13

Dérivation

1 Dérivabilité en un point

1.1 Définition

Définition 1 (Taux d'accroissement et dérivée en un point)

Soit I un intervalle ; $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

• La fonction $\begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{array}$ est appelé taux d'accroissement de f en x_0.

• On dit que f est **dérivable en** x_0 lorsque ce taux d'accroissement admet une limite finie en x_0. On définit alors :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Cette quantité est appelée **dérivée de** f **en** x_0.

Dessin :

Remarque 1

Alternativement, f est dérivable en x_0 si et seulement si la limite suivante existe et est finie :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.}$$

(Il suffit de poser le changement $x = x_0 + h$ i.e $h = x - x_0$: on a $(x \to x_0) \iff (h \to 0)$)

Exercice 1

Considérons la fonction racine carrée : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$.

1. Montrer que f est dérivable en tout $x_0 > 0$ et que $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

1. Soit $x_0 > 0$. Pour tout $h \neq 0$,

$$\frac{f((x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \frac{\sqrt{x_0(1+\frac{h}{x_0})}-\sqrt{x_0}}{h} = \sqrt{x_0}\frac{\sqrt{1+\frac{h}{x_0}}-1}{h} = \frac{\sqrt{x_0}}{x_0}\frac{\sqrt{1+\frac{h}{x_0}}-1}{\frac{h}{x_0}}$$

En posant $y = \frac{h}{x_0}$, on obtient

$$\lim_{h\to 0} \frac{f((x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{x_0}}{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+\frac{h}{x_0}}-1}{\frac{h}{x_0}} = \frac{\sqrt{x_0}}{x_0} \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{1+y}-1}{y} = \frac{\sqrt{x_0}}{x_0} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

2. En $x_0 = 0$, on obtient

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow[h\to 0]{} +\infty$$

donc f n'est pas dérivable en 0.

Remarque 2

En pratique pour vérifier qu'une fonction est dérivable, on préfèrera (cf. plus loin dans ce chapitre) :
- Utiliser la dérivabilité des fonctions usuelles.
- Utiliser le Théorème de prolongement de la dérivée.

En dernier recours, on pourra étudier la limite du taux d'accroissement comme on vient de le faire !

Proposition 1 (Dérivabilité implique continuité)

Si une fonction f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.

Preuve rapide : $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \times (x-x_0) \xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0) \times 0 = 0.$

Ainsi $\lim_{x\to x_0} (f(x)-f(x_0)) = 0$, c'est à dire $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, d'où la continuité en x_0. □

Remarques 3

- Ainsi, la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas dérivable en $k \in \mathbb{Z}$ car elle n'est pas continue en ce point ! (En revanche, elle est dérivable partout ailleurs, de dérivée nulle).
- Bien-sûr une fonction continue en un point n'y est pas forcément dérivable ! La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue mais pas dérivable en 0.

1.2 Dérivée à gauche, dérivée à droite

Définition 2 (Dérivée à gauche / droite en un point)

Soit I un intervalle ; $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
On dit que f est dérivable à gauche (resp. à droite) en x_0 lorsque son taux d'accroissement y admet une limite finie à gauche (resp. à droite). On note alors :

$$f'_g(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \text{et} \qquad f'_d(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Proposition 2 (Lien dérivée à gauche / à droite / "tout court")

Soit I un intervalle ; $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ qui n'est pas une extrémité de I.
On a l'équivalence :

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff \begin{array}{c} f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } x_0 \\ \text{et } f'_g(x_0) = f'_d(x_0) \end{array}$$

Dans ce cas la dérivée est égale à cette valeur commune : $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Preuve de la Proposition 2 :

C'est une conséquence immédiate du Théorème 1 du chapitre "Limites de fonctions". $\square$

Exercice 2

1. Soit f la fonction valeur absolue : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = |x|$. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Pour $x \neq 0$, $\quad \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x}$. Ainsi :

$$f'_g(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1. \quad \text{et} \quad f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1.$$

1.3 Interprétation graphique : tangente

Proposition 3 (Dérivée et tangente)

- Si f est dérivable en x_0, la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse x_0
L'équation de cette tangente est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
$f'(x_0)$ est appelé le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_0.

- Si $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, la courbe représentative de f admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0. L'équation de cette tangente est : $x = x_0$.

- Si f est seulement dérivable à gauche ou à droite en x_0, on parle de "demi-tangente" (verticale).

