# Dérivées successives, formules de Taylor et développements limités

#### Introduction et motivation

La "Formule de Taylor" a déjà été évoquée dans le cas des polynômes.

Si  $P \in \mathbb{R}[X]$  avec  $\deg(P) \leqslant n$  et a est un réel fixé, on peut écrire la formule de Taylor à l'ordre n en a:

$$P(X) =$$

Dans ce chapitre, nous allons généraliser cette formule de Taylor à des fonctions quelconques, pas forcément polynômiales. Pour une fonction  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  suffisament régulière, la formule de Taylor à l'ordre n en a donnera une **approximation de** f(x) **par un polynôme en** x, lorsque x est au voisinage de a:

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Précisément, on écrira l'égalité :

$$f(x) = \underbrace{\qquad \qquad}_{\text{polynôme de Taylor à l'ordre n}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{"reste"}}$$

- La formule de Taylor avec reste intégral donnera une expression explicite du reste  $R_n(x)$ .
- L'inégalité de Taylor-Lagrange permettra de "contrôler le reste" en majorant simplement  $|R_n(x)|$ .
- Enfin, la formule de Taylor-Young précisera que  $R_n(x) = o((x-a)^n)$ .

Cette dernière formule permettra d'écrire des développements limités pour les fonctions usuelles.

#### **Exemple**

On sait déjà que  $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ , ce qui revient à dire  $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ .

Grâce à la formule de Taylor-Young, on pourra pousser ce développement à un ordre supérieur :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
, ou bien, encore plus précisément :  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$  etc...

### 1 Dérivées successives

#### 1.1 Définitions

## Définition 1 (Dérivées successives d'une fonction)

Soient I un intervalle de  $\mathbb{R}$  (ou une union finie d'intervalles),  $f: I \to \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

Si f est k fois dérivable sur I (c'est à dire f est dérivable sur I, f' est dérivable sur I, etc...), on note  $f^{(k)}$  la dérivée k-ième de f. Ainsi, sous réserve de dérivabilité, on a :

$$f^{(0)} = f^{(1)} = f^{(2)} =$$
 et plus généralement :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ f^{(k)} =$ 

On note l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I.

#### Remarque 1

En particulier  $D^1(I,\mathbb{R}) = D(I,\mathbb{R})$  (ensemble des fonctions dérivables sur I).

#### Exercice 1

- 1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer les dérivées successives du monôme  $f: x \mapsto x^n$ .
- 2. Calculer les dérivées successives de la fonction inverse  $g: x \mapsto \frac{1}{x}$ .
- 3. Calculer les dérivées successives des fonctions cos et sin.

Toutes ces fonctions sont (clairement) indéfiniment dérivables sur leur domaine de définition.

# $\blacksquare$ Définition 2 (Fonction de classe $C^k$ )

Soient I un intervalle (ou une union finie d'intervalles),  $f: I \to \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

On dit que f est de classe  $C^k$  sur I lorsque f est k fois dérivable sur I et  $f^{(k)}$  est continue sur I.

l'ensemble des fonctions de classe  $C^k$  sur I. Autrement dit : On note

$$C^k(I,\mathbb{R}) =$$

# Remarque 2

- $\bullet$  Ceci vient généraliser la notion de classe  $C^1$  vue auparavant.
- Une fonction de classe  $C^0$  est simplement une fonction continue!  $C^0(I,\mathbb{R}) = C(I,\mathbb{R})$ .

Inclusions: • Par définition,  $C^k(I,\mathbb{R}) \subset D^k(I,\mathbb{R})$ 

L'inclusion inverse est fausse : si f est seulement k fois dérivable,  $f^{(k)}$  n'est pas forcément continue!

•  $D^{k+1}(I,\mathbb{R}) \subset C^k(I,\mathbb{R})$ . En effet si f est dérivable (k+1) fois, alors  $f^{(k)}$  est dérivable, donc continue.

L'inclusion inverse est fausse : si f est de classe  $C^k$ , f n'est pas forcément dérivable (k+1) fois!

• Ainsi :  $C^k(I,\mathbb{R}) \subset D^k(I,\mathbb{R}) \subset C^{k-1}(I,\mathbb{R}) \subset D^{k-1}(I,\mathbb{R}) \subset \ldots \subset C^1(I,\mathbb{R}) \subset D^1(I,\mathbb{R}) \subset C^0(I,\mathbb{R})$ Si f est de classe  $C^k$ , elle est donc aussi de classe  $C^{k-1}, C^{k-2}, \ldots, C^1, C^0$ .

## lacksquare Définition 3 (Fonction de classe $C^{\infty}$ )

Soient I un intervalle (ou une union finie d'intervalles) et  $f: I \to \mathbb{R}$ .

