28

Couples de variables aléatoires discrètes

Rappel utile dans tout ce chapitre : (Formule des probabilités totales, "version intersection")

Si $(A_i)_{i\in I}$ est un S.C.E (fini ou infini), alors pour tout évènement B : $\quad P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i \cap B)$.

0 Notion de "série double"

Dans ce chapitre, pour calculer des probabilités et des espérances liées aux couples de variables aléatoires, nous allons parfois être amenés à manipuler des sommes doubles infinies. Le programme d'ECG ne mentionne pas explicitement l'étude des séries doubles : on se contentera en général d'admettre que les sommes doubles infinies que l'on rencontre sont bien convergentes. Énonçons tout de même quelques résultats utiles (et intuitifs !) sur les séries doubles.

Définition 1 (Convergence d'une série double)

Soit $(a_{k,n})_{k,n\in\mathbb{N}}$ une famille de réels. On dit que la série double $\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} a_{k,n}$ est convergente lorsque :

$\boxed{1}$ Pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé , la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{k,n}$ est convergente,

$\boxed{2}$ La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n}\right)$ est convergente.

Dans ce cas, on pose : $\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} a_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n}\right)$

Exercice 1

On pose, pour tout $(k,n)\in\mathbb{N}^2$, $\quad a_{k,n} = \begin{cases} \dfrac{1}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Montrer que la série double $\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} a_{k,n}$ converge et calculer sa valeur.

- Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Etudions la série $\sum_n a_{k,n}$. Pour tout $N \geqslant 0$,

$$\sum_{n=0}^{N} a_{k,n} = \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{N-k}\frac{1}{(n)!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n)!} = \frac{e}{k!}.$$

Ceci montre que la série converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n} = \frac{e}{k!}$.

- On étudie ensuite la série $\sum_k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n}\right) = \sum_k \frac{e}{k!}$. Il est clair qu'elle est convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e}{k!} = e\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = e^2.$$

Conclusion : la série double $\sum a_{k,n}$ est convergente et $\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} a_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n}\right) = e^2$.

Théorème 1 (de Fubini-Tonelli : Interversion des sommes infinies)

Soit $(a_{k,n})_{k,n\in\mathbb{N}}$ une famille de réels positifs.

Alors, la série double $\displaystyle\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} a_{k,n}$ est convergente si et seulement si :

$\boxed{1}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé , la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{k,n}$ est convergente,

$\boxed{2}$ La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}\right)$ est convergente.

En cas de convergence, on a de plus : $\displaystyle\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} a_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}\right).$

Autrement dit, tout comme pour les sommes finies (au moins dans le cas de réels positifs) on peut sommer "d'abord sur k, ensuite sur n" ou bien "d'abord sur n, ensuite sur k".

Exercice 2

On pose, à nouveau, pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, $\quad a_{k,n} = \begin{cases} \dfrac{1}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Vérifier que l'on retrouve la valeur de l'exercice précédent en sommant "d'abord sur k, ensuite sur n".

- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Etudions la série $\displaystyle\sum_k a_{k,n}$. Dès que $N \geqslant n$,

$$\sum_{k=0}^{N} a_{k,n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \frac{1}{n!}2^n = \frac{2^n}{n!}.$$

Ceci montre que la série converge et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} = \frac{2^n}{n!}$.

- On étudie en suite la série $\displaystyle\sum_n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}\right) = \sum_n \frac{2^n}{n!}$.

On sait que cette série est convergente et que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n!} = e^2$.

Conclusion : on constate bien que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}\right) = e^2 = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n}\right)$.

Pour les réels non-positifs (de signe non-constant...), on définit bien-sûr la notion de convergence absolue.

Définition 2 Convergence absolue d'une série double)

On dit que la série double $\displaystyle\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} a_{k,n}$ est aboslument convergente lorsque $\displaystyle\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} |a_{k,n}|$ converge.

En cas de convergence absolue, on peut également intervertir les sommes !

Théorème 2 (de Fubini : Interversion des sommes infinies)

Si la série double $\displaystyle\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} a_{k,n}$ est absolument convergente, alors elle est convergente et on a :

$$\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} a_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}\right).$$

Dans tout ce chapitre, les variables aléatoires discrètes rencontrées seront définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, que l'on suppose fixé.

