# 24

# Somme de sous-espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre $E$ désigne un espace-vectoriel.

## Introduction et motivation

- Si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$, alors $F \cap G$ est aussi un sous-espace vectoriel de $E$.

**Exemple**

On considère les deux plans suivants dans $\mathbb{R}^3$ :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ |z = 0\} = Vect((1, 0, 0), (0, 1, 0)), \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ |y = 0\} = Vect((1, 0, 0), (0, 0, 1)).$$

Leur intersection est la droite

$$F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ |z = 0 \text{ et } y = 0\}$$

c'est à dire : $F = Vect((1, 0, 0))$.

**Dessin :**

- En revanche, (à moins que $F \subset G$ ou $G \subset F$), la réunion $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $E$ !

**Exemple**

On considère les deux droites suivantes dans $\mathbb{R}^2$ : $F = Vect((1, 0))$ et $G = Vect((1, 1))$.

$F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Par exemple : $(1, 0) \in F \cup G$ et $(1, 1) \in F \cup G$
mais $(1, 0) + (1, 1) = (2, 1) \notin F \cup G$

**Dessin :**

On aimerait donc définir une opération "similaire à l'union" qui préserve la structure d'espace vectoriel...

**Exemple**

Dans $\mathbb{R}^3$, si on dispose des deux droites $F = Vect((1, 0, 0))$ et $G = Vect((1, 1, 0))$,
on voudrait un moyen simple de désigner le plan $H = Vect((1, 0, 0), (1, 1, 0))$.
$H$ est ce que l'on va appeler la **somme de $F$ et $G$**, notée $H = F + G$.

**Dessin :**

# 1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

## 1.1 Somme, somme directe, S.E.V supplémentaires

**Définition 1 (Somme de deux S.EV)**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.
On appelle somme de $F$ et $G$ et on note $F+G$ l'ensemble :

$$F+G=$$

**Proposition 1 (La somme est un S.E.V)**

La somme $F+G$ est également un sous-espace vectoriel de $E$.

**Preuve :**

- $F$ et $G$ sont des S.E.V de $E$, donc contiennent $0_E$. Ainsi, $0_E =$

- Soient $v, v' \in F+G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $v+\lambda v' \in E$.

Par définition, on peut écrire $v = v_1 + v_2$ et $v' = v_1' + v_2'$ avec $v_1, v_1' \in F$ et $v_2, v_2' \in G$.
Ainsi, $v + \lambda v' =$ □

**Exemples**

- Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les droites

$$F = Vect((1,0)) = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad G = Vect((0,1)) = \{(0,y),\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Alors $F+G=$

- Dans $\mathbb{R}[X]$, considérons les S.E.V :

$F = Vect(1, X, X^3) = \{a+bX+cX^3,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$ et $G = Vect(X, X^2) = \{\alpha X+\beta X^2,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$.

Alors $F+G=$

**Remarque 1**

Un vecteur $v \in F+G$ ne se décompose pas nécessairement de manière unique comme $v = \underbrace{v_1}_{\in F} + \underbrace{v_2}_{\in G}$ !
Pour le deuxième exemple : on a $X \in F+G$, mais on peut le décomposer de multiples manières :

$$X = \underbrace{X}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G}, \qquad X = \underbrace{2X}_{\in F} + \underbrace{(-X)}_{\in G}, \qquad X = \underbrace{3X}_{\in F} + \underbrace{(-2X)}_{\in G} \quad \text{etc...}$$

**Définition 2 (Somme directe)**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.
On dit que la somme $F+G$ **est directe**, ou que "**$F$ et $G$ sont en somme directe**" lorsque :

Pour signifier que la somme $F+G$ est directe, on la note :

**Exemple**

Tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $(x,y) = \underbrace{x(1,0)}_{\in Vect((1,0))} + \underbrace{y(0,1)}_{\in Vect((0,1))}$ et cette décomposition est clairement unique.
On a donc la somme directe : $\mathbb{R}^2 = Vect((1,0)) \oplus Vect((0,1))$.