Exemples

- Comme $\exp'(0) = \exp(0) = 1$, la courbe représentative de exp admet la tangente d'équation $y = x+1$ au point d'abscisse 0.

Dessin :

- La limite du taux d'accroissement de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0 vaut $+\infty$.
La courbe représentative admet donc une demi-tangente verticale en 0.

Dessin :

2 Fonctions dérivables, calcul de dérivées

2.1 Définitions

Définition 3 (Fonction dérivable sur un intervalle)

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point $x_0 \in I$.
Dans de cas, on peut introduire la fonction dérivée de f, c'est à dire l'application :

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x). \end{array}$$

L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté $D(I, R)$ ou parfois plus simplement $D(I)$.

Remarques 4

• On étend naturellement cette définition à une fonction définie sur domaine plus général, (souvent une union d'intervalles). Par exemple, on dira que $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

• Petite subtilité dans la définition :
Si f est définie sur un segment $[a, b]$, dire que f est dérivable sur $[a, b]$ revient à dire :
- f est dérivable en tout $x_0 \in]a, b[$
- f est dérivable à droite en a, dérivable à gauche en b.

On pourrait ainsi affirmer que la fonction valeur absolue est dérivable sur $[-1, 0]$ et dérivable sur $[0, 1]$. Pour autant, elle n'est pas dérivable $[-1, 1]$ (car pas dérivable en 0) !

• D'après la Proposition 1, une fonction dérivable sur I est automatiquement continue sur I.
On a ainsi l'inclusion : $\boxed{D(I, \mathbb{R}) \subset C(I, \mathbb{R})}$. L'inclusion réciproque est bien-sûr fausse.

• La dérivée de f en au point x peut également se noter $\dfrac{df(x)}{dx}$.

Attention !

La dérivée de la fonction f au point x se note bien $f'(x)$ et non " $f(x)'$ " !

Pour exprimer la dérivée de l'expression $x^3 + 2e^{x^2}$ par exemple, **il faut écrire :**

$$\text{On pose } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + 2e^{x^2} \quad \text{et on a :} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 + 4xe^{x^2}.$$

On évitera à tout prix la notation $\left(x^3 + 2e^{x^2}\right)'$ qui n'a aucun sens !!

Si l'on veut s'économiser d'introduire une fonction f, on pourra à la rigueur écrire :

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 + 2e^{x^2}\right) = 3x^2 + 4xe^{x^2}.$$

Définition 4 (Classe $\mathcal{C}^1$)

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I lorsque f est dérivable sur I et que f' est continue sur I.
On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Autrement dit :

$$\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) = \left\{f \in D(I, \mathbb{R}) \mid f' \in C(I, \mathbb{R})\right\}.$$

Remarque 5

On ainsi les inclusions : $\boxed{C^1(I, \mathbb{R}) \subset D(I, \mathbb{R}) \subset C(I, \mathbb{R}).}$ Les inclusions réciproques sont fausses.

2.2 Dérivées de fonctions usuelles

Proposition 4 (Dérivabilité des fonctions usuelles (admis))

Les fonctions "usuelles" (que l'on s'apprête à lister) sont dérivables sur les domaines appropriés. Plus précisément, elles sont même de classe C^1 sur leur domaine de dérivabilité.

$f(x)$	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	$f'(x)$
C (*constante*)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Remarques 6

- Si l'on retient que $\dfrac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$, on peut retrouver l'expression des dérivées de :

$$x \mapsto x^n \text{ (prendre } \alpha = n), \quad x \mapsto \frac{1}{x^n} \text{ (prendre } \alpha = -n), \quad x \mapsto \sqrt{x} \text{ (prendre } \alpha = 1/2).$$

Attention cependant au domaine de définition/dérivabilité qui n'est pas le même que pour $x \mapsto x^\alpha$!

- Si l'on admet ces différentes expressions, les "limites usuelles en 0" s'obtiennent en fait comme la limite d'un taux d'accroissement en 0 !

- Avec $f(x) = e^x$, l'égalité $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$ donne : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

- Avec $f(x) = \sin(x)$, l'égalité $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$ donne : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

De même en choisissant $f(x) = \ln(1+x)$, $\tan(x)$, $(1+x)^\alpha$.

