11

Espaces probabilisés finis

1 Évènements

1.1 Expérience, univers, évènements

Définition 1 (Expérience aléatoire)

Une expérience aléatoire (ou épreuve aléatoire) est une expérience dont les résultats dépendent du hasard.

Exemples

• On lance un dé à 6 faces et on note le nombre obtenu.

• Une urne contient 3 boules bleues, 1 boule verte et 2 boules rouges. On tire une boule au hasard et on note la couleur de la boule.

Définition 2 (Univers)

L'univers Ω est l'ensemble de tous les résultats observables (i.e des résultats possibles).

Exemples

• Pour le lancer d'un seul dé à 6 face : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

• Pour le tirage d'une seule boule dans une urne : $\Omega = \{bleu, vert, rouge\}$.

Remarque 1

Lorsque, dans un énoncé, on décrit une expérience aléatoire, l'univers Ω est souvent sous-entendu !

Bien-sûr, c'est l'expérimentateur qui décide, en fonction de ses préoccupations, de ce qu'est un résultat. Lorsque l'on lance un dé, on pourrait ne pas s'intéresser au numéro de sa face supérieure lorsqu'il est retombé mais à la parité de ce nombre, ou même s'intéresser plutôt à l'endroit où le dé est retombé !

Définition 3 (Évènement)

• On appelle "évènement" l'ensemble des résultats réalisant une proposition donnée.

Ainsi, un évènement A est une partie de Ω .

L'ensemble des évènements est donc $\mathcal{P}(\Omega)$.

• On dit qu'un évènement A est réalisé lorsque le résultat de l'expérience appartient à A.

Dans le langage courant (et celui des énoncés), un évènement est en général exprimé comme une "proposition en français". Il faut être capable de passer d'une description en français à une partie de Ω (et inversement).

Exercice 1

1. On lance un dé à 6 faces. L'univers associé à cette expérience est : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(a) Décrire l'évènement $A =$ "Le nombre obtenu est 6".

(b) Décrire l'évènement $B =$ "Le nombre obtenu est pair".

2. On tire une boule dans une urne contenant des boules bleues, vertes et rouges.
L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{bleu, vert, rouge\}$.
Décrire l'évènement $C =$ "La boule tirée n'est pas rouge".

1. (a) $A =$ "Le nombre obtenu est 6" c'est à dire $A = \{6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$.
(b) $B =$ "Le nombre obtenu est pair" c'est à dire $B = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$.
2. $C =$ "La boule tirée n'est pas rouge" c'est à dire $B = \{bleu, vert\} \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 4 (Quelques évènements particuliers)

- L'évènement $\emptyset \in \mathcal{P}(\Omega)$ est l'**évènement impossible**. Il ne se réalise jamais.
- L'évènement $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$ est l'**évènement certain**. Il est toujours réalisé.
- Un évènement de cardinal 1 (un singleton) est appelé **évènement élémentaire**.

Exemples

Pour le lancer de dé $(\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$:

- "Le nombre obtenu est supérieur à 7"$= \emptyset$.
- "Le nombre obtenu est inférieur ou égal à 6"$= \Omega$.
- Les évènements élémentaires sont : $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$.

Pour le tirage dans l'urne $(\Omega = \{bleu, vert, rouge\})$:

- "La boule tirée est jaune"$= \emptyset$.
- "La boule tirée est rouge ou verte ou bleue"$= \Omega$.
- Les évènements élémentaires sont : $\{bleu\}, \{vert\}, \{rouge\}$.

1.2 Opérations sur les évènements

On vient de voir qu'un évènement, s'il est souvent exprimé au travers d'une phrase en français, n'est en fait rien de plus qu'une partie de Ω ! Les opérations usuelles sur les parties d'un ensemble (inclusion, union, intersection, complémentaire...) ont dans ce cadre probabiliste une interprétation particulière.

Définition 5 (Inclusion et évènements)

Soient A et B deux évènements.

L'inclusion $A \subset B$ signifie que tout résultat favorable à A est également favorable à B.
Autrement dit $A \subset B$ signifie : la réalisation de A implique la réalisation de B.
Pour cette raison, on dit parfois aussi que "A implique B".

Exemple

Pour le lancer de dé : considérons $A =$ "Le résultat est 2 ou 4" et $B =$ "Le résultat est pair".
On a bien $A = \{2, 4\} \subset \{2, 4, 6\} = B$. La réalisation de A implique celle de B.

Définition 6 (Union, intersection et logique)

Soient A et B deux évènements.

- L'**évènement contraire** $\overline{A} = \Omega \setminus A$ est réalisé lorsque A ne l'est pas.
- La réunion $A \cup B$ est réalisé lorsque A ou B est réalisé (<u>ou inclusif !</u>).
- L'intersection $A \cap B$ est réalisé lorsque A et B sont réalisés.

Ceci se généralise aux unions et intersections d'un nombre quelconque d'évènements :

- La réunion $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est réalisé lorsque au moins l'un des A_i est réalisé.
- L'intersection $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ est réalisé lorsque tous les A_i sont réalisés.

