À rendre le $\boxed{\text{Lundi 10 Février 2025}}$

Devoir Maison n°2 : 'Scouic game'

Ce travail est *facultatif*, et peut être réalisé en groupe de 3 étudiants maximum. (1 copie rendue par groupe)
Les résultats non encadrés/soulignés/surlignés ne seront pas pris en compte.

Énoncé du problème

Dans un hangar secret dissimulé sur une île au large de la Corée, N prisonniers sont soumis au jeu suivant :

Les N joueurs sont alignés sur un terre-plein de départ, à 30 mètres de hauteur. Leur but est de rejoindre le terre-plein d'arrivée. Pour cela, il leur faut traverser un pont composé d'une succession de p plateformes.

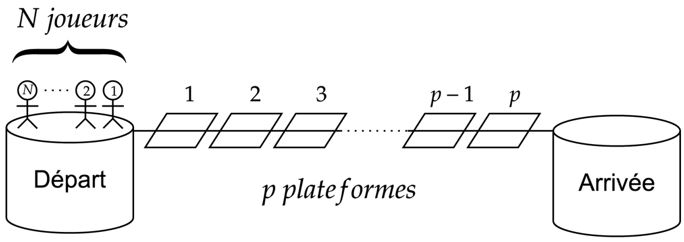

Figure 1

Chacune des p plateformes se compose de deux dalles de verre : une sur la gauche, une sur la droite. L'une des deux dalles, en verre trempé, supporte aisément le poids d'un corps humain. L'autre, en verre ordinaire, se brise immédiatement si un joueur y pose le pied, l'entraînant dans une dégringolade mortelle...

Évidemment, rien ne distingue le verre trempé du verre ordinaire ! Face à une plateforme inconnue, un joueur a ainsi une chance sur deux de choisir la bonne dalle.

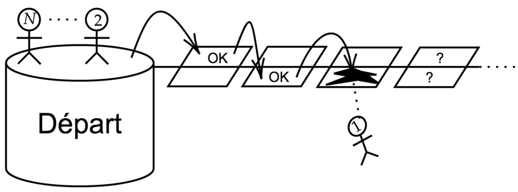

Figure 2

Chaque joueur porte un dossard, numéroté de 1 à N.

C'est au joueur n°1 de s'élancer en premier : il saute de plateforme en plateforme, choisissant à chaque saut l'une des deux dalles, jusqu'à tomber dans le vide ou bien (s'il est très chanceux !) rejoindre le terre-plein d'arrivée. C'est ensuite au joueur n°2 de s'élancer, et ainsi de suite.

Bien-sûr, pour maximiser ses chances de survie, chaque joueur est parfaitement attentif au trajet choisi par les joueurs précédents ! Par exemple, si le joueur n°1 survit aux deux premières plateformes et chute à la troisième, le joueur n°2, ayant retenu le trajet de son défunt compère, pourra rejoindre sereinement la troisième plateforme.

On admet que cette expérience peut être représentée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

Pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de plateformes passées avec succès par le joueur numéro n. Par exemple :

- "$X_n = 2$" signifie que le joueur numéro n a passé les deux premières plateformes et a chuté à la troisième.
- "$X_n = p$" signifie que le joueur numéro n a passé les p plateformes avec succès et a donc rejoint le terre-plein d'arrivée sans égratignure !

L'objectif final de ce problème est de déterminer le nombre moyen de survivants à l'issue du jeu, c'est à dire le nombre moyen de joueurs ayant réussi à rejoindre l'arrivée indemnes.

Questions

1. Dans cette question, on cherche à déterminer la loi de X_1.
   Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on introduit l'évènement A_i ="Le joueur 1 fait le bon choix au i-ème saut".
   (a) Quel est le support de la variable aléatoire X_1 ?
   Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, exprimer l'évènement $[X_1 = k]$ en fonction des $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$.
   On distinguera les cas $\quad k = 0, \quad 0 < k < p \quad$ et $\quad k = p$.
   (b) En déduire : $\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ P(X_1 = k) = \dfrac{1}{2^{k+1}} \quad$ et $\quad P(X_1 = p) = \dfrac{1}{2^p}$.
   Quelle est la probabilité que tous les joueurs survivent au jeu ?

