14

Matrices

Dans tout ce chapitre, n et p sont deux entiers naturels non nuls.

1 Notion de matrice

Définition 1 (Matrice)

Une matrice A à n lignes et p colonnes est un tableau à n lignes et p colonnes contenant des réels.
On la note, sous forme "compacte" : $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$

• Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$,
$A_{i,j}$ est le coefficient situé sur la ligne i et sur la colonne j.

• On dit d'une telle matrice qu'elle est de taille $n \times p$.

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,j} & \cdots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,j} & \cdots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & A_{i,2} & \cdots & A_{i,j} & \cdots & A_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,j} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix}$$

• Par définition, deux matrices sont égales lorsqu'elles ont même nombre de lignes, même nombre de colonnes, et mêmes coefficients.

• S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le nombre de lignes et de colonnes,
on pourra parfois simplement écrire, pour la forme "compacte" : $A = (A_{i,j})$.

• L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
En particulier :

- Si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (c'est le cas $n = p$), on dit que A est une matrice carrée.

- Si $A \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, on dit que A est une matrice ligne.

- Si $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on dit que A est une matrice colonne.

• La matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.
On la notera : $0_{n,p}$
(S'il n'y a pas d'ambiguité, on écrira parfois $A = 0$, en comprenant qu'il ne s'agit pas du 0 des réels, mais bien de la matrice nulle !)

Exemples

• $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2×3, c'est à dire un élément de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
On peut l'écrire $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$ où :

$$A_{1,1} = 1, \quad A_{1,2} = -2, \quad A_{1,3} = 0, \quad A_{2,1} = 0, \quad A_{2,2} = 1, \quad A_{2,3} = 1.$$

• $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ est une matrice carrée.

• $C = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 & 0,2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne.

• $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -0,5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est une matrice colonne.

• La matrice nulle de taille 3×2 est : $0_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2 Opérations sur les matrices

2.1 Addition et multiplication par un réel

Définition 2 (Addition et multiplication par un réel)

Soit $A = (A_{i,j})$ et $B = (B_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice dont les coefficients sont donnés par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, p]\!],\ \ (A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}.$$

- $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice dont les coefficients $a'_{i,j}$ sont donnés par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, p]\!],\ \ (\lambda A)_{i,j} = \lambda A_{i,j}.$$

- On note naturellement $A - B$ la matrice $A + (-1)B$.

Autrement dit, la somme et la multiplication par un réel se font "coefficient par coefficient".
Si A et B sont de taille $n \times p$, alors $A + B$, λA et $A - B$ sont encore de taille $n \times p$.

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $2A$, $A + B$ et $A - B$.

$2A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 2 & -12 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} -2+1 & 0+1/2 & 2+1 \\ 1+5 & -6-1 & 1/3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 6 & -7 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} -2-1 & 0-1/2 & 2-1 \\ 1-5 & -6+1 & 1/3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -4 & -5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Attention !

Pour pouvoir additionner ou soustraire deux matrices, il faut impérativement qu'elles aient le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes !

L'addition $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ n'a pas de sens.

Proposition 1 (Propriétés de la somme et de la multiplication par un réel)

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$
- $A - A = 0_{n,p}$
- $1A = A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda \times \mu)A = \mu(\lambda A)$

S P O I L E R . . .

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est ainsi muni d'une opération d'additition et d'une multiplication par un réel, qui se "comportent bien". On dira plus tard que ces opérations confèrent à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une structure d'**espace vectoriel**.

2.2 Produit de matrices

Définition 3 (Produit de matrices)

Soient n, p et q trois entiers naturels non nuls.

Soient $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Le produit AB est la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,q]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,j}.$$

Pour calculer le **coefficient d'indices** (i,j) **du produit** AB, on additionne les produits successifs des coefficients de la **i-ème ligne de** A et la **j-ième colonne de** B.

