8

Dénombrement et combinatoire

Exercice 1 (Tirages dans une urne)

0. n^{10}.
1. 2^{10}.
2. $(n-1)^{10}$
3. Choisir la "position" des deux 3 : $\binom{10}{2}$ possibilités. Choisir les 8 numéros restants (où l'ordre compte) : $(n-1)^8$.

Conclusion : il y a $\binom{10}{2} \times (n-1)^8$ résultats contenant exactement deux 3.

4. Nombre de résultats total $-$ Nombre de résultats sans 3 : $n^{10} - (n-1)^{10}$
5. Choisir les positions des deux 3 parmi 10 positions disponibles : $\binom{10}{2}$

Puis, choisir les position des quatre 1 parmi 8 positions restantes : $\binom{8}{4}$
Enfin, choisir les 4 numéros restants (où l'ordre compte) : $(n-2)^4$
Conclusion : $\binom{10}{2} \times \binom{8}{4} \times (n-2)^4$.

6. $\underbrace{(n-1) \times (n-1) \times \ldots \times (n-1)}_{k-1 \text{ fois}} \times 1 \underbrace{\times n \times n \times \ldots \times n}_{10-k \text{ fois}} = (n-1)^{k-1} \times n^{10-k}$

Exercice 2 (Paris hippiques)

Nombre total de paris possibles : $12 \times 11 \times 10$, soit 1320.

1. Nombre de paris sans 6 : $11 \times 10 \times 9 = 990$.

Nombre de paris où 6 apparait : $1320 - 990 = 330$.

2. Il y a 6 numéros pairs possibles : $2, 4, 6, 8, 10$ et 12.

Nombre de paris où les trois numéros sont pairs : $6 \times 5 \times 4 = 120$.

3. Si l'on choisit trois numéros distincts dans l'ensemble $[\![1, 12]\!]$ sans tenir compte de leur ordre (exemple : $\{3, 11, 5\}$), il y a une seule façon de les ranger dans l'ordre croissant (exemple : $(3, 5, 11)$).

Il y a donc autant de paris où les numéros sont rangés dans l'ordre croissant que de parties à 3 éléments de l'ensemble $[\![1, 12]\!]$. Il y en a ainsi $\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix} = \dfrac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 4 \times 11 \times 5 = 220$.

Exercice 3 (Mains de 4 cartes)

Nombre de mains possibles : $\begin{pmatrix} 52 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Il y a $52/4 = 13$ coeurs dans le paquet. Nombre de mains avec 4 coeurs : $\begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Choix du coeur : $\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} = 13$.

Choix des 3 autres cartes (qui ne doivent pas être des coeurs !) : $\begin{pmatrix} 52-13 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 13 \end{pmatrix}$

Mains avec exactement un coeur : $\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 39 \\ 3 \end{pmatrix} = 13 \times \begin{pmatrix} 39 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Mains sans as : $\begin{pmatrix} 52-4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 4 \end{pmatrix}$. Mains avec au moins un as : $\begin{pmatrix} 52 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 48 \\ 4 \end{pmatrix}$.
4. Mains sans as : $\begin{pmatrix} 52-4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Mains avec exactement un as : $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 52-4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times \begin{pmatrix} 48 \\ 3 \end{pmatrix}$ (même raisonnement que pour le 2.)

Donc, mains avec au plus un as : $\begin{pmatrix} 48 \\ 4 \end{pmatrix} + 4 \times \begin{pmatrix} 48 \\ 3 \end{pmatrix}$

(Il serait difficile ici de compter le nombre de main avec "au moins 2 as"... En particulier, ce n'est pas $\binom{4}{2} \times \binom{50}{2}$)

5. Mains avec 4 as : $\binom{4}{4} = 1$. Mains avec au plus 3 as : $\begin{pmatrix} 52 \\ 4 \end{pmatrix} - 1$.

---

6. Distinguons deux cas :

• <u>Cas n°1 :</u> On a le roi de trèfle. Dans ce cas :
On choisit un autre roi : $\binom{3}{1} = 3$ possibilités
On choisit 2 autres cartes (non trèfles, non rois) : $\binom{52-13-3}{2} = \binom{36}{2}$ possibilités
Ainsi il y a $3 \times \begin{pmatrix} 36 \\ 2 \end{pmatrix}$ mains possibles dans ce cas.