Remarque 2

On retrouve les correspondances naturelles : $\boxed{\overline{A} \longleftrightarrow \text{"non"}}$ $\boxed{\bigcup \longleftrightarrow \text{"ou"}}$ $\boxed{\bigcap \longleftrightarrow \text{"et"}}$

Rappelons à ce sujet les lois de Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exemples

Pour le lancer de dé : $A =$ " Le résultat est pair" et $B =$ "Le résultat est supérieur ou égal à 3".

- $\overline{A}$= "Le résultat obtenu est impair"
- $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ et $A \cap B = \{4, 6\}$.

Définition 7 (Évènements incompatibles)

Deux évènements A et B sont dits **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$.
(c'est à dire que ce sont des parties disjointes de Ω)

Cela signifie : A et B ne peuvent pas être réalisés en même temps.

Exemple

Pour le lancer de dé : $A =$ "Le résultat est pair" et $B =$ "Le résultat est 3" sont incompatibles :
$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{3\} = \emptyset$.

Méthode : Exprimer un évènement en fonction d'"évènements fondamentaux".

Quand un énoncé décrit en français une expérience aléatoire, il est souvent utile d'introduire des évènements "fondamentaux", dont les probabilités d'occurence sont faciles à déterminer, et à partir desquels on pourra exprimer tous les autres.

Parfois l'énoncé introduit lui-même ces évènements.

Parfois, c'est au lecteur (vous) de les repérer et de les introduire spontanément !

Exercice 2

On joue n fois à Pile ou Face avec une pièce de monnaie ($n \geqslant 3$).
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on note $F_i =$ "Obtenir Face au i-ème lancer".
Traduire les événements suivants à l'aide des F_i.
(a) N'obtenir que des Faces. (b) Obtenir au moins un Pile.
(c) Obtenir Pile aux deux premiers tirages, puis n'obtenir que des Faces.
(d) Obtenir Pile pour la première fois au k-ième lancer ($k \geqslant 2$).

(a) $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. (b) $\overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_n} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}$

(c) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n$. (d) $A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k}$.

1.3 Système complet d'évènements

Pour finir, il est très souvent utile de "partitionner" l'univers des possibles Ω, c'est à dire de l'écrire comme une union d'ensembles deux à deux disjoints. En pratique, cela correspond à effectuer une "disjonction de cas" (cf. formule des probabilités totales, plus loin).

Définition 8 (Système complet d'évènements (S.C.E))

Une famille d'évènements $(A_1, \ldots, A_n)$ forme un **système complet d'évènements** lorsque :

$\boxed{1}$ Ils sont **deux à deux incompatibles** : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ (i \neq j) \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

$\boxed{2}$ Leur réunion donne Ω tout entier : $\Omega = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Cela revient à dire : Quelle que soit l'issue de l'expérience, un et un seul des A_i est réalisé.

Exemple

Pour le lancer de dé $(\Omega = \{1,2,3,4,5,6\})$:

- $A =$ "Le nombre obtenu est pair $= \{2{,}4{,}6\}$" et $\overline{A} =$ "Le nombre obtenu est impair" $= \{1,3,5\}$.

Alors $(A, \overline{A})$ est un système complet d'évènements. En effet : $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$

<u>Ou, plus simplement :</u> quelle que soit l'issue, soit A soit $\overline{A}$ est réalisé.

- Posons pour tout $k \in [\![1,6]\!]$, $A_k =$ "Le nombre obtenu est k" $= \{k\}$.

Alors $(A_1, \ldots, A_6)$ est un système complet d'évènements. En effet :

Pour $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \{i\} \cap \{j\} = \emptyset$ et $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{6} A_i = \{1\} \cup \ldots \cup \{6\} = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$.

<u>Ou, plus simplement :</u> quelle que soit l'issue, un et un seul des A_i est réalisé.

Remarques 3

- Si A est un évènement, alors $(A, \overline{A})$ est toujours un système complet d'évènements.
- L'ensemble des éléments élémentaires de Ω est toujours un système complet d'évènements.

2 Probabilités

2.1 Espace probabilisé fini

Étant donnée une expérience aléatoire décrite dans un énoncé, on dispose ainsi de :

- Ω l'univers, c'est à dire l'ensemble (fini) des résultats possibles.
- $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des évènements que l'on peut considérer.

On souhaite maintenant munir tout cela d'une probabilité, c'est à dire d'une application qui à n'importe quel évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ lui associe la probabilité $P(A) \in [0,1]$ qu'il se réalise.

Définition 9 (Probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$, espace probabilisé fini)

Soit Ω un ensemble fini (l'univers d'une expérience aléatoire).

