

## Concours Blanc n°1 – Corrigé

## Problème 1 : Etude des racines d'une famille de polynômes

(Inspiré EML 2020 voie S)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on introduit le polynôme :  $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-X)^k}{k!} = 1 - X + \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{6} + \dots + \frac{(-X)^n}{n!}$ .

1.

```
def P(n,x) :
    S = 0 ; a = 1
    for k in range( n+1 ) : # k = 0, 1, ..., n
        S = S + a
        a = a * (-x)/(k+1)
    return S
```

Après le premier passage, on a  $S = 1$  et  $a = -x$

Après le deuxième passage, on a  $S = 1 + (-x)$  et  $a = (-x)^2/2$

Après le troisième passage, on a  $S = 1 + (-x) + (-x)^2/2$  et  $a = (-x)^3/6$ , etc...

2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}_-$ , on a  $(-x) \geq 0$  et donc

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{(-x)^k}{k!}}_{\geq 0} \geq 1.$$

Ainsi  $\forall x \in \mathbb{R}_-$ ,  $P_n(x) \neq 0$ . On conclut que  $P_n$  n'a pas de racine dans  $\mathbb{R}_-$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} P'_n &= \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-X)^k}{k!} \right)' = \sum_{k=0}^n \frac{((-X)^k)'}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{-k(-X)^{k-1}}{k!} = - \sum_{k=1}^n \frac{k(-X)^{k-1}}{k!} \quad (\text{le terme quand } k=0 \text{ est nul}) \\ &= - \sum_{k=1}^n \frac{(-X)^{k-1}}{(k-1)!} = - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-X)^j}{(j)!} = -P_{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi :  $P'_n = -P_{n-1}$ .

4. (a) Soit  $x \in \mathbb{R}_+$  fixé. Notons  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = P_{2n}(x)$  et  $v_n = P_{2n+1}(x)$ . Etudions leur sens de variation.  
Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\bullet \quad u_{n+1} - u_n = P_{2n+2}(x) - P_{2n}(x) = \frac{(-x)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \underbrace{\frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\leq 0} \left( \frac{-x}{2n+2} + 1 \right).$$

On a donc :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \iff \frac{-x}{2n+2} + 1 \geq 0 \iff 1 \geq \frac{x}{2n+2} \iff 2n+2 \geq x \iff n \geq \frac{x}{2} - 1.$$

Ainsi, la suite  $(P_{2n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante à partir du moment où  $n \geq \frac{x}{2} - 1$ .

$$\bullet \quad v_{n+1} - v_n = P_{2n+3}(x) - P_{2n+1}(x) = \frac{(-x)^{2n+3}}{(2n+3)!} + \underbrace{\frac{(-x)^{2n+2}}{(2n+2)!}}_{\geq 0} \left( \frac{-x}{2n+3} + 1 \right).$$

On a donc :

$$v_{n+1} - v_n \geq 0 \iff \frac{-x}{2n+3} + 1 \geq 0 \iff 1 \geq \frac{x}{2n+3} \iff 2n+3 \geq x \iff n \geq \frac{x-3}{2}.$$

Ainsi, la suite  $(P_{2n+1}(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante à partir du moment où  $n \geq \frac{x-3}{2}$ .

De plus, on note que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (P_{2n+1}(x) - P_{2n}(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0 \text{ par croissance comparée.}$$

Ainsi les suites  $(P_{2n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(P_{2n+1}(x))_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes (à partir d'un certain rang)

- (b) Soit  $x \in \mathbb{R}_+$  fixé. On vient de voir que  $(P_{2n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(P_{2n+1}(x))_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes, donc elles convergent vers la même limite. Il existe ainsi un réel  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{2n}(x) = \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{2n+1}(x).$$

Or on sait que ceci équivaut à dire simplement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \ell$ .

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , la suite  $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

5. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $\mathcal{P}(n)$  : "  $\forall x \in \mathbb{R}_+, P_{2n+1}(x) \leq e^{-x} \leq P_{2n}(x)$  ", et montrons par récurrence que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- **Initialisation** : On doit montrer  $\mathcal{P}(1)$  :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, 1 - x \leq e^{-x} \leq 1$ .

*Inégalité de droite* : On sait déjà que pour  $x \in \mathbb{R}_+, e^{-x} \leq e^0 = 1$ .

*Inégalité de gauche* : Vérifions que la fonction  $f : x \mapsto e^{-x} - (1 - x)$  est positive sur  $\mathbb{R}_+$ .  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = -e^{-x} + 1 \geq 0$ .

Ainsi  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Puisque  $f(0) = 0$ , on en déduit que  $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geq 0$ .

Ceci montre l'encadrement voulu.

