4

Nombres réels, fonctions numériques

Exercice 1 (Calculs de $\sup$ **et** $\inf$**)**

• $A =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. On a donc $\inf(A) = -\sqrt{2}$ et $\sup(A) = \sqrt{2}$. Pas de minimum ni de maximum

• On a $0 \in B$ et 0 est un minorant de B. Ainsi $\min(B) = \inf(B) = 0$.
Il est "clair" que $\sup(B) = 1$. Ce n'est pas un maximum.

• Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = xe^{-x}$. Après étude rapide de cette fonction, on obtient $C = f(\mathbb{R}_+^*) =]0, e^{-1}]$.
On a donc $\inf(C) = 0$ (pas de minimum) et $\max(C) = \sup(C) = e^{-1}$.

• Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on a

$$(x+y)^2 \geqslant 0 \iff x^2 + y^2 + 2xy \geqslant 0 \iff 2xy \geqslant -x^2 - y^2 \iff \frac{2xy}{x^2 + y^2} \geqslant -1.$$

Ceci montre que D est minoré par -1. De plus $-1 \in D$ puisqu'on peut écrire par exemple $-1 = \dfrac{2 \times 1 \times (-1)}{1^2 + (-1)^2}$.
On a donc $\min(D) = -1 = \inf(D)$. De la même façon, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on a :

$$(x-y)^2 \geqslant 0 \iff x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0 \iff x^2 + y^2 \geqslant 2xy \iff 1 \geqslant \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Ceci montre que D est majoré par 1. De plus $1 \in D$ puisqu'on peut écrire par exemple $1 = \dfrac{2 \times 1 \times 1}{1^2 + 1^2}$.
On a donc $\max(D) = 1 = \sup(D)$.

Exercice 2 (Exercice d'abstraction)

Montrons d'abord que A est majoré. Soit $y \in B$ fixé (existe puisque $B \neq \emptyset$). On sait que $\forall x \in A,\ x \leqslant y$.
Ceci montre que <u>A est majoré</u> par y.

Puisque A est non-vide est majoré, on peut introduire sa borne supérieure $\sup(A)$.
Puisque $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A et que y est un majorant de A, on a $\sup(A) \leqslant y$.

Ce raisonnement est valable quel que soit $y \in B$. On obtient donc aussi $\forall y \in B,\ \sup(A) \leqslant y$.
Ceci montre que <u>B est minoré</u> par $\sup(A)$.

Puisque B est non-vide est minoré, on peut introduire sa borne inférieure $\inf(B)$.
Puisque $\inf(B)$ est le plus grand des minorants de B et que $\sup(A)$ est un minorant de B, on a <u>$\sup(A) \leqslant \inf(B)$</u>.

Exercice 3 (Disjonctions de cas)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|4x+2| = \begin{cases} -(4x+2) \text{ si } x \leqslant -\frac{1}{2} \\ 4x+2 \text{ si } x \geqslant -\frac{1}{2} \end{cases}$ et $|2-5x| = \begin{cases} 2-5x \text{ si } x \leqslant \frac{2}{5} \\ -(2-5x) \text{ si } x \geqslant \frac{2}{5}. \end{cases}$

Ainsi :

• Si $x \leqslant -\dfrac{1}{2}$, $\quad |4x+2| - |2-5x| = -(4x+2) - (2-5x) = x - 4$,

• Si $-\dfrac{1}{2} < x \leqslant \dfrac{2}{5}$, $\quad |4x+2| - |2-5x| = 4x + 2 - (2-5x) = 9x$,

• Si $x > \dfrac{2}{5}$, $\quad |4x+2| - |2-5x| = 4x + 2 + 2 - 5x = -x + 4$.

Exercice 4 ((In)équations)

(a) $|x-3| \geqslant 4 \iff (x-3 \leqslant -4)$ ou $(x-3 \geqslant 4) \iff x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 7$.

