : une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 3\sin(x)$.

(b) Sur $\mathbb{R}$:

- Une primitive de $x \mapsto x^3$ est $x \mapsto \dfrac{x^4}{4}$.
- Une primitive de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$.
- Une primitive de $x \mapsto 1$ est $x \mapsto x$.

Par linéarité, une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est : $x \mapsto \dfrac{x^4}{4} - 2\dfrac{x^3}{3} + 2x$.

(c) Par linéarité, une primitive de h sur $\mathbb{R}_+^*$ (par exemple) est $x \mapsto 2\arctan(x) + 3\ln(x)$.

Attention !

Ainsi, en particulier une primitive d'une somme est donnée par la somme des primitives.
En revanche c'est **faux** pour un **produit**, une **puissance**, etc... !

Exemple : Une primitive de $x \mapsto x \times e^x$ n'est pas $\dfrac{x^2}{2} \times e^x$!

Si calculer la dérivée d'une fonction peut se faire de manière "automatique",
déterminer une primitive (c'est à dire effectuer l'opération "dans l'autre sens"...) n'est pas toujours évident !

Si l'on ne reconnait pas immédiatement une "primitive de fonction usuelle" (Proposition 2), on essaiera en général de reconnaître l'une des expressions suivantes :

Proposition 4 (Primitives d'expressions usuelles)

Expression de $f(x)$	Expression d'une primitive $F(x)$ (sur un intervalle de D_f)
$u'(x+\lambda) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$	$u(x+\lambda)$
$u'(\lambda x) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}^*)$	$\frac{1}{\lambda} u(\lambda x)$
$u'(x) \times u(x)^\alpha \qquad (\alpha \neq -1)$	$\frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x))$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x))$
$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$\arctan(u(x))$

Preuve :
Remarquer simplement que la dérivée de l'expression de droite donne celle de gauche... $\square$

Remarque 3

Souvent, on repérera que $f(x)$ correspond "presque" à l'une des expressions listées, c'est à dire "à une constante multiplicative près". Une manière de procéder est alors de deviner globalement à quoi "ressemble" une primitive, puis adapter cette expression en choisissant la constante multiplicative appropriée !

Exercice 3

Déterminer une primitive des fonctions suivantes (sur un intervalle à déterminer) :

(a) $x \mapsto \sin(2x)$ (b) $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^4}$ (c) $x \mapsto 3xe^{-x^2}$

(d) $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ (e) $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ (f) $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^\alpha}$, $\alpha \neq 1$.

(a) On devine que la primitive va "ressembler" à $x \mapsto \cos(2x)$.
Mais $\frac{d}{dx}(\cos(2x)) = -2 \times \sin(2x)$. Une primitive est donc $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

Autrement : $\sin(2x) = -\frac{1}{2}(-2\sin(2x)) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\cos(2x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)$.

(b) $\frac{1}{(x+1)^4} = (x+1)^{-4}$. La primitive va "ressembler" à $x \mapsto (x+1)^{-3}$.
Mais $\frac{d}{dx}(x+1)^{-3} = -3(x+1)^{-4}$.
Une primitive est donc $x \mapsto \frac{-1}{3}(x+1)^{-4} = -\frac{1}{3(x+1)^4}$ sur $]-1,+\infty[$ par exemple.

(c) Il s'agit "presque" d'une expression de la forme $u'(x)e^{u(x)}$.

On devine donc que la primitive va "ressembler" à $x \mapsto e^{-x^2}$. Mais $\dfrac{d}{dx}e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$.

Une primitive est donc $x \mapsto -\dfrac{3}{2}e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Autrement : $3xe^{-x^2} = -\dfrac{3}{2}(-2xe^{-x^2}) = -\dfrac{3}{2}\dfrac{d}{dx}(e^{-x^2}) = \dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{3}{2}e^{-x^2}\right)$.

(d) On repère que $\cos(x)\sin(x) = u'(x)u(x)$ avec $u(x) = \sin(x)$.

Une primitive est donc $x \mapsto \dfrac{(\sin(x))^2}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

(e) Il s'agit "presque" d'une expression de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

La primitive va donc "ressembler" à $x \mapsto \ln(1+x^2)$. Mais $\dfrac{d}{dx}\ln(1+x^2) = \dfrac{2x}{1+x^2} = 2\dfrac{x}{1+x^2}$.

Une primitive est donc $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$.

Autrement : $\dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}\ln(1+x^2) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)$.

(f) $\dfrac{x}{(1+x^2)^\alpha} = x(1+x^2)^{-\alpha}$.

Il s'agit "presque" d'une expression de la forme $u'(x)u(x)^{-\alpha}$.