- **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et montrons  $\mathcal{P}(n+1)$ , c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, P_{2n+3}(x) \leq e^{-x} \leq P_{2n+2}(x)$$

- *Inégalité de droite* : Vérifions que la fonction  $g_n : x \mapsto P_{2n+2}(x) - e^{-x}$  est positive sur  $\mathbb{R}_+$ .  $g_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, g'_n(x) = P'_{2n+2}(x) + e^{-x} = -P_{2n+1}(x) + e^{-x} \geq 0$ . (d'après  $\mathcal{P}(n)$ , car  $P_{2n+1}(x) \leq e^{-x}$ )

Ainsi  $g_n$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , et puisque  $g_n(0) = 0$ , on en déduit :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, g_n(x) \geq 0$ .

- *Inégalité de gauche* : Vérifions que la fonction  $f_n : x \mapsto e^{-x} - P_{2n+3}(x)$  est positive sur  $\mathbb{R}_+$ .  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'_n(x) = -e^{-x} - P'_{2n+3}(x) = -e^{-x} + P_{2n+2}(x) = g_n(x) \geq 0$ . Ainsi  $f_n$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , et puisque  $f_n(0) = 0$ , on en déduit :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) \geq 0$ .

Ceci montre l'encadrement voulu et achève la récurrence.

- (b) Soit  $x \in \mathbb{R}_+$  fixé. On a vu qu'il existait  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \ell$ .

En passant à la limite dans l'encadrement  $P_{2n+1}(x) \leq e^{-x} \leq P_{2n}(x)$ , on obtient  $\ell \leq e^{-x} \leq \ell$ , c'est à dire  $\ell = e^{-x}$ .

Conclusion :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = e^{-x}$

6. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après 2.,  $P_{2n}$  n'a pas de racine dans  $\mathbb{R}_-$ . De plus, puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, P_{2n}(x) \geq e^{-x} > 0$$

$P_{2n}$  n'a pas non plus de racine dans  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi  $P_{2n}$  n'a pas de racine réelle.

- (b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Raisonnons par l'absurde en supposant que  $P_{2n+1}$  admet deux racines réelles  $\alpha_1 < \alpha_2$ . Puisque  $P_{2n+1}(\alpha_1) = 0 = P_{2n+1}(\alpha_2)$ , d'après le théorème de Rolle, il existe un réel  $c \in ]\alpha_1, \alpha_2[$  tel que  $P'_{2n+1}(c) = 0$ . Or  $P'_{2n+1} = -P_{2n}$  : on a donc trouvé un réel  $c$  tel que  $P_{2n}(c) = 0$ .

Contradiction, car on vient de voir que  $P_{2n}$  n'a pas de racine réelle !

Conclusion :  $P_{2n+1}$  a au maximum une racine réelle.

7. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Rappelons que  $P'_{2n+1} = -P_{2n}$ .

Puisque  $P_{2n}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annule pas, d'après le TVI il reste de signe strictement constant sur  $\mathbb{R}$  ! Puisque  $P_{2n}(0) = 1$ , on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_{2n}(x) > 0 \text{ donc } P'_{2n+1}(x) = -P_{2n}(x) < 0.$$

Ainsi,  $P_{2n+1}$  est strictement décroissant sur  $\mathbb{R}$ .

De plus,  $P_{2n+1}(0) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P_{2n+1}(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_{2n+1}(x) = -\infty$

(car c'est un polynôme de degré impair et de coeff dominant négatif).

On a ainsi le tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$P_{2n+1}(x)$	$+\infty$	$1$	$-\infty$

D'après le TVI avec stricte monotonie, on en déduit qu'il existe un unique  $\alpha_n > 0$  tel que  $P_{2n+1}(\alpha_n) = 0$ .

C'est bien l'unique racine de  $P_{2n+1}$  sur  $\mathbb{R}$  (car encore une fois, il n'y a pas de racine dans  $\mathbb{R}_-$ ).

Enfin, c'est une racine simple, car  $P'_{2n+1}(\alpha_n) < 0$  donc  $P_{2n+1}(\alpha_n) \neq 0$ .

8. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{aligned} P_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-X)^k}{k!} = \sum_{i=0}^n \frac{(-X)^{2i}}{(2i)!} + \sum_{i=0}^n \frac{(-X)^{2i+1}}{(2i+1)!} \quad (\text{en séparant les indices pairs et impairs}) \\ &= \sum_{i=0}^n \left( \frac{(-X)^{2i}}{(2i)!} + \frac{(-X)^{2i+1}}{(2i+1)!} \right) = \sum_{i=0}^n \frac{X^{2i}}{(2i)!} \left( 1 - \frac{X}{2i+1} \right) \end{aligned}$$

On a bien montré :  $P_{2n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{X^{2k}}{(2k)!} \left( 1 - \frac{X}{2k+1} \right)$ .

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En utilisant la formule précédente :

$$\bullet P_{2n+1}(1) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!} \left( 1 - \frac{1}{2k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{1}{(2k)!}}_{>0} \underbrace{\left( 1 - \frac{1}{2k+1} \right)}_{>0}$$

donc  $P_{2n+1}(1) > 0$ .

$$\bullet P_{2n+1}(2n+1) = \sum_{k=0}^n \frac{(2n+1)^{2k}}{(2k)!} \left( 1 - \frac{2n+1}{2k+1} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{(2n+1)^{2k}}{(2k)!}}_{>0} \underbrace{\left( 1 - \frac{2n+1}{2k+1} \right)}_{<0}$$

donc  $P_{2n+1}(2n+1) < 0$ .

