7

Limites de suites

1 Suites convergentes, suites divergentes.

1.1 Convergence vers un réel, divergence

Définition 1 (Notion de convergence)

On dit qu'une suite u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ (ou qu'elle admet pour limite le réel ℓ) lorsque :

Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n, sauf un nombre fini d'entre elles.

Autrement dit lorsque :

Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

De manière équivalente, on peut aussi écrire, avec des quantificateurs :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$

La suite u est alors dite convergente.
Le réel ℓ est appelé la limite de la suite et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou bien $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

Dessin :

Il faut comprendre que u_n peut devenir aussi proche que l'on veut de ℓ, pourvu que n soit assez grand !
Quel que soit un seuil $\varepsilon > 0$ fixé (aussi petit soit-il), on peut toujours trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite u sont à une distance de ℓ inférieure à ε.

Remarque 1

On a l'équivalence : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0.}$

Exercice 1

En vérifiant la définition, démontrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

On doit vérifier : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ \left|\dfrac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon.$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On a les équivalences : $\left|\dfrac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon \iff \dfrac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \dfrac{1}{\varepsilon} \iff n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Ainsi en posant $N_\varepsilon = \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$, on a bien $\forall n \geqslant N_\varepsilon,\ \left|\dfrac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon.$

Remarque 2

En pratique, on sera rarement amené à montrer qu'une suite converge en vérifiant cette définition : on préférera utiliser des limites connues de suites usuelles, des encadrements, la monotonie...

Définition 2 (Suite divergente)

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemples

- La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge : elle n'admet pas de limite lorsque $n \to +\infty$.
- La suite $(n^2+1)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge : elle ne converge pas vers un <u>réel</u> $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$.

Proposition 1 (Unicité de la limite)

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est unique.
Lorsque celle-ci existe, on pourra donc parler sans équivoque de $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Preuve visuelle :

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge à la fois vers ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 \neq \ell_2$, disons par exemple $\ell_1 < \ell_2$.
Alors en posant $\varepsilon = \frac{\ell_2-\ell_1}{3} > 0$, les intervalles $I_1 =]\ell_1-\varepsilon, \ell_2+\varepsilon[$ et $I_2 =]\ell_2-\varepsilon, \ell_2+\varepsilon[$ doivent tous deux contenir toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang : c'est impossible !
<u>Illustration :</u> □

Proposition 2 (Encadrement à partir d'un certain rang)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Soient $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b < \ell < c$.
Alors on a : $b < u_n < c$ à partir d'un certain rang, c'est à dire :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ b < u_n < c.$$

Preuve :

$I =]b, c[$ est un intervalle ouvert contenant ℓ. D'après la définition de la limite, I doit donc contenir toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. □

Exemple

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell > 0$, alors on peut affirmer que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

(Attention, la réciproque est fausse : une suite à termes strictement positifs peut converger vers 0)

Corollaire 1 (Toute suite convergente est bornée)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Preuve :

Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$. En posant $K_1 = |\ell| + 1$, on a $-K_1 < \ell < K_1$.
Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ -K_1 < u_n < K_1$, c'est à dire : $\forall n \geqslant N,\ |u_n| \leqslant K_1$.
De plus, en posant $K_2 = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|)$, on a : $\forall n \in [\![0, N-1]\!], |u_n| \leqslant K_2$.
Donc, en posant $K = \max(K_1, K_2)$, on a finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant K$. □

1.2 Divergence vers $\pm\infty$

Lorsqu'une suite u ne converge pas vers un réel (i.e lorsqu'elle est divergente), deux cas sont possibles :

1) La suite u n'admet pas de limite.
2) La suite u tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, selon les définitions suivantes :

Définition 3 (Divergence vers $+\infty$)

On dit qu'une suite u tend vers $+\infty$ lorsque :

Tout intervalle $]A, +\infty[$ avec $A > 0$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

De manière équivalente, avec des quantificateurs :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty \iff \forall A > 0,\ \exists N_A \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_A,\ u_n > A.$

On note dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou bien $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Dessin :

Définition 4 (Divergence vers $-\infty$)

On dit qu'une suite u tend vers $-\infty$ lorsque :

Tout intervalle $]-\infty, A[$ avec $A < 0$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

De manière équivalente, avec des quantificateurs :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty \iff \forall A < 0,\ \exists N_A \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_A,\ u_n < A.$

On note dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou bien $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$.

