19

Applications linéaires

Introduction et motivation

Nous avons jusqu'ici rencontré de nombreuses opérations que nous avons qualifiées de "linéaires" :

- Linéarité de la dérivation : $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$
- Linéarité de la somme : $\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k$
- Linéarité de l'espérance : $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$
- Linéarité de l'intégrale : $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$ ...

Le terme "linéarité" est évidemment à rapprocher de la notion de "combinaison linéaire"
dans un espace vectoriel ! Une opération "linéaire" est une opération qui "préserve les combinaisons linéaires".

Autrement dit, une application linéaire entre deux espaces vectoriels est une application qui "préserve" les deux opérations dont on dispose : la somme et la multiplication par un scalaire.

Dans tout ce chapitre, E, F, G désignent des espaces vectoriels fixés.

1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 (Applications linéaires)

Une **application linéaire** (ou "morphisme") entre deux espaces vectoriels E et F est une application $f : E \to F$ satisfaisant : pour tous $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \qquad \text{et} \qquad f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v).$$

Remarques 1

- La somme $\underbrace{u}_{\in E} + \underbrace{v}_{\in E}$ est une somme de vecteurs dans l'espace vectoriel "de départ" E.

  La somme $\underbrace{f(u)}_{\in F} + \underbrace{f(v)}_{\in F}$ est une somme de vecteurs dans l'espace vectoriel "d'arrivée" F !

- Si f est une application linéaire de E dans F, alors **on a automatiquement** $\boxed{f(0_E) = 0_F.}$

<u>En effet :</u> Puisque $0_E = 0_E + 0_E$, on a $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$.

Donc $f(0_E) - f(0_E) = f(0_E)$ c'est à dire $0_F = f(0_E)$.

Exemple

$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, -3x, x-y) \end{array}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

<u>En effet :</u> pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f\Big((x,y) + (x',y')\Big) &= f((x+x', y+y')) = (2(x+x') + y + y', -3(x+x'), x + x' - y - y') \\ &= (2x+y, -3x, x-y) + (2x'+y', -3x', x'-y') \\ &= f\Big((x,y)\Big) + f((x',y')). \end{aligned}$$

$$f\Big(\lambda(x,y)\Big) = f((\lambda x, \lambda y)) = (2\lambda x + \lambda y, -3\lambda x, \lambda x - \lambda y) = \lambda(2x+y, -3x, x-y) = \lambda f((x,y)).$$

Pour vérifier qu'une application est linéaire, on peut en fait condenser ces deux points en un seul.

Méthode : Caractérisation pratique d'une application linéaire

Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si :

$$(\star) \quad \forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v).$$

On pourra donc rédiger ainsi : "Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$..."

Preuve du fait que ceci est équivalent à la Définition 1 :

- Supposons que f est une application linéaire et montrons $(\star)$.

Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(\underbrace{u}_{\in E} + \underbrace{\lambda v}_{\in E}) = f(u) + f(\lambda v) \quad \text{et} \quad f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \text{donc} \quad f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v).$$

- Supposons $(\star)$ et montrons que f est une application linéaire.

Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- En utilisant $(\star)$ avec $\lambda = 1$, on obtient : $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
- En utilisant $(\star)$ avec $u = 0_E$, on obtient : $f(0_E + \lambda v) = \underbrace{f(0_E)}_{=0_F} + \lambda f(v) = 0_F + \lambda f(v)$

  c'est à dire : $f(\lambda v) = \lambda f(v)$. □

Remarques 2

- Ceci se rapproche de la "caractérisation pratique d'un sous-espace vectoriel" du chapitre #17, où l'on avait condensé deux propriétés en une seule !

Notons que pour montrer que f est linéaire, **il est inutile de vérifier que** $f(0_E) = 0_F$.

- On peut aussi remplacer la caractérisation $(\star)$ par :

$$\forall (u,v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Exercice 1

Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1), P(1), P(3)) \end{array}$ est une application linéaire.

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(P+\lambda Q) &= \Big((P+\lambda Q)(1), (P+\lambda Q)(2), (P+\lambda Q)(3)\Big) = \Big(P(1)+\lambda Q(1), P(2)+\lambda Q(2), P(3)+\lambda Q(3)\Big) \\ &= \Big(P(1), P(2), P(3)\Big) + \lambda\Big(Q(1), Q(2), Q(3)\Big) = f(P) + \lambda f(Q). \end{aligned}$$

Ceci montre que f est linéaire.

