14

Matrices

Dans tout ce chapitre, n et p sont deux entiers naturels non nuls.

1 Notion de matrice

Définition 1 (Matrice)

Une matrice A à n lignes et p colonnes est un tableau à n lignes et p colonnes contenant des réels.
On la note, sous forme "compacte" : $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$

- Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$,
$A_{i,j}$ est le coefficient situé sur la ligne i et sur la colonne j.

- On dit d'une telle matrice qu'elle est de taille $n \times p$.

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,j} & \cdots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,j} & \cdots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & A_{i,2} & \cdots & A_{i,j} & \cdots & A_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,j} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix}$$

- Par définition, deux matrices sont égales lorsqu'elles ont même nombre de lignes, même nombre de colonnes, et mêmes coefficients.

- S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le nombre de lignes et de colonnes,
on pourra parfois simplement écrire, pour la forme "compacte" : $A = (A_{i,j})$.

- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
En particulier :

- Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (c'est le cas $n = p$), on dit que A est une matrice carrée.

- Si $A \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, on dit que A est une matrice ligne.

- Si $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on dit que A est une matrice colonne.

- La matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.
On la notera : $0_{n,p}$
(S'il n'y a pas d'ambiguité, on écrira parfois $A = 0$, en comprenant qu'il ne s'agit pas du 0 des réels, mais bien de la matrice nulle !)

Exemples

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2×3, c'est à dire un élément de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

On peut l'écrire $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2 \\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$ où :

$$A_{1,1} = 1, \quad A_{1,2} = -2, \quad A_{1,3} = 0, \quad A_{2,1} = 0, \quad A_{2,2} = 1, \quad A_{2,3} = 1.$$

- $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ est une matrice carrée.

- $C = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 & 0,2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne.

- $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -0,5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est une matrice colonne.

- La matrice nulle de taille 3×2 est : $0_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2 Opérations sur les matrices

2.1 Addition et multiplication par un réel

Définition 2 (Addition et multiplication par un réel)

Soit $A = (A_{i,j})$ et $B = (B_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice dont les coefficients sont donnés par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, p]\!],\ \ (A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}.$$

- $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice dont les coefficients $a'_{i,j}$ sont donnés par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, p]\!],\ \ (\lambda A)_{i,j} = \lambda A_{i,j}.$$

- On note naturellement $A - B$ la matrice $A + (-1)B$.

Autrement dit, la somme et la multiplication par un réel se font "coefficient par coefficient".
Si A et B sont de taille $n \times p$, alors $A + B$, λA et $A - B$ sont encore de taille $n \times p$.

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $2A$, $A + B$ et $A - B$.

$2A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 2 & -12 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} -2+1 & 0+1/2 & 2+1 \\ 1+5 & -6-1 & 1/3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 6 & -7 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} -2-1 & 0-1/2 & 2-1 \\ 1-5 & -6+1 & 1/3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -4 & -5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Attention !

Pour pouvoir additionner ou soustraire deux matrices, il faut impérativement qu'elles aient le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes !

L'addition $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ n'a pas de sens.

Proposition 1 (Propriétés de la somme et de la multiplication par un réel)

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$
- $A - A = 0_{n,p}$
- $1A = A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda \times \mu)A = \mu(\lambda A)$

S P O I L E R . . .

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est ainsi muni d'une opération d'additition et d'une multiplication par un réel, qui se "comportent bien". On dira plus tard que ces opérations confèrent à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une structure d'**espace vectoriel**.

2.2 Produit de matrices

Définition 3 (Produit de matrices)

Soient n, p et q trois entiers naturels non nuls.

Soient $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Le produit AB est la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,q]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,j}.$$

Pour calculer le **coefficient d'indices** (i,j) **du produit** AB, on additionne les produits successifs des coefficients de la **i-ème ligne de** A et la **j-ième colonne de** B.

Schéma :

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{i,1} & A_{i,2} & \cdots & A_{i,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots & B_{1,j} & \vdots \\ \vdots & B_{2,j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & B_{p,j} & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & C_{i,j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad \text{avec } C_{i,j} = A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,2}B_{2,j} + \ldots + A_{i,p}B_{p,j}$$

Le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B, sinon le produit n'est pas défini ! AB a alors le même nombre de lignes que A et le même nombre de colonnes que B.

On pourra retenir schématiquement que $\boxed{\text{"}\mathcal{M}_{n,p} \times \mathcal{M}_{p,q} \text{ donne } \mathcal{M}_{n,q}.\text{"}}$

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Calculer AB et AX.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -12 & 14 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad AX = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2y+z \\ -y+4z \\ x-2y \end{pmatrix}$$

Proposition 2 (Propriétés du produit de matrices)

Soient n, p, q, r des entiers naturels non nuls.
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C, D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $E \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Associativité :** $(AB)C = A(BC)$ si bien qu'on notera sans ambiguïté ABC.
- **Distributivité :** $(A+B)C = AC + BC$ et $A(C+D) = AC + AD$
- **Produit et multiplication par un réel :** $(\lambda A)C = A(\lambda C) = \lambda(AC)$

Le produit de matrices est donc associatif et distributif comme le produit "usuel" sur les réels, ou bien le produit de polynômes par exemple. Mais contrairement à ces derniers :

- Il n'est **pas commutatif !** ($AB \neq BA$ en général)
- Il ne respecte **pas la propriété du "produit nul"** ! ($AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$).

Remarque 1

Bien-sûr, lorsque le produit est bien défini, $A \times 0 = 0$ et $0 \times A = 0$.
(Attention aux tailles de ces matrices nulles !)

Attention !

Non-commutativité :

• Il est possible que AB soit bien défini mais que BA n'ait pas de sens !

Exemple : Dans l'exercice 2, le produit BA n'a pas de sens.

• Lorsque les deux produits AB et BA existent, on n'a pas forcément $AB = BA$ en général !
On dit alors que A et B ne commutent pas.

Exemple : Avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, on a :

$AB = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -1 & -11 \end{pmatrix}$

Remarque 2

On fera ainsi toujours attention à respecter le "sens" du produit dans les calculs. Par exemple :

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD \neq CA + DA + CB + DB...$$

Attention !

