Devoir Sur Table n°5 – Corrigé

L'utilisation de la calculatrice, des feuilles/notes de cours ou d'exercices est interdite.
La présentation, la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation de la copie.
Les résultats non encadrés/soulignés/surlignés ne seront pas pris en compte.

Exercice 1 : Autour des polynômes annulateurs d'une matrice

1. • Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(X + \lambda Y) = A(X + \lambda Y) = AX + \lambda AY = f(X) + \lambda f(Y).$$

On a montré que $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))}$.

• Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\varphi(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(A) = P(A) + \lambda Q(A) = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q).$$

On a montré que $\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X], \mathcal{M}_3(\mathbb{R}))}$.

2. *Etude de l'application f.*

(a) Rappelons que $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base (la base canonique) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On sait donc que :

$$\begin{aligned} Im(f) &= Vect\left(f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = Vect\left(A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \\ &= Vect\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right) = Vect\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

La famille $\boxed{\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}\right)}$ est génératrice de $Im(f)$ et libre (car composée de deux vecteurs non-colinéaires), c'est donc une base de $Im(f)$.

(b) Par définition,

$$Ker(f) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid f(X) = 0\} = \left\{X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Explicitons cet ensemble en cherchant les $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ satisfaisant $AX = 0$:

$$AX = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} \quad -y \qquad = 0 \\ -x + \qquad z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix}x\\0\\x\end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}$$

Ainsi, on obtient : $Ker(f) = \left\{\begin{pmatrix}x\\0\\x\end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}\right\} = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

La famille $\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)}$ est génératrice de $Ker(f)$ et libre (car composée d'un seul vecteur non-nul), c'est donc une base de $Ker(f)$.

(c) L'application f n'est $\boxed{\text{ni injective, ni surjective car } Ker(f) \neq \{0\} \text{ et } Im(f) \neq \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

3. *Polynôme annulateur de A de degré minimal.*

(a) Montrons que la famille (I_3, A, A^2) est libre en revenant à la définition.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons que $aI_3 + bA + cA^2 = 0$ et montrons que $a = b = c = 0$.

Un calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. On a donc les équivalences :

$$aI_3 + bA + cA^2 = 0 \Longleftrightarrow a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ -b = 0 \\ -c = 0 \\ \ldots \end{cases} \Longleftrightarrow a = b = c = 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (I_3, A, A^2) \text{ est libre}}$.

(b) Soit P un polynôme annulateur de A de degré inférieur ou égal à 2. Montrons que P est forcément le polynôme nul. Puisque $\deg(P) \leqslant 2$, on peut écrire $P(x) = a + bx + cx^2$ avec $a, b, c, \in \mathbb{R}$.
On sait que P est annulateur de A, c'est à dire :

$$P(A) = 0 \Longleftrightarrow aI_3 + bA + cA^2 = 0.$$

Puisque la famille (I_3, A, A^2) est libre, ceci implique que $a = b = c = 0$, donc $\boxed{P \text{ est le polynôme nul}}$.

(c) Le calcul donne : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

On note que $A^3 = -2A^2 - A$ donc $\boxed{\text{la famille } (I_3, A, A^2, A^3) \text{ est liée}}$.

Autrement dit, $\Pi(A) = A^3+2A^2+A = 0$ (matrice nulle) donc $\boxed{\Pi \text{ est un polynôme annulateur de } A}$.

(d) On a vu que Π est un polynôme annulateur de A unitaire de degré 3. Montrons que c'est le seul.
Soit P un polynôme annulateur de A, unitaire, de degré 3. Montrons que $P = \Pi$.
On peut écrire $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
On sait que P est annulateur de A, donc $P(A) = 0$, c'est à dire $P(A) = \Pi(A)$. Ainsi on a :

$$P(A) = \Pi(A) \Longleftrightarrow A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = A^3 + 2A^2 + A \Longleftrightarrow (a-2)A^2 + (b-1)A + cI_3 = 0.$$

A nouveau, puisque la famille (I_3, A, A^2) est libre, ceci implique que $a - 2 = b - 1 = c = 0$.
On a donc $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$. Ainsi, $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 0$, c'est à dire $\boxed{P = \Pi}$.

4. Pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, en posant $\boxed{\text{la division euclidienne de } P \text{ par } \Pi}$, il existe un unique couple de polynôme $(Q, R) \in \mathbb{R}[x]^2$ tel que $P(x) = \Pi(x)Q(x) + R(x)$, avec $\deg(R) < \deg(\Pi)$, c'est à dire $\boxed{\deg(R) \leqslant 2}$.

5. *Etude de l'application φ.*

(a) Par définition, $Im(\varphi) = \{\varphi(P),\ P \in \mathbb{R}[x]\} = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}[x]\}$.
Or, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, en posant la division euclidienne comme indiqué en 4., on peut écrire $P(x) = \Pi(x)Q(x) + R(x)$ avec $R \in \mathbb{R}_2[x]$ et on a alors :

$$P(A) = \underbrace{\Pi(A)}_{=0} Q(A) + R(A) = R(A).$$

Il en résulte que $Im(\varphi) = \{P(A),\ P \in \mathbb{R}[x]\} = \{R(A),\ R \in \mathbb{R}_2[x]\}$.
Lorsque $R(x) = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, on a $R(A) = aI_3 + bA + cA^2$. Ainsi :

$$Im(\varphi) = \left\{aI_3 + bA + cA^2,\ a, b, c \in \mathbb{R}\right\} = \boxed{Vect(I_3, A, A^2)}.$$

(b) Par définition, $Ker(\varphi) = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \varphi(P) = 0\} = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid P(A) = 0\}$.
Autrement dit, $Ker(\varphi)$ est l'ensemble de tous les polynômes annulateurs de A.
Montrons l'égalité des deux ensembles : $\{P \in \mathbb{R}[x] \mid P(A) = 0\} = \{\Pi(x)Q(x),\ Q \in \mathbb{R}[x]\}$.

- <u>Inclusion $\subset$</u> : Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P(A) = 0$. Montrons que P peut s'écrire $P(x) = \Pi(x)Q(x)$.
On pose la division euclidienne : $P(x) = \Pi(x)Q(x) + R(x)$ avec $R \in \mathbb{R}_2[x]$.
On a $P(A) = 0$ donc $\underbrace{\Pi(A)}_{=0} Q(A) + R(A) = 0$ et donc $R(A) = 0$.
Ainsi R est un polynôme annulateur de A. Or $\deg(R) \leqslant 2$.
Ceci implique, d'après le 3.(b) que R est le polynôme nul : $R = 0$.
Ainsi, $P(x) = \Pi(x)Q(x)$, CQFD.
- <u>Inclusion $\supset$:</u> Soit P de la forme $P(x) = \Pi(x)Q(x)$. Montrons que $P(A) = 0$.
On a $P(A) = \underbrace{\Pi(A)}_{=0} Q(A) = 0$, CQFD.

On a bien montré que $\boxed{Ker(\varphi) = \{\Pi(x)Q(x),\ Q \in \mathbb{R}[x]\}}$.

(c) L'application est : $\varphi_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ P & \mapsto & P(A). \end{array}$.
On a $Ker(\varphi_n) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(A) = 0\}$.
On a vu en 5.(b) que les polynômes annulateurs de A sont exactement ceux de la forme $P(x) = \Pi(x)Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{R}[x]$.
Puisqu'on veut ici que $\deg(P) \leqslant n$ et que $\deg(\Pi) = 3$, ceci impose que $\deg(Q) \leqslant n - 3$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} Ker(\varphi_n) &= \{\Pi(x)Q(x),\ Q \in \mathbb{R}_{n-3}[x]\} \\ &= \left\{\Pi(x)\left(\sum_{k=0}^{n-3} a_k x^k\right),\ a_0, \ldots, a_{n-3} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\sum_{k=0}^{n-3} a_k \cdot \Pi(x)x^k,\ a_0, \ldots, a_{n-3} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= Vect\left(\Pi(x), \Pi(x)x, \Pi(x)x^2, \ldots, \Pi(x)x^{n-3}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\boxed{\mathcal{F} = \left(\Pi(x), \Pi(x)x, \Pi(x)x^2, \ldots, \Pi(x)x^{n-3}\right)}$ (formée de $n-2$ polynômes) est génératrice de $Ker(\varphi_n)$, et elle est libre car composée de polynômes de degrés tous distincts. C'est donc une base de $Ker(\varphi_n)$.

