15

Variables aléatoires finies

Exercice 1 (Premier Pile)

1. Le support de X est évidemment $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

On a $[X=0] = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $[X=k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A_i}\right) \cap A_k$.

Puisque les $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont mutuellement indépendants et $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(A_i) = p$, en passant aux probabilités on obtient : $P(X=0) = (1-p)^n$ et $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X=k) = (1-p)^{k-1}p$.

2. La probabilité d'obtenir au moins une fois pile est $P(X \neq 0) = 1 - P(X=0) = 1 - (1-p)^n = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

Ainsi la condition se ré-écrit :

$$1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \geqslant \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} \geqslant \left(\frac{4}{5}\right)^n \iff \ln\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant n \ln\left(\frac{4}{5}\right) \iff \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} \leqslant n \iff n \geqslant \frac{\ln(2)}{\ln\left(\dfrac{5}{4}\right)}.$$

Puisque $\dfrac{\ln(2)}{\ln\left(\dfrac{5}{4}\right)} \simeq 3,1$, il faut finalement que $n \geqslant 4$.

3. (a) $E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}p$.

(b) • D'une part, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

• D'autre part, on a $\forall x \neq 1,\ f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

donc $\forall x \neq 1,\ f'(x) = \dfrac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

Ainsi, on a l'égalité :

$$\forall x \neq 1, \quad \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

On en déduit finalement (en évaluant en $x = 1 - p \neq 1$) :

$$E(X) = p\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} = p\frac{n(1-p)^{n+1} - (n+1)(1-p)^n + 1}{p^2} = \frac{n(1-p)^{n+1} - (n+1)(1-p)^n + 1}{p}.$$

Exercice 2 (Déjà vu)

1. $N(\Omega) = [\![2, 11]\!]$.

2. Pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, $[N > k]$ = "On obtient des numéros tous distincts aux k premiers tirages".

Puisqu'on est en situation d'équiprobabilité, la formule de Cardan donne :

$$P(N > k) = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \ldots \times (10-k+1)}{10^k} = \frac{\frac{10!}{(10-k)!}}{10^k} = \frac{10!}{(10-k)!10^k}.$$

3. Pour tout $k \in [\![2, 11]\!]$, on a $[N=k] = [N > k-1] \setminus [N > k]$ donc $P(N=k) = P(N > k-1) - P(N > k)$.

Pour $k \in [\![2, 10]\!]$, ceci donne (avec la formule précédente) :

$$P(N=k) = \frac{10!}{(10-k+1)!10^{k-1}} - \frac{10!}{(10-k)!10^k} = \frac{10 \times 10! - (10-k+1) \times 10!}{(10-k+1)!10^k} = \frac{(k-1)10!}{(10-k+1)!10^k}.$$

Pour $k = 11$, on obtient :

$$P(N=11) = P(N > 10) - \underbrace{P(N > 11)}_{=0} = P(N > 10) = \frac{10!}{10^{10}}.$$

On peut constater que ceci correspond également à la formule trouvée dans le cas $k \in [\![2, 10]\!]$! Finalement :

$$\forall k \in [\![2, 11]\!], \quad P(N=k) = \frac{(k-1)10!}{(10-k+1)!10^k}.$$

Exercice 3 ("Uniformément uniforme")

1. L'urne n°j contient j boules numérotées de 1 à j. Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$P_{U_j}(X = k) = P(\text{"Tirer la boule } k \text{ dans l'urne } j\text{"}) = \begin{cases} \dfrac{1}{j} \text{ si } k \leqslant j \\ 0 \text{ si } k > j. \end{cases}$$

2. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ (l'évènement U_j correspondant à "Choisir l'urne n°j") :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \sum_{j=1}^{n} P(U_j \cap [X = k]) = \sum_{j=1}^{n} P(U_j) P_{U_j}(X = k) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} P_{U_j}(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P_{U_j}(X = k).$$

Avec les probabilités conditionnelles trouvées en 1. : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}$.