On dit que f est de classe  $C^{\infty}$  sur I lorsque f est "indéfiniment dérivable" sur I, c'est à dire :

On note

l'ensemble des fonctions de classe  $C^{\infty}$  sur I. Autrement dit :

# ightharpoonup Proposition 1 (Les fonctions "usuelles" sont de classe $C^{\infty}$ ) (admis)

Toutes les fonctions usuelles présentées dans le chapitre # 13 "Dérivation" sont de classe  $C^{\infty}$  sur leur domaine de dérivabilité.

#### **Exemples**

- Les fonctions  $x \mapsto x^4$ , exp, sin, cos, arctan sont de classe  $C^{\infty}$  sur  $\mathbb{R}$ .
- In est de classe  $C^{\infty}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . La fonction inverse  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est de classe  $C^{\infty}$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
- Attention :  $x \mapsto \sqrt{x}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ , mais de classe  $C^{\infty}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  seulement!
- Attention : Pour un exposant  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $x \mapsto x^{\alpha}$  est définie et de classe  $C^{\infty}$  sur  $\mathbb{R}_{+}^{*}$  seulement ! (Rappelons que  $x^{\alpha} =$  n'a de sens que pour x > 0.)

#### 1.2 Dérivées et opérations

# Proposition 2 (Somme et multiplication par une constante)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient f et g deux fonctions n fois dérivables (resp. de classe  $C^n$ ) sur I. Alors :

• f + g est n fois dérivable (resp. de classe  $C^n$ ) sur I et

$$\forall x \in I, \ (f+g)^{(n)}(x) =$$

• Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f$  est n fois dérivable (resp. de classe  $C^n$ ) sur I et

$$\forall x \in I, \ (\lambda f)^{(n)}(x) =$$

#### Preuve:

Récurrence immédiate à partir des propriétés pour une seule dérivée.

#### Remarque 3

Ainsi :  $E = D^n(I, \mathbb{R})$  (ou  $E = C^n(I, \mathbb{R})$  ou  $E = C^{\infty}(I, \mathbb{R})$ ) est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ , et l'application  $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f^{(n)} \end{array}$  est linéaire!

# **★** Théorème 1 (Produit : Formule de Leibniz)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient f et g deux fonctions n fois dérivables (resp. de classe  $\mathbb{C}^n$ ) sur I.

Alors le produit fg est n fois dérivable (resp. de classe  $C^n$ ) sur I et

$$\forall x \in I, \ (fg)^{(n)}(x) =$$

#### Preuve du Théorème 1 :

Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\mathcal{P}(n)$$
:

- Initialisation :  $\mathcal{P}(0)$  :  $(fg)^{(0)} = fg = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)}$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$  vrai et montrons  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Soient 
$$f, g \in D^{n+1}(I, \mathbb{R})$$
. D'après  $\mathcal{P}(n)$ ,  $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ .

Cette fonction est ainsi dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables, et :

$$(fg)^{(n+1)} =$$

Ceci achève la récurrence. Si de plus  $f, g \in C^n(I, \mathbb{R})$  on voit d'après l'expression obtenue que  $(fg)^{(n)}$  est continue (somme et produit de fonctions continues) : c'est donc que  $fg \in C^n(I, \mathbb{R})$ !

#### Exercice 2

Soit  $f: x \mapsto x^2 e^{-x}$ . Calculer  $f^{(n)}$  pour tout  $n \ge 2$ .

# Proposition 3 (Quotient)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient f et g deux fonctions n fois dérivables (resp. de classe  $C^n$ ) sur I.

Si g ne s'annule pas sur I, la fonction  $\frac{f}{g}$  est n fois dérivable (resp. de classe  $\mathcal{C}^n$ ) sur I.

# Proposition 4 (Composition)

Soient  $f: I \to \mathbb{R}$  et  $g: J \to \mathbb{R}$  de sorte que  $f(I) \subset J$ . Si f et g sont n fois dérivables (resp. de classe  $C^n$ ) alors la fonction  $g \circ f$  est n fois dérivable (resp. de classe  $C^n$ ) sur I.

#### Æ Méthode : Régularité d'une fonction "élémentaire"

Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité D d'une fonction f, on pourra souvent annoncer :

"f est de classe  $C^{\infty}$  sur D comme somme/produit/quotient/composée de fonctions usuelles."

# 2 Formules de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange

### 2.1 Formule de Taylor avec reste intégral.

# ightharpoonup Théorème 2 (Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n en a)

Soient I un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $f \in C^{\infty}(I, \mathbb{R})$ .