On dispose en fait d'une caractérisation plus simple des sommes directes :

**Théorème 1 (Caractérisation d'une somme directe par l'intersection $F \cap G$)**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On a l'équivalence suivante :

$$\text{La somme } F+G \text{ est directe } \iff$$

**Preuve :**

• Supposons que la somme $F+G$ est directe, montrons que $F \cap G = \{0_E\}$.
Soit $v \in F \cap G$, alors on peut écrire : $v = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$ et $v = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{v}_{\in G}$.
Puisque cette décomposition doit être unique, on a forcément $v = 0_E$ et $0_E = v$. Ainsi $v = 0_E$ !
Ceci montre l'inclusion $F \cap G \subset \{0_E\}$, l'inclusion réciproque est évidente.

• Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$, montrons que la somme $F+G$ est directe.
Soit $v \in F+G$, on suppose qu'il s'écrit à la fois : $v = \underbrace{v_1}_{\in F} + \underbrace{v_2}_{\in G}$ et $v = \underbrace{v_1'}_{\in F} + \underbrace{v_2'}_{\in G}$.
Montrons qu'en fait $v_1 = v_1'$ et $v_2 = v_2'$ (donc la décomposition sera unique).
On a $v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$, donc : $\underbrace{v_1 - v_1'}_{\in F} = \underbrace{v_2' - v_2}_{\in G}$.
Ainsi, $v_1 - v_1'$ et $v_2' - v_2$ appartiennent à la fois à $F$ et à $G$, c'est à dire à $F \cap G = \{0_E\}$.
On a donc $v_1 - v_1' = 0_E$ et $v_2' - v_2 = 0_E$, ce qui donne bien $v_1 = v_1'$ et $v_2 = v_2'$. □

On verra, dans la suite, d'autres caractérisation équivalentes pour vérifier qu'une somme est directe.

Bien souvent, on cherchera en fait à décomposer l'espace vectoriel $E$ tout entier comme somme directe de deux sous-espace vectoriels : si l'on montre que $E = F \oplus G$, n'importe quel élément de $E$ se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de $F$ et d'un vecteur de $G$.

**Définition 3 (S.E.V supplémentaires)**

On dit que deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ de $E$ sont **supplémentaires** lorsque

Autrement dit :

$\boxed{1}$

$\boxed{2}$

**Attention !**

Ne pas confondre "supplémentaire" et "complémentaire" !
On ne considèrera jamais le complémentaire $\overline{F} = E \setminus F$ d'un SEV $F$ de $E$.
($\overline{F}$ n'est même pas un sous-espace vectoriel de $E$...)

**Exercice 1**

Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on définit les S.E.V des fonctions paires et impaires :

$$\mathcal{P} = \Big\{ f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x) \Big\}, \quad \mathcal{I} = \Big\{ f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) \Big\}.$$

Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans $E$.

## 1.2 Concaténation des bases

On travaille à présent avec des sous-espaces vectoriels de dimension finie.

**Proposition 2 (Famille génératrice de $F+G$)**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de $E$.
On introduit $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de $F$ et $\mathcal{B}_G = (g_1, \ldots, g_q)$ une base de $G$.

Alors la famille $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ obtenue en **concaténant** (c'est à dire en "fusionnant") ces deux bases est

**Preuve :**

Par définition, tout $v \in F+G$ s'écrit $v = \underbrace{v_1}_{\in F} + \underbrace{v_2}_{\in G}$.
On a $v_1 \in F = Vect(f_1, \ldots, f_p)$, donc en particulier $v_1 \in Vect(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$.
On a $v_2 \in G = Vect(g_1, \ldots, g_q)$, donc en particulier $v_2 \in Vect(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$.
Ainsi, on a $v = v_1 + v_2 \in Vect(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$.
Tout $v \in F+G$ s'écrit donc comme combinaison linéaire de $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$. □

**Remarque 2**

- En fait, il n'est pas nécessaire de considérer des "bases" : il suffit que $(f_1, \ldots, f_p)$ (resp. $(g_1, \ldots, g_q)$) soit une famille génératrice de $F$ (resp. $G$) pour avoir la conclusion de la Proposition 2.

