

## Devoir Sur Table n°3 – Corrigé

### Exercice 1 : Etude d'une suite implicite

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère la fonction  $f_n : x \mapsto \frac{x}{x-1}(x^n - 1)$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé.

(a)  $f_n(x) = \frac{x}{x-1}(x^n - 1)$  a un sens lorsque  $x \neq 1$ . Ainsi,  $f_n$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Bien-sûr,  $f_n$  y est continue comme produit et quotient de fonctions usuelles (polynômes).

(b) On calcule la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x \times \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{y} = n \quad (\text{limite usuelle})$$

Ainsi,  $f_n$  est prolongeable par continuité en 1. En notant toujours  $f_n$  ce prolongement :

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}(x^n - 1) & \text{si } x \neq 1, \\ n & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

2.

```
def f(n, x) :
    if x == 1 :
        return n
    else :
        return (x / (x-1)) * (x**n - 1)
```

3. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On sait que :

- Si  $x \neq 1$ ,  $\sum_{k=1}^n x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1} = f_n(x)$ .
- Si  $x = 1$ ,  $\sum_{k=1}^n x^k = \sum_{k=1}^n 1 = n = f_n(1)$ .

Ainsi, on a bien  $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$ .

(b) On calcule la somme en Python :

```
def f(n, x) :
    S = 0
    for k in range(1, n+1) :
        S = S + x**k
    return S
```

ou bien, en utilisant l'instruction `np.sum` :

```
import numpy as np
def f(n, x) :
    L = [x**k for k in range(1, n+1)]
    S = np.sum(L)
    return S
```

4. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a déjà dit que  $f_n$  était continue sur  $\mathbb{R}$ , donc en particulier,  $f_n$  est continue sur  $[0,1]$ .

A partir de l'expression  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k = x + x^2 + \dots + x^n$ , on voit facilement

que  $f_n$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$  (somme de fonctions strictement croissantes).

Autrement on peut bien-sûr dériver :  $\forall x \in ]0, 1[, f'_n(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} > 0$ .

Enfin  $f_n(0) = 0 < 1$  et  $f_n(1) = n \geqslant 1$ .

D'après le TVI avec stricte monotonie, il existe un unique  $x \in [0, 1]$  tel que  $f_n(x) = 1$ .

On note ce réel  $u_n \in [0, 1]$ . On aura donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(u_n) = 1$ .

(b)

```

def suite(n) :
    x = 0
    while f(n,x) < 1 :
        x += 0.001
    return x

```

On part de la valeur  $x = 0$ , et on augmente cette valeur petit à petit, en ajoutant 0.001 à chaque étape. On quitte la boucle dès que  $f_n(x) \geq 1$ , c'est à dire dès que  $x$  dépasse la valeur  $u_n$ .

Il en résulte que [la valeur  $x$  renvoyée est une approximation de  $u_n$  à 0.001 près].

Précisément :  $x - 0.001 < u_n \leq x$ .

5. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} x^k = \sum_{k=1}^n x^k + x^{n+1} = f_n(x) + x^{n+1}.$$

En particulier,  $f_{n+1}(u_n) = \underbrace{f_n(u_n)}_{=1} + (u_n)^{n+1} = 1 + \underbrace{(u_n)^{n+1}}_{\geq 0}$  donc  $[f_{n+1}(u_n) \geq 1]$ .

Puisque on a aussi  $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$ , on en déduit que  $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$  et donc  $u_n \geq u_{n+1}$  car la fonction  $f_{n+1}$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$ .

On a bien montré que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq u_{n+1}$  : [la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante].

6. (a) Par définition,  $u_2$  est l'unique solution dans  $[0, 1]$  de l'équation  $f_2(x) = 1$ , c'est à dire  $x + x^2 = 1$  i.e  $x^2 + x - 1 = 0$ . Le discriminant est  $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) = 5 > 0$ .

