Concours blanc n°2 - Épreuve de maths n°2 - Corrigé

Problème : Trajet en ligne droite d'un escargot stochastique

Partie I - Déplacements uniformes

1. (a) S_k est la distance parcourue par l'escargot au bout de k étapes.
   Au minimum, l'escargot fait un déplacement de taille 1 à chaque étape, et on a alors $S_k = k$.
   Au maximum, l'escargot fait un déplacement de taille n à chaque étape, et on a alors $S_k = nk$.
   On comprend facilement que tous les entiers intermédiaires sont des valeurs possibles pour S_k.
   Ainsi, on a bien $\boxed{S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!]}$.

   (b) Si à l'étape 1, l'escargot effectue tout de suite un déplacement de taille n, il franchit immédiatement le seuil et on a $T_n = 1$.
   Dans le pire des cas, l'escargot ne fait que des déplacements de taille 1, et il a besoin de n étapes pour franchir le seuil. On a alors $T_n = n$.
   On comprend facilement que tous les entiers intermédiaires sont des valeurs possibles pour T_n.
   Ainsi, $\boxed{T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]}$.

2. (a) Comme on l'a dit, l'évènement $[T_n = 1]$ correspond au cas où $[X_1 = n]$.
   Ainsi : $\boxed{P(T_n = 1) = P(X_1 = n) = \frac{1}{n}}$ (puisque $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$).

   (b) L'évènement $[T_n = n]$ correspond à franchir le seuil au bout du n-ème déplacement. Cela n'est possible que si les $n-1$ premiers déplacements de l'escargot sont tous de taille 1. Le dernier déplacement peut être de taille quelconque (de 1 à n), car dans tous les cas on dépassera le seuil.
   Ainsi, par indépendance des variables $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$:

$$P(T_n = n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k = 1]\right) = \prod_{k=1}^{n-1} P(X_k = 1) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} = \boxed{\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}}$$

   (c) Pour $n = 2$, on a $T_2(\Omega) = [\![1, 2]\!]$. On a déjà calculé $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = n)$, donc :
   $\boxed{P(T_2 = 1) = \frac{1}{2} \text{ et } P(T_2 = 2) = \frac{1}{2}}$.
   L'espérance est : $E(T_2) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2}$ soit $\boxed{E(T_2) = \frac{3}{2}}$.

   (d) Pour $n = 3$, on a $T_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$. On a déjà calculé $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = n)$, donc :
   $\boxed{P(T_3 = 1) = \frac{1}{3} \text{ et } P(T_3 = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}}$. Il nous reste $P(T_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}$ soit $\boxed{P(T_3 = 2) = \frac{5}{9}}$.
   L'espérance est : $E(T_3) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{1}{9}$ soit $\boxed{E(T_3) = \frac{16}{9}}$.

On revient à présent au cas général $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé.

   (a) Par définition, $\boxed{S_{k+1} = S_k + X_{k+1}}$.

   (b) Rappelons que $S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!]$. On dispose donc du système complet d'évènements :

$$\Big\{[S_k = j],\ j \in [\![k, nk]\!]\Big\}.$$

   Fixons $i \in [\![k+1, n+k]\!]$. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{nk} P\Big([S_k = j] \cap [S_{k+1} = i]\Big).$$

Or puisque $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$, on a

$$\begin{aligned} P\Big([S_k = j] \cap [S_{k+1} = i]\Big) &= P\Big([S_k = j] \cap [S_k + X_{k+1} = i]\Big) \\ &= P\Big([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i - j]\Big) = P(S_k = j) \times P(X_{k+1} = i - j) \end{aligned}$$

On a ici utilisé le fait que X_{k+1} est indépendant des déplacements précédents, donc indépendant de la variable S_k. Ainsi, on obtient :

$$P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{nk} P(S_k = j) \times P(X_{k+1} = i - j). \quad (\star)$$

Rappelons que $X_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$, donc :

$$P(X_{k+1} = i - j) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } 1 \leqslant i - j \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il faut ici faire attention aux indices dans la somme.
Pour que le terme d'indice j soit présent dans la somme $(\star)$ et non-nul, on doit avoir :

$$k \leqslant j \leqslant nk \ \text{ et } \ 1 \leqslant i - j \leqslant n, \quad \text{c'est à dire : } \ k \leqslant j \leqslant nk \ \text{ et } \ i - n \leqslant j \leqslant i - 1.$$

- Puisque $i \in [\![k + 1, n + k]\!]$, on a $i \leqslant n + k$ donc $i - n \leqslant k$. Ainsi : $k \leqslant j \Rightarrow i - n \leqslant j$.
- Puisque $i \in [\![k + 1, n + k]\!]$, on a $i \leqslant n + k$ donc $i - 1 \leqslant n + k - 1$.
  Or $n + k - 1 \leqslant nk$ car cela équivaut à $k - 1 \leqslant n(k - 1)$, ce qui est vrai. On a donc $i - 1 \leqslant nk$.
  Ainsi : $j \leqslant i - 1 \Rightarrow j \leqslant nk$.