Alors pour tout  $a \in I$  et  $x \in I$  (avec  $a \leq x$  ou bien  $x \leq a$ ):

$$f(x) =$$

Cas particulier a = 0:  $\forall x \in I, f(x) =$ 

### Remarques 4

- Dans le cas particulier où f = P est un polynôme de dégré inférieur à n, on a  $f^{(n+1)} = 0$ . Le reste intégral est donc nul et on retrouve la formule de Taylor pour des polynômes!
- Dans le cas d'une fonction quelconque (non polynomiale), on a  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ . Le reste  $R_n(x)$  mesure l'erreur que l'on commet dans l'apprixomation  $f(x) \simeq P_n(x)$ .  $R_n(x)$  est nul quand x = a, est "petit" quand x est au voisinage de a, grandit quand x s'éloigne de a. En pratique, plus l'ordre n est grand, plus le reste  $R_n(x)$  est petit, et donc plus l'approximation  $f(x) \simeq P_n(x)$  est satisfaisante au voisinage de a!
- La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n est ici énoncée pour f de classe  $C^{\infty}$ . En fait, il est suffisant que f soit de classe (de sorte que l'intégrale soit bien définie).

#### Preuve du Théorème 2:

Soient  $f \in C^{\infty}(I, \mathbb{R})$ ,  $a \in I$  et  $x \in I$ . Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\mathcal{P}(n)$$
:

- <u>Initialisation (n=0)</u>: On a bien  $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$  car
- <u>Hérédité</u>: Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$ , i.e :  $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt$ . Or en intégrant par parties :

$$\int_{a}^{x} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{u(t)} \underbrace{\frac{(x-t)^{n}}{n!}}_{v'(t)} dt =$$

En injectant ceci dans l'égalité précédente, on obtient bien  $\mathcal{P}(n+1)$ , ce qui achève la récurrence.

## Exercice 3

- 1. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 4 en 0 pour la fonction cos.
- 2. En déduire la majoration :  $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \cos(x) \leqslant 1 \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$

À mesure que l'ordre n augmente dans la formule de Taylor, le polynôme  $P_n(x)$  donne une approximation de plus en plus précise de f(x) au voisinage de a. Dans le cas de la fonction cos en 0, on a :

$$P_0(x) = 1$$
,  $P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ ,  $P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ .

✓ Dessin :

# Remarque 5

- L'approximation  $f(x) \simeq P_0(x) = f(a)$  revient à approcher le graphe de f par celui d'une fonction constante égale à f(a).
- L'approximation  $f(x) \simeq P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$  revient à approcher le graphe de f par sa tangente au point d'abscisse a.
- De manière générale, le polynôme de Taylor  $P_n$  est l'unique polynôme de degré au plus n tel que  $\forall k \in [0, n], \ P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ .

#### Inégalité de Taylor-Lagrange

On vient de voir qu'au voisinage de a, une fonction f suffisament régulière peut-être "approchée" par le polynôme de Taylor  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ .

Le Théorème suivant permet de contrôler l'erreur d'approximation  $|f(x) - P_n(x)|$  à l'aide d'une inégalité.

# ightharpoonup Théorème 3 (Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n en a (ou "entre a et x"))

Soient I un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $f \in C^{\infty}(I, \mathbb{R})$ . Soient  $a \in I$  et  $x \in I$ .

Soit K > 0 une constante telle que  $|f^{(n+1)}| \leq K$  sur [a, x] i.e.:

Alors:

Autrement dit:

#### Cas particulier a = 0:

#### Remarques 6

• Notons que l'on peut toujours trouver une constante K>0 comme dans l'énoncé du Théorème 3, car la fonction  $f^{(n+1)}$  est continue sur le segment [a,x] et

Attention : cette "constante" K peut éventuellement dépendre de x!

- À nouveau, ce Théorème est ici énoncé pour une fonction f de classe  $C^{\infty}$ . Pour appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n, il est en fait suffisant que f soit de classe
- Dans le cas n=0, on retrouve l'inégalité des accroissements finis (IAF)! En notant x=b:

#### Preuve du Théorème 3:

## ≅ Méthode : Repérer une utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange

Lorsque l'on demande de majorer une quantité du type |f(x) - P(x)|, où f est une fonction de classe  $C^{\infty}$  et P est un polynôme, c'est bien souvent l'inégalité de Taylor-Lagrange qu'il faut utiliser!

- 1 Introduire la fonction f et affirmer qu'elle est de classe  $C^{\infty}$ .
- $\boxed{2}$  Annoncer et écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n en a, sachant que :
- Si la majoration est donnée par l'énoncé, repérer le terme  $|x-a|^{n+1}$  dans le majorant et déduire les valeurs de a et n à choisir.
- Sinon:
- L'ordre n est en général le degré du polynôme P.
- Le point a est très souvent 0. (Sinon, P(x) est exprimé en termes de "puissances de (x-a)").

### **Exemple**

Si 
$$P(x) = 1 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$
, on appliquera l'inégalité à l'ordre 2 en  $a = 1$ .