Schéma :

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{i,1} & A_{i,2} & \cdots & A_{i,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots & B_{1,j} & \vdots \\ \vdots & B_{2,j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & B_{p,j} & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & C_{i,j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad \text{avec } C_{i,j} = A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,2}B_{2,j} + \ldots + A_{i,p}B_{p,j}$$

Le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B, sinon le produit n'est pas défini ! AB a alors le même nombre de lignes que A et le même nombre de colonnes que B .

On pourra retenir schématiquement que $\boxed{\text{"}\mathcal{M}_{n,p} \times \mathcal{M}_{p,q} \text{ donne } \mathcal{M}_{n,q}.\text{"}}$

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Calculer AB et AX.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -12 & 14 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad AX = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2y+z \\ -y+4z \\ x-2y \end{pmatrix}$$

Proposition 2 (Propriétés du produit de matrices)

Soient n, p, q, r des entiers naturels non nuls.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C, D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $E \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Associativité :** $(AB)C = A(BC)$ si bien qu'on notera sans ambiguïté ABC.
- **Distributivité :** $(A+B)C = AC + BC$ et $A(C+D) = AC + AD$
- **Produit et multiplication par un réel :** $(\lambda A)C = A(\lambda C) = \lambda(AC)$

Le produit de matrices est donc associatif et distributif comme le produit "usuel" sur les réels, ou bien le produit de polynômes par exemple. Mais contrairement à ces derniers :

- Il n'est **pas commutatif !** ($AB \neq BA$ en général)
- Il ne respecte **pas la propriété du "produit nul"** ! ($AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$).

Remarque 1

Bien-sûr, lorsque le produit est bien défini, $A \times 0 = 0$ et $0 \times A = 0$.
(Attention aux tailles de ces matrices nulles !)

Attention !

Non-commutativité :

• Il est possible que AB soit bien défini mais que BA n'ait pas de sens !

Exemple : Dans l'exercice 2, le produit BA n'a pas de sens.

• Lorsque les deux produits AB et BA existent, on n'a pas forcément $AB = BA$ en général !
On dit alors que A et B ne commutent pas.

Exemple : Avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, on a :

$AB = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -1 & -11 \end{pmatrix}$

Remarque 2

On fera ainsi toujours attention à respecter le "sens" du produit dans les calculs. Par exemple :

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD \neq CA + DA + CB + DB...$$

Attention !

Produit nul de matrices :

• On peut avoir $AB = 0$ sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle.

Exemples : Avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, on a : $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $AA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

• En conséquence, **on ne peut pas "simplifier par une matrice"** en général !
L'égalité $AC = BC$ avec $C \neq 0$ n'implique pas $A = B$.

Exemple : Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$AC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $BC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $AC = BC$ avec $C \neq 0$, mais pourtant $A \neq B$!

De même à droite : l'égalité $CA = CB$ avec $C \neq 0$ n'implique pas $A = B$.

Remarque 3

On verra cependant que, dans certains cas, il sera possible de simplifier l'égalité $AC = BC$ pour déduire $A = B$. C'est notamment possible si C est une matrice carrée **inversible**.

2.3 Transposition

Définition 4 (Matrice transposée)

Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

La transposée de A est la matrice ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!],\quad ({}^tA)_{i,j} = A_{j,i}.$$

Autrement dit, ${}^tA$ est la matrice obtenue à partir de A **en "échangeant" les lignes et les colonnes :**

- La première ligne de A devient la première colonne de ${}^tA$
- La deuxième ligne de A devient la deuxième colonne de ${}^tA$, etc...

Remarques 4

- On notera bien que si A est de taille $n \times p$, alors ${}^tA$ est de taille $p \times n$.
- Il est clair d'après la définition que $\boxed{{}^t({}^tA) = A}$

Exercice 3

On pose $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}$. Donner ${}^tA$ et ${}^tB$.

${}^tA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et ${}^tB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Proposition 3 (Linéarité de la transposition)

Pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$.

En combinant ces deux propriétés, on peut écrire : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$.