On a donc les deux solutions  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

On élimine la solution négative pour conserver  $u_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ .

On a évidemment  $\sqrt{5} \geq 1$  donc  $u_2 \geq 0$ . De plus, on a les équivalences :

$$u_2 < 1 \iff \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1 \iff -1 + \sqrt{5} < 2 \iff \sqrt{5} < 3 \iff 5 < 9 \text{ ce qui est bien vrai.}$$

Ainsi  $[0 \leq u_2 < 1]$ .

(b) Attention : Le fait que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [0, 1[$  ne suffit pas à dire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^n = 0$ .

Contre-exemple :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{1}{n} \in [0, 1[$  et pourtant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0$ . (vérifiez !)

Ici, puisque la suite est décroissante, on peut affirmer que :

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq u_n \leq u_2 \quad \text{et donc} \quad 0 \leq (u_n)^n \leq (u_2)^n.$$

Puisque  $u_2 \in [0, 1[$  (et c'est une constante!),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_2)^n = 0$ .

On conclut avec le théorème des gendarmes que  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^n = 0}$ .

7. On a vu que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et minorée par 0, donc converge vers un réel  $\ell \in [0, 1[$  (car  $\forall n \geq 2, 0 \leq u_n \leq u_2 < 1$ ).

Revenons au fait que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(u_n) = 1$ .

On reprend cette fois la première expression pour  $f_n$  :  $\forall x \in [0, 1[, f_n(x) = \frac{x}{x-1}(x^n - 1)$ .

Pour tout  $n \geq 2$ , puisque  $u_n \in [0, 1[$ , on obtient :

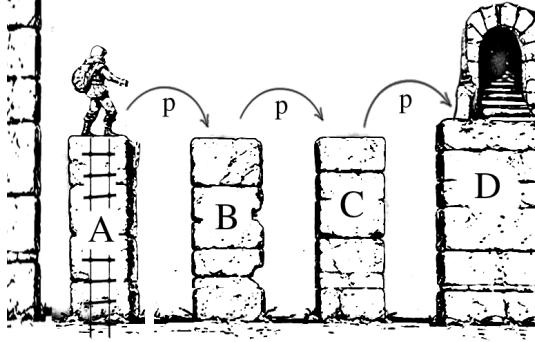
$$f_n(u_n) = 1 \text{ c'est à dire } \frac{u_n}{u_n - 1}((u_n)^n - 1) = 1.$$

En passant à la limite dans cette égalité quand  $n \rightarrow +\infty$  :

$$\frac{\ell}{\ell - 1}(0 - 1) = 1 \text{ i.e } \frac{-\ell}{\ell - 1} = 1 \text{ i.e } -\ell = \ell - 1 \text{ i.e } \ell = \frac{1}{2}.$$

Pour conclure, on a montré que  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}}$ .

# Problème : Escape the dungeon



- Si un saut est réussi, l'aventurier rejoint la prochaine plateforme à l'instant suivant.
- Si un saut est raté, l'aventurier tombe au sol et doit remonter à l'échelle. À l'instant suivant, il revient ainsi sur la première plateforme A et doit tout recommencer.
- Si l'aventurier atteint la plateforme D à l'instant  $n$ , il rejoint la sortie du donjon. Par convention, on décide alors qu'il se situe en D pour tous les instants suivants.

## Partie I : Relations de récurrence

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $A_n$  l'événement : "L'aventurier se situe sur la plateforme A à l'instant  $n$ ". On introduit, de même, les événements  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$  pour les plateformes B, C et D.