Dessin :

Proposition 3 (Majoration/minoration)

Une suite qui tend vers $+\infty$ est minorée et non majorée.
Une suite qui tend vers $-\infty$ est majorée et non minorée.

2 Calculs de limites

2.1 Limites de suites classiques

Théorème 1 (Limites usuelles)

- **Puissances de n :** $\forall \alpha > 0, \lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{-\alpha} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$

  En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

- **Exponentielle, logarithme :** $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$

- **Suite géométrique :**

	$q > 1$	$q = 1$	$-1 < q < 1$	$q \leqslant -1$
$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	Pas de limite

- **Factorielle :** $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$

On peut être plus précis et comparer la "vitesse de divergence vers $+\infty$" de ces suites :

Théorème 2 (Croissances comparées)

Pour tous $a, b, c > 0$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^a}{(\ln(n))^b} = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^{cn}}{n^a} = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n!}{e^{cn}} = +\infty$

On pourra ainsi retenir : $(\ln(n))^b << n^a << e^{cn} << n!$

Remarques 3

- La notation "<<" n'est ni standard, ni rigoureuse ! Elle signifie "très petit devant" (pour n grand). On verra plus tard une manière de rendre ces "comparaisons" rigoureuses mathématiquement.
- On peut ajouter la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans ces comparaisons :
  - Si $q > 1$, alors $q^n = e^{cn}$ avec $c = \ln(q) > 0$. Donc : $(\ln n)^b << n^a << q^n << n!$
  - Si $q \in]-1, 1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$. Donc : $q^n << (\ln(n))^b << n^a << e^{cn} << n!$

Exemples

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n e^{-n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5^n}{n!} = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{(\ln(n))^{1000}} = +\infty$

2.2 Opérations et limites

Limite d'une somme :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Limite d'un produit :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n$	$\ell \times \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Limite d'un quotient : (si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$\ell \neq 0$	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	0^-	0^+	0^-	0^+	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0	?

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell<0$ ou 0^-	$\ell>0$ ou 0^+	$\ell<0$ ou 0^-	$\ell>0$ ou 0^+	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?

Remarque 4

- Ici, 0^+ signifie : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
- Ici, 0^- signifie : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n < 0$ à partir d'un certain rang.

Exemples

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{e^{-n}} = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+2^{-n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2-\frac{1}{\sqrt{n}}}{-2^{-n}} = -\infty$

Méthode : Déterminer la limite d'un quotient de polynômes en n

- **Limite d'un polynôme :** $\boxed{u_n = a_0 + a_1 n + \ldots + a_{p-1}n^{p-1} + a_p n^p}$ avec $a_p \neq 0$.

Factoriser par le terme de plus haut degré : $u_n = a_p n^p \left(\frac{a_0}{a_p n^p} + \frac{a_1}{a_p n^{p-1}} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{a_p n} + 1\right)$.

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_p n^p$

- **Limite d'un quotient de polynôme en n :** $\boxed{u_n = \frac{a_0 + a_1 n + \ldots + a_p n^p}{b_0 + b_1 n + \ldots + b_q n^q}}$ avec $a_p, b_q \neq 0$.

Factoriser numérateur et dénominateur : $u_n = \dfrac{a_p n^p \left(\frac{a_0}{a_p n^p} + \frac{a_1}{a_p n^{p-1}} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{a_p n} + 1\right)}{b_q n^q \left(\frac{b_0}{b_q n^q} + \frac{b_1}{b_q n^{q-1}} + \ldots + \frac{b_{q-1}}{b_q n} + 1\right)}$.

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_p n^p}{b_q n^q} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_p}{b_q} n^{p-q}$.

