Jeudi 22 mai 2025

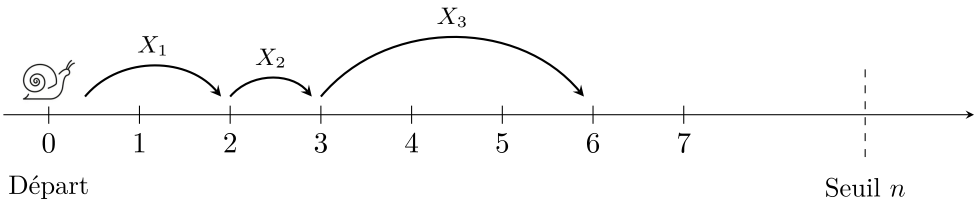
Concours blanc n°2 - Épreuve de maths n°2

L'utilisation de la calculatrice, des feuilles/notes de cours ou d'exercices est interdite.
La présentation, la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation de la copie.
Veillez à encadrer/souligner/surligner vos résultats.

Problème : Trajet en ligne droite d'un escargot stochastique

Contexte

Un escargot part de l'origine et avance en ligne droite en parcourant chaque minute une distance aléatoire. Dans ce problème, on étudiera une modélisation de sa trajectoire, et on s'intéressera en particulier au temps qu'il mettra à franchir un seuil n fixé.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. On modélise le trajet de l'escargot à l'aide des variables aléatoires suivantes :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k est la distance (en cm) parcourue par l'escargot entre la minute $k-1$ et k.
  On considère que chaque déplacement est indépendant des précédents : les variables $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$ est la distance totale parcourue par l'escargot au bout de k minutes.
- T_n est la variable égale au premier instant (en minutes) où l'escargot atteint ou dépasse le seuil n.

Exemple : Si le seuil est placé à $n = 10$ et si les premiers déplacements de l'escargot sont donnés par

$$X_1 = 2,\ X_2 = 1,\ X_3 = 3,\ X_4 = 5,\ X_5 = 2$$

alors on aura $S_1 = 2$, $S_2 = 3$, $S_3 = 6$, $S_4 = 11$, $S_5 = 13$.
On voit donc que l'escargot franchit le seuil $n = 10$ pour la première fois à la 4ème minute : on a $T_{10} = 4$.

Partie I - Déplacements uniformes

On choisit la modélisation suivante pour les déplacements de l'escargot :

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ X_k \text{ suit la loi de probabilité uniforme } \ \mathcal{U}(\llbracket 1, n\rrbracket).$$

Les variables $X_1, X_2, X_3 \dots$ sont ainsi mutuellement indépendantes et suivent chacune la même loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n\rrbracket)$.

1. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, justifier que le support de la variable aléatoire S_k est $\llbracket k, nk\rrbracket$.
   (b) Quel est le support de la variable aléatoire T_n ? Justifier.
2. (a) Calculer $P(T_n = 1)$.
   (b) Montrer que $P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$.
   (c) On suppose ici que $n = 2$. Déterminer la loi de probabilité de T_2 et donner son espérance.
   (d) On suppose ici que $n = 3$. Déterminer la loi de probabilité de T_3 et vérifier que $E(T_3) = \frac{16}{9}$.

On revient à présent au cas général $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé.
   (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1}.
   (b) En utilisant un système complet d'évènements lié à la variable S_k, en déduire que :
   $$\forall i \in [\![k+1, n+k]\!], \quad P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j).$$
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer la formule de Pascal généralisée :
   $$\forall i \geqslant k+1, \quad \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$
5. Etablir, par récurrence sur k, la formule : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \forall i \in [\![k, n+k-1]\!], \ P(S_k = i) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{i-1}{k-1}$.
6. (a) Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, comparer les évènements $[T_n > k]$ et $[S_k < n]$.
   (b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n]\!], \ P(T_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n-1}{k}$.

On suppose que $n \geqslant 2$ et on cherche à présent à déterminer l'espérance et la variance de T_n.
Dans ce but, on introduit la fonction g_n définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \ g_n(x) = E(x^{T_n}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k P(T_n = k)$.

