TP # 17

Calcul approché d'intégrales

Rappels sur les sommes de Riemann

Si $[a,b]$ est un segment et $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, alors en définissant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)}{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \quad \text{on sait que : } \quad S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)dt.$$

Exercice 1

On suppose qu'une fonction numérique `f` est définie au préalable en Python.
Définir une fonction `riemann` qui prend en entrée deux réels a, b et un entier n et renvoie la valeur de la somme $S_n(f)$.

Calcul approché d'intégrales "Méthode des rectangles"

Exercice 2

On cherche à approcher, à l'aide de Python, la valeur de $I = \displaystyle\int_0^2 (3t^2+t)dt$.

1. Quelle est la valeur exacte de cette intégrale ?

$I = \displaystyle\int_0^2 (3t^2+t)dt =$ ....

2. Juste avant la fonction `riemann`, définir en Python la fonction `f` : $x \mapsto 3x^2 + x$

4. A l'aide de la fonction `riemann` de l'Exercice 1, calculer des valeurs approchées de l'intégrale I. Constater la convergence à mesure que n augmente.

$S_{10}(f) \simeq$ .... $S_{100}(f) \simeq$ ....

$S_{1000}(f) \simeq$ .... $S_{10000}(f) \simeq$ ....

Exercice 3

1. En modifiant simplement la définition `f` dans le programme précédent, calculer des valeurs approchées de l'intégrale suivante et conjecturer sa valeur :

$$\text{On prévoit que } \int_0^{2\pi} \cos(t)^2 dt = \text{.............}$$

2. Démontrer, par le calcul, cette conjecture.

On suppose maintenant que f est <u>décroissante</u> sur le segment $[a,b]$.
Alors, en définissant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)}{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \text{ (somme de Riemann "à gauche")}$$

$$T_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)}{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \text{ (somme de Riemann "à droite")}$$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} T_n(f) = \int_a^b f(t)dt$ et de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(f) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant S_n(f)$$

<u>Dessin :</u>

Exercice 4

On souhaite calculer une valeur approchée de $I = \int_0^1 e^{-t^2} dt$. (Donc $a=0$, $b=1$).

1. Compléter les programmes suivants pour qu'ils calculent les valeurs des sommes $S_n(f)$ et $T_n(f)$ dans le cas de la fonction f qui nous intéresse ici.

```
import numpy as np

def S(n) :

    L = ........................................

    return np.sum(L)

def T(n) :

    L = ........................................

    return np.sum(L)
```

2. Compléter le programme suivant pour que, à la donnée d'un réel $\varepsilon > 0$, il renvoie un encadrement de la valeur de I à ε près.

```
def approx_I(eps) :
    n = 1;

    while .............................. :
        n = n+1

    return (T(n),S(n))
```

Encadrement à 0.1 près : .... $\leqslant I \leqslant$ ....

Encadrement à 0.01 près : .... $\leqslant I \leqslant$ ....

Encadrement à 0.001 près : .... $\leqslant I \leqslant$ ....

Encadrement à 0.0001 près : .... $\leqslant I \leqslant$ ....