Définition 2 (Ensemble des applications linéaires)

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Pour une application linéaire $f : E \to F$, on a aussi le vocabulaire suivant :

- Lorsque $f : E \to \mathbb{R}$ (c'est à dire si l'espace d'arrivée est $F = \mathbb{R}$), on parle de forme linéaire sur E .
- Lorsque $f : E \to E$ (c'est à dire si l'espace d'arrivée est $F = E$), on parle d'endomorphisme de E .

  On note plus simplement $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Exemples

- $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x-2y+z \end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, c'est à dire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

<u>En effet :</u>

- $I: \begin{array}{ccc} C([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)dt \end{array}$ est une forme linéaire sur $C([0,1])$, c'est à dire $I \in \mathcal{L}\Big(C([0,1])\,,\,\mathbb{R}\Big)$.

<u>En effet :</u>

- $d: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, c'est à dire $d \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.

<u>En effet :</u>

- $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

<u>En effet :</u>

- Quel que soit l'espace vectoriel E, $\boxed{Id_E: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ v & \mapsto & v \end{array} \text{ est un endomorphisme de } E.}$

$\Big($C'est évident puisque pour tout $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad Id_E(u+\lambda v) = u + \lambda v = Id_E(u) + \lambda Id_E(v)\Big)$.

Bien-sûr, il faut aussi être capable de reconnaître lorsqu'une application n'est manifestement pas linéaire !

Exemples

- $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, -3x, x+1) \end{array}$ n'est pas une application linéaire.

- $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & 2xy-z \end{array}$ n'est pas une forme linéaire.

A partir de la définition d'une application linéaire (ou bien de la caractérisation équivalente ($\star$)), on obtient par récurrence immédiate sur $p \in \mathbb{N}^*$:

Proposition 1 (Image d'une combinaison linéaire par une application linéaire)

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors :

$$\forall (v_1, \dots, v_p) \in E^p,\ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \qquad f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot f(v_i).$$

Exemple

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors pour tous $u, v, w \in E$: $\quad f(3u - v + 2w) = 3f(u) - f(v) + 2f(w)$.

Proposition 2 (Application linéaire et base)

On suppose que l'espace vectoriel de départ E admet une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F telles que $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \ f(e_i) = g(e_i)$, alors on a $f = g$.

Autrement dit :
Une application linéaire $f : E \to F$ est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de E, c'est à dire par la donnée de $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$.

Preuve :

Soit $v \in E$. Puisque $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base E, on sait que v se décompose (de manière unique) comme combinaison linéaire de ces vecteurs : on peut écrire $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ pour un $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$.

Puisque f et g sont linéaires, d'après la Proposition 1 :

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \underbrace{f(e_i)}_{=g(e_i)} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g(e_i) = g\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\right) = g(v).$$

C'est valable pour tout $v \in E$. On a donc bien montré que $f = g$. $\square$

Exercice 2

Soit f l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$f((1,0,0)) = (1,1,1), \qquad f((0,1,0)) = (-1,0,1), \qquad f((0,0,1)) = (1,2,3).$$

Déterminer "explicitement" l'application f. Calculer $f((2,1,2))$.

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, c'est à dire : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On peut écrire $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$, donc :

$$f((x,y,z)) = xf((1,0,0)) + yf((0,1,0)) + zf((0,0,1)) = x(1,1,1) + y(-1,0,1) + z(1,2,3)$$

c'est à dire $f((x,y,z)) = (x - y + z, x + 2z, x + y + 3z)$.

Il s'agit donc de l'application : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x - y + z, x + 2z, x + y + 3z) \end{array}$.

On calcule : $f((2,1,2)) = (3,6,9)$.

2 Opérations sur les applications linéaires

2.1 Structure de l'ensemble des applications linéaires

Proposition 3 (Somme et multiplication par un scalaire)

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les applications :

$$f+g : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ v & \mapsto & f(v)+g(v) \end{array} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ v & \mapsto & \lambda \cdot f(v) \end{array}$$

sont encore des applications linéaires de E dans F

Preuve :

- Vérifions que $(f+g)$ est une application linéaire : pour tous $u, v \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(f+g)(u+\alpha v) = f(u+\alpha v)+g(u+\alpha v) = f(u)+\alpha f(v)+g(u)+\alpha g(v) = (f(u)+g(u))+\alpha(f(v)+g(v))$$

c'est à dire $(f+g)(u+\alpha v) = (f+g)(u) + \alpha(f+g)(v)$, d'où le résultat.

