

Devoir Sur Table n°4 – Corrigé

Exercice 1 - 3 questions sur les espaces vectoriels

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + c \cdot v_3 = (0, 0, 0)$.

La famille (v_1, v_2, v_3) sera libre si et seulement si cette égalité implique $a = b = c = 0$.

Résolvons le système associé :

$$\begin{aligned} a(-1, 1, 0) + b(1, 0, 2) + c(1, 1, \alpha) = (0, 0, 0) &\iff (-a + b + c, a + c, 2b + \alpha c) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ 2b + \alpha c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ 2b + \alpha c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ (\alpha - 4)c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système triangulaire homogène est de Cramer (donc admet l'unique solution $(a, b, c) = (0, 0, 0)$) si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non-nuls.

Conclusion : la famille est libre si et seulement si $\alpha \neq 4$.

2. On considère l'ensemble $S = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$.

- (a) Montrons que S est un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- S contient bien la suite nulle.

En effet, si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$, on a évidemment $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 0 = 4u_{n+1} - 4u_n$.

- Soient $u, v \in S$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons la suite $w = u + \lambda v$ et vérifions que $w \in S$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= u_{n+2} + \lambda v_{n+2} \\ &= (4u_{n+1} - 4u_n) + \lambda(4v_{n+1} - 4v_n) \quad \text{car } u, v \in S \\ &= 4(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) - 4(u_n + \lambda v_n) \\ &= 4w_{n+1} - 4w_n. \end{aligned}$$

On vient de vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = 4w_{n+1} - 4w_n$.

Ceci montre que $w \in S$. Conclusion : S est un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (donc en particulier un EV).

- (b) On s'intéresse aux suites satisfaisant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

Pour trouver leur forme générale, on peut utiliser la méthode de l'équation caractéristique.

On résout l'équation

$$x^2 = 4x - 4 \iff x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x - 2)^2 = 0.$$

On dispose d'une seule racine double : 2.

On sait dans ce cas que tout suite $u \in S$ se met sous la forme :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)2^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- (c) On vient de remarquer que tout $u \in S$ peut s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu n 2^n \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, en notant v et w les suites données par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n \quad \text{et} \quad w_n = n 2^n$$

toute suite $u \in S$ peut s'écrire : $u = \lambda \cdot v + \mu \cdot w$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, tout élément de S s'écrit comme combinaison linéaire de v et de w .

Ceci montre que $S = Vect(v, w)$: la famille (v, w) est génératrice de S .

De plus, cette famille est libre, car les suites v et w sont non-colinéaires : il n'existe pas de scalaire $C \in \mathbb{R}$ tel que $w = Cv$ (cela voudrait dire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n2^n = C2^n$: impossible avec C constant).

Conclusion : La famille $\mathcal{B} = ((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n2^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une base de l'espace vectoriel S .

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On considère l'ensemble $E = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \int_0^3 P(t)dt = 0 \right\}$.

- (a) Montrons que E est un SEV de $\mathbb{R}[X]$.

- E contient bien le polynôme nul.

En effet, si $P = 0$ on a $\deg(P) = -\infty \leq n$ et évidemment $\int_0^3 P(t)dt = \int_0^3 0dt = 0$.

- Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $P + \lambda Q \in E$.

D'abord, on a $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ donc on sait que $P + \lambda Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

De plus, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^3 (P + \lambda Q)(t)dt = \int_0^3 (P(t) + \lambda Q(t))dt = \underbrace{\int_0^3 P(t)dt}_{=0 \text{ car } P \in E} + \lambda \underbrace{\int_0^3 Q(t)dt}_{=0 \text{ car } Q \in E} = 0.$$

Ceci montre que $P + \lambda Q \in E$. Conclusion : E est un SEV de $\mathbb{R}[X]$.

- (b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $c_k \in \mathbb{R}$. Le polynôme $P(X) = X^k - c_k$ est bien dans $\mathbb{R}_n[X]$. On a les équivalences :

$$P \in E \iff \int_0^3 P(t)dt = 0 \iff \int_0^3 (t^k - c_k)dt = 0 \iff \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} - c_k t \right]_0^3 = 0 \iff \frac{3^{k+1}}{k+1} - 3c_k = 0.$$

On trouve donc que $c_k = \frac{3^k}{k+1}$ est l'unique constante telle que $X^k - c_k \in E$.