D'après le TVI, il en résulte que  $P_{2n+1}$  s'annule entre 1 et  $2n+1$ , c'est à dire :  $\alpha_n \in ]1, 2n+1[$ .

9.

```
def approx_alpha(n, eps) :
    a = 1 ; b = 2*n+1
    while b-a > eps :
        c = (a+b)/2
        if P(2*n+1, c) < 0 :
            b = c
        else :
            a = c
    return a
```

On a vu que  $\alpha_n \in ]1, 2n+1[$ , on peut donc appliquer l'algorithme de dichotomie sur le segment  $[1, 2n+1]$  (d'où  $a = 1$  et  $b = 2n+1$  au départ). Le reste de l'algorithme est classique, en précisant tout de même que  $P_{2n+1}$  est décroissant : il passe de positif à négatif ! Ainsi, si jamais  $P_{2n+1}(c) < 0$ , c'est bien la valeur  $b$  (bord droit du segment) qu'il faut mettre à jour, et non  $a$  ! (on peut s'en convaincre sur un dessin).

10. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En utilisant la formule du 8.(a), on a

$$P_{2n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{X^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{X}{2k+1}\right) \quad \text{et} \quad P_{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{X}{2k+1}\right).$$

En faisant la différence, on obtient bien : 
$$P_{2n+1} = P_{2n-1} + \frac{X^{2n}}{(2n)!} \left(1 - \frac{X}{2n+1}\right).$$

Evaluons cette égalité en  $\alpha_{n-1}$  (qui est la racine de  $P_{2n-1}$ ) :

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(\alpha_{n-1}) &= P_{2n-1}(\alpha_{n-1}) + \frac{(\alpha_{n-1})^{2n}}{(2n)!} \left(1 - \frac{\alpha_{n-1}}{2n+1}\right) \\ &= \underbrace{\frac{(\alpha_{n-1})^{2n}}{(2n)!}}_{>0} \underbrace{\left(1 - \frac{\alpha_{n-1}}{2n+1}\right)}_{>0} \end{aligned}$$

En effet, on sait que  $\alpha_{n-1} \in ]1, 2n-1[$ , donc en particulier,  $\alpha_{n-1} < 2n+1$  et donc  $1 - \frac{\alpha_{n-1}}{2n+1} > 0$ .

Ainsi, on a : 
$$P_{2n+1}(\alpha_{n-1}) > 0.$$

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on vient de voir que :

$$P_{2n+1}(\alpha_{n-1}) > 0 \quad \text{i.e.} \quad P_{2n+1}(\alpha_{n-1}) > P_{2n+1}(\alpha_n) \quad \text{et donc} \quad \alpha_{n-1} < \alpha_n$$

car  $P_{2n+1}$  est strictement décroissant sur  $\mathbb{R}$ . On a donc montré :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_{n-1} < \alpha_n$ .

$$\boxed{\text{La suite } (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est donc strictement croissante}.}$$

On suppose à présent que  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un certain réel  $\ell$ .

11. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}_+$ . D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left| P'_{2n+1}(x) \right| = \left| -P_{2n}(x) \right| = \left| P_{2n}(x) \right| = \left| \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-x)^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=0}^{2n} \left| \frac{(-x)^k}{k!} \right| = \sum_{k=0}^{2n} \frac{|-x|^k}{k!} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} \leq e^x.$$

(On a utilisé l'inégalité admise dans l'énoncé). Ainsi : 
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \left| P'_{2n+1}(x) \right| \leq e^x.}$$

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On applique l'IAF à la fonction  $P_{2n+1}$ , qui est dérivable sur le segment  $[\alpha_n, \ell]$ .

(Notons que puisque  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, on a forcément  $\alpha_n \leq \ell$ ).

On on a :  $\forall t \in [\alpha_n, \ell], \left| P'_{2n+1}(t) \right| \leq e^t \leq e^\ell$ .

Ainsi, l'IAF nous apprend que : 
$$\boxed{\left| P_{2n+1}(\ell) - P_{2n+1}(\alpha_n) \right| \leq e^\ell |\ell - \alpha_n|}.$$

12. D'abord,  $P_{2n+1}(\alpha_n) = 0$ , par définition de  $\alpha_n$ . L'inégalité précédente devient donc :

$$\left| P_{2n+1}(\ell) \right| \leq e^\ell |\ell - \alpha_n|.$$

Passons à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  dans cette inégalité.

- D'après le résultat du 5.(b), on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{2n+1}(\ell) = e^{-\ell}$ .

- Puisqu'on a supposé que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \ell$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\ell - \alpha_n| = 0$ .