2.3 Dérivée et opérations

Proposition 5 (Dérivée de sommes, produits, quotients)

Soient u et v deux fonctions dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur un même intervalle I. Alors :

- La fonction $u+v$ est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et

$$\forall x \in I,\ (u+v)'(x) = u'(x) + v'(x).$$

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, (λu) est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et

$$\forall x \in I,\ (\lambda u)'(x) = \lambda\, u'(x).$$

- La fonction $u\,v$ est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et

$$\forall x \in I,\ (u\,v)'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x).$$

- Si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I et

$$\forall x \in I,\ \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2}.$$

Remarque 7

En combinant les deux premiers résultats, on obtient, pour u, v dérivables et $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(au+bv)' = au' + bv' \qquad \textbf{(linéarité de la dérivation)}}$$

Exemple

Si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on définit $f(x) = 3\sin(x) - 2\cos(x) + 4e^x$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3\cos(x) + 2\sin(x) + 4e^x$$

Théorème 1 (Dérivée d'une composition ("Chain Rule"))

Soit $u \in D(I,\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$) et $g \in D(J,\mathbb{R})$ (resp $\mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$) avec $u(I) \subset J$.

Alors $g \circ u \in D(I,\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$) et on a l'expression :

$$\forall x \in I,\ \ (g\circ u)'(x) = u'(x)\, g'(u(x)).$$

Preuve :

Soit $x \in I$.
On étudie : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{g(u(x+h)) - g(u(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \times \frac{g(u(x+h)) - g(u(x))}{u(x+h)-u(x)}\right)$

- Puisque u est dérivable en x : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x)$.
- Puisque g est dérivable en $u(x)$: $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{g(u(x+h)) - g(u(x))}{u(x+h)-u(x)} = \lim_{y \to u(x)} \frac{g(y) - g(u(x))}{y - u(x)} = g'(u(x))$.

On a utilisé le fait que u est dérivable donc continue en x : ainsi $y = u(x+h) \xrightarrow[h\to 0]{u} (x)$. □

Cas particuliers usuels : (à connaître ou savoir retrouver en 5 secondes)

$f(x)$	$f'(x)$
$u(x)^\alpha$	$\alpha u'(x)u(x)^{\alpha-1}$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$f(x)$	$f'(x)$
$e^{u(x)}$	$u'(x)\,e^{u(x)}$
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

(On applique la "chain rule" pour dériver l'expression $f(x) = g(u(x))$ avec $g(x) = x^n,\ x^\alpha,\ \sqrt{x},\ e^x,\ \ln(x)$!)

Remarque 8

Pour dériver une expression de la forme $f(x) = u(x)^{v(x)}$, toujours revenir à l'expression l'exponentielle :

$$f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))} \quad \text{puis utiliser la "chain rule".}$$

Méthode : Dérivabilité d'une fonction "élémentaire"

Après avoir déterminé le domaine de dérivabilité D d'une fonction f
(souvent égal au domaine de définition...), on pourra souvent annoncer :

"f est dérivable/de classe $\mathcal{C}^1$ sur D comme somme/produit/quotient/composée de fonctions usuelles".

Exercice 3

Déterminer le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivée.

(a) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ (b) $g(x) = \left(\dfrac{4x-1}{x+1}\right)^3$ (c) $h(x) = (1-x^2)^{\sin(x)}$

(a) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme somme, quotient, composée de fonctions usuelles.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1} - 2x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{2(x^2+1)-2x^2}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)} = \frac{2}{(x^2+1)^{3/2}}$$

(b) g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$g'(x) = 3\left(\frac{4(x+1)-(4x-1)}{(x+1)^2}\right) \times \left(\frac{4x-1}{x+1}\right)^2 = 3\frac{5(4x-1)^2}{(x+1)^4} = \frac{15(4x-1)^2}{(x+1)^4}$$

(c) On ré-écrit $h(x) = (1-x^2)^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\ln(1-x^2)}$.
h est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$:

$$h'(x) = \left(\cos(x)\ln(1-x^2) + \sin(x)\frac{-2x}{1-x^2}\right)e^{\sin(x)\ln(1-x^2)} = \left(\cos(x)\ln(1-x^2) - \frac{2x\sin(x)}{1-x^2}\right)(1-x^2)^{\sin(x)}$$

2.4 Dérivée d'une bijection réciproque

Théorème 2 (Dérivée de la réciproque)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I. On note $J = f(I)$.