 $\boxed{3} \text{ Calculer les valeurs } f^{(k)}(a) \text{ pour } k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{ déterminer } K > 0 \text{ telle que } |f^{(n+1)}| \leqslant K \text{ sur } [a, x].$ 

#### Exercice 4

Montrer que : 
$$\forall x \ge 0, \left| \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x \right| \le \frac{x^2}{8}$$
.

# **ℰ** Exercice 5

Soit  $x \in \mathbb{R}$  fixé. On souhaite démontrer que  $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ .

- 1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , majorer  $\left|e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\right|$  à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- 2. Conclure.

#### $\mathbf{3}$ Formule de Taylor-Young et développements limités

#### 3.1Notion de développement limité

**Rappel**: (Croissance comparée des monômes, pour  $p, n \in \mathbb{N}$ ).

- Au voisinage de  $+\infty$ , Pour p < n,  $x^p = o(x^n)$
- Mais au voisinage de 0, au contraire,

Dessin:

Pour 
$$p < n$$
,  $x^n = o(x^p)$ !

Exemples: 
$$x^2 = o(x), \quad x^3 = o(x^2), \text{ etc...}$$

• Plus généralement, au voisinage de  $a \in \mathbb{R}$ ,

Pour 
$$p < n$$
,  $(x-a)^n = o((x-a)^p)$ 

# Définition 4 (DL d'ordre n en a)

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et I un intervalle contenant a. Soit f une fonction définie sur I ou  $I \setminus \{a\}$ . On dit que f admet un développement limité (DL) d'ordre n en a lorsqu'il existe des réels  $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$  tels que :

Pour rappel, cela signifie que

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + \ldots + c_n(x - a)^n + h(x)$$

ou encore que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

Un DL d'ordre n en 0 s'écrit plus simplement :

### **Exemples**

• Si  $f(x) = 2 + 3x - 2x^2 + x^3$ , on peut écrire les développements limités en 0 :

 $\underline{\hat{A}} \text{ l'ordre } 0 : f(x) = x \\$ 

$$\underline{\underline{\lambda} \text{ l'ordre 1}} : f(x) = \underline{\underline{\lambda} \text{ l'ordre 3}} : f(x) = \underline{\underline{\lambda} \text{ l'ordre 3}} : f(x)$$

• On sait que  $e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$ , ce qui s'écrit aussi :  $e^x - 1 \underset{x \to 0}{=}$ 

Cela donne le développement limité à l'ordre 1 en 0 :

 $\bullet$  On sait que  $1-\cos(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2},$ ce qui s'écrit aussi :  $1-\cos(x) \underset{x \to 0}{=}$ 

Cela donne le développement limité à l'ordre 2 en 0 :  $\cos(x) = \cos(x)$ 

# Proposition 5 (Unicité du DL)

Si f admet un développement limité d'ordre n en a, ce développement est unique (c'est à dire qu'il y a unicité des coefficients  $c_0, c_1, \ldots, c_n$ ).

#### Preuve:

Supposons que l'on puisse écrire (avec  $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = \lim_{x\to a} \widetilde{\varepsilon}(x) = 0$ )

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + \dots + c_n(x - a)^n + (x - a)^n \varepsilon(x)$$

$$f(x) = \widetilde{c}_0 + \widetilde{c}_1(x-a) + \ldots + \widetilde{c}_n(x-a)^n + (x-a)^n \widetilde{\varepsilon}(x)$$

alors, en faisant la différence, on obtient

$$0 = (c_0 - \widetilde{c}_0) + (c_1 - \widetilde{c}_1)(x - a) + \ldots + (c_n - \widetilde{c}_n)(x - a)^n + (x - a)^n(\varepsilon(x) - \widetilde{\varepsilon}(x)).$$

En divisant par  $(x-a)^n$  (pour tout  $x \neq a$ ):

$$0 = \frac{(c_0 - \widetilde{c}_0)}{(x - a)^n} + \frac{(c_1 - \widetilde{c}_1)}{(x - a)^{n-1}} + \ldots + (c_n - \widetilde{c}_n) + (\varepsilon(x) - \widetilde{\varepsilon}(x)).$$

Lorsque  $x \to a$ , on voit que l'on doit avoir  $c_i - \widetilde{c}_i = 0$  pour tout  $i \in [0, n]$ , sinon le membre de droite tend vers  $\pm \infty$  (ou bien vers  $c_n - \widetilde{c}_n \neq 0$ )! Ainsi,  $\forall i \in [0, n]$ ,  $c_i = \widetilde{c}_i$ .

#### Remarque 7

Ainsi, lorsqu'il existe, on pourra bien parler  $\underline{\mathbf{du}}$  développement limité de f à l'ordre n en a.

Avant de rentrer dans le calcul concret des développements limités, énonçons deux résultats généraux utiles.