Une primitive va donc "ressembler" à $x \mapsto (1+x^2)^{-\alpha+1}$.

Mais $\dfrac{d}{dx}\left((1+x^2)^{-\alpha+1}\right) = (-\alpha+1)2x(1+x^2)^{-\alpha}$.

Une primitive est donc $x \mapsto \dfrac{(1+x^2)^{-\alpha+1}}{2(-\alpha+1)}$.

Autrement : $x(1+x^2)^{-\alpha} = \dfrac{1}{2(-\alpha+1)}\left(\dfrac{d}{dx}(1+x^2)^{-\alpha+1}\right)$...

Remarque 4

Il existe des fonctions continues sur un intervalle (qui, de fait, admette des primitives !), dont les primitives ne peuvent pas s'exprimer à l'aide de fonctions usuelles !

Exemples : $x \mapsto e^{-x^2}$. $\quad x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$, et bien d'autres.

2 Intégrale à partir d'une primitive

On a vu en introduction qu'une vision géométrique de l'intégrale consiste à la définir intuitivement comme "l'aire sous la courbe".
En pratique, pour calculer une intégrale, il est plus intéressant de faire le lien avec le calcul des primitives.

Énonçons à nouveau le Théorème suivant, dont nous admettrons la preuve dans le cas général :

Théorème 1 (Théorème fondamental de l'analyse (admis))

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C(I, \mathbb{R})$.

Pour tout $a \in I$ fixé, la fonction F définie par $\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)dt$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Remarques 5

- $F(a) = \int_a^a f(t)dt$ est l'aire sous la courbe représentative de f "sur le segment $[a, a]$"...

Il est logique que cette quantité soit nulle !

- L'unicité d'une telle primitive découle du Corollaire 1 vu précédemment.
- On déduit bien de ce théorème que **toute fonction continue sur I y admet une primitive**.

De ce résultat, on déduit une autre définition de l'intégrale d'une fonction continue :

Définition 3 (Intégrale, définition "analytique")

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C(I, \mathbb{R})$. Pour tous $a, b \in I$, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \quad \text{où } F \text{ est n'importe quelle primitive de } f \text{ sur } I.$$

Preuve :

Soit F une primitive de f sur I (il en existe bien puisque $f \in C(I, \mathbb{R})$).

Posons $\forall x \in I,\ \widetilde{F}(x) = \int_a^x f(t)dt$. D'après le Théorème 1, $\widetilde{F}$ est également une primitive de f sur I.

Il existe donc une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I,\ \widetilde{F}(x) = F(x) + C$.

Puisque de plus $\widetilde{F}(a) = 0$, on obtient $F(a) + C = 0$, c'est à dire $C = -F(a)$.

Finalement $\int_a^b f(t)dt = \widetilde{F}(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$. □

Remarques 6

- Dans cette nouvelle définition, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est également bien définie dans le cas $b < a$!
- La variable t dans l'intégrale est muette : on peut tout à fait la désigner autrement.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx \text{ etc...}$$

- Pour aider dans les calculs, on introduit également la notation : $\boxed{\Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a).}$

Exemples

- La fonction $t \mapsto t$ est continue sur $[0, 1]$ et y admet la primitive $t \mapsto \dfrac{t^2}{2}$. Donc :

$$\int_0^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

- De même : $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \Big[\arctan(t)\Big]_{-1}^1 = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$

Exercice 4

Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{2}{1+y} dy$.

$$\int_0^1 \frac{2}{1+y} dy = \Big[2\ln(1+y)\Big]_0^1 = 2\ln(1+1) - 2\ln(1+0) = 2\ln(2).$$

Il est bon d'avoir toujours en tête la Définition 3 pour l'intégrale, même dans des contextes plus "théoriques".

Méthode : Étudier une fonction définie comme une intégrale à "bornes variables".

Si l'on s'intéresse à une fonction Φ de la forme suivante : $\Phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt.$

$\boxed{1}$ Introduire une primitive F de f. On peut alors ré-écrire : $\Phi(x) = \Big[F(t)\Big]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x)).$

$\boxed{2}$ Sous réserve que dérivabilité, on obtient :

$$\Phi'(x) = v'(x)F'(v(x)) - u'(x)F'(u(x)) \quad i.e \quad \Phi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

Exercice 5

On définit : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$

Montrer que g est bien définie, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et déterminer ses variations.

Notons : $\forall t > 0,\ f(t) = \frac{e^{-t}}{t}$.

Pour tout $x > 0$, f est continue sur $[x, 2x]$, donc l'intégale $g(x)$ est bien définie.

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut introduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}_+$.

(Remarque : pas besoin de chercher l'expression de F, en fait c'est impossible.)

On peut donc bien définir $\forall x > 0,\ g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt = F(2x) - F(x)$.

F étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $F' = f$ continue, on a même $F \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

On en déduit que g est de classe C^1 par somme et composition de fonctions C^1, et :

$$\forall x > 0,\ g'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2\frac{e^{-2x}}{2x} - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}.$$

Ainsi, pour $x > 0$, $g(x) < 0$, donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Remarque 7

Lorsque l'on demande de justifier qu'une intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est **bien définie**, il est suffisant d'annoncer (en justifiant éventuellement) que f est continue sur le segment $[a, b]$.

3 Propriétés de l'intégrale

a) Propriétés liées aux bornes

On considère f une fonction continue sur un intervalle I, et des réels $a, b \in I$.

Proposition 5 (Inversion des bornes)

- $\displaystyle\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$ et
- $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$

Preuve :

Notant F une primitive de f sur I :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_a^a f(t)dt = F(a) - F(a) = 0. \quad \square$$

Proposition 6 (Relation de Chasles)

Pour tout $c \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$

Preuve :

Notant F une primitive de f sur I : $F(b) - F(a) = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c))$. $\square$

Dessin :

Remarque 8

Dans la Proposition 6, on ne suppose pas nécessairement $a \leqslant c \leqslant b$!

La relation de Chasles est utile pour "casser" une intégrale en différents morceaux (notamment si l'expression de $f(t)$ est changeante).

Exercice 6

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^3 |x-2|dx$.

On note que $|x-2| = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \leqslant 2 \\ x-2 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$ Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 |x-2|dx &= \int_{-1}^2 |x-2|dx + \int_2^3 |x-2|dx = \int_{-1}^2 (2-x)dx + \int_2^3 (x-2)dx \\ &= \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3 \\ &= \left(4 - \frac{4}{2} - (-2 - \frac{1}{2})\right) + \left(\frac{9}{2} - 6 - (\frac{4}{2} - 4)\right) = 5.\end{aligned}$$

b) Linéarité

Proposition 7 (Linéarité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors pour tous $a, b \in I$: $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\, dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$

Preuve :

Notant F et G des primitives de f et g, $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$. (Proposition 3)

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \Big[\lambda F(t) + \mu G(t)\Big]_a^b = (\lambda F(b) + \mu G(b)) - (\lambda F(a) - \mu G(a))$$
$$= \lambda(F(b) - F(a)) + \mu(G(b) - G(a)) = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

$\square$

Bien-sûr, ceci se généralise immédiatement par récurrence :

Proposition 8 (Linéarité généralisée)

Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions continues sur un intervalle I. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Alors pour tous $a, b \in I$: $\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(t)\right) dt = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_a^b f_k(t)dt.$

Exercice 7

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (2x^2 - 3x + 1)dx$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$.

1. $\displaystyle\int_0^1 (2x^2 - 3x + 1)dx = 2\int_0^1 x^2 dx - 3\int_0^1 x + \int_0^1 1dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 3\left[\frac{x^2}{2}\right] + \Big[x\Big]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{6}.$

2. La fonction $t \mapsto \dfrac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$ est bien définie et continue sur $[-1, 0]$: l'intégrale est donc bien définie.

On reconnait, pour tout $t \in [-1, 0]$, $\displaystyle\frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} = \sum_{k=0}^n t^k$. Ainsi :

$$\int_{-1}^0 \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} dt = \int_{-1}^0 \left(\sum_{k=0}^n t^k\right) dt = \sum_{k=0}^n \int_{-1}^0 t^k dt = \sum_{k=0}^n \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{-1}^0 = \sum_{k=0}^n -\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

c) Intégrale et inégalités

Proposition 9 ("Positivité" de l'intégrale)

Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$ (avec donc $a<b$). Alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

De plus, on a égalité si et seulement si f est nulle : $\int_a^b f(t)dt = 0 \iff f = 0$ sur $[a,b]$.

Preuve :

- Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Comme $F' = f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, F est croissante sur $[a,b]$ et donc $F(b) \geqslant F(a)$ c'est à dire $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

De plus, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt = 0 \iff F(b)-F(a) = 0 \iff F(b) = F(a) &\iff F \text{ est constante sur } [a,b] \quad (\text{car } F \text{ est croissante})\\ &\iff F' = 0 \text{ sur } [a,b]\\ &\iff f = 0 \text{ sur } [a,b].\end{aligned}$$

□

Remarques 9

- Dans le cas où $a > b$, on rappelle que $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$.
- De même, $a<b$ et $f \leqslant 0$ sur $[a,b]$ implique que $\int_a^b f(t)dt \leqslant 0$, et l'équivalence est encore valable.

(Exercice : Comment démontrer ce résultat à partir de la Proposition 9 ?)