- (c) On vient d'établir que les polynômes $X^k - \frac{3^k}{k+1}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont tous des vecteurs de E .

De plus, la famille $\mathcal{F} = \left(X^k - \frac{3^k}{k+1} \right)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} = \left(X^1 - \frac{3}{2}, X^2 - \frac{3^2}{3}, \dots, X^n - \frac{3^n}{n+1} \right)$ est libre, car composée de polynômes de degrés distincts.

- (d) Il reste à montrer que cette famille est génératrice de E , c'est à dire que

$$E = Vect\left(X^1 - \frac{3}{2}, X^2 - \frac{3^2}{3}, \dots, X^n - \frac{3^n}{n+1} \right)$$

ou encore que n'importe quel $P \in E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la famille

$$\mathcal{F} = \left(X^k - \frac{3^k}{k+1} \right)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}.$$

Soit $P \in E$. Puisque $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut déjà l'écrire $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

De plus, on a également :

$$\int_0^3 P(t)dt = 0 \iff \int_0^3 \left(\sum_{k=0}^n a_k t^k \right) dt = 0 \iff \sum_{k=0}^n a_k \int_0^3 t^k dt = 0 \iff \sum_{k=0}^n a_k \frac{3^{k+1}}{k+1} = 0.$$

Cette condition se traduit donc en $3a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \frac{3^{k+1}}{k+1} = 0$, c'est à dire $a_0 = -\sum_{k=1}^n a_k \frac{3^k}{k+1}$.

En revenant à l'écriture $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=1}^n a_k X^k + a_0 = \sum_{k=1}^n a_k X^k - \sum_{k=1}^n a_k \frac{3^k}{k+1}$,

on obtient $P = \sum_{k=1}^n a_k \left(X^k - \frac{3^k}{k+1} \right)$: c'est bien une combinaison linéaire de \mathcal{F} .

Ceci montre que la famille \mathcal{F} mise en évidence en 3.(c) est une base de E .

Exercice 2 : Tirages dans un grand nombre d'urnes

Dans cet exercice, $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ sont fixés. Pour $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on définit : $B_k = \int_0^1 t^k (1-t)^{N-k} dt$.

$$1. \quad (a) \quad B_N = \int_0^1 t^N dt = \left[\frac{t^{N+1}}{N+1} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{N+1}}.$$

$$B_{N-1} = \int_0^1 t^{N-1} (1-t) dt = \int_0^1 (t^{N-1} - t^N) dt = \left[\frac{t^N}{N} - \frac{t^{N+1}}{N+1} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N(N+1)}}.$$

(b) Soit $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

On calcule $B_{N-k} = \int_0^1 t^{N-k} (1-t)^k dt$ en posant le changement de variable $u = 1-t$.

On a donc $du = -dt$, d'où : $t^{N-k} (1-t)^k dt = (1-u)^{N-k} u^k (-du) = -u^k (1-u)^{N-k} du$.

De plus, t va de 0 à 1, donc $u = 1-t$ va de 1 à 0. On obtient ainsi :

$$B_{N-k} = \int_0^1 t^{N-k} (1-t)^k dt = - \int_1^0 (1-u)^{N-k} u^k du = \int_0^1 (1-u)^{N-k} u^k du = B_k.$$

On a montré que : $\boxed{\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, B_{N-k} = B_k}$.

(c) Par linéarité de l'intégrale, et avec la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} B_k &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \int_0^1 t^k (1-t)^{N-k} dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} t^k (1-t)^{N-k} \right) dt \\ &= \int_0^1 (t + (1-t))^N dt = \int_0^1 1 dt = 1. \end{aligned}$$

On a montré : $\boxed{\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} B_k = 1}$.

2. (a) Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On calcule à l'aide d'une IPP :

$$\begin{aligned} B_k &= \int_0^1 \underbrace{t^k}_{u(t)} \underbrace{(1-t)^{N-k}}_{v'(t)} dt = \left[t^k \times \left(-\frac{(1-t)^{N-k+1}}{N-k+1} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 k t^{k-1} \times \left(-\frac{(1-t)^{N-k+1}}{N-k+1} \right) dt \\ &= 0 + \frac{k}{N-k+1} \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{N-(k-1)} dt = \frac{k}{N-k+1} B_{k-1}. \end{aligned}$$

On a montré : $\boxed{\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, B_k = \frac{k}{N-k+1} B_{k-1}}$.