Preuve :

Relativement évident d'après la définition. □

Proposition 4 (Transposée d'un produit)

Pour toutes $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Preuve :

On note $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (B_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}}$, de sorte que la matrice $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ a les coefficients :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall j \in [\![1,q]\!],\ (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,j}.$$

Ainsi la transposée ${}^t(AB) \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$ a les coefficients :

$$\forall i \in [\![1,q]\!],\ \forall j \in [\![1,n]\!],\quad ({}^t(AB))_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{k=1}^{p} A_{j,k}B_{k,i} = \sum_{k=1}^{p} B_{k,i}A_{j,k} = \sum_{k=1}^{p} ({}^tB)_{i,k}({}^tA)_{k,j}.$$

On reconnait finalement le coefficient $({}^tB\,{}^tA)_{i,j}$. On a donc montré que ${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA)$. □

3 Matrices carrées

3.1 Définitions générales

Définition 5 (Matrice carrée)

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (de taille $n \times n$, ou encore "d'ordre n") est appelée matrice carrée.
- L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

Cet ensemble est stable par addition, multiplication par un réel, et produit :

$$\text{Si } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}, \quad A + B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \lambda A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

- Si $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A_{1,1}, \ldots, A_{n,n}$ s'appellent les coefficients diagonaux de A.
- La matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut se noter plus simplement $0_n = 0_{n,n}$

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

Remarques 5

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ ne contient qu'un seul coefficient : $A = (A_{1,1})$ avec $A_{1,1} \in \mathbb{R}$.

Ce n'est donc pas très intéressant ! L'ensemble $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ "s'identifie" à $\mathbb{R}$.

- Rappelons que, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les deux produits AB et BA sont bien définis,

mais $AB \neq BA$ en général !

Définition 6 (Matrice identité)

On appelle matrice identité d'ordre n , notée I_n, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent 1 et tous les autres coefficients sont nuls :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exemples

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice identité, parfois appelée "matrice unité", est en quelque sorte l'équivalent du "1" des réels, au sens où c'est un élément neutre pour la multiplication :

Proposition 5 (Propriété fondamentale de la matrice identité)

- Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\quad I_n\, A = A.$ et $\quad A\, I_p = A$
- Ainsi, pour une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient : $\quad I_n A = A I_n = A.$

Preuve de la Proposition 5 :

Soit $A=(A_{i,j})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Notons $I_n=(\delta_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ces coefficients sont donc donnés par :

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \delta_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases}$$

Alors le produit $I_nA=(c_{i,j})$ est de taille $n\times p$ et a, par définition du produit matriciel, les coefficients :

$$\forall i\in[\![1,n]\!], \forall j\in[\![1,p]\!],\ c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,k}A_{k,j}=A_{i,j}\quad\text{(car le seul terme non nul est celui quand } k=i).$$

Ceci montre bien que $I_nA=A$. De même pour le produit dans l'autre sens. □

Exemple

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$$

3.2 Puissances d'une matrice

Définition 7 ("A puissance k")

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On peut définir les puissances successives de A par récurrence :

- On pose $A^0=I_n$
- Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A^{k+1}=A\,A^k=A^kA$

Autrement dit, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $A^k=\underbrace{A\,A\ldots A}_{k\text{ fois}}$.

Remarques 6

- Bien entendu ces puissances sont au sens du produit matriciel !

Si les coefficients de A sont les $A_{i,j}$, les coefficients de A^2 ne sont pas les $(A_{i,j})^2$ en général !

- Une puissance A^k n'a de sens **que si A est une matrice carrée** !
- Notons que A **commute avec toutes ses puissances** : pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\boxed{A\,A^k=A^kA}$
- Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $(I_n)^k=I_n$.

Exercice 4

Soit $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3.

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\3&-1&1\\4&0&2\end{pmatrix}$$

$$A^3=AA^2=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\3&-1&1\\4&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&-2\\2&-2&0\\6&-2&2\end{pmatrix}$$

Proposition 6 (Quelques règles de calcul de puissances)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a les propriétés suivantes :

- Pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$, $A^k A^\ell = A^\ell A^k = A^{k+\ell}$ et $(A^k)^\ell = A^{k\times\ell}$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$.