Attention !

L'équivalence $\int_a^b f(t)dt = 0 \iff f = 0$ sur $[a,b]$ ne vaut que pour une fonction positive sur $[a,b]$!

Exemple : $\int_{-1}^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0$ mais $t \mapsto t$ n'est pas la fonction nulle sur $[-1,1]$...

Corollaire 2 ("Stricte positivité" de l'intégrale)

Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$ (avec donc $a<b$).

Si f n'est pas nulle sur $[a,b]$, c'est à dire s'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors $\int_a^b f(t)dt > 0$.

Preuve :
Puisque $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$, on sait que $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$. Si jamais $\int_a^b f(t) = 0$, alors $f = 0$ sur $[a,b]$.

Comme f n'est pas constante égale à 0 sur $[a,b]$, on a donc bien $\int_a^b f(t) > 0$ (Contraposée). □

Dessin :

Proposition 10 ("Croissance" de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$ (avec donc $\underline{a<b}$).

Si $\forall t\in[a,b],\ f(t)\leqslant g(t)$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt.$

Preuve :

Posons $h=g-f\geqslant 0$ sur $[a,b]$. Par positivité de l'intégrale, et en utilisant la linéarité :

$$\int_a^b h(t)dt\geqslant 0 \iff \int_a^b (g(t)-f(t))dt\geqslant 0 \iff \int_a^b g(t)dt-\int_a^b f(t)dt\geqslant 0 \iff \int_a^b f(t)dt\leqslant \int_a^b g(t)dt.$$

□

Remarque 10

- D'après la "stricte positivité", le résultat tient toujours en remplaçant les $\leqslant$ par des $<$.
- Ce résultat dit essentiellement que l'on peut "intégrer des inégalités" !

Exemple : Puisque $\forall t\in[1,3],\ t\leqslant t^2$, on a $\displaystyle\int_1^3 tdt\leqslant \int_1^3 t^2dt.$

Exercice 8

À l'aide d'un encadrement, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx.$

On a, pour tout $x\in[0,1]$, $\displaystyle 0\leqslant \frac{x^n}{1+x}\leqslant x^n.$ Donc : $\displaystyle\underbrace{\int_0^1 0\,dx}_{=0}\leqslant \int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\leqslant \underbrace{\int_0^1 x^n dx}_{\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}}.$

Ainsi : $\displaystyle 0\leqslant \int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\leqslant\frac{1}{n+1}$ et d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0.$

Donnons un encadrement simple et souvent utile, obtenu en "intégrant une inégalité" :

Corollaire 3 (Inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ (avec donc $\underline{a<b}$).
Soient $m,M\in\mathbb{R}$ tels que $\forall t\in[a,b],\ m\leqslant f(t)\leqslant M$.

Alors on a l'encadrement : $\displaystyle m(b-a)\leqslant\int_a^b f(t)dt\leqslant M(b-a)$

Ce qui peut se ré-écrire : $\displaystyle m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\leqslant M.$

Le réel $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)$ s'interprète en fait comme la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Preuve :
En intégrant l'inégalité $\forall t\in[a,b],\ m\leqslant f(t)\leqslant M$ on obtient $\displaystyle\underbrace{\int_a^b mdt}_{=m(b-a)}\leqslant\int_a^b f(t)\leqslant\underbrace{\int_a^b Mdt}_{=M(b-a)}.$ □

Remarque 11

On retiendra que pour $a,b,c\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b c\,dt=c(b-a).$

Notons que l'inégalité de la moyenne donne une autre façon de démontrer (ou de retrouver !) **l'inégalité des accroissements finis (IAF)** pour une fonction $\underline{f \in C^1([a,b],\mathbb{R})}$:

Si $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ satisfait $\boxed{\forall t \in [a,b],\ m \leqslant f'(t) \leqslant M}$ alors $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f'(t)dt \leqslant M(b-a)$.

Mais $\displaystyle\int_a^b f'(t)dt = \Big[f(t)\Big]_a^b = f(b) - f(a)$ donc on obtient : $\boxed{m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)}$.

Exercice 9

Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leqslant \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

On peut repérer et utiliser directement l'IAF.
Autrement, en posant $f(t) = \sqrt{t}$ pour $t \geqslant 0$, on remarque que pour $x > 0$:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = f(x+1) - f(x) = \int_x^{x+1} f'(t)dt = \int_x^{x+1} \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$$

et $\forall t \in [x, x+1],\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc on obtient l'inégalité voulue...

Terminons par une inégalité mettant en jeu la valeur absolue.

Proposition 11 (Inégalité triangulaire pour l'intégrale)

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ (avec donc $\underline{a < b}$). Alors : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$.

