25

Intégrales sur un intervalle quelconque

Calcul d'intégrales généralisées

Exercice 1 (Calcul direct)
Montrer que les intégrales convergent et les calculer.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^3} dt$ (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$

Exercice 2 (Exploiter la parité)

1. Etudier la parité de $f : x \to \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.
2. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ et la calculer.

Exercice 3 (Intégration par parties)
A l'aide d'intégrations par parties, montrer que les intégrales convergent et calculer leur valeur.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^n} dt$ (pour $n \geqslant 2$)

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t/2} \cos(t)\, dt$ (réaliser 2 IPP)

Exercice 4 (Changement de variable)
A l'aide d'un changement de variable, montrer que les intégrales convergent et calculer leur valeur.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+\ln(t)^2)}$ $(u = \ln(t))$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2-t}} dt$ $\left(u = \dfrac{1}{t}\right)$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\cos^2 t}$ $(u = \tan t)$

Nature d'intégrales généralisées

Exercice 5 (Théorèmes de comparaison)
Déterminer la nature des intégrales suivantes.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ (b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{e^{2x}-1} dx$

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{2x}-1} dx$ (d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^3} dx$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{1/t} dt$ (f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \sin\left(\frac{1}{t^3}\right) dt$ (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\ln(1-t)} dt$ (j) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\exp(\sin t)}{t} dt$

Exercice 6 (Moments gaussiens)
Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge.

Exercice classiques

Exercice 7 (Une intégrale de Bertrand)
Soit $\beta \neq 1$.

1. Déterminer le domaine de définition et une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t|\ln(t)|^\beta}$ sur ce domaine.
2. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{t|\ln(t)|^\beta} dt$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t|\ln(t)|^\beta} dt$

(c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t|\ln(t)|^\beta} dt$

Exercice 8 (Moments exponentiels)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$.

1. Justifier que M_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. (a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = (n+1)M_n$.
(b) En déduire l'expression de M_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 (Reste d'une intégrale convergente)

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. (a) Justifier que $f(x)$ est bien défini pour $x > 0$.
(b) Montrer que $f \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et calculer f'.
2. Justifier (rigoureusement) que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. Justifier (rigoureusement) que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

Exercice 10 (Intégrale du sinus cardinal)

1. (a) Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$,
$\displaystyle\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$
(b). En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.
2. (a) Montrer de même que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ converge.
(b) Montrer : $\forall t \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{2}(1-\cos(2t)) \leqslant |\sin(t)|$.
(c) En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ ne converge pas absolument.

Exercice 11 (Comparaison série/intégrale)

Pour tout $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$.

(Il s'agit de la "fonction zeta de Riemann").

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$.
2. Déduire un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque $x \to 1^+$.

Exercice 12 (Une autre suite d'intégrales)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t(\ln(t))^n dt$.

1. Justifier que I_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = -\dfrac{(n+1)}{2} I_n$.

(b) En déduire l'expression de I_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 (Intégrales à combiner)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+u^n)}, \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{u^n du}{(1+u^2)(1+u^n)}.$$

1. Montrer que I et J convergent.

2. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, montrer que $I = J$.

3. Calculer $I + J$ et en déduire les valeurs de I et J.

EML 2013

1. Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ converge.

On note $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0, +\infty[$, par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

2. Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t} dt$. En déduire : $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$.

3. Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ 0 < f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$. En déduire : $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

4. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ converge et que : $\forall x \in]0; +\infty[,\ \left| f(x) - \dfrac{1}{x} \right| \leqslant \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$.

   Indication : On notera que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} = 1$, *de sorte que* $\dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt$.

   (b) En déduire que : $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

'