

Devoir Sur Table n°3 – Corrigé

Exercice 1 : Etude d'une suite implicite

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \frac{x}{x-1}(x^n - 1)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

(a) $f_n(x) = \frac{x}{x-1}(x^n - 1)$ a un sens lorsque $x \neq 1$. Ainsi, f_n est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Bien-sûr, f_n y est continue comme produit et quotient de fonctions usuelles (polynômes).

(b) On calcule la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x \times \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{y} = n \quad (\text{limite usuelle})$$

Ainsi, f_n est prolongeable par continuité en 1. En notant toujours f_n ce prolongement :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}(x^n - 1) & \text{si } x \neq 1, \\ n & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

2.

```
def f(n,x) :
    if x == 1 :
        return n
    else :
        return (x / (x-1)) * (x**n - 1)
```

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que :

- Si $x \neq 1$, $\sum_{k=1}^n x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1} = f_n(x)$.
- Si $x = 1$, $\sum_{k=1}^n x^k = \sum_{k=1}^n 1 = n = f_n(1)$.

Ainsi, on a bien $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$.

(b) On calcule la somme en Python :

```
def f(n,x) :
    S = 0
    for k in range(1,n+1) :
        S = S + x**k
    return S
```

ou bien, en utilisant l'instruction `np.sum` :

```
import numpy as np
def f(n,x) :
    L = [x**k for k in range(1,n+1)]
    S = np.sum(L)
    return S
```

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a déjà dit que f_n était continue sur \mathbb{R} , donc en particulier, f_n est continue sur $[0,1]$.

A partir de l'expression $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k = x + x^2 + \dots + x^n$, on voit facilement

que f_n est strictement croissante sur $[0,1]$ (somme de fonctions strictement croissantes).

Autrement on peut bien-sûr dériver : $\forall x \in]0,1[, f'_n(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} > 0$.

Enfin $f_n(0) = 0 < 1$ et $f_n(1) = n \geq 1$.

D'après le TVI avec stricte monotonie, il existe un unique $x \in [0,1]$ tel que $f_n(x) = 1$.

On note ce réel $u_n \in [0,1]$. On aura donc : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(u_n) = 1$.

(b)

```
def suite(n) :
    x = 0
    while f(n,x) < 1 :
        x += 0.001
    return x
```

On part de la valeur $x = 0$, et on augmente cette valeur petit à petit, en ajoutant 0.001 à chaque étape. On quitte la boucle dès que $f_n(x) \geq 1$, c'est à dire dès que x dépasse la valeur u_n .

Il en résulte que la valeur x renvoyée est une approximation de u_n à 0.001 près.

Précisément : $x - 0.001 < u_n \leq x$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} x^k = \sum_{k=1}^n x^k + x^{n+1} = f_n(x) + x^{n+1}.$$

En particulier, $f_{n+1}(u_n) = \underbrace{f_n(u_n)}_{=1} + \underbrace{(u_n)^{n+1}}_{\geq 0} = 1 + (u_n)^{n+1}$ donc $f_{n+1}(u_n) \geq 1$.

Puisque on a aussi $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$, on en déduit que $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$ et donc $u_n \geq u_{n+1}$ car la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $[0, 1]$.

On a bien montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq u_{n+1}$: la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

6. (a) Par définition, u_2 est l'unique solution dans $[0, 1]$ de l'équation $f_2(x) = 1$, c'est à dire $x + x^2 = 1$ i.e $x^2 + x - 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) = 5 > 0$.

On a donc les deux solutions $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

On élimine la solution négative pour conserver $u_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

On a évidemment $\sqrt{5} \geq 1$ donc $u_2 \geq 0$. De plus, on a les équivalences :

$$u_2 < 1 \iff \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1 \iff -1 + \sqrt{5} < 2 \iff \sqrt{5} < 3 \iff 5 < 9 \quad \text{ce qui est bien vrai.}$$

Ainsi $0 \leq u_2 < 1$.

(b) Attention : Le fait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, 1[$ ne suffit pas à dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^n = 0$.

Contre-exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{n} \in [0, 1[$ et pourtant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0$. (vérifiez !)

