Samedi 7 Décembre 2024

Devoir Sur Table n°3 – Durée : 4h

L'utilisation de la calculatrice, des feuilles/notes de cours ou d'exercices est interdite.
La présentation, la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation de la copie.
Les résultats non encadrés/soulignés/surlignés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1 : Alea Iacta, Victoria Certa ! ("Le sort en est jeté, la victoire est certaine")

1. *Echauffement.* Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé.
   On lance N fois d'affilée un dé équilibré à N faces, numérotées de 1 à N.
   (a) Déterminer (en justifiant !) la probabilité d'obtenir "1" au moins une fois au cours des N lancers.
   (b) Justifier ou débunker (= infirmer) les maximes suivantes :
   • *Développement personnel à deux sous :* Si tes chances de succès sont d'une sur un million, essaye un million de fois et tu seras forcément vainqueur !
   • *"Règle des 63%" :* Si tes chances de succès sont d'une sur un million, essaye un million de fois et tu auras environ 63% de chance d'être vainqueur... (*On donne pour cela la valeur de* $e^{-1} \simeq 0,37$)

Dans la suite de l'exercice, on considère une succession illimitée d'épreuves, qui peuvent chacune se solder par un succès ou bien un échec. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$A_k = \text{"Obtenir un succès à la } k\text{-ème épreuve"}, \quad p_k = P(A_k) \in]0,1[,$$
$$B_k = \text{"Obtenir au moins un succès au cours des } k \text{ premières épreuves"}.$$
$$C = \text{"Ne jamais obtenir de succès (sur la succession illimitée d'épreuves)"}.$$

On suppose que chaque épreuve est totalement indépendante des autres.
On souhaite montrer que sous des hypothèses raisonnables sur les probabilités p_k de succès à chaque épreuve, on a $P(C) = 0$, c'est à dire qu'on a 100% de chance de finir par obtenir un succès.

2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(B_n) = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1-p_k)$.
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C \subset \overline{B_n}$ et en déduire une majoration de $P(C)$ à l'aide des p_k.

3. Dans cette question, on suppose que chaque épreuve a la même probabilité de succès :
$$(\mathcal{H}_1) : \ \forall k \in \mathbb{N}^*, \ p_k = p \quad \text{avec} \ \ p \in]0,1[.$$
   Démontrer que sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, on a $P(C) = 0$.

4. On considère à présent l'hypothèse plus générale suivante : $\quad (\mathcal{H}_2) : \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} p_k = +\infty.$
   (a) Justifier que l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ implique l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$.
   (b) Montrer que les suites $\quad (p_k)_{k\in\mathbb{N}^*} = (1 - \frac{1}{2^k})_{k\in\mathbb{N}^*} \quad$ et $\quad (p_k)_{k\in\mathbb{N}^*} = (\ln(1+\frac{1}{k}))_{k\in\mathbb{N}^*}$ satisfont l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ mais pas l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$.
   (c) A l'aide d'une étude de fonction appropriée, montrer : $\forall x \in]-1,+\infty[, \ \ln(1+x) \leqslant x$
   puis en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \ln(P(\overline{B_n})) \leqslant -\sum_{k=1}^{n} p_k$.
   (d) Démontrer que sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$, on a $P(C) = 0$

5. Pour finir, on considère les probabilités de succès : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ p_k = \dfrac{1}{(k+1)^2}$.
   (a) A l'aide de l'inégalité $p_k \leqslant \dfrac{1}{k(k+1)}$ et d'un télescopage,
   montrer que cette suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ne satisfait pas l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$.
   (b) Déterminer explicitement l'expression de $P(B_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
   On admet que $P(C) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(\overline{B_n})$. En déduire que, cette fois, $P(C) = \frac{1}{2} \neq 0$.

Exercice 2 : Etude de deux suites implicites

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on définit la fonction f_α sur $\mathbb{R}_+^*$ par l'expression :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_\alpha(x) = x^{1-x^\alpha} = e^{(1-x^\alpha)\ln(x)}.$$

1. (a) Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, rappeler la définition de x^α, puis donner les valeurs des limites
$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ \text{ et } \ \lim_{x\to+\infty} x^\alpha.$$
(On distinguera deux cas selon la valeur de α)
   (b) Pour quels valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}^*$ la fonction f_α est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
   (c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
2. On suppose que $\alpha < 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x) - x}{x^{\alpha+1}\ln(x)} = -1$.

Dans toute la suite, on s'intéresse au cas particulier où $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$. On étudie donc f_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = x^{1-x^n} = e^{(1-x^n)\ln(x)}.$$

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est strictement croissante sur $]0,1[$ et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$. Etablir son tableau de variations complet.
   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\text{Il existe un unique } u_n \in]0,1[\text{ tel que } f_n(u_n) = \frac{1}{2},$$
$$\text{Il existe un unique } v_n \in]1,+\infty[\text{ tel que } f_n(v_n) = \frac{1}{2}.$$
4. *Etude assistée par Python.* **(On recopiera l'intégralité des programmes sur sa copie.)**
   (a) Définir en Python une fonction `f` qui prend en entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel x et :
   - Affiche un message d'erreur si $x < 0$,
   - Renvoie la valeur 0 si $x = 0$,
   - Renvoie la valeur de $f_n(x)$ si $x > 0$.