# Proposition 6 (Développement limité d'ordre inférieur)

Si f admet un développement limité d'ordre n en a de la forme

$$f(x) \underset{x \to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

alors pour tout p < n, f admet un développement limité d'ordre p au voisinage de a, donné par :

$$f(x) \underset{x \to a}{=}$$

#### Preuve rapide:

$$f(x) \underset{x \to a}{=} c_0 + c_1(x - a) + \dots + c_p(x - a)^p + \underbrace{c_{p+1}(x - a)^{p+1} + \dots + c_n(x - a)^n + o((x - a)^n)}_{o((x - a)^p)}.$$

#### **Exemple**

Si l'on sait que le DL à l'ordre 3 en 0 de f est :  $f(x) = 1 + 2x^2 + x^3 + o(x^3)$ , alors :

$$\underline{\text{À l'ordre 2}}: f(x) = \\
x \to 0$$
 $\underline{\text{A l'ordre 1}}: f(x) = \\
x \to 0$ 

# ► Proposition 7 (DL en 0 d'une fonction paire / impaire)

On suppose que f admet un développement limité d'ordre n en 0 de la forme

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n).$$

• Si f est paire, alors ce développement

Autrement dit :  $\forall k \in [0, n], k \text{ impair } \Rightarrow c_k = 0.$ 

• Si f est impaire, alors ce développement

Autrement dit :  $\forall k \in [0, n], k \text{ pair } \Rightarrow c_k = 0.$ 

#### Preuve de la Proposition 7:

Le DL de 
$$f$$
 en 0 s'écrit :  $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + x^n \varepsilon(x)$ , où  $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ .

Ainsi: 
$$f(-x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(-x)^k + (-x)^n \varepsilon(-x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k x^k + x^n \times \underbrace{\left((-1)^n \varepsilon(-x)\right)}_{\longrightarrow 0}$$

On obtient donc le DL :  $f(-x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k x^k + o(x^n)$ .

• Si 
$$f$$
 est paire, on a :  $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n) = f(-x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k x^k + o(x^n)$ .

Par unicité du DL, on peut identifier les coefficients :  $\forall k \in [0, n], c_k = (-1)^k c_k$ . D'où  $c_k = 0$  si k est impair.

• Si 
$$f$$
 est impaire, on a :  $f(x) = \sum_{x\to 0}^{n} c_k x^k + o(x^n) = -f(-x) = -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k x^k + o(x^n)$ .

Par unicité du DL, on peut identifier les coefficients :  $\forall k \in [0, n], c_k = (-1)^{k+1} c_k$ . D'où  $c_k = 0$  si k est pair.

#### **Exemples**

Admettons, l'espace d'un instant, que la fonction cos admet des développement limités à n'importe quel ordre en 0.

On a déjà vu que le DL à l'ordre 2 en 0 était :  $\cos(x) = \cos(x)$ 

Comme cos est paire, ses DL ne peuvent contenir que des puissances paires!

Le DL à l'ordre 3 est donc nécessairement :  $\cos(x) = \cos(x)$ 

Le prochain terme non nul n'apparait qu'à l'ordre 4, où l'on aura :  $\cos(x) = \cos(x)$ 

#### 3.2 Formule de Taylor-Young et développement limités usuels

Une nouvelle fois, déterminer un développement limité  $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ , c'est approcher la valeur f(x) par le polynôme  $P(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n$  au voisinage de a, l'"erreur d'approximation" étant prise en compte par le terme  $+o((x-a)^n)$ .

Sans surprise, lorsque f est suffisament régulière, ce polynôme n'est autre que le polynôme de Taylor  $P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ . C'est ce qu'affirme le Théorème suivant.

# **★** Théorème 4 (Formule de Taylor-Young à l'ordre n en a) (admis)

Soient I un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $f \in C^{\infty}(I, \mathbb{R})$ .

Alors pour tout  $a \in I$ , f admet un développement limité à l'ordre n en a, donné par :

$$f(x) \underset{x \to a}{=}$$

Cas particulier a = 0: f(x) =

#### Remarque 8

Ce théorème est ici énoncé pour une fonction f de classe  $C^{\infty}$ : on le démontrera en exercice. En travaillant un peu (beaucoup!), on peut montrer que la formule de Taylor-Young à l'ordre n est en fait valable dès que f est n-fois dérivable.

### Exercice 6

Déterminer le dévelopement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction arctan.

#### Remarque 9

Le Théorème 4 affirme que si f est de classe  $C^{\infty}$ , son **unique** développement limité à l'ordre n en a est donné par la formule de Taylor-Young.

Conséquence : Si une fonction f de classe  $C^{\infty}$  admet le développement limité

$$f(x) \underset{x \to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

on a alors  $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$  pour tout  $k \in [0, n]$ , ce qui permet d'accéder aux valeurs de dérivées en 0.

#### **Exemple**

On admet que la fonction  $f: x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$  admet le DL suivant en 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Puisque f est de classe  $C^{\infty}$  ("au voisinage de 0", par exemple sur l'intervalle  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ ),

d'après la formule de Taylor-Young, on a :  $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + o(x^3)$ .