$$\left(\begin{array}{c}\text{On sait d'après le Théorème de la bijection que } f \text{ réalise une bijection de } I \text{ dans } J.\\ \text{De plus, la bijection réciproque } f^{-1} : J \to I \text{ est continue et strictement monotone.}\end{array}\right)$$

Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\forall x \in J,\quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Preuve partielle :

Admettons que f^{-1} soit bien dérivable. On sait que pour tout $x \in J$, $\quad f(f^{-1}(x)) = x$.
En dérivant on obtient $\dfrac{d}{dx}\big(f(f^{-1}(x))\big) = 1$, c'est à dire :

$$(f^{-1})'(x) \times f'(f^{-1}(x)) = 1 \quad \text{et donc} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

□

Exercice 4

Retrouver la formule donnant la dérivée de arctan.

La fonction tan réalise une bijection strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.
De plus tan est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 > 0.$$

Ceci montre que la bijection réciproque $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan(\arctan(x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Remarque 9

Si jamais f' s'annule en un point $x_0 \in I$, alors dans ce cas f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$.
Sa courbe représentative y admet une tangente verticale.

Exercice 5

On considère la fonction cube : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
3. Dessiner les courbes représentatives de f et f^{-1}.

1. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

D'après le théorème de la bijection, on en déduit que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La bijection réciproque est en fait $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt[3]{x} \end{array}$.

2. f est dérivable $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) \neq 0$.
Ainsi f' ne s'annule pas sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. D'après le théorème précédent, on en déduit que f^{-1} est dérivable sur ces intervalle et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$$

3.

3 Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle

3.1 Théorème de Rolle

Lemme (Extremum et dérivée)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Si f atteint son maximum/minimum en un point $x_0 \in]a, b[$, alors $f'(x_0) = 0$.

Dessin :

Remarque 10

Ce résultat reste vrai pour un minimum/maximum local, du moment que celui-ci est bien atteint dans l'intérieur de l'intervalle (et pas à une extrémité !)

Preuve :

f étant continue sur le segment $[a, b]$, on sait qu'elle y atteint son minimum et son maximum.
On suppose que le minimum est atteint en un point $x_0 \in]a, b[$ (le cas du maximum est similaire).
Ainsi, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant f(x_0)$, ce qui donne pour le taux d'accroissement :

- Si $x < x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$
- Si $x > x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$

Comme f est dérivable en x_0, f y est dérivable à gauche et à droite et $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Or $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$ et $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$.

Ainsi $f'(x_0) \leqslant 0$ et $f'(x_0) \geqslant 0$, c'est donc que $f'(x_0) = 0$. $\square$

Théorème 3 (Théorème de Rolle)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Dessin :

Remarque 11

Un tel réel c peut ne pas être unique.

Preuve :

f étant continue sur le segment $[a, b]$, on sait qu'elle y atteint son minimum et son maximum.

Notons $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

• Si m et M sont tous deux atteints aux bords $[a, b]$ alors on a $\left\{ \begin{array}{l} f(a) = m \\ f(b) = M \end{array} \right.$ ou $\left\{ \begin{array}{l} f(a) = M \\ f(b) = m \end{array} \right.$.

Puisque $f(a) = f(b)$, dans tous les cas on a $m = M$.
Ainsi $\forall x \in [a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M = m$: f est constante égale à m.
f étant une fonction constante, il en résulte que $\forall x \in]a, b[$, $f'(x) = 0$.
N'importe quel $c \in]a, b[$ satisfait donc $f'(c) = 0$.

• Sinon, f atteint son minimum/maximum en un point $c \in]a, b[$.
D'après le lemme précédent (Extremum et dérivée), on a $f'(c) = 0$. □

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et p-périodique ($p > 0$).
Montrer que f' s'annule une infinité de fois.

• f est continue sur $[0, p]$, dérivable sur $]0, p[$ et $f(0) = f(p)$ par périodicité.
D'après le théorème de Rolle, f' s'annule au moins une fois sur $]0, p[$.

• Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
f est continue sur $[kp, kp + p]$, dérivable sur $]kp, kp + p[$ et $f(kp) = f(kp + p)$ par périodicité.
D'après le théorème de Rolle, f' s'annule au moins une fois sur $]kp, kp + p[$.

Ces intervalles étant disjoints, cela montre que f' s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$.