Produit nul de matrices :

• On peut avoir $AB = 0$ sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle.

Exemples : Avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, on a : $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $AA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

• En conséquence, **on ne peut pas "simplifier par une matrice"** en général !
L'égalité $AC = BC$ avec $C \neq 0$ n'implique pas $A = B$.

Exemple : Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$AC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $BC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $AC = BC$ avec $C \neq 0$, mais pourtant $A \neq B$!

De même à droite : l'égalité $CA = CB$ avec $C \neq 0$ n'implique pas $A = B$.

Remarque 3

On verra cependant que, dans certains cas, il sera possible de simplifier l'égalité $AC = BC$ pour déduire $A = B$. C'est notamment possible si C est une matrice carrée **inversible**.

2.3 Transposition

Définition 4 (Matrice transposée)

Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

La transposée de A est la matrice ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!],\ \ ({}^tA)_{i,j} = A_{j,i}.$$

Autrement dit, ${}^tA$ est la matrice obtenue à partir de A **en "échangeant" les lignes et les colonnes :**

- La première ligne de A devient la première colonne de ${}^tA$
- La deuxième ligne de A devient la deuxième colonne de ${}^tA$, etc...

Remarques 4

- On notera bien que si A est de taille $n \times p$, alors ${}^tA$ est de taille $p \times n$.
- Il est clair d'après la définition que $\boxed{{}^t({}^tA) = A}$

Exercice 3

On pose $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$. Donner ${}^tA$ et ${}^tB$.

$${}^tA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposition 3 (Linéarité de la transposition)

Pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$.

En combinant ces deux propriétés, on peut écrire : $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$.

Preuve :

Relativement évident d'après la définition. $\square$

Proposition 4 (Transposée d'un produit)

Pour toutes $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Preuve :

On note $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (B_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$, de sorte que la matrice $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ a les coefficients :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,q]\!],\ (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,j}.$$

Ainsi la transposée ${}^t(AB) \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$ a les coefficients :

$$\forall i \in [\![1,q]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!],\ \ ({}^t(AB))_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{k=1}^{p} A_{j,k}B_{k,i} = \sum_{k=1}^{p} B_{k,i}A_{j,k} = \sum_{k=1}^{p} ({}^tB)_{i,k}({}^tA)_{k,j}.$$

On reconnait finalement le coefficient $({}^tB\,{}^tA)_{i,j}$. On a donc montré que ${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA)$. $\square$

3 Matrices carrées

3.1 Définitions générales

Définition 5 (Matrice carrée)

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (de taille $n \times n$, ou encore "d'ordre n") est appelée matrice carrée.
- L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

Cet ensemble est stable par addition, multiplication par un réel, et produit :

$$\text{Si } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}, \quad A + B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \lambda A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

- Si $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A_{1,1}, \ldots, A_{n,n}$ s'appellent les coefficients diagonaux de A.
- La matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut se noter plus simplement $0_n = 0_{n,n}$

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

Remarques 5

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ ne contient qu'un seul coefficient : $A = (A_{1,1})$ avec $A_{1,1} \in \mathbb{R}$.

Ce n'est donc pas très intéressant ! L'ensemble $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ "s'identifie" à $\mathbb{R}$.

- Rappelons que, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les deux produits AB et BA sont bien définis,

mais $AB \neq BA$ en général !

Définition 6 (Matrice identité)

On appelle matrice identité d'ordre n , notée I_n, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent 1 et tous les autres coefficients sont nuls :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exemples

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice identité, parfois appelée "matrice unité", est en quelque sorte l'équivalent du "1" des réels, au sens où c'est un élément neutre pour la multiplication :

Proposition 5 (Propriété fondamentale de la matrice identité)

- Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $I_n\, A = A$. et $A\, I_p = A$
- Ainsi, pour une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient : $I_n A = A I_n = A$.

Preuve de la Proposition 5 :

Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Notons $I_n = (\delta_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ces coefficients sont donc donnés par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Alors le produit $I_n A = (c_{i,j})$ est de taille $n \times p$ et a, par définition du produit matriciel, les coefficients :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,p]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} A_{k,j} = A_{i,j} \quad \text{(car le seul terme non nul est celui quand } k = i\text{)}.$$

Ceci montre bien que $I_n A = A$. De même pour le produit dans l'autre sens. □

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Puissances d'une matrice

Définition 7 ("A puissance k")

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On peut définir les puissances successives de A par récurrence :

- On pose $A^0 = I_n$
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{k+1} = A\,A^k = A^k A$

Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = \underbrace{A\,A \ldots A}_{k \text{ fois}}$.

Remarques 6

- Bien entendu ces puissances sont au sens du produit matriciel !

Si les coefficients de A sont les $A_{i,j}$, les coefficients de A^2 ne sont pas les $(A_{i,j})^2$ en général !

- Une puissance A^k n'a de sens **que si** A **est une matrice carrée** !
- Notons que A **commute avec toutes ses puissances** : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{A\,A^k = A^k A}$
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(I_n)^k = I_n$.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 6 (Quelques règles de calcul de puissances)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a les propriétés suivantes :

- Pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$, $\quad A^k A^\ell = A^\ell A^k = A^{k+\ell} \quad$ et $\quad (A^k)^\ell = A^{k\times\ell}$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\quad (\lambda A)^k = \lambda^k A^k$.

Preuve :

- On a $A^k A^\ell = \underbrace{(AA\dots A)}_{k \text{ fois}}\underbrace{(AA\dots A)}_{\ell \text{ fois}} = \underbrace{AAA\dots A}_{k+\ell \text{ fois}} = A^{k+\ell}$, (de même dans l'autre sens)

et $(A^k)^\ell = \underbrace{A^k A^k \dots A^k}_{\ell \text{ fois}} = \underbrace{AAA\dots A}_{k\times\ell \text{ fois}} = A^{k\times\ell}$.

