28

Couples de variables aléatoires discrètes - Corrigé

Exercice 1 (Choix uniformément uniforme)

1. Il est clair que $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$. On a également $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, conditionnellement à l'évènement $[X = i]$, on tire une boule dans l'urne numéro k, qui contient des boules numérotées de 1 à i. Sous cette condition, on reconnait donc pour Y la loi $\mathcal{U}([\![1, i]\!])$. Ainsi :

$$P_{[X=i]}(Y = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{i} \text{ si } j \in [\![1, i]\!] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Il en résulte que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $P([X = i] \cap [Y = j]) = P(X = i) \times P_{[X=i]}(Y = j)$, c'est à dire :

$$P\Big([X = i] \cap [Y = j]\Big) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{i} \text{ si } j \in [\![1, i]\!] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

2. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y = j) = \sum_{i=1}^{n} P\Big([X = i] \cap [Y = j]\Big) = \sum_{i=j}^{n} P\Big([X = i] \cap [Y = j]\Big) = \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i}.$$

On ne peut pas simplifier cette somme davantage.
3. On inversant les sommes :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=1}^{n} jP(Y = j) = \sum_{j=1}^{n} j \left(\frac{1}{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i} \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} \frac{j}{i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} j \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} \times \frac{i(i+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (i+1) = \frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \right) = \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{2} + 1 \right) = \frac{n+3}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 2 (Loi du couple donnée)

1. Il faut bien-sûr que $a \geqslant 0$, mais surtout :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} P([X = i] \cap [Y = j]) = 1 \iff a \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+j}} = 1 \iff a \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \right) = 1.$$

On reconnait une série géométrique convergente : $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1.$

Ainsi :

$$a \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = 1 \iff a \times 1 = 1 \iff a = 1.$$

2. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(X = i) = \sum_{j=1}^{+\infty} P\Big([X = i] \cap [Y = j]\Big) \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^i}.$$

On remarque donc que $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(X = i) = \dfrac{1}{2^i} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{i-1} \times \frac{1}{2}$, c'est à dire $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{2})$.

De la même façon (symétriquement), on trouve $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{2})$

3. X et Y sont bien indépendantes puisque pour tous $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$P([X=i] \cap [Y=j]) = \frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^i} \times \frac{1}{2^j} = P(X=i) \times P(X=j).$$

Exercice 3 (Expériences indépendantes de même résultat ?)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. C'est un cas particulier de la formule de Vandermonde mentionnée dans le cours.
On peut proposer la preuve suivante : en notant $P(X) = (1+X)^{2n}$, on a

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} X^k$$

donc le coefficient devant X^n dans le polynôme P est : $\binom{2n}{n}$. Mais d'autre part :

$$P(X) = (1+X)^n \times (1+X)^n = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j\right)$$

et en développant ce produit, on remarque que le coefficient devant X^n est :

$$\binom{n}{0} \times \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \times \binom{n}{n-1} + \binom{n}{2} \times \binom{n}{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} \times \binom{n}{n-n}.$$

C'est donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. On a donc bien l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

2. Notons X le nombre de "Pile" obtenu par le premier ami, Y le nombre de "Pile" obtenu par le deuxième ami.
Il est clair que :
- $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$,
- X et Y sont indépendantes.

On aura donc : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P(X=k) = P(Y=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$.
On cherche alors à calculer $P(X=Y)$, c'est à dire :

$$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} P([X=k]\cap[Y=k]) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\times P(Y=k) = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}.$$

Exercice 4 (Couple géométrique)

1. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$P([X=i] \cap [Y=j]) = P(X=i) \times P(Y=j) = (1-p)^{i-1}p \times (1-q)^{j-1}q.$$

2. Notons $Z = \min(X,Y)$. On a $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit tout $k \in \mathbb{N}^*$.

$$P(Z \geqslant k) = P(\min(X,Y) \geqslant k) = P([X \geqslant k] \cap [Y \geqslant k]) = P(X \geqslant k) \times P(Y \geqslant k).$$

