20

Séries

Nature d'une série

Exercice 1 (Convergente ou pas ?)

Étudier la nature des séries suivantes :

(a) $\sum \frac{1}{n^2+1}$ (b) $\sum \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

(c) $\sum \frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ (d) $\sum \frac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}}$

(e) $\sum \frac{\cos(n)}{n!}$ (f) $\sum \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$

(g) $\sum \frac{\ln(n)}{n^3}$ (h) $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ (i) $\sum \frac{\ln(n)}{n}$

Exercice 2 (Convergente ou pas ? #2)

(a) $\sum \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+n+3}$ (b) $\sum (-1)^n\, ne^{-n}$

(c) $\sum \frac{n+1}{\ln(n)}$ (d) $\sum \frac{\sqrt{n}}{n!}$ (e) $\sum \frac{(-3)^n}{n^n}$

Calcul de sommes

Exercice 3 (Sommes de séries usuelles)

Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme (démarrant à l'indice $n=0$).

(a) $\sum \frac{1}{4^{n+1}}$ (b) $\sum \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$ (c) $\sum \frac{(-2)^{2n+1}}{n!}$

(d) $\sum \frac{(-1)^n e^n}{n!}$ (e) $\sum \frac{2n(n-1)}{3^n}$ (f) $\sum \frac{n^2}{3^n}$

Exercice 4 (D'autres sommes)

Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme (démarrant à l'indice $n=2$).

(a) $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (b) $\sum \frac{1}{n^2-1}$

Indication : chercher $a, b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$

$\frac{1}{(n+1)(n-1)} = \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n-1}$.

Exercice 5 (Séries hyperboliques)

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On pose

$$\forall N \in \mathbb{N},\ S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ et } T_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

1. Montrer que $S_N + T_N$ et $S_N - T_N$ sont les sommes partielles de deux séries usuelles à déterminer.

2. En déduire la convergence des séries $(S_N)_{N\geqslant 0}$ et $(T_N)_{\geqslant 0}$ et la valeur de leurs sommes.

Exercices classiques

Exercice 6 (Critère des séries alternées)

On considère une série de la forme :

$$\forall N \geqslant 0,\ \ S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n$$

où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

1. (a) Montrer que les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(b) En déduire que la série $(S_N)_{N\geqslant 0}$ converge.

2. Application : on considère la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$.

(a) Justifier que cette série est convergente, mais pas absolument convergente.

(b) Pour tout $N \geqslant 0$, en calculant l'intégrale $\int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-t)^n dt$ de deux façons, montrer l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt.$$

(c) Démontrer (rigoureusement) : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

Exercice 7 (Série de Riemann divergente)

Soit $\alpha \in]0,1[$.

1. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$?

2. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $N \geqslant 1$.

3. En déduire l'équivalent : $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Exercice 8 (Série de Riemann convergente)

Soit $\alpha > 1$.

1. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$?

Pour tout $N \geqslant 1$, on note $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ le reste d'ordre N de cette série.

2. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, obtenir l'encadrement : $R_N \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} \leqslant R_N + \frac{1}{N^\alpha}$.

Indication : Encadrer d'abord la somme $\sum\limits_{n=N+1}^{p} \frac{1}{n^\alpha}$ puis envoyer $p \to +\infty$.

3. En déduire un équivalent de R_N quand $N \to +\infty$.

Exercice 9 (Fonction définie par une série)

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, justifier que la série $\sum \frac{1}{2^n + x}$ converge.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n + x}$.

2. Montrer que : $\forall x \geq 0,\ f(2x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{1+2x}$.

3. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

4. En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$, puis la déterminer.

Exercice 10 (Séries de Bertrand)

On appelle "séries de Bertrand" les séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. On suppose $\alpha < 1$.
Montrer que $\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}\right)$.
En déduire que la série diverge.

2. On suppose $\alpha > 1$.
(a) Si $\beta \geqslant 0$, justifier que la série converge.
(b) Si $\beta < 0$, montrer que $\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\alpha'}}\right)$ pour tout $\alpha' \in]1, \alpha[$. En déduire que la série converge.

3. On suppose finalement $\alpha = 1$.
(a) Si $\beta < 0$, justifier que la série diverge.
(b) On suppose $\beta \geqslant 0$. Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t(\ln(t))^\beta}$ sur $]1, +\infty[$.
À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer :

$$\sum \frac{1}{n(\ln(n))^\beta} \text{ converge } \iff \beta > 1.$$

Indication : On s'inspirera fortement de la preuve de la convergence/divergence des séries de Riemann !

Oral HEC 2013

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{x^n}{n}$.

1. (a) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels $\lim_{n \to +\infty} u_n(x) = 0$.

(b) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente.

2. (a) Soit $x \in [-1, 1[$. Calculer $\int_0^x t^{k-1} dt$ pour tout $k \in \mathbb{N}*$, et en déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

(b) Montrer que pour $x \in [-1, 1[$, $\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

(c) En déduire que pour tout $x \in [-1, 1[$, la série $\sum u_n(x)$ est convergente et donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

3. $\left(\textit{Indication pour cette question :} \quad \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{(n+1)(n-1)} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1} \text{ pour certains } a, b \in \mathbb{R}... \right)$

(a) Montrer que la série $\sum \frac{1}{n^2 - 1}$ est convergente et calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

(b) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1[$, la série $\sum \frac{x^n}{n^2 - 1}$ est convergente et calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1}$.

(c) L'application $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1}$ est-elle continue sur $[-1, 1]$?