Variables aléatoires finies

Exercice 1 (Pour s'exercer)

1. On doit avoir $P(X=-2)+P(X=2)+P(X=3)=1$, ce qui donne $2a+\frac{2}{3}=1$ et donc $a=\frac{1}{6}$.
Ainsi, on a $P(X=-2)=\frac{1}{6}, \quad P(X=2)=\frac{1}{2} \quad P(X=3)=\frac{1}{3}$.

2. On calcule $E(X)=-2P(X=-2)+2P(X=2)+3P(X=3)=-\frac{1}{3}+1+1=\frac{5}{3}$.
Ensuite (avec le théorème de transfert) :

$$E(X^2)=(-2)^2P(X=-2)+2^2P(X=2)+3^2P(X=3)=4\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{2}+9\times\frac{1}{3}=\frac{4+12+18}{6}=\frac{17}{3}.$$

Enfin,

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{17}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{51-25}{9}=\frac{26}{9}.$$

3. On a directement $E(2X+1)=2E(X)+1=\frac{10}{3}+1=\frac{13}{3}$ et $V(2X+1)=2^2V(X)=4\times\frac{26}{9}=\frac{104}{9}$.

4. Puisque $X(\Omega)=\{-2,2,3\}$, le support de $Y=X^2$ est $Y(\Omega)=\{4,9\}$. On a :

$$P(Y=4)=P(X^2=4)=P(X=-2)+P(X=2)=\frac{2}{3} \text{ et } P(Y=9)=P(X^2=9)=P(X=3)=\frac{1}{3}.$$

Ainsi, on retrouve :

$$E(X^2)=E(Y)=4P(Y=4)+9P(Y=9)=4\times\frac{2}{3}+9\times\frac{1}{3}=\frac{17}{3}.$$

Exercice 2 (Calcul de sommes)

1. On doit avoir $\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=1$, c'est à dire :

$$C\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=1 \iff C\times 2^n=1 \iff C=\frac{1}{2^n}.$$

2. On peut calculer "à la main" $E(X)$. Ou alors on peut remarquer que

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ P(X=k)=\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

Ainsi, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$! On sait donc que $E(X)=n\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$.
Par ailleurs, avec le théorème de transfert :

$$E\left(2^X\right)=\sum_{k=0}^{n}2^kP(X=k)=\sum_{k=0}^{n}2^k\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k1^{n-k}=\frac{1}{2^n}(2+1)^n=\frac{3^n}{2^n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Exercice 3 (Premier Pile)

1. Le support de X est évidemment $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$.
On a $[X=0]=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$ et pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $[X=k]=\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}\overline{A_i}\right)\cap A_k$.
Puisque les $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont mutuellement indépendants et $\forall i\in[\![1,n]\!],\ P(A_i)=p$, en passant aux probabilités on obtient : $P(X=0)=(1-p)^n$ et $\forall k\in[\![1,n]\!],\ P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$.

2. La probabilité d'obtenir au moins une fois pile est $P(X\neq 0)=1-P(X=0)=1-(1-p)^n=1-\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

Ainsi la condition se ré-écrit :

$$1-\left(\frac{4}{5}\right)^n \geqslant \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \geqslant \left(\frac{4}{5}\right)^n \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant n\ln\left(\frac{4}{5}\right) \Longleftrightarrow \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} \leqslant n \Longleftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(2)}{\ln\left(\dfrac{5}{4}\right)}.$$

Puisque $\dfrac{\ln(2)}{\ln\left(\dfrac{5}{4}\right)} \simeq 3,1$, il faut finalement que $n \geqslant 4$.

3. (a) $E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}p$.

(b) • D'une part, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

• D'autre part, on a $\forall x \neq 1,\ f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

donc $\forall x \neq 1,\ f'(x) = \dfrac{-(n+1)x^n(1-x)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2} = \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$.

Ainsi, on a l'égalité :

$$\forall x \neq 1,\quad \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}.$$

On en déduit finalement (en évaluant en $x = 1-p \neq 1$) :

$$E(X) = p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} = p\frac{n(1-p)^{n+1}-(n+1)(1-p)^n+1}{p^2} = \frac{n(1-p)^{n+1}-(n+1)(1-p)^n+1}{p}.$$

Exercice 4 (Déjà vu)

1. $N(\Omega) = [\![2, 11]\!]$.

2. Pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, $[N > k] =$ "On obtient des numéros tous distincts aux k premiers tirages".