Ici, puisque la suite est décroissante, on peut affirmer que :

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq u_n \leq u_2 \quad \text{et donc} \quad 0 \leq (u_n)^n \leq (u_2)^n.$$

Puisque $u_2 \in [0, 1[$ (et c'est une constante!), $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_2)^n = 0$.

On conclut avec le théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^n = 0$.

7. On a vu que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0, donc converge vers un réel $\ell \in [0, 1[$ (car $\forall n \geq 2, \quad 0 \leq u_n \leq u_2 < 1$).

Revenons au fait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_n) = 1$.

On reprend cette fois la première expression pour $f_n : \forall x \in [0, 1[, \quad f_n(x) = \frac{x}{x-1}(x^n - 1)$.

Pour tout $n \geq 2$, puisque $u_n \in [0, 1[$, on obtient :

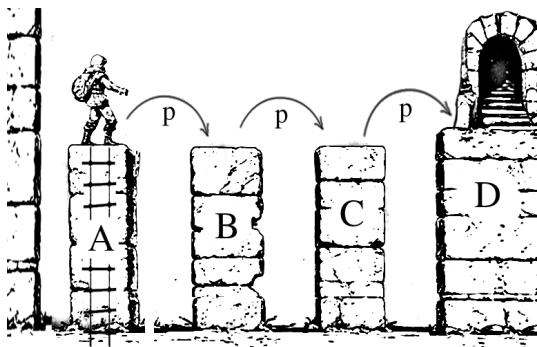
$$f_n(u_n) = 1 \text{ c'est à dire } \frac{u_n}{u_n - 1}((u_n)^n - 1) = 1.$$

En passant à la limite dans cette égalité quand $n \rightarrow +\infty$:

$$\frac{\ell}{\ell - 1}(0 - 1) = 1 \text{ i.e } \frac{-\ell}{\ell - 1} = 1 \text{ i.e } -\ell = \ell - 1 \text{ i.e } \ell = \frac{1}{2}.$$

Pour conclure, on a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Problème : Escape the dungeon



- Si un saut est réussi, l'aventurier rejoint la prochaine plateforme à l'instant suivant.
- Si un saut est raté, l'aventurier tombe au sol et doit remonter à l'échelle. À l'instant suivant, il revient ainsi sur la première plateforme A et doit tout recommencer.
- Si l'aventurier atteint la plateforme D à l'instant n , il rejoint la sortie du donjon. Par convention, on décide alors qu'il se situe en D pour tous les instants suivants.

Partie I : Relations de récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement : "L'aventurier se situe sur la plateforme A à l'instant n ".
On introduit, de même, les évènements B_n , C_n et D_n pour les plateformes B, C et D.

- (a) • A l'instant 0, on sait que l'aventurier se situe en A :

$$P(A_0) = 1, \quad P(B_0) = 0, \quad P(C_0) = 0, \quad P(D_0) = 0.$$

- A l'instant 1 : soit le saut est réussi et l'aventurier est en B (proba p),
soit le saut est raté et l'aventurier reste en A (proba $1 - p$) :

$$P(A_1) = 1 - p, \quad P(B_1) = p, \quad P(C_1) = 0, \quad P(D_1) = 0.$$

- A l'instant 2 : soit les deux premiers sauts sont réussis : il est en C (proba p^2),
soit le premier saut est raté et le second réussi : il en est B (proba $(1 - p)p$)
soit le deuxième saut est raté : il est en A (proba $1 - p$)

$$P(A_2) = 1 - p, \quad P(B_2) = (1 - p)p, \quad P(C_2) = p^2, \quad P(D_2) = 0.$$

- (b) En fait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n) = 1$?

On peut justifier cela en disant qu'un et un seul des évènements A_n, B_n, C_n, D_n est forcément réalisé. Pour le dire autrement, (A_n, B_n, C_n, D_n) est un système complet d'évènements.

