Samedi 28 Septembre 2024

Devoir Sur Table n°1 – Corrigé

Exercices 1 : Calculs de sommes et de produits

1. (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2-k) = \sum_{k=0}^{n} 2 - \sum_{k=0}^{n} k = 2\sum_{k=0}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} k = 2(n+1) - \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)(2-\frac{n}{2}) = \boxed{\frac{(n+1)(4-n)}{2}}$

   (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 3i(i-1) = 3\sum_{i=1}^{n}(i^2-i) = 3\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i\right) = 3\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right)$
   $\displaystyle = 3\frac{n(n+1)(2n+1-3)}{6} = \frac{n(n+1)(2n-2)}{2} = \boxed{n(n+1)(n-1)}.$

   (c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} 2^{2j-1} = \sum_{j=1}^{n} 4^j \times 2^{-1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} 4^j = \frac{1}{2} \times \frac{4-4^{n+1}}{1-4} = \frac{4^{n+1}-4}{6} = \frac{4(4^n-1)}{6} = \boxed{\frac{2}{3}(4^n-1)}.$

   (d) D'abord $\displaystyle\prod_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{\prod_{k=n}^{2n} k}$ puis on utilise l'astuce classique : $\displaystyle\prod_{k=n}^{2n} k = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n-1} k} = \frac{(2n)!}{(n-1)!}.$

   Ainsi en prenant l'inverse : $\displaystyle\boxed{\prod_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{(n-1)!}{(2n)!}}.$

   (e) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}\frac{i}{j}\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j-1} i\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{j} \times \frac{(j-1)j}{2}\right)$
   $\displaystyle = \sum_{j=2}^{n}\frac{(j-1)}{2} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k = \boxed{\frac{(n-1)n}{4}}.$

2. (a) En notant que $j = \displaystyle\sum_{i=1}^{j} 1$, on peut ré-écrire :

$$S = \sum_{j=1}^{n} j\,2^j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} 1\right)2^j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} 2^j\right) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^j.$$

   Calculons cette somme double en sommant "dans l'autre sens" :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} 2^j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2^i-2^{n+1}}{1-2}\right) = \sum_{i=1}^{n}(2^{n+1}-2^i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} 2^i = n2^{n+1} - \left(\frac{2-2^{n+1}}{1-2}\right) = n2^{n+1} + 2 - 2^{n+1} \\ &= \boxed{(n-1)2^{n+1}+2} \end{aligned}$$

   (b) Puisqu'on connait la valeur explicite de S, la fonction est assez simple :

```python
def valeurS(n) :
    s = (n-1) * 2**(n+1) + 2
    return s
```

   Remarque : On part toujours du principe que l'utilisateur d'une fonction sait comment elle fonctionne ! Sauf mention du contraire dans l'énoncé, il n'est donc pas utile de vérifier que la variable `n` contient bien un entier positif. On postule que l'utilisateur n'essaiera jamais d'appeler `valeurS(-1)` ou `valeurS(3.5)` par exemple.

Exercice 2 : Etude d'une famille de fonctions

Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$, on considère la fonction notée $f_{a,b,c,d}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, \quad f_{a,b,c,d}(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

1. *Etude d'un exemple.* Dans cette question, on choisit $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$, $d = 3$.

   On considère donc la fonction $f_{1,2,-1,3}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \quad f_{1,2,-1,3}(x) = \dfrac{x+2}{-x+3}$.

   (a) Il faut justifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $f_{1,2,-1,3}(x) \neq -1$. Or on a les équivalences :

   $$f_{1,2,-1,3}(x) = -1 \iff \frac{x+2}{-x+3} = -1 \iff x+2 = x-3 \iff 2 = -3 \quad \text{ce qui est toujours faux.}$$

   Ainsi, on a bien $\boxed{f_{1,2,-1,3} : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$.

   (b) Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ fixé. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, on a les équivalences suivantes :

   $$f_{1,2,-1,3}(x) = y \iff \frac{x+2}{-x+3} = y \iff x+2 = (-x+3)y \iff x+2 = -xy+3y$$
   $$\iff x + xy = 3y - 2 \iff x(y+1) = 3y-2 \iff x = \frac{3y-2}{y+1}.$$

   Ceci montre que l'application $f_{1,2,-1,3}$ est $\boxed{\text{bijective}}$ et :

   $$(f_{1,2,-1,3})^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ y & \mapsto & \dfrac{3y-2}{y+1}. \end{array}$$

   On remarque en fait que $\boxed{(f_{1,2,-1,3})^{-1} = f_{3,-2,1,1}}$.

On revient à présent au cas général où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sont des réels quelconques avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$.