• <u>Cas n°2 :</u> On n'a pas le roi de trèfle en main. Dans ce cas :
On choisit deux rois (différents du roi de trèfle) : $\binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3$ possibilités
On choisit la carte trèfle (différente du roi de trèfle) : $\binom{12}{1} = 12$ possibilités
On choisit la carte restante (non trèfle, non roi) : $\binom{52-13-3}{1} = \binom{36}{1} = 36$ possibilités
Ainsi il y a $3 \times 12 \times 36$ mains possibles dans ce cas.

Conclusion : le résultat attendu est $3 \times \begin{pmatrix} 36 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \times 12 \times 36$.

Exercice 4 (Nourrir les singes)

1. Les 6 fruits sont différents : on les numérote de 1 à 6.
Les 10 singes sont différents : on les numérote de 1 à 10.
On peut alors transposer l'expérience de "distribution de fruits" en une expérience de "tirage dans une urne" :
Imaginons une urne contenant des boules numérotées de 1 à 10. On effectue 6 tirages successifs :

• On tire une boule dans l'urne, on donne le fruit n°1 au singe correspondant.
• On tire une boule dans l'urne, on donne le fruit n°2 au singe correspondant.

⋮

• On tire une boule dans l'urne, on donne le fruit n°6 au singe correspondant.

(a) Chaque singe ne peut être sélectionné qu'une seule fois : cela correspond à des tirages <u>sans remise</u> !

Nombre de distributions possibles : $\underbrace{10}_{\text{choix du singe pour le fruit 1}} \times \underbrace{9}_{\text{fruit 2}} \times \underbrace{8}_{\text{fruit 3}} \times \underbrace{7}_{\text{fruit 4}} \times \underbrace{6}_{\text{fruit 5}} \times \underbrace{5}_{\text{fruit 6}}$

(b) Chaque singe peut être sélectionné plusieurs fois : cela correspond à des tirages <u>avec remise</u> !

Nombre de distributions possibles : $\underbrace{10}_{\text{choix du singe pour le fruit 1}} \times \underbrace{10}_{\text{fruit 2}} \times \underbrace{10}_{\text{fruit 3}} \times \underbrace{10}_{\text{fruit 4}} \times \underbrace{10}_{\text{fruit 5}} \times \underbrace{10}_{\text{fruit 6}} = 10^6$

2.(a) Les fruits sont identiques et chaque singe peut être nourri une fois au maximum : cela revient donc à choisir, parmi les 10 singes disponibles, lesquels seront nourris !

Nombre de distributions possibles : $\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(b) Les fruits sont identiques et chaque singe peut être nourri plusieurs fois. Imaginons que chaque singe dispose d'une boite, numérotée de 1 à 10. Le problème revient à compter le nombre de façons de ranger 6 fruits identiques dans 10 boîtes distinctes (situation déjà vue dans le cours !)
En notant O pour désigner un fruit et $|$ pour désigner une "paroi" (entre deux boîtes) un résultat est par exemple :

$$OO|\ |O|O|\ |\ |O|\ |O|$$

(Dans cet exemple, le singe n°1 reçoit deux fruits, les singes n°3,4,7,9 reçoivent un fruit, les autres n'ont rien)
Le nombre de distributions possibles revient au nombre d'anagrammes du "mot" $\underbrace{OOOOOO}_{\text{6 fruits}}\underbrace{|||||||||}_{\text{9 parois}}$.

Il y a $\dfrac{15!}{6! \times 9!}$ tels anagrammes, soit $\begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} 15 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (Placard à chemises)

ERRATUM : Il faut lire "et 1 noire" et non pas "et 1 blanche".

1. On a en tout $4+3+2+1=10$ chemises différentes.
Il y a 10! façons de les agencer (i.e les ranger dans un certain ordre).
Application numérique : $10! = 3628800$ agencements possibles.

2. Il y a 4 couleurs distinctes. Pour regrouper les couleurs, on peut :
- Choisir dans quel ordre les couleurs apparaissent (exemple : BLANC, BLEU, GRIS, NOIR) : 4! possibilités.
- Au sein des 4 chemises blanches, choisir un agencement : 4! possibilités.
- Au sein des 3 chemises bleues, choisir un agencement : 3! possibilités.
- Au sein des 2 chemises grises, choisir un agencement : 2! possibilités.
- Au sein des 1 chemises noires, choisir un agencement : 1! possibilités (donc une seule : logique !).