Puisqu'on est en situation d'équiprobabilité, la formule de Cardan donne :

$$P(N>k) = \frac{10\times 9\times 8\times \ldots \times (10-k+1)}{10^k} = \frac{\frac{10!}{(10-k)!}}{10^k} = \frac{10!}{(10-k)!10^k}.$$

3. Pour tout $k \in [\![2, 11]\!]$, on a $[N = k] = [N > k-1] \setminus [N > k]$ donc $P(N = k) = P(N > k-1) - P(N > k)$.
Pour $k \in [\![2, 10]\!]$, ceci donne (avec la formule précédente) :

$$P(N=k) = \frac{10!}{(10-k+1)!10^{k-1}} - \frac{10!}{(10-k)!10^k} = \frac{10\times 10! - (10-k+1)\times 10!}{(10-k+1)!10^k} = \frac{(k-1)10!}{(10-k+1)!10^k}.$$

Pour $k = 11$, on obtient :

$$P(N=11) = P(N>10) - \underbrace{P(N>11)}_{=0} = P(N>10) = \frac{10!}{10^{10}}.$$

On peut constater que ceci correspond également à la formule trouvée dans le cas $k \in [\![2, 10]\!]$! Finalement :

$$\forall k \in [\![2,11]\!],\quad P(N=k) = \frac{(k-1)10!}{(10-k+1)!10^k}.$$

Exercice 5 ("Uniformément uniforme")

1. L'urne n°j contient j boules numérotées de 1 à j. Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$P_{U_j}(X=k) = P(\text{"Tirer la boule } k \text{ dans l'urne } j\text{"}) = \begin{cases} \dfrac{1}{j} \text{ si } k \leqslant j \\ 0 \text{ si } k > j. \end{cases}$$

2. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$

(l'évènement U_j correspondant à "Choisir l'urne n°j") :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X=k) = \sum_{j=1}^{n} P(U_j \cap [X=k]) = \sum_{j=1}^{n} P(U_j)P_{U_j}(X=k) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} P_{U_j}(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P_{U_j}(X=k).$$

Avec les probabilités conditionnelles trouvées en 1. : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X=k) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}$.

3. On calcule :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n}\left(\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{k}{j} = \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant n}\frac{k}{j}.$$

Cette double somme peut se réécrire :

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{k}{j} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j}k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}(j+1) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{j=1}^{n}j + \sum_{j=1}^{n}1\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right)$$

soit $E(X) = \dfrac{n+3}{4}$.

Exercice 6 (Urnes d'Ehrenfest)

1. On a évidemment $X_0 = N$ (ou encore, si on préfère $P(X_0 = N) = 1$).
De même, on a $X_1 = N-1$ (ou encore $P(X_1 = N-1) = 1$).

2. (a) La probabilité conditionnelle $P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k+1)$ correspond, sachant qu'il y a k boules dans l'urne A, à choisir une boule dans l'urne B pour la déplacer. Ceci se fait en effet avec probabilité $\dfrac{N-k}{N}$.
La probabilité conditionnelle $P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k-1)$ correspond, sachant qu'il y a k boules dans l'urne A, à choisir une boule dans l'urne A pour la déplacer. Ceci se fait en effet avec probabilité $\dfrac{k}{N}$.

2.(b) Si l'urne A ne contient aucune boule à l'instant n, alors on déplace forcément une boule de l'urne B vers l'urne A : ceci donne $P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=1)=1$ et $P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=-1)=0$.
Si l'urne A contient toutes les boules à l'instant n, alors on déplace forcément une boule de l'urne A vers l'urne B : ceci donne $P_{[X_n=N]}(X_{n+1}=N+1)=0$ et $P_{[X_n=N]}(X_{n+1}=N-1)=1$.

2.(c) Entre l'instant n et $n+1$, le nombre de boules dans l'urne A ne peut qu'augmenter ou diminuer de 1 !
Ainsi $P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=j)=0$ pour $j \notin \{k-1,k+1\}$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $k\in[\![0,N]\!]$.
D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $([X_n=j])_{0\leqslant j\leqslant N}$:

$$P(X_{n+1}=k) = \sum_{j=0}^{n} P([X_n=j]\cap[X_{n+1}=k]) = \sum_{j=0}^{n} P(X_n=j)\underbrace{P_{[X_n=j]}(X_{n+1}=k)}_{=0 \text{ si } j\notin\{k-1,k+1\}}$$