On pourra donc retenir : $\boxed{Vect(f_1, \ldots, f_p) + Vect(g_1, \ldots, g_q) = \qquad\qquad}$

**Méthode : Déterminer l'espace vectoriel $F+G$**

- Pour déterminer explicitement le SEV $F+G$, on peut revenir à la définition

$$F+G = \{v_1 + v_2,\ (v_1, v_2) \in F \times G\}.$$

- On peut aussi déterminer des familles génératrices de $F$ et $G$, de sorte que $F = Vect(f_1, \ldots, f_p)$ et $G = Vect(g_1, \ldots, g_q)$ et on a alors $F+G = Vect(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$.

**Exercice 2**

On considère les deux plans de $\mathbb{R}^3$ :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-y=0\}.$$

Montrer que $F+G = \mathbb{R}^3$.

**⚠ Attention !**

Comme on vient de le voir, la famille obtenue par concaténation d'une base de $F$ et d'une base de $G$ n'est pas forcément une base de $F+G$ !

Dans l'exercice précédent, on avait $\mathcal{B}_F = ((1,0,-1),(0,1,-1))$ et $\mathcal{B}_G = ((1,2,0),(0,0,1))$.

La concaténation de ces deux bases donne une famille génératrice de $F+G = \mathbb{R}^3$,
mais ce n'est pas une famille libre !

En fait, le cas où la concaténation des deux bases donne une base de $F+G$ est exactement le cas d'une somme directe, ce qui donne une nouvelle caractérisation !

**Théorème 2 (Caractérisation d'une somme directe par concaténation des bases)**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de $E$.
On introduit $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de $F$ et $\mathcal{B}_G = (g_1, \ldots, g_q)$ une base de $G$.
On a l'équivalence suivante :

La somme $F+G$ est directe $\iff$

**Preuve (facultative) :**

On a déjà vu en Proposition 2 que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $F+G$. Il reste donc à montrer :

La somme $F+G$ est directe $\iff$ $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est une famille libre.

• Supposons que la somme $F+G$ est directe, c'est à dire $F \cap G = \{0_E\}$ d'après le Théorème 1. Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ et $\mu_1, \ldots, \mu_q \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i + \sum_{i=1}^{q} \mu_i g_i = 0_E$ et montrons que tous ces scalaires sont nuls.

On a $\underbrace{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i}_{\in F} = \underbrace{-\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \mu_i g_i}_{\in G}$ donc ces vecteurs appartiennent à $F \cap G = \{0_E\}$.

Ainsi, on en déduit que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0_E$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \mu_i g_i = 0_E$. Enfin, comme les familles $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(g_1, \ldots, g_q)$ sont libres, on en déduit que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ et $\mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$, d'où le résultat.

• Inversement, supposons que $\mathcal{B}$ est libre.
Montrons que la somme $F+G$ est directe, c'est à dire que $F \cap G = \{0_E\}$ d'après le Théorème 1.
Soit $v \in F \cap G$. Puisque $v \in F$, on peut écrire $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$. Puisque $v \in G$, on peut écrire $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} \mu_i g_i$.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i - \sum_{i=1}^{q} \mu_i g_i = v - v = 0_E$. Puisque la famille $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ est libre, il en résulte que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \mu_1 = \ldots = \mu_q = 0$. On obtient donc $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = 0_E$.

On conclut que $F \cap G \subset \{0_E\}$. L'inclusion réciproque est évidente. $\square$

Cette caractérisation nous donne ainsi une nouvelle façon de montrer qu'une somme est directe.

**Exercice 3**

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|x + y + z = 0\}$ et la droite $G = Vect((1, 1, 1))$.
Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ (c'est à dire que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.)

Une conséquence importante du Théorème de concaténation des bases est la suivante :

**Corollaire 1 (Existence d'un supplémentaire en dimension finie)**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ admet un sous-espace supplémentaire $G$ dans $E$,
c'est à dire qu'il existe un sous-espace vectoriel $G$ de $E$ tel que $E = F \oplus G$.

**Preuve :**

Notons $n = dim(E)$ et $p = dim(F)$ (avec donc $p \leqslant n$).
On introduit $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de $F$.