7. (a) Justifier que g_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $(g_n)'(1) = E(T_n)$.
   (b) Interpréter également $(g_n)''(1)$ comme l'espérance d'une autre variable aléatoire.
8. (a) En ré-exprimant $P(T_n = k)$ en termes de probabilités d'inégalités, établir la formule :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \ g_n(x) = 1 + (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k P(T_n > k).$$
   (b) En déduire l'expression : $\forall x \in \mathbb{R}, \ g_n(x) = 1 + (x-1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1}$.
9. (a) Déduire de ce qui précède l'expression de $E(T_n)$ en fonction de n.
   (b) Etablir de même l'expression de la variance : $V(T_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(\dfrac{3n-1}{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right)$.

Partie II - Illustration informatique et convergence en loi

On effectue, en Python, les importations suivantes :

```
import numpy as np ; import numpy.random as rd ; import matplotlib.pyplot as plt
```

Les programmes à compléter doivent être **recopiés en intégralité** sur la copie.

10. (a) Compléter le programme suivant pour que l'appel de `S(k,n)` pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et simule une réalisation de la variable aléatoire S_k.
```
def S(k,n) :
    s = ...
    for i in range( .... ) :
        s = s + ....
    return s
```
   (b) Proposer une autre façon de coder cette fonction, sans utiliser de boucle.
11. Compléter le programme suivant pour que l'appel de `T(n)` pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ simule le trajet de l'escargot et renvoie une réalisation de la variable aléatoire T_n.
```
def T(n) :
    S = ... ; T = ...
    while ... :
        S = S + ...
        T = T + 1
    return T
```

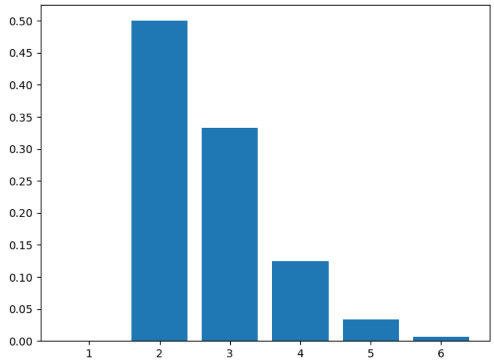
12. Soit Z une variable aléatoire discrète de support $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z = k) = \dfrac{k-1}{k!}$.
    (a) Vérifier que cette loi de probabilité a bien un sens.
    (b) Compléter le programme suivant pour que l'appel de `loi_Z(n)` pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ renvoie un vecteur contenant les n valeurs $(P(Z = k))_{k \in [\![1,n]\!]}$.

```
def loi_Z(n) :
    V = ...
    for k in range( ... ) :
        factorielle = ...
        V[k-1] = (k-1) / factorielle
    return V
```

13. (a) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.
    (b) Montrer que Z admet une variance et la calculer.

A l'aide de la fonction `loi_Z`, et des instructions qui suivent, on affiche le diagramme en bâton ci-contre.

```
X = range(1,7) ; Y = loi_Z(6)
plt.bar(X,Y); plt.show()
```



14. (a) A partir de la formule du 6.(b), établir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(T_n > k) = \dfrac{1}{k!}$.
    (b) Montrer que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Z quand n tend vers l'infini, c'est à dire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(T_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} P(Z = k).$$

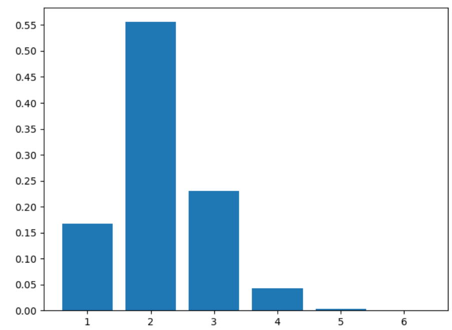
On propose, pour finir, la fonction suivante, qui fait appel à la fonction `T` définie en question 11 :

```
def frequences(n) :
      V = np.zeros(n)
      for k in range( 10**6 ) :
            j = T(n)
            V[j-1] = V[j-1] + 1
      V = V / 10**6
      return V
```

