5

Suites réelles

1 Suites de nombres réels

1.1 Notion de suite réelle

Définition 1 (Suite réelle)

Une suite réelle est une application définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie $I \subset \mathbb{N}$), à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

Une telle suite est notée u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore $(u_n)_{n\geqslant 0}$ (parfois simplement (u_n)).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, le réel u_n est appelé "terme d'indice n".

L'ensemble des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$ est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (plutôt que $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$!)
Plus généralement, l'ensemble des suites réelles indexées par $I \subset \mathbb{N}$ est noté $\mathbb{R}^I$. (exemple : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$)

Attention !

De la même façon qu'il ne faut pas confondre l'application $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et le réel $f(x) \in \mathbb{R}$, on prendra garde à ne par confondre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et le n-ième terme $u_n \in \mathbb{R}$!

Ne pas écrire : "La suite u_n est croissante" ou bien "u_n converge"

Écrire : "La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante" ou bien "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge"

Une suite peut être définie de plusieurs manières :

1. **Suite définie explicitement :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne l'expression de u_n en fonction de n.

Exemples

On définit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$, $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (-1)^n$, $\quad \forall n \geqslant 1,\ w_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

2. **Suite définie par récurrence :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
(Ou bien l'expression de u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n ...)

Exemples

- On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
- On définit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fixant $s_0 = 120$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+1} = \begin{cases} 3s_n + 1 & \text{si } s_n \text{ est impair} \\ \frac{s_n}{2} & \text{si } s_n \text{ est pair} \end{cases}$
- On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $v_0 = 1$, $v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = v_n + v_{n+1}$.
- On définit la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $\begin{cases} w_0 = 1,\ w_1 = -1,\ w_2 = 2 \\ \forall n \geqslant 3,\ w_n = w_{n-1} + 2w_{n-2} - w_{n-3} \end{cases}$

3. **Suite définie implicitement :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit u_n comme l'unique solution d'une équation.

Exemple

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n l'unique solution de l'équation

$$\ln(x) = x^{-n} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

(En général, on demandera de justifier que cette équation a bien un unique solution pour tout $n \in \mathbb{N}$!)

1.2 Définitions et propriétés générales

Définition 2 (Opérations sur les suites)

Soient u et v deux suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $u+v$ est la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ (u+v)_n = u_n + v_n$.
- λu est la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ (\lambda u)_n = \lambda u_n$.
- uv est la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ (uv)_n = u_n v_n$.
- $\frac{u}{v}$ est la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\frac{u}{v}\right)_n = \frac{u_n}{v_n}$ (si $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \neq 0$).

Définition 3 (Suite majorée, minorée, bornée)

On dit que $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est majorée/minorée/bornée, lorsque l'ensemble $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est.
Autrement dit :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée $\Longleftrightarrow$ $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée $\Longleftrightarrow$ $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\Longleftrightarrow$ $\exists K \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant K.$

Exemples

- La suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par 0, majorée par 1 (donc bornée).
- La suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 1 : $\forall n \in \mathbb{N},\ |\sin(n)| \leqslant 1$.
- La suite $(n^3+1)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0, non majorée.

Remarque 1

On dit aussi qu'une suite est "positive" si elle est minorée par 0, "négative" si elle est majorée par 0. (ou bien "à terme positifs", "à termes négatifs")

Définition 4 ("à partir d'un certain rang")

On dira qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie à partir d'un certain rang lorsqu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant N$.

Exemples

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang si et seulement si :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_{n+1} = u_n.$$

Dans ce cas, on dit que la suite est stationnaire.
C'est par exemple le cas pour la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left\lfloor \frac{5}{n} \right\rfloor$.
En posant $N = 6$, on a : $\forall n \geqslant N,\ u_n = 0$.

- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n$ satisfait : $v_n > 1000$ à partir d'un certain rang.
(en choisissant $N = 10$, on a $\forall n > N,\ v_n > 1000$)

1.3 Sens de variation d'une suite

Définition 5 (Sens de variation)

Une suite réelle $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite :

- **Croissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$
- **Décroissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$
- **Strictement croissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$
- **Strictement décroissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.

On dit que u est **monotone** lorsque (u est croissante) ou (u est décroissante).

On dit que u est **strictement monotone** lorsque
(u est strictement croissante) ou (u est strictement décroissante).