On calcule :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant k) &= 1 - P(X < k) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} P(X=i) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1}(1-p)^{i-1}p \\ &= 1 - p\sum_{i=0}^{k-2}(1-p)^i = 1 - p\frac{1-(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)} = (1-p)^{k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P(Z \geqslant k) = (1-p)^{k-1}$. De même, $P(Y \geqslant k) = (1-q)^{k-1}$. Ainsi :

$$P(Z \geqslant k) = (1-p)^{k-1} \times (1-q)^{k-1} = ((1-p)(1-q))^{k-1}.$$

Notons $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(1-p)(1-q) = 1-\alpha$, c'est à dire $\alpha = 1-(1-p)(1-q) \in]0,1[$.
On a ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z \geqslant k) = (1-\alpha)^{k-1}$. Pour finir, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Z=k) = P(Z \geqslant k) - P(Z \geqslant k+1) = (1-\alpha)^{k-1} - (1-\alpha)^k = (1-\alpha)^{k-1}(1-(1-\alpha)) = (1-\alpha)^{k-1}\alpha.$$

On reconnait finalement que $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$, avec $\alpha = 1-(1-p)(1-q)$.

2. (a) On note $S = X+Y$. On a clairement $S(\Omega) = \{2,3,4,\dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pout tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
P(S=n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\Big([X=k] \cap [Y=n-k]\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P(Y=n-k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} P(X=k)P(Y=n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1}p(1-q)^{n-k-1}q \\
&= pq(1-q)^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{k-1}(1-q)^{-(k-1)} = pq(1-q)^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{k-1} \\
&= pq(1-q)^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{k}.
\end{aligned}$$

(b) • Supposons d'abord que $p=q$, on a donc $\dfrac{1-p}{1-q} = 1$. On obtient alors :

$$\forall n \geqslant 2,\ P(S=n) = pq(1-q)^{n-2} \times (n-1).$$

• Supposons maintenant que $p \neq q$. Dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{n-1}}{1-\frac{1-p}{1-q}} \times \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q-\frac{(1-p)^{n-1}}{(1-q)^{n-2}}}{1-q-(1-p)} = \frac{1-q-\frac{(1-p)^{n-1}}{(1-q)^{n-2}}}{p-q}$$

et donc

$$\forall n \geqslant 2,\ P(S=n) = pq(1-q)^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^k = \frac{pq}{p-q}\Big((1-q)^{n-1}-(1-p)^{n-1}\Big).$$

Exercice 5 (Calcul d'espérance)

Sous réserve de convergence de la série double, on a :

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{X}{1+Y}\right) &= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i}{1+j}P\Big([X=i]\cap[Y=j]\Big) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i}{1+j}e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \times e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!} \\
&= e^{-2\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\left(i\frac{\lambda^i}{i!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{1+j}\frac{\lambda^j}{j!}\right) = e^{-2\lambda} \times \left(\sum_{i=0}^{+\infty} i\frac{\lambda^i}{i!}\right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j+1}\frac{\lambda^j}{j!}\right).
\end{aligned}$$

Calculons ces deux sommes :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} i\frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=1}^{+\infty} i\frac{\lambda^i}{i!} = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{(i-1)!} = \lambda\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!} = \lambda e^\lambda.$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j+1}\frac{\lambda^j}{j!} = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{(j+1)!} = \lambda^{-1}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{j+1}}{(j+1)!} = \lambda^{-1}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = \lambda^{-1}(e^\lambda - 1).$$

Ainsi, $E\left(\dfrac{X}{1+Y}\right) = e^{-2\lambda} \times \lambda e^\lambda \times \lambda^{-1}(1-e^\lambda)1 - e^{-\lambda}$.

Exercice 6 (Loi conditionnelle)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

$$P_{[X+Y=n]}(X=k) = \frac{P\Big([X=k] \cap [X+Y=n]\Big)}{P(X+Y=n)} = \frac{P\Big([X=k] \cap [Y=n-k]\Big)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)}.$$

Calculons les différents termes :

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad P(Y=n-k) = e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}$$

donc :

$$P(X=k)P(Y=n-k) = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!(n-k)!}\lambda^k\mu^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k}.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} P(X+Y=n) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(X=i)P(Y=n-i) = \sum_{i=0}^{n} P(X=i)P(Y=n-i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \times e^{-\mu}\frac{\mu^{n-i}}{(n-i)!} = e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}\lambda^i\mu^{n-i} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\lambda^i\mu^{n-i} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\Big(\lambda+\mu\Big)^n. \end{aligned}$$

On conclut donc :

$$P_{[X+Y=n]}(X=k) = \frac{\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\binom{n}{k}\lambda^k\mu^{n-k}}{\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\Big(\lambda+\mu\Big)^n} = \binom{n}{k}\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^k(\lambda+\mu)^{n-k}} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}.$$