6

Polynômes

Exercice 1 (Calcul de degré)

(a) $deg(P) = 3$, coefficient dominant : $-\dfrac{1}{3}$.
(b) $deg(Q) = 1$, coefficient dominant : 4.
(c) $deg(R) = 11$, coefficient dominant : 6.

Exercice 2 (Divisions à poser)

Poser les divisions à la main...

Exercice 3 (Déterminer le reste)

(a) Cette division euclidienne s'écrit $x^n - x + 1 = (x-2)Q(x) + R(x)$ avec $Q, R \in \mathbb{R}[x]$ et $deg(R) < deg(x-2)$, c'est à dire $deg(R) \leqslant 0$. Ainsi, R est polynôme constant : notons $R(x) = \lambda$ avec un $\lambda \in \mathbb{R}$.
En revenant à l'égalité précédente, on a $x^n - x + 1 = (x-2)Q(x) + \lambda$.
En évaluant en 2, on obtient $2^n - 1 = \lambda$. Ainsi le reste est $\boxed{R(x) = 2^n - 1}$.

(b) Cette division euclidienne s'écrit $x^n - x + 1 = (x-2)(x-1)Q(x) + R(x)$ avec $Q, R \in \mathbb{R}[x]$ et $deg(R) < deg((x-2)(x-1))$, c'est à dire $deg(R) \leqslant 1$. Ainsi, R peut s'écrire notons $R(x) = ax+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer.
En revenant à l'égalité précédente, on a $x^n - x + 1 = (x-2)(x-1)Q(x) + ax + b$.

En évaluant en 1, on obtient $1 = a + b$. En évaluant en 2, on obtient $2^n - 1 = 2a + b$.

On résout rapidement ce système :

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=1 \\ 2a+b=2^n-1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a+b=1 \\ a=2^n-2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} b=1-(2^n-2) \\ a=2^n-2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} b=3-2^n \\ a=2^n-2 \end{array}\right.$$

Ainsi le reste est $\boxed{R(x) = (2^n-2)x + 3 - 2^n}$.

(c) Cette division euclidienne s'écrit $x^n - x + 1 = (x-2)^2Q(x) + R(x)$ avec $Q, R \in \mathbb{R}[x]$ et $deg(R) < deg((x-2)^2)$, c'est à dire $deg(R) \leqslant 1$. Ainsi, R peut s'écrire notons $R(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer.
En revenant à l'égalité précédente, on a $x^n - x + 1 = (x-2)^2Q(x) + ax + b$.

En évaluant en 2, on obtient $2^n - 1 = 2a + b$.

En dérivant l'égalité, on obtient : $nx^{n-1} - 1 = 2(x-2)Q(x) + (x-2)^2Q'(x) + a$.
En évaluant en 2 dans cette nouvelle égalité, on obtient : $n2^{n-1} - 1 = a$

On résout rapidement ce système :

$$\left\{\begin{array}{l} a=n2^{n-1}-1 \\ 2a+b=2^n-1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=n2^{n-1}-1 \\ b=2^n-1-2(n2^{n-1}-1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=n2^{n-1}-1 \\ b=(1-n)2^n+1 \end{array}\right.$$

Ainsi le reste est $\boxed{R(x) = (n2^{n-1}-1)x + (1-n)2^n + 1}$.

Exercice 4 (Dérivées positives)

Puisque $P(a) > 0$, on sait que P n'est pas le polynôme nul.
Notons $n = deg(P) \in \mathbb{N}$. On applique la formule de Taylor à P à l'ordre n en a :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i = P(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i.$$

Ainsi, pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a $x - a \geqslant 0$ donc :

$$P(x) = \underbrace{P(a)}_{>0} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{P^{(i)}(a)}{i!}}_{\geqslant 0} \underbrace{(x-a)^i}_{\geqslant 0} \quad \text{donc} \quad P(x) > 0.$$

Ceci montre en particulier que P ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$, d'où le résultat.

Exercice 5 (Lien racines/coefficients)

1. P est unitaire de degré 3, donc de la forme : $P = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
Puisqu'il est de degré 3 et admet 3 racines α, β, γ (comptées avec multiplicité), sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma).$$

En développant ceci, on obtient :

$$X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = X^3 - (\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma.$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a_2 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = a_1 \\ \alpha\beta\gamma = -a_0 \end{cases}$$

2. Soient (x, y, z) une solution du système d'équations : $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ xy + xz + yz = 5 \\ xyz = 2 \end{cases}$

D'après la question précédente, en posant $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$, on peut aussi écrire $P = (X - x)(X - y)(X - z)$.
Autrement dit, x, y et z sont les racines du polynôme $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$.
Cherchons donc les racines de P.