   (b) Compléter le programme suivant pour que l'appel de l'instruction `approx_u(n)` renvoie un encadrement de la valeur de u_n à 10^{-2} près, déterminé à l'aide de la méthode de dichotomie.

```
def approx_u(n) :
    a = ... ; b = ... ; eps = 10**(-2)
    while ................ :
        c = (a+b)/2
        if f(n,c) < 1/2 :
            ...
        else :
            ...
    return (a,b)
```

   (c) Proposer une fonction similaire, notée cette fois `approx_v`, pour calculer un encadrement de la valeur de v_n à 10^{-2} près.

   <u>Valeurs numériques :</u>

   L'instruction `approx_u(300)` renvoie le couple : `(0.4990234375, 0.5)`
   L'instruction `approx_v(300)` renvoie le couple : `(1.0087890625, 1.017578125)`

On cherche à confirmer la conjecture numérique des valeurs de $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$ par une étude rigoureuse.

5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$. *(Distinguer les cas $x \leqslant 1$ et $x \geqslant 1$)*
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   Que peut-on conclure quant à la nature de ces suites ?
6. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a en fait $u_n \in]0, \frac{1}{2}[$.
   (b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} (u_n)^n = 0$, puis déterminer la valeur de $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
7. Déterminer la valeur de $\lim_{n\to+\infty} v_n$. *(On pourra raisonner par l'absurde)*

Exercice 3 : Le jeu du Double-Face

On effectue une succession de lancers d'une pièce de monnaie particulière. À chaque lancer, la pièce atterrit :

- Sur Pile avec probabilité $p \in]0,1[$
- Sur Face avec probabilité $(1-p) \in]0,1[$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note F_k l'évènement "Obtenir face au k-ième lancer".

Un joueur joue au jeu du Double-Face : pour gagner il faut obtenir Face deux fois de suite.
Le jeu s'arrête alors. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note G_n l'évènement "Le joueur gagne au n-ième lancer".
On souhaite déterminer l'expression de $P(G_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Que vaut $P(G_1)$? Exprimer G_2 et G_3 en fonction des évènements $(F_k)_{k\geqslant 1}$ et en déduire $P(G_2)$ et $P(G_3)$ en fonction de p.

   (b) Justifier que $(\overline{F_1},\ F_1 \cap F_2,\ F_1 \cap \overline{F_2})$ est un système complet d'événements.

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad P(G_{n+2}) = p\,P(G_{n+1}) + p(1-p)\,P(G_n)$.
   On justifiera les valeurs des probabilités conditionnelles mises en jeu dans le raisonnement.

2. *Calculs à l'aide de Python.* **(On recopiera l'intégralité des programmes sur sa copie.)**

   (a) Compléter le script suivant pour que la fonction `valeur(p,n)` renvoie la valeur de $P(G_n)$ lorsqu'on lui fournit $p \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ en entrée.

```
def valeur(p,n) :
    u = ...... ; v = .......
    for k in ............... :
        w = p * v + p * (1-p) * u
        u = ...
        v = ...
    return u
```

   (b) Compléter le script suivant pour que la fonction `vecteur(p,n)` renvoie le vecteur
   `U = [` $P(G_1), P(G_2), \ldots, P(G_n)$ `]` lorsqu'on lui fournit $p \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ en entrée.

```
def vecteur(p,n) :
    U = ............... ; U[0] = ... ; U[1] = ...
    for k in ............... :
        U[k] = ...............
    return U
```

3. On introduit la fonction polynomiale définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - px - p(1-p)$.

   (a) Sans chercher à les calculer, montrer que f admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 satisfaisant $-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$.

   (b) Justifier que $(1-r_1)(1-r_2) = (1-p)^2$.

4. (a) A l'aide de la relation du 1.(c), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P(G_n) = \frac{(1-p)^2}{r_2 - r_1}\Big((r_2)^{n-1} - (r_1)^{n-1}\Big).$$

   (b) <u>Dans cette question seulement</u>, on se place dans le cas d'une pièce équilibrée : $p = \frac{1}{2}$.
   Déterminer les valeurs de r_1 et r_2 puis l'expression de $P(G_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

5. On note C l'évènement "Le jeu du Double-Face ne prend jamais fin".

   (a) Justifier que C n'est pas l'évènement impossible.

   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} G_k \subset \overline{C}$.
   En déduire une majoration de $P(C)$ en fonction des probabilités $P(G_k)$.

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(G_k) = 1 - \frac{(r_2)^n(1-r_1) - (r_1)^n(1-r_2)}{r_2 - r_1}$.

   (d) Montrer enfin que $P(C) = 0$.

⋆⋆⋆ Fin du sujet ⋆⋆⋆