$\mathcal{B}_F$ est une famille libre de vecteurs de $F$, donc une famille libre de vecteurs de $E$.
D'après le Théorème de la base incomplète, on sait qu'on peut rajouter $n-p$ vecteur pour la compléter en une base $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_{n-p})$ de $E$ !

Posons alors $G = Vect(g_1, \ldots, g_{n-p})$.

- On a : $E = Vect(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_{n-p}) = Vect(f_1, \ldots, f_p) + Vect(g_1, \ldots, g_{n-p}) = F + G$.
- De plus, la famille $\mathcal{B}_G = (g_1, \ldots, g_{n-p})$ est libre, donc c'est une base de $G$.

(si $\mathcal{B}_G$ était liée, alors $\mathcal{B}$ serait également liée, ce qui est exclu !)
Ainsi, en concaténant les bases $\mathcal{B}_F$ de $F$ et $\mathcal{B}_G$ de $G$, on obtient la base $\mathcal{B}$ de $E = F + G$.
D'après le théorème de concaténation des bases (Théorème 2), la somme $F + G$ est directe.

On a donc bien montér que $E = F \oplus G$ : $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$. $\square$

**Attention !**

Il n'y a pas unicité du supplémentaire !
Pour cette raison, on dit toujours qu'on introduit "un supplémentaire" et non pas "le supplémentaire".

Exemple : Vérifier (à l'aide du critère que vous préférez !) que

$$Vect((1, 0)) \oplus Vect((0, 1)) = \mathbb{R}^2 \quad \text{et aussi} \quad Vect((1, 0)) \oplus Vect((1, 1)) = \mathbb{R}^2.$$

$G = Vect((0, 1))$ et $G = Vect((1, 1))$ sont donc des supplémentaires de $F = Vect((1, 0))$ dans $E = \mathbb{R}^2$.

**Méthode : Déterminer un supplémentaire de $F$ dans $E$**

Si on souhaite déterminer un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ :

$\boxed{1}$ On détermine une base $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ de $F$.

$\boxed{2}$ On complète cette famille en une base $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ de $E$.

$\boxed{3}$ On sait alors qu'en posant $G = Vect(g_1, \dots, g_q)$, on a un supplémentaire de $F$ dans $E$, c'est à dire que $F \oplus G = E$.

**Exercice 4**

Déterminer un supplémentaire de $F = Vect(X^2 - 2X + 1, -X + 2)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

## 1.3 Dimension d'une somme, dimension d'une somme directe

On travaille toujours avec des sous-espaces vectoriels de dimension finie.

**Théorème 3 (Formule de Grassmann : dimension de la somme $F + G$)**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de $E$.

Alors $F + G$ est de dimension finie et $\dim(F + G) =$

Conséquence : On a toujours $\dim(F + G)$ $\quad$ $\dim(F) + \dim(G)$.

**Remarque 3**

Cette formule n'est pas sans rappeler $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$ !

**Preuve du Théorème 3 (facultative) :**

• Montrons d'abord que la formule est vraie pour les sommes directes $F + G = F \oplus G$.
Supposons $F \cap G = \{0_E\}$ donc $\dim(F \cap G) = 0$. On veut donc montrer $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.
Soient $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ une base de $F$ et $\mathcal{B}_G = (g_1, \dots, g_q)$ une base de $G$. Puisque la somme $F \oplus G$ est directe, on sait d'après le Théorème de concaténation des bases que $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de $F \oplus G$. C'est donc que $\dim(F + G) = p + q = \dim(F) + \dim(G)$, d'où le résultat.

• Revenons à présent au cas général où la somme n'est pas directe : $F \cap G \neq \{0_E\}$.
Puisque $F \cap G$ est un SEV de $F$, d'après le Corollaire 1, on peut introduire $F'$ un supplémentaire de $F \cap G$ dans $F$ : c'est à dire que $F'$ est un SEV de $F$ tel que $F = F \cap G \oplus F'$.
Cette somme étant directe, on sait que $\dim(F) = \dim(F \cap G) + \dim(F')$,
et donc $\dim(F') = \dim(F) - \dim(F \cap G)$. Montrons à présent que $F + G = F' \oplus G$ :

- D'abord comme la somme $F \cap G \oplus F'$ est directe, on sait que $(F \cap G) \cap F' = \{0_E\}$, c'est à dire $G \cap F' = \{0_E\}$. Ceci montre que la somme $F' + G$ est directe.

