8

Dénombrement et combinatoire

Problèmes de dénombrement

Exercice 1 (Tirages dans une urne)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n (avec $n \geqslant 4$). On effectue 10 tirages avec remise.

0. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

Combien y a-t-il de résultats...
1. Où n'apparaissent que des 2 et des 3 ?
2. Sans 3 ?
3. Contenant exactement deux 3 ?
4. Contenant au moins un 3 ?
5. Contenant exactement deux 3 et quatre 1 ?
6. Où le premier 3 apparaît au k-ème tirage (pour un $k \in [\![1, 10]\!]$ fixé) ?

Exercice 2 (Paris hippiques)

12 chevaux, numérotés de 1 à 12, disputent une course hippique. Au tiercé, un pari est la donnée, dans l'ordre, des trois premiers chevaux arrivés.

Combien y a-t-il de paris possibles ?

Combien y a-t-il de paris où...
1. Le cheval 6 apparaît ?
2. Les trois numéros sont pairs ?
3. Les numéros sont rangés dans l'ordre croissant ?

Exercice 3 (Mains de 4 cartes)

On étudie les différentes mains de 4 cartes que l'on peut obtenir dans un jeu de 52 cartes.

Combien y a-t-il de mains possibles ?

Combien de mains contiennent :
1. Quatre coeurs ?
2. Exactement un coeur ?
3. Au moins un as ?
4. Au plus un as ?
5. Au plus 3 as ?
6. Exactement 2 rois et 1 trèfle ?

Exercice 4 (Nourrir les singes)

Dans un zoo, un soigneur se dirige vers l'enclos des singes pour les nourrir : il dispose de 6 fruits à distribuer et l'enclos contient 10 singes distincts.

1. On considère que les 6 fruits sont différents.
Combien y a-t-il de distributions possibles :
(a) En donnant au plus un fruit à chaque singe ?
(b) Si chaque singe peut recevoir de 0 à 6 fruits ?

2. On considère maintenant que les 6 fruits sont 6 bananes identiques. Répondre aux mêmes questions.

Exercice 5 (Placard à chemises)

Une penderie contient 10 chemises toutes différentes : 4 blanches, 3 bleues, 2 grises et 1 blanche.

1. Combien y a-t-il d'agencements possibles ?
2. Combien y a-t-il d'agencements où les chemises sont regroupées par couleur ?

Coefficients binomiaux

Exercice 6 (Application de la formule)

Donner l'expression développée du polynôme $(x-1)^5 \in \mathbb{R}[x]$.

Exercice 7 (Coefficients pairs/impairs)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :
(a) $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. (b) $T = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

2. En déduire : $\sum_{k \text{ pairs}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ impairs}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$.

Exercice 8 (Formule du binôme dérivée)

1. Soit $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer :
(a) $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k$ (b) $\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k$

$\Big($ *On se rappellera du lien entre* $\binom{n}{k}$ *et* $\binom{n-1}{k-1}$ $\Big)$

2. Retrouver ces résultats en dérivant $(x+1)^n \in \mathbb{R}[x]$.

Exercice 9 (Formule de Pascal généralisée)

Soit $p \in \mathbb{N}$.
Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant p$,
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 10 (Produit de coeff. binomiaux)

1. Montrer que pour tous $k \leqslant p \leqslant n$,
$$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}.$$

2. En déduire l'expression de $\sum_{p=k}^{n} \binom{n}{p}\binom{p}{k} x^p$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Formule de Vandermonde

Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant a+b$.

1. Une urne contient $(a+b)$ boules, numérotées de 1 à $(a+b)$.
Les boules numérotées 1 à a sont rouges, les boules numérotées $(a+1)$ à $(a+b)$ sont noires.
On tire p boules simultanément dans l'urne.
Pour $k \in [\![1, p]\!]$, combien y a-t-il de tirages contenant exactement k boules rouges ?

2. En déduire (avec un argument de dénombrement) la formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{a}{k}\binom{b}{p-k} = \binom{a+b}{p}$.

3. Retrouver cette formule en développant le polynôme $(1+x)^a(1+x)^b \in \mathbb{R}[x]$ de deux manières différentes.

4. Justifier que la formule est encore vraie si $p > a+b$.

5. Application : pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}^2$.