(b) Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On applique la formule précédente successivement :

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{k}{N-k+1} \times B_{k-1} \\ &= \frac{k}{N-k+1} \times \frac{k-1}{N-k+2} \times B_{k-1} \\ &= \frac{k}{N-k+1} \times \frac{k-1}{N-k+2} \times \frac{k-2}{N-k+3} \times B_{k-2} \text{ etc...} \end{aligned}$$

Par récurrence immédiate, on finit par obtenir un produit de k termes, multiplié par B_0 :

$$B_k = \frac{k}{N-k+1} \times \frac{k-1}{N-k+2} \times \dots \times \frac{1}{N} \times B_0.$$

En se rappelant que $\binom{N}{k} = \frac{N \times (N-1) \times \dots \times (N-k+1)}{k \times (k-1) \times \dots \times 1}$, c'est exactement : $B_k = \frac{1}{\binom{N}{k}} \times B_0$.

Enfin, on a vu que $B_0 = B_{N-0} = B_N = \frac{1}{N+1}$. Conclusion : $\boxed{\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, B_k = \frac{1}{\binom{N}{k}} \times \frac{1}{N+1}}$.

(On peut vérifier que cette formule fonctionne bien quand $k = 0$)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n .

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'urne numéro j contient j boules blanches et $n - j$ boules noires.

On choisit l'une des urnes uniformément au hasard, puis on tire N boules avec remise dans cette urne.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue des N tirages réalisés.

3. (a) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si on a choisi l'urne numéro j , alors on effectue N tirages avec remise dans une urne contenant une proportion $\frac{j}{n}$ de boules blanches.

C'est une situation binomiale : le nombre X_n de boules blanches tirées suit la loi $\mathcal{B}(N, \frac{j}{n})$.

Remarque : On ne peut pas dire que la loi de X_n est $\mathcal{B}(N, \frac{j}{n})$ dans l'absolu. Cela n'aurait pas de sens que cette loi dépende d'un certain j "arbitraire".

On parle en fait ici d'une loi conditionnelle : conditionnellement à l'évènement "Choisir l'urne j ", les probabilités des évènements $[X = k]$ seront données par la loi binomiale susmentionnée.

- (b) L'idée est de choisir d'abord au hasard le numéro J de l'urne dans laquelle on va effectuer les tirages, selon une loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Une fois ce numéro J fixé, le nombre X de boules blanches obtenues est lui-même choisi au hasard, selon la loi $\mathcal{B}(N, \frac{J}{n})$.

```
import numpy.random as rd
def tirage(n, N):
    J = rd.randint(1, n+1) # uniforme entre 1 et n
    X = rd.binomial(N, J/n)
    return X
```

4. Au vu des questions précédentes, on doit pressentir ici une application de la formule des probabilités totales. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons U_j = "Choisir l'urne numéro j ".

Les évènements (U_1, U_2, \dots, U_n) forment ainsi un système complet d'évènements.

Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, la formule des probabilités totales nous donne :

$$P(X_n = k) = \sum_{j=1}^n P(U_j \cap [X_n = k]) = \sum_{j=1}^n P(U_j)P_{U_j}(X_n = k).$$

- Puisque le numéro de l'urne est choisi uniformément au hasard, on sait que $\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $P(U_j) = \frac{1}{n}$.
- Conditionnellement à l'évènement U_j , on a dit en 3.(a) que X_n suivait la loi $\mathcal{B}(N, \frac{j}{n})$. On aura donc :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_{U_j}(X_n = k) = \binom{N}{k} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{N-k}.$$

En remplaçant, on obtient bien : $\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \binom{N}{k} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{N-k}$.

On a ainsi déterminé la loi de probabilité de X_n (dont l'expression est assez complexe, a priori !)

5. (a) Soit $p \in [0, 1]$. La somme $\sum_{k=0}^N k \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$ s'interprète comme l'espérance d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(N, p)$. On sait donc qu'elle vaut Np

(Il n'est pas utile de reproduire la démonstration : c'est un résultat de cours !)

