A rendre le Jeudi 5 février 2026

Devoir Maison n°4 : Problème de Bâle

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les intégrales :

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n} dt \quad \text{et} \quad B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^{2n} dt.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule A_n à l'aide d'une IPP :

$$\begin{aligned}
A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos(t)}_{u'(t)} \times \underbrace{\cos(t)^{2n-1}}_{v(t)} dt = \Big[\sin(t)\cos(t)^{2n-1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times (2n-1)(-\sin(t))\cos(t)^{2n-2} dt \\
&= 0 + (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^2\cos(t)^{2n-2} dt = (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(t)^2)\cos(t)^{2n-2} dt \\
&= (2n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n-2} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n} dt\right) \\
&= (2n-1)(A_{n-1} - A_n).
\end{aligned}$$

Ainsi, $A_n = (2n-1)(A_{n-1}-A_n)$ ce qui donne : $\boxed{2nA_n = (2n-1)A_{n-1}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule A_n à l'aide d'une autre IPP (qui vise, à terme, à faire apparaitre t^2) :

$$\begin{aligned}
A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{1}_{u'(t)} \times \underbrace{\cos(t)^{2n}}_{v(t)} dt = \Big[t cos(t)^{2n}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \times 2n(-\sin(t))\cos(t)^{2n-1} dt \\
&= 0 + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \times \sin(t)\cos(t)^{2n-1} dt.
\end{aligned}$$

On poursuit avec une deuxième IPP (toujours dans l'optique de faire apparaître t^2) :

$$\begin{aligned}
A_n &= 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{t}_{u'(t)} \times \underbrace{\sin(t)\cos(t)^{2n-1}}_{v(t)} dt \\
&= 2n\left(\left[\frac{t^2}{t}\sin(t)\cos(t)^{2n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} \times \Big(\cos(t)^{2n} + \sin(t)(2n-1)(-\sin(t))\cos(t)^{2n-2}\Big) dt\right) \\
&= 2n\left(0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} \times \Big(\cos(t)^{2n} - (2n-1)\sin(t)^2\cos(t)^{2n-2}\Big) dt\right) \\
&= 2n\left(-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} \times \Big(\cos(t)^{2n} - (2n-1)(1-\cos(t)^2)\cos(t)^{2n-2}\Big) dt\right) \\
&= 2n\left(-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} \times \Big(2n\cos(t)^{2n} - (2n-1)\cos(t)^{2n-2}\Big) dt\right) \\
&= -n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \times \Big(2n\cos(t)^{2n} - (2n-1)\cos(t)^{2n-2}\Big) dt \\
&= -n\Big(2nB_n - (2n-1)B_{n-1}\Big).
\end{aligned}$$

On a bien obtenu : $\boxed{A_n = (2n-1)nB_{n-1} - 2n^2B_n}$.

3. (a) C'est une inégalité classique qui peut se démontrer grâce à la concavité de sin...
On choisit plutôt ici de démontrer cela à l'aide d'une simple étude de fonction.
Posons, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(t) = \frac{\pi}{2}\sin(t) - t$ et vérifions que f est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
f est dérivable somme différence de fonctions usuelles et : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ f'(t) = \frac{\pi}{2}\cos(t) - 1$.
Ainsi, $f'(t) \geqslant 0 \iff \cos(t) \geqslant \frac{2}{\pi}$.

On sait que la fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,
avec $\cos(0) = 1$ et $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. D'après le TVI, il existe un unique $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{2}{\pi}$.
On a alors : $\forall t \in [0, \alpha],\ \cos(t) \geqslant \frac{2}{\pi}$ et $\forall t \in [\alpha, \frac{\pi}{2}],\ \cos(t) \leqslant \frac{2}{\pi}$.
On a donc le tableau de signe / variation suivant :

t	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

On lit bien sur ce tableau que $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ f(t) \geqslant 0$, d'où l'inégalité voulue.
Conclusion : $\boxed{\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ t \leqslant \frac{\pi}{2}\sin(t)}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'inégalité précédente, (on peut passer au carré car tout est positif)