Exercice 2 : Rang d'apparition du n-ième Pile

1. *Apparition du premier Pile*

(a) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons F_i = "Obtenir Face au i-ème lancer".
Les évènements $(F_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$A_{1,k} = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{k-1} \cap \overline{F_k} = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap \overline{F_k}$$

donc $P(A_{1,k}) = \prod_{i=1}^{k-1} P(F_i) \times P(\overline{F_k}) = \prod_{i=1}^{k-1} (1-p) \times p$ donc $\boxed{P(A_{1,k}) = (1-p)^{k-1}p}$.

(b) On a $C_1 = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{1,k}$ et cette union est disjointe (évènements 2 à 2 incompatibles). Ainsi :

$$P(C_1) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{1,k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_{1,k}) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1} = p\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n.$$

La série est géométrique est bien convergente puisqu'on a $p \in]0,1[$ et donc $1 - p \in]0,1[$.

$$P(C_1) = p \times \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1.$$

Ainsi $\boxed{P(C_1) = 1 : \text{l'évènement } C_1 \text{ se réalise presque-sûrement}}$.

(c) On a : $\overline{C_1}$ = "Le premier Pile n'arrive jamais" = "On obtient uniquement des Face".
Ainsi $\overline{C_1} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k$.
(Si on n'a que des Face aux $k+1$ premiers lancers, alors on n'a que des Face aux k premiers).
D'après le théorème de la limite monotones :

$$P(\overline{C_1}) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{k\to+\infty} P(B_k) = \lim_{k\to+\infty} (1-p)^k = 0.$$

Ainsi $P(\overline{C_1}) = 0$ et on retrouve $\boxed{P(C_1) = 1}$.

2. *Implémentation informatique de l'expérience.*

(a)

```
import numpy.random as rd
def premier_pile(p) :
    lancer = 1;
    while rd.random() > p : # tant qu'on n'a pas de Pile
        lancer = lancer + 1
    return lancer
```

(b)

```
N = 10**6; S = 0;
for k in range(N) :
  S = S + premier_pile(1/4)
print(S/N)
```

Ce programme affiche la moyenne empirique, sur $N = 10^6$ réalisations aléatoires, du rang d'apparition du premier Pile (pour $p = 1/4$). Le résultat affiché est : `3.993912`.

Interprétation : si $p = 1/4$, en moyenne, le premier Pile apparait au bout de 4 lancers (ce qui semble cohérent).

3. *Apparition du n-ième Pile.* Soit $n \geqslant 2$ fixé.

(a) Si $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\boxed{P(A_{n,k}) = 0 \text{ puisque le } n\text{-ième Pile ne peut pas apparaître avant le } n\text{-ième lancer}}$.

(b) On note $D_{i,k}$ l'évènement "Obtenir exactement i Piles lors des $k-1$ premiers lancers"".
On peut voir cet évènement comme le fait d'obtenir i succès (Pile, avec proba p) sur $k-1$ répétitions indépendantes de la même expérience.
Autrement dit, $P(D_{i,k})$ est la probabilité qu'une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(k-1, p)$ prenne la valeur i, c'est à dire : $\boxed{P(D_{i,k}) = \binom{k-1}{i} p^i (1-p)^{(k-1)-i}}$.

(c) Soit $k \geqslant n$. Pour que le n-ième Pile apparaisse au k-ème lancer, il faut et il suffit que :
- On ait obtenu exactement $n-1$ Pile sur les $k-1$ premiers lancers (évènement $D_{n-1,k}$)
- On obtient un nouveau Pile au k-ème lancer.

Par indépendance, on en déduit :

$$P(A_{n,k}) = P(D_{n-1,k}) \times p = \binom{k-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{(k-1)-(n-1)} \times p$$

ce qui donne $\boxed{P(A_{n,k}) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}}$.

4. *Formule du binôme négatif*

(a) Soit $r \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $n \geqslant r$, $\binom{n}{r} = \dfrac{\overbrace{n(n-1) \times \ldots (n-r+1)}^{r \text{ termes}}}{r!}$.
Or puisque $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, $(n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, $\ldots$, $(n-r+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$
on obtient $\boxed{\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^r}{r!}}$.

Montrons à présent que la série $\sum_{n\geqslant r}\binom{n}{r}x^{n-r}$ est convergente.