Il en résulte que : $1 = P(\Omega) = P(A_n \cup B_n \cup C_n \cup D_n) = P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n)$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique la formule des probabilités totales avec le S.C.E (A_n, B_n, C_n, D_n) :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) + P(D_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(A_{n+1}). \end{aligned}$$

Précisons la valeur des probabilités conditionnelles :

- Sachant que l'aventurier est en A, il y reste avec proba $1 - p$ (quand il rate le premier saut) :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - p.$$

- Sachant que l'aventurier est en B, il rejoint A avec proba $1 - p$ (quand il rate le 2ème saut) :

$$P_{B_n}(A_{n+1}) = 1 - p.$$

- Sachant que l'aventurier est en C, il rejoint A avec proba $1 - p$ (quand il rate le 3ème saut) :

$$P_{C_n}(A_{n+1}) = 1 - p.$$

- Sachant que l'aventurier est en D, il a quitté le donjon et restera indéfiniment en D :

$$P_{D_n}(A_{n+1}) = 0.$$

(Ou alors on peut dire que $P(D_n \cap A_{n+1}) = 0$ directement).

En remplaçant, on obtient : $P(A_{n+1}) = (1 - p)P(A_n) + (1 - p)P(B_n) + (1 - p)P(C_n)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Même chose, on peut appliquer la formule des probas totales :

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(A_n) \times \underbrace{P_{A_n}(B_{n+1})}_{=p} + P(B_n) \times \underbrace{P_{B_n}(B_{n+1})}_{=0} + P(C_n) \times \underbrace{P_{C_n}(B_{n+1})}_{=0} + P(D_n) \times \underbrace{P_{D_n}(B_{n+1})}_{=0} \\ &= pP(A_n). \end{aligned}$$

Autrement, pour aller plus vite, on peut dire que pour être en B à l'instant $n+1$, il faut forcément être en A à l'instant n . Ainsi $B_{n+1} = A_n \cap B_{n+1}$ et donc :

$$P(B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) = P(A_n) \times p$$

Bref, on conclut que $P(B_{n+1}) = pP(A_n)$.

De même, pour être en C à l'instant $n+1$, il faut forcément être en B à l'instant n . Ainsi :

$$P(C_{n+1}) = P(B_n \cap C_{n+1}) = P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) = P(B_n) \times p$$

donc $P(C_{n+1}) = pP(B_n)$.

Enfin, pour être en D à l'instant $n+1$: soit on était en C à l'instant n (et on a réussi le saut), soit on était en déjà D à l'instant n (et on y reste automatiquement) :

$$\begin{aligned} P(D_{n+1}) &= P(C_n \cap D_{n+1}) + P(D_n \cap D_{n+1}) = P(C_n) \times P_{C_n}(D_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}) \\ &= P(C_n) \times p + P(D_n) \times 1, \end{aligned}$$

donc $P(D_{n+1}) = pP(C_n) + P(D_n)$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le 2.(a),

$$P(A_{n+3}) = (1-p)P(A_{n+2}) + (1-p)P(B_{n+2}) + (1-p)P(C_{n+2}).$$

Or, d'après les formules du 2.(b),

$$P(B_{n+2}) = pP(A_{n+1}) \quad \text{et} \quad P(C_{n+2}) = pP(B_{n+1}) = p \times pP(A_n) = p^2P(A_n).$$

En remplaçant, on obtient bien :

$$P(A_{n+3}) = (1-p)(P(A_{n+2}) + pP(A_{n+1}) + p^2P(A_n)).$$

3.

```
def proba(p,n) :
    u = 1 ; v = p ; w = 1-p # P(A0), P(A1) et P(A2)
    for k in range(1,n+1) : # ou range(n), n passages
        x = (1-p)*w + (1-p)*p*v + (1-p)*p*p*u
        u = v
        v = w
        w = x
    return u
```

Partie II : Recherche de racine et conséquences

On rappelle que $p \in]0, 1[$ est une valeur fixée.

On cherche à montrer que l'équation $(E) : x^3 = (1-p)(x^2 + px + p^2)$ admet une unique solution dans \mathbb{R} .

4. On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - (1-p)(x^2 + px + p^2)$. Alors :

- f est continue sur \mathbb{R} (c'est un polynôme)
- $f(0) = -(1-p)p^2$ donc $f(0) < 0$ (car $p \in]0, 1[$)
- $f(1) = 1 - (1-p)(1 + p + p^2) = p^3$ donc $f(1) > 0$ (car $p \in]0, 1[$).