1 Loi de probabilité d'un couple (X, Y)

1.1 Loi de probabilité de (X, Y)

Un bon nombre de problèmes en probabilités font intervenir non pas une mais deux (ou plus!) variables aléatoires X et Y. Dans de nombreux cas, la valeur de X a une incidence sur celle de Y et inversement.
Il ne sera donc pas suffisant d'étudier la loi de probabilité de X d'une part et celle de Y d'autre part : on a envie d'étudier ces deux variables conjointement!

Définition 3 Loi de probabilité de (X, Y)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.
La loi de probabilité du couple (X, Y) est la donnée :

$\boxed{1}$ Des supports $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$,

$\boxed{2}$ Des valeurs des probabilités $P([X = x] \cap [Y = y])$ pour tous $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.

Remarques 1

- Autrement dit, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on veut connaître la probabilité que le couple (X, Y) prenne la valeur (x, y).

- **Attention :** On n'a <u>pas</u> $P\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big) = P(X = x) \times P(Y = y)$ en général!

C'est vrai seulement si les variables X et Y sont **indépendantes** (cf. rappel plus loin).

- Très souvent, à partir d'un énoncé en français, on connaîtra :

- La loi de probabilité d'une des variables (disons X)
- Les probabilités conditionnelles $P_{[X=x]}(Y = y)$.

On pourra alors déterminer la loi du couple : $\boxed{P\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big) = P(X = x) \times P_{[X=x]}(Y = y)}$

Exercice 3

Dans un poulailler, on récupère au bout d'une semaine un nombre d'oeufs modélisé par une variable aléatoire X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda > 0$. Chaque oeuf, indépendamment des autres, a un probabilité $p \in]0, 1[$ de donner un poussin. On note Y le nombre de poussins obtenus.
Déterminer la loi du couple (X, Y).

L'énoncé nous apprend que :

- $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, donc $\forall i \in \mathbb{N},\ P(X = i) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^i}{i!}$.
- Pour tout $i \in \mathbb{N}$, si l'évènement $[X = i]$ est réalisé, alors Y compte le nombre de poussins obtenus sur i oeufs : on reconnait une loi $\mathcal{B}(i, p)$. Ainsi : $\forall j \in \mathbb{N},\ P_{[X=i]}(Y = j) = \dbinom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j}$.

(avec la convention $\dbinom{i}{j} = 0$ si $j > i$).

<u>Conclusion :</u> Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = P(X = i) \times P_{[X=i]}(Y = j) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\binom{i}{j} p^j (1-p)^{i-j}.$$

On note que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

Attention !

Connaître la loi de X et la loi de Y **ne suffit pas** à connaître la loi du couple (X, Y) !
(En revanche, on verra qu'à partir de la loi du couple (X, Y), on peut retrouver les lois de X et de Y)

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(1/2)$. On pose :
- Y_1 une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(1/2)$, indépendante de X.
- $Y_2 = 1 - X$.

Vérifier que Y_1 et Y_2 ont la même loi, mais que les couples (X, Y_1) et (X, Y_2) n'ont pas la même loi.

- On sait que $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$.

Puisque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$: on a $P(Y_2 = 0) = P(1 - X = 1) = P(X = 1) = \dfrac{1}{2}$
et $P(Y_2 = 1) = P(1 - X = 1) = P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$.
On a donc également $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$: Y_1 et Y_2 ont la même loi.

- On détermine la loi du couple (X, Y_1). Par indépendance de X et Y_1 :

$$\forall (x, y) \in \{0, 1\}^2, \quad P([X = x] \cap [Y_1 = y]) = P(X = x) \times P(Y_1 = y) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi :

$$P([X = 0] \cap [Y_1 = 0]) = P([X = 0] \cap [Y_1 = 1]) = P([X = 1] \cap [Y_1 = 0]) = P([X = 1] \cap [Y_1 = 1]) = \frac{1}{4}.$$

- On détermine la loi du couple (X, Y_2). Puisque $Y_2 = 1 - X$:

$P([X = 0] \cap [Y_2 = 0]) = P([X = 0] \cap [X = 1]) = 0$
$P([X = 0] \cap [Y_2 = 1]) = P([X = 0] \cap [X = 0]) = P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$
$P([X = 1] \cap [Y_2 = 0]) = P([X = 1] \cap [X = 1]) = P(X = 1) = \dfrac{1}{2}$
$P([X = 1] \cap [Y_2 = 1]) = P([X = 0] \cap [X = 0]) = 0$.