- Vérifions que λf est une application linéaire : pour tous $u, v \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda f)(u+\alpha v) = \lambda f(u+\alpha v) = \lambda(f(u)+\alpha f(v)) = \lambda f(u) + \alpha\lambda f(u)$$

c'est à dire $(\lambda f)(u+\alpha v) = (\lambda f)(u) + \alpha(\lambda f)(v)$, d'où le résultat. □

Exemple

Posons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (0, x+y, -y) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x, -y, 0). \end{array}$ On voit que $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

- On a : $f+g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x, x, -y) \end{array}$ et on voit que $f+g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.
- On a : $2f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (0, 2x+2y, -2y) \end{array}$ et on voit que $2f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.
- Plus généralement, on peut parler de l'application linéaire $2f - g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$:

$2f - g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (-x, 2x+3y, -2y) \end{array}$

Corollaire 1 (Structure de $\mathcal{L}(E, F)$)

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des application linéaires de E dans F, muni des opérations $+$ et $\cdot$ que l'on vient de définir, est un espace vectoriel.

$\Big($ Dans le cas $F = E$, on obtient : $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel. $\Big)$

Preuve (idée) :

$\mathcal{L}(E, F)$ est bien stable par addition et d'une multiplication par un scalaire. Il faudrait vérifier que ce opérations satisfont les propriétés $(A2) - (A5)$, $(M2) - (M5)$ (cf. Chapitre # 17)...
Cela découle en fait du fait que F est un espace vectoriel. □

Remarque 3

Le vecteur nul de $\mathcal{L}(E, F)$ est l'application linéaire nulle : $\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ v & \mapsto & 0_F \end{array}$ (qui est bien linéaire !)

Attention !

Le produit $f \times g$ ou le quotient $\frac{f}{g}$ de deux applications linéaires n'a pas de sens.

2.2 Composition d'applications linéaires

a) Premières propriétés

Proposition 4 (Application linéaire composée)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
Alors la composée $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G : $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

$\Big($ En particulier, si f et g sont deux endomorphismes de E, $g \circ f$ est un endomorphisme de E. $\Big)$

Preuve :

On a bien $g \circ f : E \to G$. Vérifions que c'est une application linéaire : pour tous $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(g \circ f)(u + \lambda v) = g(f(u + \lambda v)) = g(f(u) + \lambda f(v)) = g((f(u)) + \lambda g(f(v)) = (g \circ f)(u) + \lambda (g \circ f)(v).$$

$\square$

Exercice 3

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-2y) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x, 3x+y, -x-y). \end{array}$ Déterminer $g \circ f$.

On a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donc $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x,y) = g(f(x,y)) &= g(x+y, x-2y) \\ &= \Big(2(x+y), 3(x+y) + x - 2y, -(x+y) - (x-2y)\Big) \\ &= \Big(2x+2y, 4x+y, -2x+y\Big). \end{aligned}$$

Proposition 5 ("Distributivité" de la composition)

Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E,F)$, soient $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F,G)$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(\lambda g_1 + g_2) \circ f_1 = \lambda g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_1 \qquad \text{et} \qquad g_1 \circ (\lambda f_1 + f_2) = \lambda g_1 \circ f_1 + g_1 \circ f_2$$

Preuve rapide :

$$\Big((\lambda g_1 + g_2) \circ f_1\Big)(v) = (\lambda g_1 + g_2)(f_1(v)) = \lambda g_1(f_1(v)) + g_2(f_1(v)) = (\lambda g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_2)(v).$$

$$\Big(g_1 \circ (\lambda f_1 + f_2)\Big)(v) = g_1(\lambda f_1(v) + f_2(v)) \underbrace{=}_{\text{linéarité}} \lambda g_1(f_1(v)) + g_1(f_2(v)) = (\lambda g_1 \circ f_1 + g_1 \circ f_2)(v).$$ $\square$

Remarque 4

Cette proposition affirme que les calculs dans $\mathcal{L}(E,F)$ (muni de $+$, $\cdot$ et $\circ$) se passent "bien"...

