3

Applications

Exercice 1 (Des fonctions numériques)

1) $f(\mathbb{R}_+) = [\sqrt{2}, +\infty[, \quad f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.

$f(]0,1]) =]\sqrt{2}, \sqrt{3}], \quad f^{-1}(]0,1]) = \emptyset$.

$f^{-1}([3,4]) = [\alpha, \beta]$ avec $f(\alpha) = 3$ et $f(\beta) = 4$, soit $\alpha = 7$ et $\beta = 14$.

Exercice 2 (Antécédents multiples)

1) Ensemble image : $f(\mathbb{N}) = \left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Or on note que $f(n) = \dfrac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$ Ainsi $f(\mathbb{N}) = \{0, 1\}$.

2) Les antécédents de 1 sont les entiers pairs : $f^{-1}(\{1\}) = \{n \in \mathbb{N} \,|\, f(n) = 1\} = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$.

Les antécédents de 0 sont les entiers impairs : $f^{-1}(\{0\}) = \{n \in \mathbb{N} \,|\, f(n) = 0\} = \{1, 3, 5, 7 \ldots\} = \{2k+1, k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 3 (Étude d'injectivité/surjectivité)

1) • Montrons que f est injective. Soient $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tels que $f(k_1) = f(k_2)$.
On a alors $2k_1 + 1 = 2k_2 + 1$ donc $2k_1 = 2k_2$ donc $k_1 = k_2$. Ceci montre que f est injective.

• f n'est pas surjective car (par exemple) $0 \in \mathbb{N}$ n'a pas d'antécédent par f.
Précisément, $f(\mathbb{N}) = \{2k+1, k \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} \neq \mathbb{N}$.

2) • Montrons que g est injective. Soient $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tels que $g(k_1) = g(k_2)$.
On a alors $k_1 - 1 = k_2 - 1$ donc $k_1 = k_2$. Ceci montre que g est injective.

• g est surjective puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $n = g(n+1)$ (avec $n+1 \in \mathbb{N}^*$).
Autrement : $g(\mathbb{N}^*) = \{k-1, k \in \mathbb{N}^*\} = \mathbb{N}$.

3) • Montrons que h est injective. Soient $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tels que $h(k_1) = h(k_2)$.
On a alors $k_1 + 1 = k_2 + 1$ donc $k_1 = k_2$. Ceci montre que h est injective.

• h n'est pas surjective car $0 \in \mathbb{N}$ n'a pas d'antécédent par h.
Précisément, $h(\mathbb{N}) = \{k+1, k \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N}^* \neq \mathbb{N}$.

Exercice 4 (Calcul de réciproques)

1) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a les équivalences :

$$y = f(x) \iff y = \ln(x^2 - 1) \iff e^y = x^2 - 1 \iff x^2 = 1 + e^y \iff x = \sqrt{1 + e^y} \text{ (puisque } x \geqslant 0)$$

Ceci montre que f est bijective et $f^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]1, +\infty[\\ y & \mapsto & \sqrt{1 + e^y} \end{array}$

2) Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ fixé. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a les équivalences :

$$y = g(x) \iff y = \frac{x+2}{x+1} \iff (x+1)y = x + 2 \iff xy + y = x + 2 \iff x(y-1) = 2 - y \iff x = \frac{2-y}{y-1}$$

(possible car $y - 1 \neq 0$) Ceci montre que g est bijective et $g^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ y & \mapsto & \dfrac{2-y}{y-1} \end{array}$

3) Soit $y \in [0, +\infty[$ fixé. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a les équivalences :

$$y = h(x) \iff y = \sqrt{x(x-1)} \iff y^2 = x(x-1) \text{ (car } y \geqslant 0) \iff x^2 - x - y^2 = 0.$$

On résout cette équation polynomiale de degré 2, d'inconnue x : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-y^2) = 1 + 4y^2 > 0$.

L'équation admet donc les deux solutions $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4y^2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4y^2}}{2}$.

Or, rappelons que l'on cherche une solution $x \in [1, +\infty[$ de l'équation !

Puisque $1 + 4y^2 \geqslant 1$, il est clair que $x_1 \leqslant 0$ et $x_2 \in [1, +\infty[$. Ainsi la solution à conserver est x_2.

Autrement dit, pour $x \in [1, +\infty[$, on a l'équivalence : $\quad x^2 - x - y^2 = 0 \iff x = x_2$.