Preuve :

Rappelons que pour $a \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.

On a $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ dont en intégrant : $\displaystyle\int_a^b (-|f(t)|)dt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$

c'est à dire : $\displaystyle -\int_a^b |f(t)|dt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$ i.e $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$. □

Exercice 10

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \in C([a,b],\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une fonction $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ telle que "la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f" au sens suivant :

$$M_n = \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1. Justifier l'existence du maximum M_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En majorant $\displaystyle\left|\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt\right|$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto |f_n(x) - f(x)|$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc y est bornée et atteint ses bornes ! En particulier elle admet bien un maximum.

2. $\displaystyle\left|\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt\right| = \left|\int_a^b (f_n(t) - f(t))dt\right| \leqslant \int_a^b \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{\leqslant M_n} dt \leqslant \int_a^b M_n dt = \underbrace{M_n(b-a)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$

On conclut d'après le théorème des gendarmes.

4 Méthodes de calcul d'intégrales

4.1 Calcul "direct"

Si l'on sait déterminer une primitive de la fonction à intégrer, on peut calculer l'intégrale directement.

Exercice 11

Calculer $\int_1^3 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$.

D'abord $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $[1,3]$, donc l'intégrale est bien définie.

On note que $\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = t(t^2+1)^{-1/2}$ donc une primitive est $t \mapsto (t^2+1)^{-1/2+1} = \sqrt{t^2+1}$.

Donc : $\int_1^3 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt = \left[\sqrt{t^2+1}\right]_1^3 = \sqrt{3^2+1} - \sqrt{1^1+1} = \sqrt{10} - \sqrt{2}$.

4.2 Intégration par parties

Théorème 2 (Intégration par parties (IPP))

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur le segment $[a,b]$.

$$\text{Alors : } \int_a^b u'(t)v(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Preuve :

Comme $u, v \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, les fonctions u' et v' sont continues sur $[a,b]$, donc les intégrales mises en jeu sont bien définies. Calculons l'intégrale $\int_a^b (uv)'(t)dt$:

- D'une part, par définition : $\int_a^b (uv)'(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b$.
- D'autre part : $\int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$.

Ainsi $\int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b$ donc $\int_a^b u'(t)v(t)dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$. □

Méthode : Effectuer une intégration par partie (IPP)

Si l'on ne sait pas trouver de primitive de f directement, mais que l'on repère que f s'écrit comme **un produit** $f(t) = A(t) \times B(t)$, on peut parfois conclure avec une IPP :
- On choisit un terme à "primitiver" (disons $A(t) = u'(t)$: on détermine une primitive u)
- L'autre terme est à dériver (disons $B(t) = v(t)$: on détermine la dérivée v).

$$\int_a^b \underbrace{A(t)}_{u'(t)}\,\underbrace{B(t)}_{v(t)}\,dt = \underbrace{\Big[u(t)v(t)\Big]_a^b}_{\text{"Pas de prime dans le crochet !"}} \underbrace{-\int_a^b u(t)v'(t)dt}_{\text{"On inverse le placement du prime"}}$$

- Une IPP est réellement intéressante seulement si la nouvelle intégrale obtenue (deuxième terme) est **plus simple à calculer** que l'intégrale de départ ! On choisira donc le terme à "primitiver" et le terme à dériver de sorte à ce que l'expression $u(t)v'(t)$ soit "simple".
- Il sera parfois nécessaire de faire plusieurs IPP consécutives pour calculer une intégrale. (Notamment pour $f(t) = P(t)e^t$ ou $f(t) = P(t)\cos(t)$ avec P un polynôme...)

Exercice 12

1. Calculer $\int_0^1 t\, e^{2t} dt$. 2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_0^a t^2 \cos(t) dt$.

1. Il n'est pas évident de déterminer une primitive de $t \mapsto te^{2t}$ directement. Effectuons une IPP :

- $\int_0^1 \underbrace{t}_{u'(t)} \underbrace{e^{2t}}_{v(t)} dt = \left[\frac{t^2}{2}e^{2t}\right]_0^1 - \int_0^1 t^2 e^{2t} dt = \frac{e^2}{2} - \int_0^1 t^2 e^{2t} dt.$

Mais cette intégrale n'est pas plus simple à calculer...