- On a $(\lambda A)^k = \underbrace{(\lambda A)(\lambda A)\dots(\lambda A)}_{k \text{ fois}} = \underbrace{\lambda\lambda\dots\lambda}_{k \text{ fois}}\underbrace{AA\dots A}_{k \text{ fois}}$ (cf. 3ème point de la Proposition 2)

c'est à dire $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$. $\square$

Méthode : Calcul de A^k : en "devinant"...

Pour calculer l'expression de A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut :

$\boxed{1}$ Calculer les premières puissances A^0, A^1, A^2, A^3...

$\boxed{2}$ Deviner la formule pour le cas général A^k.

$\boxed{3}$ Démontrer cette formule par récurrence.

Exercice 5

1. On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'expression de J^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Plus généralement, on définit $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (matrice ne contenant que des 1).

Déterminer l'expression de $(J_n)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

1. On calcule : $J^0 = I_3, \quad J^1 = J$, puis :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$$

Puis $J^3 = JJ^2 = J \times (3J) = 3J^2 = 3 \times 3J = 9J$.

Montrons par récurrence que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ J^k = 3^{k-1}J$.

- Pour $k = 1$, on a bien $J = 3^0 J$.
- Si $J^k = 3^{k-1}J$, alors $J^{k+1} = JJ^k = J \times (3^{k-1}J) = 3^{k-1}J^2 = 3^{k-1} \times 3J = 3^k J$, ce qui achève la réccurence.

2. Cette fois, on note que $(J_n)^2 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \dots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \dots & n \end{pmatrix} = nJ_n$.

De la même façon, on a par récurrence immédiate : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ (J_n)^k = n^{k-1}J_n$.

Maintenant que l'on dispose de cette notion de puissance pour des matrices carrées, relativement similaire à la notion de puissance pour des réels, il est naturel de se demander si des identités remarquables du type $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ "tiennent" toujours pour des matrices...

Attention !

- Si A et B sont deux matrices carrées qui ne commutent pas ($AB \neq BA$), on a

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = ABAB \neq A^2B^2.$$

- En revanche, si A et B sont deux matrices carrées qui commutent ($AB = BA$), on peut bien écrire :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

$$(AB)^2 = A^2B^2.$$

Théorème 1 (Identités remarquables pour des matrices qui commutent)

Soien $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^{m-k} B^k$$

$$A^m - B^m = (A-B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}.$$

$$(AB)^m = A^m B^m.$$

Preuve :

Si $AB = BA$, alors les règles de calculs mettant en jeu les puissances de A et de B sont exactement les mêmes que celles des réels. On peut donc reproduire la même preuve que dans le cas des réels. □

Méthode : Calcul de A^k : en utilisant la formule du binôme

Si on peut écrire la matrice A sous la forme d'une somme $A = M + N$, où :
- $MN = NM$,
- les puissances de M et de N sont "faciles à calculer",

on peut utiliser la formule du binôme pour déterminer l'expression des puissances de A.

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer l'expression de A^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.

On peut écrire $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c'est à dire $A = 3I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- I_3 commute avec n'importe quelle matrice carrée, donc : $(3I_3)N = 3I_3N = 3NI_3 = N(3I_3)$.
- Puissances de $3I_3$: Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(3\,I_3)^m = 3^m (I_3)^m = 3^m I_3$.

- Puissances de N :

$N^0 = I_3, \quad N^1 = N, , \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $N^3 = NN^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$

Ainsi pour tout $m \geqslant 3, \quad N^m = 0_3$!

- On applique la formule du binôme : pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^m = (3I_3 + N)^m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (3I_3)^{m-k} N^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 3^{m-k} N^k \\ &= \binom{m}{0} 3^m N^0 + \binom{m}{1} 3^{m-1} N^1 + \binom{m}{2} 3^{m-2} N^2 \\ &= 3^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + m3^{m-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{m(m-1)}{2} 3^{m-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^m & m3^{m-1} & m3^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} 3^{m-2} \\ 0 & 3^m & m3^{m-1} \\ 0 & 0 & 3^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.3 Polynôme de matrice

On a vu que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée, on pouvait considérer $A^0 = I_n$, A^1, A^2, A^3, etc... qui sont encore des matrices carrées. On peut alors naturellement considérer une expression du type :

$$3A^3 - 2A^2 + 2A - 4I_n, \quad \text{qui est encore une matrice carrée.}$$

On dit qu'une telle expression est un **polynôme en** A.

Définition 8 (Polynôme de matrice)

Soient $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

On définit la matrice :
$$P(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k = a_m A^m + \ldots + a_1 A + a_0 I_n.$$

On dit que $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un polynôme en A.

Remarque 7

On fera bien attention au fait que le coefficient constant a_0 "donne" $a_0 A^0$, c'est à dire $\boxed{a_0 I_n}$.

Exercice 7

Soit $P = X^2 - 2X + 4$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice $P(A)$.

Par définition, $P(A) = A^2 - 5A + 4I_3$.

On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc : $P(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit : $P(A) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & 7 & 1 \\ 1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

Proposition 7 (Propriétés des polynômes en A)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$(P+Q)(A) = P(A) + Q(A) \quad \text{et} \quad (PQ)(A) = P(A)Q(A).$$

En particulier, on voit que $P(A)Q(A) = (PQ)(A) = (QP)(A) = Q(A)P(A)$.

Cette proposition repose en fait sur le fait que "les puissances de A commutent entre elles".

Exemple

Considérons $P = X^3 - 2$ et $Q = X + 1$. On a donc $PQ = (X^3-2)(X+1) = X^4 + X^3 - 2X - 2$.

Ainsi, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(PQ)(A) = A^4 + A^3 - 2A - 2I_n$ par définition.

On note que le calcul du produit $P(A)Q(A)$ conduit à la même matrice :

$$P(A)Q(A) = (A^3 - 2I_n)(A + I_n) = A^3A + A^3I_n - 2I_nA - 2I_n = A^4 + A^3 - 2A - 2I_n.$$

On a donc bien $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$.