3.2 Théorèmes des accroissements finis

Théorème 4 (Égalité des accroissements finis (EAF))

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Dessin :

Remarques 12

- $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le taux d'accroissement de f entre a et b.
Il peut s'interpréter comme la pente de la "corde" tendue entre les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

- Comme pour le Théorème de Rolle, un tel réel c peut ne pas être unique.

- En particulier, lorsque $f(a) = f(b)$, on obtient $f'(c) = 0$ et on retrouve le Théorème de Rolle.

Preuve :

On pose : $\forall x \in [a, b], \quad g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

- La fonction g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (car f l'est).
- $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$ donc $g(a) = g(b)$.

D'après le Théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Or $\forall x \in]a, b[, \; g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, donc on a

$$g'(c) = 0 \iff f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$

Une conséquence importante et souvent utile est l'inégalité des accroissements finis :

Théorème 5 (Inégalité des accroissements finis (IAF))

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

$\boxed{1}$ **Version "minorant/majorant" :** S'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\underline{m \leqslant f' \leqslant M \text{ sur }]a, b[}$, alors

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

$\boxed{2}$ **Version "valeur absolue" :** S'il existe $K > 0$ tel que $\underline{|f'| \leqslant K \text{ sur }]a, b[}$, alors

$$|f(b) - f(a)| \leqslant K|b-a| \qquad \text{(fonctionne aussi si } a > b\text{)}$$

Preuve :

D'après l'égalité des accroissements finis, on peut introduire $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \qquad \text{c'est à dire} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

$\boxed{1}$ Si jamais $m \leqslant f' \leqslant M$ sur $]a, b[$, alors en particulier $m \leqslant f'(c) \leqslant M$ et on obtient

$$m(b-a) \leqslant f'(c)(b-a) \leqslant M(b-a) \quad \text{c'est à dire} \quad m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

$\boxed{2}$ Si jamais $|f'| \leqslant K$ sur $]a, b[$, alors en particulier $|f'(c)| \leqslant K$ et on obtient

$$|f'(c)(b-a)| = |f'(c)|(b-a) \leqslant K(b-a) \quad \text{c'est à dire} \quad |f(b) - f(a)| \leqslant K(b-a).$$

□

Méthode : Repérer une utilisation de l'IAF

Lorsque l'on demande de montrer une inégalité qui met en jeu un écart entre deux valeurs prises par une fonction (un "accroissement" $f(b) - f(a)$), c'est bien souvent l'IAF qui permet de conclure !

$\boxed{1}$ Repérer à quelle fonction f et sur quel segment $[a, b]$ appliquer l'IAF.

$\boxed{2}$ Affirmer que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$
(ou, bien souvent, carrément dérivable sur $[a, b]$, ce qui implique la continuité).

$\boxed{3}$ Déterminer des <u>constantes</u> m et M ou bien une <u>constante</u> K telles que

$$\forall t \in]a, b[, \quad m \leqslant f'(t) \leqslant M \qquad \text{ou bien} \qquad \forall t \in]a, b[, \ |f'(t)| \leqslant K.$$

$\boxed{4}$ En déduire l'inégalité voulue avec l'IAF.

Exercice 7

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \ |\sin(x)| \leqslant |x|$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on applique l'IAF à la fonction ln dérivable sur $[n, n+1]$:

$$\forall t \in]n, n+1[, \qquad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln'(t) = \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{n}$$

On en déduit que $\dfrac{1}{n+1}(n+1-n) \leqslant \ln(n+1)-\ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}(n+1-n)$,
c'est à dire : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1)-\ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. L'inégalité voulue peut se ré-écrire : $|\sin(x)-\sin(0)| \leqslant |x-0|$.
On applique l'IAF à la fonction sin dérivable sur $[0,x]$:

$$\forall t \in [0,x], \quad |\sin'(t)| = |\cos(t)| \leqslant 1.$$

On en déduit que $|\sin(x)-\sin(0)| \leqslant 1 \times |x-0|$ c'est à dire $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

L'IAF est un outil très puissant dans de nombreux contextes, notamment l'analyse de suites récurrentes.

Exercice 8

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

Notons $f : \begin{array}{ccc} [-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$ la fonction associée à cette récurrence.

