TP # 16

Corrigé

(FLATHEAD game) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On génère un premier entier X choisi uniformément dans l'ensemble $[\![1, 2n]\!]$.
- On génère un second entier Y forcément différent du premier :
  Y est choisi uniformément dans l'ensemble $[\![1, 2n]\!] \setminus \{X\}$.

On propose alors le jeu suivant :
On montre à un joueur la valeur du premier entier X, et celui-ci doit prévoir si la valeur du second entirer Y sera plus petite ou plus grande que X.

```
import numpy.random as rd
def game(n) :
    # Generation de la valeur X
    X = rd.randint(1,2*n+1) # entier aléatoire entre 1 et 2n

    # Generation de la valeur Y
    L = list(range(1,2*n+1)) # listes des entier entre 1 et 2n
    L.remove( X ) # on retire la valeur X de la liste
    i = rd.randint(0,2*n-1)
    Y = L[i] # une valeur aléatoire de la liste L

    # Interaction avec le joueur
    print("X = ",X)
    text = input("Y  sera-t-il plus petit ou plus grand ? ")

    if (text == "petit" and Y < X) or (text == "grand" and Y > X) :
        print("Bravo !")
    else :
        print("Perdu !")

    print("Valeur de Y : ", Y)
```

1. Il est clair que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2n]\!])$.

2. Soient $i, j \in [\![1, 2n]\!]$.
Si l'évènement $[X = i]$ est réalisé, Y prend une valeur choisie uniformément dans l'ensemble $[\![1, 2n]\!] \setminus \{i\}$, qui contient $2n - 1$ entiers. On a ainsi :

$$\text{Si } j \neq i,\ P_{[X=i]}(Y = j) = \frac{1}{2n-1} \qquad \text{Si } j = i,\ P_{[X=i]}(Y = j) = 0.$$

3. Soit $j \in [\![1, 2n]\!]$. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $([X = i])_{1 \leqslant i \leqslant 2n}$:

$$\begin{aligned}
P(Y = j) &= \sum_{i=1}^{2n} P([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{i=1}^{2n} P(X = i) P_{[X=i]}(Y = j) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2n} P_{[X=i]}(Y = j) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} P_{[X=i]}(Y = j) \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{i \in [\![1,2n]\!] \setminus \{j\}} \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2n} \times (2n-1) \times \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall j \in [\![1, 2n]\!],\ P(Y = j) = \dfrac{1}{2n}$, c'est à dire que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2n]\!])$.
Ainsi, Y suit la même loi de probabilité que X ! Cela peut sembler bizarre... Mais si on imagine que l'on observe juste la valeur de Y sans connaitre celle de X, il est logique de s'attendre à ce que cette valeur soit choisie uniformément entre 1 et $2n$.

4. Soit $i \in [\![1, 2n]\!]$. Parmi les entiers entre 1 et $2n$, il y en a $i - 1$ qui sont strictement inférieurs à i, et $2n - i$ qui sont strictement supérieurs à i. On a donc logiquement :

$$P_{[X=i]}(Y < X) = \frac{i-1}{2n-1} \quad \text{et} \quad P_{[X=i]}(Y > X) = \frac{2n-i}{2n-1}.$$

Cherchons quelle probabilité est la plus élevée :

$$\frac{i-1}{2n-1} < \frac{2n-i}{2n-1} \iff i - 1 < 2n - i \iff 2i < 2n + 1 \iff i < n + \frac{1}{2} \iff i \leqslant n.$$

Ainsi : pour $i \in [\![1, n]\!]$, la proba $P_{[X=i]}(Y < X)$ est la plus grande,
pour $i \in [\![n+1, 2n]\!]$, la proba $P_{[X=i]}(Y > X)$ est la plus grande,

Conclusion :
Si X prend une valeur entre 1 et n, il vaut mieux parier que Y sera plus grand.
Si X prend une valeur entre $n + 1$ et $2n$, il vaut mieux parier que Y sera plus petit.

Cette stratégie est très intuitive dès que l'on pratique un petit peu le jeu.

5. On suppose que le joueur adopte cette stratégie optimale.
On note A l'évènement "Le joueur fait la bonne prédiction".
Ainsi, si $1 \leqslant X \leqslant n$, l'évènement A est réalisé lorsque l'on obtient $Y > X$.
Si $n+1 \leqslant X \leqslant 2n$, l'évènement A est réalisé lorsque l'on obtient $Y < X$.
Ceci conduit (toujours avec la formule des probabilités totales) à :

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{i=1}^{2n} P([X=i] \cap A) = \sum_{i=1}^{n} P([X=i] \cap A) + \sum_{i=n+1}^{2n} P([X=i] \cap A) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P([X=i] \cap [Y > X]) + \sum_{i=n+1}^{2n} P([X=i] \cap [Y < X]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(X=i) P_{[X=i]}(Y > X) + \sum_{i=n+1}^{2n} P(X=i) P_{[X=i]} PY < X) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2n} \frac{2n-i}{2n-1} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \frac{i-1}{2n-1} \\
&= \frac{1}{2n(2n-1)} \left(\sum_{i=1}^{n} (2n-i) + \sum_{i=n+1}^{2n} (i-1) \right) \\
&= \frac{1}{2n(2n-1)} \left(\sum_{j=n}^{2n-1} j + \sum_{i=n}^{2n-1} j \right) = \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{j=n}^{2n-1} j \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \frac{(2n-1+n)(2n-1-n+1)}{2} = \frac{3n-1}{4n-2}.
\end{aligned}
$$

6. On a facilement $\lim_{n \to +\infty} \frac{3n-1}{4n-2} = \frac{3}{4}$ (par exemple avec des équivalents)
Ainsi, quand n est grand, la probabilité de gagner avec la stratégie optimale est d'environ $3/4$, c'est à dire 75% !