Exercice 2

Déterminer la limite des suites admettant les termes généraux suivants :

(a) $u_n = -3n^3 + 2n^2 + 1$ (b) $v_n = \frac{n+3}{n-2}$ (c) $w_n = \frac{2n^3+2n-1}{n^4+n^2-2n}$

(a) $u_n = -3n^3\left(1 + \frac{2n^2}{-3n^3} + \frac{1}{-3n^3}\right) = -3n^3\left(1 - \frac{2}{3n} - \frac{1}{3n^3}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

(b) $v_n = \frac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n\left(1-\frac{2}{n}\right)} = \frac{1+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$

(c) $w_n = \dfrac{2n^3\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^3}\right)}{n^4\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)} = \dfrac{2\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^3}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Remarque 5

Cette idée de "factoriser par le terme le plus grand" est bien souvent utile pour lever des indéterminées, notamment quand il s'agit de calculer la limite d'une somme de termes.

Exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^n - n) = \lim\limits_{n\to+\infty} e^n(1-\frac{n}{e^n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty.$

Terminons par un résultat simple mais parfois utile :

Proposition 4 (Décalage d'indice)

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ (avec $a\in\mathbb{R}$ ou $a=\pm\infty$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n-1} = a$.

Plus généralement, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, alors : $\forall k\in\mathbb{Z},\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+k} = a$.

2.3 Composition de limites par une fonction

SPOILER...

On se permet ici d'anticiper un peu quant aux notions de limites de fonction et de continuité. Ces points seront étudiés en détail dans des chapitres ultérieurs !

En attendant, on pourra quand même utiliser la notion "intuitive" de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ vue au lycée.

On notera en particulier qu'une fonction f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Théorème 3 (Composition de limites)

Soit u une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ (avec $a\in\mathbb{R}$ ou $a=\pm\infty$).

Soit f une fonction numérique vérifiant $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (avec $b\in\mathbb{R}$ ou $b=\pm\infty$).

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$.

En particulier, si $a\in\mathbb{R}$ et si f est continue au point a, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.

Exemples

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{x\to1} \ln(x) = \ln(1) = 0.$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0.$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan(n^2+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}.$

Méthode : Déterminer la limite d'une suite récurrente convergente

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)}$ où $f : D_f \to \mathbb{R}$.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell\in\mathbb{R}$, et si f est continue en ℓ, alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell \quad\text{et}\quad \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Donc en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient l'équation : $\boxed{\ell = f(\ell)}$.

On dit que ℓ est une **point fixe** de f. Cette équation permet parfois de déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{u_n^2+1}$.

On admet que cette suite converge. Déterminer sa limite.

Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$. En passant à la limite dans $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{u_n^2+1}$, on obtient $\ell = \dfrac{\ell+1}{\ell^2+1}$.
(car la fonction $x \mapsto \frac{x+1}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$)
On résout cette équation :

$$\ell = \frac{\ell+1}{\ell^2+1} \iff \ell(\ell^2+1) = \ell+1 \iff \ell^3+\ell = \ell+1 \iff \ell^3 = 1.$$

L'unique solution de cette équation est $\ell = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2.4 Passage à la limite dans une inégalité

On vient de voir avec l'exemple des suites récurrentes qu'il était utile de "passer à la limite dans une égalité" (lorsque les limites existent !)
Il est également possible de "passer à la limite dans une inégalité" (lorsque les limites existent !)

Théorème 4 (Passage à la limite dans une inégalité (large !))

Soient u et v deux suites satisfaisant : $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.
(Autrement dit : $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant v_n$.)

Si u converge vers ℓ et si v converge vers ℓ', alors on a : $\ell \leqslant \ell'$.

Preuve :

Par l'absurde : si jamais on avait $\ell > \ell'$, alors en posant $\varepsilon = \frac{\ell-\ell'}{3} > 0$,
on aurait à partir d'un certain rang :

$u_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ et $v_n \in]\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon[$

ce qui donne $u_n > \ell - \varepsilon > \ell' + \varepsilon > v_n$: absurde puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$! $\square$

Corollaire 2 (Limite d'une suite minorée/majorée)

- Soit u une suite minorée par $m \in \mathbb{R}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$. Si u converge vers ℓ alors on a : $\ell \geqslant m$.
- Soit u une suite majorée par $M \in \mathbb{R}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$. Si u converge vers ℓ alors on a : $\ell \leqslant M$.