Une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est une application $\boxed{P : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(A) \end{array}}$ satisfaisant les propriétés :

$\boxed{1}$ **Additivité :** Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$, $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

$\boxed{2}$ **Proba de l'évènement certain :** $\boxed{P(\Omega) = 1}$

Lorsque Ω est un ensemble fini, et P est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$,
on dit que le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un **espace probabilisé fini.**

La propriété d'additivité d'une probabilité se généralise naturellement à une union quelconque d'évènements :

Proposition 1 (Additivité généralisée)

Soit Ω un ensemble fini et P une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$. Alors pour tout $n \geqslant 2$:

Si $A_1, \dots, A_n$ sont des évènements deux à deux incompatibles, $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Preuve rapide :

- Le résultat est vrai pour $n = 2$ par la propriété d'additivité $\boxed{1}$.
- Si le résultat est vrai au rang n, alors pour $A_1, \dots, A_{n+1}$ deux à deux incompatibles,

On note que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et A_{n+1} sont incompatibles : $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1}) = \bigcup_{i=1}^{n} \emptyset = \emptyset$.

Donc, d'après la propriété d'additivité $\boxed{1}$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \,\cup\, A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i)$$

$\square$

En particulier, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 1 (Somme des probabilités pour un S.C.E)

Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'évènement. Alors : $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Preuve :

Par définition d'un S.C.E, on a $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ et cette union est disjointe.

On a donc $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(\Omega)$, c'est à dire, par additivité : $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$. $\square$

Donnons quelques exemples de construction d'espaces probabilisés :

Exemple

On lance un pièce et on observe le résultat obtenu.

- Univers : $\Omega = \{pile, face\}$. • Ensemble des évènements : $\mathcal{P}(\Omega) = \Big\{\emptyset, \{pile\}, \{face\}, \Omega\Big\}$.

Si la pièce est équilibrée, la probabilité $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ modélisant l'expérience est donnée par :

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\{pile\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{face\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\Omega) = 1.$$

Si la pièce est "biaisée", notant $p \in [0,1]$ d'obtenir pile, on choisirait plutôt :

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\{pile\}) = p, \quad P(\{face\}) = 1-p, \quad P(\Omega) = 1.$$

Exemple

On tire une boule dans une urne contenant 3 boules bleues, 1 boule verte et 2 boules rouges.

- Univers : $\Omega = \{bleu, vert, rouge\}$.
- Ensemble des évènements : $\mathcal{P}(\Omega) = \Big\{\emptyset, \{bleu\}, \{vert\}, \{rouge\}, \{bleu, vert\}, \{bleu, rouge\}, \{vert, rouge\}, \Omega\Big\}$

On souhaite introduire la probabilité $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ modélisant cette expérience.
Il faudrait donc définir $P(A)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, c'est à dire pour les $2^3 = 8$ évènements...

En fait, ce n'est pas nécessaire : **il suffit de définir la probabilité des évènements élémentaires !**

Dans notre cas, l'urne contenant $3+1+2 = 6$ boules au total, l'énoncé nous informe que :

$$P(\{bleu\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(\{vert\}) = \frac{1}{6} \quad P(\{rouge\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

À partir de là, on peut calculer la probabilité de n'importe quel évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ en utilisant la propriété d'additivité $\boxed{1}$ (généralisée). Par exemple :

$$P(\{bleu, rouge\}) = P(\{bleu\} \cup \{rouge\}) = P(\{bleu\}) + P(\{rouge\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Ainsi, lorsque Ω est fini, une probabilité P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est en fait totalement déterminée par la donnée des probabilités des évènements élémentaires :

Théorème 1 (Probabilités sur un ensemble fini)

Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un ensemble fini (l'univers d'une expérience aléatoire).

Soient $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ satisfaisant : $\quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i \geqslant 0 \quad$ et $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Alors il existe une unique probabilité P sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(\{\omega_i\}) = p_i$.

Précisément, cette probabilité est donnée par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(A) = \sum_{i \text{ tel que } \omega_i \in A} p_i.$$

Preuve :

- Analyse : Soit P une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ satisfaisant $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(\{\omega_i\}) = p_i$.

Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Puisque $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, A s'écrit sous la forme :

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_q}\} \ \text{ où } q = Card(A) \ \text{ et } \ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_q \leqslant n.$$

On a ainsi : $P(A) = P(\{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_q}\}) = P\left(\bigcup_{k=1}^{q} \{w_{i_k}\}\right) = \sum_{k=1}^{q} P(\{\omega_{i_k}\}) = \sum_{k=1}^{q} p_{i_k} = \sum_{i \text{ tel que } \omega_i \in A} p_i.$

• Synthèse : On pose $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\quad P(A) = \sum_{i \text{ tel que } \omega_i \in A} p_i$. Vérifions que P est bien une probabilité :

$\boxed{0}$ Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega),\quad 0 \leqslant \sum_{i \text{ tel que } \omega_i \in A} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ donc $P(A) \in [0, 1]$.

$\boxed{1}$ Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \emptyset$ on a : $\omega \in A \cup B \Longleftrightarrow (\omega \in A$ ou bien $\omega \in B)$.

Donc : $P(A \cup B) = \sum_{i \text{ tel que } \omega_i \in A \cup B} p_i = \sum_{i \text{ tel que } \omega_i \in A} p_i + \sum_{i \text{ tel que } \omega_i \in B} p_i = P(A) + P(B).$

$\boxed{2}$ $P(\Omega) = \sum_{i \text{ tel que } \omega_i \in \Omega} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$ □

2.2 Calcul de probabilités

Proposition 2 (Probabilité du complémentaire)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Pour tous évènements A et B,

(a) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$. En particulier, si $B \subset A$: $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$

(b) Si $B \subset A$, alors $P(B) \leqslant P(A)$.