D'après le TVI, on conclut que f s'annule (au moins!) une fois dans $]0, 1[$.

5. Pour que $x = p$ soit une solution de (E) , il faut et il suffit que :

$$\begin{aligned} p^3 &= (1-p)(p^2 + p \times p + p^2) \iff p^3 = 3(1-p)p^2 \iff p^3 = 3p^2 - 3p^3 \\ &\iff 4p^3 - 3p^2 = 0 \iff p^2(4p - 3) = 0. \\ &\iff 4p - 3 = 0 \quad (\text{car } p \neq 0). \end{aligned}$$

L'unique valeur de p telle que $x = p$ soit solution de (E) est donc $p = \frac{3}{4}$.

6. Soit $x \neq p$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 (E) : x^3 &= (1-p)(x^2 + px + p^2) \iff x^3(x-p) = (1-p)(x^2 + px + p^2)(x-p) \quad (\text{car } x-p \neq 0) \\
 &\iff x^3(x-p) = (1-p)(x^3 - p^3) \quad (\text{en développant}) \\
 &\iff x^3(x-p) = (1-p)x^3 - (1-p)p^3 \\
 &\iff x^3(x-p) - x^3(1-p) = -(1-p)p^3 \\
 &\iff x^3(x-1) = -(1-p)p^3 \\
 &\iff x^3(1-x) = p^3(1-p) : (E')
 \end{aligned}$$

On a bien montré que pour $x \neq p$, l'égalité (E) équivaut à (E') .

7. (a) Puisque $p \in]0, 1[$, on a $p^3(1-p) > 0$. Ainsi pour que x soit solution de (E') , on doit avoir :

$$x^3(1-x) > 0 \iff (x^3 > 0 \text{ et } x < 1) \text{ ou } \underbrace{(x^3 < 0 \text{ et } x > 1)}_{\text{impossible}} \iff 0 < x < 1.$$

Ceci montre que toutes les solutions de (E') sont dans l'intervalle $]0, 1[$.

(b) Comme suggéré, on pose $\forall x \in]0, 1[$, $\varphi(x) = x^3(1-x)$.

Notons que résoudre l'équation (E') revient à chercher les $x \in]0, 1[$ tels que $\varphi(x) = \varphi(p)$.

φ est dérivable sur $]0, 1[$ et :

$$\forall x \in]0, 1[, \varphi(x) = x^3 - x^4 \text{ donc } \varphi'(x) = 3x^2 - 4x^3 = x^2(3-4x).$$

On voit ainsi que $\varphi'(x) \geq 0 \iff x \leq \frac{3}{4}$. On obtient donc le tableau de variations :

x	0	$\frac{3}{4}$	1
$\varphi'(x)$	+	0	−
$\varphi(x)$			

On distingue alors deux cas :

- Si $p = \frac{3}{4}$, il y a un unique réel $x \in]0, 1[$ tel que $\varphi(x) = \varphi(p)$: c'est $x = \frac{3}{4}$.

Ainsi : Si $p = \frac{3}{4}$, l'équation (E') admet l'unique solution $\frac{3}{4}$, c'est à dire p .

- Si $p \neq \frac{3}{4}$, on a $\varphi(p) < \varphi(\frac{3}{4})$ (puisque φ atteint son maximum en $\frac{3}{4}$).

D'après le TVI avec stricte monotonie, il existe donc deux valeurs $x \in]0, 1[$ telles que $\varphi(x) = \varphi(p)$: une solution dans l'intervalle $]0, \frac{3}{4}[$ et une solution dans l'intervalle $]\frac{3}{4}, 1[$.

Bien-sûr, on a $\varphi(p) = \varphi(p)$, donc $x = p$ est l'une de ces deux solutions.

Ainsi : Si $p \neq \frac{3}{4}$, l'équation (E') admet deux solutions : p , et une autre valeur dans $]0, 1[$.

8. Raboutons consciencieusement tous les argument...

- Premier cas : $p = \frac{3}{4}$.

