Concours blanc n°2 - Épreuve de maths n°1

L'utilisation de la calculatrice, des feuilles/notes de cours ou d'exercices est interdite.
La présentation, la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation de la copie.
Veillez à encadrer/souligner/surligner vos résultats.

Problème 1 : Calcul de l'intégrale de Gauss

L'objectif de ce problème est d'établir la (célèbre) formule suivante : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (♥)

1. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est bien convergente.

Partie I : Étude des intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n dx$.

2. (a) Calculer W_0 et W_1.
   (b) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x)^2 = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$. En déduire la valeur de W_2.
   (c) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle converge.
3. (a) À l'aide d'une intégration par partie, établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$.
   (b) En déduire une relation simple liant W_{n+2} à W_n. A l'aide de celle-ci, proposer une fonction Python qui prend en entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie un vecteur contenant les $2n+1$ valeurs $(W_k)_{0\leqslant k\leqslant 2n}$. On importera la bibliothèque appropriée.
4. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2}$.
5. (a) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+2}}{W_n}$.
   (b) À l'aides des variations de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.
6. Établir pour finir l'équivalent : $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Partie II : Encadrement de l'exponentielle

7. (a) Montrer : $\forall t \in \mathbb{R},\ e^t \geqslant 1+t$.
   (b) En déduire : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 1-t \leqslant e^{-t} \leqslant \dfrac{1}{1+t}$.
   (c) Montrer finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall t \in [0,n],\ \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t} \leqslant \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^{-n}$.

Partie III : Calcul de deux intégrales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé.

8. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}\sin(u)$, montrer : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n}W_{2n+1}$.
9. (a) Démontrer que pour tout $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $1+\tan(u)^2 = \dfrac{1}{\cos(u)^2}$.
   (b) À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}\tan(u)$, montrer : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$.

Partie IV : Dénouement

10. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir l'encadrement : $\sqrt{n}\, W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leqslant \sqrt{n} W_{2n-2}$.
    (b) Etablir finalement l'égalité (♥) annoncée en début de problème.
    (c) Se féliciter (modestement) d'avoir montré l'une des plus belles égalités mathématiques qui soient.
11. On définit la "densité gaussienne" par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

    Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

Problème 2 : Réduction d'endomorphismes en dimension 4

Dans ce problème, on s'intéresse à deux exemples de réduction d'endomorphismes en dimension 4. Autrement dit, lorsque E est un espace vectoriel de dimension 4 et $f \in \mathcal{L}(E)$, on cherchera à déterminer une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle f est représenté par une matrice "simple".

Partie I - Réduction des symétries

On dit qu'un endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie lorsqu'il satisfait : $s^2 = Id$,
où Id désigne l'application identité sur E. On travaille pour commencer dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$.
Soit $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme admettant la matrice S suivante dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer le rang de la matrice S.
   (b) L'endomorphisme s est-il injectif ? Surjectif ?
2. Montrer que s est une symétrie.
3. (a) Comment définir la matrice S en langage Python ?
   (b) On souhaite rédiger une fonction qui prend en entrée une matrice carrée A de taille quelconque, et nous apprend s'il s'agit ou non d'une matrice représentant une symétrie.

```
import numpy as np; import numpy.linalg as al
def matrice_de_symetrie(A) :
  (n,p) = np.shape(A)
  if .................... :
    print("A est la matrice d'une symétrie")
  else :
    print("A n'est pas la matrice d'une symétrie")
```

   Quelle condition faut-il écrire dans la structure `if` ?
   Pour tester si deux matrices `A` *et* `B` *sont égales, on pourra utiliser l'instruction :* `(A == B).all()`
4. (a) Déterminer une base de $Ker(s - Id)$ et de $Ker(s + Id)$.
   (b) En déduire que $\mathbb{R}^4 = Ker(s - Id) \oplus Ker(s + Id)$.
   (c) On note $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^4$ obtenue en concaténant une base de $Ker(s - Id)$ et une base de $Ker(s + Id)$. Déterminer la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$.

On passe à présent au cas général.
Soit E un espace vectoriel de dimension 4 quelconque et $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie quelconque.

5. On souhaite montrer que $E = Ker(s - Id) \oplus Ker(s + Id)$.
   (a) Montrer que $Ker(s - Id) \cap Ker(s + Id) = \{0_E\}$.
   (b) Justifier que $(s - Id) \circ (s + Id) = 0$ et en déduire l'inclusion $Im(s + Id) \subset Ker(s - Id)$.
   (c) En déduire que $\dim(Ker(s - Id)) + \dim(Ker(s + Id)) \geqslant 4$ et conclure.

6. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(s)$ est l'une des matrice suivantes :

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} -1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1 \end{pmatrix}.$$

Préciser quelle matrice on obtient, en fonction de la valeur de $d = \dim(Ker(s + Id))$.

Partie II - Réduction des endomorphismes nilpotents

On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$.
L'indice de nilpotence de f est défini comme le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ satisfaisant $f^p = 0$.

On travaille pour commencer dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

7. (a) Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) En déduire que f est nilpotent, et préciser son indice de nilpotence.
8. (a) Montrer que $\mathcal{B} = (X^3, f(X^3), f^2(X^3), f^3(X^3))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

On passe à présent au cas général.
Soit E un espace vectoriel de dimension 4 quelconque et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent quelconque.
On note $p \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence de f.

9. (a) Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$.
   On fixe un tel vecteur x pour toute la suite du problème.
   (b) Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \big(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)\big)$ est libre.
   (c) En déduire que $1 \leqslant p \leqslant 4$.

On étudie, dans la suite, les différentes réductions possibles de f en fonction de la valeur de $p \in \{1, 2, 3, 4\}$.

10. Que dire de l'endomorphisme f si $p = 1$?
11. On suppose dans cette question que $p = 4$.
    (a) Montrer que la famille $\mathcal{F}$ définie précédemment est une base de E.
    (b) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$.
12. On suppose dans cette question que $p = 3$.
    (a) Justifier qu'il existe un $y \in E$ tel que la famille $\mathcal{G} = \big(x, f(x), f^2(x), y\big)$ soit une base de E.
    (b) Montrer qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $M = Mat_{\mathcal{G}}(f) = \begin{pmatrix} 0&0&0&a\\1&0&0&b\\0&1&0&c\\0&0&0&d \end{pmatrix}$.
    (c) Calculer M^3 et en déduire que $a = d = 0$.
    (d) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E, dont on explicitera les vecteurs en fonction de x et y, de l'application f, et des scalaires b et c, telle que :
    $$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$$
13. On suppose pour finir que $p = 2$.
    (a) Montrer que $Im(f) \subset Ker(f)$ et en déduire que $\dim(Ker(f)) \in \{2, 3\}$.
    (b) Si $\dim(Ker(f)) = 3$, construire une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$
    (c) Si $\dim(Ker(f)) = 2$, construire une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix}$

⋆⋆⋆ Fin du sujet ⋆⋆⋆