Revenons, au passage sur la notion d'indépendance :

Définition 4 (Variables aléatoires indépendantes) (rappel)

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont dites indépendantes lorsque :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

Cette propriété s'étend en fait à des évènements plus généraux :

Proposition 1 (Conséquence de l'indépendance)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. Alors :

$$\text{Pour tous } A \subset X(\Omega) \text{ et } B \subset Y(\Omega), \quad P([X \in A] \cap [Y \in B]) = P(X \in A) \times P(Y \in B).$$

Remarque 2

Lorsque X et Y sont indépendantes, on pourra affirmer par exemple :

$P([X \leqslant n] \cap [Y \leqslant m]) = P(X \leqslant n) \times P(Y \leqslant m), \quad P([X \geqslant n] \cap [Y \geqslant m]) = P(X \geqslant n) \times P(Y \geqslant m)$

Preuve de la Proposition 1 (sans trop se soucier de la convergence des séries doubles) :

Notons $A = \{x_i,\ i \in I\}$ (les x_i sont 2 à 2 distincts) et $B = \{y_j,\ j \in J\}$ (les y_j sont 2 à 2 distincts).

Ainsi : $[X \in A] \cap [Y \in B] = \left(\bigcup_{i\in I}[X = x_i]\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J}[Y = y_j]\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J}([X = x_i] \cap [Y = y_j])$.

C'est une union d'évènement deux à deux incompatibles. On a donc :

$$P([X \in A] \cap [Y \in B]) = \sum_{(i,j)\in I\times J} P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{(i,j)\in I\times J} P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

Il s'agit d'une somme double infinie (ou finie si les ensemble I et J sont finis...)

On peut donc la ré-écrire, par exemple :

$$\begin{aligned} P([X \in A] \cap [Y \in B]) &= \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} P(X = x_i)P(Y = y_j)\right) = \sum_{i\in I}\left(P(X = x_i)\sum_{j\in J} P(Y = y_j)\right) \\ &= \left(\sum_{i\in I} P(X = x_i)\right) \times \left(\sum_{j\in J} P(Y = y_j)\right) = P(X \in A) \times P(X \in B). \end{aligned}$$

□

Enfin, donnons une dernière considération générale sur la loi de probabilité d'un couple :

Proposition 2 (Somme des probabilités pour un couple)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. Alors :

$$\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} P\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big) = \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} P\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big) = 1.$$

Remarques 3

- L'équivalent de cette formule pour une seule variable est la fameuse égalité $\sum_{x\in X(\Omega)} P(X = x) = 1$!
- On peut facilement constater cette égalité pour les deux couples de l'Exercice 4.

Preuve de la Proposition 2 (sans trop se soucier de la convergence des séries doubles) :

La famille d'évènements $\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ est un système complet d'évènement : quelle que soit l'issue $\omega \in \Omega$ de l'expérience aléatoire, le couple $(X(\omega), Y(\omega))$ prendra une et une seule des valeurs $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

On a ainsi l'union disjointe : $\bigcup_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} [X = x] \cap [Y = y] = \Omega$.

En passant aux probabilités, il en résulte : $\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} P\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big) = P(\Omega) = 1.$ □

Remarque 4

Inversement, si l'on considère des réels $p_{i,j}$ positifs et tels que $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} p_{i,j} = 1$,

alors il existe deux variables aléatoires discrètes X et Y, définies sur un certain espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que la loi de probabilité du couple (X, Y) soit donnée par :

$$\forall(i, j) \in \mathbb{N}^2,\quad P([X = i] \cap [Y = j]) = p_{i,j}.$$

(On pourra admettre ce résultat au besoin).

