7

Limites de suites

Exercice 1 (Possible ou pas ?)
Une suite u peut-elle satisfaire les propriétés suivantes ? Lorsque c'est le cas, donner un exemple.
(a) u est bornée et n'admet pas de limite.
(b) u n'est pas bornée et n'admet pas de limite.
(c) u converge mais n'est pas majorée.
(d) u tend vers $+\infty$ mais n'est pas "croissante à partir d'un certain rang".
(e) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, mais $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Calcul direct de limites

Exercice 2 (Des suites explicites)
Déterminer la limite des expressions suivantes quand $n \to +\infty$:

(a) $\dfrac{e^n}{2n+1}$ (b) $\dfrac{\ln(n+1)}{n}$

(c) $\dfrac{-3n^2+2n-1}{1+2n}$ (d) $\ln(n+1)-\ln(n)$

(e) $\dfrac{\sqrt{2n}}{(n+1)!}$ (f) $\dfrac{2^n-3^n}{3^n-5^n}$

(g) $e^n - 2^n + n!$ (h) $n^{1/n}$

(i) $\dfrac{100^n+n!}{n^{100}+(n+1)!}$

Encadrements et limites

Exercice 3 (Encadrement de suites explicites)
Déterminer la limite des expressions suivantes quand $n \to +\infty$:

(a) $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ (b) $1-\dfrac{\cos(n)}{n}$ (c) $e^n - 3\sin(2n)$

Exercice 4 (Une suite récurrente)
Soit u une suite définie par :
$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n}{3+u_n}$$
1. Montrer que u est bien définie et à termes strictement positifs.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{3}u_n$.
3. En déterminant un encadrement de u_n, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 5 (Encadrement de sommes)
Encadrer le terme général de la somme, déduire un encadrement de u_n puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}$ (b) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.

Exercice 6 (Convergence vers un point fixe)
Soit $k \in]0,1[$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ satisfaisant :
$$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x_1)-f(x_2)| \leqslant k|x_1-x_2|.$$
On admet qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha)=\alpha$.
On considère la suite u définie par :
$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}-\alpha| \leqslant k|u_n-\alpha|$.
2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n-\alpha| \leqslant k^n|u_0-\alpha|$.
3. Déterminer la limite de la suite u.

Étude de suites récurrentes

Exercice 7 (Étude n°1)
On considère une suite u définie par :
$$u_0 \in]0,1[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n(1-u_n)$$
1. Étudier le sens de variation de la suite u.
2. Montrer que u converge et déterminer sa limite.

Exercice 8 (Étude n°2)
On considère la suite u définie par :
$$u_0 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2+2}{3}$$
1. Étudier le sens de variation de la suite u.
2. Si jamais u converge vers un réel ℓ, que dire de ℓ ?
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 9 (Le cas "f décroissant")
On pose $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = 1+\dfrac{2}{x}$
et on considère la suite u définie par :
$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$
1. (a) Dessiner la courbe représentative de f ainsi que la droite d'équation $y=x$. Prévoir sur ce dessin le comportement de la suite u.
(b) Montrer que l'intervalle $[1,3]$ est **stable** par f, i.e : $f([1,3]) \subset [1,3]$. Qu'en déduit-on sur u ?

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = (f\circ f)(v_n)$ et $w_{n+1} = (f\circ f)(w_n)$.
(b) Déterminer le sens de variation des suites v et w.
(c) En déduire que v et w sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.
(d) Qu'en déduit-on pour la suite u ?

Suites adjacentes

Exercice 10 (Critère des séries alternées)

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ décroissante, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1} = (S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1} = (S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
2. En déduire que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Exercice 11 (Récurrence couplée)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $0 < u_0 < v_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < v_n$.

2. Étudier le sens de variation de u et v.

3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

(c) Montrer que u et v convergent vers la même limite ℓ.

4. (a) Que dire de la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(b) En déduire la valeur de ℓ en fonction de u_0 et v_0.

Adapté ESCP 2016 :

Partie A

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante et convergente.

On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $c_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.

1. Montrer que la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par ℓ. Qu'en déduit-on ?

2. Montrer que pour tout entier n non nul : $c_{2n} \geq \dfrac{a_n + c_n}{2}$.

Indication : On pensera à séparer la somme $a_1 + \ldots + a_{2n}$ en deux.

3. En déduire que la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ converge également vers ℓ.

Partie B

On admet que le résultat de la Partie A est valable même sans l'hypothèse de croissance :

pour toute suite $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \ell \qquad (\star)$

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\quad u_0 \in [0, 1[\quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. Étudier rapidement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: montrer qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 1 - u_n$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n}$ en fonction de u_n et en déduire que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) En utilisant le résultat $(\star)$ avec une suite (a_n) appropriée, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, v_n$.

   (c) En déduire qu'il existe un rang à partir duquel $1 - \dfrac{3}{n} \leqslant u_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$.