3. On calcule :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{1}{n} \left(\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{k}{j} = \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant j \leqslant n} \frac{k}{j}.$$

Cette double somme peut se réécrire :

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \frac{k}{j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} (j+1) = \frac{1}{2n} \left(\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1 \right) = \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right)$$

soit $E(X) = \dfrac{n+3}{4}$.

Exercice 4 (Pour s'exercer)

1. On doit avoir $P(X = -2) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$, ce qui donne $2a + \dfrac{2}{3} = 1$ et donc $a = \dfrac{1}{6}$.
Ainsi, on a $P(X = -2) = \dfrac{1}{6}$, $\quad P(X = 2) = \dfrac{1}{2} \quad P(X = 3) = \dfrac{1}{3}$.

2. On calcule $E(X) = -2P(X = -2) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) = -\dfrac{1}{3} + 1 + 1 = \dfrac{5}{3}$.
Ensuite (avec le théorème de transfert) :

$$E(X^2) = (-2)^2 P(X = -2) + 2^2 P(X = 2) + 3^2 P(X = 3) = 4 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{2} + 9 \times \frac{1}{3} = \frac{4 + 12 + 18}{6} = \frac{17}{3}.$$

Enfin,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{17}{3} - \left(\frac{5}{3} \right)^2 = \frac{51 - 25}{9} = \frac{26}{9}.$$

3. On a directement $E(2X + 1) = 2E(X) + 1 = \dfrac{10}{3} + 1 = \dfrac{13}{3}$ et $V(2X + 1) = 2^2 V(X) = 4 \times \dfrac{26}{9} = \dfrac{104}{9}$.

4. Puisque $X(\Omega) = \{-2, 2, 3\}$, le support de $Y = X^2$ est $Y(\Omega) = \{4, 9\}$. On a :

$$P(Y = 4) = P(X^2 = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) = \frac{2}{3} \ \text{ et } \ P(Y = 9) = P(X^2 = 9) = P(X = 3) = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, on retrouve :

$$E(X^2) = E(Y) = 4P(Y = 4) + 9P(Y = 9) = 4 \times \frac{2}{3} + 9 \times \frac{1}{3} = \frac{17}{3}.$$

Exercice 5 (Calcul de sommes)

1. On doit avoir $\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=1$, c'est à dire :

$$C \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1 \Longleftrightarrow C \times 2^n = 1 \Longleftrightarrow C = \frac{1}{2^n}.$$

2. On peut calculer "à la main" $E(X)$. Ou alors on peut remarquer que

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

Ainsi, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$! On sait donc que $E(X)=n\cdot\frac{1}{2}=\dfrac{n}{2}$.
Par ailleurs, avec le théorème de transfert :

$$E\left(2^X\right) = \sum_{k=0}^{n} 2^k P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k 1^{n-k} = \frac{1}{2^n}(2+1)^n = \frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Exercice 6 (Urnes d'Ehrenfest)

1. On a évidemment $X_0=N$ (ou encore, si on préfère $P(X_0=N)=1$).
De même, on a $X_1=N-1$ (ou encore $P(X_1=N-1)=1$).

2. (a) La probabilité conditionnelle $P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k+1)$ correspond, sachant qu'il y a k boules dans l'urne A, à choisir une boule dans l'urne B pour la déplacer. Ceci se fait en effet avec probabilité $\dfrac{N-k}{N}$.
La probabilité conditionnelle $P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k-1)$ correspond, sachant qu'il y a k boules dans l'urne A, à choisir une boule dans l'urne A pour la déplacer. Ceci se fait en effet avec probabilité $\dfrac{k}{N}$.

2.(b) Si l'urne A ne contient aucune boule à l'instant n, alors on déplace forcément une boule de l'urne B vers l'urne A : ceci donne $P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=1)=1$ et $P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=-1)=0$.
Si l'urne A contient toutes les boules à l'instant n, alors on déplace forcément une boule de l'urne A vers l'urne B : ceci donne $P_{[X_n=N]}(X_{n+1}=N+1)=0$ et $P_{[X_n=N]}(X_{n+1}=N-1)=1$.