Preuve :

- On a $A^k A^\ell = \underbrace{(AA\dots A)}_{k \text{ fois}}\underbrace{(AA\dots A)}_{\ell \text{ fois}} = \underbrace{AAA\dots A}_{k+\ell \text{ fois}} = A^{k+\ell}$, (de même dans l'autre sens)

et $(A^k)^\ell = \underbrace{A^kA^k\dots A^k}_{\ell \text{ fois}} = \underbrace{AAA\dots A}_{k\times\ell \text{ fois}} = A^{k\times\ell}$.

- On a $(\lambda A)^k = \underbrace{(\lambda A)(\lambda A)\dots(\lambda A)}_{k \text{ fois}} = \underbrace{\lambda\lambda\dots\lambda}_{k \text{ fois}}\underbrace{AA\dots A}_{k \text{ fois}}$ (cf. 3ème point de la Proposition 2)

c'est à dire $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$. □

Méthode : Calcul de A^k : en "devinant"...

Pour calculer l'expression de A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut :

$\boxed{1}$ Calculer les premières puissances A^0, A^1, A^2, A^3...

$\boxed{2}$ Deviner la formule pour le cas général A^k.

$\boxed{3}$ Démontrer cette formule par récurrence.

Exercice 5

1. On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'expression de J^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Plus généralement, on définit $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (matrice ne contenant que des 1).

Déterminer l'expression de $(J_n)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

1. On calcule : $J^0 = I_3$, $J^1 = J$, puis :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$$

Puis $J^3 = JJ^2 = J \times (3J) = 3J^2 = 3 \times 3J = 9J$.

Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ J^k = 3^{k-1}J$.

- Pour $k = 1$, on a bien $J = 3^0 J$.
- Si $J^k = 3^{k-1}J$, alors $J^{k+1} = JJ^k = J \times (3^{k-1}J) = 3^{k-1}J^2 = 3^{k-1} \times 3J = 3^k J$, ce qui achève la réccurence.

2. Cette fois, on note que $(J_n)^2 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \dots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \dots & n \end{pmatrix} = nJ_n$.

De la même façon, on a par récurrence immédiate : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (J_n)^k = n^{k-1}J_n$.

Maintenant que l'on dispose de cette notion de puissance pour des matrices carrées, relativement similaire à la notion de puissance pour des réels, il est naturel de se demander si des identités remarquables du type $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ "tiennent" toujours pour des matrices...

Attention !

- Si A et B sont deux matrices carrées qui ne commutent pas ($AB \neq BA$), on a

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = ABAB \neq A^2B^2.$$

- En revanche, si A et B sont deux matrices carrées qui commutent ($AB = BA$), on peut bien écrire :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

$$(AB)^2 = A^2B^2.$$

Théorème 1 (Identités remarquables pour des matrices qui commutent)

Soien $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^{m-k} B^k$$

$$A^m - B^m = (A-B) \sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}.$$

$$(AB)^m = A^m B^m.$$

Preuve :

Si $AB = BA$, alors les règles de calculs mettant en jeu les puissances de A et de B sont exactement les mêmes que celles des réels. On peut donc reproduire la même preuve que dans le cas des réels. □

Méthode : Calcul de A^k : en utilisant la formule du binôme

Si on peut écrire la matrice A sous la forme d'une somme $A = M + N$, où :
- $MN = NM$,
- les puissances de M et de N sont "faciles à calculer",

on peut utiliser la formule du binôme pour déterminer l'expression des puissances de A.

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer l'expression de A^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.

On peut écrire $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c'est à dire $A = 3I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- I_3 commute avec n'importe quelle matrice carrée, donc : $(3I_3)N = 3I_3N = 3NI_3 = N(3I_3)$.
- Puissances de $3I_3$: Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(3\,I_3)^m = 3^m(I_3)^m = 3^m I_3$.

- Puissances de N :

$N^0 = I_3, \quad N^1 = N, , \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $N^3 = NN^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$

Ainsi pour tout $m \geqslant 3, \quad N^m = 0_3$!