On a donc montré : $y = h(x) \iff x = \dfrac{1+\sqrt{1+4y^2}}{2}$.

Ceci montre que h est bijective et $h^{-1} : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & [1,+\infty[\\ y & \mapsto & \dfrac{1+\sqrt{1+4y^2}}{2} \end{array}$

4) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a les équivalences :

$$(a,b) = \varphi((x,y)) \iff (a,b) = (x+y, x-y) \iff \left\{ \begin{array}{l} x+y = a \\ x-y = b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a-b}{2} \end{array} \right. \quad \text{(après résolution)}$$

$$\iff (x,y) = (\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}).$$

Ceci montre que φ est bijective et $\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \mapsto & \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2}\right) \end{array}$

Exercice 5 (Calcul de composées)

1) • $D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R}_+ \,|\, \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\} = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} = [0,1[\cup]1,+\infty[$.

Puis, pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$.

• $D_{g\circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \,|\, \dfrac{1}{x-1} \in \mathbb{R}_+\right\} =]1,+\infty[$

Puis, pour tout $x \in]1,+\infty[$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\dfrac{1}{x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

2) • $D_{f\circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \cos(x) \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}\right\}$.

En se rappelant que $\cos(x) = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\, x = 2k\pi$ et $\cos(x) = -1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\, x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$, on a $\cos(x) \in \{-1,1\}$ si et seulement si x est un multiple de π ! Ainsi : $D_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.

Puis, pour tout $x \in D_{f\circ g}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{1}{1-\cos(x)^2}$.

• $D_{g\circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \,|\, \dfrac{1}{1-x^2} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$.

Puis, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \cos\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)$.

3) • $D_{f\circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, (2x, x^2-2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*\right\} = \{x \in \mathbb{R}, \,|\, x^2 - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Puis, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

• $D_{g\circ f} = \left\{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \,|\, \dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Puis, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $(g \circ f)((a,b)) = \left(2 \times \frac{a}{b}, \frac{a^2}{b^2} - 2\right)$.

Exercice 6 (Composition et bijections)

1. Soit $y \in [1,+\infty[$ fixé. Pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a les équivalences :

$$y = f(x) \iff y = \frac{x+\frac{1}{x}}{2} \iff 2y = x + \frac{1}{x} \iff 2yx = x^2 + 1 \iff x^2 - 2yx + 1 = 0.$$

On résout l'équation polynomiale de degré 2 : $\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2-1) \geqslant 0$ (car $y \geqslant 1$).

Les solutions sont donc $x_1 = \dfrac{2y - \sqrt{4(y^2-1)}}{2} = y - \sqrt{y^2-1}$ et $x_2 = \dfrac{2y + \sqrt{4(y^2-1)}}{2} = y + \sqrt{y^2-1}$.

Rappelons que l'on cherche les solutions $x \in [1,+\infty[$. On conserve donc seulement $x = x_2$. En effet :

Puisque $y \in [1,+\infty[$, on a $x_2 = y + \sqrt{y^2-1} \geqslant y \geqslant 1$, donc $x_2 \in [1,+\infty[$.

Par ailleurs, pour tout $y \geqslant 1$, $x_1 = y - \sqrt{y^2-1} \leqslant 1$.

Preuve de cette inégalité : pour $y \geqslant 1$, on a les équivalences

$$y-\sqrt{y^2-1} \leqslant 1 \Longleftrightarrow y-1 \leqslant \sqrt{y^2-1} \Longleftrightarrow (y-1)^2 \leqslant y^2-1 \Longleftrightarrow y^2-2y+1 \leqslant y^2-1 \Longleftrightarrow 2 \leqslant 2y \Longleftrightarrow y \geqslant 1.$$

(Notons que dans le cas d'égalité $y=1$, on a $x_1=x_2=1$. Dans le cas où $y>1$, on a $x_1=y-\sqrt{y^2-1}<1$.)

Bref, pour $y \in [1,+\infty[$ et $x \in [1,+\infty[$, on a l'équivalence : $y=f(x) \Longleftrightarrow x=y+\sqrt{y^2-1}$.

Ceci montre que f est bijective et $f^{-1} : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & [1,+\infty[\\ y & \mapsto & y+\sqrt{y^2-1} \end{array}$

2) On peut noter que $h=f \circ g$, où l'application g est donnée par : $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & [1,+\infty[\\ x & \mapsto & e^x \end{array}$.

