Sommes et produits

Applications et calculs directs

Exercice 1 (Traduction)

Écrire avec les symboles \sum ou \prod :

- $S_1 = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^n$
- $S_2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2$.
- $S_3 = \ln(2) \times \ln(4) \times \ln(6) \times \ldots \times \ln(2n)$.
- $S_4 = (-1) \times 2 \times (-3) \times 4 \times ... \times (-49) \times 50.$
- $S_5 = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{!}$.
- $S_6 = 1 \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} \frac{x^5}{6} + \frac{x^6}{7}$.

Exercice 2 (Factorielles)

- 1. Écrire à l'aide de factorielles :
- a) $\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$
- b) $6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$.
- 2. Soit $n \ge 4$. Simplifier :.

- a) $\frac{n!}{(n-2)!}$ b) $\frac{(n-1)!}{(n-4)!}$ c) $\frac{(n^2-1)n!}{n-1}$
- 3. Soient $m \leq n$ deux entiers.

Écrire à l'aide de factorielle le produit :

 $m \times (m+1) \times (m+2) \times ... \times n$.

Exercice 3 (Calcul de sommes)

Calculer les sommes suivantes (où $n \ge 1$):

- $\sum_{i=0}^{n} (2i + n + 3)$ $\sum_{k=1}^{n+1} n^3$ $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2$ $\sum_{p=1}^{n} p(p-1)$ $\sum_{k=n+1}^{2n} k$ $\sum_{i=1}^{n} (n+i)^2$
- $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{3^{k-2}}$ $\sum_{k=1}^{n} (-3)^{n-k}$ $\sum_{k=2}^{2n} \frac{5^k 2^{2k}}{2^k}$.

Exercice 4 (Calcul de produits)

Calculer les produits suivants $(n \ge 2)$:

- $\prod_{p=1}^{n} (p+1)^3$ $\prod_{k=i}^{n} 2^i$ $\prod_{p=1}^{n} \frac{2}{p^2}$ $\prod_{k=1}^{n} \left(1 \frac{1}{k}\right)$ $\prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)$

Exercice 5 (Exponentielle et logarithme)

- 1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

- 2. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :
- $\bullet \sum_{k=1}^{n} \ln(kx)$
- $\bullet \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(x))^k$
- $\prod_{k=1}^{n} \ln(x^k)$

Exercices classiques

Exercice 6 (Décomposition astucieuse)

1. Déterminer des constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

2. En déduire l'expression de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 7 (Somme des carrés)

Calculer $S = \sum_{k=0}^{n} ((k+1)^3 - k^3).$

En ré-exprimant S, retrouver la formule donnant $\sum_{i=1}^{n} k^2$ à partir de celle donnant $\sum_{i=1}^{n} k$.

Exercice 8 (Sommes avec parité)

On pose: $S_n = \sum_{k=1}^n k$ et $T_n = \sum_{k=1 \text{ impair}}^n k$.

Que vaut $S_n + T_n$? Calculer S_n et T_n .

On pourra distinguer les cas n pair (n = 2p)et n impair (n = 2p + 1).

Exercice 9 (Produits avec parité)

On pose : $P_n = \prod_{\substack{k=1 \ \text{pair}}}^n k$ et $Q_n = \prod_{\substack{k=1 \ k \text{ impair}}}^n k$.

Que vaut $P_n \times Q_n$? Calculer P_n et Q_n .

On pourra distinguer les cas n pair (n = 2p)et n impair (n = 2p + 1).

Exercice 10 (Dérivation)

Calculer de deux manières différentes la dérivée de la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

En déduire, pour $x \neq 1$, la valeur de $\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$.

Exercice 11 (Télescopage)

Soit $n \ge 2$. Calculer les sommes suivantes :

•
$$\sum_{k=1}^{n} \ln \left(\frac{k}{k+1} \right)$$

•
$$\sum_{k=1}^{n} \ln \left(\frac{k}{k+1} \right)$$
 • $\sum_{k=2}^{n} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$

$$\bullet \sum_{k=1}^{n-1} k \times k!$$

$$\bullet \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!}$$

Exercice 12 (Décomposition astucieuse II)

1. Déterminer des constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\},\$

$$\frac{2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

2. En déduire l'expression de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}.$$

Sommes doubles

Exercice 13 (Libres)

Calculer les sommes doubles suivantes :

a)
$$\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le i \le n}} 2^{2i}$$

$$b) \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant p}} 2$$

a)
$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} 2^{2i-j}$$
 b)
$$\sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant p}} 2$$
 c)
$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$$

Exercice 14 (Avec contraintes)

Calculer les sommes doubles suivantes :

$$a) \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} 1$$

b)
$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^3}{j^2}$$

a)
$$\sum_{0 \le i < j \le n} 1$$
 b) $\sum_{1 \le i \le j \le n} \frac{i^3}{j^2}$ c) $\sum_{0 \le i < j \le n} (i+j)$

Exercice 15 (En distinguant des cas)

Calculer les sommes doubles suivantes :

a)
$$\sum_{1 \le i, j \le n} \min(i, j)$$

a)
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$$
 b)
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$$

c)
$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n}^{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j|$$

Exercice 16 (Somme et carré)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Justifier que :
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j \ge 0.$$