Puisque $x\in]0,1[$, il s'agit d'une série à termes positifs, et on a :

$$\binom{n}{r}x^{n-r}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^r}{r!}x^{n-r}=\frac{n^r x^n}{r!\times x^r}=o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En effet, on a $n^r x^n=o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car : $\quad n^2\times n^r x^n=n^{r+2}x^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

puisque $x\in]0,1[$ (croissance comparée usuelle)

Puisque la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant r}\binom{n}{r}x^{n-r} \text{ converge}}$.

(b) $b_0=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{0}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\boxed{\frac{1}{1-x}}$. (série géométrique)

$b_1=\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{n}{1}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\boxed{\frac{1}{(1-x)^2}}$. (série géométrique dérivée)

(c) Soit $r\in\mathbb{N}$. Montrons que $b_r+xb_{r+1}=b_{r+1}$ en calculant d'abord des sommes finies.

Pour tout $N\geqslant r+1$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=r}^{N}\binom{n}{r}x^{n-r}+x\sum_{n=r+1}^{N}\binom{n}{r+1}x^{n-(r+1)}&=\left(1+\sum_{n=r+1}^{N}\binom{n}{r}x^{n-r}\right)+\sum_{n=r+1}^{N}\binom{n}{r+1}x^{n-r}\\&=1+\sum_{n=r+1}^{N}\left(\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}\right)x^{n-r}\\&=1+\sum_{n=r+1}^{N}\binom{n+1}{r+1}x^{n-r}\quad\text{(formule de Pascal)}\\&=1+\sum_{n=r+2}^{N+1}\binom{n}{r+1}x^{n-1-r}\quad\text{(changement d'indice)}\\&=\sum_{n=r+1}^{N+1}\binom{n}{r+1}x^{n-(r+1)}.\end{aligned}$$

On a ainsi : $\quad\sum_{n=r}^{N}\binom{n}{r}x^{n-r}+x\sum_{n=r+1}^{N}\binom{n}{r+1}x^{n-(r+1)}=\sum_{n=r+1}^{N+1}\binom{n}{r+1}x^{n-(r+1)}$.

En passant à la limite quand $N\to+\infty$, on obtient : $\boxed{b_r+xb_{r+1}=b_{r+1}}$.

(d) Pour tout $r\in\mathbb{N}$, on a :

$$b_r+xb_{r+1}=b_{r+1}\iff b_r=(1-x)b_{r+1}\iff b_{r+1}=\frac{1}{1-x}b_r.$$

La suite $(b_r)_{r\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique. On en déduit : $\forall r\in\mathbb{N},\ b_r=\left(\frac{1}{1-x}\right)^r b_0$.

Avec $b_0=\frac{1}{1-x}$ (calcul déjà fait), on obtient bien : $\boxed{\forall r\in\mathbb{N},\ b_r=\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^{n-r}=\frac{1}{(1-x)^{r+1}}}$.

5. *Illustration informatique de la convergence.*

Soit $x\in]0,1[$ et $r\in\mathbb{N}$. On note, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $u_k=\binom{r+k}{r}x^k$, de sorte que $b_r=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$.

(a) Pour $k\in\mathbb{N}^*$, notons que $\quad\binom{r+k}{r}=\frac{(r+k)!}{r!\times k!}$ et $\binom{r+k-1}{r}=\frac{(r+k-1)!}{r!\times(k-1)!}$

donc $\binom{r+k}{r}=\frac{r+k}{k}\times\binom{r+k-1}{r}$. Ainsi :

$$u_k=\binom{r+k}{r}x^k=\left(\frac{r+k}{k}\times\binom{r+k-1}{r}\right)\left(x\times x^{k-1}\right)$$

On a donc $\boxed{u_k = \dfrac{r+k}{k} \times x \times u_{k-1}}$.

(b) On veut créer le vecteur `V = [V[0], V[1], ..., V[N] ]`, avec

$$\forall k \in [\![0, N]\!],\ \texttt{V[k]} = \sum_{i=0}^{k} u_i.$$

On a donc $\forall k \in [\![1, N]\!],\ \ V[k] = V[k-1] + u_k$.

```
def vecteur(x,r,N) :
    V = np.zeros(N+1) ; V[0] = 1 ; u = 1
    for k in range( 1, N+1 ) :
        u = u * x * (r+k)/k
        V[ k ] = V[k-1] + u
    return V
```

(c) Puisque la série converge vers la valeur $b_r = \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$, l'asymptote verticale (en pointillés) est la droite horizontale d'équation $y = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

```
N = 50; x = 0.8; r = 3;
X = np.arange(0,N+1) # X = [0,1,...N]
Y = vecteur(x,r,N)
plt.plot(X,Y,'b-')
plt.plot( [ 0 , N ] , [ 1/(1-x)**(r+1) ,  1/(1-x)**(r+1) ] , 'r--')
plt.show()
```

6. *Le n-ième Pile est presque-sûr.* Soit $n \geqslant 2$ fixé.