- $\int_0^1 \underbrace{t}_{v(t)} \underbrace{e^{2t}}_{u'(t)} dt = \left[t\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2t}}{2} dt = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^{2t}}{4}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$

2. On effectue une IPP :

$$\int_0^a \underbrace{t^2}_{v(t)} \underbrace{\cos(t)}_{u'(t)} dt = \left[t^2 \sin(t)\right]_0^a - \int_0^a 2t \sin(t) dt = a^2 \sin(a) - 2\int_0^a t \sin(t) dt$$

On calcule cette intégrale avec une nouvelle IPP :

$$\begin{aligned}\int_0^a \underbrace{t}_{v(t)} \underbrace{\sin(t)}_{u'(t)} dt &= \left[t \times (-\cos(t))\right]_0^a - \int_0^a (-\cos(t)) dt = -a\cos(a) + \int_0^a \cos(t) dt = -a\cos(a) + \left[\sin(t)\right]_0^a \\ &= -a\cos(a) + \sin(a)\end{aligned}$$

Finalement : $\int_0^a t^2 \cos(t) dt = a^2 \sin(a) + 2a\cos(a) - 2\sin(a) = (a^2-2)\sin(a) + 2a\cos(a)$.

Exercice 13

À l'aide d'une IPP, déterminer une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc y admet des primitives.

Par exemple, $F : x \mapsto \int_1^x \ln(t) dt$ est l'unique primitive qui s'annule en 1.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln(t) dt &= \int_1^x \underbrace{1}_{u'(t)} \times \underbrace{\ln(t)}_{v(t)} dt = \left[t \ln(t)\right]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt \\ &= x\ln(x) - \int_1^x 1 dt = x\ln(x) - (x-1) = x\ln(x) - x + 1.\end{aligned}$$

Une primitive est donc $F : x \mapsto x\ln(x) - x + 1$.
Plus simplement, une autre primitive est $x \mapsto x\ln(x) - x$.

Remarque 12

- On retiendra cette expression : $\boxed{\text{Une primitive de ln sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est : } \quad x \mapsto x\ln(x) - x}$
- <u>Méthode :</u> Pour déterminer une primitive de f on peut essayer de calculer $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$.

4.3 Changement de variable

Théorème 3 (Changement de variable)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit φ une fonction de classe C^1 sur un segment $[a,b]$, avec $\varphi([a,b]) \subset I$. Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

On dit que cette égalité résulte du changement de variable $u = \varphi(t)$.

Preuve :

Puisque $f \in C(I, \mathbb{R})$, on peut introduire F une primitive de f sur I.

Puisque $\varphi \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ et $f \in C(I, \mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ est continue sur $[a,b]$.

On remarque qu'une primitive de cette fonction sur $[a,b]$ est $t \mapsto F(\varphi(t))$
$\left(\text{puisque } \dfrac{d}{dt}\Big(F(\varphi(t))\Big) = \varphi'(t)F'(\varphi(t)) = \varphi'(t)f(\varphi(t)) \right)$.

On en déduit :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Big[F(\varphi(t))\Big]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Par ailleurs, on a également

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du = \Big[F(u)\Big]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

d'où l'égalité voulue. □

Méthode : Effectuer un changement de variable

On souhaite calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ à l'aide d'un changement de variable $u = \varphi(t)$:

$\boxed{1}$ Poser $\quad u = \varphi(t) \quad$ et $\quad du = \varphi'(t)\,dt \quad \left(\text{pour s'en souvenir : } \dfrac{du}{dt} = \dfrac{d\varphi(t)}{dt} = \varphi'(t) \right)$

$\boxed{2}$ Ré-exprimer $\quad g(t)dt \quad$ uniquement en fonction de u et du : $\quad g(t)dt = f(u)du$.

$\boxed{3}$ Changer les bornes : si t va de a à b, $\quad u$ va de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$.

On obtient finalement : $\displaystyle\int_a^b g(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$.
Si le changement de variable est bien choisi, cette nouvelle intégrale est "plus simple" à calculer.

Exercice 14

Calculer $\displaystyle\int_0^1 (2t+1)^5 dt$ en utilisant un changement de variable.

- Posons $u = 2t+1$, donc $du = 2dt$. $\quad$ Ainsi $t = \dfrac{u-1}{2}$ et $dt = \dfrac{1}{2}du$.
- $(2t+1)^5 dt = u^5 \dfrac{1}{2}\, du = \dfrac{u^5}{2} du$.
- Quand $t = 0$, $u = 1$, $\quad$ quand $t = 1$, $\quad u = 3$.

Ainsi : $\displaystyle\int_0^2 (2t+1)^5 dt = \int_1^3 \frac{u^5}{2}\, du = \frac{1}{2}\int_1^3 u^5 du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^3 = \frac{3^6-1}{12}$.

Remarque 13

- Il est attendu que vous repériez les situations où un **changement de variable affine** $u = at + b$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) simplifient l'intégrale.
- Les changements de variable non affines seront toujours indiqués par l'énoncé !

Exercice 15

Calculer $\int_0^2 te^{t^2} dt$ à l'aide du changement de variable $u = t^2$.