1. (a) • A l'instant 0, on sait que l'aventurier se situe en A :

$$P(A_0) = 1, \quad P(B_0) = 0, \quad P(C_0) = 0, \quad P(D_0) = 0.$$

- A l'instant 1 : soit le saut est réussi et l'aventurier est en B (proba  $p$ ), soit le saut est raté et l'aventurier reste en A (proba  $1 - p$ ) :

$$P(A_1) = 1 - p, \quad P(B_1) = p, \quad P(C_1) = 0, \quad P(D_1) = 0.$$

- A l'instant 2 : soit les deux premiers sauts sont réussis : il est en C (proba  $p^2$ ), soit le premier saut est raté et le second réussi : il est en B (proba  $(1 - p)p$ ) soit le deuxième saut est raté : il est en A (proba  $1 - p$ )

$$P(A_2) = 1 - p, \quad P(B_2) = (1 - p)p, \quad P(C_2) = p^2, \quad P(D_2) = 0.$$

- (b) En fait, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n) = 1$  ?

On peut justifier cela en disant qu'un et un seul des événements  $A_n, B_n, C_n, D_n$  est forcément réalisé. Pour le dire autrement,  $(A_n, B_n, C_n, D_n)$  est un système complet d'événements.

Il en résulte que :  $1 = P(\Omega) = P(A_n \cup B_n \cup C_n \cup D_n) = P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n)$ .

2. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On applique la formule des probabilités totales avec le S.C.E  $(A_n, B_n, C_n, D_n)$  :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) + P(D_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(A_{n+1}). \end{aligned}$$

Précisons la valeur des probabilités conditionnelles :

- Sachant que l'aventurier est en A, il y reste avec proba  $1 - p$  (quand il rate le premier saut) :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - p.$$

- Sachant que l'aventurier est en B, il rejoint A avec proba  $1 - p$  (quand il rate le 2ème saut) :

$$P_{B_n}(A_{n+1}) = 1 - p.$$

- Sachant que l'aventurier est en C, il rejoint A avec proba  $1 - p$  (quand il rate le 3ème saut) :

$$P_{C_n}(A_{n+1}) = 1 - p.$$

- Sachant que l'aventurier est en D, il a quitté le donjon et restera indéfiniment en D :

$$P_{D_n}(A_{n+1}) = 0.$$

(Ou alors on peut dire que  $P(D_n \cap A_{n+1}) = 0$ . directement).

En remplaçant, on obtient :  $P(A_{n+1}) = (1 - p)P(A_n) + (1 - p)P(B_n) + (1 - p)P(C_n)$ .

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Même chose, on peut appliquer la formule des probas totales :

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(A_n) \times \underbrace{P_{A_n}(B_{n+1})}_{=p} + P(B_n) \times \underbrace{P_{B_n}(B_{n+1})}_{=0} + P(C_n) \times \underbrace{P_{C_n}(B_{n+1})}_{=0} + P(D_n) \times \underbrace{P_{D_n}(B_{n+1})}_{=0} \\ &= pP(A_n). \end{aligned}$$

Autrement, pour aller plus vite, on peut dire que pour être en  $B$  à l'instant  $n+1$ , il faut forcément être en  $A$  à l'instant  $n$ . Ainsi  $B_{n+1} = A_n \cap B_{n+1}$  et donc :

$$P(B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) = P(A_n) \times p$$

Bref, on conclut que  $P(B_{n+1}) = pP(A_n)$ .

De même, pour être en  $C$  à l'instant  $n+1$ , il faut forcément être en  $B$  à l'instant  $n$ . Ainsi :

$$P(C_{n+1}) = P(B_n \cap C_{n+1}) = P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) = P(B_n) \times p$$

donc  $P(C_{n+1}) = pP(B_n)$ .

Enfin, pour être en  $D$  à l'instant  $n+1$  : soit on était en  $C$  à l'instant  $n$  (et on a réussi le saut), soit on était en déjà  $D$  à l'instant  $n$  (et on y reste automatiquement) :

$$\begin{aligned} P(D_{n+1}) &= P(C_n \cap D_{n+1}) + P(D_n \cap D_{n+1}) = P(C_n) \times P_{C_n}(D_{n+1}) + P(D_n) \cap P_{D_n}(D_{n+1}) \\ &= P(C_n) \times p + P(D_n) \times 1, \end{aligned}$$

donc  $P(D_{n+1}) = pP(C_n) + P(D_n)$ .