Proposition 1 (Conséquences immédiates)

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors pour tous $m \leqslant n,\quad u_m \leqslant u_n$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors pour tous $m \leqslant n,\quad u_m \geqslant u_n$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante alors pour tous $m < n,\quad u_m < u_n$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante alors pour tous $m < n,\quad u_m > u_n$.

Preuve :

Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. On a donc $\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} - u_k \geqslant 0$.

Pour tous $m \leqslant n$, on peut écrire : $u_n - u_m = \displaystyle\sum_{k=m}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \geqslant 0$, d'où $u_m \leqslant u_n$.

De même dans les autres cas. $\square$

Listons différentes méthodes permettant de déterminer le sens de variation d'une suite.

Méthode : Déterminer le sens de variation en étudiant $(u_{n+1} - u_n)$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

Étude de la différence de deux termes consécutifs :

- Si on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
- Si on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Si les inégalités sont strictes, la suite est strictement croissante/décroissante.

Étude du ratio de deux termes consécutifs : ⚠ Pour une suite à termes strictement positifs

- Si on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
- Si on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Si les inégalités sont strictes, la suite est strictement croissante/décroissante.

⚠ Attention !

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement négatifs, les conclusions pour le ratio sont inversées !

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \Longrightarrow u_{n+1} \leqslant u_n \quad \text{et} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 \Longrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n.$$

Exercice 1

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n!$

On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $w_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{w_n}{1+nw_n^2}$

Déterminer les sens de variations de ces suites.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$,
d'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $v_n > 0$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(n+1)!}{n!} = (n+1) \geqslant 1$,
d'où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante (pas strictement !).
- On montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n > 0$:
$w_0 = 1 > 0$ et si jamais $w_n > 0$, on a $w_{n+1} = \dfrac{w_n}{1+nw_n^2} > 0$.

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{1}{1+nw_n^2} \leqslant 1$
d'où $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante (pas strictement !)

Méthode : Déterminer le sens de variation d'une suite définie explicitement

On considère une suite donnée explicitement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)}$ où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

- Si la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = f(n+1) \geqslant f(n) = u_n$.
- Si la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = f(n+1) \leqslant f(n) = u_n$.

Si la fonction f est strictement croissante/décroissante, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ également.

Attention !

Ne pas confondre avec le cas d'une fonction définie par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 2

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n}{n+1}$. $\quad$ Déterminer le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut écrire $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f(n)$, où f est la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \dfrac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$.

On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Il en résulte que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Méthode : Déterminer le sens de variation d'une suite définie par récurrence (simple)

On considère une suite donnée par récurrence : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)}$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\boxed{1}$ Deviner le sens de variation en calculant les premiers termes :
- Si $u_1 = f(u_0) \geqslant u_0$, on prévoit que la suite sera croissante.
- Si $u_1 = f(u_0) \leqslant u_0$, on prévoit que la suite sera décroissante.

$\boxed{2}$ Poser $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \leqslant u_{n+1}$" ou bien $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \geqslant u_{n+1}$"
et montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ce raisonnement s'adapte pour montrer la croissance/décroissance stricte.

Remarque 2

Pour qu'une suite définie par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ soit monotone (croissante ou décroissante), il est en fait nécessaire que la fonction f soit croissante ! L'hérédité dans la récurrence de l'étape $\boxed{2}$ s'appuie en effet sur la croissance de la fonction f :

$$\text{Si on a } u_{n+1} \leqslant u_n \quad \text{alors par croissance de } f \quad f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \quad \text{i.e} \quad u_{n+2} \leqslant u_{n+1}.$$

Attention !

Parfois f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais seulement sur un domaine de définition $D_f \subset \mathbb{R}$.
Dans ce cas, pour vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, il faut au préalable montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in D_f \quad \text{(par récurrence)}$$

Exercice 3

1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
Montrer que cette suite est bien définie et déterminer son sens de variation.

2. Même question en posant cette fois $u_0 = \frac{1}{2}$.

1. Une récurrence immédiate montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
En effet, $u_0 = 2 > 0$ et si $u_n > 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ est bien défini et strictement positif.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie.