- On pose $u = t^2$ donc $du = 2tdt$. Ainsi $tdt = \frac{1}{2}du$.
- On a : $te^{t^2} dt = \frac{e^u}{2} du$.
- Quand $t = 0$, $u = 0$, quand $t = 2$, $u = 4$.

Ainsi : $\int_0^2 te^{t^2} dt = \int_0^4 \frac{e^u}{2} du = \left[\frac{e^u}{2}\right]_0^4 = \frac{e^4 - 1}{2}$.

Parfois, on se sert d'un changement de variable "dans l'autre sens"... Le calcul fonctionne de la même façon ! On fera attention au "changement de bornes", qui est un peu plus subtil dans ce cas.

Exercice 16

Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_0^a \frac{du}{e^u + e^{-u}}$ à l'aide du changement de variable $u = \ln(t)$.

- On pose $u = \ln(t)$. Pour que $u \in [0, a]$, on choisit $t \in [1, e^a]$.
($\varphi = \ln$ est une fonction de classe C^1 de $[1, e^a]$ dans $[0, a]$).
- $u = \ln(t)$ donc $du = \frac{1}{t} dt$. Notons qu'on a donc $e^u = t$ et $e^{-u} = \frac{1}{t}$.
- $\frac{du}{e^u + e^{-u}} = \frac{\frac{1}{t} dt}{t + \frac{1}{t}} = \frac{dt}{1 + t^2}$

Ainsi : $\int_0^a \frac{du}{e^u + e^{-u}} = \int_1^{e^a} \frac{dt}{1 + t^2} = \Big[\arctan(t)\Big]_1^{e^a} = \arctan(e^a) - \arctan(1) = \arctan(e^a) - \frac{\pi}{4}$.

À l'aide d'un changement de variable (affine) on peut démontrer le résultat pratique suivant :

Proposition 12 (Intégrale et parité)

Soit f une fonction continue sur un segment $[-a, a]$.

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$

Dessin :

Preuve :

D'après la relation de Chasles, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt$.

En posant le changement de variable $u = -t$ (donc $du = -dt$, on a :

$$\int_{-a}^{0} f(t)dt = -\int_{a}^{0} f(-u)du = \int_{0}^{a} f(-u)du = \int_{0}^{a} f(-t)dt.$$

Ainsi : $\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(t) = \int_{0}^{a} \Big(f(-t) + f(t)\Big)dt$.

- Si f est paire : $f(-t) + f(t) = 2f(t)$, donc $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$.
- Si f est impaire : $f(-t) + f(t) = 0$, donc $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$. □

Exemple

Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{\sin(2x)}{3+x^2}dx$ semble difficile... En fait elle est nulle, car la fonction est impaire !

5 Sommes de Riemann

On revient à présent sur l'idée, évoquée en introduction, d'approcher "l'aire sous la courbe" par des rectangles.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

Soit $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une suite de points partageant le segment $[a, b]$ en n intervalles de longueur $\frac{b-a}{n}$:

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad \text{et } \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}.$$

Autrement dit : $\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \quad x_k = a + k\frac{b-a}{n}.}$

Dessin :

On comprend que lorsque n est grand (c'est à dire que cette subdivision du segment $[a, b]$ est "assez fine") la somme des aires des rectangles est une bonne valeur approchée de l'"aire sous la courbe" de f sur $[a, b]$.

Dessin :

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,
l'aire du rectangle de base $[x_k, x_{k+1}]$ est :

$$(x_{k+1} - x_k) \times f(x_k) = \frac{(b-a)}{n} \times f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Définition 4 (Somme de Riemann (à gauche))

On appelle somme de Riemann de f (à gauche) la somme :

$$S_n(f) = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Remarque 14

Choisir la somme de Riemann "à droite" revient juste à changer les bornes de la somme en $\sum_{k=1}^{n}$.

Théorème 4 (Convergence des sommes de Riemann)

Pour toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$, $\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)dt.$

Remarque 15

- Ce résultat permet enfin d'interpréter rigoureusement l'intégrale comme l'aire sous la courbe !
- Cette convergence reste vraie lorsque la somme $S_n(f)$ commence à $k=1$ et/ou s'arrête à $k=n$.

Preuve (dans le cas C^1) :

Nous allons montrer ce résultat dans le cas particulier où $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$.

Puisque $|f'|$ est continue sur le segment $[a,b]$, elle y est bornée et atteint ses bornes : on peut introduire $M = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Précisément, on va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|S_n(f) - \int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{n}$.