(c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , d'après le 2.(a),

$$P(A_{n+3}) = (1-p)P(A_{n+2}) + (1-p)P(B_{n+2}) + (1-p)P(C_{n+2}).$$

Or, d'après les formules du 2.(b),

$$P(B_{n+2}) = pP(A_{n+1}) \quad \text{et} \quad P(C_{n+2}) = pP(B_{n+1}) = p \times pP(A_n) = p^2P(A_n).$$

En remplaçant, on obtient bien :

$$P(A_{n+3}) = (1-p)(P(A_{n+2}) + pP(A_{n+1}) + p^2P(A_n)).$$

3.

```
def proba(p,n) :
    u = 1 ; v = p ; w = 1-p # P(A0), P(A1) et P(A2)
    for k in range(1,n+1) : # ou range(n), n passages
        x = (1-p)*w + (1-p)*p*v + (1-p)*p*p*u
        u = v
        v = w
        w = x
    return u
```

## Partie II : Recherche de racine et conséquences

On rappelle que  $p \in ]0, 1[$  est une valeur fixée.

On cherche à montrer que l'équation  $(E) : x^3 = (1-p)(x^2 + px + p^2)$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$ .

4. On pose  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - (1-p)(x^2 + px + p^2)$ . Alors :

- $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (c'est un polynôme)
- $f(0) = -(1-p)p^2$  donc  $f(0) < 0$  (car  $p \in ]0, 1[$ )
- $f(1) = 1 - (1-p)(1+p+p^2) = p^3$  donc  $f(1) > 0$  (car  $p \in ]0, 1[$ ).

D'après le TVI, on conclut que  $f$  s'annule (au moins !) une fois dans  $]0, 1[$ .

5. Pour que  $x = p$  soit une solution de  $(E)$ , il faut et il suffit que :

$$\begin{aligned} p^3 = (1-p)(p^2 + p \times p + p^2) &\iff p^3 = 3(1-p)p^2 \iff p^3 = 3p^2 - 3p^3 \\ &\iff 4p^3 - 3p^2 = 0 \iff p^2(4p - 3) = 0. \\ &\iff 4p - 3 = 0 \quad (\text{car } p \neq 0). \end{aligned}$$

L'unique valeur de  $p$  telle que  $x = p$  soit solution de  $(E)$  est donc  $p = \frac{3}{4}$ .

6. Soit  $x \neq p$ . On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 (E) : x^3 = (1-p)(x^2 + px + p^2) &\iff x^3(x-p) = (1-p)(x^2 + px + p^2)(x-p) \quad (\text{car } x-p \neq 0) \\
 &\iff x^3(x-p) = (1-p)(x^3 - p^3) \quad (\text{en développant}) \\
 &\iff x^3(x-p) = (1-p)x^3 - (1-p)p^3 \\
 &\iff x^3(x-p) - x^3(1-p) = -(1-p)p^3 \\
 &\iff x^3(x-1) = -(1-p)p^3 \\
 &\iff x^3(1-x) = p^3(1-p) : (E')
 \end{aligned}$$

On a bien montré que pour  $x \neq p$ , l'égalité  $(E)$  équivaut à  $(E')$ .

7. (a) Puisque  $p \in ]0, 1[$ , on a  $p^3(1-p) > 0$ . Ainsi pour que  $x$  soit solution de  $(E')$ , on doit avoir :

$$x^3(1-x) > 0 \iff (x^3 > 0 \text{ et } x < 1) \text{ ou } \underbrace{(x^3 < 0 \text{ et } x > 1)}_{\text{impossible}} \iff 0 < x < 1.$$

Ceci montre que toutes les solutions de  $(E')$  sont dans l'intervalle  $]0, 1[$ .

(b) Comme suggéré, on pose  $\forall x \in ]0, 1[, \varphi(x) = x^3(1-x)$ .