On note que $u_1 = \sqrt{2} \simeq 1.4 < 2$, donc $u_1 < u_0$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.
<u>Initialisation :</u> $u_1 = \sqrt{2} < u_0 = 2$ (déjà vu).
<u>Hérédité :</u> soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_{n+1} < u_n$, montrons $u_{n+2} < u_{n+1}$.
On a $u_{n+1} < u_n$, donc $\sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{u_n}$ i.e $u_{n+2} < u_{n+1}$.
Ceci achève la récurrence : on a montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

2. À nouveau, par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

Par contre cette fois, $u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq \frac{1}{1.4} > \frac{1}{2}$, donc $u_1 > u_0$.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
<u>Initialisation :</u> $u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} > u_0 = \frac{1}{2}$ (déjà vu).
<u>Hérédité :</u> soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $u_{n+1} > u_n$, montrons $u_{n+2} > u_{n+1}$.
On a $u_{n+1} > u_n$, donc $\sqrt{u_{n+1}} > \sqrt{u_n}$ i.e $u_{n+2} > u_{n+1}$.

Ceci achève la récurrence : on a montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

2 Suites récurrentes classiques

2.1 Suites arithmétiques (rappels)

Définition 6 (Progression arithmétique)

On dit qu'une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est arithmétique lorsqu'il existe une constante $r \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r est appelé "raison" de la suite.

Exemple

Suite des entiers naturels pairs : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2$.

Proposition 2 (Sens de variation d'une suite arithmétique)

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

- Si $r = 0$, u est constante.
- Si $r > 0$, u est strictement croissante.
- Si $r < 0$, u est strictement décroissante.

Preuve rapide :

C'est évident en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n = r$. □

Proposition 3 (Terme général d'une suite arithmétique)

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$$

et plus généralement,

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_m + (n - m)r.$$

Preuve rapide :

Le premier point se démontre par récurrence immédiate :

$$u_0 = u_0 + 0 \times r \quad \text{et si} \quad u_n = u_0 + nr \quad \text{on a} \quad u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r.$$

Le second point découle du premier : pour tous $n, m \in \mathbb{N}$,

$$u_n - u_m = (u_0 + nr) - (u_0 + mr) = (n - m)r \quad \text{d'où} \quad u_n = u_m + (n - m)r.$$

□

Attention !

Si la suite arithmétique $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est indexée par $\mathbb{N}^*$, u_0 n'est bien-sûr pas défini !

On utilisera alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_1 + (n - 1)r$.

2.2 Suites géométriques (rappels)

Définition 7 (Progression géométrique)

On dit qu'une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est géométrique lorsqu'il existe une constante $q \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n.$$

Le réel q est appelé "raison" de la suite.

Exemples

$u = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2. $v = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Remarque 3

Ceci explique l'appellation "somme géométrique" pour la somme $\sum_{k=0}^{n} x^k$: il s'agit de la somme des premiers termes de la suite géométrique : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = x \times u_n$.

Proposition 4 (Sens de variation d'une suite géométrique)

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, u est positive et strictement croissante.
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, u est négative et strictement décroissante.
- Si $q = 1$ ou $u_0 = 0$, u est constante.
- Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, u est positive et strictement décroissante.
- Si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$, u est négative et strictement croissante.
- Si $q < 0$ et $u_0 \neq 0$, u n'est pas monotone (son signe alterne).

Preuve rapide :

Ces points s'obtiennent en étudiant le ratio $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ (attention au signe de u_n !)

$\square$

Proposition 5 (Terme général d'une suite géométrique)

Soit u une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n$$

et plus généralement,

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_m \times q^{n-m}.$$

Preuve :

Similaire à celle faite dans le cas d'une progression arithmétique. $\square$

Attention !

Si la suite géométrique $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est indexée par $\mathbb{N}^*$, u_0 n'est bien-sûr pas défini !

On utilisera alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

2.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 8 (Progression arithmético-géométrique)

On dit qu'une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique lorsqu'il existe deux constantes $r \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n + r.$$

Remarque 4

Si $q = 1$, la suite est arithmétique de raison r.
Si $q = 0$, la suite est constante égale à r.
Si $r = 0$, la suite est géométrique de raison q.

Méthode : Déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_{n+1} = qu_n + r}$ avec $q \neq 1$.

$\boxed{1}$ Introduire la constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $\boxed{\alpha = q\alpha + r}$ (autrement dit, $\alpha = \dfrac{r}{1-q}$).

$\boxed{2}$ Introduire la suite $v = u - \alpha$, c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{v_n = u_n - \alpha}$.

