1

Logique, symboles, raisonnement mathématique

Logique et quantificateurs

Exercice 1 (Traduction)
Traduire les affirmations et leurs négations avec des quantificateurs :

1. Il existe $x \geqslant 0$ tel que $f(x) > -5x+2$.
2. f s'annule au moins une fois sur $[0,1]$.
3. f est constante sur $[0,1]$.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4.
6. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Exercice 2 ("Inversion" de quantificateurs)
1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Relier les quantificateurs aux phrases correspondantes :

$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$. •	• Toujours vrai
$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$. •	• Jamais vrai
$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$. •	• Vrai pour certaines fonctions
$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$. •	• Signifie que f est constante

2. Comparer : $\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x \leqslant k$
avec $\forall x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{R},\ e^x \leqslant k$

Exercice 3 (Implications)
Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Indiquer si on a $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ ou $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ (ou aucun des trois).

1. $\mathcal{A}$: "$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$" $\qquad \mathcal{B}$: "$x = \dfrac{\pi}{4}$"
2. $\mathcal{A}$: "$2\ln(x) \geqslant \ln(x+1)$" $\qquad \mathcal{B}$: "$x^2 \geqslant x+1$"
3. $\mathcal{A}$: "$x > \dfrac{1}{2}$" $\qquad \mathcal{B}$: "$\dfrac{1}{x} < 2$"
4. $\mathcal{A}$: "$x+y>0$" $\qquad \mathcal{B}$: "$x>0$ et $y>0$"
5. $\mathcal{A}$: "$x+y>0$" $\qquad \mathcal{B}$: "$x>0$ ou $y>0$"
6. $\mathcal{A}$: "$x=0$" $\qquad \mathcal{B}$: "$\exists a > 0,\ |x| \leqslant a$"
7. $\mathcal{A}$: "$x=0$" $\qquad \mathcal{B}$: "$\forall a > 0,\ |x| \leqslant a$"

Exercice 4 (Quelques équivalences)
1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence :
$(x+y)^2 = (x-y)^2 \iff (x = 0 \text{ ou } y = 0)$.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et P le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = ax^2+bx+c$.

Démontrer l'équivalence :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0) \iff a = b = c = 0.$$

3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$P(x) = ax^2+bx+c, \quad Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
Démontrer l'équivalence :
$(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = Q(x)) \iff (a = \alpha \text{ et } b = \beta \text{ et } c = \gamma)$.
On pourra utiliser la question 2.

Récurrences

Exercice 5 (Une suite récurrente)
On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant $v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = 2v_n + \dfrac{1}{v_n}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n est bien défini et $v_n > 0$.

Exercice 6 (Une décomposition)
Montrer :
$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2, (3+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

Exercice 7 (Divisibilité par 3)
On rappelle qu'un entier a est divisible par 3 si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 3k$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Exercice 8 (Une suite à récurrence linéaire double)
On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \geqslant 2,\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$.
1. Calculer les premiers termes de la suite puis conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.
2. Démontrer rigoureusement cette conjecture.

Exercice 9 (Une suite particulière)
On définit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant $w_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_{n+1} = \frac{(w_1)^2+(w_2)^2+\ldots+(w_n)^2}{n}$.
Calculer les premiers termes de cette suite, émettre une conjecture, puis la démontrer rigoureusement.

Ensembles

Exercice 10 (Valide ou non ?)

Soient $E = \{a, b, c\}$, $F = \{c, d\}$ et $G = \{e\}$.
Peut-on écrire les choses suivantes ? Si non, que faudrait-il écrire à la place ?

1. $a \subset E$ 2. $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$
3. $E \cap F = c$ 4. $E \cap F = \{\emptyset\}$

Exercice 11 (Traduction ensembliste 1)

Écrire les ensembles suivants sous forme implicite, puis sous forme explicite :

1. Ensemble des entiers divisibles par 3
2. Ensemble des réels positifs dont le carré est un entier
3. Ensemble des couples de réels dont la somme vaut 1

Exercice 12 (Traduction ensembliste 2)

On donne les notations suivantes :
• L'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est noté : $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Exemple : $\cos \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
• L'ensemble de toutes les suites à valeurs réelles est noté : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Exemple : En posant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$, on définit une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
(On note parfois $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ également).

Ecrire mathématiquement les ensembles suivants :
(a) Ensemble des fonctions s'annulant en 0.
(b) Ensemble des fonctions affines.
(c) Ensemble des polynômes de degré 2.
(d) Ensemble des polynômes (de degré quelconque).
(e) Ensemble des suites constantes.
(f) Ensemble des suites décroissantes.

Exercice 13 (Ensembles et logique)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Traduire les inégalités suivantes en terme d'appartenance à une partie de $\mathbb{R}$.

a) $(x \leqslant 2$ et $x \geqslant -1)$ ou $x > 3$
b) $x > 4$ et $(x \leqslant 6$ ou $x \geqslant 2)$

Exercice 14 (Réunion de n ensembles)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ avec :
a) $\forall i \in [\![1, n]\!],\ A_i = [0, i]$
b) $\forall i \in [\![1, n]\!],\ A_i = [i, i+1[$.
c) $\forall i \in [\![1, n]\!],\ A_i =]\frac{1}{i}, i]$

Exercice 15 (Différence symétrique)

Soient A, B deux parties de E.
On pose $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

1. Faire un dessin.
2. Déterminer $A\Delta A, A\Delta E$ et $A\Delta\emptyset$.
3. (a) Montrer : $A\Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$.
(b) Déduire de (a) que $A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$.
(c) Déduire de (a) que $\overline{A\Delta B} = \overline{A}\Delta B$.
4. Montrer que $A\Delta B = \emptyset \iff A = B$.