- Justifions que $F + G = F' + G$. Puisque $F' \subset F$, on a bien-sûr $F' + G \subset F + G$.
Inversement, si $v \in F + G$, on peut écrire $v = \underbrace{v_1}_{\in F} + \underbrace{v_2}_{\in G}$.

Comme $v_1 \in F = F \cap G \oplus F'$, on peut écrire $v_1 = \underbrace{w_1}_{\in F \cap G} + \underbrace{w_2}_{\in F'}$, donc $v = \underbrace{w_2}_{\in F'} + \underbrace{w_1 + v_2}_{\in G} \in F' + G$.

Pour finir : $\dim(F + G) = \dim(F' \oplus G) = \dim(F') + \dim(G) = \dim(F) - \dim(F \cap G) + \dim(G)$. $\square$

En conséquence, on obtient une dernière caractérisation des sommes directes :

**Théorème 4 (Caractérisation d'une somme directe par la dimension)**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de $E$. On a l'équivalence :

$$\text{La somme } F+G \text{ est directe} \iff dim(F+G) =$$

En particulier, pour une somme directe, on pourra écrire $dim(F \oplus G) =$

**Preuve :**
Avec la formule de Grassmann (Théorème 3), on voit directement que
$dim(F+G) = dim(F) + dim(G) \iff$
□

### 1.4 Récapitulatif : montrer qu'une somme de deux S.E.V est directe

**Méthode : Montrer que deux S.E.V $F$ et $G$ sont en somme directe**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $F$, $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.
Toutes les affirmations suivantes sont équivalentes :

(a) La somme $F+G$ est directe (on l'écrit alors $F \oplus G$).

(b) $F \cap G = \{0_E\}$

(c) La concaténation d'une base de $F$ et d'une base de $G$ donne une base de $F+G$.
(il suffit de vérifier que c'est une famille libre, car c'est toujours une famille génératrice de $F+G$ !)

(d) $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.

### 1.5 Récapitulatif : montrer que deux S.E.V sont supplémentaires

Rappel : (Définition 3) On dit que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$ lorsque $F \oplus G = E$, c'est à dire :

$$\text{La somme } F+G \text{ est directe} \quad \underline{\underline{\text{et}}} \quad F+G=E$$

**Théorème 5 (Caractérisations des S.E.V supplémentaires)**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.
On introduit $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ une base de $F$ et $\mathcal{B}_G = (g_1, \dots, g_q)$ une base de $G$.

L'affirmation "$F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$" (c'est à dire $F \oplus G = E$)
est équivalente à chacune des affirmations suivantes :

(a) **Avec la définition :** $\forall v \in E,\ \exists!(v_1, v_2) \in F \times G,\ v = v_1 + v_2$.

(b) **Avec l'intersection :** $F+G=E$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

(c) **Avec les bases :** La concaténation $\mathcal{B} = [\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G] = (f_1, \dots f_p, g_1, \dots g_q)$ est une base de $E$.

(d) **Avec les dimensions (version 1) :** $F+G=E$ et $dim(F) + dim(G) = dim(E)$.

(e) **Avec les dimensions (version 2) :** $F \cap G = \{0_E\}$ et $dim(F) + dim(G) = dim(E)$.

