

Devoir Sur Table n°4 – Corrigé

Exercice 1 - 3 questions sur les espaces vectoriels

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + c \cdot v_3 = (0, 0, 0)$.

La famille (v_1, v_2, v_3) sera libre si et seulement si cette égalité implique $a = b = c = 0$.

Réolvons le système associé :

$$\begin{aligned} a(-1, 1, 0) + b(1, 0, 2) + c(1, 1, \alpha) &= (0, 0, 0) \iff (-a + b + c, a + c, 2b + \alpha c) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ 2b + \alpha c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ 2b + \alpha c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ (\alpha - 4)c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système triangulaire homogène est de Cramer (donc admet l'unique solution $(a, b, c) = (0, 0, 0)$) si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non-nuls.

Conclusion : la famille est libre si et seulement si $\alpha \neq 4$.

2. On considère l'ensemble $S = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$.

- (a) Montrons que S est un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- S contient bien la suite nulle.

En effet, si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$, on a évidemment $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 0 = 4u_{n+1} - 4u_n$.

- Soient $u, v \in S$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons la suite $w = u + \lambda v$ et vérifions que $w \in S$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= u_{n+2} + \lambda v_{n+2} \\ &= (4u_{n+1} - 4u_n) + \lambda(4v_{n+1} - 4v_n) \quad \text{car } u, v \in S \\ &= 4(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) - 4(u_n + \lambda v_n) \\ &= 4w_{n+1} - 4w_n. \end{aligned}$$

On vient de vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = 4w_{n+1} - 4w_n$.

Ceci montre que $w \in S$. Conclusion : S est un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (donc en particulier un EV).

- (b) On s'intéresse aux suites satisfaisant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

Pour trouver leur forme générale, on peut utiliser la méthode de l'équation caractéristique.

On résout l'équation

$$x^2 = 4x - 4 \iff x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x - 2)^2 = 0.$$

On dispose d'une seule racine double : 2.

On sait dans ce cas que toute suite $u \in S$ se met sous la forme :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)2^n \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}.$$

- (c) On vient de remarquer que tout $u \in S$ peut s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu n 2^n \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, en notant v et w les suites données par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n \quad \text{et} \quad w_n = n 2^n$$

toute suite $u \in S$ peut s'écrire : $u = \lambda \cdot v + \mu \cdot w$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, tout élément de S s'écrit comme combinaison linéaire de v et de w .

Ceci montre que $S = Vect(v, w)$: la famille (v, w) est génératrice de S .

De plus, cette famille est libre, car les suites v et w sont non-colinéaires : il n'existe pas de scalaire $C \in \mathbb{R}$ tel que $w = Cv$ (cela voudrait dire que $\forall n \in \mathbb{N}, n2^n = C2^n$: impossible avec C constant).

Conclusion : La famille $\mathcal{B} = ((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n2^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une base de l'espace vectoriel S .

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On considère l'ensemble $E = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \int_0^3 P(t)dt = 0 \right\}$.

(a) Montrons que E est un SEV de $\mathbb{R}[X]$.

- E contient bien le polynôme nul.

En effet, si $P = 0$ on a $\deg(P) = -\infty \leq n$ et évidemment $\int_0^3 P(t)dt = \int_0^3 0dt = 0$.

- Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $P + \lambda Q \in E$.

D'abord, on a $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ donc on sait que $P + \lambda Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

De plus, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^3 (P + \lambda Q)(t)dt = \int_0^3 (P(t) + \lambda Q(t))dt = \underbrace{\int_0^3 P(t)dt}_{=0 \text{ car } P \in E} + \lambda \underbrace{\int_0^3 Q(t)dt}_{=0 \text{ car } Q \in E} = 0.$$

Ceci montre que $P + \lambda Q \in E$. Conclusion : E est un SEV de $\mathbb{R}[X]$.

(b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $c_k \in \mathbb{R}$. Le polynôme $P(X) = X^k - c_k$ est bien dans $\mathbb{R}_n[X]$. On a les équivalences :

$$P \in E \iff \int_0^3 P(t)dt = 0 \iff \int_0^3 (t^k - c_k)dt = 0 \iff \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} - c_k t \right]_0^3 = 0 \iff \frac{3^{k+1}}{k+1} - 3c_k = 0.$$

On trouve donc que $c_k = \frac{3^k}{k+1}$ est l'unique constante telle que $X^k - c_k \in E$.