$\boxed{\text{Ils se passent en fait exactement comme les calculs dans } \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \text{ (muni de } +, \cdot \text{ et } \times)}$,

où on pouvait affirmer similairement que : $(\lambda A + B)C = \lambda AC + BC$ et $A(\lambda C + D) = \lambda AC + AD$.

S P O I L E R . . .

Ce parallèle que l'on peut pressentir entre applications linéaires et matrices, entre composition d'applications $f \circ g$ et produit de matrices $A \times B$, sera clarifié un peu plus tard dans l'année !

b) Puissances d'un endomorphisme

Rappel : L'ensemble des endomorphismes de E est $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.
Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, on a $f : E \to E$ et $g : E \to E$, donc les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ sont toutes les deux définies.

Définition 3 (Puissances d'un endomorphisme)

Soit f un endomorphisme de E. On pose :

$$f^0 = Id_E \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad f^{n+1} = f^n \circ f = f \circ f^n.$$

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$ Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^n \in \mathcal{L}(E)$.

Attention !

Cette notation "puissance" doit vraiment se comprendre comme **des compositions successives**, et non comme des produits ! Il n'y a en général aucune ambiguïté, puisque le produit de 2 applications linéaires n'a pas de sens.

Exemple

Soit $d : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$ On a vu que $d \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

- $d(P) = P'$
- $d^2(P) = d(d(P)) = d(P') = P''$
- $d^3(P) = d(d^2(P)) = d(P'') = P^{(3)}$

Donc, plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d^n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P^{(n)} \end{array}$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on considère $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer l'endomorphisme φ^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Il est clair que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\varphi(X) = AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (définition du produit matriciel).
Verifions que φ est linéaire.Pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(X + \lambda Y) = A(X + \lambda Y) = AX + \lambda AY = \varphi(X) + \lambda \varphi(Y).$$

On a bien montré que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(R))$.

2. • Par définition, $\varphi^0 = Id_{\mathcal{M}_{n,1}(R)}$, c'est à dire : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(R), \varphi^0(X) = X$.
- Par définition, $\varphi^1 = \varphi$, c'est à dire : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(R)$, $\varphi^1(X) = AX$.
- Ensuite : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(R)$, $\varphi^2(X) = \varphi(\varphi(X)) = \varphi(AX) = A(AX) = A^2X$.
- Ensuite : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(R)$, $\varphi^3(X) = \varphi(\varphi^2(X)) = \varphi(A^2X) = A(AX) = A^3X$.

Par récurrence immédiate (à rédiger si ça n'est pas clair), on voit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ^k est l'application :

$$\varphi^k : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & A^kX. \end{array}$$

Remarque 5

Le parallèle entre applications linéaires et matrices se poursuit : l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E est à relier à l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées. Les propriétés des "puissances d'un endomorphisme" sont les mêmes que celles des "puissances d'une matrice carrée".

Proposition 6 (Quelques règles de calcul de puissances)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a les propriétés suivantes :

- Pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}$, $\quad f^k \circ f^\ell = f^\ell \circ f^k = f^{k+\ell} \quad$ et $\quad (f^k)^\ell = f^{k\times\ell}$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\quad (\lambda f)^k = \lambda^k f^k$.

Théorème 1 (Identités remarquables pour des matrices qui commutent)

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. (on dit que f et g commutent).
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g^k$$

$$f^n - g^n = (f-g) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}.$$

$$(fg)^n = f^n g^n = g^n f^n$$

3 Image, noyau d'une application linéaire

3.1 Image d'une application linéaire

Définition 4 (Image de f)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
L'ensemble image de f (noté habituellement $f(E)$) est appelé simplement **image de f** :

$$Im(f) = \Big\{f(v),\ v \in E\Big\} = \Big\{u \in F \mid \exists v \in E,\ u = f(v)\Big\} \subset F$$

(C'est l'ensemble des valeurs prises par f)

Proposition 7 ($Im(f)$ est un SEV de F)

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors son image $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Preuve :

- On a $0_F = f(0_E) \in Im(f)$, donc $Im(f)$ contient le vecteur nul 0_F.
- Soient $u_1, u_2 \in Im(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montons que $u_1 + \lambda u_2 \in Im(f)$.