On obtient ainsi :  $e^{-\ell} \leq 0$  (avec  $\ell \in \mathbb{R}$ ), ce qui évidemment est une contradiction !

Conclusion :  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante qui ne converge pas, donc d'après le théorème de la limite monotone, on a nécessairement 
$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty}.$$

## Problème 2 : La ruine du joueur

Un casino dispose d'une machine à sous dont le comportement est le suivant :

- Pour jouer une partie, un joueur doit d'abord payer le coût d'entrée de 1€.
- A l'issue de la partie, le joueur reçoit : 
$$\begin{cases} 0\text{€} & \text{avec probabilité } p \\ 2\text{€} & \text{avec probabilité } q \\ 3\text{€} & \text{avec probabilité } r, \end{cases} \quad \text{où } p, q, r \in ]0, 1[ \text{ avec } p + q + r = 1.$$

Le gain moyen relatif d'un joueur à l'issue d'une seule partie est ainsi :  $(0 \cdot p + 2 \cdot q + 3 \cdot r) - 1$ .

On note ce gain  $g = 2q + 3r - 1$ .

Un joueur qui s'installe devant la machine à sous enchaîne les parties successives. Si, à un moment quelconque au cours du jeu, son capital est réduit à 0€, il ne peut plus continuer : on dit qu'il finit ruiné. Notons qu'il est possible, a priori, qu'un joueur ne finisse jamais ruiné, c'est à dire qu'il continue de jouer indéfiniment.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $A_n$  l'évènement : "Un joueur ayant un capital de départ de  $n\text{€}$  finit ruiné", et on note  $u_n = P(A_n)$ . On cherche, dans ce problème, à déterminer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

### Partie I - Transcription matricielle

- (a) Si le joueur a un capital de départ de 0€, alors il est immédiatement ruiné. L'évènement  $A_0$  est donc l'évènement certain, et  $u_0 = 1$ .
  - (b) Il semble intuitif que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit décroissante : plus un joueur a un capital de départ élevé, moins il a de chance de finir ruiné à un moment.
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On introduit les évènements suivants :

$G_0$  = " Le joueur gagne 0€ à la première partie"  
 $G_2$  = " Le joueur gagne 2€ à la première partie"  
 $G_3$  = " Le joueur gagne 3€, à la première partie"

Les évènements  $(G_0, G_2, G_3)$  forment un système complet d'évènement, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(G_0)P_{G_0}(A_{n+1}) + P(G_2)P_{G_2}(A_{n+1}) + P(G_3)P_{G_3}(A_{n+1}) \\ &= p \cdot P_{G_0}(A_{n+1}) + q \cdot P_{G_2}(A_{n+1}) + r \cdot P_{G_3}(A_{n+1}). \end{aligned}$$

Explicitons maintenant les probabilités qu'un joueur avec un capital de départ de  $n+1 \text{ €}$  finisse ruiné SACHANT  $G_0$ ,  $G_2$  ou  $G_3$  :

- Conditionnellement à  $G_0$ , après la première partie, le joueur a désormais un capital de  $n \text{ €}$ . Sa probabilité de finir ruiné est donc équivalente à  $u_n = P(A_n)$ . Ainsi :  $P_{G_0}(A_{n+1}) = u_n$ .
- Conditionnellement à  $G_2$ , après la première partie, le joueur a désormais un capital de  $n+2 \text{ €}$ . Sa probabilité de finir ruiné est donc équivalente à  $u_{n+2} = P(A_{n+2})$ . Ainsi :  $P_{G_2}(A_{n+1}) = u_{n+2}$ .
- Conditionnellement à  $G_3$ , après la première partie, le joueur a désormais un capital de  $n+3 \text{ €}$ . Sa probabilité de finir ruiné est donc équivalente à  $u_{n+3} = P(A_{n+3})$ . Ainsi :  $P_{G_3}(A_{n+1}) = u_{n+3}$ .

On obtient donc bien :  $u_{n+1} = pu_n + qu_{n+2} + ru_{n+3}$ .

Pour toute la suite du problème, on introduit la matrice carrée  $M = \begin{pmatrix} -\frac{q}{r} & \frac{1}{r} & -\frac{p}{r} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,

les matrices colonnes  $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ) et le polynôme  $P = rX^3 + qX^2 - X + p \in \mathbb{R}[X]$

3. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ .

Or,  $u_{n+1} = pu_n + qu_{n+2} + ru_{n+3}$ , donc on a  $u_{n+3} = -\frac{q}{r}u_{n+2} + \frac{1}{r}u_{n+1} - \frac{p}{r}u_n$ .

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} u_{n+3} = -\frac{q}{r}u_{n+2} + \frac{1}{r}u_{n+1} - \frac{p}{r}u_n \\ u_{n+2} = u_{n+2} \\ u_{n+1} = u_{n+1} \end{cases}.$$

On remarque donc que  $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{q}{r} & \frac{1}{r} & -\frac{p}{r} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$  c'est à dire  $\boxed{X_{n+1} = MX_n}$ .