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ t^2 \cos(t)^{2n} \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\sin(t)\right)^2 \cos(t)^{2n}$$

c'est à dire

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ t^2 \cos(t)^{2n} \leqslant \frac{\pi^2}{4}(1 - \cos(t)^2)\cos(t)^{2n}$$

et donc :

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ t^2 \cos(t)^{2n} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(\cos(t)^{2n} - \cos(t)^{2n+2}\right).$$

En intégrant cette inégalité, on obtient :

$$B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^{2n} dt \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n+2} dt\right)$$

c'est à dire $\boxed{B_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(A_n - A_{n+1})}$.
D'après la relation du 1., on remarque de plus que $2(n+1)A_{n+1} = (2(n+1)-1)A_n$
c'est à dire $(2n+2)A_{n+1} = (2n+1)A_n$. Ainsi :

$$A_n - A_{n+1} = A_n - \frac{2n+1}{2n+2}A_n = \left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right)A_n = \frac{1}{2n+2}A_n = \frac{1}{2(n+1)}A_n.$$

L'inégalité devient donc : $\boxed{B_n \leqslant \frac{\pi^2}{8}\frac{A_n}{n+1}}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Puisque les fonctions $t \mapsto \cos(t)^{2n}$ et $t \mapsto t^2\cos(t)^{2n}$ sont :
- continues
- positives
- non identiquement nulles sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (c'est à dire par "constantes égales à 0")

par strictement positivité de l'intégrale, on a $A_n > 0$ et $B_n > 0$.
Avec l'inégalité suivante, on a donc l'encadrement : $0 \leqslant \frac{B_n}{A_n} \leqslant \frac{\pi^2}{8(n+1)}$.
Par théorème des gendarmes, on conclut que : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{B_n}{A_n} = 0}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Partons du membre de droite pour aboutir à $\frac{1}{n^2}$.

   On se rappelle d'abord du 1. : $2nA_n = (2n-1)A_{n-1}$ donc $A_{n-1} = \dfrac{2n}{2n-1}A_n$. On obtient ainsi :

$$2\left(\frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} - \frac{B_n}{A_n}\right) = 2\left(\frac{(2n-1)B_{n-1}}{2nA_n} - \frac{B_n}{A_n}\right) = 2\frac{(2n-1)B_{n-1} - 2nB_n}{2nA_n} = \frac{(2n-1)B_{n-1} - 2nB_n}{nA_n}.$$

   On se rappelle ensuite du 2. : $(2n-1)nB_{n-1} - 2n^2B_n = A_n$. On reprend donc :

$$\frac{(2n-1)B_{n-1} - 2nB_n}{nA_n} = \frac{(2n-1)nB_{n-1} - 2n^2B_n}{n^2A_n} = \frac{A_n}{n^2A_n} = \frac{1}{n^2}.$$

   On a donc bien montré que : $\boxed{\dfrac{1}{n^2} = 2\left(\dfrac{B_{n-1}}{A_{n-1}} - \dfrac{B_n}{A_n}\right)}$.

5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On calcule la somme voulue par télescopage :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} 2\left(\frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} - \frac{B_n}{A_n}\right) = 2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} - \frac{B_n}{A_n}\right) = 2\left(\frac{B_0}{A_0} - \frac{B_N}{A_N}\right).$$

   Or, on a établi en 3.(c) que $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{B_N}{A_N} = 0$. On obtient donc :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \lim_{N\to+\infty} 2\left(\frac{B_0}{A_0} - \frac{B_N}{A_N}\right) = 2\frac{B_0}{A_0}.$$

   Pour finir, il suffit de calculer :

$$A_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad B_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{3\times 2^3} = \frac{\pi^3}{24}.$$

   Ainsi : $2\dfrac{B_0}{A_0} = 2 \times \dfrac{\pi^3}{24} \times \dfrac{2}{\pi} = \dfrac{\pi^2}{6}$. On a démontré la formule de Bâle : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.