Puisque $u_1, u_2 \in Im(f)$, il existe $v_1, v_2 \in E$ tels que $u_1 = f(v_1)$ et $u_2 = f(v_2)$.
Par linéarité de f : $u_1 + \lambda u_2 = f(v_1) + \lambda f(v_2) = f(v_1 + \lambda v_2) \in Im(f)$. □

On peut souvent être plus précis et déterminer une famille génératrice (puis une base) de $Im(f)$:

Proposition 8 (Famille génératrice de l'image)

On suppose que l'espace vectoriel de départ E admet une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors la famille $(f(e_1), \dots f(e_p))$ est génératrice de $Im(f)$, c'est à dire :

$$Im(f) = Vect(f(e_1), \dots, f(e_p)).$$

Preuve de la Proposition 8 :

Pour tout $v \in E$, il existe un (unique) $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$, donc :

$$Im(f) = \Big\{f(v),\ v \in E\Big\} = \Big\{f\left(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p\right),\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p\Big\}$$
$$= \Big\{\lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_p f(e_p),\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p\Big\} = Vect\Big(f(e_1), \dots, f(e_p)\Big).$$

□

Remarques 6

- On voit dans la preuve qu'il n'est même pas nécessaire que $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de E : il suffit en fait que ce soit une famille génératrice de E.

- Attention : $\Big(f(e_1), \dots, f(e_p)\Big)$ est une famille génératrice de $Im(f)$, mais ce n'est pas forcément une base de $Im(f)$: il se peut tout à fait que ça ne soit pas une famille libre !

Exercice 5

Déterminer l'image des applications linéaires suivantes. Lorsque c'est possible, on en donnera une base.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+y-z, x-2z) \end{array}$
2. $d : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$
3. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP \end{array}$

1. Méthode 1 : Par définition,

$$Im(f) = \Big\{f(x,y,z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\Big\} = \Big\{(2x+y-z, x-2z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$
$$= \Big\{x(2,1) + y(1,0) + z(-1,-2), (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\Big\} = Vect\Big((2,1), (1,0), (-1,-2)\Big).$$

Méthode 2 : Comme $\Big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on a directement :

$$Im(f) = Vect\Big(f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1))\Big) = Vect\Big((2,1), (1,0), (-1,-2)\Big).$$

Attention : cette famille n'est pas une base de $Im(f)$, car elle n'est pas libre !
Par exemple : $(-1,-2) = -2(2,1) + 3(1,0)$, on peut donc le retirer : $Im(f) = Vect\Big((2,1), (1,0)\Big)$.

La famille $\Big((2,1), (1,0)\Big)$ est génératrice de $Im(f)$ et libre (deux vecteurs non-colinéaires) : c'est donc une base de $Im(f)$.

2. Comme $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, on a directement :

$$Im(d) = Vect\Big(d(1), d(X), d(X^2), d(X^3)\Big) = Vect\Big(0, 1, 2X, 3X^2\Big) = Vect\Big(1, 2X, 3X^2\Big)$$
$$= Vect\Big(1, X, X^2\Big) = \mathbb{R}_2[X].$$

Ainsi $Im(d) = \mathbb{R}_2[X]$. Une base de $Im(f)$ est $(1, X, X^2)$.

3. Cette fois, l'espace vectoriel de départ $\mathbb{R}[X]$ n'admet pas de base (avec un nombre fini de vecteurs, on le verra plus tard...). On écrit donc simplement la définition :

$$Im(g) = \Big\{g(P),\ P \in \mathbb{R}[X]\Big\} = \Big\{XP,\ P \in \mathbb{R}[X]\Big\}.$$

On peut noter que pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$Q \in Im(g) \iff \exists P \in \mathbb{R}[X],\ Q = XP \iff X \text{ divise } Q \iff Q(0) = 0.$$

Ainsi : $Im(g) = \Big\{Q \in \mathbb{R}[X] \mid Q(0) = 0\Big\}$.