Notons que résoudre l'équation  $(E')$  revient à chercher les  $x \in ]0, 1[$  tels que  $\varphi(x) = \varphi(p)$ .

$\varphi$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et :

$$\forall x \in ]0, 1[, \varphi(x) = x^3 - x^4 \text{ donc } \varphi'(x) = 3x^2 - 4x^3 = x^2(3 - 4x).$$

On voit ainsi que  $\varphi'(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant \frac{3}{4}$ . On obtient donc le tableau de variations :

$x$	0	$\frac{3}{4}$	1
$\varphi'(x)$	+	0	-
$\varphi(x)$	0	$\varphi(\frac{3}{4})$	0

On distingue alors deux cas :

- Si  $p = \frac{3}{4}$ , il y a un unique réel  $x \in ]0, 1[$  tel que  $\varphi(x) = \varphi(p)$  : c'est  $x = \frac{3}{4}$ .

Ainsi : Si  $p = \frac{3}{4}$ , l'équation  $(E')$  admet l'unique solution  $\frac{3}{4}$ , c'est à dire  $p$ .

- Si  $p \neq \frac{3}{4}$ , on a  $\varphi(p) < \varphi(\frac{3}{4})$  (puisque  $\varphi$  atteint son maximum en  $\frac{3}{4}$ ).

D'après le TVI avec stricte monotonie, il existe donc deux valeurs  $x \in ]0, 1[$  telles que  $\varphi(x) = \varphi(p)$  : une solution dans l'intervalle  $]0, \frac{3}{4}[$  et une solution dans l'intervalle  $]\frac{3}{4}, 1[$ .

Bien-sûr, on a  $\varphi(p) = \varphi(p)$ , donc  $x = p$  est l'une de ces deux solutions.

Ainsi : Si  $p \neq \frac{3}{4}$ , l'équation  $(E')$  admet deux solutions :  $p$ , et une autre valeur dans  $]0, 1[$ .

8. Raboutons consciencieusement tous les argument...

- Premier cas :  $p = \frac{3}{4}$

Dans ce cas, on a vu en question 5. que  $x = p$  était solution de  $(E)$ .

De plus, c'est la seule. En effet, si  $x \neq p$  était une autre solution de  $(E)$ , il faudrait que  $x$  soit solution de  $(E')$ . Or (dans le cas  $p = \frac{3}{4}$ ) la seule solution de  $(E')$  est  $p$  : impossible !

Ainsi,  $(E)$  admet une unique solution (qui est  $p$ , c'est à dire  $\frac{3}{4}$ ).

- Second cas :  $p \neq \frac{3}{4}$

Dans ce cas, on a vu en question 5. que  $x = p$  n'était pas solution de  $(E)$ .

Pour que  $x$  soit solution de  $(E)$ , il faut donc que  $x \neq p$  et que  $x$  soit solution de  $(E')$ .

Or (dans le cas  $p \neq \frac{3}{4}$ )  $(E')$  admet une unique solution différente de  $p$ .

Ainsi,  $(E)$  admet bien une unique solution (une valeur dans  $]0, 1[$  différente de  $p$ ).

Conclusion : Dans tous les cas, on a montré que l'équation  $(E)$  admet une unique solution (qui, de plus, appartient à l'intervalle  $]0, 1[$ ).

Dans toute la suite, on note  $\alpha \in ]0, 1[$  l'unique solution de l'équation  $(E)$ .

9. (a) On commence par définir la fonction  $f(x) = x^3 - (1-p)(x^2 + px + p^2)$  en Python.

