

# Dérivation, Matrices

### • Énoncés / notions à connaître :

#### Dérivation

- Notion de dérivée en un point. Dérivée à gauche, à droite. Interprétation graphique : tangente.
- Fonction dérivable / de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un domaine. Dérivée des fonctions usuelles.  
Dérivée de somme/produit/quotient/composition.
- Dérivabilité d'une bijection réciproque.
- Théorème de Rolle.
- Égalité des accroissements finis (EAF). Inégalité des accroissements finis (IAF).
- Théorème du prolongement de la dérivée (en un point).
- Lien entre dérivée et sens de variation.

#### Calcul matriciel

- Notion de matrice à coefficients réels, notations  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- Somme, multiplication par un réel, produit de matrices (+définition théorique), transposition.  
Propriétés de ces opérations.
- Matrice identité, propriétés.
- Puissances  $A^k$  d'une matrice carrée  $A$ . Diverses méthodes de calcul.
- Identités remarquables  $(A+B)^m$ ,  $A^m - B^m$  pour deux matrices qui commutent.
- Notion de polynôme de matrice  $P(A)$ .
- Matrices carrées particulières : triangulaire inférieure/supérieure, diagonale, symétrique, anti-symétrique.

#### Matrices inversibles

- Notion de matrice carrée inversible. Propriétés de l'inverse.
- "Un seul côté suffit" : une matrice est inversible ssi elle est inversible à gauche (ou à droite).  
(Résultat admis)
- Inverse d'une matrice diagonale. Inverse d'une matrice  $2 \times 2$ .
- Calcul d'inverse à partir d'un polynôme annulateur  $P(A) = 0$ .
- Lien entre matrices et système linéaires.
- $A$  est inversible ssi l'équation  $AX = Y$  admet une unique solution quel que soit  $Y$ .
- Conséquence : calcul de  $A^{-1}$  en résolvant un système linéaire à l'aide du pivot de Gauss.
- $A$  est inversible ssi l'équation  $AX = 0$  admet l'unique solution  $X = 0$ .
- Inversibilité des matrices triangulaires.
- Petites conditions de "non-inversibilité" : une ligne/colonne de zéros, deux lignes/colonnes proportionnelles.

### • Démonstrations à connaître :

- Égalité des accroissements finis (en admettant le Théorème de Rolle) (Théorème 4)
- Transposée d'un produit :  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ . (Proposition 4)
- Inverse d'une matrice  $2 \times 2$  (Théorème 3).