- (b) Le support de X_n est $X_n(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket$: sur N tirages réalisés avec remise, on obtient au minimum 0 boules blanches et au maximum N . On calcule donc :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=0}^N k P(X_n = k) = \sum_{k=0}^N k \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \binom{N}{k} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{N-k} \right) \quad \text{d'après 4.} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^n k \binom{N}{k} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{N-k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^N k \binom{N}{k} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{N-k} \quad \text{en inversant les sommes.} \end{aligned}$$

Or, d'après 5.(a), pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé, on note que

$$\sum_{k=0}^N k \binom{N}{k} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{N-k} = N \frac{j}{n} \quad (\text{c'est } Np \text{ avec } p = \frac{j}{n} \in [0, 1])$$

En remplaçant, il vient :

$$E(X_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n N \frac{j}{n} = \frac{N}{n} \sum_{j=1}^n j = \frac{N}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}.$$

d'où, finalement : $E(X_n) = \frac{N(n+1)}{2n}$.

6. (a) Soit $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ fixé. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \binom{N}{k} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{N-k} = \binom{N}{k} \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{N-k}.$$

On reconnaît ici une limite de somme de Riemann !

En introduisant la fonction $f : t \mapsto t^k (1-t)^{N-k}$ qui est continue sur $[0, 1]$ on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \binom{N}{k} \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f\left(\frac{j}{n}\right) = \binom{N}{k} \times \int_0^1 f(t) dt.$$

On note que $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t^k (1-t)^{N-k} dt = B_k$ par définition.

On obtient donc bien : $\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \binom{N}{k} B_k$.

(b) Avec l'expression $B_k = \frac{1}{\binom{N}{k}} \times \frac{1}{N+1}$ obtenue en 2.(b) : $\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{1}{N+1}$.

Interprétation : Lorsque le nombre n d'urnes est très grand,

la loi de probabilité de X_n est proche de la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 0, N \rrbracket)$.

Chaque nombre possible de boules blanches obtenues (entre 0 et N) devient équiprobable.

Problème

Partie I - Une suite d'intégrales

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. On cherche à déterminer sa limite.

1.

```
import numpy as np
def valeur_S(n) :
    S = 0 ; a = 1
    for k in range ( n+1 ) : # k va de 0 à n
        S = S + a
        a = a * (1/(k+1)) # ou alors *(1/k) et faire aller k de 1 à n+1...
    return S
```

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit : $I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

2. $I_0 = \int_0^1 e^t dt = \left[e^t \right]_0^1 = [e - 1]$.

3.

```
def approx_I(n) :
    S = 0; N = 10000;
    for k in range(N) :
        S = S + (N-k)**n * np.exp(k/N)
    return S / (N**(n+1))
```

Ce programme prend en entrée n et calcule la valeur $\boxed{\frac{1}{N^{n+1}} \sum_{k=0}^{N-1} (N-k)^n e^{k/N}}$ avec $N = 10000$.

Avec ce choix de N très grand, cette valeur sera proche de l'intégrale I_n . En effet :

$$\frac{1}{N^{n+1}} \sum_{k=0}^{N-1} (N-k)^n e^{k/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(N-k)^n}{N^n} e^{k/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{N-k}{N}\right)^n e^{k/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n e^{k/N}.$$

On reconnaît ici une somme de Riemann $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{N}\right)$ où $g : t \mapsto (1-t)^n e^t$ est continue sur $[0, 1]$.

On sait donc que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n e^{k/N} = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt = I_n.$$

Ceci explique pourquoi, avec N très grand, la valeur renvoyée est une approximation de l'intégrale I_n .

4. Montrons que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a l'inégalité :

$$\forall t \in [0, 1], \quad (1-t)^{n+1} \leq (1-t)^n \text{ donc } (1-t)^{n+1} e^t \leq (1-t)^n e^t \quad (\text{car } 0 \leq t \leq 1).$$

En intégrant, on obtient $\int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt \leq \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$, c'est à dire $I_{n+1} \leq I_n$.