(c) On vient d'établir que les polynômes $X^k - \frac{3^k}{k+1}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont tous des vecteurs de E .

De plus, la famille $\mathcal{F} = \left(X^k - \frac{3^k}{k+1} \right)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} = \left(X^1 - \frac{3}{2}, X^2 - \frac{3^2}{3}, \dots, X^n - \frac{3^n}{n+1} \right)$ est libre, car composée de polynômes de degrés distincts.

(d) Il reste à montrer que cette famille est génératrice de E , c'est à dire que

$$E = Vect\left(X^1 - \frac{3}{2}, X^2 - \frac{3^2}{3}, \dots, X^n - \frac{3^n}{n+1}\right)$$

ou encore que n'importe quel $P \in E$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de la famille

$$\mathcal{F} = \left(X^k - \frac{3^k}{k+1} \right)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}.$$

Soit $P \in E$. Puisque $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut déjà l'écrire $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

De plus, on a également :

$$\int_0^3 P(t)dt = 0 \iff \int_0^3 \left(\sum_{k=0}^n a_k t^k \right) dt = 0 \iff \sum_{k=0}^n a_k \int_0^3 t^k dt = 0 \iff \sum_{k=0}^n a_k \frac{3^{k+1}}{k+1} = 0.$$

Cette condition se traduit donc en $3a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \frac{3^{k+1}}{k+1} = 0$, c'est à dire $a_0 = -\sum_{k=1}^n a_k \frac{3^k}{k+1}$.

En revenant à l'écriture $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=1}^n a_k X^k + a_0 = \sum_{k=1}^n a_k X^k - \sum_{k=1}^n a_k \frac{3^k}{k+1}$,

on obtient $P = \sum_{k=1}^n a_k \left(X^k - \frac{3^k}{k+1} \right)$: c'est bien une combinaison linéaire de \mathcal{F} .

Ceci montre que la famille \mathcal{F} mise en évidence en 3.(c) est une base de E .

Exercice 2 : Tirages dans un grand nombre d'urnes

Dans cet exercice, $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ sont fixés. Pour $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on définit : $B_k = \int_0^1 t^k (1-t)^{N-k} dt$.

$$1. \quad (a) \quad B_N = \int_0^1 t^N dt = \left[\frac{t^{N+1}}{N+1} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{N+1}}.$$

$$B_{N-1} = \int_0^1 t^{N-1} (1-t) dt = \int_0^1 (t^{N-1} - t^N) dt = \left[\frac{t^N}{N} - \frac{t^{N+1}}{N+1} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N(N+1)}}.$$

(b) Soit $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

On calcule $B_{N-k} = \int_0^1 t^{N-k} (1-t)^k dt$ en posant le changement de variable $u = 1-t$.

On a donc $du = -dt$, d'où : $t^{N-k} (1-t)^k dt = (1-u)^{N-k} u^k (-du) = -u^k (1-u)^{N-k} du$.

De plus, t va de 0 à 1, donc $u = 1-t$ va de 1 à 0. On obtient ainsi :

$$B_{N-k} = \int_0^1 t^{N-k} (1-t)^k dt = - \int_1^0 (1-u)^{N-k} u^k du = \int_0^1 (1-u)^{N-k} u^k du = B_k.$$

On a montré que : $\boxed{\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, B_{N-k} = B_k}$.

(c) Par linéarité de l'intégrale, et avec la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} B_k &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \int_0^1 t^k (1-t)^{N-k} dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} t^k (1-t)^{N-k} \right) dt \\ &= \int_0^1 (t + (1-t))^N dt = \int_0^1 1 dt = 1. \end{aligned}$$

On a montré : $\boxed{\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} B_k = 1}$.

2. (a) Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On calcule à l'aide d'une IPP :

$$\begin{aligned} B_k &= \int_0^1 \underbrace{t^k}_{u(t)} \underbrace{(1-t)^{N-k}}_{v'(t)} dt = \left[t^k \times \left(-\frac{(1-t)^{N-k+1}}{N-k+1} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 k t^{k-1} \times \left(-\frac{(1-t)^{N-k+1}}{N-k+1} \right) dt \\ &= 0 + \frac{k}{N-k+1} \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{N-(k-1)} dt = \frac{k}{N-k+1} B_{k-1}. \end{aligned}$$

On a montré : $\boxed{\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, B_k = \frac{k}{N-k+1} B_{k-1}}$.

