16

Intégration sur un segment

Pour s'exercer au calcul de primitives

Déterminer une primitive des fonctions suivantes (sur un intervalle à préciser). Réponses en fin de feuille.

1) $x \mapsto \dfrac{1}{x^{2/3}}$
2) $x \mapsto \sqrt{1-4x}$
3) $x \mapsto \dfrac{1}{(3x-1)^4}$
4) $x \mapsto x\sqrt{x}$
5) $x \mapsto \dfrac{4}{x^5}$
6) $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$
7) $x \mapsto \ln(x^3)$
8) $x \mapsto \ln(2x)$
9) $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln^2(x)}$
10) $x \mapsto \dfrac{2}{x\ln(x)}$
11) $x \mapsto 3^x$
12) $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$
13) $x \mapsto \dfrac{2x}{1-x^2}$
14) $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(2x)}$
15) $x \mapsto \cos(4x)$
16) $x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$
17) $x \mapsto (x-1)(x-3)^2$
18) $x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

Calculs d'intégrales

Exercice 1 (Intégrales basiques)

(a) $\displaystyle\int_0^1 (3x^3 - 2x^2 + x - 1)dx$

(b) $\displaystyle\int_a^b e^{2t}dt$ (où $a, b \in \mathbb{R}$) (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+1}dt$

Exercice 2 (Plus avancé)

(a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dt}{t\ln(t)}$ (b) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^3\cos(x)dx$ (d) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{x^2-1}dx$

(Chercher α, β tels que $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{\alpha}{x+1} + \dfrac{\beta}{x-1}$)

(e) $\displaystyle\int_0^2 t|t^2-1|dt.$

Exercice 3 (IPP)

(a) $\displaystyle\int_1^e x^2\ln(x)dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 t^3e^tdt.$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3\cos(x)dx.$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)dt.$

Exercice 4 (Recherche de primitives 1)

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

(a) $x \mapsto x\cos(2x)$ (b) arctan. *(Penser "IPP")*

Exercice 5 (Changements de variable)

(a) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{2x+1}dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx$ (se ramener à $\dfrac{1}{x^2+1}$...)

(c) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{t}}dt$ (poser $u = \sqrt{t}$).

(d) Plus difficile : $\displaystyle\int_1^3 \frac{y}{(y^2+1)(y^2+2)}dy$

(poser $u = y^2$)

Exercice 6 (Recherche de primitives 2)

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

(a) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+9}$ (b) $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+1}$.

(Penser à un changement de variable adéquat)

Exercice 7 (Changement trigonométrique)

1. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ \cos(t)^2 = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$ en posant $u = \sin(t)$.

Sommes de Riemann

Exercice 8 (Quelques limites de sommes)

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$

Exercice 9 ("Produit" de Riemann ? !)

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^n \left(n^2+k^2\right)^{1/n}$

Suites d'intégrales

Exercice 10 (Une suite)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt.$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Etudier le sens de variation de $(I_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 11 (Une autre suite)

1. (a) Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\quad 0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
(b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$.
2. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(a) Montrer que $u_n = \dfrac{\ln(2)}{n} - \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$.
(b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n$.

Exercice 12 (Intégrales de Wallis)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt$.

1. Calculer W_0 et W_1.

2. (a) Montrer que $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
(b) En déduire qu'elle converge.

3. (a) À l'aide d'une intégration par partie, montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2}).$$
et obtenir W_{n+2} en fonction de W_n.
(b) Déduire (rapidement) les formules :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2n+1} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$.
(Utiliser la décroissance pour encadrer W_{n+1}.)

5. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
(b) Déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,W_n = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} W_n$.
(Ecrire $(W_n)^2 = W_nW_{n-1}\frac{W_n}{W_{n-1}}$)

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 13 (Dériver une fonction des bornes)

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, justifier qu'elles y sont de classe C^1 et calculer leur dérivée.

(a) $f(x) = \displaystyle\int_x^1 \sqrt{1-t}\,dt \qquad$ (b) $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt.$

Exercice 14 (Étude d'une fonction)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$

1. Déterminer le domaine de définition D_f.
2. Etudier la parité de f.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f, calculer f'.
4. À l'aide d'un encadrement, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
En déduire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Un peu de théorie

Exercice 15 (Limite de Fourier)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0$.

Exercice 16 (Point fixe)

Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.
Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.
(Raisonner par l'absurde).

Exercice 17 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.
On veut montrer l'inégalité :
$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2dt\right)$$

1. Traiter le cas où $f = 0$.
2. On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \displaystyle\int_a^b (xf(t)+g(t))^2dt$.
(a) Écrire le polynôme P sous forme "développée".
(b) Que dire du signe de P sur $\mathbb{R}$?
(c) Calculer le discriminant et conclure.
3. Application : on suppose $f > 0$ sur $[a,b]$.
Montrer : $\displaystyle\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right) \geq (b-a)^2$.

Solutions des calculs de primitives :

1) $x \mapsto 3x^{1/3}$ 2) $x \mapsto -\frac{1}{6}(1-4x)^{3/2}$
3) $x \mapsto -\dfrac{1}{9(3x-1)^3}$ 4) $x \mapsto \frac{2}{5}x^{5/2}$
5) $x \mapsto -\dfrac{1}{x^4}$ 6) $x \mapsto \dfrac{\ln(x)^2}{2}$
7) $x \mapsto 3(x\ln(x) - x)$ 8) $x \mapsto \ln(2)x + x\ln(x) - x$
9) $x \mapsto -\dfrac{1}{\ln(x)}$ 10) $x \mapsto 2\ln(\ln(x))$
11) $x \mapsto \dfrac{3^x}{\ln(3)}$ 12) $x \mapsto \arctan(e^x)$
13) $x \mapsto -\ln(1-x^2)$ 14) $x \mapsto \frac{1}{2}\tan(2x)$
15) $x \mapsto \frac{1}{4}\sin(4x)$ 16) $x \mapsto 2\sqrt{1+e^x}$
17) $x \mapsto \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{7x^3}{3} + \dfrac{15x^2}{2} - 9x$ 18) $x \mapsto 2e^{\sqrt{x}}$