(c) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ *(d)* $P(\emptyset) = 0$.

Preuve :

(a) On écrit $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

Cette union est disjointe, donc : $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$ i.e $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Si $B \subset A$ alors $A \cap B = B$ et on obtient $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

(b) Si $B \subset A$, on peut écrire $A = B \cup (A \setminus B)$.

Cette union est disjointe, donc : $P(A) = P(B) + P(A \setminus B) \geqslant P(B)$.

(c) $P(\overline{A}) = P(\Omega \setminus A) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$.

(d) $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$. □

Proposition 3 (Probabilité d'une union : formule du crible de Poincaré)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Pour tous évènements A, B et C,

• $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

• $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Preuve du premier point :

On écrit $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.

Ces unions sont disjointes, donc : $P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B)$

ce qui donne, avec la proposition précédente :

$$P(A \cup B) = (P(A) - P(A \cap B)) + (P(B) - P(B \cap A)) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

□

Remarque 4

On n'a pas de formule pour $P(A\cap B)$ en général... On n'a pas toujours $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$!

Cette formules est vraie seulement lorsque A et B sont des évènements indépendants (cf. plus loin).

2.3 Situation d'équiprobabilité

Dans un bon nombre d'énoncés de probabilités, si l'univers Ω décrivant l'ensemble (fini) des résultats observables est bien choisi (i.e bien adapté à l'expérience aléatoire), on sera en situation d'**équiprobabilité**, c'est à dire que **chaque résultat a la même chance d'advenir** !

Exemples

- Pour un lancer de dé ($\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$) :

Si le dé n'est pas pipé (i.e il est équilibré), chaque résultat a la même probabilité d'advenir :

$$P(\{1\})=P(\{2\})=P(\{3\})=P(\{4\})=P(\{5\})=P(\{6\})=\frac{1}{6}.$$

- Pour un tirage dans une urne contenant des boules bleues, vertes et rouges ($\Omega=\{bleu, vert, rouge\}$) :

Si l'urne contient le même nombre de boules bleues, vertes, rouges, chaque résultat a la même probabilité d'advenir :

$$P(\{bleu\})=P(\{vert\})=P(\{rouge\})=\frac{1}{3}.$$

Définition 10 (Équiprobabilité)

Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ un espace probabilisé fini. On note l'univers $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$.

On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque tous les évènements élémentaires ont même probabilité :

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\quad P(\{\omega_i\})=P(\{\omega_j\}).$$

En cas d'équiprobabilité, la probabilité $P:\mathcal{P}(\Omega)\to[0,1]$ est entièrement déterminée :

Théorème 2 (Probabilité uniforme)

Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ un espace probabilisé fini. On note l'univers $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$.

On suppose qu'il y a équiprobabilité. Alors :

- La probabilité d'un évènement élémentaire est : $\forall i\in[\![1,n]\!],\quad P(\{\omega_i\})=\dfrac{1}{Card(\Omega)}$.
- Plus généralement, pour tout évènement $A\in\mathcal{P}(\Omega)$: $\quad P(A)=\dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

Cette probabilité est alors appelée **probabilité uniforme** sur Ω.

Preuve :

- Puisqu'il y a équiprobabilité, on sait que $P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\ldots=P(\{\omega_n\})$.

De plus, $P(\Omega)=P(\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\ldots\cup\{\omega_n\})=P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})+\ldots+P(\{\omega_n\})=1$.

Cela donne donc $n\times P(\{\omega_1\})=1$, c'est à dire $P(\{\omega_1\})=\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{Card(\Omega)}$.

Ainsi, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\quad P(\{\omega_i\})=\dfrac{1}{Card(\Omega)}$.

- Puisque $\Omega=\{\omega_1,\dots\omega_n\}$, tout évènement A s'écrit sous la forme :

$$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\dots,\omega_{i_q}\}\ \text{ où } q=Card(A)\ \text{ et }\ 1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_q\leqslant n.$$

On a ainsi :

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^{q}\{\omega_{i_k}\}\right) = \sum_{k=1}^{q} P(\{\omega_{i_k}\}) = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{Card(\Omega)} = \frac{1}{Card(\Omega)} \times q = \frac{Card(A)}{Card(\Omega}.$$

□

Grâce au Théorème précédent, un bon nombre d'exercices de probabilités se ramènent en fait à des exercices de **dénombrement** : en situation d'équiprobabilité, calculer une probabilité revient à calculer un cardinal !

Méthode : (Calculer des probabilités en situation d'équiprobabilité)

$\boxed{1}$ Annoncer qu'on a équiprobabilité. (en précisant éventuellement l'univers Ω associé l'expérience).

$\boxed{2}$ La probabilité d'un évènement A est alors donnée par $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$, autrement dit :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de résultats favorables}}{\text{Nombre de résultats possibles}}.$$

(le mot "favorable" signifiant ici "qui réalise A".)

