Programme de khôlles ECG1-B

Semaines 23 et 24

Sommes de SEV, Intégrales impropres

• Énoncés / notions à connaitre :

Somme de sous-espace vectoriels

— Définition de $F+G$. La somme est dite "directe" et on la note $F \oplus G$ lorsqu'il y a unicité de la décomposition. Notion de sous-espaces vectoriels supplémentaires.
— Détermination d'une famille génératrice (voire d'une base) de $F+G$.
— Existence d'un supplémentaire en dimension finie (en complétant une base de F).
— Formule de Grassmann : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.
— Diverses caractérisations pour montrer que la somme $F+G$ est directe.
— En conséquence : diverses caractérisations pour montrer que F et G sont supplémentaires.
— Lorsque $E = F \oplus G$, notion de projecteur sur F (ou G) parallèlement à G (ou F).
Propriétés élémentaires, noyau et image d'un projecteur.
Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $f^2 = f$.

Intégration sur un intervalle quelconque

— Si $f \in C([a,b[,\mathbb{R})$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge lorsque $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie. Définition similaire à gauche lorsque $f \in C(]a,b],\mathbb{R})$.
Si $f \in C(]a,b[,\mathbb{R})$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si, pour un $c \in]a,b[$, les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ convergent.
— Cas où f est prolongeable par continuité en a et/ou en b.
— Propriétés classiques de l'intégrale : relation de Chasles, linéarité, croissance, positivité.
Intégrale d'une fonction paire/impaire sur $\mathbb{R}$.
— Nature des intégrales usuelles : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$.
— Théorèmes de comparaison pour déteminer la nature de l'intégrale d'une fonction positive.
— Notion de convergence absolue. Elle implique la convergence.
— Intégration par partie (dans une intégrale standard, puis passage à la limite).
— Changement de variable dans une intégrale impropre.

• Démonstrations à connaitre :

— La somme $F+G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$. (Théorème 1)
— Intégrale d'une fonction paire/impaire sur $\mathbb{R}$ (Proposition 8)
— Convergence des intégrales de Riemann (Théorème 1)