Conséquence de cette proposition : Tous les calculs usuels mettant en jeu des polynômes (factorisation, développement...) tiennent toujours avec des polynômes de matrices ! À partir d'une égalité entre deux polynômes, on peut simplement "remplacer X par A" et "remplacer 1 par I_n" pour obtenir une égalité matricielle.

Exemples

- On sait que $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pourra donc écrire

$$(A - I_n)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I_n.$$

(On peut retrouver ceci avec la formule du binôme du Théorème 1, puisque A et I_n commutent !)

- Après recherche des racines du polynôme $X^3 - 3X + 2$, on obtient la factorisation :
$X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pourra donc écrire :

$$A^3 - 3A + 2I_n = (A - I_n)^2(A + 2I_n).$$

Attention !

Ne pas oublier de "remplacer 1 par I_n" : $A^3 - 3A^3 - 3$, $(A-1)^2(A+2)^2$... n'ont pas de sens !

Les polynômes de matrices ont de multiples applications. On peut notamment s'en servir pour déterminer l'expression des puissances d'une matrice A (souvent dans un exercice guidé !...)

Méthode : Calcul de A^k : à l'aide d'un "polynôme annulateur"

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'on dispose d'un **polynôme annulateur**, c'est à dire d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ (non nul) tel que $P(A) = 0_n$ (matrice nulle).

Alors on peut déterminer l'expression de A^k pour $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$\boxed{1}$ Poser la division euclidienne de X^k par P : $X^k = P(X)Q_k(X) + R_k(X)$.

$\boxed{2}$ Déterminer le reste $R_k(X)$ de cette division euclidienne (exercice classique de polynômes !)

$\boxed{3}$ On obtient $A^k = P(A)Q_k(A) + R_k(A) = R_k(A)$ (puisque $P(A) = 0_n$).

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $P = X^3 - 3X^2 + 2X \in \mathbb{R}[X]$.

1. Calculer $P(A)$.
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par P.
4. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On calcule successivement :

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

et on déduit que

$$P(A) = A^3 - 3A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

2. On remarque déjà que $P = X(X^2 - 3X + 2)$.
1 et 2 sont des racines évidentes : finalement $P = X(X-1)(X-2)$.

3. La division euclidienne s'écrit $X^n = X(X-1)(X-2)Q(X) + R(X)$
avec $deg(R) < deg(P) = 3$ donc $deg(R) \leqslant 2$.
Ainsi R_n est de la forme $R(X) = aX^2 + bX + c$.
On peut donc ré-écrire : $X^n = X(X-1)(X-2)Q(X) + aX^2 + bX + c$.
En évaluant en 0, 1 et 2, on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} 0 = c \\ 1 = a + b + c \\ 2^n = 4a + 2b + c \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 1 \\ 4a + 2b = 2^n \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2^{n-1} - 1 \\ b = 2 - 2^{n-1} \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc $R(X) = (2^{n-1} - 1)X^2 + (2 - 2^{n-1})X$.

4. En "évaluant" $X^n = P(X)Q(X) + R(X)$ en A, on obtient

$$A^n = P(A)Q(A) + R(A) = R(A) = (2^{n-1} - 1)A^2 + (2 - 2^{n-1})A$$

Cela donne : $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 1 - 2^{n-1} & 1 & -2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

3.4 Quelques matrices carrées particulières

Définition 9 (Matrices carrées particulières)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice...

- ...**Triangulaire inférieure** lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i < j \Rightarrow A_{i,j} = 0 \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

- ...**Triangulaire supérieure** lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \Rightarrow A_{i,j} = 0 \qquad \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- ... **Diagonale** lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow A_{i,j} = 0 \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- ... **Symétrique** lorsque ${}^tA = A,$ c'est à dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad A_{i,j} = A_{j,i} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- ... **Antisymétrique** lorsque ${}^tA = -A,$ c'est à dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad A_{i,j} = -A_{j,i} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarques 8

- Une matrice est **diagonale** si et seulement si elle est **triangulaire supérieure et inférieure** !
- On utilisera occasionnellement la notation "diag" pour désigner une matrice diagonale :

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Par exemple : $\mathrm{diag}(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathrm{diag}(1,1,1,1) = I_4.$

- Il n'y a pas de condition particulière pour les coefficients diagonaux d'une matrice symétrique.
- Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours nuls.

Proposition 8 (Produit de matrices triangulaires)

Un produit de matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) de taille $n \times n$ reste une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) de taille $n \times n$.
De plus, les coefficients diagonaux du produit sont les produits des coefficients diagonaux.

Preuve :

Appliquer la définition des coefficients d'un produit matriciel... Preuve laissée en exercice. $\square$

Exercice 9

Calculer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 20 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Proposition 9 (Produit de matrices diagonales)

Un produit de matrices diagonales de taille $n \times n$ reste une matrice diagonale de taille $n \times n$. De plus, les coefficients diagonaux du produit sont les produits des coefficients diagonaux.

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

Preuve :

C'est un conséquence de la Proposition 8, puisqu'une matrice diagonale est à la fois triangulaire inférieure et triangulaire supérieure. □

Corollaire 1 (Puissances d'une matrice diagonale)

Si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, D^k est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les puissances k des coefficients diagonaux de D.

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (\lambda_n)^k \end{pmatrix}$$

Preuve :

Récurrence immédiate à partir de la Proposition 9, puisque $D^{k+1} = DD^k$. □

Exercice 10

Calculer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et la puissance $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

4 Matrices inversibles

• Dans l'ensemble des réels, tout $x \neq 0$ admet un inverse : il existe un réel $y \in \mathbb{R}$ satisfaisant $x \times y = 1$. Cet inverse est unique. On le note x^{-1} ou, comme il est de coutume pour des réels, $\frac{1}{x}$.
Le réel 0 n'admet pas d'inverse : on ne peut pas trouver de $y \in \mathbb{R}$ tel que $0 \times y = 1$!

• L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n étant lui aussi muni d'une multiplication, on peut se demander de même si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée admet un inverse, et si on est capable de le déterminer...