Exercice 3

Pour chacune des expériences aléatoires suivantes, calculer la probabilité des évènements introduits.

1. On lance un dé à 6 faces équilibré.
$A =$ "On obtient un nombre pair".

2. On lance deux dés à 6 faces équilibrés.
$A =$ "On obtient deux nombre impairs". $B =$ "La somme des deux dés donne 4".

3. On tire, sans remise, 3 boules dans une urne qui contient $n \geqslant 3$ boules numérotées de 1 à n.
$A =$ "On obtient la boule n°1".

1. $\Omega = [\![1, 6]\!]$. On a équiprobabilité.

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de résultats donnant un nombre pair}}{\text{Nombre de résultats possibles}} = \frac{Card(\{2,4,6\})}{Card(\{1,2,3,4,5,6\})} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. $\Omega = \Big\{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [\![1, 6]\!],\, x_2 \in [\![1, 6]\!]\Big\} = [\![1, 6]\!]^2$. On a équiprobabilité.

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de résultats donnant 2 nombres pairs}}{\text{Nombre de résultats possibles}} = \frac{3 \times 3}{6 \times 6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

$$P(B) = \frac{\text{Nombre de résultats où la somme vaut 4}}{36} = \frac{Card(\{(1,3),(2,2),(3,1)\})}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

3. $\Omega = \Big\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in [\![1, n]\!],\ \text{2 à 2 distincts}\Big\}$. On a équiprobabilité.

$$\begin{aligned} P(A) = 1 - P(\overline{A}) &= 1 - \frac{\text{Nombre de résultats où on n'obtient pas la boule n°1}}{\text{Nombre de résultats possibles}} \\ &= 1 - \frac{(n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{n \times (n-1) \times (n-2)} = 1 - \frac{n-3}{n} = \frac{3}{n}. \end{aligned}$$

Attention !

Ce raisonnement (probabilité uniforme) fonctionne **uniquement s'il y a équiprobabilité** !

Exemple : On tire une boule dans urne contenant 2 boules bleues, 1 boule verte et 3 boules rouges.

$$\frac{\text{Nombre de résultat où on tire la boule rouge}}{\text{Nombre de résultats possibles}} = \frac{1}{3} \quad \text{mais il est clair que} \quad P(\{rouge\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}.$$

3 Probabilité conditionnelle

3.1 Définition et calcul

Définition 11 (Probabilité de B "sachant A")

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soit A un évènement tel que $P(A) \neq 0$.

Pour tout évènement B, on pose $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

$P_A(B)$ s'interprète naturellement comme la probabilité que l'évènement B soit réalisé, si l'on sait que l'évènement A est réalisé.

Exercice 4

"Paradoxe" des enfants.

Deux parents discutent devant une école.

Parent 1 : J'attends mon enfant.

Parent 2 : J'attends mes deux enfants. L'un d'entre eux est un garçon !

En supposant qu'un enfant a une chance sur deux d'être un garçon ou une fille, lequel des deux parents a le plus de chance d'avoir une fille ?

- Parent 1 : L'ensemble des résultats possibles pour l'enfant du parent 1 est : $\Omega = \{G, F\}$

On est en situation d'équiprobabilité.

La probabilité que le parent 1 ait une fille est ainsi $P(\{F\}) = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

- Parent 2 : Il a deux enfant, notés (E_1, E_2), E_1 désignant l'aîné et E_2 le cadet.

L'ensemble des résultats possibles pour les enfants du parent 2 est :

$$\Omega = \{(G, G), (G, F), (F, G), (F, F)\}$$

On est encore en situation d'équiprobabilité.

L'évènement $A =$ "Avoir un garçon" s'écrit $A = \{(G, G), (G, F), (F, G)\}$.
L'évènement $B =$ "Avoir une fille" s'écrit $B = \{(G, F), (F, G), (F, F)\}$.
Notons que $A \cap B = \{(G, F), (F, G)\}$.

La probabilité que le Parent 2 ait une fille est $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Comme P est la probabilité uniforme, $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)}$.

En remplaçant, on obtient donc $P_A(B) = \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(A)} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$.

C'est donc (surprenamment !) le Parent 2 qui a le plus de chance d'avoir une fille !

Remarque 5

Dans le cas d'**équiprobabilité**, lorsque P est donc la **probabilité uniforme**, on note que :

$$P_A(B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)}.$$

Proposition 4 (Probabilité conditionnelle)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soit A un évènement tel que $P(A) \neq 0$.

L'application $P_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ B & \mapsto & P_A(B) \end{array}$ est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

On l'appelle **probabilité conditionnelle "sachant A".**

Preuve :

On rappelle que pour tout évènement B, $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$. On vérifie donc que :

$\boxed{0}$ Pour tout évènement B, $A \cap B \subset A$ donc $P(A \cap B) \leqslant P(A)$ et donc $P_A(B) \in [0,1]$.

