

Semaines 7 et 8

Dénombrément, Limites de fonctions et continuité

• Énoncés / notions à connaître :

Dénombrément

- Notion de cardinal, règles de calcul. Formule du crible pour l'union de deux et trois ensembles.
- Cardinal et applications injectives/surjectives/bijectives.
- Outils de dénombrement : principe additif, principe multiplicatif. Vocabulaire :
Liste (l'ordre compte, répétition possible), Arrangement (l'ordre compte, pas de répétition),
Partie (l'ordre ne compte pas, pas de répétition). Permutation.
Applications de ces notions et des formules associées à des énoncés de dénombrement.
- Coefficients binomiaux : définition, propriétés, formule de Pascal, formule du binôme.

Limites de fonctions

- Définition de la limite (avec des quantificateurs) pour une fonction numérique f :
limite finie (à gauche/à droite/"tout court") en un point x_0 ,
limite infinie (à gauche/à droite/"tout court") en un point x_0 ,
limite finie en $\pm\infty$, limite infinie en $\pm\infty$.
- Lien entre limite à gauche / à droite / "tout court" en un point.
- Limites usuelles : croissances comparées en l'infini et limites usuelles en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x}$$

(NB : toujours pas développements limités)

- Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, composition de limites.
- Passage à la limite dans une inégalité.
- Théorème des gendarmes
- Théorème de la limite monotone

Continuité

- Continuité en un point, à gauche, à droite.
- Fonctions continues sur un domaine (somme, produit, quotient, composition de fonctions usuelles).
- Prolongement par continuité en un point.
- Théorème des valeurs intermédiaires, application à la résolution d'équation type $f(x) = \lambda$.
Algorithme de dichotomie. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- Théorème de la bijection (monotone), application à la résolution d'équation type $f(x) = \lambda$.
- Théorème "des bornes atteintes" : une fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

• Démonstrations à connaître :

- Formule du binôme de Newton (Théorème 1)
- Formule de Pascal (Proposition 10)
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
(en admettant le TVI) (Proposition 5).
- Description de l'algorithme de dichotomie avec un dessin + implémentation en Python