4.1 Définition et premières propriétés

Définition 10 (Matrice inversible)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On dit que A est **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n.$$

Lorsqu'elle existe, une telle matrice B est unique. On l'appelle l'inverse de A et on la note A^{-1}
Ainsi : $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

On note $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles. ("Groupe Linéaire")

Preuve de l'unicité de l'inverse :

Supposons qu'il existe deux matrices $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA = I_n$ et $AC = CA = I_n$.

Alors on a : $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$. Ainsi, si A admet un inverse, il est unique !
□

Remarques 9

• On peut parler d'inversibilité **uniquement pour des matrices carrées**.

• On a $I_nI_n = I_nI_n = I_n$. Ceci montre que la matrice identité I_n est inversible et que : $I_n^{-1} = I_n$.

• La matrice nulle 0_n n'est pas inversible, puisque pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$0_n \times B = B \times 0_n = 0_n \neq I_n.$$

Mais on va voir que toute matrice non-nulle n'est pas forcément inversible !

Attention !

• On n'écrira **jamais de "fraction de matrices"** du type $\dfrac{B}{A}$!
(Cette notation n'est pas définie pour des matrices).
Lorsque A est inversible, on pourra multiplier par l'inverse, c'est à dire parler de $A^{-1}B$ ou de BA^{-1}.

• Bien-sûr, le produit matriciel étant ce qu'il est, il n'est pas évident de repérer "à l'oeil" qu'une matrice A est inversible, ni de calculer les coefficients de A^{-1}...

En particulier, si $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les coefficients de A^{-1} ne sont pas les $\dfrac{1}{A_{i,j}}$ en général !

Exercice 11

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer les produits AB et BA. Qu'en déduit-on ?

$AB = I_2$ et $BA = I_2$.
On en déduit que A est inversible et $A^{-1} = B$. On en déduit aussi que B est inversible et $B^{-1} = A$.

Proposition 10 (Propriétés de l'inversion)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) **Inverse de l'inverse :** Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$

(b) **Inverse et multiplication par un réel :** Si A est inversible et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors λA est inversible et $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.

(c) **Inverse d'un produit :** Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(d) **Inverse d'une puissance :** Si A est inversible, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ (matrice que l'on peut noter A^{-k}).

(e) **Inverse de la transposée :** Si A est inversible, alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Preuve :

(a) Par définition, on a $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Ceci montre aussi que A^{-1} est inversible, d'inverse A.

(b) On a : $(\lambda A)(\frac{1}{\lambda}A^{-1}) = \lambda \frac{1}{\lambda} AA^{-1} = I_n$ et $(\frac{1}{\lambda}A^{-1})(\lambda A) = \frac{1}{\lambda}\lambda A^{-1}A = A^{-1}A = I_n$.
Ceci montre que λA est inversible, d'inverse $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

(c) On a :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1}AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

Ceci montre que AB est inversible, d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.

(d) Soit A inversible, on dispose donc de la matrice A^{-1}.
Posons $\mathcal{P}(k)$: "A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$".
Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- Initialisation : $A^0 = I_n$ est inversible, d'inverse $I_n = (A^{-1})^0$.
- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$, montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

On a $A^{k+1} = AA^k$. D'après (b), ce produit est inversible, d'inverse

$$(A^{k+1})^{-1} = (AA^k)^{-1} = (A^k)^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^kA^{-1} = (A^{-1})^{k+1}.$$

Ceci achève la récurrence.

(e) Par définition, on a $AA^{-1} = I_n$ et $A^{-1}A = I_n$. En passant à la transposée :

$${}^t(AA^{-1}) =^t I_n \ \text{ et } \ {}^t(A^{-1}A) =^t I_n \iff {}^t(A^{-1}){}^tA = I_n \ \text{ et } \ {}^tA\,{}^t(A^{-1}) = I_n.$$

Ceci montre que ${}^tA$ est inversible, d'inverse $({}^tA)^{-1}$. □

Remarque 10

Puisque (A inversible) $\Rightarrow$ (${}^tA$ inversible) et (${}^tA$ inversible) $\Rightarrow$ (${}^t({}^tA) = A$ inversible),
on a l'équivalence : $\boxed{A \text{ inversible} \iff {}^tA \text{ inversible}}$

Exercice 12

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^3. En déduire que N n'est pas inversible.

On a $N^3 = 0_3$.
Si jamais N était inversible, alors N^3 le serait aussi.
Mais la matrice nulle n'est pas inversible : contradiction ! Ainsi N n'est pas inversible.

Méthode : "Simplifier" par une matrice inversible.

Soit A une matrice carrée. Soient B et C des matrices de sorte que les produits suivants on un sens (donc par nécessairement carrées).

- Si $\boxed{AB = AC}$ et $\underline{A \text{ est inversible}}$, alors en multipliant à gauche par A^{-1} on obtient :

$$A^{-1}AB = A^{-1}AC \iff I_nB = I_nC \iff \boxed{B = C}$$

- De même, si $\boxed{BA = CA}$ et $\underline{A \text{ est inversible}}$, en multipliant à droite par A^{-1} on obtient :

$$BAA^{-1} = CAA^{-1} \iff BI_n = CI_n \iff \boxed{B = C}$$

Exercice 13

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AB.
En déduire que A n'est pas inversible.

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$.
Si jamais A était inversible, en multipliant à gauche par A^{-1}, on obtiendrait $A^{-1}AB = A^{-1}0_3$, c'est à dire $B = 0_3$: contradiction ! Ainsi A n'est pas inversible.

Terminons par évoquer un résultat très utile, admis pour l'instant.
Pour montrer qu'une matrice A est inversible et déterminer l'inverse il faut, d'après la définition, vérifier deux égalités : $AB = I_n$ et $BA = I_n$. En fait, une seule égalité suffit !

Théorème 2 ("Un seul côté suffit" (admis))

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = I_n$.

Alors A et B sont inversibles et on a $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

Attention !

À nouveau, ceci ne fonctionne qu'avec des matrices **carrées** !
On peut très bien trouver des matrices non carrées $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telles que $AB = I_n$, mais A^{-1} et B^{-1} ne sont même pas définis !