(a) Rappelons que $P(A_{n,k}) = \dbinom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$ d'après le 3.(c).

Les séries suivantes étant convergente (d'après l'étude précédente), on se permet de faire le calcul directement avec les sommes infinies :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_{n,k}) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} = p^n \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-p)^{(k-1)-(n-1)} \\ &= p^n \sum_{j=n-1}^{+\infty} \binom{j}{n-1} (1-p)^{j-(n-1)}.\end{aligned}$$

On repère, par définition, que la somme infinie $\displaystyle\sum_{j=n-1}^{+\infty} \binom{j}{n-1} (1-p)^{j-(n-1)}$

est la valeur b_r avec $r = n-1$ et $x = (1-p)$.

D'après la formule du binôme négatif : $b_r = \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}} = \dfrac{1}{(1-(1-p))^{n-1+1}} = \dfrac{1}{p^n}$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_{n,k}) = p^n \times \frac{1}{p^n}$ c'est à dire $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_{n,k}) = 1}$.

(b) On a $C_n = \displaystyle\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_{n,k}$ et cette union est disjointe, donc $P(C_n) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_{n,k}) = 1$.

Ainsi $\boxed{C_n \text{ se réalise presque-sûrement}}$.

Exercice 3 : Dérivée d'une somme infinie

1. Soit $x \in]-1,1[$ fixé.

   (a) Pour tout $n \geqslant 1$, $\left|\dfrac{x^n}{n}\right| = \dfrac{|x|^n}{n} \leqslant |x|^n$.
   Puisque $x \in]-1,1[$, on a $|x| \in [0,1[$, donc la série géométrique $\sum |x|^n$ converge.
   On en déduit que la série $\sum \left|\dfrac{x^n}{n}\right|$ converge.
   Ainsi, $\boxed{\text{la série } \sum \dfrac{x^n}{n} \text{ est absolument convergente, donc convergente}}$.

   (b) Pour tout $N \geqslant 1$, par linéarité de la dérivation, $(S_N)'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n}\right) = \boxed{\sum_{n=1}^{N} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{N-1} x^n}$.
   Puisque $x \in]-1,1[$, $\boxed{\text{la série } ((S_N)'(x))_{N\geqslant 1} \text{ est convergente}}$
   (c'est une série géométrique).

   (c) Pour tout $x \in]-1,1[$, $\boxed{T(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$.

2. Soit $N \geqslant 1$. On a :

$$\frac{S_N(x+h)-S_N(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{(x+h)^n}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{x^n}{n}\right) = \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\left((x+h)^n - x^n\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\right)$$

   donc :

$$\frac{S_N(x+h)-S_N(x)}{h} - (S_N)'(x) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\right) - \sum_{n=1}^{N} n x^{n-1} = \boxed{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1}\right)}.$$

3. Soit $n \geqslant 1$ fixé.

   (a) On a : $\quad (x+h)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k = x^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k$

   donc : $\quad (x+h)^n - x^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k$.

   donc : $\quad \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-1} = nx^n + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-1}$

   et donc : $\quad \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-1}$

   c'est à dire : $\quad \boxed{\dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1} = h\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-2}}$.

   (b) Pour tout $k \geqslant 2$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 1} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \times \frac{(n-2)(n-3)\dots(n-k+1)}{(k-2)(k-3)\dots 1} = \boxed{\frac{n(n-1)}{k(k-1)}\binom{n-2}{k-2}}.$$

   Et puisque $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k(k-1)} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{\dbinom{n}{k} \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}\dbinom{n-2}{k-2}}$.