3.2 Noyau d'une application linéaire

Définition 5 (Noyau de f)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
L'ensemble des antécédents de 0_F par f (habituellement noté $f^{-1}(\{0_F\})$) est appelé **noyau de** f :

$$Ker(f) = \Big\{v \in E \mid f(v) = 0_F\Big\} \subset E$$

Proposition 9 ($Ker(f)$ est un SEV de E)

Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors son noyau $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve :

- On a $f(0_E) = 0_F$, donc le vecteur nul 0_E appartient à $Ker(f)$.
- Soient $u, v \in Ker(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $u + \lambda v \in Ker(f)$.

Puisque $u, v \in Ker(f)$, on a $f(u) = 0_F$ et $f(v) = 0_F$.
Par linéarité de f : $f(u + \lambda v) = \underbrace{f(u)}_{=0_F} + \lambda \underbrace{f(v)}_{=0_F} = 0_F$, donc $u + \lambda v \in Ker(f)$. □

Exercice 6

Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x + y - z, x - 2z) \end{array}$
2. $d : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$
3. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP \end{array}$

1. $Ker(f) = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f((x, y, z)) = (0, 0)\Big\} = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (2x + y - z, x - 2z) = (0, 0)\Big\}$
c'est à dire :
$$Ker(f) = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0 \text{ et } x - 2z = 0\Big\}.$$
(On peut ensuite trouver une base de $Ker(f)$ en "explicitant" cet ensemble...)

2. $Ker(d) = \Big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P' = 0\Big\} = \mathbb{R}_0[X]$. (ensemble des polynôme constants)

3. $Ker(g) = \Big\{P \in \mathbb{R}[X] \mid XP = 0\Big\} = \{0\}$. ($Ker(g)$ ne contient donc que le polynôme nul !)

Remarque 7

La Proposition 9 donne un moyen supplémentaire de montrer rapidement qu'un ensemble est un espace vectoriel : on peut repérer qu'il s'agit du noyau d'une application linéaire !
(Quitte à vérifier rapidement que l'application en question est linéaire...)

Exemples

- $\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\Big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$,
car c'est le noyau de la forme linéaire $f : (x, y, z) \mapsto 2x - y + z$ (on a clairement $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$).

- $S_n(\mathbb{R}) = \Big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A\Big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
car c'est le noyau de l'endomorphisme $g : A \mapsto {}^tA - A$. (vérifiez que $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$...)

- Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda = \Big\{x \in E \mid f(x) = \lambda x\Big\}$ est un sous-espace vectoriel de E car
$$E_\lambda = \Big\{x \in E \;\Big|\; f(x) - \lambda x = 0_E\Big\} = \Big\{x \in E \;\Big|\; (f - \lambda Id_E)(x) = 0_E\Big\} = Ker(f - \lambda Id_E).$$

4 Injectivitité/surjectivité/bijectivité des applications linéaires

4.1 Notion d'isomorphisme

Définition 6 (Isomorphisme, espaces isomorphes)

- Un **isomorphisme** de E dans F est une application linéaire de E dans F bijective.
- S'il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que les espaces vectoriels E et F sont isomorphes.

Dans le cas particulier $F = E$, on parle plutôt d'**automorphisme** :

- Un **automorphisme** de E est un isomorphisme de E dans E,
  c'est à dire un endomorphisme de E bijectif (i.e une application linéaire de E dans E bijective)
  On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E (c'est donc une partie de $\mathcal{L}(E)$).

Exemples

- L'application $Id_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ v & \mapsto & v \end{array}$ est toujours une application linéaire bijective de E dans E,

c'est à dire un automorphisme de E. Ainsi un espace vectoriel E est toujours isomorphe à lui-même !

- L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (a,b,c,d) & \mapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array}$ est clairement linéaire et bijective.

f est donc un isomorphisme : les espace $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont isomorphes.

- L'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ (a,b,c) & \mapsto & aX^2 + bX + c \end{array}$ est clairement linéaire et bijective.

g est donc un isomorphisme : les espace $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont isomorphes.

Rappel : Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe une application réciproque $f^{-1} : F \to E$ satisfaisant : $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$.

Proposition 10 (Isomorphisme réciproque)

- Si f est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.
  En particulier : f^{-1} est aussi une application linéaire ! (de F dans E).
- Si f est un isomorphisme de E dans F et si g est un isomorphisme de F dans G alors :

$$g \circ f \text{ est un isomorphisme de } E \text{ dans } G \quad \text{et} \quad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Preuve :

- Soit f un isomorphisme de E dans F. On a donc $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et f bijective.