Dans ce cas, on a vu en question 5. que $x = p$ était solution de (E) .

De plus, c'est la seule. En effet, si $x \neq p$ était une autre solution de (E) , il faudrait que x soit solution de (E') . Or (dans le cas $p = \frac{3}{4}$) la seule solution de (E') est p : impossible !

Ainsi, (E) admet une unique solution (qui est p , c'est à dire $\frac{3}{4}$).

- Second cas : $p \neq \frac{3}{4}$

Dans ce cas, on a vu en question 5. que $x = p$ n'était pas solution de (E) .

Pour que x soit solution de (E) , il faut donc que $x \neq p$ et que x soit solution de (E') .

Or (dans le cas $p \neq \frac{3}{4}$) (E') admet une unique solution différente de p .

Ainsi, (E) admet bien une unique solution (une valeur dans $]0, 1[$ différente de p).

Conclusion : Dans tous les cas, on a montré que l'équation (E) admet une unique solution (qui, de plus, appartient à l'intervalle $]0, 1[$).

Dans toute la suite, on note $\alpha \in]0, 1[$ l'unique solution de l'équation (E) .

9. (a) On commence par définir la fonction $f(x) = x^3 - (1-p)(x^2 + px + p^2)$ en Python.

Attention : l'utilisateur devra fournir en entrée la valeur de x , mais aussi la valeur de p .

```
def f(p,x) :
    y = x**3 - (1-p)*(x**2 + p*x + p**2)
    return y
```

Ensuite, on applique l'algorithme classique de dichotomie pour déterminer une approximation de la valeur où f s'annule sur $]0, 1[$.

```
def dichotomie(p,eps) :
    a = 0 ; b = 1
    while b-a > eps :
        c = (a+b)/2
        if f(p,x) < 0 :
            a = c
        else :
            b = c
    return a
```

- (b) Notons que ce programme nous renvoie une approximation de α par valeur inférieure (car on renvoie "a" seulement, et non pas l'encadrement "(a,b)" complet).

Puisque a est une valeur approchée de α à ε près par valeur inférieure, on aura $a \leq \alpha \leq a + \varepsilon$.

Ici, avec $a = 0.91894$ et $\varepsilon = 0.001$, cela donne l'encadrement : $0.91894 \leq \alpha \leq 0.91994$.

10. Soit $C = \max\left(1, \frac{p}{\alpha}, \frac{1-p}{\alpha^2}\right)$. (On prend la plus grande de ces trois valeurs).

Par définition, on a donc $C \geq 1$, $C \geq \frac{p}{\alpha}$ et $C \geq \frac{1-p}{\alpha^2}$.

Montrons par récurrence triple que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(A_n) \leq C\alpha^n$.

Initialisation : On vérifie la propriété pour $n \in \{0, 1, 2\}$.

Les valeurs de $P(A_0), P(A_1), P(A_2)$ ont été données en question 1.

- $P(A_0) = 1 \leq C$ car $C \geq 1$.
- $P(A_1) = p \leq C \times \alpha$ car $C \geq \frac{p}{\alpha}$.
- $P(A_2) = 1 - p \leq C\alpha^2$ car $C \geq \frac{1-p}{\alpha^2}$. (Ceci explique pourquoi on a choisi cette valeur de C)

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que

$$P(A_n) \leq C\alpha^n, \quad P(A_{n+1}) \leq C\alpha^{n+1}, \quad P(A_{n+2}) \leq C\alpha^{n+2},$$

et montrons que $P(A_{n+3}) \leq C\alpha^{n+3}$. On utilise la relation de récurrence établie en 2.(c) :

$$P(A_{n+3}) = (1-p)(P(A_{n+2}) + pP(A_{n+1}) + p^2P(A_n))$$

donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$$P(A_{n+3}) \leq (1-p)(C\alpha^{n+2} + pC\alpha^{n+1} + p^2C\alpha^n)$$

c'est à dire

$$P(A_{n+3}) \leq C\alpha^n \times (1-p)(\alpha^2 + p\alpha + p^2).$$

Puisque α est la solution de l'équation (E), on a $\alpha^3 = (1-p)(\alpha^2 + p\alpha + p^2)$, donc ceci donne :

$$P(A_{n+3}) \leq C\alpha^n \times \alpha^3$$

c'est à dire $P(A_{n+3}) \leq C\alpha^{n+3}$, ce qui achève la récurrence.