(b) $|x^2 - 1| \leqslant 3 \iff -3 \leqslant x^2 - 1 \leqslant 3 \iff -2 \leqslant x^2 \leqslant 4 \iff x^2 \leqslant 4 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|2x-4| = \begin{cases} -2x+4 \text{ si } x \leqslant 2 \\ 2x-4 \text{ si } x \geqslant 2 \end{cases}$ et $|x+3| = \begin{cases} -x-3 \text{ si } x \leqslant -3 \\ x+3 \text{ si } x \geqslant -3. \end{cases}$

Ainsi :

$$|2x-4| = |x+3| \iff \begin{cases} x \leqslant -3 & \text{et} & -2x+4 = -x-3 \\ -3 < x \leqslant 2 & \text{et} & -2x+4 = x+3 \\ x > 2 & \text{et} & 2x-4 = x+3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leqslant -3 & \text{et} & x = 7 \\ -3 < x \leqslant 2 & \text{et} & x = \frac{1}{3} \\ x > 2 & \text{et} & x = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \text{ou} \\ x = 7. \end{cases}$$

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\quad |\dfrac{1}{x} - 3| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant \dfrac{1}{x} - 3 \leqslant 2 \iff 1 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 5 \iff \dfrac{1}{5} \leqslant x \leqslant 1.$

Exercice 5 (Partie entière)

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

- On sait que $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ et $\lfloor y \rfloor \leqslant y$ donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y$.

Ainsi $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à $x + y$.
Puisque $\lfloor x + y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $x + y$, on en déduit : $\quad \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor$.

- On sait que $\lfloor x + y \rfloor \leqslant x + y$ avec $x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $y < \lfloor y \rfloor + 1$.

On a donc $\lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$. Puisqu'il s'agit d'entiers, cela revient à dire $\lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

Ainsi on a montré que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Puisqu'il s'agit d'entiers, cet encadrement montre que l'on a toujours $\lfloor x + y \rfloor = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \\ \text{ou bien} \\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1. \end{cases}$

<u>Exemples :</u> Pour $x = 1$ et $y = 1$, on a $\lfloor x + y \rfloor = 2 = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
Pour $x = 1.5$ et $y = 2.5$, on a $\lfloor x + y \rfloor = 4 = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.
Par définition, $\lfloor x + n \rfloor$ est l'unique entier $N \in \mathbb{Z}$ satisfaisant l'encadrement $N \leqslant x + n < N + 1$.
Or on a $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $\lfloor x \rfloor + n \leqslant x + n < (\lfloor x \rfloor + n) + 1$.
Ainsi, l'entier $N = \lfloor x \rfloor + n \in \mathbb{Z}$ satisfait l'encadrement précédent, c'est donc que $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor kx \rfloor = n \iff n \leqslant kx < n + 1 \iff \frac{n}{k} \leqslant x < \frac{n+1}{k}.$$

Exercice 6 (Fonctions "quasi-usuelles")

Dessins faciles.
On pourra retenir que la transformation $x \mapsto f(x) + a$ correspond à translater le graphe de f "de a vers le haut" et que la transformation $x \mapsto f(x + a)$ correspond à translater le graphe de f "de a vers la gauche".

Exercice 7 (Étude "sans dériver")

(a) • Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
- Pas de parité, pas de périodicité.
- Tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert\ 0$	$\searrow$	$-\infty\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	0

- Fonction non bornée.

(b) • Domaine de définition : $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- g est $\dfrac{\pi}{2}$ périodique $\Big(\ \forall x \in D_g,\ \ g(x + \frac{\pi}{2}) = \tan(2(x + \frac{\pi}{2})) = \tan(2x + \pi) = \tan(2x) = g(x) \ \Big)$.
- Tableau de variations sur $] - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$:

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$
$g(x)$	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$+\infty\ \Vert$

- Fonction non bornée.

(c) • Domaine de définition : $D_h = \mathbb{R}$.
• h est clairement paire.
• Tableau de variations : h est clairement croissante sur $\mathbb{R}_+$, le reste est rempli "par symétrie".