On peut introduire la réciproque f^{-1}. On sait déjà que f^{-1} est bijective de F dans E.
Il reste donc à montrer que f^{-1} est linéaire. Pour tous $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de f :

$$u + \lambda v = f(f^{-1}(u)) + \lambda f(f^{-1}(v)) = f\Big(f^{-1}(u) + \lambda f^{-1}(v)\Big).$$

En composant cette égalité par f^{-1}, on obtient $f^{-1}(u + \lambda v) = f^{-1}(u) + \lambda f^{-1}(v)$, d'où le résultat.

- Soient f un isomorphisme de E dans F et g un isomorphisme de F dans G. Alors :

- $g \circ f$ est linéaire de E dans G comme composée d'applications linéaires,
- $g \circ f$ est bijective de E dans G comme composée d'applications bijectives.

$g \circ f$ est donc une application linéaire bijective de E dans G, c'est à dire un isomorphisme !

Par ailleurs, on a déjà démontré la formule $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (pour toutes fonctions bijectives).$\square$

Exercice 7

Démontrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$ est un automorphisme et déterminer f^{-1}.

f est clairement linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Calculons f^{-1}. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a les équivalences :

$$f((x,y)) = (a,b) \iff (x+y, x-y) = (a,b) \iff \left\{ \begin{array}{ll} x+y & = a \\ x-y & = b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} x+y & = a \\ -2y & = b-a \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} x & = a - y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ y & = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \end{array} \right. \iff (x,y) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2} \right) \iff (x,y) = f^{-1}((a,b)).$$

Ceci montre que f est bijective, de réciproque : $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \mapsto & (\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}) \end{array}$

c'est à dire $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}) \end{array}$

4.2 Injectivité/surjectivité et noyau/image

Rappels : • Une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si

"Tout élément de F admet au moins un antécédent dans E"

autrement dit : "Tout élément de F est atteint par f" c'est à dire : $f(E) = F$.

• Une application $f : E \to F$ est injective si et seulement si

"Tout élément de F admet au plus un antécédent dans E"

autrement dit : $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

Un des intérêts principaux de l'étude de l'image et du noyau d'une application linéaire est le suivant :

Théorème 2 (Injectivité/surjectivité et noyau/image)

Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a les équivalences suivantes :

• f est surjective $\iff$ $Im(f) = F$. • f est injective $\iff$ $Ker(f) = \{0_E\}$.

Ainsi, f est bijective (i.e un isomorphisme) si et seulement si : $Im(f) = F$ et $Ker(f) = \{0_E\}$

Preuve :

• Par définition de la surjectivité : f surjective $\iff f(E) = F \iff Im(f) = F$

• Supposons f injective. Alors, en particulier, 0_F admet au maximum un antécédent par f.
Comme $f(0_E) = 0_F$, l'unique antécédent de 0_F est 0_E.
Ceci montre que $Ker(f) = \{v \in E \mid f(v) = 0_F\} = \{0_E\}$.

Inversement, supposons $Ker(f) = \{0_E\}$ et montrons que f est injective.
Soient $u, v \in E$ tels que $f(u) = f(v)$. Montrons que $u = v$:

$$f(u) = f(v) \iff f(u) - f(v) = 0_F \iff f(u-v) = 0_F \Leftrightarrow u - v \in \underbrace{Ker(f)}_{=\{0_E\}} \iff u - v = 0_E \iff u = v.$$

On a bien montré que f est injective. □

Remarque 8

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a vu que f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0_E\}$, c'est à dire que **l'unique antécédent de 0_F est 0_E.** Cela conduit à la méthode suivante :

Méthode : Montrer qu'une application linéaire est injective

Montrer que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est injective revient à montrer : $\forall v \in E, \quad f(v) = 0_F \Longrightarrow 0_E.$

On pourra donc rédiger ainsi : "Soit $v \in E$ tel que $f(v) = 0_F$. Montons que $v = 0_E$..."

Exercice 8

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3)) \end{array}$. Montrer que f est injective.

f est clairement linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$. Vérifions que $Ker(f) = \{0\}$:

Soit $P \in Ker(f)$, c'est à dire : $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $f(P) = (0,0,0)$. Montrons que $P = 0$.