Ainsi, les deux conditions $k \leqslant j \leqslant nk$ et $i - n \leqslant j \leqslant i - 1$ reviennent simplement à : $k \leqslant j \leqslant i - 1$.
La somme devient donc :

$$P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) \times \underbrace{P(X_{k+1} = i - j)}_{=\frac{1}{n}}$$

On obtient pour finir : $\boxed{P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j)}$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(i) : \ \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$$

est vraie pour tout $i \geqslant k + 1$.
<u>Initialisation :</u> Pour $i = k + 1$, l'égalité est simplement $\binom{k-1}{k-1} = \binom{k}{k}$ ce qui est vrai.
<u>Hérédité :</u> Soit $i \geqslant k + 1$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(i)$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^{(i+1)-1} \binom{j-1}{k-1} = \sum_{j=k}^{i} \binom{j-1}{k-1} &= \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} + \binom{i-1}{k-1} \\ &= \binom{i-1}{k} + \binom{i-1}{k-1} \quad \text{d'après } \mathcal{P}(i) \\ &= \binom{i}{k} \quad \text{d'après la formule de Pascal.} \\ &= \binom{(i+1)-1}{k}. \end{aligned}$$

Ceci montre $\mathcal{P}(i + 1)$ est achève la récurrence.

5. Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{H}(k) : \ \forall i \in [\![k, n+k-1]\!], \ P(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}$$

est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Pour $k = 1$, la propriété $\mathcal{H}(1)$ stiplule que : $\forall i \in [\![1, n]\!], \ P(S_1 = i) = \dfrac{1}{n}$, ce qui est vrai puisque $S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathcal{H}(k)$ et montrons $\mathcal{H}(k+1)$.

Soit $i \in [\![k+1, n+k]\!]$ fixé. D'après 3.(b), on a :

$$\begin{aligned} P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) &= \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k}\binom{j-1}{k-1} \quad \text{d'après } \mathcal{H}(k) \\ &= \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{j=k}^{i-1}\binom{j-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{k} \quad \text{d'après la formule du 4.} \end{aligned}$$

C'est valable quel que soit $i \in [\![k+1, n+k]\!]$. Ceci montre $\mathcal{H}(k+1)$ et achève la récurrence.

6. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   L'évènement $[T_n > k]$ signifie : "L'escargot n'a pas encore franchi le seuil n à l'étape k".
   L'évènement $[S_k < n]$ signifie exactement la même chose.
   Ainsi, $\boxed{[T_n > k] = [S_k < n]}$.

   (b) Montrons que : $\forall k \in [\![0, n]\!], \ P(T_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n-1}{k}$.

   - Pour $k = 0$, c'est vrai car $P(T_n > 0) = 1$.
   - Pour $k = n$, c'est vrai car $P(T_n > n) = 0$ (rappelons que $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$).
   - Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on peut appliquer la suggestion de l'énoncé :

   $$P(T_n > k) = P(S_k < n) = \sum_{i=k}^{n-1} P(S_k = i) = \sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^k}\sum_{i=k}^{n-1}\binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}$$

   à nouveau grâce à la formule de Pascal généralisée de la question 4.

   On a bien montré : $\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \ P(T_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n-1}{k}}$.

7. (a) g_n est un $\boxed{\text{polynôme}}$, donc évidement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on obtient :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \ (g_n)'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} P(T_n = k) \ \text{ et donc } \ (g_n)'(1) = \sum_{k=1}^{n} k P(T_n = k).$$

   On reconnait effectivement $\boxed{(g_n)'(1) = E(T_n)}$.

   (b) En dérivant une seconde fois, on obtient :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \ (g_n)''(x) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) x^{k-2} P(T_n = k) \ \text{ et donc } \ (g_n)''(1) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) P(T_n = k).$$

   D'après le théorème de transfert, on reconnait ici $\boxed{(g_n)''(1) = E\Big(T_n(T_n - 1)\Big)}$.