On voit que 1 est racine de P : $P(1) = 1 - 4 + 5 - 2 = 0$.
De plus $P' = 3X^2 - 8X + 5$ donc $P'(1) = 3 - 8 + 5 = 0$.
$P'' = 6X - 8$ donc $P''(1) \neq 0$. Ainsi 1 est racine double de P.

On peut donc écrire $P = (X - 1)^2Q$. En posant la division euclidienne, on trouve $Q = (X - 2)$.

On a donc la factorisation : $P = (X - 1)^2(X - 2)$.

L'ensemble des racines de P est donc $\{1, 2\}$. Comme les racines de P sont x, y et z, on a nécessairement :

$$(x, y, z) = (1, 1, 2) \quad \text{ou} \quad (x, y, z) = (1, 2, 1) \quad \text{ou} \quad (x, y, z) = (2, 1, 1).$$

Inversement, ces trois triplets sont solutions du système d'équations, on a donc trouvé toutes les solutions !

Exercice 6 (Factorisation)

(a) $R = 2X^4 - 2X^2 - 4X + 4$.
On remarque que 1 est une racine évidente : $R(1) = 2 - 2 - 4 + 4 = 0$.
Trouvons sa multiplicité :
$R' = 8X^3 - 4X - 4$ donc $R'(1) = 0$.
$R'' = 24X^2 - 4$ donc $R''(1) \neq 0$. Ainsi 1 est de multiplicité 2 (racine double).
On cherche donc à écrire $R = (X - 1)^2 \times Q$. En posant la division euclidienne, on trouve $Q = 2X^2 + 4X + 4$.
Ce polynôme de degré 2 est de discriminant $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 4 < 0$. On ne peut donc pas le factoriser davantage.
Ainsi on obtient $R = (X - 1)^2(2X^2 + 4X + 4)$, soit $\boxed{R = 2(X - 1)^2(X^2 + 2X + 2)}$

(b) $Q = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$.
On remarque que -1 est une racine évidente : $Q(-1) = 1 + 2 - 3 - 4 + 4 = 0$.
On remarque (si on a l'oeil !) que 2 est une racine évidente : $Q(2) = 16 - 16 - 12 + 8 + 4 = 0$.
On cherche leur multiplicités :
$Q' = 4x^3 - 6x^2 - 6x + 4$ donc $Q'(-1) = -4 - 6 + 6 + 4 = 0$ et $Q'(2) = 32 - 24 - 12 + 4 = 0$
$Q'' = 12x^2 - 12x - 6$ donc $Q''(-1) = 12 + 12 - 6 \neq 0$ et $Q''(2) = 12 \times 4 - 12 \times 2 - 6 \neq 0$
Ainsi -1 et 2 sont des racines doubles.
On cherche donc à écrire $Q = (x + 1)^2(x - 2)^2 \times \widetilde{Q}$.
En fait, pour des raisons de degré, $\widetilde{Q} = \lambda$ est un polynôme constant !
De plus, puisque Q est un polynôme unitaire, on doit avoir $\lambda = 1$. Pour conclure, on a $\boxed{Q = (x + 1)^2(x - 2)^2}$.

(c) $P = (4x^4 - 1)(x^2 + 1)$.
Etudions séparément chaque "morceau" :
• $x^2 + 1$ n'admet pas de racine : on ne peut pas le factoriser davantage.
• Avec une identité remarquable : $4x^4 - 1 = (2x^2) - 1^2 = (2x^2 - 1)(2x^2 + 1) = 4(x^2 - \frac{1}{2})(x^2 + \frac{1}{2})$.
Avec la même identité, $x^2 - \frac{1}{2} = x^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = (x - \frac{1}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}})$.
Quant à $(x^2 + \frac{1}{2})$, il n'admet pas de racine : on ne peut pas le factoriser davantage !

En conclusion, on obtient : $\boxed{P = 4(x - \frac{1}{\sqrt{2}})(x + \frac{1}{\sqrt{2}})(x^2 + \frac{1}{2})(x^2 + 1)}$.

Exercice 7 (Équations fonctionnelles classiques)

(a) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme quelconque. On a les équivalences :

$$P(-X) = P(X) \iff \sum_{k=0}^{n} a_k(-X)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \iff \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$
$$\iff \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k \times (-1)^k = a_k.$$

Autrement dit : pour tout k impair, on doit avoir $a_k = 0$.
Un polynôme pair est donc composé uniquement de puissances paires de X.