$\boxed{3}$: Vérifier que v est géométrique de raison q : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} & = qu_n + r \\ \alpha & = q\alpha + r \end{cases} \quad \text{donc} \quad u_{n+1} - \alpha = qu_n + r - (q\alpha + r) = q(u_n - \alpha) \quad \text{i.e} \quad v_{n+1} = qv_n.$$

$\boxed{4}$ En déduire l'expression de v_n : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n$ (avec $v_0 = u_0 - \alpha$)

$\boxed{5}$ En déduire l'expression de u_n : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + \alpha = v_0 \times q^n + \alpha$ (avec $v_0 = u_0 - \alpha$)

Remarque 5

Cette méthode s'adapte bien-sûr aux suites $(u_n)_{n \geqslant 1}$ indexées par $\mathbb{N}^*$.
Dans ce cas on fera bien attention à exprimer v_n en fonction de v_1 (et donc u_n en fonction de u_1).

Exercice 4

On pose $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2u_n + 1$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

On introduit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = 2\alpha + 1$, c'est à dire $\alpha = -1$.

Pour tout $n \geqslant 1$, posons $v_n = u_n - \alpha$, c'est à dire $v_n = u_n + 1$, et vérifions que v est une suite géométrique de raison 2.

Pour tout $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1) = 2v_n$.

On en déduit que $\forall n \geqslant 1,\ v_n = v_1 \times 2^{n-1} = (u_1 + 1) \times 2^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$.

Enfin, on conclut que $\forall n \geqslant 1,\ u_n = v_n - 1 = 3 \times 2^{n-1} - 1$.

2.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 9 (Récurrence linéaire d'ordre 2)

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite récurrente linéaire d'ordre 2 lorsqu'il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$ (avec $b \neq 0$) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Remarque 6

S'agissant d'une suite récurrente d'ordre 2 (un terme est défini en fonction des deux précédents), une telle suite est entièrement déterminée par la donnée des deux premiers termes u_0 et u_1.

Exemple

La suite de Fibonacci définie par : $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
est à récurrence linéaire d'ordre 2.

Méthode : Déterminer le terme général d'une suite à récurrence linéaire d'ordre 2

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n}$ (avec $b \neq 0$)

$\boxed{1}$ Résoudre l'**équation caractéristique** associée : $x^2 = ax + b$, i.e $\boxed{x^2 - ax - b = 0}$.

$\boxed{\text{2 - A}}$ Si l'équation caractéristique a deux solutions réelles distinctes q_1 et q_2, $(\Delta > 0)$
le terme général est de la forme : $\underline{u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ à determiner.

$\boxed{\text{2 - B}}$ Si l'équation caractéristique a une seule solution réelle q, $(\Delta = 0)$
le terme général est de la forme : $\underline{u_n = (\lambda + n\mu)q^n}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ à determiner.

$\boxed{3}$ Déterminer les valeurs de λ et μ à l'aide des 2 premiers termes de la suite.

Remarques 7

- Pour le moment, on se contente d'admettre que cette méthode fonctionne.
- Le cas où l'équation caractéristique n'admet pas de racine réelle $(\Delta < 0)$ est hors programme.

Exercice 5

On pose $u_0 = 1$, $u_1 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

L'équation caractéristique est $x^2 = -2x - 1$ i.e $x^2 + 2x + 1 = 0$ i.e $(x+1)^2 = 0$.
Cette équation a une seule racine réelle : $q = -1$.
On sait donc que le terme général sera de la forme $u_n = (\lambda + n\mu) \times (-1)^n$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Connaissant les valeurs des deux premiers termes :

$$\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} (\lambda + 0\mu) \times (-1)^0 & = & 1 \\ (\lambda + \mu) \times (-1)^1 & = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} \lambda & = & 1 \\ -\lambda - \mu & = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} \lambda & = & 1 \\ \mu & = & 1 \end{array}\right.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (1+n) \times (-1)^n$.

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Déterminer le sens de variation d'une suite avec la méthode adaptée.
- Déterminer le terme général d'une suite arithmétique / géométrique.
- Déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique.
- Déterminer le terme général d'une suite à récurrence linéaire d'ordre 2.

Pour suivre

- Calculer le terme général d'une suite avec d'autres outils
  (somme télescopique, introduction d'une autre suite...)

Pour les ambitieux

$\{\ \emptyset$