- On applique la formule du binôme : pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^m = (3I_3 + N)^m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (3I_3)^{m-k} N^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 3^{m-k} N^k \\ &= \binom{m}{0} 3^m N^0 + \binom{m}{1} 3^{m-1} N^1 + \binom{m}{2} 3^{m-2} N^2 \\ &= 3^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + m3^{m-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{m(m-1)}{2} 3^{m-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^m & m3^{m-1} & m3^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} 3^{m-2} \\ 0 & 3^m & m3^{m-1} \\ 0 & 0 & 3^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.3 Polynôme de matrice

On a vu que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée, on pouvait considérer $A^0 = I_n$, A^1, A^2, A^3, etc... qui sont encore des matrices carrées. On peut alors naturellement considérer une expression du type :

$$3A^3 - 2A^2 + 2A - 4I_n, \quad \text{qui est encore une matrice carrée.}$$

On dit qu'une telle expression est un **polynôme en** A.

Définition 8 (Polynôme de matrice)

Soient $P = \sum_{k=0}^{m} A_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
On définit la matrice :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{m} A_k A^k = A_m A^m + \ldots + A_1 A + A_0 I_n.$$

On dit que $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un polynôme en A.

Remarque 7

On fera bien attention au fait que le coefficient constant A_0 "donne" $A_0 A^0$, c'est à dire $\boxed{A_0 I_n}$.

Exercice 7

Soit $P = X^2 - 2X + 4$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice $P(A)$.

Par définition, $P(A) = A^2 - 5A + 4I_3$.

On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc : $P(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Soit : $P(A) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & 7 & 1 \\ 1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

Proposition 7 (Propriétés des polynômes en A)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$(P+Q)(A) = P(A) + Q(A) \quad \text{et} \quad (PQ)(A) = P(A)Q(A).$$

En particulier, on voit que $P(A)Q(A) = (PQ)(A) = (QP)(A) = Q(A)P(A)$.

Cette proposition repose en fait sur le fait que "les puissances de A commutent entre elles".

Exemple

Considérons $P = X^3 - 2$ et $Q = X + 1$. On a donc $PQ = (X^3 - 2)(X + 1) = X^4 + X^3 - 2X - 2$.

Ainsi, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(PQ)(A) = A^4 + A^3 - 2A - 2I_n$ par définition.

On note que le calcul du produit $P(A)Q(A)$ conduit à la même matrice :

$$P(A)Q(A) = (A^3 - 2I_n)(A + I_n) = A^3A + A^3I_n - 2I_nA - 2I_n = A^4 + A^3 - 2A - 2I_n.$$

On a donc bien $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$.

Conséquence de cette proposition : Tous les calculs usuels mettant en jeu des polynômes (factorisation, développement...) tiennent toujours avec des polynômes de matrices ! À partir d'une égalité entre deux polynômes, on peut simplement "remplacer X par A" et "remplacer 1 par I_n" pour obtenir une égalité matricielle.

Exemples

- On sait que $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X + 1$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pourra donc écrire

$$(A - I_n)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A + I_n.$$

(On peut retrouver ceci avec la formule du binôme du Théorème 1, puisque A et I_n commutent !)

- Après recherche des racines du polynôme $X^3 - 3X + 2$, on obtient la factorisation :
$X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pourra donc écrire :

$$A^3 - 3A + 2I_n = (A - I_n)^2(A + 2I_n).$$

Attention !

Ne pas oublier de "remplacer 1 par I_n" : $A^3 - 3A^3 - 3$, $(A-1)^2(A+2)^2$... n'ont pas de sens !

Les polynômes de matrices ont de multiples applications. On peut notamment s'en servir pour déterminer l'expression des puissances d'une matrice A (souvent dans un exercice guidé !...)

Méthode : Calcul de A^k : à l'aide d'un "polynôme annulateur"

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'on dispose d'un **polynôme annulateur**,
c'est à dire d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ (non nul) tel que $P(A) = 0_n$ (matrice nulle).

Alors on peut déterminer l'expression de A^k pour $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$\boxed{1}$ Poser la division euclidienne de X^k par P : $\quad X^k = P(X)Q_k(X) + R_k(X)$.