Ainsi, seuls les termes $j=k-1$ et $j=k+1$ de la somme sont conservés :

$$P(X_{n+1}=k) = P(X_n=k-1)P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k) + P(X_n=k+1)P_{[X_n=k+1]}(X_{n+1}=k).$$

En remplaçant avec les formules du 2.(a) :

$$P(X_{n+1}=k) = P(X_n=k-1)\frac{N-(k-1)}{N} + P(X_n=k+1)\frac{k+1}{N}.$$

d'où finalement

$$P(X_{n+1}=k) = \frac{N-k+1}{N}P(X_n=k-1) + \frac{k+1}{N}P(X_n=k+1).$$

4. (a) On calcule l'espérance :

$$\begin{aligned}E(X_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{N} kP(X_{n+1}=k) = \sum_{k=0}^{N} k\left(\frac{N-k+1}{N}P(X_n=k-1) + \frac{k+1}{N}P(X_n=k+1)\right)\\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} k(N-k+1)P(X_n=k-1) + \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} k(k+1)P(X_n=k+1).\end{aligned}$$

On pose le changement d'indice $j = k - 1$ dans la première somme et $j = k + 1$ dans la deuxième :

$$E(X_{n+1}) = \frac{1}{N}\sum_{j=-1}^{N-1}(j+1)(N-j)P(X_n = j) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N+1}(j-1)jP(X_n = j)$$

Dans le première somme : le terme est nul lorsque $j = -1$ et lorsque $j = N$.
Dans le deuxième somme : le terme est nul lorsque $j = 0$ et lorsque $j = N + 1$. Cela revient donc à :

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}) &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N}(j+1)(N-j)P(X_n = j) + \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N}(j-1)jP(X_n = j)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N}\Big((j+1)(N-j) + (j-1)j\Big)P(X_n = j)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N}\Big((N-2)j + N\Big)P(X_n = j) \quad \text{après développement et simplification.}
\end{aligned}$$

4. (b) Ainsi,

$$E(X_{n+1}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\Big((N-2)k + N\Big)P(X_n = k) = \frac{N-2}{N}\underbrace{\sum_{k=0}^{N}kP(X_n = k)}_{=E(X_n)} + \frac{N}{N}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}P(X_n = k)}_{=1}$$

donc $E(X_{n+1}) = \dfrac{N-2}{N}E(X_n) + 1 = \left(1 - \dfrac{2}{N}\right)E(X_n) + 1$.

5. Cette relation est celle d'une suite arithmético géométrique : en posant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = E(X_n)$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \left(1 - \frac{2}{N}\right)u_n + 1.$$

Classiquement, on introduit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = (1 - \frac{2}{N})\alpha + 1$ c'est à dire $\alpha = \dfrac{N}{2}$.
En posant $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \alpha$, on sait que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\left(1 - \dfrac{2}{N}\right)$.
On aura ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0\left(1 - \dfrac{2}{N}\right)^n = (u_0 - \alpha)\left(1 - \dfrac{2}{N}\right)^n = (N - \frac{N}{2})\left(1 - \dfrac{2}{N}\right)^n = \frac{N}{2}\left(1 - \dfrac{2}{N}\right)^n$.
Pour finir, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E(X_n) = u_n = v_n + \alpha = \frac{N}{2}\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n + \frac{N}{2}$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_n) = \frac{N}{2}\left(1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n\right).$$

Puisque $N > 2$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = \frac{N}{2}$.
Interprétation : au bout d'un temps très long, le nombre moyen de boules dans l'urne A est environ $N/2$.
Logique car on comprend que les boules ont tendance à se répartir uniformément entre les deux urnes au cours du temps ! Au bout d'un temps long, environ la moitié des boules se situent dans l'urne A, et l'autre moitié dans l'urne B.

Exercice 7 (Reconnaître une loi)

(a) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(8, \frac{4}{12})$ c'est à dire $X \hookrightarrow \mathcal{B}(8, \frac{1}{3})$.
(b) Puisque le support de X est $\{0, 1\}$, c'est forcément une loi de Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, où p est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge. Après calcul, on trouve facilement $p = 1 - (\frac{2}{3})^8$.
(c) $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 5]\!])$.
(d) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10, \frac{1}{3})$.
(e) Ce dernier exemple est un peu moins évident... D'abord, il est clair que $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
En notant $\forall i \in [\![1, n]\!],\ A_i =$ "Obtenir le jeton 1 au i-ème tirage", on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k).$$