**Preuve :**

- (a) est simplement la définition de $E = F \oplus G$.
- L'équivalence (a) $\iff$ (b) découle de la caractérisation du Théorème 1 :

$$(a) \iff E = F \oplus G \iff \begin{cases} F+G=E \\ \text{et la somme } F+G \text{ est directe} \end{cases} \iff \begin{cases} F+G=E \\ \text{et } F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \iff (b)$$

- L'équivalence (a) $\iff$ (c) découle de la caractérisation du Théorème 2.

$$(a) \iff E = F \oplus G \iff \left\{\begin{array}{l} F+G=E \\ \text{et la somme } F+G \text{ est directe} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} F+G=E \\ \text{et } \mathcal{B}=[\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F] \text{ est une base de } F+G \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} F+G=E \\ \text{et } \mathcal{B}=[\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F] \text{ est une base de } E \end{array}\right. \iff (c)$$

- L'équivalence (a) $\iff$ (d) découle de la caractérisation du Théorème 4 :

$$(a) \iff E = F \oplus G \iff \left\{\begin{array}{l} F+G=E \\ \text{et la somme } F+G \text{ est directe} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} F+G=E \\ \text{et } \dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G) \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} F+G=E \\ \text{et } \dim(E)=\dim(F)+\dim(G) \end{array}\right. \iff (d)$$

- L'équivalence (a) $\iff$ (e) découle de la formule de Grassman (Théorème 3) :

$$(a) \iff (b) \iff \left\{\begin{array}{l} F+G=E \\ \text{et } F\cap G=\{0_E\} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \dim(F+G)=\dim(E) \\ \text{et } F\cap G=\{0_E\} \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)=\dim(E) \\ \text{et } F\cap G=\{0_E\} \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} \dim(F)+\dim(G)=\dim(E) \\ \text{et } F\cap G=\{0_E\} \end{array}\right. \iff (e) \qquad \square$$

**Exercice 5**

On rappelle que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\}$

1. En utilisant la définition, montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (c'est à dire $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$).

2. En utilisant le critère "le plus simple", re-démontrer très rapidement ce résultat.

# 2 Projecteurs

**Définition 4 (Projecteurs associés à deux S.E.V supplémentaires)**

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$ : $E = F \oplus G$.
Ainsi tout vecteur $v \in E$ s'écrit de manière unique $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in F$ et $v_2 \in G$.
On introduit les applications suivantes :

• $p$ : est appelé

• $q$ : est appelé

On dit que $p$ et $q$ sont des .

• Dans $E = \mathbb{R}^2$, soient $F$ et $G$ deux-droites non-parallèles. On a alors $F \oplus G = E$ :

Tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ peut s'écrire $v = \underbrace{p(v)}_{\in F} + \underbrace{q(v)}_{\in G}$.

**Dessin :**

• Dans $E = \mathbb{R}^3$, soit $F$ un plan et $G$ une droite non-incluse dans $F$. On a alors $F \oplus G = E$ :

Tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ peut s'écrire $v = \underbrace{p(v)}_{\in F} + \underbrace{q(v)}_{\in G}$.

**Dessin :**

**Exemple**

On a vu que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrivait :

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}.$$

Les projecteurs associés sont donc : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $p(M) =$ $q(M) =$

**Méthode : Déterminer les projecteurs associés à $E = F \oplus G$**

On suppose que $E = F \oplus G$. On souhaite déterminer les projecteurs $p$ et $q$ associés.

$\boxed{1}$ Déterminer des bases $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ de $F$ et $\mathcal{B}_G = (g_1, \dots, g_q)$ de $G$.

$\boxed{2}$ Introduire un vecteur $v \in E$ quelconque et déterminer sa décomposition dans la base $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ de $E$, c'est à dire déterminer des scalaires $\lambda_i$, $\mu_i$ tels que :

$$v = \underbrace{\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p}_{p(v) \in F} + \underbrace{\mu_1 g_1 + \ldots + \mu_q g_q}_{q(v) \in G}$$

$\boxed{3}$ Reconnaître $p(v)$ et $q(v)$ dans cette décomposition.

### Exercice 6

On a vu dans l'exercice 3 que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$
avec $F = Vect((1,0,-1),(0,1,-1))$ et $G = Vect((1,1,1))$.
Déterminer les projecteurs associés.

### Proposition 3 (Propriétés élémentaires des projecteurs)

Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$ : $\quad E = F \oplus G$.
On note $p$ et $q$ les projecteurs associés, de sorte que : $\quad \forall v \in E,\ v = \underbrace{p(v)}_{\in F} + \underbrace{q(v)}_{\in G}$.