Exercice 14

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB.
En déduire que A est inversible et donner son inverse.

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$. On en déduit que $A \times (\frac{1}{2}B) = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(2I_3) = I_3$.

Ceci montre que A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4.2 Calcul d'inverse dans des cas particuliers

Inverse d'une matrice diagonale

Proposition 11 (Inverse d'une matrice diagonale)

Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Alors D est inversible si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \neq 0$

et dans ce cas $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Preuve :

Si $M = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$, on sait que $DM = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$

- Supposons que l'un des coefficients diagonaux de D soit nul : disons $\lambda_{i_0} = 0$ pour un $i_0 \in [\![1, n]\!]$.
Alors en choisissant $\mu_{i_0} = 1$ et $\mu_i = 0$ pour $i \neq i_0$, on obtient $DM = 0_n$.
Si jamais D était inversible, en multipliant à gauche par D^{-1}, on obtiendrait $M = 0_n$.
C'est absurde puisque $M \neq 0_n$ (car $\mu_{i_0} \neq 0$) ! Ainsi D n'est pas inversible.

- Supposons que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \neq 0$. Alors on peut poser $\mu_i = \dfrac{1}{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
et on obtient $DM = I_n$. Cette égalité montre que D est inversible, d'inverse M^{-1}, d'où le résultat.□

Exemples

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ non inversible !

Inverse d'une matrice 2×2

Théorème 3 (Inverse d'une matrice 2×2)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

et dans ce cas $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Preuve :

Posons $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On calcule $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$

- Si $ad - bc = 0$, on obtient $AB = 0_2$.
Si A était inversible, on obtiendrait $A^{-1}AB = A^{-1}0_2$, c'est à dire $B = 0_2$.
Cela donne $a = b = c = d = 0$, donc $A = 0_2$. Mais alors A n'est pas inversible : absurde !
Ainsi, A n'est pas inversible.

- Si $ad - bc \neq 0$, alors on voit que $A(\frac{1}{ad-bc}B) = \frac{1}{ad-bc}AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.
Ceci montre que A est inversible, d'inverse $\frac{1}{ad-bc}B$, d'où le résultat. □

Exercice 15

Calculer l'inverse lorsque c'est possible : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

- On a $1 \times 4 - 3 \times 2 = -2 \neq 0$.
  Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
- On a $1 \times (-2) - 2 \times -(1) = 0$ donc B n'est pas inversible.

Inverse à l'aide d'un polynôme annulateur

Méthode : Inversibilité à partir d'un polynôme annulateur

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose qu'on dispose de $P = a_p X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $\boxed{P(A) = 0_n}$.
On a donc :

$$a_p A^p + a_{p-1}A^{p-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0_n.$$

- Si $a_0 = 0$ (c'est à dire si 0 est racine de P), alors en factorisant par A :

$$\underbrace{\left(a_p A^{p-1} + a_{p-1}A^{p-2} + \ldots a_1 I_n\right)}_{B} A = 0_n.$$

Si la matrice B ainsi identifiée est non nulle, alors A **n'est pas inversible**,
car sinon en multipliant à droite par A^{-1}, on obtiendrait $B = 0_n$: absurde.

- Si $a_0 \neq 0$ (c'est à dire si 0 n'est pas racine de P), alors en <u>isolant I_n</u> et en factorisant par A :

$$(a_p A^{p-1} + a_{p-1}A^{p-2} + \ldots a_1 I_n)A = -a_0 I_n \quad \text{donc} \quad \underbrace{-\frac{1}{a_0}(a_p A^{p-1} + a_{p-1}A^{p-2} + \ldots a_1 I_n)}_{B} A = I_n$$

Cette égalité montre que A est inversible, d'inverse $A^{-1} = B$.

Exercice 16

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = X^3 - 3X^2 + 2X$. On a $P(A) = 0_3$. Qu'en déduit-on ?
2. Soient $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = X^2 - 3X + 2$. On a $P(B) = 0_3$. Qu'en déduit-on ?

1. On a $A^3 - 3A^2 + 2A = 0_3$, c'est à dire $A(A^2 - 3A + 2I_3) = 0_3$.
On calcule $A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0_3$.
Donc A n'est pas inversible (sinon en multipliant à gauche par A^{-1} on obtient $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$).
2. On a $B^2 - 3B + 2I_3 = 0_3$, c'est à dire $B^2 - 3B = -2I_3$ c'est à dire $(B - 3I_3)B = -2I_3$.
On a donc $\left(\frac{-1}{2}(B - 3I_3)\right)B = I_3$.
Ceci montre que B est inversible et $B^{-1} = \dfrac{-1}{2}(B - 3I_3) = \dfrac{-1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Pour calculer l'inverse d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en général (pour $n > 2$), il nous faut établir un lien entre inversion de matrices et résolution de systèmes linéaires.

4.3 Matrices et systèmes linéaires

Méthode : Écriture matricielle d'un système linéaire

Soit le système de n équations à p inconnues suivant : $(S)\left\{\begin{array}{l} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \ldots + A_{1,p}x_p = b_1 \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \ldots + A_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad = \vdots \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + \ldots + A_{n,p}x_p = b_n \end{array}\right.$

Alors en notant : $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,j} & \cdots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,j} & \cdots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & A_{i,2} & \cdots & A_{i,j} & \cdots & A_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,j} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

(de sorte que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Le système linéaire (S) est équivalent à l'équation matricielle : $\boxed{AX = Y \quad \text{(d'inconnue } X)}$

C'est l'**écriture matricielle du système**. A est appelée la **matrice associée au système** (S).

Preuve de cette "formulation équivalente" :

Il suffit de noter que $AX = \begin{pmatrix} A_{1,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \ldots, A_{1,p}x_p \\ \vdots \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + \ldots, A_{n,p}x_p \end{pmatrix}$

de sorte que l'égalité $AX = Y$ traduit exactement les n équations du système (S). □

Exercice 17

1. Écrire le système $\left\{\begin{array}{l} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 5y - 2z = -1 \end{array}\right.$ sous forme matricielle.