(c)

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}\right| &= \left|h\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-2}\right| \quad \text{(égalité du 3.(a))}\\
&= |h|\cdot\left|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-2}\right|\\
&\leqslant |h|\cdot\sum_{k=2}^{n}\left|\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-2}\right| \quad \text{(inégalité triangulaire)}\\
&= |h|\cdot\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|x|^{n-k}|h|^{k-2}\\
&\leqslant |h|\cdot\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)}{2}\binom{n-2}{k-2}|x|^{n-k}|h|^{k-2} \quad \text{(inégalité du 3.(b))}\\
&= \frac{|h|}{2}\cdot n(n-1)\cdot\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}|x|^{n-k}|h|^{k-2}\\
&= \frac{|h|}{2}\cdot n(n-1)\cdot\sum_{j-0}^{n-2}\binom{n-2}{j}|x|^{(n-2)-j}|h|^{j} \quad \text{(changement d'indice)}\\
&= \frac{|h|}{2}\cdot n(n-1)\cdot\Big(|x|+|h|\Big)^{n-2} \quad \text{(formule du binôme)}
\end{aligned}$$

Ainsi on a montré : $\boxed{\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}\right|\leqslant\frac{|h|}{2}\cdot n(n-1)\cdot\Big(|x|+|h|\Big)^{n-2}}$.

4. (a) Soit $N\geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{S_N(x+h)-S_N(x)}{h}-(S_N)'(x)\right| &= \left|\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\left(\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}\right)\right| \quad \text{(égalité du 2.)}\\
&\leqslant \sum_{n=1}^{n}\left|\frac{1}{n}\left(\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}\right)\right| \quad \text{(inégalité triangulaire)}\\
&= \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n}\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}\right|\\
&\leqslant \sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{|h|}{2}\cdot n(n-1)\cdot\Big(|x|+|h|\Big)^{n-2} \quad \text{(inégalité du 3.(c))}\\
&= \frac{|h|}{2}\sum_{n=1}^{N}(n-1)\Big(|x|+|h|\Big)^{n-2}.
\end{aligned}$$

On a bien montré : $\boxed{\left|\frac{S_N(x+h)-S_N(x)}{h}-(S_N)'(x)\right|\leqslant\frac{|h|}{2}\sum_{n=1}^{N}(n-1)\Big(|x|+|h|\Big)^{n-2}}$.

(b) On passe à la limite quand $N\to+\infty$ dans l'inégalité précédente.
Rappelons que $\lim_{N\to+\infty}S_N(x)=S(x)$ et $\lim_{N\to+\infty}(S_N)'(x)=T(x)$, on a donc :

$$\left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h}-T(x)\right|\leqslant\frac{|h|}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)\Big(|x|+|h|\Big)^{n-2}.$$

La somme infinie de droite est bien associée à une série convergente, car $|x|+|h|<1$, donc on reconnait une série géométrique dérivée d'ordre 1 convergente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)\Big(|x|+|h|\Big)^{n-2}=\sum_{n=0}^{+\infty}n\Big(|x|+|h|\Big)^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}n\Big(|x|+|h|\Big)^{n-1}=\frac{1}{\Big(1-(|x|+|h|)\Big)^2}$$

On obtient ainsi effectivement : $\boxed{\left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h}-T(x)\right|\leqslant\frac{|h|}{2\Big(1-|x|-|h|\Big)^2}}$.

5. Soit $x \in]-1,1[$. Pour montrer que S est dérivable en x, on revient à la définition de la dérivée, c'est à dire l'existence de $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}$. Pour h assez proche de 0 (pour qu'on ait $|x|+|h|<1$), on a l'inégalité :

$$\left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h} - T(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2\Big(1-|x|-|h|\Big)^2}$$

On a bien-sûr $\quad \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|h|}{2\Big(1-|x|-|h|\Big)^2} = 0.$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} = T(x)$.

Ceci montre que $\boxed{S \text{ est dérivable en } x \text{ et } S'(x) = T(x)}$. Ceci est valable pour tout $x \in]-1,1[$.

6. On a vu que $\forall x \in]-1,1[, \;\; S'(x) = T(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (calcul fait en 1.(c))

Ainsi S est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$.

On en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-1,1[, \; S(x) = -\ln(1-x) + C$.

Or, on note que puisque $\forall x \in]-1,1[, \; S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, on a $S(0) = 0$.

On en déduit que $S(0) = -\ln(1-0) + C = 0$, c'est à dire que $C = 0$.

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \;]-1,1[, \; S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)}$.