Attention : l'utilisateur devra fournir en entrée la valeur de  $x$ , mais aussi la valeur de  $p$ .

```
def f(p, x) :
    y = x**3 - (1-p)*(x**2 + p*x + p**2)
    return y
```

Ensuite, on applique l'algorithme classique de dichotomie pour déterminer une approximation de la valeur où  $f$  s'annule sur  $]0, 1[$ .

```
def dichotomie(p, eps) :
    a = 0 ; b = 1
    while b-a > eps :
        c = (a+b)/2
        if f(p, x) < 0 :
            a = c
        else :
            b = c
    return a
```

- (b) Notons que ce programme nous renvoie une approximation de  $\alpha$  par valeur inférieure (car on renvoie " $a$ " seulement, et non pas l'encadrement " $(a, b)$ " complet).

Puisque  $a$  est une valeur approchée de  $\alpha$  à  $\varepsilon$  près par valeur inférieure, on aura  $a \leq \alpha \leq a + \varepsilon$ .

Ici, avec  $a = 0.91894$  et  $\varepsilon = 0.001$ , cela donne l'encadrement :  $0.91894 \leq \alpha \leq 0.91994$ .

10. Soit  $C = \max \left( 1, \frac{p}{\alpha}, \frac{1-p}{\alpha^2} \right)$ . (On prend la plus grande de ces trois valeurs).

Par définition, on a donc  $C \geq 1$ ,  $C \geq \frac{p}{\alpha}$  et  $C \geq \frac{1-p}{\alpha^2}$ .

Montrons par récurrence triple que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P(A_n) \leq C\alpha^n$ .

Initialisation : On vérifie la propriété pour  $n \in \{0, 1, 2\}$ .

Les valeurs de  $P(A_0), P(A_1), P(A_2)$  ont été données en question 1.

- $P(A_0) = 1 \leq C$  car  $C \geq 1$ .

- $P(A_1) = p \leq C \times \alpha$  car  $C \geq \frac{p}{\alpha}$ .

- $P(A_2) = 1 - p \leq C\alpha^2$  car  $C \geq \frac{1-p}{\alpha^2}$ . (Ceci explique pourquoi on a choisi cette valeur de  $C$ )

Héritéité : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que

$$P(A_n) \leq C\alpha^n, \quad P(A_{n+1}) \leq C\alpha^{n+1}, \quad P(A_{n+2}) \leq C\alpha^{n+2},$$

et montrons que  $P(A_{n+3}) \leq C\alpha^{n+3}$ . On utilise la relation de récurrence établie en 2.(c) :

$$P(A_{n+3}) = (1-p)(P(A_{n+2}) + pP(A_{n+1}) + p^2P(A_n))$$

donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$$P(A_{n+3}) \leq (1-p)(C\alpha^{n+2} + pC\alpha^{n+1} + p^2C\alpha^n)$$

c'est à dire

$$P(A_{n+3}) \leq C\alpha^n \times (1-p)(\alpha^2 + p\alpha + p^2).$$

Puisque  $\alpha$  est la solution de l'équation  $(E)$ , on a  $\alpha^3 = (1-p)(\alpha^2 + p\alpha + p^2)$ , donc ceci donne :

$$P(A_{n+3}) \leq C\alpha^n \times \alpha^3$$

c'est à dire  $P(A_{n+3}) \leq C\alpha^{n+3}$ , ce qui achève la récurrence.

11. (a) On vient de voir que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq P(A_n) \leq C\alpha^n$ . Rappelons que  $\alpha \in ]0, 1[$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = 0$ .

D'après le théorème des gendarmes, on conclut que  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0}$ .

Pour  $P(B_n)$  et  $P(C_n)$ , on peut se rappeler des relations de récurrences du 2.(b) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(B_{n+1}) = pP(A_n), \quad P(C_{n+1}) = pP(B_n).$$

Ainsi  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p \times P(A_{n-1}) = 0}$  puis  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p \times P(B_{n-1}) = 0}$ .

- (b) On se rappelle que  $\forall n \in \mathbb{N}, P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n) = 1$  (vu en 1.(b)).

Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}, P(D_n) = 1 - \underbrace{P(A_n) + P(B_n) + P(C_n)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$ , d'où  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(D_n) = 1}$ .