2. Dans cette question, on fixe $n \in [\![1, N-1]\!]$.
   (a) En décrivant la situation vécue par le joueur numéro $(n+1)$ si l'évènement $[X_n = j]$ est réalisé, justifier que l'on a les probabilités conditionnelles suivantes :
$$\forall j \in [\![0, p-1]\!],\ \ P_{[X_n=j]}(X_{n+1} = k) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant j \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j} & \text{si} \quad j < k < p \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{p-j-1} & \text{si} \quad k = p \end{cases} \quad \text{et} \quad P_{[X_n=p]}(X_{n+1} = p) = 1.$$
   (b) En déduire les relations : $\quad \forall k \in [\![0, p-1]\!],\ P(X_{n+1} = k) = \dfrac{1}{2^k} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} 2^j P(X_n = j)$
$$\text{et} \quad P(X_{n+1} = p) = \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{j=0}^{p-1} 2^j P(X_n = j) + P(X_n = p).$$

3. Dans cette question, on cherche à implémenter en Python un algorithme permettant de calculer et d'afficher la loi de X_n pour un n fourni par l'utilisateur. La valeur de `p` est supposée fixée à l'avance.
   On complétera les programmes directement sur cette feuille (<u>que l'on rendra avec sa copie !</u>)
   (a) Compléter le programme pour que la fonction suivante renvoie "la loi de X_1",
   c'est à dire le vecteur : `P = [` $P(X_1 = 0), P(X_1 = 1), \dots, P(X_1 = p)$ `]`

```
import numpy as np
def loi_X1() :

    P= (1/2)**np.arange(1,p+2)

    P[p] = .................................

    return(P)
```

   (b) On veut définir une fonction `iteration` qui prend "la loi de X_n" (pour $n \in [\![1, N-1]\!]$ fixé)

`P= [` $P(X_n = 0), P(X_n = 1), \dots, P(X_n = p)$ `]`

   et qui renvoie "la loi de X_{n+1}"

`Q= [` $P(X_{n+1} = 0), P(X_{n+1} = 1), \dots, P(X_{n+1} = p)$ `]`

   Compléter à cette fin le programme suivant :

```
def iteration(P) :
    Q=np.zeros(p+1)
    for k in range(p+1) :
        S=0
        for j in range(k) :

            S = S + ............................

        if k < p :
            Q[k] = (1/2**k)*S
        else :
            Q[k] = .................................
    return(Q)
```

(c) Pour finir, on veut définir une fonction `loi_X(n)` qui prend en entrée un entier $n \in [\![1, N]\!]$ et renvoie "la loi de X_n" (vecteur défini en 3.(b)). Compléter à cette fin le programme suivant. On pourra bien-sûr utiliser les deux fonctions précédentes.

```
def loi_X(n) :

    P = .............................

    for k in range(n-1) :

        P = .........................

    return(P)
```

On rappelle que pour tout $(i, m) \in \mathbb{N}^2$, $\dbinom{m}{i} = \dfrac{m!}{i!(m-i)!}$ si $i \leqslant m$ et $\dbinom{m}{i} = 0$ si $i > m$.

On pourra utiliser sans démonstration la *formule de Pascal généralisée* : $\forall (i, m) \in \mathbb{N}^2, \quad \displaystyle\sum_{j=i}^{m} \binom{j}{i} = \binom{m+1}{i+1}$.

4. Dans cette question, on cherche à déterminer la loi de X_n pour tout $n \in [\![1, N]\!]$.

   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in [\![1, N]\!], \quad \forall k \in [\![0, p-1]\!], \ P(X_n = k) = \dfrac{1}{2^{k+1}} \dbinom{k}{n-1}$

   (b) En déduire la relation : $\forall n \in [\![1, N-1]\!], \ P(X_{n+1} = p) - P(X_n = p) = \dfrac{1}{2^p} \dbinom{p}{n}$.

5. On souhaite finalement déterminer le nombre moyen de survivants.
   Soit S la variable aléatoire égale au nombre de survivants à l'issue du jeu.

   (a) Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, justifier l'égalité des deux évènements : $[S > k] = [X_{N-k} = p]$.
   En déduire une expression l'évènement $[S = k]$ en fonction des variables aléatoires X_{N-k} et X_{N-k+1}.

   (b) Montrer finalement : $\boxed{E(S) = \dfrac{1}{2^p} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} k \binom{p}{N-k}}$.

   (Application numérique : pour $N = 16$ joueurs et $p = 18$ plateformes, on obtient $E(S) \simeq 7$)

6. Question subsidiaire : quelle image vous représente le plus à l'issue de ce DM ?