En identifiant les coefficients (unicité du DL), on en déduit :

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f''(0) = (ce que l'on peut aussi vérifier par le calcul)$$

#### **A** Attention!

Si une fonction f admet un DL d'ordre n en a:

$$f(x) \underset{x \to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

on ne peut pas affirmer pour autant qu'elle est automatiquement n fois dérivable en a!

## Exercice 7

On pose  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } f(0) = 0.$ 

1. Montrer que  $f(x) = o(x^2)$ .

f admet ainsi un développement limité d'ordre 2 en  $0: f(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + o(x^2)$ . On va voir en revanche qu'elle n'est pas deux fois dérivable en 0...

- 2. (a) Montrer que f est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer f'.
  - (b). Vérifier que f' n'est pas dérivable en 0.

En appliquant la formule de Taylor-Young, on déduit les développement limités en 0 des fonctions usuelles (qui sont toutes de classe  $C^{\infty}$  sur leur domaine) :

# Théorème 5 (Développement limités à l'ordre n en 0 pour les fonctions usuelles)

- $\bullet e^x = x \to 0$
- $\bullet \ln (1+x) \underset{x \to 0}{=}$

On en déduit :  $-\ln(1-x) = x \to 0$ 

- $\bullet \cos(x) = \underset{x \to 0}{=}$
- $\bullet \sin(x) = \underset{x \to 0}{=}$
- Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $(1+x)^{\alpha} = x \to 0$

En particulier (pour  $\alpha = -1$ ):  $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x\to 0}$ 

On en déduit :  $\frac{1}{1-x} = \underset{x \to 0}{=}$ 

#### Preuve du Théorème 5:

Pour chaque fonction, on calcule les dérivées sucessives et on applique la formule de Taylor-Young.  $\Box$ 

#### **Exemples**

- DL à l'ordre 3 en 0 pour  $e^x$ :  $e^x = e^x$
- DL à l'ordre 4 en 0 pour  $\ln(1+x)$ :  $\ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)$
- DL à l'ordre 3 en 0 pour  $\sin(x)$ :  $\sin(x) = \frac{1}{x \to 0}$
- DL à l'ordre 4 en 0 pour  $\sin(x)$ :  $\sin(x) = \frac{1}{x \to 0}$
- DL à l'ordre 2 en 0 pour  $\sqrt{1+x}$ :  $\sqrt{1+x} =$  donc :  $\sqrt{1+x} =$

## Remarque 10

Ces développement limités usuels viennent "préciser" les équivalents usuels déjà connus :

- On savait que  $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ , c'est à dire  $\sin(x) = x + o(x)$  (c'est le DL à l'ordre 1!)
- On savait que  $(1+x)^{\alpha}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$ , c'est à dire  $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+o(x)$  (DL à l'ordre 1), etc...

Dans la suite du cours (et dans la plupart des exercices), on concentrera nos efforts sur les développements limités en 0, car on peut toujours s'y ramener :

### Æ Méthode : Se ramener à un développement limité en 0

Si l'on est amené à vouloir déterminer le développement limité d'une fonction f en un point  $a \neq 0$ , on peut souvent se ramener aux développements en 0 avec un simple "changement de variable" :

- 1 Considérer la fonction donnée par g(y) =
- $\boxed{2}$ Établir le développement limité de g en 0 à l'ordre voulu.
- $\boxed{3}$  Puisque f(x) = g(x-a), remplacer y par x-a dans l'expression obtenue.

#### Exercice 8

- 1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de  $x \to \ln(x)$  en 1.
- 2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de  $x \to e^x$  en 2.

#### 3.3 Opérations et calculs de développements limités

Pour calculer le DL d'une fonction f de classe  $C^{\infty}$ , on peut toujours utiliser la formule de Taylor-Young. Néanmoins (comme vu dans l'exercice 6 pour arctan), cette méthode est assez lourde en calcul... On ne l'emploiera donc qu'en dernier recours!

En pratique, il est souvent beaucoup plus rapide d'utiliser les DL des fonctions usuelles et de savoir calculer rapidement le DL d'une somme et/ou d'un produit de fonctions.

#### a) Somme et produit de DL

# Proposition 8 (Combinaison linéaire de DL)

Soient f et g admettant les développement limités d'ordre n en 0:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n)$$
 et  $g(x) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 x + \ldots + \tilde{c}_n x^n + o(x^n)$ .