Preuve :

Il suffit d'appliquer le Théorème 4 avec $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = m$ ou bien $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = M$. $\square$

Attention !

Il est possible de passer à la limite uniquement dans des inégalités larges !
Si on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$, on ne peut pas conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$!
(En revanche comme on a en particulier $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$, on pourra conclure $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$)

Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n}$ mais on n'a pas $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\dfrac{1}{n}) < \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$ $(0 < 0)$

Passer à la limite dans une inégalité permet d'obtenir des informations sur la limite d'une suite, qui peuvent se révéler utiles pour calculer sa valeur.

Exercice 4

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\quad v_0 = 5 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2\sqrt{v_n(v_n-3)}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 4$.
2. On admet que v converge. Déterminer sa limite.

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 4$:
- $v_0 = 5 > 4$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $v_n > 4$. Alors $v_{n+1} = 2\sqrt{v_n(v_n-3)} > 2\sqrt{4(4-3)} = 2\sqrt{4} = 4$.

2. Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \in \mathbb{R}$.
En passant à la limite dans $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2\sqrt{v_n(v_n-3)}$, on obtient $\ell = 2\sqrt{\ell(\ell-3)}$ (donc $\ell \geqslant 0$).
On résout cette équation :

$$\begin{aligned} \ell = 2\sqrt{\ell(\ell-3)} \iff \ell^2 = 4\ell(\ell-3) &\iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 4(\ell-3) \\ &\iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 4\ell - 12 \\ &\iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 4. \end{aligned}$$

Or on sait que $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_n > 4, \quad$ donc en passant à la limite, $\ell \geqslant 4$.

La seule solution compatible est donc $\ell = 4$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4$.

Question : Comment démontrer que les suites u et v des Exercices 3 et 4 convergent effectivement ?

On aimerait énoncer des résultats qui, sous certaines hypothèses, garantissent la convergence d'une suite : des théorèmes de convergence !

3 Théorèmes de convergence

3.1 Encadrements et limites

Théorème 5 (Théorème des gendarmes)

Soient a, b, u trois suites satisfaisant : $\quad a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$ à partir d'un certain rang.

Si les suites a et b convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors u converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Preuve rapide :

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell$, on sait qu'à partir d'un certain rang N_ε, on aura $a_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ et $b_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$. Comme $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$, à partir du rang N_ε, on aura également $u_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.
Illustration :

On a donc bien montré : $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N_\varepsilon,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$ $\square$

Exercice 5

Montrer que les suites admettant les termes généraux suivants convergent et déterminer leurs limites.

(a) $u_n = 2 + \dfrac{\sin(n)}{n+1}$ (b) $v_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ (où $x \in \mathbb{R}$)

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$, donc $2 + \dfrac{-1}{n+1} \leqslant 2 + \dfrac{\sin(n)}{n+1} \leqslant 2 + \dfrac{1}{n+1}$.

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$, donc $x - \dfrac{1}{n} < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$.

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = x$.

Corollaire 3 (Théorème des gendarmes, version "valeur absolue")

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et u, b deux suites satisfaisant : $|u_n - \ell| \leqslant b_n$ à partir d'un certain rang.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Preuve :

À partir d'un certain rang, on a : $0 \leqslant |u_n - \ell| \leqslant b_n$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$, le Théorème 5 donne : $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0$.

Cela revient exactement à dire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. $\square$

Exemple

Avec la version "valeur absolue", on aurait pu traiter le (a) de l'Exercice 5 ainsi :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 + \dfrac{\sin(n)}{n+1}$ donc :

$$|u_n - 2| = \left| \frac{\sin(n)}{n+1} \right| = \frac{|\sin(n)|}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

D'après le théorème des gendarmes (version "valeur absolue"), on en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Remarque 6

On pourra retenir le résultat souvent (mais on le re-démontrera à chaque fois) :

Si $\boxed{u_n = a_n b_n \quad \text{avec } (a_n) \text{ bornée et } \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

<u>En effet :</u> On peut introduire $K > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant K$.

Il en résulte : $|u_n| = |a_n||b_n| \leqslant K|b_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ d'après le Théorème des gendarmes (version "valeur absolue").