$\boxed{1}$ Pour tous évènements B_1 et B_2 incompatibles, $A \cap B_1$ et $A \cap B_2$ sont incompatibles, donc

$$\begin{aligned} P_A(B_1 \cup B_2) &= \frac{P(A \cap (B_1 \cup B_2))}{P(A)} = \frac{P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2))}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} + \frac{P(A \cap B_2)}{P(A)} = P_A(B_1) + P_A(B_2). \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $P_A(\Omega) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1.$ □

Ainsi, puisque $P_A : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ est elle-même une probabilité, les règles de calcul des Propositions 1, 2, 3 s'appliquent également aux probabilités conditionnelles ! Rappelons brièvement les règles essentielles :

Corollaire 2 (Calcul avec des probabilités conditionnelles)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soit A un évènement tel que $P(A) \neq 0$.

- Si $B_1, ..., B_p$ sont des évènements deux à deux incompatibles, $P_A\left(\bigcup_{i=1}^{p} B_i\right) = \sum_{i=1}^{p} P_A(B_i)$.

Pour tous évènements B et C :

- $P_A(B \setminus C) = P_A(B) - P_A(B \cap C)$.
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$.
- $P_A(\emptyset) = 0$.
- $P_A(A) = 1$.
- $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$

Remarque 6

Puisque $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, on peut aussi écrire : $\boxed{P(A \cap B) = P(A)\, P_A(B)}$

Cette formule se révèle souvent utile pour calculer $P(A \cap B)$.

Exercice 5

Quand vient l'hiver, 70% des écoliers attrapent froid.
Parmi ceux-ci, seul 60% développent les symptômes du rhume.

Quelle proportion des écoliers échappe au rhume ?

Notant $A=$ "Prendre froid" et $B=$ "Avoir le rhume", on sait que : $P(A)=70\%\quad P_A(B)=60\%$
Puisque $B\subset A$, la probabilité qu'un écolier attrape le rhume est

$$P(B)=P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=\frac{70}{100}\times\frac{60}{100}=42\%$$

donc la proportion des écoliers qui échappent au rhume est $P(\overline{B})=1-P(B)=58\%$.

3.2 Trois formules à maîtriser !

Proposition 5 ("La plus importante" : Formule des probabilités totales)

Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ un espace probabilisé fini.

Soit $(A_1,\ldots,A_n)$ un système complet d'évènements.

Pour tout évènement B, $\quad P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i\cap B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P_{A_i}(B)$

(avec la convention $P_{A_i}(B)=0$ si jamais $P(A_i)=0$ dans cette formule)

Preuve :

Puisque $(A_1,\ldots,A_n)$ est un S.C.E, on a $\Omega=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ et cette union est disjointe.

Ainsi, pour tout évènement B, on peut écrire :

$$B=\Omega\cap B=\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\cap B=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap B)\quad\text{et cette union est disjointe}$$

(en effet, pour $i\neq j,\quad (A_i\cap B)\cap(A_j\cap B)=(A_i\cap A_j)\cap B=\emptyset\cap B=\emptyset$).
Par additivité, on en déduit :

$$P(B)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap B)\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i\cap B)$$

Enfin comme $P(A_i\cap B)=P(A_i)P_{A_i}(B)$ par définition, on peut aussi écrire :

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P_{A_i}(B).$$

□

Remarque 7

Cette formule correspond en quelque sorte à une **"disjonction de cas"**.
Après avoir repéré un système complet d'évènements $(A_1,\ldots,A_n)$ opportun,
(c'est à dire que quelle que soit l'issue de l'expérience aléatoire, un et un seul des A_i est réalisé)

- Si on connait $P(A_1),P(A_2),\ldots P(A_n)$
- Si dans chacun des différents cas où $A_1,A_2,\ldots,A_n$ est réalisé, on connait la probabilité que B se réalise (c'est à dire $P_{A_i}(B)$)

alors on peut déterminer $P(B)$! Ceci peut aussi se comprendre sur un "arbre de probabilités".

Dessin :

Exercice 6

On dispose de 6 urnes, contenant chacune 7 boules :

- L'urne n°1 contient 1 boule blanche et 6 boules noires.
- L'urne n°2 contient 2 boules blanches et 5 boules noires.

$\vdots$

- L'urne n°6 contient 6 boules blanches et 1 boule noire.

Un joueur lance un dé à 6 face équilibré, puis tire un boule au hasard dans l'urne portant le numéro obtenu. Si la boule tirée est blanche, il gagne, sinon il perd.

Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

On introduit les évènements :

$$A_i = \text{"Obtenir le numéro } i \text{ au lancer de dé" (pour } i \in [\![1,6]\!]) \quad \text{et } B = \text{"Tirer la boule blanche".}$$

$(A_1, \ldots, A_6)$ est un système complet d'évènements :un et un seul des A_i est réalisé quelle que soit l'issue de l'expérience.

D'après l'énoncé, pour tout $i \in [\![1,6]\!]$:

- $P(A_i) = \dfrac{1}{6}$.
- $P_{A_i}(B) = \dfrac{\text{Nombre de boules blanches dans l'urne n°i}}{\text{Nombre de boules dans l'urne n°i}} = \dfrac{i}{7}$.