- (b) On en déduit par récurrence que :  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0}$ .

Initialisation :  $X_0 = I_3 X_0 = M^0 X_0$ .

Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $X_n = M^n X_0$ .

Alors,  $X_{n+1} = MX_n = M(M^n X_0) = M^{n+1} X_0$ , ce qui achève la récurrence.

4. Le calcul montre que :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} -\frac{q}{r} & \frac{1}{r} & -\frac{p}{r} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{q^2}{r^2} + \frac{1}{r} & -\frac{q}{r^2} - \frac{p}{r} & \frac{pq}{r^2} \\ -\frac{q}{r} & \frac{1}{r} & -\frac{p}{r} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} -\frac{q^3}{r^3} - \frac{2q}{r^2} - \frac{p}{r} & \frac{q^2}{r^3} + \frac{1}{r^2} + \frac{pq}{r^2} & -\frac{pq^2}{r^3} - \frac{p}{r^2} \\ \frac{q^2}{r^2} + \frac{1}{r} & -\frac{q}{r^2} - \frac{p}{r} & \frac{pq}{r^2} \\ -\frac{q}{r} & \frac{1}{r} & -\frac{p}{r} \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite :

$$\begin{aligned} P(M) &= rM^3 + qM^2 - M + pI_3 \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{q^3}{r^2} - \frac{2q}{r} - p & \frac{q^2}{r^2} + \frac{1}{r} + \frac{pq}{r} & -\frac{pq^2}{r^2} - \frac{p}{r} \\ \frac{q^2}{r} + 1 & -\frac{q}{r} - p & \frac{pq}{r} \\ -q & 1 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{q^3}{r^2} + \frac{q}{r} & -\frac{q^2}{r^2} - \frac{pq}{r} & \frac{pq^2}{r^2} \\ -\frac{q^2}{r} & \frac{q}{r} & -\frac{pq}{r} \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} -\frac{q}{r} & \frac{1}{r} & -\frac{p}{r} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\boxed{P \text{ est un polynôme annulateur de } M}$ .

## Partie II - Etude d'un cas particulier à gain moyen positif

Dans cette partie du problème, on étudie le cas particulier où  $p = q = \frac{3}{8}$  et  $r = \frac{1}{4}$ .

5. Ici,  $g = 2q + 3r - 1 = 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{2}$ . Ainsi  $\boxed{g = \frac{1}{2} > 0}$ .

6. Ici,  $M = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Pour définir cette matrice en Python :

```
import numpy as np
M = np.array([ [-3/2, 4, -3+2], [1,0,0], [0,1,0] ])
```

7. Ici,  $P = \frac{1}{4}X^3 + \frac{3}{8}X^2 - X + \frac{3}{8}$ .

On remarque que 1 est une racine de  $P : P(1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - 1 + \frac{3}{8} = 0$ .

On sait donc qu'on peut factoriser  $P$  par  $(X - 1)$ .

En posant la division euclidienne, on trouve :  $P = (X - 1)(\frac{1}{4}X^2 + \frac{5}{8}X - \frac{3}{8})$ ,

c'est à dire  $P = \frac{1}{4}(X - 1)(X^2 + \frac{5}{2}X - \frac{3}{2})$ .

Après calcul, le polynôme  $X^2 + \frac{5}{2}X - \frac{3}{2}$  admet deux racines :  $\frac{1}{2}$  et  $-3$ .

Ainsi, on obtient la factorisation complète :  $P = \frac{1}{4}(X - 1)(X - \frac{1}{2})(X + 3)$ .

(Attention à ne pas oublier de mettre le coefficient dominant en facteur).

Ainsi  $P$  admet 3 racines simples :  $1, \frac{1}{2}$  et  $-3$ .

Pour tout réel  $\lambda$  fixé, on note  $(S_\lambda)$  le système :  $MX = \lambda X$  d'inconnue  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

8. Pour tout  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , on a les équivalences :

$$(S_\lambda) \iff MX = \lambda X \iff MX - \lambda X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (-\frac{3}{2} - \lambda)x & +4y & -\frac{3}{2}z & = 0 \\ x & -\lambda y & & = 0 \\ & y & -\lambda z & = 0 \end{cases}$$

On ré-organise les lignes du système :

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} x & -\lambda y & & = 0 \\ & y & -\lambda z & = 0 \\ (-\frac{3}{2} - \lambda)x & +4y & -\frac{3}{2}z & = 0 \end{cases}$$

On effectue l'opération :  $L_3 \leftarrow L_3 + (\frac{3}{2} + \lambda)L_1$ . On obtient :

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} x & -\lambda y & & = 0 \\ & y & -\lambda z & = 0 \\ (4 - \frac{3}{2}\lambda - \lambda^2)y & -\frac{3}{2}z & = 0 \end{cases}$$

Pour finir, on effectue l'opération  $L_3 \leftarrow L_3 - (4 - \frac{3}{2}\lambda - \lambda^2)L_2$  :

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} x & -\lambda y & & = 0 \\ & y & -\lambda z & = 0 \\ & & (-\frac{3}{2} + 4\lambda - \frac{3}{2}\lambda^2 - \lambda^3)z & = 0 \end{cases}$$

Rappelons que  $P(X) = \frac{1}{4}X^3 + \frac{3}{8}X^2 - X + \frac{3}{8}$ .