1.2 Loi des marginales X et de Y à partir de la loi du couple

Si l'on a déterminé la loi de probabilité du couple (X,Y), on peut retrouver les lois de X et de Y. (X et Y sont parfois appelés les **marginales** du couple (X,Y))

Proposition 3 (Lois des marginales)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. Alors :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X=x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P\Big([X=x]\cap[Y=y]\Big)$$

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y=y) = \sum_{x\in X(\Omega)} P\Big([X=x]\cap[Y=y]\Big)$$

Preuve :

Pour tout $x \in X(\Omega)$, on applique la formule des probabilité totales ("version intersection") avec le système complet d'évènements $([Y=y])_{y\in Y(\Omega)}$:

$$P(X=x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P\Big([X=x]\cap[Y=y]\Big).$$

De même symétriquement pour l'autre égalité. □

Remarques 5

- Puisque $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)=1$, on retrouve à nouveau : $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} P\Big([X=x]\cap[Y=y]\Big)=1.$
- Le résultat de la Proposition 3, bien que très utile, n'est pas explicitement mentionné dans le programme. Sur une copie, on n'hésitera donc pas à dire qu'il s'agit d'une application de la formule des probabilités totales (comme on le fait dans la preuve !)

Exercice 5

On reprend l'exemple du poulailler de l'Exercice 3.

On rappelle que pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $\quad P([X=i]\cap[Y=j]) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^i}{i!}\dbinom{i}{j}p^j(1-p)^{i-j}.$

Déterminer la loi de probabilité de Y.

Pour tout $j\in\mathbb{N}$, d'après la formule des probabilités totales, $P(Y=j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P([X=i]\cap[Y=j]).$

Notons que pour $i<j$, $\quad P([X=i]\cap[Y=j])=0.$

Pour $i\geqslant j$:

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\binom{i}{j}p^j(1-p)^{i-j} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\times\frac{i!}{j!(i-j)!}\times p^j(1-p)^{i-j} = e^{-\lambda}\frac{p^j}{j!}\times\frac{\lambda^i}{(i-j)!}(1-p)^{i-j}.$$

Ainsi :

$$P(Y=j) = e^{-\lambda}\frac{p^j}{j!}\times\sum_{i=j}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{(i-j)!}(1-p)^{i-j} = e^{-\lambda}\frac{p^j}{j!}\times\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{i+j}}{i!}(1-p)^i = e^{-\lambda}\frac{p^j\lambda^j}{j!}\times\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^i}{i!}$$
$$= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^j}{j!}\times e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^j}{j!}.$$

On reconnait donc que $Y\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda p)$.

2 Loi de probabilité d'un transfert $g(X,Y)$

Si $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$ et $Y : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$ sont deux variables aléatoires discrètes

et si g est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on peut considérer : $Z : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & g(X(\omega), Y(\omega)). \end{array}$

Cette variable aléatoire, que l'on note simplement $Z = g(X,Y)$ est également discrète.
(On l'appelle parfois le "transfert" de (X,Y) par la fonction g).

Si l'on connaît la loi du couple (X,Y), il est possible en toute généralité de déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = g(X,Y)$. Dans la suite, nous allons nous contenter d'étudier les cas classiques :

$$Z = \min(X,Y), \quad Z = \max(X,Y), \quad Z = X + Y.$$

2.1 Loi de $\min(X,Y)$ et $\max(X,Y)$

Méthode : Déterminer la loi de probabilité de $\min(X,Y)$ ou de $\max(X,Y)$.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ (i.e : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$).
On suppose que l'on connaît la loi du couple (X,Y).

$\boxed{1 \text{ (a)}}$ Pour déterminer la loi de $Z = \min(X,Y)$ l'astuce est de remarquer que :

$$\Big[Z \geqslant n\Big] = \Big[\min(X,Y) \geqslant n\Big] = [X \geqslant n] \cap [Y \geqslant n].$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{P(Z \geqslant n) = P([X \geqslant n] \cap [Y \geqslant n]).}$
(cette dernière probabilité peut être calculée à l'aide de la loi du couple)

$\to$ En particulier : **si X et Y sont indépendantes**, $P(Z \geqslant n) = P(X \geqslant n) \times P(Y \geqslant n)$.

$\boxed{1 \text{ (b)}}$ Pour déterminer la loi de $Z = \max(X,Y)$ l'astuce est de remarquer que :

$$\Big[Z \leqslant n\Big] = \Big[\max(X,Y) \leqslant n\Big] = [X \leqslant n] \cap [Y \leqslant n].$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{P(Z \leqslant n) = P([X \leqslant n] \cap [Y \leqslant n]).}$
(cette dernière probabilité peut être calculée à l'aide de la loi du couple)

$\to$ En particulier : **si X et Y sont indépendantes**, $P(Z \leqslant n) = P(X \leqslant n) \times P(Y \leqslant n)$.