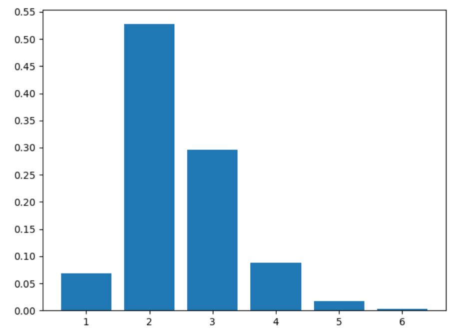
On ajoute, à la suite, les instructions suivantes :

```
n = 6 ; V = frequences(n)
X = range(1,7) ;  Y = V[0:5]
plt.bar(X,Y) ; plt.show()
```

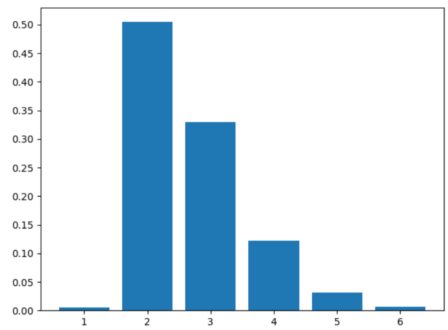
On recommence avec les valeurs `n = 15`, puis `n = 200` pour obtenir les trois diagrammes en bâton :



$n = 6$



$n = 15$



$n = 200$

15. (a) Expliquer le fonctionnement de la fonction `frequences`. Comment interpréter le vecteur `V` renvoyé ? On détaillera en particulier les valeurs contenues dans `V[0]`, `V[1]`, etc.
    (b) Expliquer en quoi les figures obtenues illustrent la convergence en loi établie en 14.(b).

Partie III - Modélisation de la flemme

Dans cette dernière partie, on choisit de raffiner le modèle en autorisant l'escargot à rester immobile. On adopte les notations suivantes :

- $n \geqslant 2$ est toujours un entier fixé.
- On note maintenant X'_k la distance parcourue entre la minute $k-1$ et k, et on suppose que :

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \ X'_k \text{ suit la loi de probabilité uniforme } \ \mathcal{U}(\llbracket 0, n-1 \rrbracket).$$

- On note maintenant $S'_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X'_i$ la distance totale parcourue par l'escargot au bout de k minutes.
- On note maintenant T'_n le premier instant où l'escargot atteint ou dépasse le seuil n.

16. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, quel est maintenant le support de la variable aléatoire S'_k ?

    (b) Justifier que T'_n n'est plus une variable aléatoire finie.

    Si l'escargot ne franchit jamais le seuil n, on considère que $T'_n = +\infty$.

    Le support est ainsi $(T'_n)(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(T'_n = k) + P(T'_n = +\infty) = 1$.

17. On suppose dans cette question que $n = 2$.
    Reconnaître, dans ce cas, la loi de probabilité de S'_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On revient à présent au cas général $n \geqslant 2$.

18. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé.

    (a) Montrer que X'_k a la même loi que $X_k - 1$
    (où X_k est la variable définie dans le modèle de la Partie I).

    (b) En déduire un lien entre les lois de S'_k et S_k (définie en Partie I) puis la formule :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \ P(S'_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{k-1+i}{k-1}.$$

19. En reproduisant le raisonnement de la question 6., montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ P(T'_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{k+n-1}{k}.$$

20. (a) Démontrer que $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} P(T'_n > k) = 0$.

    (b) En déduire que $P(T'_n = +\infty) = 0$.
    Qu'est-ce que cela signifie pour l'escargot stochastique flemmard ?

21. Montrer que $(T'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge toujours en loi vers Z quand n tend vers l'infini.
    (Définition donnée en question 14.(b))

$\star\star\star$ Fin du sujet $\star\star\star$

r/AskReddit

You and a super intelligent snail both get 1 million dollars, and you both become immortal, however you die if the snail touches you. It always knows where you are and slowly crawls toward you. What's your plan ?