Info

Python : révisions

Exercice 1 (Suites explicites)

Proposer une fonction Python qui prend en entrée un entier n et :

1. On pose : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = \dfrac{k}{1+k^2}$.

   (a) Définir une fonction qui prend en entrée un entier n et renvoie une liste contenant les n premiers termes de la suite.

   (b) Définir une fonction qui prend en entrée un entier n et renvoie un vecteur contenant les n premiers termes de la suite.

2. Même questiosn avec la suite : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ v_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$

Exercice 2 (Suites à récurrence simple)

1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

   (a) Définir une fonction qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de u_n.

   (b) Définir une fonction qui prend en entrée un entier n et renvoie le vecteur `V = [` $u_0, u_1, \ldots, u_n$ `]`.

2. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $v_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = \sin(v_n)$.

   (a) Définir une fonction qui prend en entrée un entier n et renvoie la valeur de v_n.

   (b) Définir une fonction qui prend en entrée un entier n et renvoie le vecteur `V = [` $v_1, v_2, \ldots, v_n$ `]`.

Exercice 3 (Suite à récurrence double)

On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = \dfrac{n+1}{w_n + w_{n+1}}$.

1. Définir une fonction qui prend en entrée un entier n et renvoie w_n.
2. Définir une fonction qui prend en entrée un entier n et renvoie le vecteur `W = [` $w_0, w_1, \ldots, w_n$ `]`.

Exercice 4 (Paradoxe des anniversaires)

1. Dans une pièce, n personnes sont réunies. Montrer que la probabilité qu'au moins deux personnes aient la même date d'anniversaire est donnée par : $p_n = 1 - \dfrac{365!}{(365-n)! \times 365^n}$.
2. Vérifier que pour tout $n \in [\![1, 364]\!]$, $p_{n+1} = 1 - (1 - p_n)\left(1 - \dfrac{n}{365}\right)$.
3. Proposer un script Python qui construit et affiche le vecteur `P = [` $p_1, p_2, \ldots, p_{365}$ `]`.

   <u>Remarque :</u> On a par exemple $p_{50} = 97,04\%$

Exercice 5 (Somme)

1. Proposer au moins deux façons différentes de définir une fonction `somme(n)` qui calcule $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.
2. Proposer une fonction `vecsomme(n)` qui construit et renvoie le vecteur $V =$ `[` $S_2, \ldots, S_n$ `]`.
3. On admet que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Définir une fonction `indice` qui prend en entrée un réel $A > 0$ et renvoie le premier indice $n \geqslant 2$ tel que $S_n > A$.

Exercice 6 (Approximation de point fixe)

On définit la fonction f par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (x^2+1)e^{-x}$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in]0,1[$.
2. Proposer un programme Python qui, à l'aide de la méthode de dichotomie, calcule une valeur approchée de α à 10^{-6} près.
3. On propose maintenant d'approcher α différemment, à l'aide d'une suite récurrente.
   On pose $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que $f([0,1]) \subset [0,1]$. Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (b) Montrer que $\forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant (\frac{1}{4})^n$. On en déduit bien-sûr que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
   (d) Proposer un programme Python qui utilise la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   pour renvoyer une approximation de α à 10^{-6} près.