Alors on a les propriétés suivantes :
(a) $p$ et $q$ sont des applications linéaires :
(b) $p + q =$ et donc $q =$
(c) Si $v \in F$, alors $p(v) =$ Si $v \in G$, alors $p(v) =$

**Preuve :**

(a) Soient $v, v' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $p(v + \lambda v') = p(v) + \lambda p(v')$ et $q(v + \lambda v') = q(v) + \lambda q(v')$.
Par définition des projecteurs, l'"unique décomposition" de $v$ dans $E = F \oplus G$ est : $v =$

De même, l'"unique décomposition" de $v'$ dans $E = F \oplus G$ est : $\quad v' =$

On obtient donc : $\quad v + \lambda v' =$

Il s'agit de l'unique décomposition de $v + \lambda v'$ dans $E = F \oplus G$ !
Par définition des projecteurs, c'est donc que $p(v + \lambda v') =$ et $q(v + \lambda v') =$
On a ainsi montré que $p \in \mathcal{L}(E)$ et $q \in \mathcal{L}(E)$.

(b) Par définition, pour tout $v \in E$, $\quad v = p(v) + q(v)$.
Autrement dit : $\forall v \in E,\ p(v) + q(v) =$ On a donc bien $p + q = Id_E$.
(c) Si $v \in F$, sa décomposition est $v =$ On a donc $p(v) =$ et $q(v) =$

Si $v \in G$, sa décomposition est $v =$ On a donc $p(v) =$ et $q(v) =$

$\square$

**Proposition 4 (Noyau et image d'un projecteur)**

On suppose toujours que $E = F \oplus G$. Soit $p$ le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$.
Alors : $\quad Ker(p) =$ et $\quad Im(p) =$

**Preuve :**

- Montrons que $Ker(p) = G$ par double inclusion :

- Si $v \in G$, alors on peut écrire $v = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{v}_{\in G}$ donc $p(v) = 0_E$, i.e $v \in Ker(p)$.
- Si $v \in Ker(p)$, alors on peut écrire $v = \underbrace{p(v)}_{\in F} + \underbrace{q(v)}_{\in G}$ mais $p(v) = 0_E$, donc on a $v = q(v) \in G$.

- Montrons que $Im(p) = F$ par double inclusion :

- Si $v \in F$, alors on peut écrire $v = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$, donc $p(v) = v$, et donc $v = p(v) \in Im(p)$.
- Si $v \in Im(p)$, on peut écrire $v = p(u)$ pour un $u \in E$.
Par définition des projecteurs, $\quad u = \underbrace{p(u)}_{\in F} + \underbrace{q(u)}_{\in G}$, $\quad$ donc $v = p(u) \in F$. $\square$

Pour terminer, donnons une autre façon de voir les projecteurs :

**Théorème 6 (Caractérisation des projecteurs)**

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ quelconque. Alors :

$$f \text{ est un projecteur} \iff$$

Plus précisément, si $f$ est un endomorphisme satisfaisant $f \circ f = f$, alors :
- On a $E =$
- $f$ est le projecteur sur $F =$ parallèlement à $G =$

**Preuve :**

$\square$

### ✎ Exercice 7

On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f((x, y, z)) = (2x + 3y - z, -x - 2y + z, -x - 3y + 2z).$$

Montrer que $f$ est un projecteur. Préciser sur quoi, parallèlement à quoi.

**À savoir faire à l'issue de ce chapitre :**

Au minimum

- Connaître la définition de $F + G$ et celle d'une somme directe.
- Connaître la définition de deux SEV supplémentaires.
- Savoir calculer explicitement le SEV $F + G$.
- Connaître les critères permettant de montrer qu'une somme est directe.
  (avec l'intersection, avec les bases, avec la dimension)

Pour suivre

- Repérer le critère "le plus simple" pour monter que $E = F \oplus G$.
- Définir et éventuellement déterminer les projecteurs associés à $E = F \oplus G$.
- Connaître et appliquer le Théorème de "Caractérisation des projecteurs"

Pour les ambitieux

- Manipuler des sommes de 3 SEV ou plus.
- Avoir lu et bien compris les preuves "facultatives".