On remarque ainsi que :  $(-\frac{3}{2} + 4\lambda - \frac{3}{2}\lambda^2 - \lambda^3) = -4P(\lambda)$ .

La dernière ligne du système est donc équivalente à :  $P(\lambda) \cdot z = 0$ .

Conclusion : On a montré que  $(S_\lambda)$  est équivalent à :  $\begin{cases} x & -\lambda y & & = 0 \\ & y & -\lambda z & = 0 \\ & & P(\lambda) \cdot z & = 0 \end{cases}$

9. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On sait (d'après le cours) que la matrice  $M - \lambda I_3$  est inversible si et seulement si son système homogène associé est de Cramer, c'est à dire lorsque l'équation  $(M - \lambda I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

admet l'unique solution  $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Or, on a les équivalences :

$$(M - \lambda I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff MX - \lambda X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff MX = \lambda X \iff (S_\lambda).$$

Ainsi, la matrice  $M - \lambda I_3$  est inversible si et seulement si le système  $(S_\lambda)$  est de Cramer.

Le système triangulaire de la question précédente est de Cramer ssi ses coefficients diagonaux sont non-nuls, autrement dit lorsque  $P(\lambda) \neq 0$ .

Conclusion :  $M - \lambda I_3$  est inversible  $\iff P(\lambda) \neq 0 \iff \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{1}{2}, -3\}$ .

(Les racines de  $P$  ont été déterminées en question 7).

10. (a) Au lieu de reprendre  $(S_1)$  depuis le début, prenons plutôt le système triangulaire qui lui est équivalent :

$$(S_1) \iff \begin{cases} x & -y & & = 0 \\ & y & -z & = 0 \\ & & P(1) \cdot z & = 0 \end{cases}$$

Or, puisque  $P(1) = 0$  justement, il nous reste :

$$(S_1) \iff \begin{cases} x & -y & & = 0 \\ & y & -z & = 0 \end{cases} \iff x = y = z.$$

L'ensemble des solutions  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de  $(S_1)$  est donc :  $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ .

Si on impose  $x = 1$ , on obtient la solution particulière  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (b) Un rapide calcul permet de voir que

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  est solution de  $(S_{\frac{1}{2}})$  et  $X = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  est solution de  $(S_{-3})$ .

On définit la matrice  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ , obtenue en "fusionnant" les matrices colonnes susmentionnées.

11. Montrons que  $Q$  est inversible. Pour tout  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , on a les équivalences suivantes :

$$QX = 0 \iff \begin{cases} x + y - 9z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 4y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 9z = 0 \\ y + 12z = 0 \\ 3y + 8z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 9z = 0 \\ y + 12z = 0 \\ -28z = 0 \end{cases}$$

Ce système est triangulaire avec des coefficients diagonaux non-nuls, donc est de Cramer.

Ceci montre que  $Q$  est inversible.

12. On cherche une matrice de la forme  $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$  de sorte que  $MQ = QD$ . Calculons :

$$MQ = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 27 \\ 1 & 1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$QD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & -9c \\ a & 2b & 3c \\ a & 4b & -c \end{pmatrix}$$

On voit donc que  $a = 1$ ,  $b = \frac{1}{2}$ ,  $c = -3$  conviennent. (Encore ces trois valeurs!)

On choisit donc  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ .

13. Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M^n = QD^nQ^{-1}$ .

Initialisation :  $M^0 = I_3$  et  $QD^0Q^{-1} = QI_3Q^{-1} = QQ^{-1} = I_3$  : ok!

Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $M^n = QD^nQ^{-1}$ . Alors :

$$M^{n+1} = MM^n = (MQ)D^nQ^{-1} = (QD)D^nQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1},$$

en utilisant le fait que  $MQ = QD$ . Ceci achève la récurrence.



14. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Rappelons que  $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ .

On a vu en 3.(b) que  $X_n = M^n X_0$ , c'est à dire ici  $X_n = Q D^n Q^{-1} X_0$ .

Puisque  $D$  est une matrice diagonale, on peut calculer  $D^n$  immédiatement. On obtient donc :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} Q^{-1} X_0.$$

Sans chercher à calculer les coefficients de  $Q^{-1}$  ni même de  $X_0$ , on sait que  $Q^{-1} X_0$  sera une certaine matrice colonne avec des valeurs numériques constantes, disons :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Ceci donne :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \cdot (\frac{1}{2})^n \\ c_3 \cdot (-3)^n \end{pmatrix}, \quad \text{avec } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

On peut calculer ce produit avec la matrice  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$  pour obtenir l'expression du coefficient de la dernière ligne  $u_n$  :

$$u_n = c_1 + 4c_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - c_3 \cdot (-3)^n.$$

On a bien montré qu'il existait des constantes  $a, b, c \in \mathbb{R}$  telles que

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\boxed{u_n = a + b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + c \cdot (-3)^n}$ .