2. On suppose que $ad = bc$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$,

   $$f_{a,b,c,d}(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a(x+\frac{b}{a})}{c(x+\frac{d}{c})} = \frac{a}{c} \times \frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c}.$$

   (en effet, $ad = bc$ donc $\dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}$!) Ainsi $\boxed{f_{a,b,c,d} \text{ est constante égale à } \dfrac{a}{c}}$.

3. Montrons l'équivalence $\quad f_{a,b,c,d}$ est injective $\iff$ $ad \neq bc \quad$ par double implication.

   - Montrons que ($f_{a,b,c,d}$ est injective) $\Rightarrow ad \neq bc$.
   Cela revient à montrer la contraposée : $ad = bc \Rightarrow$ ($f_{a,b,c,d}$ n'est pas injective).
   Or ceci est évident puisqu'on a vu en question 2. que si $ad = bc$, alors $f_{a,b,c,d}$ est une fonction constante (qui n'est donc évidemment pas injective !)

   - Montrons maintenant que $ad \neq bc \Rightarrow$ ($f_{a,b,c,d}$ est injective).
   Supposons que $ad \neq bc$ et montrons que $f_{a,b,c,d}$ est injective.
   Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ tels que $f_{a,b,c,d}(x_1) = f_{a,b,c,d}(x_2)$. Montrons que $x_1 = x_2$. On a :

   $$\begin{aligned} f_{a,b,c,d}(x_1) = f_{a,b,c,d}(x_2) &\iff \frac{ax_1+b}{cx_1+d} = \frac{ax_2+b}{cx_2+d} \iff (ax_1+b)(cx_2+d) = (ax_2+b)(cx_1+d) \\ &\iff acx_1x_2 + adx_1 + bcx_2 + bd = acx_1x_2 + adx_2 + bcx_1 + bd \\ &\iff adx_1 + bcx_2 = adx_2 + bcx_1 \\ &\iff adx_1 - bcx_1 = adx_2 - bcx_2 \\ &\iff (ad-bc)x_1 = (ad-bc)x_2 \\ &\iff x_1 = x_2 \ \text{ (car on a supposé ici } ad \neq bc) \end{aligned}$$

   Ceci montre que $f_{a,b,c,d}$ est injective. $\boxed{\text{On a donc bien démontré l'équivalence voulue}}$.

4. On se place maintenant dans le cas où $ad \neq bc$.

   (a) Il faut vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, $f_{a,b,c,d}(x) \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. On a les équivalences :

   $$f_{a,b,c,d}(x) = \frac{a}{c} \iff \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \iff c(ax+b) = a(cx+d) \iff acx + bc = acx + ad \iff ad = bc.$$

   Or ici on a supposé que $ad \neq bc$. La dernière proposition est donc fausse et il en résulte qu'on n'a jamais $f_{a,b,c,d}(x) = \frac{a}{c}$. On a donc bien $\boxed{f_{a,b,c,d} : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}}$.

   (b) Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ fixé. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, on a les équivalences suivantes :

   $$\begin{aligned} f_{a,b,c,d}(x) = y &\iff \frac{ax+b}{cx+d} = y \iff ax+b = (cx+d)y \iff ax+b = cxy + dy \\ &\iff ax - cxy = dy - b \iff x(a-cy) = dy - b \iff x = \frac{dy-b}{-cy+a}. \end{aligned}$$

   Ceci montre que l'application $f_{a,b,c,d}$ est $\boxed{\text{bijective}}$ et :

   $$(f_{a,b,c,d})^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ y & \mapsto & \dfrac{dy-b}{-cy+a}. \end{array}$$

   On remarque en fait que $\boxed{(f_{a,b,c,d})^{-1} = f_{d,-b,-c,a}}$.

Exercice 3 : Suites récurrentes de type "$u_{n+1} = au_n + b_n$".

Pour commencer, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + \dfrac{1}{2^n}$.

1. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{5\times 2^n}{3} - \dfrac{2}{3\times 2^n}$.

   <u>Initialisation :</u> On a $\dfrac{5\times 2^0}{3} - \dfrac{2}{3\times 2^0} = \dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$ donc effectivement $u_0 = \dfrac{5\times 2^0}{3} - \dfrac{2}{3\times 2^0}$.
   <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
   Supposons que $u_n = \dfrac{5\times 2^n}{3} - \dfrac{2}{3\times 2^n}$ et montrons que $u_{n+1} = \dfrac{5\times 2^{n+1}}{3} - \dfrac{2}{3\times 2^{n+1}}$.
   D'après la relation de récurrence :

   $$\begin{aligned} u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{2^n} &= 2\left(\frac{5\times 2^n}{3} - \frac{2}{3\times 2^n}\right) + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{5\times 2^{n+1}}{3} - \frac{2}{3\times 2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{5\times 2^{n+1}}{3} - \frac{2}{3\times 2^n} + \frac{3}{3\times 2^n} \\ &= \frac{5\times 2^{n+1}}{3} - \frac{1}{3\times 2^n} = \frac{5\times 2^{n+1}}{3} - \frac{2}{3\times 2^{n+1}}. \end{aligned}$$

   C'est bien l'égalité voulue, ce qui achève la récurrence.