2.(c) Entre l'instant n et $n+1$, le nombre de boules dans l'urne A ne peut qu'augmenter ou diminuer de 1 !
Ainsi $P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=j)=0$ pour $j\notin\{k-1,k+1\}$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $k\in[\![0,N]\!]$.
D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $([X_n=j])_{0\leqslant j\leqslant N}$:

$$P(X_{n+1}=k) = \sum_{j=0}^{n} P([X_n=j]\cap[X_{n+1}=k]) = \sum_{j=0}^{n} P(X_n=j)\underbrace{P_{[X_n=j]}(X_{n+1}=k)}_{=0 \text{ si } j\notin\{k-1,k+1\}}$$

Ainsi, seuls les termes $j=k-1$ et $j=k+1$ de la somme sont conservés :

$$P(X_{n+1}=k) = P(X_n=k-1)P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k) + P(X_n=k+1)P_{[X_n=k+1]}(X_{n+1}=k).$$

En remplaçant avec les formules du 2.(a) :

$$P(X_{n+1}=k) = P(X_n=k-1)\frac{N-(k-1)}{N} + P(X_n=k+1)\frac{k+1}{N}.$$

d'où finalement

$$P(X_{n+1}=k) = \frac{N-k+1}{N}P(X_n=k-1) + \frac{k+1}{N}P(X_n=k+1).$$

4. (a) On calcule l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{N} kP(X_{n+1}=k) = \sum_{k=0}^{N} k\left(\frac{N-k+1}{N}P(X_n=k-1) + \frac{k+1}{N}P(X_n=k+1)\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} k(N-k+1)P(X_n=k-1) + \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} k(k+1)P(X_n=k+1). \end{aligned}$$

On pose le changement d'indice $j = k-1$ dans la première somme et $j = k+1$ dans la deuxième :

$$E(X_{n+1}) = \frac{1}{N}\sum_{j=-1}^{N-1}(j+1)(N-j)P(X_n = j) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N+1}(j-1)jP(X_n = j)$$

Dans le première somme : le terme est nul lorsque $j = -1$ et lorsque $j = N$.
Dans le deuxième somme : le terme est nul lorsque $j = 0$ et lorsque $j = N+1$. Cela revient donc à :

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N}(j+1)(N-j)P(X_n = j) + \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N}(j-1)jP(X_n = j) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N}\Big((j+1)(N-j) + (j-1)j\Big)P(X_n = j) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N}\Big((N-2)j + N\Big)P(X_n = j) \quad \text{après développement et simplification.} \end{aligned}$$

4. (b) Ainsi,

$$E(X_{n+1}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\Big((N-2)k+N\Big)P(X_n = k) = \frac{N-2}{N}\underbrace{\sum_{k=0}^{N}kP(X_n = k)}_{=E(X_n)} + \frac{N}{N}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}P(X_n = k)}_{=1}$$

donc $E(X_{n+1}) = \dfrac{N-2}{N}E(X_n) + 1 = \left(1 - \dfrac{2}{N}\right)E(X_n) + 1$.

5. Cette relation est celle d'une suite arithmético géométrique : en posant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = E(X_n)$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \left(1 - \frac{2}{N}\right)u_n + 1.$$

Classiquement, on introduit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = (1 - \frac{2}{N})\alpha + 1$ c'est à dire $\alpha = \dfrac{N}{2}$.
En posant $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \alpha$, on sait que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\left(1 - \dfrac{2}{N}\right)$.
On aura ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0\left(1 - \dfrac{2}{N}\right)^n = (u_0 - \alpha)\left(1 - \dfrac{2}{N}\right)^n = (N - \frac{N}{2})\left(1 - \dfrac{2}{N}\right)^n = \frac{N}{2}\left(1 - \dfrac{2}{N}\right)^n$.
Pour finir, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E(X_n) = u_n = v_n + \alpha = \frac{N}{2}\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n + \frac{N}{2}$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_n) = \frac{N}{2}\left(1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n\right).$$

Puisque $N > 2$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = \frac{N}{2}$.
Interprétation : au bout d'un temps très long, le nombre moyen de boules dans l'urne A est environ $N/2$. Logique car on comprend que les boules ont tendance à se répartir uniformément entre les deux urnes au cours du temps ! Au bout d'un temps long, environ la moitié des boules se situent dans l'urne A, et l'autre moitié dans l'urne B.