(b) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme quelconque. On a les équivalences :

$$P(-X) = -P(X) \iff \sum_{k=0}^{n} a_k(-X)^k = -\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \iff \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k X^k = \sum_{k=0}^{n} (-a_k) X^k$$
$$\iff \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k \times (-1)^k = -a_k.$$

Autrement dit : pour tout k pair, on doit avoir $a_k = 0$.
Un polynôme impair est donc composé uniquement de puissances impaires de X.

(c) • Le polynôme nul satisfait bien $P' = P$.
• Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est non nul, on a nécessairement $\deg(P') < \deg(P)$, donc on ne peut pas avoir $P' = P$!
Conclusion : le seul polynôme satisfaisant $P' = P$ est le polynôme nul.

(d) • Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul satisfaisant $P(X^2) = P(X)$.
En notant $n = \deg(P)$, on constate facilement que $\deg(P(X^2)) = 2n$.
On doit donc avoir $2n = n$, c'est à dire $n = 0$. P est donc un polynôme constant.
• Inversement, il est clair que tout polynôme constant (dont le polynôme nul) satisfait bien $P(X^2) = P(X)$.
Conclusion : les polynômes satisfaisant $P(X^2) = P(X)$ sont exactement les polynômes constants.

(e) • Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ satisfaisant $P(X + 1) = P(X)$.
On constate facilement que $P(1) = P(0 + 1) = P(0)$.
Puis $P(2) = P(1 + 1) = P(1) = P(0)$. Puis $P(3) = P(2 + 1) = P(2) = P(0)$...
Par récurrence immédiate, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = P(0)$.
En notant Q le polynôme constant égal à la valeur $P(0) \in \mathbb{R}$, on a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = Q(n)$.
Les deux polynômes P et Q coïncident en une infinité de valeurs (tous les points entiers) : d'après un résultat de cours, ils sont donc égaux !
On a donc $P = Q$, c'est à dire que P est un polynôme constant (égal à la valeur $P(0)$).
• Inversement, il est clair que tout polynôme constant satisfait $P(X + 1) = P(X)$.
Conclusion : les polynômes satisfaisant $P(X + 1) = P(X)$ sont exactement les polynômes constants.

Exercice 8 (Une injection)

Montrons que φ est une application injective.
Pour cela, on fixe $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on suppose que $\varphi(P) = \varphi(Q)$ et on doit montrer que $P = Q$. On a :

$$\varphi(P) = \varphi(Q) \iff \Big(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)\Big) = \Big(Q(a_0), Q(a_1), \dots, Q(a_n)\Big) \iff \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = Q(a_i).$$

Ainsi, P et Q sont de degré inférieur ou égal à n (car ce sont des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$) et ils coïncident en $n+1$ valeurs distinctes (car $a_0, a_1, \dots a_n$ sont supposés 2 à 2 distincts). On en déduit que $P = Q$!
Ceci montre l'injectivité de φ.

Exercice 9 (Valeurs imposées)

1. Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que $\forall k \in [\![1, n+1]\!],\ P(k) = \frac{1}{k}$.
Introduisons le polynôme $Q(x) = xP(x) - 1$.
Puisque $\deg(Q) = \deg(P) + 1$, on a $\deg(Q) \leqslant n$.
De plus : $\forall k \in [\![1, n+1]\!]\ Q(k) = kP(k) - 1 = k \times \frac{1}{k} - 1 = 0$.
Ainsi Q est de degré inférieur ou égal à n et admet $n+1$ racines distinctes : c'est donc que $Q = 0$.
Mais c'est absurde puisque $Q(0) = 0 \times P(0) - 1 = -1 \neq 0$.
(ou alors c'est absurde car on apprendrait que "$P(x) = \frac{1}{x}$", mais ceci n'est pas un polynôme...)
Contradiction ! C'est donc qu'il n'existe pas de tel polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

2. (a) On reprend le même raisonnement que précédemment :
Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré n tel que $\forall k \in [\![1, n+1]\!],\ P(k) = \frac{1}{k}$.
Introduisons le polynôme $Q(x) = xP(x) - 1$.
Puisque $\deg(Q) = \deg(P) + 1$, on a $\deg(Q) = n+1$.
De plus : $\forall k \in [\![1, n+1]\!]\ Q(k) = kP(k) - 1 = k \times \frac{1}{k} - 1 = 0$.
Q est donc de degré $n+1$ et admet $n+1$ racines distinctes : $1, 2, 3, \ldots, n+1$.
On sait donc que sa factorisation dans $\mathbb{R}[x]$ sera : $Q(x) = \lambda(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-(n+1))$
c'est à dire :
$$Q(x) = \lambda \prod_{k=1}^{n+1} (x-k), \text{ avec un } \lambda \in \mathbb{R}.$$
Il reste à montrer que $\lambda = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$ pour avoir le résultat voulu...
En évaluant l'égalité précédente en 0, on obtient :
$$Q(0) = \lambda \prod_{k=1}^{n+1} (-k) \iff Q(0) = \lambda \times (-1)^{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} k \iff Q(0) = \lambda \times (-1)^{n+1}(n+1)!$$
Or comme $Q(x) = xP(x) - 1$, on sait que $Q(0) = -1$. Ainsi on obtient
$$-1 = \lambda \times (-1)^{n+1}(n+1)! \iff 1 = \lambda \times (-1)^n(n+1)! \iff \frac{1}{(-1)^n(n+1)!} = \lambda \iff \lambda = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}.$$
On a bien montré que : $Q(x) = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!} \displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} (x-k)$.