$\boxed{2}$ Une fois que l'on connaît $P(Z \geqslant n)$ ou $P(Z \leqslant n)$, on revient à la loi de probabilité avec :

$$P(Z = n) = P(Z \geqslant n) - P(Z \geqslant n+1) \qquad \text{ou} \qquad P(Z = n) = P(Z \leqslant n) - P(Z \leqslant n-1).$$

Remarque 6

Evidemment, cette méthode peut aussi s'adapter en considérant les évènements $[Z > n]$ ou $[Z < n]$...

Exercice 6

On lance deux dés à N faces équilibrés. On note X et Y les numéros obtenus.

1. Quelle est la loi du couple (X,Y) ?
2. Déterminer la loi de $\min(X,Y)$.
3. Déterminer la loi de $\max(X,Y)$.

1. Il est clair que X et Y sont indépendantes, de loi $\mathcal{U}([\![1,N]\!])$. On a donc $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![1,N]\!]$, et :

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\ \ P([X=i]\cap[Y=j])=P(X=i)\times P(Y=j)=\frac{1}{N}\times\frac{1}{N}=\frac{1}{N^2}.$$

2. Notons $Z=\min(X,Y)$. Il est clair que $Z(\Omega)=[\![1,N]\!]$.
Pour tout $k\in[\![1,N]\!]$, on a $[Z\geqslant k]=[X\geqslant k]\cap[Y\geqslant k]$.
Donc par indépendance : $P(Z\geqslant k)=P(X\geqslant k)\times P(Y\geqslant k)$.

Puisque $X\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1,N]\!])$, $\displaystyle P(X\geqslant k)=\sum_{i=k}^{N}P(X=i)=\sum_{i=k}^{N}\frac{1}{N}=\frac{N-k+1}{N}$. De même pour Y.

Ainsi : $\forall k\in[\![1,N]\!],\ P(Z\geqslant k)=\left(\dfrac{N-k+1}{N}\right)^2$.

Notons que cette formule fonction aussi pour $k=N+1$.
Puis, pour tout $k\in[\![1,N]\!]$,

$$\begin{aligned}P(Z=k)=P(Z\geqslant k)-P(Z\geqslant k+1)&=\left(\frac{N-k+1}{N}\right)^2-\left(\frac{N-k}{N}\right)^2\\&=\left(\frac{N-k+1}{N}-\frac{N-k}{N}\right)\left(\frac{N-k+1}{N}+\frac{N-k}{N}\right)=\frac{1}{N}\times\frac{2N+1-2k}{N}=\frac{2N+1-2k}{N^2}.\end{aligned}$$

2. Notons $W=\max(X,Y)$. Il est clair que $W(\Omega)=[\![1,N]\!]$.
Pour tout $k\in[\![1,N]\!]$, on a $[W\leqslant k]=[X\leqslant k]\cap[Y\leqslant k]$.
Donc par indépendance : $P(W\leqslant k)=P(X\leqslant k)\times P(Y\leqslant k)$.

Puisque $X\hookrightarrow\mathcal{U}([\![1,N]\!])$, $\displaystyle P(X\leqslant k)=\sum_{i=1}^{k}P(X=i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{N}=\frac{k}{N}$. De même pour Y.

Ainsi : $\forall k\in[\![1,N]\!],\ P(W\leqslant k)=\dfrac{k^2}{N^2}$.