11. (a) On vient de voir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq P(A_n) \leq C\alpha^n$. Rappelons que $\alpha \in]0, 1[$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^n = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0$.

Pour $P(B_n)$ et $P(C_n)$, on peut se rappeler des relations de récurrences du 2.(b) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(B_{n+1}) = pP(A_n), \quad P(C_{n+1}) = pP(B_n).$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p \times P(A_{n-1}) = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p \times P(B_{n-1}) = 0$.

- (b) On se rappelle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) + P(D_n) = 1$ (vu en 1.(b)).

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(D_n) = 1 - \underbrace{P(A_n) + P(B_n) + P(C_n)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(D_n) = 1$.

Interprétation : Au bout d'un temps n très long, l'aventurier a (presque) 100% de chance de s'être échappé du donjon.

On note Z l'évènement " L'aventurier finit (à un moment) par s'échapper du donjon ".

12. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si l'évènement D_n est réalisé, alors l'aventurier a quitté le donjon à l'instant n .

En particulier, l'évènement Z est réalisé. Ceci montre que $\forall n \in \mathbb{N}, D_n \subset Z$.

Il en résulte que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(D_n) \leq P(Z) \leq 1$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(D_n) = 1$, d'après le théorème des gendarmes, on conclut : $P(Z) = 1$.

On dit, dans ce genre de cas, que l'aventurier finira "presque-sûrement" par s'échapper du donjon.

Partie III : Nombre de tentatives

Pour finir, on segmente le parcours aléatoire de l'aventurier en différentes "tentatives" :

- L'aventurier démarre en A, et tente d'effectuer 3 sauts pour atteindre D : c'est la première tentative.
- Si l'aventurier tombe, il remonte sur la plateforme A et recommence : c'est une nouvelle tentative.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note T_k l'évènement : "L'aventurier atteint la sortie au bout de k tentatives exactement".

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n l'évènement : "L'aventurier atteint la sortie en n tentatives ou moins".

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n = \bigcup_{k=1}^n T_k$ (c'est une union disjointe, les T_k étant 2 à 2 incompatibles)

14. L'évènement T_1 signifie que l'aventurier sort du donjon dès sa première tentative, c'est à dire qu'il réussit ses trois premiers sauts d'affilée. Autrement dit, $T_1 = B_1 \cap C_2 \cap D_3$.

Chaque saut ayant une probabilité p d'être réussi, indépendamment des précédents,

on a bien-sûr $P(T_1) = p \times p \times p = p^3$.

On peut aussi expliquer cela avec la formule des probabilités composées :

$$P(T_1) = P(B_1 \cap C_2 \cap D_3) = \underbrace{P(B_1)}_{=p} \times \underbrace{P_{B_1}(C_2)}_{=p} \times \underbrace{P_{B_1 \cap C_2}(D_3)}_{=p} = p^3.$$

15. (a) Soit $k \geq 2$.

- Si T_k est réalisé, l'aventurier atteint la sortie au bout de la k -ème tentative, et pas avant.

Ainsi, ni T_1 , ni T_2 , ..., ni T_{k-1} ne sont réalisés. Ceci montre que $T_k \subset \bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{T_i}$.

- Conditionnellement à l'évènement $\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}$, c'est à dire en sachant que l'aventurier n'a pas atteint la sortie durant les $k - 1$ premières tentatives, la probabilité qu'il y arrive à la k -ème revient à la probabilité qu'il réussisse trois sauts consécutifs : c'est p^3 .

(Même situation que pour le calcul de $P(T_1)$ précédemment).

Ainsi : $\boxed{P_{\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}}(T_k) = p^3}$.

- Enfin, puisque $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$, on obtient ici :

$$P_{\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}}(\overline{T_k}) = 1 - P_{\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}}(T_k)$$

c'est à dire $\boxed{P_{\overline{T_1} \cap \overline{T_2} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}}(\overline{T_k}) = 1 - p^3}$.