C'est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons I_{n+1} à l'aide d'une IPP :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 \underbrace{(1-t)^{n+1}}_{u(t)} \underbrace{e^t}_{v'(t)} dt = \left[(1-t)^{n+1} e^t \right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-t)^n e^t dt \\ &= -1 + (n+1) \int_0^1 (1-t)^n e^t dt = -1 + (n+1)I_n. \end{aligned}$$

On a montré : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$.

(b) On fera très attention aux valeurs de k dans la boucle ici.

Il s'agit de vérifier qu'on effectue bien l'équivalents des égalités :

$$I_1 = -1 + 1 \cdot I_0, \quad I_2 = -1 + 2 \cdot I_1, \quad I_3 = -1 + 3 \cdot I_2, \quad \text{etc...}$$

```
import numpy as np
def valeur_I(n) :
    I = np.e - 1 # valeur de I0
    for k in range(n) : # k va de 0 à n-1 (n passages)
        I = -1 + (k+1) * I
    return I
```

Au premier passage ($k = 0$) on calcule I_1 , au deuxième passage ($k = 1$) on calcule I_2 , etc...

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a l'encadrement :

$$\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq (1-t)^n e^t \leq (1-t)^n e \quad (\text{car } t \leq 1)$$

donc, en intégrant de 0 à 1 :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

On calcule rapidement :

$$\int_0^1 (1-t)^n e^t dt = e \int_0^1 (1-t)^n dt = e \times \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{e}{n+1}.$$

On a montré : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$. D'après le théorème des gendarmes, on déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 5.(a), on sait que :

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n \iff I_{n+1} = -1 + nI_n + I_n \iff nI_n = 1 + I_{n+1} - I_n.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = 0$, on en déduit $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1}$.

Remarque : Ceci montre en fait que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

On obtient donc la "vitesse de convergence" de la suite vers 0.

8. Suivons l'indication en posant $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \frac{I_k}{k!}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

- D'une part, on peut calculer la somme par telescopage :

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = \frac{I_n}{n!} - I_0 = \frac{I_n}{n!} - (e - 1).$$

- D'autre part, on sait que $I_{k+1} = -1 + (k+1)I_k$ donc $\frac{I_{k+1}}{(k+1)!} = -\frac{1}{(k+1)!} + \frac{I_k}{k!}$

c'est à dire $u_{k+1} = -\frac{1}{(k+1)!} + u_k$. On peut alors calculer la somme A différemment :

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = - \left(S_n - \frac{1}{0!} \right) = -S_n + 1.$$

Pour conclure, on a montré que $A = \frac{I_n}{n!} - e + 1 = -S_n + 1$. Il en résulte que $\boxed{S_n - e = -\frac{I_n}{n!}}$.

Ainsi, $|S_n - e| = \frac{I_n}{n!} \leq \frac{e}{n!}$ d'après 6., c'est à dire : $\boxed{|S_n - e| \leq \frac{e}{(n+1)!}}$.

C'est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

A l'aide du théorème des gendarmes (version valeur absolue), on déduit que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e}$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour calculer $J_n = \int_0^2 t^n e^{-t/2} dt$, posons dans un premier temps $u = t/2$, donc $du = \frac{1}{2}dt$.

(Autrement dit, $t = 2u$ et $dt = 2du$)

On a ainsi : $t^n e^{-t/2} dt = (2u)^n e^{-u} 2du = 2^{n+1} u^n e^{-u} du$.

De plus, t va de 0 à 2, donc $u = \frac{t}{2}$ va de 0 à 1. On obtient :

$$J_n = \int_0^2 t^n e^{-t/2} dt = 2^{n+1} \int_0^1 u^n e^{-u} du.$$

Pour faire le lien avec I_n , posons à présent $v = (1-u)$, donc $dv = -du$.

On a ainsi : $u^n e^{-u} du = (1-v)^n e^{-1+v} (-dv) = -e^{-1} (1-v)^n e^v dv$.

De plus, u va de 0 à 1 donc $v = 1-u$ va de 1 à 0. On obtient :

$$\int_0^1 u^n e^{-u} du = -e^{-1} \int_1^0 (1-v)^n e^v dv = e^{-1} \int_0^1 (1-v)^n e^v dv = e^{-1} \times I_n.$$

En raboutant tout cela, on obtient finalement $\boxed{J_n = 2^{n+1} e^{-1} I_n}$.