8. (a) Rappelons que pour $k \in \mathbb{N}$, $\quad P(T_n = k) = P(T_n > k-1) - P(T_n > k)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} x^k \left(P(T_n > k-1) - P(T_n > k)\right) = \sum_{k=1}^{n} x^k P(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} x^k P(T_n > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} P(T_n > k) - \sum_{k=1}^{n} x^k P(T_n > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} P(T_n > k) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k P(T_n > k) - 1 + 0\right) \quad (\text{car } P(T_n > 0) = 1 \text{ et } P(T_n > n) = 0) \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (x^{k+1} - x^k) P(T_n > k) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (x-1) x^k P(T_n > k) = \boxed{1 + (x-1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k P(T_n > k)}
\end{aligned}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour montrer $g_n(x) = 1 + (x-1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1}$, il suffit de vérifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k P(T_n > k) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1}$.

Or d'après la formule du 6.(b) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k P(T_n > k) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k 1^{n-k} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

d'après la formule du binôme de Newton. On a donc bien $\boxed{g_n(x) = 1 + (x-1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1}}$.

9. (a) On a vu que $E(T_n) = (g_n)'(1)$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n(x) = 1 + (x-1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \quad \text{donc} \quad (g_n)'(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} + (x-1) \times \frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-2}.$$

On obtient donc $\boxed{E(T_n) = (g_n)'(1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}}$.

(b) On a vu que $(g_n)''(1) = E(T_n(T_n - 1)) = E(T_n^2) - E(T_n)$.
Calculons cette valeur en dérivant à nouveau. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve :

$$(g_n)''(x) = 2\frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-2} + (x-1) \times \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-2}.$$

Ainsi

$$E(T_n^2) - E(T_n) = (g_n)''(1) = \frac{2(n-1)}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-2}.$$

donc

$$E(T_n^2) = \frac{2(n-1)}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-2} + E(T_n) = \frac{2(n-1)}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

Pour finir, d'après la formule de Koenig-Huygens, $V(T_n) = E(T_n^2) - E(T_n)^2$, c'est à dire :

$$\begin{aligned}
V(T_n) &= \frac{2(n-1)}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} - \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\right)^2 \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(\frac{2(n-1)}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} + 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(\frac{2(n-1)}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1} + 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(\frac{2(n-1)}{n+1} + 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(\frac{2(n-1) + n + 1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\right) \\
&= \boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(\frac{3n-1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}\right)}.
\end{aligned}$$

Partie II - Illustration informatique et convergence en loi

10. (a)

```python
def S(k,n) :
    s =0
    for i in range( k ) : # k passages de boucle
        s = s + rd.randint(1,n+1) # on ajoute une valeur uniforme entre 1 et n
    return s
```

(b)

```python
def S(k,n) :
    s = np.sum( rd.randint(1,n+1,k) )
    return s
```

11.

```python
def T(n) :
    S = 0 ; T = 0
    while S < n : # dans que l'escargot ne dépasse pas le seuil n
        S = S + rd.randint(1,n+1) # il fait un déplacement de plus
        T = T + 1 # on augmente de 1 la valeur de T
    return T
```

12. Soit Z une variable aléatoire discrète de support $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z=k) = \dfrac{k-1}{k!}$.

(a) On a bien-sûr : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{k-1}{k!} \geqslant 0$. Il reste donc à vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(Z=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = 1$.

Pour tout $N \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) = 1 - \frac{1}{N!} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1.$$

Ainsi, la série converge et $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = 1}$.

(b)

```python
def loi_Z(n) :
    V = np.zeros(n)
    for k in range( 1, n+1 ) : # k = 1,2,...,n
        factorielle = np.prod(range(1,k+1)) # calcul de k!
        V[k-1] = (k-1) / factorielle
    return V
```

13. (a) Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum kP(Z=k)$ est (absolument) convergente. Pour tout $N \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{N} kP(Z=k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{N} \frac{k(k-1)}{k(k-1) \times (k-2)!} = \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e^1.$$

Ceci montre que Z admet une espérance et $\boxed{E(Z) = e}$.