Exercice 7 (Reconnaître une loi)

(a) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(8, \frac{4}{12})$ c'est à dire $X \hookrightarrow \mathcal{B}(8, \frac{1}{3})$.
(b) Puisque le support de X est $\{0, 1\}$, c'est forcément une loi de Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, où p est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge. Après calcul, on trouve facilement $p = 1 - (\frac{2}{3})^8$.
(c) $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 5]\!])$.
(d) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10, \frac{1}{3})$.
(e) Ce dernier exemple est un peu moins évident... D'abord, il est clair que $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
En notant $\forall i \in [\![1, n]\!],\ A_i =$ "Obtenir le jeton 1 au i-ème tirage", on a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k).$$

En utilisant la formule des probabilités composées, il vient :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X=k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \ldots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)}.$$

Par télescopage, on obtient finalement $\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X=k) = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, on remarque que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$!

Exercice 8 (Loi de Rademacher)

1. $E(X) = 1 \times p + (-1) \times (1-p) = 2p-1$.
Ensuite, $E(X^2) = E(1) = 1$ et donc
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - (2p-1)^2 = (1+(2p-1))(1-(2p-1)) = 2p(2-2p) = 4p(1-p)$.

2. On a facilement $Y(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(Y=1) = P(X=1) = p, \quad P(Y=0) = P(X=-1) = 1-p$.
On reconnait donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

2. De même, $Z(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(Z=1) = P(X=-1) = 1-p, \quad P(Z=0) = P(X=1) = p$.
On reconnait donc $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(1-p)$.

Exercice 9 (Espérance et variance d'une loi binomiale)

1.(a) Il suffit de se rappeler que $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \ldots \times 1}$ et donc

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \frac{(n-1) \times \ldots \times (n-k+1)}{(k-1) \times \ldots \times 1} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

En multipliant par k : $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.

1.(b) Preuve faite dans le poly de cours.

2.(a) En appliquant deux fois la remarque du 1.(a), on voit que pour $k \geqslant 2$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \times \frac{n-1}{k-1} \times \binom{n-2}{k-2}.$$

En multipliant par $k(k-1)$: $\quad k(k-1)\dbinom{n}{k} = n(n-1)\dbinom{n-2}{k-2}$.

(b) D'après le théorème de transfert : $\quad E(X(X-1)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(X=k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X=k)$.
(Les termes quand $k=0$ et $k=1$ sont nuls). En remplaçant :

$$\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X=k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k} = n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^{j+2}(1-p)^{n-j-2} \\
&= n(n-1)p^2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^j(1-p)^{(n-2)-j} = n(n-1)p^2\Big(p+(1-p)\Big)^{n-2} = n(n-1)p^2.
\end{aligned}$$

(c) On sait que $E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$ par linéarité de l'espérance.
Ainsi $E(X^2) = E(X) + E(X(X-1))$, ce qui donne :

$$E(X^2) = np + n(n-1)p^2.$$

Enfin, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \Big(np + n(n-1)p^2\Big) - (np)^2 = np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2 = np(1-p)$.