Alors pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f + \mu g$  admet le développement limité d'ordre n en 0:

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \sum_{x \to 0} (\lambda c_0 + \mu \widetilde{c}_0) + (\lambda c_1 + \mu \widetilde{c}_1)x + \dots (\lambda c_n + \mu \widetilde{c}_n)x^n + o(x^n).$$

La preuve de ce résultat est évidente en se rappelant les propriétés déjà évoquées des "petits o" :

• 
$$o(x^n) + o(x^n) =$$
 •  $C \times o(x^n) =$  et donc :  $\lambda \times o(x^n) + \mu \times o(x^n) =$ 

#### Exercice 9

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de l'expression  $1 - 2\cos(x) - \sin(x)$  quand  $x \to 0$ .

# Proposition 9 (Produit de DL)

Soient f et g admettant les développement limités d'ordre n en 0:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n)$$
 et  $g(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n)$ .

Alors  $f \times g$  admet un développement limité d'ordre n en 0. Celui-ci est obtenu en effectuant le produit

$$(c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n) \times (\widetilde{c}_0 + \widetilde{c}_1 x + \ldots + \widetilde{c}_n x^n)$$

et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

La preuve de ce résultat est évidente en développant le produit

$$f(x) \times g(x) \underset{x \to 0}{=} \left( c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n) \right) \times \left( \widetilde{c}_0 + \widetilde{c}_1 x + \ldots + \widetilde{c}_n x^n + o(x^n) \right)$$

et en se rappelant les propriétés déjà évoquées des "petits o" :

• Si 
$$k \geqslant n$$
,  $x^k =$  •  $C \times o(x^n) =$  •  $x^k \times o(x^n) =$  •  $o(x^n) \times o(x^n) =$ 

# Attention!

Bien que le produit  $\left(c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n\right) \times \left(\widetilde{c}_0 + \widetilde{c}_1 x + \ldots + \widetilde{c}_n x^n\right)$  puisse donner un polynôme de degré 2n, celui-ci ne correspond pas au développement limité de fg à l'ordre 2n!

Pour trouver le DL de  $f \times g$  à l'ordre n, il faut (en général) connaître ceux de f et de g à l'ordre n.

### Exercice 10

- 1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de  $(1+x)^{1/3} \times \ln(1+x)$  quand  $x \to 0$ .
- 2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de  $\frac{e^x}{1+x}$  quand  $x \to 0$ .

# Remarque 11

Il n'y a pas vraiment de méthode simple pour déterminer le DL d'un quotient  $\frac{f}{g}$ : on se ramènera à  $f \times g^{-1}$  (comme dans l'exercice précédent). On peut cependant "diviser par  $x^p$ " dans un DL:

## Exercice 11

Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ .

#### b) "Changement de variable" dans un DL

La "composition" de développement limités (DL de f(g(x))) n'est pas au programme d'ECG. Il est cependant utile, occasionellement, d'effectuer un "changement de variable" dans un développement limité :

Si f admet le DL en 0  $f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + o(x^n)$  et si  $u(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ , alors:

$$f(u(x)) \underset{x \to a}{=}$$

Listons quelques changements de variables classiques.

- On a déjà évoqué que le changement u(x) = x a (pour passer d'un DL en a à un DL en a).
- On pourra utiliser sans problème des changements linéaires : u(x) = 2x, u(x) = -x etc...

### Exercice 12

Déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 de  $x \mapsto \sqrt{1+2x}-1-x$ .

• Le changement  $u(x) = x^p$  peut aussi s'avérer utile :

### $\Xi$ Méthode : Développement limité en 0 de $f(x^p)$

Si f admet le DL à l'ordre n en 0:  $f(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n + o(x^n)$ , alors pour  $p \in \mathbb{N}^*$ :

$$f(x^p) \underset{x \to a}{=}$$

On notera qu'à partir du DL de  $\underline{f(x)}$  à l'ordre  $\underline{n}$ , on obtient le DL de  $\underline{f(x^p)}$  à l'ordre  $\underline{n}$ !

## Exercice 13

- 1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de  $x\mapsto \ln(1+x^2)$ .
- 2. Déterminer le développement limité à l'ordre 6 en 0 de  $x\mapsto \frac{1}{1+8x^3}$

• Dans certains exercices où l'on souhaite décrire le comportement d'une fonction au voisinage de  $+\infty$ , on peut être amené à utiliser le changement  $u(x) = \frac{1}{x}$  pour se ramener à nouveau à un DL en 0 :

 $\Xi$  Méthode : Établir un "développement limité en  $+\infty$ "

On souhaite établir :  $f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \dots + \frac{c_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ .

- $\boxed{1}$  Considérer la fonction donnée par g(y)=
- $\boxed{2}$  Établir le DL de g à l'ordre n en 0.
- 3 Puisque  $f(x) = g(\frac{1}{x})$ , remplacer y par  $\frac{1}{x}$  dans l'expression obtenue.