Ainsi, le nombre d'agencements où les chemises sont regroupées par couleur est :

$$4! \times 4! \times 3! \times 2! \times 1 = 24 \times 24 \times 6 \times 2 = 6912.$$

Exercice 6 (Application de la formule)

D'après la formule du binôme,

$$(x-1)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^k (-1)^{5-k} = -\binom{5}{0}x^0 + \binom{5}{1}x^1 - \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^3 - \binom{5}{4}x^4 + \binom{5}{5}x^5.$$

Pour calculer rapidement ces coefficients binomiaux, on peut par exemple construire le triangle de Pascal.
Ces coefficients sont : $1, 5, 10, 10, 5, 1$. On trouve alors : $(x-1)^5 = -1 + 5x - 10x^2 + 10x^3 - 5x^4 + x^5$.

Exercice 7 (Coefficients pairs/impairs)

1.(a) $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

(b) $T = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0^n = 0$.

2. En notant $A = \sum_{k \text{ pairs}} \binom{n}{k}$ et $B = \sum_{k \text{ impairs}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$, on remarque que

$$A + B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = S \quad \text{et} \quad A - B = \sum_{k \text{ pairs}} 1 \times \binom{n}{k} + \sum_{k \text{ impairs}} (-1) \times \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = T$$

donc $A + B = 2^n$ et $A - B = 0$. A partir de là, on obtient facilement $A = B = \dfrac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

Exercice 8 (Formule du binôme dérivée)

1. (a) On sait que $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1}$, donc $k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^{j+1} = nx \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j = nx \times (x+1)^{n-1}. \text{ (Formule du binôme)}$$

(b) En itérant, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \frac{n-1}{k-1} \times \binom{n-2}{k-2}$, donc $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k &= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k = n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^{j+2} \\ &= n(n-1)x^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j = n(n-1)x^2 \times (x+1)^{n-2}.\end{aligned}$$

---

2. D'après le binôme de Newton, on a $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

En dérivant cette égalité : $n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}$, c'est à dire $n(x+1)^{n-1} = x^{-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^k$.

On retrouve donc $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k = nx(x+1)^{n-1}$.

(Remarque : on a ici supposé que $x \neq 0$ pour parler de x^{-1}... Mais l'égalité est évidente si $x = 0$).

En dérivant une nouvelle fois, on obtient : $n(n-1)(x+1)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2}$

c'est à dire $n(n-1)(x+1)^{n-2} = x^{-2} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k$.

On retrouve donc $\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k = n(n-1)x^2(x+1)^{n-2}$.

(Remarque : on a ici supposé que $x \neq 0$ pour parler de x^{-2}... Mais l'égalité est évidente si $x = 0$).

Exercice 9 (Formule de Pascal généralisée)

Pour tout $n \geqslant p$, notons $\mathcal{P}(n)$: " $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ ".

Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant p$.

- Initialisation : pour $n = p$, la propriété devient $\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$, ce qui est bien vrai (c'est $1 = 1$...)
- Hérédité : soit $n \geqslant p$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ est montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On sait donc que $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$. On a alors :

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}.$$

Pour la dernière égalité, on a utilisé la formule de Pascal ! On a bien obtenu $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

Exercice 10 (Produit de coeff. binomiaux)

1. C'est un simple calcul à l'aide des définitions :

$$\binom{n}{p} \times \binom{p}{k} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{n!}{(n-p)!k!(p-k)!}$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} = \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{p-k}.$$

2. En remplaçant à l'aide de la formule précédente :

$$\sum_{p=k}^{n} \binom{n}{p} \binom{p}{k} x^p = \sum_{p=k}^{n} \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} x^p = \binom{n}{k} \sum_{p=k}^{n} \binom{n-k}{p-k} x^p$$

k étant fixé, on peut poser le changement de variable $j = p - k$, ce qui conduit à :

$$\binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} x^{j+k} = \binom{n}{k} x^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} x^j = \binom{n}{k} x^k (x+1)^{n-k} \text{ (formule du binôme)}$$