2. Écrire le système $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \\ -x + y - 2z = -1 \end{array}\right.$ sous forme matricielle.

1. Le système équivaut à $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ c'est à dire à $AX = Y$, où :

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Le système équivaut à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ c'est à dire à $AX = Y$, où :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Notons que si (S) est un système de n équations à n inconnues (**"système carré"**), alors A est une **matrice carrée** d'ordre n.
Dans ce cas, on peut établir un lien entre inversibilité de le matrice A et système de Cramer :

Théorème 4 (Inversibilité et système de Cramer)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est inversible si et seulement si :

Quel que soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ fixé, l'équation $AX = Y$ admet une unique solution.
Autrement dit : le système linéaire (S) associé est de Cramer, quel que soit le second membre !

L'unique solution est alors $X = A^{-1}Y$.

Preuve :

- Supposons A inversible. Alors pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ fixé, on a les équivalences :

$$AX = Y \iff A^{-1}AX = A^{-1}Y \iff I_nX = A^{-1}Y \iff X = A^{-1}Y.$$

Ceci montre que l'équation $AX = Y$ d'inconnue X admet l'unique solution $X = A^{-1}Y$.

- Inversement, supposons que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = Y$ admet une unique solution.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons Y_i la matrice colonne qui ne contient que des 0, sauf un 1 à la ligne i.
L'équation $AX = Y_i$ d'inconnue X admet une unique solution, que l'on note X_i.
Considérons alors la matrice B obtenue en "fusionnant" les colonnes X_1, X_2, $\dots$, X_n.
Notons-la ainsi : $B = [X_1, X_2, \dots, X_n] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En appliquant les règles du produit matriciel, on constate facilement que le produit AB donne :

$$AB = [AX_1, AX_2, \dots, AX_n] = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n] = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right] = I_n.$$

Cette égalité montre que A est inversible (d'inverse B), ce qui conclut la preuve. $\square$

Exercice 18

En utilisant la forme matricielle, résoudre le système $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + y = -1 \end{cases}$

Le système se ré-écrit sous forme matricielle : $\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$.

Comme $2 \times 1 - 1 \times 1 = 1 \neq 0$, la matrice est inversible et $\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}$.

Ainsi on a les équivalences :

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-8\end{pmatrix}.$$

L'unique solution est donc $(x, y) = (7, -8)$.

Remarque 11

On pourra retenir qu'un système de deux inconnues à deux équations $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ admet ainsi une unique solution si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

4.4 Calcul pratique de l'inverse

Le Théorème 4 nous permet d'établir une méthode très robuste pour déterminer si une matrice A quelconque est inversible et, le cas échéant, de calculer A^{-1} :

Méthode : Calcul de A^{-1} en résolvant un système linéaire.

Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On souhaite déterminer si A est inversible, et calculer (si possible) A^{-1}.

Fixer $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ quelconque, et $\boxed{\text{résoudre l'équation } AX = Y.}$

Cela revient à résoudre le système (S) $\left\{\begin{array}{l} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \ldots + A_{1,n}x_n = b_1 \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \ldots + A_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad = \vdots \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + \ldots + A_{n,n}x_n = b_n \end{array}\right.$

- S'il n'y a **aucune solution ou plusieurs solutions**, la matrice A n'est **pas inversible**.
- S'il y a une **unique solution**, la matrice A est **inversible**.
À l'issue de la résolution, on exprime l'unique solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ en fonction de $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Cette relation peut toujours s'écrire sous la forme $\boxed{X = BY, \text{ et on reconnait } B = A^{-1}.}$

Exercice 19

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, et calculer son inverse.

Pour tous $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on a les équivalences :

$$AX = Y \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rl} x - z &= a \\ x - y &= b \\ x - y + z &= c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x - z &= a \\ -y + z &= b - a \\ -y + 2z &= c - a \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rl} x - z &= a \\ -y + z &= b - a \\ z &= c - b \end{array}\right.$$

On voit ici que le système a une unique solution (système triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls !) : A est donc inversible. Terminons la résolution :

$$AX = Y \iff \left\{\begin{array}{rl} x - z &= a \\ -y + z &= b - a \\ z &= c - b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = a - b + c \\ y = a - 2b + c \\ z = \quad -b + c \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
$$\iff X = A^{-1}Y$$

On identifie donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si on veut juste savoir si A est inversible (sans aller jusqu'à calculer l'inverse) on voit que l'on a la réponse dès que le pivot de Gauss est terminé. Si l'on est astucieux, on peut-même ne pas s'embêter à manipuler le second membre en se contentant de regarder le "système homogène associé" !

Théorème 5 (Inversibilité et système linéaire homogène)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est inversible si et seulement si :

L'équation $AX = 0_{n,1}$ admet l'unique solution $X = 0_{n,1}$.
Autrement dit : le système linéaire **homogène** (S_h) est de Cramer.

Preuve :

Le Théorème 4 précédent affirme que A est inversible si et seulement l'équation $AX = Y$ admet une unique solution quel que soit le second membre $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La résolution de cette équation se ramène à la résolution d'un système linéaire carré, or on sait (cf. chapitre "Systèmes Linéaires") qu'un tel système est de Cramer si et seulement si le système homogène associé est de Cramer !
Ainsi, quel que soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ fixé,

$$AX = Y \text{ admet une unique solution} \iff AX = 0_{n,1} \text{ admet une unique solution,}$$

d'où le résultat. $\square$

Exercice 20

À quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

A est inversible si et seulement si l'équation $AX = 0$ admet pour unique solution $X = 0$.

$$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y & = 0 \\ y - z & = 0 \\ x + y + \alpha z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y & = 0 \\ y - z & = 0 \\ -y + \alpha z & = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + 2y & = 0 \\ y - z & = 0 \\ (\alpha - 1)z & = 0 \end{cases}$$

Ce système est de Cramer si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Ainsi A est inversible si et seulement si $\alpha \neq 1$.

Corollaire 2 (Inversibilité des matrices triangulaire)

Une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Preuve :

- Soit $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ 0 & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure.