Notons que cette formule fonctionne aussi pour $k=0$.
Puis, pour tout $k\in[\![1,N]\!]$,

$$\begin{aligned}P(W=k)=P(W\leqslant k)-P(W\leqslant k-1)&=\frac{k^2}{N^2}-\frac{(k-1)^2}{N^2}=\frac{(k-(k-1))(k+k-1)}{N^2}\\&=\frac{2k-1}{N^2}.\end{aligned}$$

2.2 Loi de $X+Y$

Proposition 4 (Loi de probabilité de $X+Y$)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes et $Z = X+Y$. La loi de Z est donnée par :

$$\forall z \in Z(\Omega), \quad P(Z=z) = \sum_{x\in X(\Omega)} P\Big([X=x]\cap[Y=z-x]\Big)$$

ou bien :

$$\forall z \in Z(\Omega), \quad P(Z=z) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P\Big([X=z-y]\cap[Y=y]\Big).$$

Remarques 7

- En particulier, **si X et Y sont indépendantes**, on obtient :

$$P(Z=z) = \sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)P(Y=z-x) \quad \text{ou bien} \quad P(Z=z) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P(X=z-y)P(Y=y).$$

- Dans ces sommes, il y a souvent plusieurs termes qui sont nuls. En fonction des cas, on choisira de sommer sur $x\in X(\Omega)$ ou sur $y \in Y(\Omega)$ de sorte à avoir la somme "la plus simple possible".

Preuve de la Proposition 4 :

Pour tout $z\in Z(\Omega)$, on applique la formule des probabilités totales ("version intersection") avec le système complet d'évènements associé à X :

$$P(Z=z) = \sum_{x\in X(\Omega)} P([X=x]\cap[Z=z])$$

On remarque que :

$$[X=x]\cap[Z=z] = [X=x]\cap[X+Y=z] = [X=x]\cap[Y=z-X] = [X=x]\cap[Y=z-x]$$

d'où le résultat voulu. De même pour l'autre somme.

$\square$

Exercice 7

On lance deux dés à N faces équilibrés. On note X et Y les numéros obtenus.
Déterminer la loi de probabilité de $Z=X+Y$.

À nouveau X et Y sont indépendantes, de loi $\mathcal{U}([\![1,N]\!])$.
Il est clair que $Z(\Omega) = [\![2,2N]\!]$. Pour tout $k\in[\![2,2N]\!]$,

$$P(Z=k) = \sum_{i=1}^{N} P\Big([X=i]\cap[Y=k-i]\Big) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{P(X=i)}_{=\frac{1}{N}} P(Y=k-i). = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} P(Y=k-i).$$

Notons que : $P(Y=k-i) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} & \text{si } 1\leqslant k-i\leqslant N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{N} & \text{si } k-N\leqslant i\leqslant k-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Ainsi : • Pour $k\in[\![1,N]\!]$, $\quad P(Z=k) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{N} = \frac{k-1}{N^2}$.

• Pour $k\in[\![N+1,2N]\!]$, $\quad P(Z=k) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=k-N}^{N}\frac{1}{N} = \frac{N-(k-N)+1}{N^2} = \frac{2N-k+1}{N^2}$.

2.3 Application : Somme de variables binomiales, Somme de variables de Poisson

La loi binomiale a la particularité d'être "stable par somme indépendante".

Théorème 3 (Somme de variables indépendantes de loi binomiale)

Soient $p \in [0,1]$, et $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$.
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, de lois : $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$.
Alors : $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

Remarque 8

Ce résultat est intuitif si l'on se rappelle de l'interprétation naturelle d'une loi binomiale :

- $X_1 =$ nombre de succès sur n_1 répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p
- $X_2 =$ nombre de succès sur n_2 répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p
- "X_1 et X_2 indépendantes" $\simeq$ les n_1 premières épreuves sont indépendantes des n_2 suivantes...

Au final, $X_1 + X_2$ compte le nombre de succès sur $n_1 + n_2$ répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p, c'est donc bien que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$!

Preuve du Théorème 3 :

Posons $Z = X_1 + X_2$. On a donc $Z(\Omega) = [\![0, n_1 + n_2]\!]$. Pour tout $k \in [\![0, n_1 + n_2]\!]$,

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^{n_1} P([X_1 = i] \cap [X_2 = k - i]) = \sum_{i=0}^{n_1} P(X_1 = i) \times P(X_2 = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^{n_1} \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1 - i} \times \binom{n_2}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n_2 - k + i} \end{aligned}$$

avec la convention habituelle $\binom{n_2}{k-i} = 0$ si $k - i \notin [\![1, n_2]\!]$. On obtient donc :

$$P(Z = z) = \sum_{i=0}^{n_1} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{k-i} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n_1} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{k-i} \right)}_{\binom{n_1+n_2}{k}} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}$$

$$P(Z = k) = \binom{n_1 + n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}.$$

On reconnait donc que $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. $\square$

Dans la preuve, on a utilisé : $\displaystyle \sum_{i=0}^{n_1} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{k-i} = \binom{n_1 + n_2}{k}$. (**Formule de Vandermonde**, HP)

Preuve de cette formule :

Considérons le polynôme $P(X) = (X+1)^{n_1+n_2}$. Déterminons le coefficient devant X^k.

