19

Applications linéaires

Image et noyau

Exercice 1 (Calcul d'image et de noyau)
Montrer que les applications suivantes sont linéaires.
Déterminer une base de leur image et de leur noyau.

- $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, 2x-y+z) \end{array}$
- $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x-3y+z \end{array}$
- $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{array}$
- $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (Endomorphisme de polynômes)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer ue $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & 2P' + P \end{array}$
est un endomorphisme injectif.

Exercice 3 (Endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$)
On considère l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1} + 3u_n)_{n\in\mathbb{N}}. \end{array}$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Déterminer une base de $Ker(\Phi)$.

Exercice 4 (Image, noyau et composée)
Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
1. Montrer que $Im(g \circ f) \subset Im(g)$
et $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$.
2. Montrer qu'on a l'équivalence :
$Im(f) \subset Ker(g) \iff g \circ f = 0$.

Exercice 5 (Image, noyau et puissance)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
1. Montrer : $Ker(f) \subset Ker(f^2)$ et $Im(f^2) \subset Im(f)$.
2. Montrer qu'on a l'équivalence :
$Ker(f) = Ker(f^2) \iff Im(f) \cap Ker(f) = \{0_E\}$

Exercice 6 (Endomorphismes qui commutent)
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$.
On dit qu'un ensemble F est "stable par g" lorsque $g(F) \subset F$, c'est à dire : $\forall x \in F,\ g(x) \in F$.
Montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont stables par g.

Isomorphismes classiques

Exercice 7 (Espaces usuels isomorphes)
1. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. Montrer que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{n\times p}$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (suites indexées par $\mathbb{N}$) est isomorphe à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ (suites indexées par $\mathbb{N}^*$).

Exercice 8 (Un espace vectoriel de suites)
Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = (n+2)u_{n+1} + u_n$.
1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^2 \\ u & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array}$
Montrer que φ est un isomorphisme.
On pourra justifier que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique suite $u \in E$ telle que $\varphi(u) = (a,b)$.

Exercice 9 (Isomorphisme de Lagrange)
Soient $x_0, ..., x_n$ des réels deux à deux distincts.
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), P(x_1), ..., P(x_n)) \end{array}$.
1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer que f est injective.
3. Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on définit le polynôme

$$L_i = \prod_{j\in[\![0,n]\!]\setminus\{i\}} \left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right).$$

(a) Calculer $f(L_i)$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$.
(b) En déduire que f est surjective.

Exercice 10 (Isomorphisme de Taylor)
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$.
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(\alpha), P'(\alpha), \ldots, P^{(n)}(\alpha)) \end{array}$.
1. Montrer que f est injective.
2. (a) Que vaut $f((X-\alpha)^k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$?
(b) En déduire que f est surjective.
3. f est ainsi un isomorphisme.
On cherche à déterminer la réciproque f^{-1}.
(a) Soit $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.
Que vaut $f^{-1}(e_k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$?
(b) En déduire l'expression de $f^{-1}((x_0, x_1, \ldots, x_n))$ pour tout $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
4. On a donc, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = f^{-1}(f(P))$.
Ecrire l'égalité ainsi obtenue.
Comment s'appelle en fait cette formule ?

Image d'une base

Exercice 11 (Image d'une base 1)

On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$
et (u_1, u_2, u_3) celle de $\mathbb{R}^3$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par :

$$f(u_1) = e_1 - 2e_2, \quad f(u_2) = 3e_1 \quad \text{et} \quad f(u_3) = 2e_1 + e_2.$$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Calculer $f((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 12 (Image d'une base 2)

1. Montrer qu'il existe une unique $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ telle que : $f(1, 0, 1) = 3, \quad f(1, 2, 2) = -1, \quad f(0, 1, 0) = 0$.
2. Calculer $f((x, y, z))$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Puissances d'endomorphisme

Exercice 13 (Calcul de puissances d'un endomorphisme)

Dans cet exercice, on pose $E = \mathbb{R}[X]$.
On considère l'application Δ définie par :

$$\forall P \in E, \ \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

Par exemple :
$\Delta(X^2 - X + 1) = \big((X+1)^2 - (X+1) + 1 - (X^2 - X + 1)$.

1. Vérifier que $\Delta \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que $Ker(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$.
3. Soit S l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall P \in E, \ S(P) = P(X+1).$$

(a) Exprimer Δ en fonction de S et de Id_E.

(b) Déterminer l'endomorphisme S^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire que pour tout $P \in E$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k).$$

EML 2014

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et E_1 l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On remarque que E_1 est inclus dans E.

On note, pour tout élément f de E, $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt.$$

1. Établir que pour tout élément f de E, $T(f)$ appartient à E_1 et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(T(f))'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)).$$

On note $T : E \to E$ l'application qui, à f, associe $T(f)$.

2. Montrer que T est un endomorphisme de E.

3. Est-ce que T est surjectif ?

4. Soit $f \in E$. Montrer que, si f est paire (respectivement impaire), alors $T(f)$ est paire (respectivement impaire). A cet effet, on pourra utiliser le changement de variable $u = -t$ dans une intégrale.

5. On note $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application qui, à tout $t \in \mathbb{R}$, associe $s(t) = \sin(\pi t)$. Calculer la fonction $T(s)$.
Est-ce que T est injectif ?