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$\frac{\pi}{2}$ $\searrow$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$ $\frac{\pi}{2}$

• Fonction bornée. Minimum atteint en 0 : $\min(h) = -\dfrac{\pi}{4}$. Pas de maximum, mais $\sup(h) = \dfrac{\pi}{2}$.

(d) • Domaine de définition : $D_u = \mathbb{R}_+^*$.
• Pas de parité, pas de périodicité.
• Tableau de variations : les fonctions $x \mapsto x^{-1/4}$ et $x \mapsto -4x^{1/4}$ sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$.
Il en va donc de même pour leur somme.

x	0	$+\infty$
$u(x)$	$\|$ $+\infty$ $\searrow$	0

• Fonction non majorée. Pas de minimum, mais $\inf(u) = 0$.

(e) La fonction ln étant strictement croissante, le sens de variation de v est le même que le sens de variation de $f : x \mapsto -x^2 + 4x - 3$. Etudions rapidement cette fonction polynomiale.

$\Delta = 4^2 - 4 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$. On a donc deux racines : $\quad x_1 = \dfrac{-4-2}{-2} = 3 \quad$ et $\quad x_2 = \dfrac{-4+2}{-2} = 1$.

Le "sommet" de la parabole est au milieu des racines : point d'abscisse $x = \dfrac{3+1}{2} = 2$.

f admet ainsi le tableau de variations suivant sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	1 $\searrow$	0 $\searrow$	$-\infty$

Par suite, on a le domaine de définition de la fonction v : $\quad D_v = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} =]1, 3[$.
Et pour finir, le tableau de variations de $v : x \mapsto \ln(f(x))$ sur $]1, 3[$:

x	1	2	3
$v(x)$	$\|$ $-\infty$ $\nearrow$	0 $\searrow$	$-\infty$ $\|$

Exercice 8 ((In)équations)

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad 2 \leqslant \lfloor 2x+1 \rfloor \leqslant 4 \iff 2 \leqslant 2x+1 < 5 \iff 1 \leqslant 2x < 4 \iff \dfrac{1}{2} \leqslant x < 2$.

(b) L'équation n'a de sens que pour $x > 0$. Pour tout $x > 0$,

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \iff \exp(\sqrt{x}\ln(x)) = \exp(x\ln(\sqrt{x})) \iff \sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x}) \iff \sqrt{x}\ln(x) = \frac{1}{2}x\ln(x).$$

On voit que $x = 1$ est une solution de l'équation.

En supposant à présent $x \neq 1$, on a $\ln(x) \neq 0$ et on peut poursuivre les équivalences :

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \iff \sqrt{x} = \frac{x}{2} \iff 1 = \frac{\sqrt{x}}{2} \iff \sqrt{x} = 2 \iff x = 4.$$

Les deux solutions sont donc $x = 1$ ou $x = 4$.

(c) Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on sait que $\tan(x) > 1 \iff x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.
Par π-périodicité de tan, l'ensemble de toutes les solutions est : $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque 1, $\arctan(x)$ et $\frac{\pi}{3}$ appartiennent à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ où la fonction tan est strictement croissante, on a :

$$1 < \arctan(x) < \frac{\pi}{3} \iff \tan(1) < x < \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff \tan(1) < x < \sqrt{3}.$$

Attention, $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, mais $\tan(1)$ n'est pas une valeur connue ! On a $\tan(1) \simeq 1,557...$

Exercice 9 ("Exposant variable")

1. Il faut penser à écrire : $\forall x \in I,\ f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}$.
Ceci a bien un sens puisque par hypothèse : $\forall x \in I,\ u(x) > 0$.
En admettant que tout est dérivable, on obtient :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = \Big(v'(x)\ln(u(x)) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\Big)e^{v(x)\ln(u(x))}.$$

2. Posons $f(x) = (1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$.
Ceci est bien défini lorsque $1 + x > 0$, c'est à dire sur le domaine $D_f =]-1, +\infty[$.
La fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et

$$\forall x > -1,\ \ f'(x) = \Big(\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\Big)e^{x\ln(1+x)}.$$

Le signe de cette expression est le même que celui de $\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$.