(b) Soit $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On applique la formule précédente successivement :

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{k}{N-k+1} \times B_{k-1} \\ &= \frac{k}{N-k+1} \times \frac{k-1}{N-k+2} \times B_{k-2} \\ &= \frac{k}{N-k+1} \times \frac{k-1}{N-k+2} \times \frac{k-2}{N-k+3} \times B_{k-3} \quad \text{etc...} \end{aligned}$$

Par récurrence immédiate, on finit par obtenir un produit de k termes, multiplié par B_0 :

$$B_k = \frac{k}{N-k+1} \times \frac{k-1}{N-k+2} \times \dots \times \frac{1}{N} \times B_0.$$

En se rappelant que $\binom{N}{k} = \frac{N \times (N-1) \times \dots \times (N-k+1)}{k \times (k-1) \times \dots \times 1}$, c'est exactement : $B_k = \frac{1}{\binom{N}{k}} \times B_0$.

Enfin, on a vu que $B_0 = B_{N-0} = B_N = \frac{1}{N+1}$. Conclusion : $\boxed{\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, B_k = \frac{1}{\binom{N}{k}} \times \frac{1}{N+1}}$.

(On peut vérifier que cette formule fonctionne bien quand $k=0$)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n .

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'urne numéro j contient j boules blanches et $n - j$ boules noires.

On choisit l'une des urnes uniformément au hasard, puis on tire N boules avec remise dans cette urne.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue des N tirages réalisés.

3. (a) Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si on a choisi l'urne numéro j , alors on effectue N tirages avec remise dans une urne contenant une proportion $\frac{j}{n}$ de boules blanches.

C'est une situation binomiale : le nombre X_n de boules blanches tirées suit la loi $\mathcal{B}(N, \frac{j}{n})$.

Remarque : On ne peut pas dire que la loi de X_n est $\mathcal{B}(N, \frac{j}{n})$ dans l'absolu. Cela n'aurait pas de sens que cette loi dépende d'un certain j "arbitraire".

On parle en fait ici d'une loi conditionnelle : conditionnellement à l'évènement "Choisir l'urne j ", les probabilités des évènements $[X = k]$ seront données par la loi binomiale susmentionnée.

- (b) L'idée est de choisir d'abord au hasard le numéro J de l'urne dans laquelle on va effectuer les tirages, selon une loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Une fois ce numéro J fixé, le nombre X de boules blanches obtenues est lui-même choisi au hasard, selon la loi $\mathcal{B}(N, \frac{J}{n})$.

```
import numpy.random as rd
def tirage(n,N) :
    J = rd.randint(1,n+1) # uniforme entre 1 et n
    X = rd.binomial(N,J/n)
    return X
```

4. Au vu des questions précédentes, on doit pressentir ici une application de la formule des probabilités totales. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons U_j = "Choisir l'urne numéro j ".

Les évènements (U_1, U_2, \dots, U_n) forment ainsi un système complet d'évènements.

Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, la formule des probabilités totales nous donne :

$$P(X_n = k) = \sum_{j=1}^n P(U_j \cap [X_n = k]) = \sum_{j=1}^n P(U_j) P_{U_j}(X_n = k).$$

- Puisque le numéro de l'urne est choisi uniformément au hasard, on sait que $\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $P(U_j) = \frac{1}{n}$.
- Conditionnellement à l'évènement U_j , on a dit en 3.(a) que X_n suivait la loi $\mathcal{B}(N, \frac{j}{n})$. On aura donc :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_{U_j}(X_n = k) = \binom{N}{k} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{N-k}.$$

En remplaçant, on obtient bien : $\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \binom{N}{k} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{N-k}$.

On a ainsi déterminé la loi de probabilité de X_n (dont l'expression est assez complexe, a priori!)

5. (a) Soit $p \in [0, 1]$. La somme $\sum_{k=0}^N k \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$ s'interprète comme l'espérance d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(N, p)$. On sait donc qu'elle vaut Np

(Il n'est pas utile de reproduire la démonstration : c'est un résultat de cours!)