1. Donner le tableau de variation de f. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geqslant 0$.
2. Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ que l'on déterminira.
3. Établir l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0-\alpha|$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
5. On choisit $u_0 = 1$ de sorte que $|u_0-\alpha| \leqslant 1$: ainsi on a $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
Compléter la fonction `approx_alpha` pour qu'elle renvoie une valeur approchée de α à `eps` près.

```
import numpy as np

def approx_alpha(eps) :

    u = ....... ;   n = .......

    while (1/2)**n > eps :

        u = ..................

        n = ..................

    return(u)
```

1. On a le tableau de variations :

En particulier, on voit que $\mathbb{R}_+$ est un intervalle stable par f : $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.
On en déduit par récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in \mathbb{R}_+$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) = x \iff \sqrt{x+1} = x \iff x+1 = x^2 \iff x^2-x-1 = 0$$

Après calcul, les deux racines sont $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. L'unique racine positive est $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité voulue $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ peut se ré-écrire : $|f(u_n)-f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

Appliquons l'IAF à la fonction f dérivable sur le segment $[u_n, \alpha]$ (ou $[\alpha, u_n]$) :

$$\forall t \in]u_n, \alpha[, \quad f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}} \quad \text{donc} \quad |f'(t)| = \frac{1}{2\sqrt{t+1}} \leqslant \frac{1}{2}$$

(car $t \geqslant u_n \geqslant 0$ donc $\sqrt{t+1} \geqslant 1$ donc $\frac{1}{\sqrt{t+1}} \leqslant 1$)

D'après l'IAF (version "valeur absolue"), on déduit bien l'inégalité voulue.

4. C'est une récurrence immédiate avec la question précédente :

- $|u_0-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^0}|u_0-\alpha|$
- Si $|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0-\alpha|$ alors $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}|u_0-\alpha| = \frac{1}{2^{n+1}}|u_0-\alpha|$.

En passant à la limite dans $0 \leqslant |u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0-\alpha|$, on déduit par théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n-\alpha| = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

3.3 Conséquence importante de l'EAF : Prolongement C^1

Théorème 6 (Prolongement C^1)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\quad f : I \to \mathbb{R} \quad$ et $\quad x_0 \in I$. On suppose que :

- f est de classe C^1 sur $I \setminus \{x_0\}$.
- f est continue en x_0.
- f' admet une limite finie ℓ en x_0 : $\ell = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x) \in \mathbb{R}$.

Alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$. Ainsi : f est de classe C^1 sur I tout entier.

Preuve :

Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$ fixé. On applique l'égalité des accroissement finis à f sur $[x_0, x]$:

f est continue sur $[x_0, x]$, dérivable sur $]x_0, x[$, donc il existe $c_x \in [x_0, x]$ tel que $f'(c_x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Comme $c_x \in [x_0, x]$, lorsque $x \to x_0$ on a $c_x \to x_0$. Ainsi, par composition de limites :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f'(c_x) = \lim_{y\to x_0} f'(y) = \ell.$$

Par définition, ceci montre que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = \ell$.

f est déjà C^1 sur $I \setminus \{x_0\}$, c'est à dire que f' est continue sur $I \setminus \{x_0\}$.

Pour montrer que f est C^1 sur I, il reste à vérifier que f' est continue en x_0.

C'est évident car $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \ell = f'(x_0)$. □

Exercice 9

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\frac{1}{x^2}} \end{array}$

Montrer que f est prolongeable en une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$.

D'abord, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions usuelles.

- Prolongement par continuité en 0.

On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{y\to+\infty} e^{-y} = 0$: f est donc prolongeable par continuité en 0.

Par commodité, notons toujours f ce prolongement : posons $f(0) = 0$.
Cela fait de f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ tout entier !

- Dérivée en 0. On a f est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et f est continue en 0. Montrons que f' a une limite finie en 0.

Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to+\infty} 2y^{3/2} e^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{2y^{3/2}}{e^y} = 0 \quad \text{par croissance comparée.}$$

On a montré que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

D'après le théorème de prolongement de la dérivée, on peut conclure que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$, et même que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Remarque 13

Attention, parfois le théorème du prolongement C^1 ne s'applique pas et il faut plutôt revenir à la définition de la dérivée avec la limite du taux d'accroissement !

Exemple : $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$. f est dérivable en 0 mais n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}$.

3.4 Conséquence importante de l'EAF : Dérivée et sens de variation

Terminons par un des intérêts fondamentaux de la dérivée (utilisé depuis le lycée) : le signe de la dérivée nous renseigne sur le sens de variation de f !