$\boxed{1}$ $P(X) = (X+1)^{n_1+n_2} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n_1+n_2} \binom{n_1+n_2}{i} X^i$. Le coefficient devant X^k est donc $\displaystyle\binom{n_1+n_2}{k}$.

$\boxed{2}$ $P(X) = (X+1)^{n_1}(X+1)^{n_2} = \displaystyle\left(\sum_{i=0}^{n_1} \binom{n_1}{i} X^i \right) \times \left(\sum_{j=0}^{n_2} \binom{n_2}{j} X^j \right)$.

Dans ce produit, on voit que le coefficient devant X^k est $\displaystyle\sum_{i=0}^{n_1} \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{k-i}$.

$\square$

Corollaire 1 (Somme de variables indépendantes de loi de Bernoulli)

Soient $p \in [0,1]$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de loi $\mathcal{B}(p)$.

Alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p).$

Preuve :

Rappelons que la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ revient à la loi binomiale $\mathcal{B}(1,p)$.

- On a X_1 et X_2 indépendantes, de lois : $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$.
  On en déduit que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2,p)$.
- Puis, on a $(X_1 + X_2)$ et X_3 indépendantes, de lois : $(X_1 + X_2) \hookrightarrow \mathcal{B}(2,p)$ et $X_3 \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$.
  On en déduit que $X_1 + X_2 + X_3 \hookrightarrow \mathcal{B}(3,p)$. Etc... On conclut par récurrence immédiate. $\square$

Remarques 9

- À nouveau, ce résultat est clair si l'on se rappelle de l'interprétation d'une loi binomiale :

La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ compte le nombre de variables X_k prenant la valeur 1, ce qui revient à compter le nombre de "succès" sur n répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli de paramètre p.

- Par linéarité de l'espérance, $E\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p = np.$

On retrouve ainsi l'espérance bien connue d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$!

La loi de Poisson est également préservée par "somme indépendante".

Théorème 4 (Somme de variables indépendantes de loi de Poisson)

Soient $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, de lois : $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$.
Alors : $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2).$

Preuve :

Posons $Z = X_1 + X_2$. On a donc $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P(Z=k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P([X_1 = i] \cap [X_2 = k-i]) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X_1 = i) \times \underbrace{P(X_2 = k-i)}_{=0 \text{ si } i>k} \\
&= \sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i) \times P(X_2 = k-i) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^i}{i!} \times e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!(k-i)!} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

On reconnait donc $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$. $\square$

Corollaire 2 (Somme de n variables indépendantes de loi de Poisson)

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes,

de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda_1), \mathcal{P}(\lambda_2), \ldots, \mathcal{P}(\lambda_n)$. Alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right).$

3 Couple et espérance

3.1 Théorème de transfert

Rappel : (Théorème de transfert pour une seule variable)
Sous réserve de convergence absolue : $E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x).$

On peut à présent généraliser ce théorème pour un couple de variables aléatoire $g(X, Y)$!

Théorème 5 (Théorème de transfert pour un couple) (admis)

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes et une fonction $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$.
Sous réserve de convergence absolue de la somme double suivante,
la variable aléatoire $g(X, Y)$ admet une espérance et

$$E(g(X,Y)) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x,y)\, P\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big).$$

Remarques 10

- Si les supports $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ sont finis, il s'agit d'une somme double finie, toujours bien définie.
- Si $X(\Omega)$ est fini et $Y(\Omega)$ est infini (ou l'inverse), il s'agit d'une somme finie de séries.
Chacune des séries doit alors être absolument convergente.
- Si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont tous les deux infinis, on est en présence d'une vraie "série double"
(cf. début du chapitre).

Exercice 8

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de lois : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2]\!])$.
Monrer que X^Y admet une espérance et calculer $E(X^Y)$.