- (b) Le support de X_n est $X_n(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket$: sur N tirages réalisés avec remise, on obtient au minimum 0 boules blanches et au maximum N . On calcule donc :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=0}^N k P(X_n = k) = \sum_{k=0}^N k \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \binom{N}{k} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{N-k} \right) \quad \text{d'après 4.} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^N \sum_{j=1}^n k \binom{N}{k} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{N-k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^N k \binom{N}{k} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{N-k} \quad \text{en inversant les sommes.} \end{aligned}$$

Or, d'après 5.(a), pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé, on note que

$$\sum_{k=0}^N k \binom{N}{k} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{N-k} = N \frac{j}{n} \quad (\text{c'est } Np \text{ avec } p = \frac{j}{n} \in [0, 1])$$

En remplaçant, il vient :

$$E(X_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n N \frac{j}{n} = \frac{N}{n} \sum_{j=1}^n j = \frac{N}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}.$$

d'où, finalement :
$$E(X_n) = \frac{N(n+1)}{2n}.$$

6. (a) Soit $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ fixé. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \binom{N}{k} \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{N-k} = \binom{N}{k} \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n}\right)^k \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{N-k}.$$

On reconnaît ici une limite de somme de Riemann !

En introduisant la fonction $f : t \mapsto t^k(1-t)^{N-k}$ qui est continue sur $[0, 1]$ on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \binom{N}{k} \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f\left(\frac{j}{n}\right) = \binom{N}{k} \times \int_0^1 f(t) dt.$$

On note que $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t^k(1-t)^{N-k} dt = B_k$ par définition.

On obtient donc bien :
$$\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \binom{N}{k} B_k.$$

(b) Avec l'expression $B_k = \frac{1}{\binom{N}{k}} \times \frac{1}{N+1}$ obtenue en 2.(b) :
$$\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{1}{N+1}.$$

Interprétation : Lorsque le nombre n d'urnes est très grand,

la loi de probabilité de X_n est proche de la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 0, N \rrbracket)$.

Chaque nombre possible de boules blanches obtenues (entre 0 et N) devient équiprobable.

Problème

Partie I - Une suite d'intégrales

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. On cherche à déterminer sa limite.

1.

```
import numpy as np
def valeur_S(n) :
    S = 0 ; a = 1
    for k in range ( n+1 ) : # k va de 0 a n
        S = S + a
        a = a * (1/(k+1)) # ou alors *(1/k) et faire aller k de 1 a n+1...
    return S
```

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit : $I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

2.
$$I_0 = \int_0^1 e^t dt = \left[e^t \right]_0^1 = e - 1.$$

3.

```
def approx_I(n) :
    S = 0; N = 10000;
    for k in range(N) :
        S = S + (N-k)**n * np.exp(k/N)
    return S / (N**(n+1))
```

Ce programme prend en entrée n et calcule la valeur

$$\frac{1}{N^{n+1}} \sum_{k=0}^{N-1} (N-k)^n e^{k/N} \text{ avec } N = 10000.$$

Avec ce choix de N très grand, cette valeur sera proche de l'intégrale I_n . En effet :

$$\frac{1}{N^{n+1}} \sum_{k=0}^{N-1} (N-k)^n e^{k/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(N-k)^n}{N^n} e^{k/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{N-k}{N}\right)^n e^{k/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n e^{k/N}.$$

On reconnaît ici une somme de Riemann $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\frac{k}{N}\right)$ où $g : t \mapsto (1-t)^n e^t$ est continue sur $[0, 1]$.

On sait donc que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n e^{k/N} = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt = I_n.$$

Ceci explique pourquoi, avec N très grand, la valeur renvoyée est une approximation de l'intégrale I_n .

4. Montrons que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a l'inégalité :

$$\forall t \in [0, 1], \quad (1-t)^{n+1} \leq (1-t)^n \text{ donc } (1-t)^{n+1} e^t \leq (1-t)^n e^t \quad (\text{car } 0 \leq t \leq 1).$$

En intégrant, on obtient $\int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt \leq \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$, c'est à dire $I_{n+1} \leq I_n$.

C'est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons I_{n+1} à l'aide d'une IPP :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 \underbrace{(1-t)^{n+1}}_{u(t)} \underbrace{e^t}_{v'(t)} dt = \left[(1-t)^{n+1} e^t \right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-t)^n e^t dt \\ &= -1 + (n+1) \int_0^1 (1-t)^n e^t dt = -1 + (n+1) I_n. \end{aligned}$$

On a montré : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = -1 + (n+1) I_n$.