A est inversible si et seulement si l'équation $AX = 0$ admet l'unique solution $X = 0$.
Cette équation se ramène à la résolution d'un système triangulaire homogène : il est de Cramer si et seulement si les coefficients diagonaux $A_{1,1}, \dots, A_{n,n}$ sont tous non nuls.

- Si A est triangulaire inférieure, appliquer le point précédent à ${}^tA$, qui est triangulaire supérieure.

(on rappelle l'équivalence : A est inversible $\iff {}^tA$ est inversible). $\square$

Exemples

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ est inversible, $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$ ne l'est pas.

Enfin, le critère d'inversibilité du Théorème 5 permet parfois de repérer "à l'oeil" qu'une matrice n'est pas inversible :

Corollaire 3 (Petites conditions de "non-inversibilité")

Soit A une matrice carrée.

- Si A admet une ligne (ou une colonne) de 0, alors A n'est pas inversible.
- Si A admet deux lignes (ou deux colonnes) proportionnelles, alors A n'est pas inversible.

Preuve :

Rappelons encore que A est inversible si et seulement si le système linéaire homogène carré (H) associé à l'écriture matricielle $AX = 0$ est de Cramer.

- Si A admet une ligne nulle, alors l'une des lignes du système (H) est : "$0 = 0$".
On peut alors supprimer cette ligne du système, et on sait qu'il y aura une infinité de solutions.
- Si A admet deux lignes proportionnelles, disons "$L_i = \lambda L_j$", alors en effectuant l'opération $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ sur le système (H), on se ramène à un système carré contenant l'équation "$0 = 0$".
Il y a donc à nouveau une infinité de solutions.

Si A admet une colonne de zéro ou deux colonnes proportionnelles,
on applique le raisonnement précédent à ${}^tA$: ${}^tA$ n'est pas inversible, et donc A non plus. $\square$

Exemples

On peut remarquer tout de suite que les matrices suivantes ne sont pas inversibles :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 0\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0 & 2\\ 3 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & -1\\ -2 & -6 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Attention !

Il n'est pas suffisant de repérer qu'une matrice n'a pas de ligne/colonne de zéro ou de lignes/colonnes proportionnelles pour affirmer qu'elle est inversible !

Exemple : $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

On peut constater par exemple que $A\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ ce qui met en défaut le critère du Théorème 4.

Si l'on ne repère pas de "proportionnalité", pour montrer qu'un matrice générale est inversible ou non, on étudiera le système linéaire associé (méthode vue précedemment).

Terminons avec une autre méthode pour calculer A^{-1}, parfaitement équivalente à la méthode précédente, mais peut-être plus "compacte" :

Théorème 6 (Gauss-Jordan (admis))

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors on peut transformer A en la matrice identité I_n à l'aide d'un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes de la matrice.

L'inverse A^{-1} est obtenue en effectuant, dans le même ordre, les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de la matrice identité.

Méthode : Calcul de A^{-1} avec la méthode de Gauss-Jordan

Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- Permuter deux lignes de A.
- Multiplier une ligne de A par un coefficient non nul.
- Ajouter à une ligne de A un multiple d'une autre ligne.

Méthode de Gauss-Jordan : On écrit la matrice A, et à sa droite la matrice identité : $\boxed{(A \,|\, I_n)}$.
On utilise des opérations sur les lignes (uniquement !) pour transformer petit à petit A en I_n.
À chaque étape, on applique ces mêmes opérations sur la matrice I_n à droite : celle-ci se transformera petit à petit en A^{-1}.

$\boxed{1}$ On applique l'algorithme du pivot de Gauss pour transformer A en une matrice triangulaire supérieure. À l'issue de cette étape, on a donc la forme :

$$\begin{pmatrix} A'_{1,1} & A'_{1,2} & \dots & \dots & A'_{1,n} \\ 0 & A'_{2,2} & A'_{2,3} & \dots & A'_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & A'_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A'_{n,n} \end{pmatrix}$$

Si l'un des coefficients diagonaux est nul, A n'est pas inversible ! Sinon on peut poursuivre.

$\boxed{2}$ On multiplie chacune des lignes par une constante pour avoir des 1 sur la diagonale.
On a alors la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & A''_{1,2} & \dots & \dots & A''_{1,n} \\ 0 & 1 & A''_{2,3} & \dots & A''_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & A''_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ On se sert de ces 1 pour annuler tous les coefficients hors de la diagonale en remontant :
La ligne L_n sert à annuler tous les coeffs. de la dernière colonne des lignes précédentes. Puis la ligne L_{n-1} sert à annuler tous les coeffs. de l'avant-dernière colonne des lignes précédentes, etc...

Finalement : On a transformé la matrice A en I_n. À sa droite on lit A^{-1}.

L'écriture obtenue au final est : $\boxed{(I_n \,|\, A^{-1})}$.

Exercice 21

À l'aide de cette méthode, montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, et calculer son inverse.

On écrit $(A|I_n) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ et on applique le pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

A ce stade on sait que A est inversible. Poursuivons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$(I_n|A^{-1})$. On lit donc $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Sommer, multiplier, transposer des matrices.
- Reconnaître des matrices particulières
  (identité, matrice nulle, diagonales, triangulaires, symétriques, antisymétriques).
- Faire facilement le lien entre systèmes linéaires et matrices.
- Calculer l'inverse d'une matrice 2×2.
- Calculer l'inverse d'une matrice 3×3 ou 4×4 en résolvant un système linéaire.

Pour suivre

- Calculer les puissances A^k dans un exercice guidé.
- Utiliser les règles de calculs (Prop. 2, 3, 4, 5, 6, 10) dans des exercices théoriques.
- Manipuler des polynômes de matrices $P(A)$.
- Déterminer un inverse sans calcul à l'aide d'un polynôme annulateur.
- Repérer quand une matrice n'est "manifestement" pas inversible.

Pour les ambitieux

- Utiliser les critères d'inversibilité (Théorèmes 4 et 5) dans un cadre théorique.
- Inverser une matrice "à paramètre".
- Utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour inverse rapidement une matrice.