- (b) Il faut ici se rappeler que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = P(A_n)$ , donc en particulier  $u_n \in [0, 1]$ .

Raisonnons par l'absurde en supposant que  $c \neq 0$ .

Dans ce cas, il est clair que l'on aura pas  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0, 1]$ . On peut par exemple dire que

$$u_{2n} = a + b \left(\frac{1}{4}\right)^n + c \cdot 9^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pm\infty \quad (\text{en fonction du signe de } c).$$

Contradiction ! Ainsi, on doit avoir  $\boxed{c = 0}$ .

Il en résulte que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = a + b \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

En se rappelant que  $u_0 = 1$ , on a la relation  $a + b = 1$ , donc  $b = 1 - a$ .

Ainsi :  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a + (1 - a) \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ , avec  $a \in \mathbb{R}$ .

### Partie III - Cas d'un jeu à gain moyen nul

On revient à présent au cas général où le joueur reçoit : 
$$\begin{cases} 0\text{€} & \text{avec probabilité } p \\ 2\text{€} & \text{avec probabilité } q \\ 3\text{€} & \text{avec probabilité } r, \end{cases}$$

où  $p, q, r$  sont des réels quelconques de  $]0, 1[$  tels que  $p + q + r = 1$ .

Dans cette partie du problème, on suppose de plus que le gain moyen relatif est nul :  $g = 2q + 3r - 1 = 0$ .

15. (a) On est de retour au cas général, où  $P(X) = rX^3 + qX^2 - X + p$ .
- On note que  $P(1) = r + q - 1 + p = 0$  car  $p + q + r = 1$ . Ainsi, 1 est une racine de  $P$ .
  - De plus,  $P' = 3rX^2 + 2qX - 1$  donc :  $P'(1) = 3r + 2q - 1 = g = 0$  car on a supposé que le gain moyen relatif est nul.
  - Enfin,  $P'' = 6rX + 2q$  donc  $P''(1) = 6r + 2q > 0$  donc  $P''(1) \neq 0$ .
- Conclusion :  $\boxed{1 \text{ est une racine double de } P}$ .

- (b) Puisque 1 est racine double de  $P$ ,  $P$  est divisible par  $(X - 1)^2$ .  
Puisque  $P$  est de degré 3, on peut donc l'écrire sous la forme :

$$P(X) = rX^3 + qX^2 - X + p = (X - 1)^2(aX + b), \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}$$

On peut développer et identifier les coefficients de chaque côté, ou bien remarquer (de tête) que :

- Le coefficient dominant est  $r$ , ce qui impose  $a = r$ .
- Le coefficient constant est  $p$ , ce qui impose  $b = p$ .

On obtient donc :  $P(X) = (X - 1)^2(rX + p)$  c'est à dire  $\boxed{P(X) = r(X - 1)^2(X + \frac{p}{r})}$ .

On en déduit que  $P$  admet la racine simple  $\boxed{\alpha = -\frac{p}{r}}$ .

Vérifions pour finir que  $-\frac{p}{r} < 1$ .

On sait que  $p + q + r = 1$  et  $2q + 3r - 1 = 0$  donc  $p + q + r = 2q + 3r$  et donc  $p = q + 2r > r$ .

Il en résulte que  $\frac{p}{r} > 1$  et donc  $\boxed{\alpha \in ]-1, +\infty[}$ .

16. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $R_n$  le reste dans la division euclidienne de  $X^n$  par  $P$ .

- (a) On doit avoir  $\deg(R_n) < \deg(P)$ , c'est à dire  $\deg(R_n) < 3$ .

Ainsi  $\boxed{R_n \text{ est un polynôme de degré au plus 2}}$ .

On peut donc lui appliquer la  $\boxed{\text{formule de Taylor à l'ordre 2 en 1}}$  pour obtenir :

$$R_n(X) = R_n(1) + R'_n(1)(X - 1) + \frac{R''_n(1)}{2}(X - 1)^2.$$

- (b) La division euclidienne s'écrit :

$$X^n = P(X) Q_n(X) + R_n(X), \text{ où } Q_n \text{ est le quotient (inconnu)}.$$

En évaluant en 1, puisque  $P(1) = 0$ , on obtient  $1^n = R_n(1)$  donc  $\boxed{R_n(1) = 1}$ .