Il existe un théorème équivalent pour les limites infinies :

Théorème 6 (Théorème de comparaison)

Soient u et v deux suites satisfaisant : $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 6

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = w_n(w_n+1)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geqslant n$.
2. En déduire la limite de la suite w.

1. • $w_0 = 2 \geqslant 0$. • $w_1 = 2 \times 3 = 6 \geqslant 1$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons $w_n \geqslant n$. Alors $w_{n+1} = w_n(w_n+1) \geqslant n(n+1) \geqslant n+1$.

Ceci achève la récurrence.

2. Puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \geqslant n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

3.2 Suites monotones

La monotonie est un outil précieux pour l'étude des limites de suites, grâce au résultat suivant :

Théorème 7 (Théorème de la limite monotone)

• Toute suite croissante u admet une limite. Plus précisément :

- Si u est majorée, alors elle converge et sa limite est $\ell = \sup\left(\left\{u_n, n \in \mathbb{N}\right\}\right) \in \mathbb{R}$.
- Si u n'est pas majorée, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

• Toute suite décroissante v admet une limite. Plus précisément :

- Si v est minorée, alors elle converge et sa limite est $\ell = \inf\left(\left\{v_n, n \in \mathbb{N}\right\}\right) \in \mathbb{R}$.
- Si v n'est pas minorée, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Corollaire 4

Si une suite u est croissante et tend vers ℓ, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leqslant u_n \leqslant \ell$.

Si une suite v est décroissante et tend vers ℓ, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_0 \geqslant v_n \geqslant \ell$.

Dessin :

On dispose maintenant de tous les outils pour étudier la convergence de nombreuses suites récurrentes.

Méthode : Étude complète de la limite d'une suite récurrente

On considère$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)}$ où $f : D_f \to \mathbb{R}$.

Interprétation graphique : (facultatif mais utile pour prévoir le résultat)
Dessiner l'allure de la courbe représentative de f, ainsi que la diagonale d'équation $y = x$.
En particulier, repérer le/les points d'intersection de ces deux courbes ($f(x) = x$).
S'aider de ce dessin pour prévoir le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ("escalier").

$\boxed{0}$ **Intervalle stable :** (Facultatif mais parfois utile)
Si $u_0 \in I$ et si l'intervalle I est stable par f, c'est à dire que $f(I) \subset I$ (i.e $\forall x \in I, f(x) \in I$),
alors on en déduit par récurrence immédiate que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.

$\boxed{1}$ **Étude du sens de variation :** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante/décroissante.

$\boxed{2}$ **Majoration/minoration :** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée/minorée.
(Dans certains cas, il sera plus naturel de faire $\boxed{2}$ avant $\boxed{1}$. Parois $\boxed{2}$ découle de $\boxed{0}$.)

D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ.

$\boxed{3}$ **Calcul de la limite :** Passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ pour obtenir $\ell = f(\ell)$ et déterminer ℓ.

Remarque 7
Cette méthode traite le cas "idéal" où f est croissante et où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Il peut être nécessaire de l'adapter selon les cas (cf. feuille d'exercices) :

- Si la fonction f est croissante, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera toujours monotone, mais il se peut qu'elle ne soit pas minorée/majorée : dans ce cas elle tend vers $\pm\infty$.
- Si la fonction f est décroissante, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sera pas monotone !
Il est alors utile d'étudier les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$...

Exercice 7

Retour sur la suite "$\sqrt{ANS}$" : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. On pose $u_0 = 2$. Montrer que u converge et déterminer sa limite.
2. On pose $u_0 = \dfrac{1}{2}$. Montrer que u converge et déterminer sa limite.

Dessin :

1. On pose $u_0 = 2$.

$\boxed{1}$ Montrons (par récurrence) que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.

- $u_1 = \sqrt{2} < 2 = u_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_{n+1} < u_n$. Alors $\sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{u_n}$, i.e $u_{n+2} < u_{n+1}$.

Ainsi u est (strictement) décroissante.