(b) On fera très attention aux valeurs de k dans la boucle ici.

Il s'agit de vérifier qu'on effectue bien l'équivalents des égalités :

$$I_1 = -1 + 1 \cdot I_0, \quad I_2 = -1 + 2 \cdot I_1, \quad I_3 = -1 + 3 \cdot I_2, \quad \text{etc...}$$

```
import numpy as np
def valeur_I(n) :
    I = np.e - 1 # valeur de I0
    for k in range(n) : # k va de 0 a n-1 (n passages)
        I = -1 + (k+1) * I
    return I
```

Au premier passage ($k = 0$) on calcule I_1 , au deuxième passage ($k = 1$) on calcule I_2 , etc...

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a l'encadrement :

$$\forall t \in [0, 1], \quad 0 \leq (1-t)^n e^t \leq (1-t)^n e \quad (\text{car } t \leq 1)$$

donc, en intégrant de 0 à 1 :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

On calcule rapidement :

$$\int_0^1 (1-t)^n e^t dt = e \int_0^1 (1-t)^n dt = e \times \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{e}{n+1}.$$

On a montré : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$. D'après le théorème des gendarmes, on déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 5.(a), on sait que :

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n \iff I_{n+1} = -1 + nI_n + I_n \iff nI_n = 1 + I_{n+1} - I_n.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1} = 0$, on en déduit $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1}$.

Remarque : Ceci montre en fait que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

On obtient donc la "vitesse de convergence" de la suite vers 0.

8. Suivons l'indication en posant $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \frac{I_k}{k!}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

• D'une part, on peut calculer la somme par télescopage :

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = \frac{I_n}{n!} - I_0 = \frac{I_n}{n!} - (e - 1).$$

• D'autre part, on sait que $I_{k+1} = -1 + (k+1)I_k$ donc $\frac{I_{k+1}}{(k+1)!} = -\frac{1}{(k+1)!} + \frac{I_k}{k!}$

c'est à dire $u_{k+1} = -\frac{1}{(k+1)!} + u_k$. On peut alors calculer la somme A différemment :

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = -\left(S_n - \frac{1}{0!}\right) = -S_n + 1.$$

Pour conclure, on a montré que $A = \frac{I_n}{n!} - e + 1 = -S_n + 1$. Il en résulte que $\boxed{S_n - e = -\frac{I_n}{n!}}$.

Ainsi, $|S_n - e| = \frac{I_n}{n!} \leq \frac{\frac{e}{n+1}}{n!}$ d'après 6., c'est à dire : $\boxed{|S_n - e| \leq \frac{e}{(n+1)!}}$.

C'est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

A l'aide du théorème des gendarmes (version valeur absolue), on déduit que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e}$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour calculer $J_n = \int_0^2 t^n e^{-t/2} dt$, posons dans un premier temps $u = t/2$, donc $du = \frac{1}{2} dt$.

(Autrement dit, $t = 2u$ et $dt = 2du$)

On a ainsi : $t^n e^{-t/2} dt = (2u)^n e^{-u} 2du = 2^{n+1} u^n e^{-u} du$.

De plus, t va de 0 à 2, donc $u = \frac{t}{2}$ va de 0 à 1. On obtient :

$$J_n = \int_0^2 t^n e^{-t/2} dt = 2^{n+1} \int_0^1 u^n e^{-u} du.$$

Pour faire le lien avec I_n , posons à présent $v = (1 - u)$, donc $dv = -du$.

On a ainsi : $u^n e^{-u} du = (1 - v)^n e^{-1+v} (-dv) = -e^{-1} (1 - v)^n e^v dv$.

De plus, u va de 0 à 1 donc $v = 1 - u$ va de 1 à 0. On obtient :

$$\int_0^1 u^n e^{-u} du = -e^{-1} \int_1^0 (1 - v)^n e^v dv = e^{-1} \int_0^1 (1 - v)^n e^v dv = e^{-1} \times I_n.$$

En raboutant tout cela, on obtient finalement $\boxed{J_n = 2^{n+1} e^{-1} I_n}$.