**Interprétation :** Au bout d'un temps  $n$  très long, l'aventurier a (presque) 100% de chance de s'être échappé du donjon.

On note  $Z$  l'évènement "L'aventurier finit (à un moment) par s'échapper du donjon".

12. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Si l'évènement  $D_n$  est réalisé, alors l'aventurier a quitté le donjon à l'instant  $n$ .

En particulier, l'évènement  $Z$  est réalisé. Ceci montre que  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, D_n \subset Z}$ .

Il en résulte que :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(D_n) \leq P(Z) \leq 1$ .

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(D_n) = 1$ , d'après le théorème des gendarmes, on conclut :  $\boxed{P(Z) = 1}$ .

*On dit, dans ce genre de cas, que l'aventurier finira "presque-sûrement" par s'échapper du donjon.*

### Partie III : Nombre de tentatives

Pour finir, on segmente le parcours aléatoire de l'aventurier en différentes "tentatives" :

- L'aventurier démarre en A, et tente d'effectuer 3 sauts pour atteindre D : c'est la première tentative.
- Si l'aventurier tombe, il remonte sur la plateforme A et recommence : c'est une nouvelle tentative.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $T_k$  l'évènement : "L'aventurier atteint la sortie au bout de  $k$  tentatives exactement".

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $S_n$  l'évènement : "L'aventurier atteint la sortie en  $n$  tentatives ou moins".

13. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\boxed{S_n = \bigcup_{k=1}^n T_k}$  (c'est une union disjointe, les  $T_k$  étant 2 à 2 incompatibles)

14. L'évènement  $T_1$  signifie que l'aventurier sort du donjon dès sa première tentative, c'est à dire qu'il réussit ses trois premiers sauts d'affilée. Autrement dit,  $\boxed{T_1 = B_1 \cap C_2 \cap D_3}$ .

Chaque saut ayant une probabilité  $p$  d'être réussi, indépendamment des précédents,

on a bien-sûr  $\boxed{P(T_1) = p \times p \times p = p^3}$ .

On peut aussi expliquer cela avec la formule des probabilités composées :

$$P(T_1) = P(B_1 \cap C_2 \cap D_3) = \underbrace{P(B_1)}_{=p} \times \underbrace{P_{B_1}(C_2)}_{=p} \times \underbrace{P_{B_1 \cap C_2}(D_3)}_{=p} = p^3.$$

15. (a) Soit  $k \geq 2$ .

- Si  $T_k$  est réalisé, l'aventurier atteint la sortie au bout de la  $k$ -ème tentative, et pas avant.

Ainsi, ni  $T_1$ , ni  $T_2$ , ..., ni  $T_{k-1}$  ne sont réalisés. Ceci montre que  $\boxed{T_k \subset \bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{T_i}}$ .

- Conditionnellement à l'évènement  $\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}$ , c'est à dire en sachant que l'aventurier n'a pas atteint la sortie durant les  $k-1$  premières tentatives, la probabilité qu'il y arrive à la  $k$ -ème revient à la probabilité qu'il réussisse trois sauts consécutifs : c'est  $p^3$ .

(Même situation que pour le calcul de  $P(T_1)$  précédemment).

$$\text{Ainsi : } P_{\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}}(T_k) = p^3.$$

- Enfin, puisque  $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$ , on obtient ici :

$$P_{\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}}(\overline{T_k}) = 1 - P_{\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}}(T_k)$$

$$\text{c'est à dire } P_{\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}}(\overline{T_k}) = 1 - p^3.$$

- (b) Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on utilise la formule des probabilités composées :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{T_i}\right) = \underbrace{P(\overline{T_1})}_{=1-p^3} \times \underbrace{P_{\overline{T_1}}(\overline{T_2})}_{=1-p^3} \times \underbrace{P_{\overline{T_1} \cap \overline{T_2}}(\overline{T_3})}_{=1-p^3} \times \dots \times \underbrace{P_{\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}}(\overline{T_k})}_{=1-p^3}$$

$$\text{d'où : } P\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{T_i}\right) = (1 - p^3)^k.$$

Intuitivement, la probabilité de "rater" une tentative (conditionnellement au fait qu'on ait raté les précédentes) est toujours de  $1 - p^3$ . Il s'agit ici de rater les  $k$  premières tentatives successives.