- (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on utilise la formule des probabilités composées :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{T_i}\right) = \underbrace{P(\overline{T_1})}_{=1-p^3} \times \underbrace{P_{\overline{T_1}}(\overline{T_2})}_{=1-p^3} \times \underbrace{P_{\overline{T_1} \cap \overline{T_2}}(\overline{T_3})}_{=1-p^3} \times \dots \times \underbrace{P_{\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}}(\overline{T_k})}_{=1-p^3}$$

d'où : $\boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{T_i}\right) = (1 - p^3)^k}$.

Intuitivement, la probabilité de "rater" une tentative (conditionnellement au fait qu'on ait raté les précédentes) est toujours de $1 - p^3$. Il s'agit ici de rater les k premières tentatives successives.

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a vu que $S_n = \bigcup_{i=1}^n T_i$. Autrement dit, $\overline{S_n} = \bigcap_{i=1}^n \overline{T_i}$ avec la loi de (De) Morgan.

Ainsi : $P(S_n) = 1 - P(\overline{S_n}) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{T_i}\right)$ d'où $\boxed{P(S_n) = 1 - (1 - p^3)^n}$

16. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On a vu en 15.(a) que $T_k \subset \bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{T_i}$. Ainsi, $T_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{T_i}\right) \cap T_k$. Il en résulte :

$$P(T_k) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{T_i}\right) \cap T_k\right) = \underbrace{P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{T_i}\right)}_{=(1-p^3)^{k-1}} \times \underbrace{P_{\overline{T_1} \cap \dots \cap \overline{T_{k-1}}}(T_k)}_{=p^3}$$

Ainsi : $\boxed{P(T_k) = (1 - p^3)^{k-1} p^3}$. (On rate les $k - 1$ premières tentatives, on réussit la k -ème)

- (b) Rappelons que $S_n = \bigcup_{k=1}^n T_k$ et que cette union est disjointe. On obtient donc :

$$\begin{aligned} P(S_n) &= P\left(\bigcup_{k=1}^n T_k\right) = \sum_{k=1}^n P(T_k) = \sum_{k=1}^n (1 - p^3)^{k-1} p^3 \\ &= p^3 \sum_{k=1}^n (1 - p^3)^{k-1} = p^3 \sum_{j=0}^{n-1} (1 - p^3)^j \\ &= p^3 \times \frac{1 - (1 - p^3)^n}{1 - (1 - p^3)} \end{aligned}$$

en utilisant la formule pour les sommes géométriques. En simplifiant, on retrouve $\boxed{P(S_n) = 1 - (1 - p^3)^n}$.

17. (a) Rappelons encore une fois que $p \in]0, 1[$, donc $p^3 \in]0, 1[$ et donc $1 - p^3 \in]0, 1[$.

Il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - p^3)^n = 0$ et donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n) = 1}$.

Rappelons que l'évènement S_n est "L'aventurier atteint la sortie en n tentatives ou moins".

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si S_n est réalisé, alors en particulier l'aventurier a fini par quitter le donjon, donc Z est réalisé. Ceci montre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \subset Z$.

On conclut classiquement que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(S_n) \leq P(Z) \leq 1$,

puis par théorème des gendarmes $\boxed{P(Z) = 1}$.

- (b) Généralisation : Au lieu de 3 sauts, on suppose que l'aventurier doit effectuer $N \in \mathbb{N}^*$ sauts consécutifs pour rejoindre la plateforme D (la probabilité pour chaque saut étant toujours p).

Dans ce cas, la probabilité de "réussir une tentative" devient p^N au lieu de p^3 .

En adaptant les raisonnements précédents, on trouve cette fois : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, P(S_n) = 1 - (1 - p^N)^n}$

A nouveau, on a facilement $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n) = 1$, et on déduit de $P(S_n) \leq P(Z) \leq 1$ que $\boxed{P(Z) = 1}$.

Ainsi, même si le nombre N de sauts consécutifs à effectuer est très grand, la probabilité que l'aventurier finisse à un moment où à un autre par atteindre la sortie est de 1. On dit que l'aventurier finira presque-sûrement par s'échapper du donjon.