## Exercice 14

Déterminer des coefficients  $c_0, c_1, c_2$  tels que :  $\frac{x}{x+1} \underset{x \to +\infty}{=} c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ 

• Enfin, dans un DL, on peut également remplacer x par le terme général d'une suite. Si  $f(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_p x^p + o(x^p)$  et si  $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ , alors :

$$f(u_n) =$$

Ceci est souvent utilisé pour  $u_n = \frac{1}{n}$ .

## Exercice 15

Etablir le développement asymptotique :  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{n \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ .

#### Une belle application: Formule de Stirling

#### Exercice 16

On souhaite montrer qu'il existe une constante K>0 telle que :  $n! \underset{n\to +\infty}{\sim} K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$ .

Cela revient à montrer que la suite définie par  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$  converge vers un K > 0.

- 1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ré-exprimer "simplement"  $v_n = \ln(u_n)$ .
- 2. On pose  $w_n = v_{n+1} v_n$ . Montrer que  $w_n = 1 (n + \frac{1}{2}) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$ .
- 3. Déterminer un équivalent de  $w_n$  quand  $n \to +\infty$ .
- 4. Conclure à l'aide de la série  $\sum w_n$ .

# Remarque 12

La constante est en fait  $K=\sqrt{2\pi}$ . La formule de Stirling complète est donc :  $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ 

### 3.4 Utilisation des développements limités

#### a) Calcul de limites et d'équivalents

On a déjà vu dans les exercices et applications précédentes que les développements limités permettaient de déterminer des limites et des équivalents. Précisons cela en une Proposition :

# Proposition 10 (Développement limité, limite et équivalent)

On suppose que f admet le DL :  $f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n)$ . Alors :

- $\boxed{1} \lim_{x \to 0} f(x) =$
- $\boxed{2}$  Au voisinage de 0, f(x) est équivalent

### Preuve rapide:

$$\boxed{1} f(x) \underset{x \to 0}{=} c_0 + \underbrace{c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n)}_{=o(1)} \quad \text{donc } f(x) \underset{x \to 0}{=} c_0 + o(1), \quad \text{c'est à dire } \lim_{x \to 0} f(x) = c_0.$$

 $\boxed{2}$  Notons  $c_p$  (pour  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ) le premier coefficient non nul dans le DL.

Ainsi: 
$$f(x) = c_p x^p + \underbrace{c_{p+1} x^{p+1} + \dots + c_n x^n + o(x^n)}_{=o(x^p)} = c_p x^p + o(x^p) = c_p x^p + o(c_p x^p).$$

Ceci signifie exactement que  $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} c_p x^p$ .

### **ℰ** Exercice 17

 $\text{D\'{e}terminer} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}.$ 

# Exercice 18

Déterminer un équivalent simple de  $\frac{1}{1+x} - \cos(x) + \sin(x)$  au voisinage de 0.

#### b) DL d'ordre 0 et 1, position par rapport à la tangente

On a déjà vu que l'existence d'un développement limité à l'ordre n en a n'implique pas forcément que f est n fois dérivable en a: il existe des contre-exemples "pathologiques" comme celui de l'Exercice 7. En revanche, c'est bien vrai dans le cas particulier n=1.

### Proposition 11 (Cas particuliers des DL d'ordre 0 et 1) (admis par commodité)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a.

ullet f admet un développement limité d'ordre 0 en a si et seulement si

Ce DL est alors :  $f(x) = x \rightarrow a$ 

ullet f admet un développement limité d'ordre 1 en a si et seulement si

Ce DL est alors :  $f(x) = x \rightarrow a$ 

Notons surtout que le développement limité à l'ordre 1 en a donne automatiquement accès à l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a: y = f(a) + f'(a)(x - a).

#### 

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a, admettant le développement limité :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$$
 avec  $p \ge 2$  et  $c_p \ne 0$ .

Alors:

- $\boxed{1}$  L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a est :
- On peut situer localement le graphe de f par rapport à cette tangente en étudiant le signe de la différence au voisinage de a.

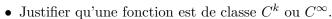
D'après le développement limité,  $f(x) - (c_0 + c_1(x-a)) = c_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ donc  $f(x) - (c_0 + c_1(x-a)) \sim c_p(x-a)^p$ . Ceci permet d'en déterminer le signe.

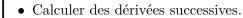
# Exercice 19

- 1. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de exp en 0. Déterminer la position de la courbe par rapport à cette tangente, au voisinage de 0.
- 2. Mêmes questions avec la fonction sin.



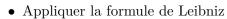
## À savoir faire à l'issue de ce chapitre :





• Connaître les DL usuels en 0.

- Calculer des DL à partir de ceux-ci (somme, produit, changement de variable...)
- Déterminer des limites et des équivalents en utilisant les DL.



- Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral.
- Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
- Calculer un DL à l'aide de la formule de Taylor-Young.



Au minimum

Pour les ambitieux

- Reconnaître facilement les contextes d'application de Taylor reste intégral ou Taylor-Lagrange.
- Prendre l'habitude d'utiliser spontanément des DL.