Exercice 10 (Un jeu d'argent)

1. On repère que $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{v}{v+r}\right)$.
On en déduit directement que $E(X) = n\dfrac{v}{v+r}$ et $V(X) = n\dfrac{v}{v+r}\dfrac{r}{v+r} = n\dfrac{vr}{(v+r)^2}$

2. On a facilement $G = 2X - Y$. Or puisque $X + Y = n$ on peut écrire $Y = n - X$ et donc

$$G = 2X - (n - X) = 3X - n.$$

On en déduit $E(G) = E(3X - n) = 3E(X) - n = 3n\dfrac{v}{v+r} - n = n\left(\dfrac{3v}{v+r} - 1\right)$.
De même, $V(G) = V(3X - n) = 3^2V(X) = 9n\dfrac{vr}{(v+r)^2}$.

3. Le jeu est équitable lorsque la variable aléatoire G est centrée :

$$E(G) = 0 \Longleftrightarrow n\left(\frac{3v}{v+r} - 1\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{3v}{v+r} = 1 \Longleftrightarrow 3v = v + r \Longleftrightarrow r = 2v.$$

Il faut que l'urne contienne deux fois plus de boules rouges que de boules vertes (logique !)

Exercice 11 (Marche aléatoire du crabe)

1. X_0 est la variable aléatoire constante égale à 0. On a donc $X_0(\Omega) = \{0\}$.
On voit facilement que $X_1(\Omega) = \{-1, 1\}$.
Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- Après $2n$ pas, on constate que le crabe se situe forcément à une position paire ! On a en fait :

$$X_{2n}(\Omega) = \{-2n, -2n+2, \ldots, -2, 0, 2, \ldots, 2n-2, 2n\} = \Big\{2k,\ k \in [\![-n, n]\!]\Big\}.$$

- Après $2n + 1$ pas, le crabe se situe forcément à une position impaire ! On a en fait :

$$X_{2n+1}(\Omega) = \{-2n-1, -2n+1, \ldots, -1, 1, \ldots, 2n-1, 2n+1\} = \Big\{2k+1,\ k \in [\![-n-1, n]\!]\Big\}.$$

2. (a) Pour le dire autrement, D_n compte le nombre de "succès" (faire un pas vers la droite) sur n répétitions indépendantes de la même expérience (faire un pas). On remarque donc que $D_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

(b) Au bout de n pas, le crabe a fait D_n pas vers la droite et $(n - D_n)$ pas vers la gauche. Puisque chaque pas vers la droite augmente de 1 la valeur de X_n et chaque pas vers la gauche la diminue de 1, on a :

$$X_n = D_n - (n - D_n) = 2D_n - n.$$

On en déduit directement : $E(X_n) = 2E(D_n) - n = 2 \times np - n = n(2p - 1)$.
De même, $V(X_n) = V(2D_n - n) = 2^2V(D_n) = 4np(1 - p)$.

- Exprimons la loi de X_{2n}. On a déjà vu que $X_{2n}(\Omega) = \Big\{2k,\ k \in [\![-n, n, \Big]\!]\}$. Pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$:

$$P(X_{2n} = 2k) = P(2D_{2n} - 2n = 2k) = P(D_{2n} = n + k).$$

Puisque $D_{2n} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, p)$, (et que $n + k \in [\![0, 2n]\!]$) on obtient :

$$P(X_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k}p^{n+k}(1-p)^{2n-(n+k)} = \binom{2n}{n+k}p^{n+k}(1-p)^{n-k}.$$

- Exprimons la loi de X_{2n+1}. On a déjà vu que $X_{2n+1}(\Omega) = \Big\{2k+1,\ k \in [\![-n-1, n]\!]\Big\}$. Pour tout $k \in [\![-n-1, n]\!]$:

$$P(X_{2n+1} = 2k+1) = P(2D_{2n+1} - (2n+1) = 2k+1) = P(D_{2n+1} = n + k + 1).$$

Puisque $D_{2n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n+1, p)$, (et que $n + k + 1 \in [\![0, 2n+1]\!]$) on obtient :

$$P(X_{2n+1} = 2k+1) = \binom{2n+1}{n+k+1}p^{n+k+1}(1-p)^{2n+1-(n+k+1)} = \binom{2n+1}{n+k+1}p^{n+k+1}(1-p)^{n-k}.$$