(b) Fin de la partie "analyse", passons à la "synthèse". On définit $Q(x) = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!} \displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} (x-k)$.
On cherche à montrer que :
$$\begin{aligned} Q(x)+1 \text{ est divisible par } x &\iff Q(x)+1 \text{ est divisible par } (x-0) \\ &\iff 0 \text{ est racine de } Q(x)+1 \iff Q(0)+1 = 0 \iff Q(0) = -1. \end{aligned}$$
Il suffit d'évaluer Q en 0 et de faire le même calcul de produit que dans le (a) :
$$Q(0) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \times \prod_{k=1}^{n+1} (-k) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \times (-1)^{n+1}(n+1)! = (-1)^n \times (-1)^{n+1} = (-1)^{2n+1} = -1.$$
On a donc bien montré que $Q(x) + 1$ est divisible par x.
Ceci signifie que l'on peut trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que : $Q(x) + 1 = x \times P(x)$.
Il reste à conclure :
- D'après la définition de Q, on a $\deg(Q) = n+1$ et donc $\underline{\deg(P) = n}$.
- Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, d'après la définition de Q, on a $Q(k) = 0$.

En évaluant $Q(x) + 1 = xP(x)$ en k, on obtient $1 = kP(k)$ c'est à dire $\underline{P(k) = \frac{1}{k}}$.

On a donc bien montré l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré n, tel que $\forall k \in [\![1, n+1]\!],\ P(k) = \dfrac{1}{k}$.

Exercice 10 (Polynôme interpolateur de Lagrange)

1. (a) Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on peut ré-écrire : $L_i(X) = \displaystyle\prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}} \left(\frac{1}{x_i - x_j} X - \frac{x_j}{x_i - x_j} \right)$. On a donc :

- $\deg(L_i) = n$ (produit de n polynômes de degré 1).
- Coefficient dominant : $\displaystyle\prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}} \frac{1}{x_i - x_j} = \frac{1}{\displaystyle\prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}} (x_i - x_j)}$

(b) Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on a :

- $L_i(x_i) = \displaystyle\prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}} \left(\frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} \right) = 1.$
- Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ avec $k \neq i$, $L_i(x_k) = \displaystyle\prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}} \left(\frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} \right) = 0$

(car le terme quand $j = k$ dans ce produit est nul !)

Ainsi, pour tout $(i,k) \in [\![0,n]\!]^2$: $\quad L_i(x_k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq i \\ 1 \text{ si } k = i \end{cases}$

2. (a) On a $P(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} y_i L_i(X)$.

- Puisque $\forall i \in [\![0,n]\!],\ \deg(L_i) = n$, on a $\deg(P) \leqslant n$, c'est à dire $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
- Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\quad P(x_k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} y_i \underbrace{L_i(x_k)}_{0 \text{ si } i \neq k} = y_k \underbrace{L_k(x_k)}_{=1} = y_k.$

(b) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme satisfaisant :

- $Q \in \mathbb{R}_n[X]$
- $\forall k \in [\![0,n]\!],\ Q(x_k) = y_k.$

Montrons qu'on a nécessairement $Q = P$.
On a $\deg(P) \leqslant n$, $\deg(Q) \leqslant n$ et : $\quad \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(x_k) = y_k = Q(x_k).$
Ainsi P et Q sont de degré inférieur ou égal à n et coïncident en $n+1$ valeurs distinctes.
C'est donc que $P = Q$!

Au final, on a montré dans cet exercice que quels que soient des réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ distincts, et des réels $y_0, y_1, \dots, y_n$ (pas forcément distincts), il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ satisfaisant :

- $P \in \mathbb{R}_n[X]$
- $\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(x_k) = y_k.$

On pourrait résumer ceci grossièrement par la phrase :
"Par $n+1$ points du plan passe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n".
(Les $n+1$ points du plan en question étant ici : $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$).