On peut ensuite dériver des deux côtés de l'égalité pour obtenir :

$$nX^{n-1} = P'(X)Q_n(X) + P(X)Q'_n(X) + R'_n(X)$$

En évaluant en 1, puisque  $P(1) = 0$  et  $P'(1) = 0$  (car 1 est racine double de  $P$ ), on obtient :

$$n1^{n-1} = R'_n(1) \text{ et donc } \boxed{R'_n(1) = n}.$$

- (c) En partant à nouveau de l'égalité

$$X^n = P(X) Q_n(X) + R_n(X), \text{ où } Q_n \text{ est le quotient (inconnu)}.$$

on peut évaluer en  $\alpha$  (car  $P(\alpha) = 0$ ) pour obtenir  $\boxed{R_n(\alpha) = \alpha^n}$ .

Or, on a vu qu'on pouvait écrire

$$R_n(X) = R_n(1) + R'_n(1)(X - 1) + C(X - 1)^2, \text{ avec } C = \frac{R''_n(1)}{2}$$

ce qui donne :

$$R_n(X) = 1 + n(X - 1) + C(X - 1)^2.$$

On peut déterminer  $C$  en évaluant ceci en  $\alpha$  :

$$\alpha^n = 1 + n(\alpha - 1) + C(\alpha - 1)^2 \iff C = \frac{\alpha^n - 1 - n(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)^2} \iff C = \frac{1}{(1 - \alpha)^2}(\alpha^n - 1 + n(1 - \alpha)).$$

On a ainsi : 
$$\boxed{R_n(X) = 1 + n(X - 1) + \frac{1}{(1 - \alpha)^2}(\alpha^n - 1 + n(1 - \alpha))(X - 1)^2.}$$

17. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Revenons encore une fois à la division euclidienne :

$$X^n = P(X) Q_n(X) + R_n(X), \text{ où } Q_n \text{ est le quotient (inconnu).}$$

Cette égalité entre polynôme conduit à l'égalité entre matrices carrées :

$$M^n = P(M) Q_n(M) + R_n(M).$$

Or, puisque  $P$  est un polynôme annulateur de  $M$  (vu en question 4.), il reste seulement

$$M^n = R_n(M).$$

En remplaçant avec l'expression de  $R_n(X)$  déterminée précédemment, on trouve :

$$M^n = I_3 + n(M - I_3) + \frac{1}{(1-\alpha)^2} (\alpha^n - 1 + n(1-\alpha)) (M - I_3)^2.$$

Rassemblons les termes différemment :

$$M^n = \left( I_3 - \frac{1}{(1-\alpha)^2} (M - I_3)^2 \right) + \alpha^n \cdot \left( \frac{1}{(1-\alpha)^2} (M - I_3)^2 \right) + n \cdot \left( (M - I_3) + \frac{1}{1-\alpha} (M - I_3)^2 \right).$$

Au final, on peut écrire  $\boxed{M^n = A + \alpha^n \cdot B + n \cdot C}$  avec :

$$\boxed{A = I_3 - \frac{1}{(1-\alpha)^2} (M - I_3)^2}, \quad \boxed{B = \frac{1}{(1-\alpha)^2} (M - I_3)^2}, \quad ; \quad \boxed{C = (M - I_3) + \frac{1}{1-\alpha} (M - I_3)^2}.$$

18. (a) Il faut à nouveau se rappeler que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$  est donné par  $X_n = M^n X_0$ ,

c'est à dire ici :

$$X_n = AX_0 + \alpha^n \cdot BX_0 + n \cdot CX_0$$

Or, les coefficients de la matrice colonne  $X_n$  sont des probabilités, donc sont toujours compris dans  $[0, 1]$  !

On sait que  $\alpha \in ]-1, +\infty[$ , donc le terme  $\alpha^n$  est de signe alterné, et divergent.

Si jamais la matrice colonne  $BX_0$  avait un coefficient non-nul, alors il est clair que pour  $n$  assez grand, l'un des coefficients de  $X_n$  n'appartiendrait pas à  $[0, 1]$ . (Raisonnement similaire à celui détaillé en 14.(b)).

On doit ainsi avoir  $\boxed{BX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ .

Pour la même raison, on doit également avoir  $\boxed{CX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ , sans quoi les coefficients de  $X_n$  ne peuvent pas rester bornés quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

- (b) On vient de voir que  $BX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $CX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ce qui s'écrit :

$$\frac{1}{(1-\alpha)^2} (M - I_3)^2 X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (M - I_3)X_0 + \frac{1}{1-\alpha} (M - I_3)^2 X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La première égalité nous donne  $(M - I_3)^2 X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . La seconde nous apprend alors :

$$(M - I_3)X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i.e } MX_0 - X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc  $\boxed{MX_0 = X_0}$ .

19. En se rappelant que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+1} = MX_n$ , puisque  $MX_0 = X_0$ ,

on conclut par récurrence immédiate que  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, X_n = X_0}$ .

Ceci signifie que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$  et donc en particulier :  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 = 1}$ .

Interprétation : Lorsque le jeu est à gain moyen nul, un joueur qui joue une succession infinie de parties finira presque-sûrement par être ruiné (la proba de finir ruiné est 1), et ce quel que soit son capital de départ !