(En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(g(x)) = \dfrac{e^x+\frac{1}{e^x}}{2} = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = h(x)$).

Il est clair que g est bijective, de réciproque $g^{-1} : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R}+ \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$.

Puisque f et g sont bijective, $h=f \circ g$ est bijective, de réciproque $h^{-1}=g^{-1} \circ f^{-1}$.

Exprimons explicitement cette composition : pour tout $x \in [1,+\infty[$,

$$h^{-1}(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}(x+\sqrt{x^2-1}) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

Exercice 7 (Interprétation graphique)

Faites de jolis dessins ! L'astuce pour le e) est de dessiner une fonction non-continue (sinon c'est impossible !)
L'astuce pour le f) est de dessiner une fonction croissante, mais pas strictement (avec un "palier", donc...)

Exercice 8 (Vrai ou faux ?)

1) Vrai. Preuve :
Soit $f : E \to F$ une application injective et A une partie de E.
Montrons que la restriction $f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est injective.
Soient $x_1, x_2 \in A$ tels que $f_{|A}(x_1) = f_{|A}(x_2)$. On a donc $f(x_1)=f(x_2)$. Par injectivité de f, on en déduit $x_1=x_2$.
Ceci montre que $f_{|A}$ est injective.

2) Faux. On peut penser à la fonction $x \mapsto x^2$, qui est injective au départ de $\mathbb{R}_+$, mais pas au départ de $\mathbb{R}$.

3) Faux. Par exemple, l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ est surjective,

mais la restriction $f_{|[0,1]} : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ ne l'est évidemment pas.

4) Vrai. Preuve :
Soit $f : E \to F$ une application surjective et E' un ensemble contenant E ($E \subset E'$).
Soit $g : E' \to F$ un prolongement de f, c'est à dire que $\forall x \in E,\ g(x)=f(x)$. Montrons que g est surjective.

Soit $y \in F$. Par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $y=f(x)$.
Puisque $x \in E$, on a $f(x)=g(x)$, on peut donc aussi écrire $y=g(x)$.
Ceci montre que g est surjective.

Exercice 9 (Injectivité/surjectivité d'une composée)

On a $f : E \to F$, $g : F \to G$, donc $g \circ f : E \to G$.

1) Supposons $g \circ f$ injective. Montrons que f est injective.
Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1)=f(x_2)$. Montrons que $x_1=x_2$.

On sait que $f(x_1)=f(x_2)$, donc $g(f(x_1))=g(f(x_2))$, c'est à dire $(g \circ f)(x_1)=(g \circ f)(x_2)$.
Puisque $g \circ f$ est injective, cette égalité implique que $x_1=x_2$. Ceci montre bien que f est injective.

2) Supposons $g \circ f$ surjective. Montrons que g est surjective.
Soit $z \in G$. Montrons qu'il existe $y \in F$ tel que $z=g(y)$.

Puisque $g \circ f$ est surjective, on sait qu'il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x)=z$.
On a ainsi $g(f(x))=z$. Ainsi en posant $y=f(x) \in F$, on a bien $g(y)=z$. Ceci montre bien que g est surjective.

Exercice 10 (Application unipotente)

1) Supposons f injective. Montrons que $f = Id_E$, c'est à dire que $\forall x \in E,\ f(x) = x$.

Soit $x \in E$. Puisque $f \circ f = f$, on a $f(\,f(x)\,) = f(x)$.
(Autrement dit, on a $f(x_1) = f(x_2)$, avec $x_1 = f(x)$ et $x_2 = x$).
Par injectivité de f, on en déduit que $f(x) = x$.
C'est valable pour tout $x \in E$, on a donc bien montré le résultat voulu.

2) Supposons f surjective. Montrons que $f = Id_E$, c'est à dire que $\forall x \in E,\ f(x) = x$.

Soit $x \in E$. Puisque f est surjective, on sait qu'il existe $x' \in E$ tel que $f(x') = x$.
En composant par f, on obtient $f(f(x')) = f(x)$.
Puisque $f \circ f = f$, cette égalité donne $f(x') = f(x)$.
Puisque $f(x') = x$, on obtient $x = f(x)$: c'est le résultat voulu !

3) En considérant par exemple la fonction constante $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$,

- On a évidemment $f \neq Id_{\mathbb{R}}$. Pour rappel, $Id_{\mathbb{R}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 1 = f(x)$, d'où $f \circ f = f$.