On a $(P(1), P(2), P(3)) = (0,0,0)$, c'est à dire $P(1) = P(2) = P(3) = 0$.

P admet donc 3 racines distinctes, or $\deg(P) \leqslant 2$: c'est donc que $P = 0$.

On a bien montré que f est injective.

4.3 Injectivité/surjectivité et image d'une base

On a vu (Proposition 2) que si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E, une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est entièrement déterminée par la donnée des images $f(e_1), \ldots, f(e_p)$.
De plus, à partir de ces images, on peut immédiatement "lire" l'injectivité / la surjectivité de f !

Théorème 3 (Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base)

On suppose que l'espace vectoriel de départ E admet une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on a les équivalences :

(a) f est surjective $\Longleftrightarrow$ $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est une famille génératrice de F.
(b) f est injective $\Longleftrightarrow$ $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est une famille libre de F.
(c) f est bijective $\Longleftrightarrow$ $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ est une base de F.

Preuve :

(a) On a vu (Proposition 8) que $Im(f) = Vect\Big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\Big)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f \text{ est surjective} &\Longleftrightarrow \text{Im(f)} = \text{F} \Longleftrightarrow Vect\Big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\Big) = F \\ &\Longleftrightarrow \Big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\Big) \text{ est une famille génératrice de } F. \end{aligned}$$

(b) • Supposons f injective et montrons que $\Big((f(e_1), \ldots, f(e_p)\Big)$ est une famille libre.
Pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_p f(e_p) = 0_F &\Longleftrightarrow f\left(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p\right) = 0_F \\ &\Longleftrightarrow \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p \in Ker(f) = \{0_E\} \quad (\text{car } f \text{ est injective}) \\ &\Longleftrightarrow \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p = 0_E \\ &\Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0 \ (\text{ car } (e_1, \ldots, e_p) \text{ est une famille libre}) \end{aligned}$$

Ceci montre bien que $\Big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\Big)$ est une famille libre.

- Inversement, supposons que $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une famille libre et montrons que f est injective.

On doit montrer que $Ker(f) = \{0_E\}$: soit $v \in E$ tel que $f(v) = 0_F$, montrons que $v = 0_E$.

Puisque $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E, il existe (un unique) $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$. On a ainsi :

$$f(v) = 0_F \iff f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p) = 0_F \iff \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_p f(e_p) = 0_F$$

Puis $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une famille libre, on en déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$,
et donc $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = 0_E$.
On a bien montré que f est injective.

(c) Il suffit de combiner les résultats (a) et (b) ! □

Exercice 9

Soit f l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$f((1,0,0)) = (1,1,1), \qquad f((0,1,0)) = (1,1,0), \qquad f((0,0,1)) = (1,2,3).$$

Montrer que f est un automorphisme.

Il faut montrer que f est bijective, ce qui revient à montrer que $\Big((1,1,1),(1,1,0),(1,2,3)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- Famille génératrice : Vérifions que $Vect\Big((1,1,1),(1,1,0),(1,2,3)\Big) = \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} Vect\Big((1,1,1),(1,1,0),(1,1,-1)\Big) &= Vect\Big((0,0,1),(1,1,0),(1,2,3)\Big) = Vect\Big((0,0,1),(1,1,0),(0,1,3)\Big) \\ &= Vect\Big((0,0,1),(1,1,0),(0,1,0)\Big) = Vect\Big((0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\Big) \\ &= Vect\Big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\Big) = \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

- Famille libre : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,2,3) = (0,0,0)$. On a :

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ a+b+2c &= 0 \\ a+3c &= 0 \end{cases} \iff [...] \iff a = b = c = 0. \quad CQFD$$

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Montrer qu'une application est linéaire.
- Calculer la composée de deux applications linéaires.
- Calculer l'image et le noyau d'une application linéaire.
- Déduire de $Im(f)$ et $Ker(f)$ la surjectivité/l'injectivité.
- Maîtriser le vocabulaire : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme...

Pour suivre

- Déterminer une application linéaire à partir de l'image des vecteurs d'une base.
- Déduire de ces images la surjectivité / l'injectivité.
- Manipuler des combinaisons linéaires, des compositions d'application linéaires, des puissances d'endomorphismes.
- Calculer explicitement une réciproque f^{-1}.

Pour les ambitieux

- Bien comprendre les preuves du cours.