D'après la formule des probabilités totales, la probabilité de gagner est donc :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i)P_{A_i}(B) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \times \frac{i}{7} = \frac{1}{6\times 7}\sum_{i=1}^{6} i = \frac{1}{6\times 7} \times \frac{6\times 7}{2} = \frac{1}{2}.$$

Le joueur a 50% de chances de gagner.

Proposition 6 (Pour "remonter le temps" : Formule de Bayes)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.

Soient A et B deux évènements de probabilité non nulle. Alors : $\quad P_B(A) = \dfrac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$.

Preuve :

C'est évident puisque $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ donc par définition

$$P_B(A) = \frac{P(B\cap A)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$

$\square$

Remarque 8

Cette formule est utile quand on connaît $P_A(B)$, et que l'on souhaite au contraire calculer $P_B(A)$.

Exercice 7

On reprend le jeu précédent avec les 6 urnes.

Après avoir lancé le dé et tiré une boule dans l'urne correspondante, le joueur nous apprend qu'il a gagné ! Quelle est alors la probabilité que le dé lui ait indiqué le numéro 6 ?

On a vu dans l'exercice précédent que pour tout $i \in [\![1,6]\!]$,

$$P(B) = \frac{1}{2} \quad P(A_i) = \frac{1}{6} \quad P_{A_i}(B) = \frac{i}{7}.$$

On connait $P_{A_6}(B)$, on veut calculer $P_B A_6$, ce qui revient à "remonter le temps" !

D'après la formule de Bayes : $P_B(A_6) = \dfrac{P_{A_6}(B)P(A_6)}{P(B)} = \dfrac{\frac{6}{7} \times \frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{7}$.

Proposition 7 (Succession d'épreuves : Formule des probabilités composées)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.
Soient $A_1, \ldots, A_n$ des évènements tels que $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Preuve rapide :

Récurrence immédiate sur n, en remarquant que :

$$P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n\right) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n).$$ □

Remarques 9

- C'est simplement une généralisation de la formule $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ pour une intersection de n évènements !
- Si $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors a fortiori $P(A_1) \neq 0$, $P(A_1 \cap A_2) \neq 0, \ldots, P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \neq 0$. Le membre de droite est donc bien défini.

Exercice 8

Une urne contient n boules : r boules noires et $(n-r)$ boules blanches (avec $r \geqslant 4$).
On tire quatre boules successivement, sans remise.

Quelle est la probabilité que les 4 boules tirées soient noires ?

Pour $i \in [\![1,4]\!]$, notons A_i = "La i-ème boule tirée est noire".
On veut calculer $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$. D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times P_{A_1 \cap A_2 \cap A_3}(A_4) \\ &= \frac{r}{n} \times \frac{r-1}{n-1} \times \frac{r-2}{n-2} \times \frac{r-3}{n-3} = \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}. \end{aligned}$$

Remarque : Une autre option est de se ramener au dénombrement.

Chaque résultat (tirage de quatre boules sans remise dans l'urne) a la même chance d'advenir.
Il y a donc équiprobabilité et on a :

$$P(\text{"Les 4 boules sont noires"}) = \frac{\text{Nombre de résultats où les 4 boules sont noires}}{\text{Nombre de résultats possibles}} = \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

4 Indépendance

4.1 Indépendance de deux évènements.

Définition 12 (2 évènements indépendants)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soient A et B deux évènements.
On dit que A et B sont indépendants (pour la probabilité P) lorsque : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque 10

Si $P(A) \neq 0$, puisque $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, on a l'équivalence :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants } \iff P_A(B) = P(B).$$

Symétriquement, si $P(B) \neq 0$: A et B sont indépendants $\iff P_B(A) = P(A)$.

On comprend donc que deux évènements sont indépendants lorsque
la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre.

Exemples

On pioche une carte au hasard sans un jeu de 52 cartes.

A : "Tirer un 10", B : "Tirer un coeur", C : "Tirer une figure".

• $P_A(B) = \dfrac{\text{Nombre de 10 de coeur}}{\text{Nombre de 10}} = \dfrac{1}{4}$. $P(B) = \dfrac{\text{Nombres de coeurs}}{\text{Nombres de cartes}} = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$.
Donc A et B sont indépendants.

• $P_C(B) = \dfrac{\text{Nombre de figures coeur}}{\text{Nombre de figures}} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4} = P(B)$.
Donc B et C sont indépendants.

• $P_C(A) = 0$. $P(A) = \dfrac{\text{Nombre de 10}}{\text{Nombre de cartes}} = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$.
Donc A et C ne sont pas indépendants !

Remarque 11

L'évènement certain Ω et l'évènement impossible $\emptyset$ sont indépendants de tout autre évènement.

Proposition 8 (Indépendance et évènements contraires)

Si A et B sont deux évènements indépendants (pour la probabilité P) alors :

• A et $\overline{B}$ sont indépendants, • $\overline{A}$ et B sont indépendants, • $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Preuve :

• Si $P(A) = 0$ alors $P(A \cap \overline{B}) = 0 = P(A) \times P(\overline{B})$ d'où l'indépendance de A et $\overline{B}$.
• SI $P(A) \neq 0$, alors $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - P(B) = P(\overline{B})$ d'où l'indépendance de A et $\overline{B}$.
Les autres points se démontrent similairement. □

4.2 Indépendance de n évènements

Définition 13 (Indépendance 2 à 2, indépendance mutuelle)

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.