Sous réserve de convergence (absolue), on a :

$$\begin{aligned}
E(X^Y) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{2} i^j P([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=0}^{+\infty} i^j P(X = i) \times P(Y = j) \\
&= \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=0}^{+\infty} i^j P(X = i) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} iP(X = i)}_{=E(X)} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} i^2 P(X = i)}_{=E(X^2)} \\
&= \frac{1}{2}E(X) + \frac{1}{2}E(X^2).
\end{aligned}$$

Ce calcul montre (a posteriori) que la série double converge bien : on pourrait remplacer le $+\infty$ par un N, puis envoyer N vers $+\infty$...
Puisque $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on sait que $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$, donc $E(X^2) = E(X)^2 + V(X) = \frac{2-p}{p^2}$.

Au final, on obtient

$$E(X^Y) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \times \frac{2-p}{p^2} = \frac{p+2-p}{2p^2} = \frac{2}{2p^2} = \frac{1}{p^2}.$$

3.2 Indépendance et espérance/variance

En appliquant le théorème de transfert avec la fonction $g : (x,y) \mapsto xy$, on obtient le résultat suivant :

Théorème 6 (Espérance d'un produit indépendant)

Soient X et Y deux variables aléatoire discrètes indépendantes.
Si X et Y admettent une espérance, alors XY admet une espérance et :

$$E(XY) = E(X) \times E(Y).$$

Attention !

Ce résultat est (très) faux sans l'hypothèse d'**indépendance** !

Preuve du Théorème 6 (sans trop se soucier de la convergence des séries doubles) :

D'après le Théorème de transfert, sous réserve de convergence absolue,

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \left(\sum_{y\in Y(\Omega)} xyP\Big([X=x]\cap[Y=y]\Big) \right) = \sum_{x\in X(\Omega)} \left(\sum_{y\in Y(\Omega)} xyP(X=x)P(Y=y) \right) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \left(xP(X=x) \sum_{y\in Y(\Omega)} yP(Y=y) \right) = \left(\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x) \right) \left(\sum_{y\in Y(\Omega)} yP(Y=y) \right) \\
&= E(X)E(Y).
\end{aligned}$$

$\square$

En anticipant un tout petit peu sur le programme de 2ème année, on peut aussi annoncer le résultat suivant :

Corollaire 3

Soient X et Y deux variables aléatoire discrètes indépendantes.
Si X et Y admettent une variance, alors $X+Y$ admet une variance et :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

Attention !

Ce résultat est (très) faux sans l'hypothèse d'**indépendance** !

Preuve du Corollaire 3 :

Dire que X et Y admettent une variance signifie que X^2 et Y^2 admettent une espérance.
Par linéarité, $2(X^2+Y^2)$ admet aussi une espérance.
Puisque $0 \leqslant (X+Y)^2 \leqslant 2(X^2+Y^2)$, on en déduit que $(X+Y)^2$ admet une espérance
(cf. Chapitre Variables aléatoire discrètes, "Existence d'une espérance par domination").
Ainsi, $X+Y$ admet une variance, et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= E((X+Y)^2) - E(X+Y)^2 \\
&= E(X^2+Y^2+2XY) - (E(X)+E(Y))^2 \\
&= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - E(X)^2 - E(Y)^2 - 2E(X)E(Y).
\end{aligned}$$

Par indépendance, $E(XY) = E(X)E(Y)$. Il reste donc :

$$V(X+Y) = E(X^2) - E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2 = V(X) + V(Y).$$

$\square$

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Connaître la définition de la loi de probabilité d'un couple (X, Y)
- Déterminer la loi d'un couple à partir d'un énoncé en français.
- Déterminer la loi d'un couple en cas d'indépendance.
- Retrouver la loi de X et/ou de Y à partir de celle de (X, Y).
- Connaître les résultats sur les sommes de loi binomiales / de Poisson.
- Appliquer le théorème de transfert.
- En cas d'indépendance, $E(XY) = E(X)E(Y)$ et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Pour suivre

- Savoir déterminer la loi de $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$.
- Savoir déterminer la loi de $X + Y$.

Pour les ambitieux

- Justifier la convergence (absolue) d'une série double.
- Calculer la loi d'un transfert $g(X, Y)$ plus général.
- Comprendre et maîtriser les preuves du cours.