$\boxed{2}$ Il est clair que u est minorée par 0. On en déduit qu'elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.
Plus précisément, montrons (par récurrence) que u est minorée par 1 :

- $u_0 = 2 \geqslant 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_n \geqslant 1$. Alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n} \geqslant \sqrt{1} = 1$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$. En passant à la limite, on déduit : $\ell \geqslant 1$.

$\boxed{3}$ En passant à la limite dans $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \quad$ on obtient :

$$\ell = \sqrt{\ell} \iff \ell^2 = \ell \iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1.$$

Comme on a vu que $\ell \geqslant 1$, la seule solution compatible est $\ell = 1$.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

2. On pose $u_0 = \frac{1}{2}$.

On peut recommencer l'étude de la même façon. Cette fois u est croissante et majorée par 1.
Elle converge à nouveau vers 1. (cf. dessin)

3.3 Suites adjacentes

Définition 5 (Suites adjacentes)

Deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes lorsqu'elles satisfont les trois propriétés suivantes :

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = 0$

Remarque 8

Bien-sûr, symétriquement on peut aussi avoir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
En français : deux suites sont adjacentes quand l'une est croissante, l'autre est décroissante, et la différence des deux tend vers 0.

Dessin :

Le constat fait sur ce dessin fait l'objet d'un théorème (qui justifie l'intérêt des suites adjacentes).

Théorème 8 (Convergence des suites adjacentes)

Si les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Preuve :

On suppose $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, d'après le théorème de la limite monotone,
soit elle converge, soit elle tend vers $+\infty$.

- Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad a_n - b_n \geqslant a_n - b_0 \quad$ (car $b_n \leqslant b_0$ par décroissance de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_0) = +\infty$, on en déduit (théorème des gendarmes version "limite infinie") que $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = +\infty$. <u>Absurde</u> car $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$ par hypothèse !

- Ainsi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$.

Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad b_n = a_n - (a_n - b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

On a bien montré : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

□

Remarque 9

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, en notant $\ell \in \mathbb{R}$ leur limite commune, on a l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$$

Exercice 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad$ et $\quad b_n = a_n + \frac{1}{n!}$.

Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. En déduire que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

- a est croissante : pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$.
- b est décroissante : pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \left(a_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(a_n + \frac{1}{n!}\right) = a_{n+1} - a_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leqslant 0 \quad (\text{car} \quad n \geqslant 1) \end{aligned}$$

- $b_n - a_n = \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Les deux suites sont adjacentes, donc elles convergent vers la même limite.

En particulier, $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Remarque 10

Appelant ℓ la limite commune à $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$, on a l'encadrement $a_{10} \leqslant \ell \leqslant b_{10}$, ce qui donne :

$$2,7182818 \leqslant \ell \leqslant 2,712821$$

En fait, on peut montrer que $\ell = e$ (nombre d'Euler).

3.4 Convergence et suites extraites

Théorème 9 (Convergence des termes d'indices pairs et impairs)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ (c'est à dire $a \in \mathbb{R}$ ou bien $a = \pm\infty$).
On a l'équivalence :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \iff \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = a \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = a.$$

En particulier, si $(\lim_{n\to+\infty} u_{2n}) \neq (\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1})$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite (elle diverge).

Exercice 9

Montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ diverge.

La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$.

La suite $(u_{2n+1})_{n\in\ \mathbb{N}}$ est constante égale à -1. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} \neq \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Connaître les définitions de la limite avec des quantificateurs.
- Déterminer la limite d'expressions explicites
  (à l'aide des limites usuelles et des règles de calcul).
- Utiliser le théorème des gendarmes pour déterminer une limite.
- Utiliser le théorème de la limite monotone pour déduire l'existence d'une limite.
- Passer correctement à la limite dans une inégalité.
- Montrer que deux suites sont adjacentes et en déduire l'existence d'une limite.

Pour suivre

- Étudier spontanément (sans indications) une suite récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Utiliser des suites adjacentes pour déduire un encadrement de la limite.
  (application informatique)
- Étudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) pour en déduire des résultats sur (u_n).

Pour les ambitieux

- Manipuler la définition de la limite "avec des ε" quand c'est nécessaire.
- Étudier spontanément (sans indications) une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ dans le cas où f est décroissante.