27

Dérivées successives, formules de Taylor et DL

Dérivées successives

Exercice 1 (Calcul de dérivées)
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, justifier qu'elles y sont de classe C^∞, et calculer leur dérivée n-ème pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$
2. $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ *(On l'écrira $g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$)*
3. $h(x) = (2x^2 - x + 3)e^x$

Exercice 2 (Forme générale de $f^{(n)}$)
Pour $x \neq 0$, on pose $f(x) = e^{-1/x^2}$.

Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}.$$

Exercice 3 (Théorème de Rolle "itéré")
Soit $f \in D^n([a,b], \mathbb{R})$ s'annulant $n+1$ fois sur $[a,b]$.
1. Faire un dessin.
2. Montrer que f' s'annule au moins n fois sur $[a,b]$
3. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Formules de Taylor

Exercice 4 (Encadré par des polynômes)
Montrer les encadrements suivants :
1. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1 - x \leqslant e^{-x} \leqslant 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

Exercice 5 (Des inégalités !)
Montrer les inégalités suivantes :
1. $\forall x \in [0,1],\ |e^x - 1 - x| \leqslant e \times \dfrac{x^2}{2}$.
2. $\forall x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}],\ |\tan(x) - x| \leqslant \dfrac{8}{3}|x|^3$.
3. Pour tous $x, y \geqslant 1$,

$$\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} + \frac{y-x}{x^2} - \frac{(y-x)^2}{x^3} \right| \leqslant |y-x|^3$$

Exercice 6 (Une somme infinie célèbre)
1. Calculer les dérivées successives de $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

Exercice 7 (Expression "explicite" de $\cos(x)$)
1. Calculer $\cos^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
$\displaystyle\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
3. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$.

Exercice 8 (Démonstration de Taylor-Young)
Soit $[\alpha, \beta]$ un segment contenant un réel a.
Soit $f \in C^\infty([\alpha,\beta], \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$.
On souhaite démontrer la formule de Taylor-Young :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} P_n(x) + o((x-a)^n).$$

où $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.
1. Justifier qu'il existe $K > 0$ tel que

$$\forall x \in [\alpha, \beta],\ \left| f(x) - P_n(x) \right| \leqslant K \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. En déduire que $f(x) - P_n(x) \underset{x \to a}{=} o\left((x-a)^n\right)$.

Développements limités

Exercice 9 (Calcul de DL)
(a) DL_3 en 0 de $\cos(x) - \sqrt{1+x}$
(b) DL_4 en 0 de $e^x \sin(x)$
(c) DL_2 en 0 de $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$
(d) DL_3 en 0 de $\dfrac{e^x - 1}{x}$
(e) DL_2 en 0 de $\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2x}$
(f) DL_3 en 0 de $\sin(3x)$
(g) DL_8 en 0 de $\ln(1-x^3)$

Exercice 10 (Se ramener à zéro)
1. DL_2 en 2 de $\dfrac{3}{x}$ 2. DL_3 en 1 de $\dfrac{\ln(x)}{x}$.

Exercice 11 (Changement de variable corsé)

1. Rappeler les développements limités à l'ordre 3 en 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$ et de $x \mapsto \sin(x)$.

2. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ln(1+\sin(x))$.

(Noter que $\sin(x)^3 \sim x^3$ et donc $o(\sin(x)^3) = o(x^3)$).

Exercice 12 (Pour une fois...)

À l'aide la formule de Taylor-Young, déterminer DL_2 en 0 de $\ln(1+e^x)$.

Exercice 13 (DL de tan malin !)

1. Justifier que le développement limité à l'ordre 5 de tan est de la forme :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5).$$

2. À l'aide de la formule de Taylor-Young, montrer que le développement limité à l'ordre 4 de $\tan'$ est :

$$\tan'(x) \underset{x\to 0}{=} a + 3bx^2 + 5cx^4 + o(x^4).$$

3. Quelle relation lie $\tan'$ et tan ?
En identifiant les coefficients, obtenir les valeurs :

$$a = 1, \quad b = \tfrac{1}{3} \quad \text{et} \quad c = \tfrac{2}{15}.$$

Exercice 14 (Calcul de limites)

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{(1+x)^{1/3} - 1}$. 2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - e^x}{e^x + e^{-x} - 2}$.

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big(n + n^2\big(\ln(n) - \ln(n+1)\big)\Big)$

4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{\sin(\frac{1}{n})} - \frac{n}{\tan(\frac{1}{n})}\right)$.

(utiliser le DL_3 de tan de l'exercice précédent)

Exercice 15 (Calcul d'équivalents)

1. Déterminer un équivalent simple de $\sqrt{1+2x} - \cos x - \sin x$ au voisinage de 0.

2. Déterminer un équivalent simple de $e^{1/x} - \dfrac{x(x-1)}{1+x^2}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 16 ("DL en $+\infty$")

1. On pose $\forall x > 0,\ f(x) = (x+1)e^{1/x}$.
Montrer que, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + 2 + \dfrac{3}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2. On pose $\forall x > 0,\ g(x) = \sqrt{x^4 + x^3}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Trouver a, b, c tels que $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax + b + \dfrac{c}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 17 (DL et position de la tangente)

On pose $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x^2}} - \cos(x)$.

1. Déterminer le DL_3 de f en 0.

2. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0, ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 18 (DL et dérivabilité)

On pose $f(0) = 1$ et $\forall x > 0, f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

2. À l'aide d'un DL,
montrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

3. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Oral ESCP 2011

Une fonction $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ est dite *absolument monotone* sur I lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

1. (a) Vérifier que la fonction $h : x \mapsto -\ln(1-x)$ est absolument monotone sur $]0,1[$.
   (b) Donner des exemples de fonctions absolument monotones sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction absolument monotones sur $[0,1[$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\ R_n(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$

2. (a) Pour $x \in [0,1[$, exprimer $R_n(x)$ sous forme d'une intégrale, et déterminer son signe.
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0,1[$, la série $\displaystyle\sum_k \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \leqslant f(x)$.

Étude classique de $u_{n+1} = \sin(u_n)$

On pose $u_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$. $\left(\text{On admettra que } \displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \ell.\right)$

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. 2. À l'aide d'un DL, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\tfrac{1}{u_{n+1}^2} - \tfrac{1}{u_n^2}\right) = \tfrac{1}{3}$.

3. En utilisant le résultat admis, montrer l'équivalent : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.