Théorème 7 (Dérivée et monotonie)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On a les équivalences :

- f est croissante sur $I \iff f' \geqslant 0$ sur I.
- f est décroissante sur $I \iff f' \leqslant 0$ sur I.
- f est constante sur $I \iff f' = 0$ sur I.

Preuve :

Montrons l'équivalence du premier point (les autres points sont similaires).

- Si f est croissante sur I, alors on note que pour tout $x_0, x \in I$ avec $x \neq x_0$,

Si $x > x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$, si $x < x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$, donc dans tous les cas $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$.

En passant à la limite quand $x \to x_0$, on obtient $f'(x_0) \geqslant 0$. C'est valable pour tout $x_0 \in I$.

- Inversement, supposons $f' \geqslant 0$ sur I. Soient $a, b \in I$ avec $a \leqslant b$.

Si $a = b$ alors évidemment $f(a) \leqslant f(b)$.

Si $a < b$, en appliquant l'EAF sur le segment $[a, b]$, on peut écrire $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ avec un $c \in]a, b[$.

Comme $f'(c) \geqslant 0$, on en déduit que $f(b) - f(a) \geqslant 0$, c'est à dire $f(a) \leqslant f(b)$.

On a bien montré que $a \leqslant b$ implique $f(a) \leqslant f(b)$: f est croissante sur I. □

Remarque 14

Si l'intervalle est un segment $I = [a,b]$, on peut remplacer l'hypothèse "f dérivable sur $[a,b]$" par "f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$" et le résultat reste vrai.

Attention !

Ce théorème devient faux si l'on ne se place pas sur un intervalle !

Exemple : $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.
Pour autant, f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$! Par exemple, $f(-1) = -1 \leqslant f(1) = 1$.
En revanche on peut bien dire que f est décroissante sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Exercice 10

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\quad \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\quad f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme et composée de fonctions usuelles. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Ceci montre que f est constante sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
Il existe $C, C' \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x < 0,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = C \quad \text{et} \quad \forall x > 0,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = C'$$

En évaluant en $x = -1$ et $x = 1$ on obtient

$$-\frac{\pi}{4} + (-\frac{\pi}{4}) \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = C'$$

d'où $C = -\dfrac{\pi}{2} \qquad$ et $\qquad C' = \dfrac{\pi}{2}$.

Théorème 8 (Dérivée et stricte monotonie)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

On peut être plus précis :

- Si $f' \geqslant 0$ et f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' \leqslant 0$ et f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Preuve :

Si $f' > 0$ sur I, il suffit d'adapter la preuve du Théorème 7 (avec l'EAF) pour voir que $a < b$ implique $f(a) < f(b)$.

On admet le point "plus précis" pour le moment, par commodité. $\square$

Exemple

Une fonction strictement croissante peut quand même avoir une dérivée qui s'annule ponctuellement !

Par exemple $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pourtant $f' : x \mapsto 3x^2$ s'annule en 0.

Évidemment, on utilise depuis bien longtemps ce lien entre signe de la dérivée et sens de variation, dès qu'il s'agit d'établir un tableau de variations !

Exercice 11

Déterminer le domaine de définition et établir le tableau de variation de la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x(x-1)}$$

f est définie et dérivable (même de classe C^1) sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$f'(x) = \frac{(2x-2)x(x-1) - (x^2 - 2x - 1)(2x-1)}{x^2(x-1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2(x-1)^2}$$

Ainsi

$$f'(x) \geqslant 0 \iff x^2 + 2x - 1 \geqslant 0$$

Discriminant : $\Delta = 4 + 1 = 5 > 0$, racines : $\alpha = 1 - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = 1 + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, d'où :

$$f'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant \alpha \text{ ou } x \geqslant \beta$$

Comme $\alpha < 0 < 1 < \beta$, on a finalement le tableau de variations :

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Justifier qu'une fonction est dérivable/de classe C^1 sur un domaine.
- Calculer rapidement une dérivée ! (Somme/produit/quotient/composée...)
- Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point particulier. (en pensant notamment au Théorème de prolongement de la dérivée)
- Calculer la dérivée d'une bijection réciproque.
- Utiliser l'inégalité des accroissements finis (IAF).

Pour suivre

- Repérer et utiliser le Théorème de Rolle.
- Repérer et utiliser l'égalité des accroissements finis (EAF).

Pour les ambitieux

- Utiliser spontanément l'IAF pour étudier certaines suites récurrentes.