3

Applications

Image directe / réciproque

Exercice 1 (Des fonctions numériques)
Déterminer les images directes et les préimages demandées. On pourra au préalable établir un tableau de variation et/ou tracer un graphe.

1) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+2} \end{array}$

$f(\mathbb{R}_+)$, $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$, $f(]0,1])$, $f^{-1}(]0,1])$, $f^{-1}([3,4])$

2) $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2-x-1 \end{array}$

$g(\mathbb{R})$, $g([1,3])$, $g(]-1,1])$, $g^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$, $g^{-1}(\{1\})$

3) $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1-x^2} \end{array}$

$h(]-\infty,-1[)$, $h(]-1,1[)$, $h(]1,+\infty[)$ $h(]2,3])$, $h^{-1}(\{0\})$, $h^{-1}(\mathbb{R}_+)$

Exercice 2 (Antécédents multiples)

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \dfrac{1+(-1)^n}{2} \end{array}$

1) Quel est l'ensemble image de f ?
2) Pour chaque $m \in f(\mathbb{N})$, déterminer les antécédents de m, c'est à dire $f^{-1}(\{m\})$.

Injections / surjections / bijection

Exercice 3 (Étude d'injectivité/surjectivité)

Étudier l'injectivité et la surjectivité.

1) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ k & \mapsto & 2k+1 \end{array}$ 2) $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N} \\ k & \mapsto & k-1 \end{array}$

3) $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ k & \mapsto & k+1 \end{array}$

Exercice 4 (Calcul de réciproques)
Montrer que les applications suivantes sont bijectives et déterminer la réciproque.

1) $f: \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x^2-1) \end{array}$

2) $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+2}{x+1} \end{array}$

3) $h: \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{x(x-1)} \end{array}$

4) $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$

Composition

Exercice 5 (Calcul de composées)
Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ (on déterminera bien-sûr les domaines où ces composées ont du sens)

1) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-1} \end{array}$ $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

2) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1-x^2} \end{array}$ $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$

3) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & \dfrac{a}{b} \end{array}$ $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (2x, x^2-2) \end{array}$

Exercice 6 (Composition et bijections)

1. Montrer que $f: \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ t & \longmapsto & \dfrac{t+\frac{1}{t}}{2} \end{array}$
est bijective et calculer sa réciproque.
On pourra admettre (ou démontrer !) que :

$$\forall y \geqslant 1,\ y - \sqrt{y^2-1} \leqslant 1.$$

2. En utilisant une composition bien choisie,
en déduire que $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array}$
est bijective et calculer sa réciproque.

Un peu d'abstraction !

Exercice 7 (Interprétation graphique)
Tracer le graphe d'une application de $[0,1]$ dans $[2,3]$ qui soit :

a) bijective.
b) surjective et non injective.
c) injective et non surjective.
d) ni injective, ni surjective.
e) bijective, ni croissante ni décroissante
f) croissante, surjective, non injective.

Exercice 8 (Vrai ou faux ?)
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Démontrez-le ou donnez un contre-exemple.

1) La restriction d'une injection est injective.
2) Le prolongement d'une injection est injectif.
3) La restriction d'une surjection est surjective.
4) Le prolongement d'une surjection est surjectif.

Exercice 9 (Injectivité/surjectivité d'une composée)

Soient E, F, G trois ensembles.
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1) Montrer que si $g \circ f$ est injective, f est injective.
2) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, g est surjective.

Exercice 10 (Application unipotente)

Soit E un ensemble non vide et une application $f : E \to E$ telle que $f \circ f = f$.

1) Montrer que si f est injective, alors $f = Id_E$.

2) Montrer que si f est surjective, alors $f = Id_E$.

3) Donner un exemple d'application f telle que $f \circ f = f$, différente de l'identité.