TP # 26

Matrices : quelques révisions

Diagonalisation assistée par Python

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **diagonalisable** si il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale telles que : $M = PDP^{-1}$, ou encore $P^{-1}MP = D$.

On effectuera les importations suivantes :

```
import numpy as np ; import numpy.linalg as al
```

Exercice 1

Partie I - Diagonalisation d'une matrice avec Python

On considère $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Définir cette matrice M en Python :

```
M =
```

Etape 1 : Recherche des "valeurs propres".
On cherche les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que la matrice $M - \lambda I_3$ soit non-inversible.

Vérifier, à l'aide de Python, que les valeurs $\lambda = 2, 6, -4$ conviennent.
On calculera pour cela le rang de 3 matrices appropriées, à l'aide de l'instruction `al.matrix_rank(A)`.

Etape 2 : Recherche des "vecteurs propres" associés.
Si la matrice $M - \lambda I_3$ est non-inversible, on peut alors trouver une matrice colonne X non-nulle telle que $(M - \lambda I_3)X = 0$, c'est à dire $MX = \lambda X$.

- Pour la valeur $\lambda = 2$, déterminer par un calcul une telle matrice colonne X.

.

- Pour la valeur $\lambda = 6$, vérifier avec Python que la colonne $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient, c'est à dire que $MY = \lambda Y$.

- Pour la valeur $\lambda = -4$, vérifier avec Python que la colonne $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

Etape 3 : Construction de la matrice inversible P.

On définit $P = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ la matrice obtenue en concaténant les colonnes X, Y et Z obtenues précédemment.

A l'aide de Python, vérifier que P est inversible et afficher l'inverse P^{-1}.

```
P =
print(                )
```

Calculer, à l'aide de Python, la matrice $D = P^{-1}MP$ et constater la diagonale.

```
D =
print(D)
```

Finalement, on a obtenu $M = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Partie II - Interprétation mathématique

On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M.
Autrement dit, en notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $Mat_{\mathcal{B}}(f) = M$.

1. On admet que les seuls λ tels que $M - \lambda I_3$ est non-inversible sont $\lambda = 2, 6, -4$.
Que dire des ensembles $Ker(f - \lambda Id)$, en fonction de la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$?

2. Donner (au vu de l'étude en Python précédente), trois vecteurs non-nuls
$u \in Ker(f - 2Id)$, $\quad v \in Ker(f - 6Id)$, $\quad w \in Ker(f + 4Id)$.

3. Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer $Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.

4. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$)

<u>Moralité :</u> "Diagonaliser" la matrice M revient exactement à déterminer une base $\mathcal{B}'$ où la matrice de l'endomorphisme f est diagonale. La matrice P dans l'égalité $D = P^{-1}MP$ est en fait la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Corrigé de la Partie II

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les équivalences :

$$M-\lambda I_3 \text{ inversible} \iff f-\lambda Id \text{ bijectif} \iff f-\lambda Id \text{ injectif} \iff Ker(f-\lambda Id)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

Puisque la matrice $M-\lambda I_3$ est inversible pour tout $\lambda \notin \{2,6,-4\}$, on en déduit que

$$\forall \lambda \notin \{2,6,-4\},\ Ker(f-\lambda Id)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

Par ailleurs, on a vu avec les calculs de rang en Python que

$$\forall \lambda \in \{2,6,-4\},\ rg(f-\lambda Id)=rg(M-\lambda I_3)=2.$$

D'après le théorème du rang, on en déduit

$$\forall \lambda \in \{2,6,-4\},\ \dim(Ker(f-\lambda Id))=\dim(\mathbb{R}^3)-2=1.$$

Les espaces $Ker(f-2Id)$, $Ker(f-6Id)$ et $Ker(f+4Id)$ sont donc des SEV de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 : ce sont des droites vectorielles.

2. Rappelons que M est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a vu que :

$$M\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad M\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad M\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=-4\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

En termes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et d'endomorphisme, cela se traduit en :

$$f(u)=2u,\quad ,f(v)=6v,\quad f(w)=-4w.$$

où u,v,w sont les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ admettant les coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ dans la base canonique. Autrement dit, c'est que $u=(1,0,1)$, $v=(1,1,0)$ et $w=(0,1,1)$.
On a donc trouvé :

$$u=(1,0,1)\in Ker(f-2Id),\quad v=(1,1,0)\in Ker(f-6Id),\quad w=(0,1,1)\in Ker(f+4Id).$$

Au passage, puisque ces noyaux sont des droites, il en résulte automatiquement que

$$Ker(f-2Id)=Vect(1,0,1),\quad Ker(f-6Id)=Vect(1,1,0),\quad Ker(f+4Id)=Vect(0,1,1).$$

3. La famille $\mathcal{B}'=(u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, par exemple parce qu'elle est de rang 3 :

$$rg(\mathcal{B}')=rg((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))=rg((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))=3 \quad \text{(calcul facile)}$$

Par construction de u, v et w,

$$f(u)=2\cdot u+0\cdot v+0\cdot w,\quad f(v)=0\cdot u+6\cdot v+0\cdot w,\quad f(w)=0\cdot u+0\cdot v+(-4)\cdot w$$

donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est : $Mat_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&6&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$.
Autrement dit, c'est la matrice D déterminée dans la diagonalisation de la partie I.

4. Par définition, la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ exprime colonne par colonne les coordonées de u, v, w dans la base canonique. Puisque $u=(1,0,1)$, $v=(1,1,0)$ et $w=(0,1,1)$, c'est donc :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Autrement dit, c'est la matrice P déterminée dans la diagonalisation de la partie I.

Moralité : Le procédé de "diagonalisation" de la matrice M effectué dans la partie I revient exactement à trouver un base $\mathcal{B}'$ dans laquelle l'endomorphisme f admet une matrice diagonale.
L'égalité $D=P^{-1}MP$ explique en fait comment la matrice de f "change" quand on passe de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. En remplaçant avec $M=Mat_{\mathcal{B}}(f)$, $D=Mat_{\mathcal{B}'}(f)$, $P=P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, on obtient :

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f)=(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}Mat_{\mathcal{B}}(f)\,P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

c'est à dire (puisqu'on peut montrer qu'en fait $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}=P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$) :

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f)=P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\,Mat_{\mathcal{B}}(f)\,P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

Cette dernière formule est en fait générale, valable pour tout endomorphisme $f\in\mathcal{L}(E)$ et toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ d'un espace vectoriel E de dimension finie.