(b) Z admet une variance si et seulement si Z^2 admet une espérance.
Pour se simplifier la tâche, cherchons plutôt à montrer l'existence de $E(Z(Z-2))$ (on va voir pourquoi). Pour tout $N \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k(k-2)P(Z=k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{k(k-1)(k-2)}{k!} &= \sum_{k=3}^{N} \frac{k(k-1)(k-2)}{k(k-1)(k-2) \times (k-3)!} \\ &= \sum_{k=3}^{N} \frac{1}{(k-3)!} = \sum_{k=0}^{N-3} \frac{1}{(k-3)!}.\end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite comme tout à l'heure, $Z(Z-2)$ a une espérance et $E(Z(Z-2)) = e$.
En notant que $Z(Z-2) = Z^2 - 2Z$, on a $Z^2 = Z(Z-2) + 2Z$
donc par linéarité, Z^2 admet une espérance et $E(Z^2) = E(Z(Z-2)) + 2E(Z) = e + 2e = 3e$.
Pour finir, Z admet une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 3e - e^2 = \boxed{e(3-e)}.$$

14. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Pour n assez grand pour que $k \in [\![0, n]\!]$ (c'est à dire $n \geqslant k$), on peut appliquer la formule du 6.(b) :

$$P(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} = \frac{1}{n^k} \times \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!}.$$

Chacun des k termes $(n-1)$, $(n-2)$, ... $(n-k)$ est équivalent à n quand $n \to +\infty$ (k est fixé). On obtient donc :

$$P(T_n > k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^k} \times \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{k!}$$

d'où effectivement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P(T_n > k) = \frac{1}{k!}}$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrons que $P(T_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(Z = k)$. D'après la question précédente :

$$P(T_n = k) = P(T_n > k-1) - P(T_n > k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!} = P(Z = k).$$

Ainsi $\boxed{(T_n)_{n\geqslant \mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers } Z}$.

15. (a)

```
def frequences(n) :
    V = np.zeros(n)
    for k in range( 10**6 ) :
        j = T(n)
        V[j-1] = V[j-1] + 1
    V = V / 10**6
    return V
```

Cette fonction `frequences` génère 10^6 réalisations indépendantes de la variable aléatoire T_n, et renvoie un vecteur `V` donnant la fréquence d'apparition de chaque valeur entre 1 et n dans cette liste de 10^6 valeurs. Précisément, quand une nouvelle valeur est générée :

- Si $T_n = 1$, on augmente de 1 la valeur de $V[0]$
- Si $T_n = 2$, on augment de 1 la valeur de $V[1]$, etc...

A l'issue de la boucle, $V[0]$ contient donc le nombre de valeurs 1 observées, $V[1]$, le nombre de valeurs 2 observées, etc... On divise ensuite chaque terme de V par le nombre de simulation (10^6). Au final, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $V[k]$ contient la fréquence d'apparition de la valeur $k+1$ au cours de 10^6 réalisations de la variable aléatoire T_n.

L'intérêt est bien-sûr que : $\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ V[k] \simeq P(T_n = k+1)}$.

(b) Les trois diagrammes en bâton représentent (environ) la loi de probabilité de T_n, précisément les valeurs :

$$P(T_n = 1), P(T_n = 2), P(T_n = 3), P(T_n = 4), P(T_n = 5), P(T_n = 6)$$

pour $n = 6$, puis $n = 15$, puis $n = 200$.

A mesure que n augmente, on observe que ces diagrammes en bâton se rapprochent de celui, obtenu précédemment, qui represente la loi de probabilité de Z. On constate donc que :

$$\forall i \in [\![1, 6]\!],\ P(T_n = i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(Z = i)$$

Cela confirme la convergence en loi établie en 14.(b).

Partie III - Modélisation de la flemme

16. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Dans le pire des cas, l'escargot ne fait que des déplacements de taille 0 pendant les k premières étapes (c'est à dire qu'il ne bouge pas), on aura donc $S'_k = 0$.

Dans le meilleur des cas, l'escargot ne fait que des déplacements de taille $n-1$ pendant les k premières étapes, on aura alors $S'_k = k(n-1)$.

On comprend facilement que tous les entiers intermédiaires sont des valeurs possibles pour S'_k.

Ainsi, on a le support : $\boxed{(S'_k)(\Omega) = [\![0, k(n-1)]\!]}$.

(b) Comme on vient de l'expliquer, il est désormais possible que l'escargot reste immobile pendant un nombre arbitraire d'étapes d'affilée. Il peut donc ne pas franchir le seuil n avant la 100-ème étape, la 1000-ème étape ou plus... Voire même (a priori), ne jamais atteindre le seuil !