# 3 HORS PROGRAMME : Somme de $r$ sous-espaces vectoriels

## 3.1 Définitions

**Définition 5 (Somme de $r$ S.EV)**

Soient $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de $E$.

On appelle somme de $F_1, \ldots, F_r$ et on note $F_1 + \ldots + F_r$ ou bien $\sum_{i=1}^{r} F_i$ l'ensemble :

$$F_1 + \ldots + F_r = \Big\{ v_1 + \ldots + v_r,\ (v_1, \ldots v_r) \in F_1 \times \ldots \times F_r \Big\}.$$

**Proposition 5 (La somme est un S.E.V)**

La somme $F_1 + \ldots + F_r$ est une sous-espace vectoriel de $E$.

**Définition 6 (Somme directe)**

Soient $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de $E$.

La somme $\sum_{i=1}^{r} F_i$ est dite directe si tout vecteur $v \in \sum_{i=1}^{r} F_i$ s'écrit de manière unique comme $v = v_1 + \ldots + v_r$ avec $(v_1, \ldots, v_r) \in F_1 \times \ldots \times F_r$.

Dans ce cas, la somme est notée $F_1 \oplus \ldots \oplus F_r$ ou bien $\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

**Attention !**

On n'a plus de caractérisation simple avec l'intersection... En particulier, il n'est pas suffisant de vérifier que $F_1 \cap \ldots \cap F_r = \{0_E\}$, ni même que $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ pour $i \neq j$ pour avoir une somme directe ! Les autres caractérisations peuvent néanmoins se généraliser :

**Proposition 6 (Famille génératrice de la somme)**

Soient $F_1, ..., F_r$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie. ($r \geqslant 2$)
Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on introduit $\mathcal{B}_k$ une base de $F_k$.

La famille (notée $[\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r]$) obtenue par concaténation des vecteurs de $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r$ est une famille génératrice de $F_1 + \ldots + F_r$.

**Théorème 7 (Caractérisation d'une somme directe par les bases)**

Soient $F_1, ..., F_r$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie. ($r \geqslant 2$)
Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on introduit $\mathcal{B}_k$ une base de $F_k$.

$$\text{La somme } F_1 + \ldots + F_r \text{ est directe} \iff \mathcal{B} = [\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r] \text{ est une base de } F_1 + \ldots + F_r.$$

La base $\mathcal{B} = [\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r]$ obtenue par concaténation est alors appelée

**"base adaptée"** à la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

**Théorème 8 (Dimension de la somme)**

Soient $F_1, ..., F_r$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie. ($r \geqslant 2$)
Alors $\sum_{i=1}^{r} F_i$ est de dimension finie et $dim\left(\sum_{i=1}^{r} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{r} dim(F_i)$.

**Théorème 9 (Caractérisation d'une somme directe par la dimension)**

Soient $F_1, ..., F_r$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie. ($r \geqslant 2$)

$$\text{La somme } F_1 + \ldots + F_r \text{ est directe } \iff dim\left(\sum_{i=1}^{r} F_i\right) = \sum_{i=1}^{r} dim(F_i).$$

Pour une somme de $r$ sous-espaces, on ne parle plus vraiment d'espaces "supplémentaires".
On peut tout de même énoncé un résultat similaire à celui vu précédemment :

**Théorème 10 (Caractérisations des S.E.V supplémentaires)**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie.
Soient $F_1, ..., F_r$ des sous-espaces vectoriels de $E$. ($r \geqslant 2$)
Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on introduit $\mathcal{B}_k$ une base de $F_k$.

L'affirmation "$E = \bigoplus_{k=1}^{r} F_i$" est équivalent à chacune des affirmations suivantes :

(a) $\forall v \in E,\ \exists!(v_1, \ldots, v_r) \in F_1 \times \ldots \times F_r,\ v = v_1 + \ldots + v_r.$

(b) La concaténation $\mathcal{B} = [\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r]$ est une base de $E$.

(c) $E = \sum_{i=1}^{r} F_i$ et $\sum_{i=1}^{r} dim(F_i) = dim(E)$.