- (c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a vu que  $S_n = \bigcup_{i=1}^n T_i$ . Autrement dit,  $\overline{S_n} = \bigcap_{i=1}^n \overline{T_i}$  avec la loi de (De) Morgan.

$$\text{Ainsi : } P(S_n) = 1 - P(\overline{S_n}) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{T_i}\right) \text{ d'où } P(S_n) = 1 - (1 - p^3)^n$$

16. (a) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

$$\text{On a vu en 15.(a) que } T_k \subset \bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{T_i}. \text{ Ainsi, } T_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{T_i}\right) \cap T_k. \text{ Il en résulte :}$$

$$P(T_k) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{T_i}\right) \cap T_k\right) = \underbrace{P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{T_i}\right)}_{=(1-p^3)^{k-1}} \times \underbrace{P_{\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}}(T_k)}_{=p^3}$$

$$\text{Ainsi : } P(T_k) = (1 - p^3)^{k-1} p^3. \quad (\text{On rate les } k-1 \text{ premières tentatives, on réussit la } k\text{-ème})$$

- (b) Rappelons que  $S_n = \bigcup_{k=1}^n T_k$  et que cette union est disjointe. On obtient donc :

$$\begin{aligned} P(S_n) &= P\left(\bigcup_{k=1}^n T_k\right) = \sum_{k=1}^n P(T_k) = \sum_{k=1}^n (1 - p^3)^{k-1} p^3 \\ &= p^3 \sum_{k=1}^n (1 - p^3)^{k-1} = p^3 \sum_{j=0}^{n-1} (1 - p^3)^j \\ &= p^3 \times \frac{1 - (1 - p^3)^n}{1 - (1 - p^3)} \end{aligned}$$

en utilisant la formule pour les sommes géométriques. En simplifiant, on retrouve  $P(S_n) = 1 - (1 - p^3)^n$ .

17. (a) Rappelons encore une fois que  $p \in ]0, 1[$ , donc  $p^3 \in ]0, 1[$  et donc  $1 - p^3 \in ]0, 1[$ .

$$\text{Il en résulte que } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - p^3)^n = 0 \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n) = 1.$$

Rappelons que l'évènement  $S_n$  est "L'aventurier atteint la sortie en  $n$  tentatives ou moins".

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , si  $S_n$  est réalisé, alors en particulier l'aventurier a fini par quitter le donjon, donc  $Z$  est réalisé. Ceci montre que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \subset Z$ .

On conclut classiquement que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(S_n) \leq P(Z) \leq 1$ ,

puis par théorème des gendarmes  $P(Z) = 1$ .

- (b) Généralisation : Au lieu de 3 sauts, on suppose que l'aventurier doit effectuer  $N \in \mathbb{N}^*$  sauts consécutifs pour rejoindre la plateforme  $D$  (la probabilité pour chaque saut étant toujours  $p$ ).

Dans ce cas, la probabilité de "réussir une tentative" devient  $p^N$  au lieu de  $p^3$ .

En adaptant les raisonnements précédents, on trouve cette fois :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(S_n) = 1 - (1 - p^N)^n$

A nouveau, on a facilement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n) = 1$ , et on déduit de  $P(S_n) \leq P(Z) \leq 1$  que  $P(Z) = 1$ .

Ainsi, même si le nombre  $N$  de sauts consécutifs à effectuer est très grand, la probabilité que l'aventurier finisse à un moment où à un autre par atteindre la sortie est de 1. On dit que l'aventurier finira presque-sûrement par s'échapper du donjon.