$\boxed{2}$ Déterminer le reste $R_k(X)$ de cette division euclidienne (exercice classique de polynômes !)

$\boxed{3}$ On obtient $A^k = P(A)Q_k(A) + R_k(A) = R_k(A) \quad$ (puisque $P(A) = 0_n$).

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $P = X^3 - 3X^2 + 2X \in \mathbb{R}[X]$.

1. Calculer $P(A)$.
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par P.
4. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On calcule successivement :

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

et on déduit que

$$P(A) = A^3 - 3A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

2. On remarque déjà que $P = X(X^2 - 3X + 2)$.
1 et 2 sont des racines évidentes : finalement $P = X(X-1)(X-2)$.

3. La division euclidienne s'écrit $\quad X^n = X(X-1)(X-2)Q(X) + R(X)$
avec $deg(R) < deg(P) = 3$ donc $deg(R) \leqslant 2$.
Ainsi R_n est de la forme $R(X) = aX^2 + bX + c$.
On peut donc ré-écrire : $X^n = X(X-1)(X-2)Q(X) + aX^2 + bX + c$.
En évaluant en 0, 1 et 2, on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} 0 = c \\ 1 = a + b + c \\ 2^n = 4a + 2b + c \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 1 \\ 4a + 2b = 2^n \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2^{n-1} - 1 \\ b = 2 - 2^{n-1} \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc $R(X) = (2^{n-1} - 1)X^2 + (2 - 2^{n-1})X$.

4. En "évaluant" $X^n = P(X)Q(X) + R(X)$ en A, on obtient

$$A^n = P(A)Q(A) + R(A) = R(A) = (2^{n-1} - 1)A^2 + (2 - 2^{n-1})A$$

Cela donne : $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 1 - 2^{n-1} & 1 & -2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

3.4 Quelques matrices carrées particulières

Définition 9 (Matrices carrées particulières)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice...

- ...**Triangulaire inférieure** lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i < j \Rightarrow A_{i,j} = 0 \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

- ...**Triangulaire supérieure** lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \Rightarrow A_{i,j} = 0 \qquad \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- ... **Diagonale** lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow A_{i,j} = 0 \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- ... **Symétrique** lorsque ${}^tA = A$, c'est à dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad A_{i,j} = A_{j,i} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- ... **Antisymétrique** lorsque ${}^tA = -A$, c'est à dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad A_{i,j} = -A_{j,i} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarques 8

- Une matrice est **diagonale** si et seulement si elle est **triangulaire supérieure et inférieure** !
- On utilisera occasionnellement la notation "diag" pour désigner une matrice diagonale :

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Par exemple : $\mathrm{diag}(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathrm{diag}(1,1,1,1) = I_4$.

- Il n'y a pas de condition particulière pour les coefficients diagonaux d'une matrice symétrique.
- Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours nuls.

Proposition 8 (Produit de matrices triangulaires)

Un produit de matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) de taille $n \times n$ reste une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) de taille $n \times n$.
De plus, les coefficients diagonaux du produit sont les produits des coefficients diagonaux.

Preuve :

Appliquer la définition des coefficients d'un produit matriciel... Preuve laissée en exercice. $\square$

Exercice 9

Calculer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 20 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Proposition 9 (Produit de matrices diagonales)

Un produit de matrices diagonales de taille $n \times n$ reste une matrice diagonale de taille $n \times n$.
De plus, les coefficients diagonaux du produit sont les produits des coefficients diagonaux.

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

Preuve :

C'est un conséquence de la Proposition 8, puisqu'une matrice diagonale est à la fois triangulaire inférieure et triangulaire supérieure. □

Corollaire 1 (Puissances d'une matrice diagonale)

Si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, D^k est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les puissances k des coefficients diagonaux de D.

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (\lambda_n)^k \end{pmatrix}$$

Preuve :

Récurrence immédiate à partir de la Proposition 9, puisque $D^{k+1} = DD^k$. □

Exercice 10

Calculer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et la puissance $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$