Remarque : On aurait pu réunir les deux changements de variables en un seul en posant dès le départ $v = 1 - \frac{t}{2}$, mais ce n'est pas forcément évident à deviner !

Partie II - Highscore

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé.

Un jeu vidéo est composé de n niveaux consécutifs : Niveau 1, Niveau 2, ..., Niveau n (le dernier).

Un joueur se lance dans une partie, selon les modalités suivantes :

- Le joueur débute sa partie au Niveau 1. S'il parvient à terminer un niveau, il passe au niveau suivant.
- La partie s'arrête dès que le joueur échoue à l'un des niveaux, ou s'il parvient à terminer le Niveau n .

On note Z la variable aléatoire correspondant au nombre de niveaux que le joueur parvient à terminer durant sa partie. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on introduit l'évènement $A_i = \text{"Le joueur termine le Niveau } i\text{"}$.

10. (a) Le joueur pourrait échouer dès le premier niveau : dans ce cas $Z = 0$.

Au maximum, le joueur peut terminer les n niveaux disponibles : dans ce cas $Z = n$.

Le support de Z est donc $\boxed{Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket}$.

(b) Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,
$$\boxed{[Z = k] = \left(\bigcap_{i=1}^k A_i \right) \cap \overline{A_{k+1}}}$$

(avec la convention $\bigcap_{i=1}^0 A_i = \Omega$ pour l'intersection vide, si bien qu'on a simplement $[Z = 0] = \overline{A_1}$).

Pour $k = n$, on obtient :
$$\boxed{[Z = n] = \bigcap_{i=1}^n A_i}$$

Dans un premier temps, on considère que tous les niveaux sont d'une difficulté comparable.

Autrement dit, on fixe un réel $p \in [0, 1]$ et on fait l'hypothèse (H_1) suivante :

(H_1) : Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, Si le joueur atteint le Niveau k , la probabilité qu'il le termine est p .

11. (a)

```
import numpy.random as rd
def alea(n,p) :
    Z = 0
    for k in range(n) :
        if rd.random() < p :
            Z = Z + 1
    return Z
```

Ce programme simule la réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Cela ne correspond pas à la situation qui nous intéresse ici, car la succession d'expériences persiste même après un potentiel échec! Dans le cadre spécifié par l'énoncé, on voudrait que le joueur s'arrête (et "quitte la boucle") dès qu'il rencontre un échec.

- (b)

```
import numpy.random as rd
def alea(n) :
    Z = 0
    while (Z < n and rd.random() < p) : # on s'assure que Z n'excede jamais n
        Z = Z + 1
    return Z
```

12. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, d'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}) \\ &= \underbrace{P(A_1)}_{=p} \times \underbrace{P_{A_1}(A_2)}_{=p} \times \dots \times \underbrace{P_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k)}_{=p} \times \underbrace{P_{A_1 \cap \dots \cap A_k}(\overline{A_{k+1}})}_{=1-p}. \end{aligned}$$

Remarque : Attention, il s'agit bien de la formule des probas composées et non de l'indépendance! Les évènements A_i ne sont pas mutuellement indépendants ici. Pour passer le niveau 2 par exemple, il faut déjà avoir passé le niveau 1... On ne peut donc pas dire que la réalisation de A_2 est indépendant de celle de A_1 , puisque $A_2 \subset A_1$. La formule des probas composées permet de garder l'idée que les probabilités sont "multiplicatives", mais fait intervenir des probas conditionnelles.

On obtient ainsi : $\boxed{\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P(Z = k) = p^k(1-p)}$.

Lorsque $k = n$, on a de même, avec la formule des probabilités conditionnelles :

$$P(Z = n) = P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \underbrace{P(A_1)}_{=p} \times \underbrace{P_{A_1}(A_2)}_{=p} \times \dots \times \underbrace{P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)}_{=p}$$

c'est à dire $\boxed{P(Z = n) = p^n}$.

13. Calculons :

$$\sum_{k=0}^n P(Z = k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} p^k (1-p) \right) + p^n = (1-p) \left(\sum_{k=0}^{n-1} p^k \right) + p^n = (1-p) \frac{1-p^n}{1-p} + p^n,$$

donc, en simplifiant : $\boxed{\sum_{k=0}^n P(Z = k) = 1}$ (cohérent).