Exercice 12 (Urnes de Polya)

1. On voit qu'au minimum, X_n peut valoir 0 (si on n'a tiré que des boules noires au cours des n tirages).
On voit qu'au maximum, X_n peut valoir n (si on n'a tiré que des boules rouges au cours des n tirages).
On comprend ainsi facilement que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

2.(a) Avant le premier tirage, l'urne contient une boule rouge et une boule noire. On a donc une chance sur deux de tirer une boule rouge (dans ce cas $X_1 = 1$) et une chance sur deux de tirer une boule noire (dans ce cas $X_1 = 0$). Ainsi :

$$X_1(\Omega) = \{0, 1\}, \;\; P(X_1 = 0) = \frac{1}{2} \;\; P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

On reconnait donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$, ou encore $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, 1]\!])$.

2.(b) • Si $X_1 = 0$, c'est que l'on a ajouté une boule noire à l'issue du premier tirage.
L'urne contient à présent 2 boules noires et 1 boule rouge. On en déduit les probabilités conditionnelles :

$$P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) = \frac{2}{3}, \;\; P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) = \frac{1}{3}, \;\; P_{[X_1=0]}(X_2 = 2) = 0.$$

• Si $X_1 = 1$, c'est que l'on a ajouté une boule rouge à l'issue du premier tirage.
L'urne contient à présent 1 boule noire et 2 boules rouges. On en déduit les probabilités conditionnelles :

$$P_{[X_1=1]}(X_2 = 0) = 0, \;\; P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) = \frac{1}{3}, \;\; P_{[X_1=1]}(X_2 = 2) = \frac{2}{3}.$$

On peut alors calculer la loi de X_2 avec la formule des probabilités totales : $X_2(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ et

$$P(X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{3}.$$
$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$
$$P(X_2 = 2) = P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 2) + P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 2) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

On reconnait ainsi $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, 2]\!])$.

3. L'initialisation a déjà été faite : on a traité les cas $n = 1$ et $n = 2$ dans les questions précédentes !
Traitons l'hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!])$, c'est à dire que

$$X_n(\Omega) = [\![0, n]\!] \;\text{ et }\; \forall i \in [\![0, n]\!], \; P(X_n = i) = \frac{1}{n+1}.$$

On a déjà vu que $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n+1]\!]$. Pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{n} P(X_n = i)P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k).$$

On comprend que $P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k) = 0$ si $i \notin \{k-1, k\}$. Il reste donc seulement :

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1}\left(P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) + P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k)\right). \quad (\star)$$

• Si l'évènement $[X_n = k-1]$ est réalisé, alors à l'issue du n-ème tirage, l'urne contient :
- $2 + n$ boules au total (on a ajouté une boule, rouge ou noire, après chaque tirage)
- $1 + (k-1) = k$ boules rouges (on a ajouté une boule rouge à chaque fois qu'on en a tiré une).

Dans ces conditions, la probabilité de tirer une nouvelle boule rouge au $n+1$-ème tirage est $\dfrac{k}{n+2}$.

Ceci donne : $\;\; P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) = \dfrac{k}{n+2}$.

• Si l'évènement $[X_n = k]$ est réalisé, alors à l'issue du n-ème tirage, l'urne contient :
- $2 + n$ boules au total (on a ajouté une boule, rouge ou noire, après chaque tirage)
- $1 + k = k + 1$ boules rouges (on a ajouté une boule rouge à chaque fois qu'on en a tiré une).

La probabilité de ne pas tirer une boule rouge au $n+1$-ème tirage est alors $\dfrac{n+2-(k+1)}{n+2} = \dfrac{n+1-k}{n+2}$.

Ceci donne : $\;\; P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = \dfrac{n+1-k}{n+2}$.

Pour finir, en revenant à notre formule $(\star)$, on obtient :

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!], \;\; P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{n+2} + \frac{n+1-k}{n+2}\right) = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

Ceci montre bien que $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n+1]\!])$, ce qui achève la récurrence !