Remarque : On aurait pu réunir les deux changements de variables en un seul en posant dès le départ $v = 1 - \frac{t}{2}$, mais ce n'est pas forcément évident à deviner !

Partie II - Highscore

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé.

Un jeu vidéo est composé de n niveaux consécutifs : Niveau 1, Niveau 2, ..., Niveau n (le dernier).

Un joueur se lance dans une partie, selon les modalités suivantes :

- Le joueur débute sa partie au Niveau 1. S'il parvient à terminer un niveau, il passe au niveau suivant.
- La partie s'arrête dès que le joueur échoue à l'un des niveaux, ou s'il parvient à terminer le Niveau n .

On note Z la variable aléatoire correspondant au nombre de niveaux que le joueur parvient à terminer durant sa partie. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on introduit l'évènement A_i = "Le joueur termine le Niveau i ".

10. (a) Le joueur pourrait échouer dès le premier niveau : dans ce cas $Z = 0$.

Au maximum, le joueur peut terminer les n niveaux disponibles : dans ce cas $Z = n$.

Le support de Z est donc $\boxed{Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket}$.

(b) Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\boxed{[Z = k] = \left(\bigcap_{i=1}^k A_i \right) \cap \overline{A_{k+1}}}$

(avec la convention $\bigcap_{i=1}^0 A_i = \Omega$ pour l'intersection vide, si bien qu'on a simplement $[Z = 0] = \overline{A_1}$).

Pour $k = n$, on obtient : $\boxed{[Z = n] = \bigcap_{i=1}^n A_i}$

Dans un premier temps, on considère que tous les niveaux sont d'une difficulté comparable.

Autrement dit, on fixe un réel $p \in [0, 1]$ et on fait l'hypothèse (H_1) suivante :

(H_1) : Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, Si le joueur atteint le Niveau k , la probabilité qu'il le termine est p .

11. (a)

```
import numpy.random as rd
def alea(n,p) :
    Z = 0
    for k in range(n) :
        if rd.random() < p :
            Z = Z + 1
    return Z
```

Ce programme simule la réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\boxed{\mathcal{B}(n, p)}$.

Cela ne correspond pas à la situation qui nous intéresse ici, car la succession d'expériences persiste même après un potentiel échec ! Dans le cadre spécifié par l'énoncé, on voudrait que le joueur s'arrête (et "quitte la boucle") dès qu'il rencontre un échec.

- (b)

```
import numpy.random as rd
def alea(n) :
    Z = 0
    while (Z < n and rd.random() < p) : # on s'assure que Z n'excede jamais n
        Z = Z+1
    return Z
```

12. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, d'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}) \\ &= \underbrace{P(A_1)}_{=p} \times \underbrace{P_{A_1}(A_2)}_{=p} \times \dots \times \underbrace{P_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k)}_{=p} \times \underbrace{P_{A_1 \cap \dots \cap A_k}(\overline{A_{k+1}})}_{=1-p}. \end{aligned}$$

Remarque : Attention, il s'agit bien de la formule des probas composées et non de l'indépendance ! Les événements A_i ne sont pas mutuellement indépendants ici. Pour passer le niveau 2 par exemple, il faut déjà avoir passé le niveau 1... On ne peut donc pas dire que la réalisation de A_2 est indépendant de celle de A_1 , puisque $A_2 \subset A_1$. La formule des probas composées permet de garder l'idée que les probabilités sont "multiplicatives", mais fait intervenir des probas conditionnelles.

On obtient ainsi : $\boxed{\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P(Z = k) = p^k(1-p)}$.

Lorsque $k = n$, on a de même, avec la formule des probabilités conditionnelles :

$$P(Z = n) = P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \underbrace{P(A_1)}_{=p} \times \underbrace{P_{A_1}(A_2)}_{=p} \times \dots \times \underbrace{P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)}_{=p}$$

c'est à dire $P(Z = n) = p^n$.

13. Calculons :

$$\sum_{k=0}^n P(Z = k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} p^k (1-p) \right) + p^n = (1-p) \left(\sum_{k=0}^{n-1} p^k \right) + p^n = (1-p) \frac{1-p^n}{1-p} + p^n,$$

donc, en simplifiant : $\sum_{k=0}^n P(Z = k) = 1$ (cohérent).