On aimerait à présent modéliser une situation où les niveaux sont de difficulté croissante.

Dans toute la fin du problème, on fait l'hypothèse (H_2) suivante :

(H_2) : Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, Si le joueur atteint le Niveau k , la probabilité qu'il le termine est $\frac{1}{k}$.

14. En s'inspirant du programme du 11.(b) :

```
import numpy.random as rd
def alea(n) :
    Z = 0
    while (Z < n and rd.random() < 1/(Z+1)) :
        Z = Z + 1
    return Z
```

Le premier test aléatoire est réalisé avec une proba $\frac{1}{1}$, le suivant avec une proba $\frac{1}{2}$, etc...

15. On raisonne de nouveau avec la formule des probabilités totales.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}) \\ &= \underbrace{P(A_1)}_{=\frac{1}{1}} \times \underbrace{P_{A_1}(A_2)}_{=\frac{1}{2}} \times \dots \times \underbrace{P_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k)}_{=\frac{1}{k}} \times \underbrace{P_{A_1 \cap \dots \cap A_k}(\overline{A_{k+1}})}_{=1 - \frac{1}{k+1}} \\ &= \prod_{i=1}^k \frac{1}{i} \times \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{k!} \times \frac{k}{k+1} \end{aligned}$$

et donc : $\boxed{\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P(Z = k) = \frac{k}{(k+1)!}}$ Pour $k = n$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \\ &= \underbrace{P(A_1)}_{=\frac{1}{1}} \times \underbrace{P_{A_1}(A_2)}_{=\frac{1}{2}} \times \dots \times \underbrace{P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)}_{=\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{i} \end{aligned}$$

c'est à dire : $\boxed{P(Z = n) = \frac{1}{n!}}$.

16. (a) Rappelons que $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. Le théorème de transfert donne :

$$\begin{aligned} E(Z+1) &= \sum_{k=0}^n (k+1)P(Z = k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{k}{(k+1)!} \right) + (n+1) \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k!} + \frac{n+1}{n!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k!} + \frac{n}{n!} + \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = S_n. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\boxed{E(Z+1) = S_n}$.

Bien-sûr, ceci se ré-écrit $E(Z) + 1 = S_n$, et donc : $\boxed{E(Z) = S_n - 1}$.

- (b) Supposer que le nombre total de niveaux disponibles est très grand revient à étudier le cas où $n \rightarrow +\infty$. On a vu que $E(Z) = S_n - 1$ et on a établi en Partie I que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e$.

Ainsi, quand le nombre total de niveaux est très grand,

$\boxed{\text{le joueur parvient en moyenne à passer } e - 1 \text{ niveau}}$ (environ 1,7).

17. On suppose $n \geq 3$.

- (a) On utilise de nouveau le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E((Z+1)(Z-1)) &= \sum_{k=0}^n (k+1)(k-1)P(Z=k) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(k-1) \frac{k}{(k+1)!} \right) + (n+1)(n-1) \frac{1}{n!} \\ &= \left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{(k-1)k(k+1)}{(k+1)!} \right) + \frac{n^2-1}{n!} \\ &= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k-2)!} + \frac{n^2-1}{n!} = \sum_{k=1}^{n-3} \frac{1}{k!} + \frac{n^2-1}{n!}. \end{aligned}$$

On a montré : $\boxed{E((Z+1)(Z-1)) = S_{n-3} + \frac{n^2-1}{n!}}$

- (b) Puisque $(Z+1)(Z-1) = Z^2 - 1$, l'égalité précédente donne

$$E(Z^2) - 1 = S_{n-3} + \frac{n^2-1}{n!} \quad \text{donc} \quad E(Z^2) = 1 + S_{n-3} + \frac{n^2-1}{n!}.$$

Pour finir, on peut utiliser la formule de Koenig-Huygens pour calculer la variance :

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$$

c'est à dire : $\boxed{V(Z) = 1 + S_{n-3} + \frac{n^2-1}{n!} - (S_n - 1)^2}$.

- (c) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e$ et bien-sûr $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2-1}{n!} = 0$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(Z) = 1 + e - (e-1)^2 = 1 + e - (e^2 - 2e + 1) = 3e - e^2 = e(3-e).$$

Ainsi, si le nombre total de niveau est très grand, $\boxed{V(Z) \simeq e(3-e)}$.