   (b)
   ```
   def suite(n) :
       u = (5*2**n)/3 - 2/(3*2**n)
       return u
   ```

2. Dans cette question, on se propose de retrouver l'expression de u_n d'une autre façon.
   On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{2^n}$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2u_n + \frac{1}{2^n}}{2^{n+1}} = \frac{2u_n}{2^{n+1}} + \frac{\frac{1}{2^n}}{2^{n+1}} = \frac{u_n}{2^n} + \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

   Ainsi $\boxed{v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{2^{2n+1}}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'une part, par téléscopage, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1}-v_k) = \boxed{v_n - v_0}$.

D'autre part, d'après l'expression du 2.(a), $v_{k+1}-v_k = \dfrac{1}{2^{2k+1}}$, on peut donc calculer :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1}-v_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2}\times\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n) = \boxed{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}$$

On en déduit ainsi que $v_n - v_0 = \dfrac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$.

Puisque $v_0 = \dfrac{u_0}{2^0} = 1$, on obtient finalement : $\boxed{v_n = 1 + \dfrac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $v_n = \dfrac{u_n}{2^n}$, on a $u_n = 2^n v_n$. En remplaçant avec l'expression précédente :

$$\begin{aligned} u_n &= 2^n\left(1+\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\right) = 2^n + \frac{2^{n+1}}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \\ &= 2^n + \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{2^{n+1}}{3\times 2^{2n}} = \frac{3\times 2^n + 2^{n+1}}{3} - \frac{1}{3\times 2^{n-1}} \\ &= \frac{2^n(3+2)}{3} - \frac{2}{3\times 2^n} = \boxed{\frac{5\times 2^n}{3} - \frac{2}{3\times 2^n}}. \end{aligned}$$

On retrouve donc bien l'expression de u_n du 1.(a).

On cherche maintenant à adapter la méthode exploitée dans la question 2 à une cadre plus général.

Dans la suite de l'exercice, $a \in \mathbb{R}^*$ est un réel non-nul fixé, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels quelconques.
La nouvelle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation générale : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b_n,$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$ quelconque.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{a^{n+1}} = \frac{au_n+b_n}{a^{n+1}} = \frac{u_n}{a^n} + \frac{b_n}{a^{n+1}} = \boxed{w_n + \frac{b_n}{a^{n+1}}}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On raisonne comme dans la question 2. en calculant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(w_{k+1}-w_k)$.

D'une part, par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(w_{k+1}-w_k) = w_n - w_0$.

D'autre part,

$$\sum_{k=0}^{n-1}(w_{k+1}-w_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{a^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k a^{-(k+1)}.$$

Ainsi, on a $w_n - w_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k a^{-(k+1)}$ donc $w_n = w_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k a^{-(k+1)} = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k a^{-(k+1)}$
(car $w_0 = \dfrac{u_0}{a^0} = u_0$). Enfin, puisque $w_n = \dfrac{u_n}{a^n}$, on a $u_n = w_n \times a^n$ et donc :

$$u_n = \left(u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k a^{-(k+1)}\right)\times a^n = \boxed{u_0\times a^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k a^{n-(k+1)}}.$$

Cette formule est valable quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.
En fait, $\boxed{\text{quand } n = 0 \text{ cette formule est toujours valable}}$!
En effet, par convention, $\displaystyle\sum_{k=0}^{-1} b_k a^{n-(k+1)} = 0$ (somme vide).

4. Application : On considère ici la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} - 2$.

Cela revient à la situation de la question 3. avec $a = \frac{1}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = -2$.

La formule établie en 3.(b) nous donne donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
u_n &= u_0 \times a^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k a^{n-(k+1)} \\
&= 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-2) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-(k+1)} \\
&= \frac{1}{3^n} - \frac{2}{3^n} \sum_{k=0}^{n-1} 3^{k+1} = \frac{1}{3^n} - \frac{2}{3^n} \sum_{j=1}^{n} 3^j \\
&= \frac{1}{3^n} - \frac{2}{3^n} \times \frac{3 - 3^{n+1}}{1-3} = \frac{1}{3^n} + \frac{3 - 3^{n+1}}{3^n} \\
&= \frac{1+3}{3^n} - \frac{3^{n+1}}{3^n} = \boxed{\frac{4}{3^n} - 3}.
\end{aligned}$$

⋆⋆⋆ Fin du sujet ⋆⋆⋆