TP # 16

Calcul approché d'intégrales

Rappels sur les sommes de Riemann

Si $[a,b]$ est un segment et $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, alors en définissant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)}{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \quad \text{on sait que :} \quad S_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)dt.$$

Exercice 1

On suppose qu'une fonction numérique `f` est définie en Python.
Définir une fonction `riemann` qui prend en entrée deux réels a, b et un entier n et renvoie la valeur de la somme $S_n(f)$.

Calcul approché d'intégrales : "Méthode des rectangles"

Exercice 2

On cherche à approcher, à l'aide de Python, la valeur de $I = \displaystyle\int_0^2 (3t^2+t)dt$.

1. Quelle est la valeur exacte de cette intégrale ?

$I = \displaystyle\int_0^2 (3t^2+t)dt =$ ....

2. Juste avant la fonction `riemann`, définir en Python la fonction `f` : $x \mapsto 3x^2 + x$

4. A l'aide de la fonction `riemann` de l'Exercice 1, calculer des valeurs approchées de l'intégrale I. Constater la convergence à mesure que n augmente.

$S_{10}(f) \simeq$ .... $S_{100}(f) \simeq$ ....

$S_{1000}(f) \simeq$ .... $S_{10000}(f) \simeq$ ....

5. Compléter le programme suivant (à rédiger à la suite) pour qu'il affiche les 100 premiers termes de la suite $(S_n(f))_{n\geqslant 1}$. Constater la convergence sur le graphe.

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt

X =

Y = np.zeros(100)

for k in range(100) :

    Y[k] = ..................

plt.plot(X,Y); plt.show()
```

Exercice 3

1. En modifiant simplement la définition `f` dans le programme précédent, calculer des valeurs approchées de l'intégrale suivante et conjecturer sa valeur :

$$\text{On prévoit que} \quad \int_0^{2\pi} \cos(t)^2 dt = \text{.............}$$

2. En admettant que l'on peut donner un sens à $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-t^2}dt$, conjecturer, à l'aide de valeurs approchées, la jolie formule suivante :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad \text{(Intégrale de Gauss)}$$

On pourra par exemple calculer des valeurs approchées de $\displaystyle\int_0^{100} e^{-t^2}dt$...

Bonus : Démontrer par le calcul l'égalité du 1. (Astuce : relier $\cos(t)^2$ et $\cos(2t)$...)