La convergence découle ensuite du Théorème des gendarmes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons la subdivision : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, de sorte que :

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dt.$$

D'après la relation de Chasles, on peut aussi écrire :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} S_n(f) - \int_a^b f(t)dt &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dt - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(t))dt \end{aligned}$$

Donc d'après l'inégalité triangulaire (pour la somme, puis pour l'intégrale !)

$$\left|S_n(f) - \int_a^b f(t)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k) - f(t))dt\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x_k) - f(t)|dt \quad (\star)$$

Rappelons que $|f'| \leqslant M$, donc d'après l'IAF : $\forall x,y \in [a,b]$, $|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$.

Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, on obtient donc : $\forall t \in [x_k, x_{k+1}|$, $|f(x_k) - f(t)| \leqslant M|x_k - t| \leqslant M\frac{b-a}{n}$.

On en déduit : $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)-f(x_k)|dt \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} M\frac{b-a}{n}dt = M\frac{b-a}{n}(x_{k+1}-x_k) = \frac{M(b-a)^2}{n^2}$.

En revenant finalement à l'inégalité $(\star)$:

$$\left|S_n(f) - \int_a^b f(t)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{M(b-a)^2}{n^2} = n \times \frac{M(b-a)^2}{n^2} = \frac{M(b-a)^2}{n}.$$

Quand $n \to +\infty$, on obtient ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)dt$.

$\square$

Les sommes de Riemann peuvent être très utiles pour déterminer la limite de certaines sommes.

On retiendra le résultat dans le cas d'une fonction $f \in C([0,1],\mathbb{R})$:
(C'est le théorème précédent, dans le cas $a=0$ et $b=1$)

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt.}$$

Méthode : Utiliser les sommes de Riemann

Si l'on cherche à déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_{k,n}$ (l'expression dans la somme dépend de k **et** de n !)
on peut chercher à mettre cette somme sous la forme $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tfrac{k}{n})$, où $f \in C([0,1],\mathbb{R})$.

Dans ce cas la limite quand $n \to +\infty$ est $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

(Remarque : Cela reste vrai si la somme démarre à $k=1$ et/ou s'arrête à $k=n$.)

Exercice 17

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$.

On cherche à "faire sortir" $\frac{1}{n}$, puis à faire apparaître $\frac{k}{n}$ dans la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{où } f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est continue sur $[0,1]$, donc d'après la convergence des sommes de Riemann :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

6 Complément : Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 5 (Fonction continue par morceaux)

On dit que f est continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < \ldots < x_n = b$$

de points de $[a, b]$ telle que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: la restriction $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ de f à l'intervalle $]x_k x_{k+1}[$ est continue **et** admet des limites finies en x_k et en x_{k+1}

Il en résulte que $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ est prolongeable par continuité à tout le segment $[x_k, x_{k+1}]$.

Dessin :

Exemples

- La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$.
- La fonction tangente n'est pas continue par morceaux sur $[0, \pi]$!

Définition 6 (Intégrale d'une fonction continue par morceaux)

Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note f_k le prolongement par continuité de $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ au segment $[x_k, x_{k+1}]$.

On définit alors l'intégrale de a à b de f en posant : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(t)dt.$

Autrement dit, on fait la somme des aires de chaque "morceau"...

Proposition 13 (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux)

Les propriétés suivantes restent vraies pour l'intégrale d'une fonction continue par morceaux :

- La relation de Chasles (Proposition 6)
- La linéarité (Proposition 7 et 8)
- La positivité et la croissance (Proposition 9 et 10)
- L'inégalité de la moyenne (Corollaire 3)
- L'inégalité triangulaire (Proposition 11)

Attention !

En revanche, les propriétés concernant les inégalités strictes ne tiennent plus pour une fonction continue par morceaux ! (Corollaire 2)

Exemple : Considérer f nulle sur $[0, 1[\cup]1, 2]$ et $f(1) = 1$.

Par définition, $\displaystyle\int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt = 0$, mais pourtant f n'est pas nulle sur $[0, 2]$!

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Savoir que toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives, toutes égales à une constante additive près.
- Justifier qu'une intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est bien définie.
- Savoir que $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est LA primitive de f qui s'annule en a.
- Calculer une intégrale en déterminant une primitive d'expression usuelle.
- Utiliser les propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité, croissance...
- Encadrer $\int_a^b f(t)dt$ en encadrant f sur $[a,b]$.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une (ou plusieurs !) IPP.

Pour suivre

- Étudier des fonctions de type $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$.
- Effectuer un changement de variable affine sans indication.
- Effectuer un changement de variable indiqué par l'énoncé.
- Exploiter la parité d'une fonction pour calculer une intégrale.
- Reconnaître une somme de Riemann pour déterminer une limite.

Pour les ambitieux

- Connaître la définition d'une fonction continue par morceaux et son intégrale.
- Effectuer un changement de variable non-affine sans indication.