- Pour $-1 < x < 0$, on a $\ln(1+x) < 0$ et $\dfrac{x}{1+x} < 0$ donc $f'(x) < 0$.
- Pour $x > 0$, on a $\ln(1+x) > 0$ et $\dfrac{x}{1+x} > 0$ donc $f'(x) > 0$.

On a donc, pour finir, le tableau de variations suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

Exercice 10 (La plus petite période)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\lfloor x+4 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 4$, donc :

$$f(x+4) = (x + 4 - \lfloor x \rfloor - 4)\sin\left(\frac{\pi(x+4)}{2}\right) = x\sin\left(\frac{\pi x}{2} + 2\pi\right) = x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = f(x).$$

Ceci montre que f est 4-périodique.

2. (a) Soit $p > 0$. Supposons que f est p-périodique. En particulier, on a :

$$f(p) = f(0) \iff (p - \lfloor p \rfloor) \times \sin\left(\frac{\pi p}{2}\right) = 0 \iff p = \lfloor p \rfloor \quad \text{ou} \quad \sin\left(p \times \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

L'égalité $p = \lfloor p \rfloor$ équivaut à dire que p est un entier. L'égalité $\sin\left(p \times \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ équivaut à dire que p est un entier pair. Dans tous les cas, on peut conclure que $p \in \mathbb{N}$.

(b) On a déjà vérifié que 4 est une période de f. Vérifions que c'est la plus petite des périodes possibles. Supposons que l'on ait $p > 0$ une période de f avec $p < 4$. D'après 2.(a), p est un entier, donc $p \in \{1, 2, 3\}$.

Or, on peut vérifier que f n'est ni 2-périodique, ni 3-périodique.

Par exemple, $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - 0)\sin(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ mais :

- $f\left(\frac{1}{2} + 2\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \times \sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \neq f\left(\frac{1}{2}\right)$
- $f\left(\frac{1}{2} + 3\right) = f\left(\frac{7}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \times \sin\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4} \neq f\left(\frac{1}{2}\right)$

Enfin, f ne peut pas être 1-périodique, car elle serait alors automatiquement 2-périodique...

Ceci montre que la plus petite période de f est 4.

Exercice 11 (Antécédents par cos, sin, tan)

- $\cos^{-1}(\{0\}) = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $\cos^{-1}(\{1\}) = \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- $\cos^{-1}(\{-1\}) = \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- $\sin^{-1}(\{0\}) = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- $\sin^{-1}(\{1\}) = \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $\sin^{-1}(\{-1\}) = \left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $\tan^{-1}(\{0\}) = \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- $\tan^{-1}(\{1\}) = \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $\tan^{-1}(\{-1\}) = \left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 12 ((In)équations)

(a) Pour $x \in [0, 2\pi]$, $\quad \cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2} \iff x \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$.

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad \cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \left[\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi\right] \iff x \in \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi\right]$.

(b) Pour $y \in [-\pi, \pi]$, $\quad \sin(y) \geqslant -\dfrac{1}{2} \iff y \in \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right]$.

Ainsi, pour $y \in \mathbb{R}$, $\quad \sin(y) \geqslant -\dfrac{1}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ y \in \left[-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi\right] \iff y \in \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi\right]$.

Pour finir, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin(2x) \geqslant -\frac{1}{2} &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 2x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi\right] \\ &\iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi\right].\end{aligned}$$

Exercice 13 (Des formules de trigo)

Toutes ces formules se retrouvent facilement à partir des formules connues pour l'addition :

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \text{et} \quad \sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y).$$

- Deux premiers points : choisir $x = a$ et $y = -b$. Utiliser la parité de cos et l'imparité de sin.
- $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2$. Or on a $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Ainsi, $\cos(2a) = \cos(a)^2 - (1 - \cos(a)^2)$ soit $\cos(2a) = \cos(a)^2 - 1$. On en déduit bien $\cos(a)^2 = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$.
- Pour $\sin(a)^2$: de même que pour le point précédent.
- Deux derniers points : partir du membre de droite, calculer $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ puis simplifier.