On aimera à présent modéliser une situation où les niveaux sont de difficulté croissante.
Dans toute la fin du problème, on fait l'hypothèse (H_2) suivante :

(H_2) : Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, Si le joueur atteint le Niveau k , la probabilité qu'il le termine est $\frac{1}{k}$.

14. En s'inspirant du programme du 11.(b) :

```
import numpy.random as rd
def alea(n) :
    Z = 0
    while (Z < n and rd.random() < 1/(Z+1)) :
        Z = Z + 1
    return Z
```

Le premier test aléatoire est réalisé avec une proba $\frac{1}{1}$, le suivant avec une proba $\frac{1}{2}$, etc...

15. On raisonne de nouveau avec la formule des probabilités totales.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}) \\ &= \underbrace{P(A_1)}_{=\frac{1}{1}} \times \underbrace{P_{A_1}(A_2)}_{=\frac{1}{2}} \times \dots \times \underbrace{P_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k)}_{=\frac{1}{k}} \times \underbrace{P_{A_1 \cap \dots \cap A_k}(\overline{A_{k+1}})}_{=1-\frac{1}{k+1}} \\ &= \prod_{i=1}^k \frac{1}{i} \times \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{k!} \times \frac{k}{k+1} \end{aligned}$$

et donc : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P(Z = k) = \frac{k}{(k+1)!}$ Pour $k = n$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \\ &= \underbrace{P(A_1)}_{=\frac{1}{1}} \times \underbrace{P_{A_1}(A_2)}_{=\frac{1}{2}} \times \dots \times \underbrace{P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)}_{=\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{i} \end{aligned}$$

c'est à dire : $P(Z = n) = \frac{1}{n!}$.

16. (a) Rappelons que $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. Le théorème de transfert donne :

$$\begin{aligned} E(Z+1) &= \sum_{k=0}^n (k+1) P(Z = k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{k}{(k+1)!} \right) + (n+1) \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k!} + \frac{n+1}{n!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k!} + \frac{n}{n!} + \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = S_n. \end{aligned}$$

Ceci montre que $E(Z + 1) = S_n$.

Bien-sûr, ceci se ré-écrit $E(Z) + 1 = S_n$, et donc : $E(Z) = S_n - 1$.

- (b) Supposer que le nombre total de niveaux disponibles est très grand revient à étudier le cas où $n \rightarrow +\infty$. On a vu que $E(Z) = S_n - 1$ et on a établi en Partie I que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e$.
 Ainsi, quand le nombre total de niveaux est très grand,
 le joueur parvient en moyenne à passer $e - 1$ niveau (environ 1,7).

17. On suppose $n \geq 3$.

- (a) On utilise de nouveau le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E((Z+1)(Z-1)) &= \sum_{k=0}^n (k+1)(k-1)P(Z=k) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(k-1) \frac{k}{(k+1)!} \right) + (n+1)(n-1) \frac{1}{n!} \\ &= \left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{(k-1)k(k+1)}{(k+1)!} \right) + \frac{n^2-1}{n!} \\ &= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k-2)!} + \frac{n^2-1}{n!} = \sum_{k=1}^{n-3} \frac{1}{k!} + \frac{n^2-1}{n!}. \end{aligned}$$

On a montré : $E((Z+1)(Z-1)) = S_{n-3} + \frac{n^2-1}{n!}$

- (b) Puisque $(Z+1)(Z-1) = Z^2 - 1$, l'égalité précédente donne

$$E(Z^2) - 1 = S_{n-3} + \frac{n^2-1}{n!} \quad \text{donc} \quad E(Z^2) = 1 + S_{n-3} + \frac{n^2-1}{n!}.$$

Pour finir, on peut utiliser la formule de Koenig-Huygens pour calculer la variance :

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$$

c'est à dire : $V(Z) = 1 + S_{n-3} + \frac{n^2-1}{n!} - (S_n - 1)^2$.

- (c) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e$ et bien-sûr $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2-1}{n!} = 0$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(Z) = 1 + e - (e-1)^2 = 1 + e - (e^2 - 2e + 1) = 3e - e^2 = e(3-e).$$

Ainsi, si le nombre total de niveau est très grand, $V(Z) \simeq e(3-e)$.