- On dit que des évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont **deux à deux indépendants** lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad (i \neq j) \Longrightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

- On dit que des évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** lorsque :

$$\forall I \subset [\![1,p]\!], \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Remarque 12

Des évènements mutuellement indépendants sont automatiquement deux à deux indépendants.
L'inverse n'est pas vrai !

Exercice 9

On lance deux fois un dé équilibré. On note :

A="On obtient un nombre pair au premier lancer." B="On obtient un nombre pair au second lancer".

C="Les deux nombres obtenus ont la même parité."

Montrer que ces trois évènements sont deux à deux indépendants,
mais pas mutuellement indépendants.

L'univers est $\Omega = \Big\{(x_1, x_2),\ x_1, x_2 \in [\![1,6]\!]\Big\} = [\![1,6]\!]^2$, on a équiprobabilité.

$P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{3 \times 6}{6 \times 6} = \dfrac{1}{2}$.

$P(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{6 \times 3}{6 \times 6} = \dfrac{1}{2}$.

$P(C) = \dfrac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \dfrac{3 \times 3 + 3 \times 3}{6 \times 6} = \dfrac{1}{2}$.

$P(A \cap B) = \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{3 \times 3}{6 \times 6} = \dfrac{1}{4} = P(A)P(B)$

$A \cap C = A \cap B$ donc $P(A \cap C) = P(A \cap B) = \dfrac{1}{4} = P(A)P(C)$.

$B \cap C = A \cap B$ donc $P(B \cap C) = P(A \cap B) = \dfrac{1}{4} = P(B)P(C)$.

Mais $A \cap B \cap C = A \cap B$ donc : $\quad P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = \dfrac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$.

Méthode : Cas typique d'indépendance mutuelle

Lorsqu'on répète n fois la même épreuve sans modification des conditions, les épreuves sont dites indépendantes.

Dans ce cas, si A_i est un évènement qui concerne **uniquement la i-ème épreuve**, on peut affirmer (sans démonstration) que $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants.

Exemples : On lance plusieurs fois un dé ou une pièce, on effectue plusieurs tirages avec remise...

Proposition 9 (Indépendance et évènements contraires (admis))

Soit $A_1, \dots A_n$ des évènements. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$.

- Si $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux indépendants, alors $B_1, \dots, B_n$ sont deux à deux indépendants.
- Si $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors $B_1, \dots, B_n$ sont mutuellement indépendants.

Exercice 10

Un jeu consiste à lancer deux dés à 6 faces équilibrés jusqu'à ce que la somme des deux dés fasse 7. Le jeu s'arrête alors. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $A_k =$ "La somme des dés vaut 7 au k-ième lancer".

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(A_k)$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $B_k =$ "Le jeu s'arrête au k-ième lancer".
   Exprimer B_k en fonctions des A_i et en déduire $P(B_k)$.
3. On note $C =$ "Le jeu ne s'arrête jamais".
   En justifiant que $C \subset \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P(C) = 0$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_k) = P(A_i)$.
Il s'agit de déterminer la probabilité que la somme de deux fasse 7 :

$$P(A_k) = \frac{\text{Nombre de résultats favorables}}{\text{Nombre de résultats possibles}} = \frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}.$$

2. • $B_1 = A_1$ donc $P(B_1) = P(A_1) = \dfrac{1}{6}$.

• Pour $k \geqslant 2$, $\quad B_k = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$. Les $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ étant indépendants :

$$P(B_k) = P(\overline{A_1}) \times \dots \times P(\overline{A_{k-1}}) \times P(A_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6} = \frac{5^{k-1}}{6^k}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si le jeu ne s'arrête jamais, en particulier on n'obtient pas 7 pendant les n premiers lancers. Ceci montre que $C \subset \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

Ainsi : $\quad 0 \leqslant P(C) \leqslant P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = P(A_1) \times \dots \times P(A_n) = \dfrac{1}{6^n}$.

Lorsque $n \to +\infty$, d'après le théorème des gendarmes, on obtient $P(C) = 0$.

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Introduire explicitement l'univers Ω associé à une expérience aléatoire.
- Traduire un évènement "en français" en une partie de Ω
- Correspondances entre $\cup, \cap, \overline{A}$ et "opérations logiques".
- Maîtriser les règles de calcul de probabilité.
- Calculer une probabilité à l'aide du dénombrement (s'il y a équiprobabilité).
- Connaître la définition d'une probabilité conditionnelle.
- Appliquer la formule des probabilités totales.

Pour suivre

- Introduire spontanément les "évènements fondamentaux" d'un énoncé.
- Connaître la définition théorique d'une probabilité $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$.
- Appliquer la formule de Bayes et des probabilités composées.

Pour les ambitieux

- Étudier sans indication une chaîne de Markov (ou exercice similaire).