Exercice 14 ($\cos \circ \arctan$)

Soit $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a $\tan(t)^2 = \dfrac{\sin(t)^2}{\cos(t)^2} = \dfrac{1 - \cos(t)^2}{\cos(t)^2} = \dfrac{1}{\cos(t)^2} - 1$.

On en déduit que $\dfrac{1}{\cos(t)^2} = 1 + \tan(t)^2$ et donc $\cos(t)^2 = \dfrac{1}{1 + \tan(t)^2}$.

En se rappelant que $\cos(t) > 0$ pour $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on peut même écrire $\cos(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan(t)^2}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en choisissant $t = \arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on obtient :

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan(\arctan(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 15 (Décomposition paire + impaire)

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ fixée. Montrons qu'il existe un unique couple (g, h) de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\boxed{1}\ g \text{ est paire} \qquad \boxed{2}\ h \text{ est impaire} \qquad \boxed{3}\ f = g + h.$$

Analyse : Supposons que l'on dispose d'un tel couple (g, h).
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = g(x) + h(x)$
mais également $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$ par parité/imparité. Ainsi : $\begin{cases} g(x) + h(x) = f(x) \\ g(x) - h(x) = f(-x) \end{cases}$
En sommant ces deux équations, on obtient $2g(x) = f(x) + f(-x)$ soit $g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.
En prenant soustrayant la seconde ligne à la première, on obtient $2h(x) = f(x) - f(-x)$ soit $h(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Ainsi, si des fonctions g et h satisfont $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$, ce sont nécessairement les fonctions :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array}$$

Synthèse : Inversement, les fonctions g et h que l'on vient d'identifier satisfont bien $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$:

$\boxed{1}$ g paire $\left(\text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x) \right)$

$\boxed{2}$ h impaire $\left(\text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = \dfrac{f(-x)-f(x)}{2} = -\dfrac{f(x)-f(-x)}{2} = -h(x) \right)$

$\boxed{3}$ $f = g + h$ $\left(\text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) + h(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} = \dfrac{2f(x)}{2} = f(x) \right)$

On a bien montré le résultat attendu.

Exercice 16 (Périodique et monotone)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x + np) = f(x)$.
Initialisation : $f(x + 0 \times p) = f(x)$ évidemment.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(x + np) = f(x)$ et montrons que $f(x + (n+1)p) = f(x)$.
Comme f est p-périodique, on a $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y + p) = f(y)$, donc ici :

$$f\Big(x + (n+1)p\Big) = f\Big((x + np) + p\Big) = f\Big(x + np\Big) = f(x).$$

2. Puisque x et y sont des réels fixés, il est évident que $x + np \geqslant y$ si l'on choisit un entier $n \in \mathbb{N}$ assez grand...
• Première justification : $\lim\limits_{n \to +\infty} (x + np) = +\infty$, donc on aura $x + np \geqslant y$ à partir d'un certain rang.
• Deuxième justification : $x + np \geqslant y \iff n \geqslant \dfrac{y-x}{p}$. Il suffit de choisir par exemple $n = \left\lfloor \dfrac{y-x}{p} \right\rfloor + 1$.
3. Soit f une fonction périodique (disons de période $p > 0$) et monotone.
Supposons par exemple que f est croissante (l'autre cas est similaire).

On souhaite montrer que f est constante.
Soient donc $x, y \in \mathbb{R}$ fixés : démontrons que $f(x) = f(y)$.

• Supposons que $x \leqslant y$. Alors comme f est croissante, on a $f(x) \leqslant f(y)$.
De plus, on sait qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x + np \geqslant y$.
Par croissance de f, on a alors $f(x + np) \geqslant f(y)$, c'est à dire $f(x) \geqslant f(y)$ par périodicité.
Ceci montre que $f(x) = f(y)$.
• Si on est dans l'autre cas $y \leqslant x$, même raisonnement en inversant le rôle de x et de y...
On obtient de même $f(x) = f(y)$.

Ainsi quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(y)$: f est une fonction constante !