On comprend que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(T'_n = k) > 0$. Ainsi $\boxed{T'_n \text{ n'est plus une variable aléatoire finie}}$

Le support de T'_n est maintenant $\mathbb{N}^*$, ou même, comme le suggère l'énoncé $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ (car on ne sait pas encore que $P(T'_n = +\infty) = 0$, même si on peut s'en douter).

En réalité on peut noter que $P(T'_n = 1) = 0$ (il est impossible d'atteindre le seuil n en une étape, car le premier déplacement est au maximum de taille $n-1$), mais cela a peu d'importance pour la suite.

17. On suppose que $n = 2$. Dans ce cas, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X'_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, 1]\!])$, ce qui revient à dire que X'_k suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Mais alors $S'_k = \sum_{i=1}^{k} X'_i$ s'interprète comme la somme de k variable aléatoire de Bernoulli indépendantes : on reconnait une loi binomiale ! (On peut voir $X'_i = 1$ comme un succès, $X'_i = 0$ comme un échec, et dans ce cas S'_k compte le nombre de succès sur k épreuves consécutives)

Ainsi, on reconnait que $\boxed{S'_k \hookrightarrow \mathcal{B}(k, \frac{1}{2})}$.

On revient à présent au cas général $n \geqslant 2$.

18. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé.

(a) Rappelons que $X'_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n-1]\!])$ et $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.
Vérifions que $Y_k = X_k - 1$ suit la même loi que X'_k.
- On a $X_k(\Omega) = [\![1, n]\!]$ donc bien-sûr $Y_k(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$.
- Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,

$$P(Y_k = i) = P(X_k - 1 = i) = P(X_k = \underbrace{i+1}_{\in[\![1,n]\!]}) = \frac{1}{n}.$$

On reconnait donc que $Y_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n-1]\!])$. Ainsi $\boxed{X_k - 1 \text{ suit la même loi que } X'_k}$.

(b) Rappelons que $S'_k = \sum_{i=1}^{k} X'_i$ et que chaque X'_i suit la même loi que $X_i - 1$.

On en déduit donc (on utilise de plus le fait que les X_i sont mutuellement indépendantes ici) que S'_k suit la même loi que $\sum_{i=1}^{k}(X_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} X_i - k = S_k - k$.

Ainsi : $\boxed{S'_k \text{ suit la même loi de probabilité que } S_k - k}$.

On rappelle à présent la formule établie en question 5. :

$$\forall i \in [\![k, n+k-1]\!],\ P(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}.$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on a $i + k \in [\![k, n+k-1]\!]$ et donc :

$$P(S'_k = i) = P(S_k - k = i) = P(S_k = i + k) = \frac{1}{n^k}\binom{i+k-1}{k-1}$$

On a bien montré : $\boxed{\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ P(S'_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{k-1+i}{k-1}.}$.

19. Montrons que : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(T'_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{k+n-1}{k}$.

- Pour $k = 0$, cette formule donne $P(T'_n > 0) = 1$, ce qui est vrai.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme en question 6., on peut affirmer que

$$[T'_n > k] = \text{"L'escargot n'a pas encore franchi le seuil à l'étape } k\text{"} = [S'_k < n].$$

Ainsi, on calcule la probabilité :

$$P(T'_n > k) = P(S'_k < n) = \sum_{i=0}^{n-1} P(S'_k = i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{k-1+i}{k-1} = \frac{1}{n^k}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{k-1+i}{k-1} = \frac{1}{n^k}\sum_{j=k}^{k+n-1}\binom{j-1}{k-1}$$

en posant le changement d'indice $j = k + i$.
D'après la formule de Pascal généralisée établie en question 4. (en prenant $i = k + n$) :

$$\sum_{j=k}^{k+n-1}\binom{j-1}{k-1} = \binom{k+n-1}{k}.$$

Au final, on obtient bien : $\boxed{P(T'_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{k+n-1}{k}}$.

20. (a) On travaille ici avec $n \geqslant 2$ fixé. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(T'_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{k+n-1}{k} = \frac{1}{n^k}\binom{k+n-1}{n-1} = \frac{1}{n^k} \times \frac{(k+n-1)(k+n-2)\dots(k+1)}{(n-1)!}.$$

Puisque n est fixé, chacun des $n-1$ termes $(k+n-1)$ ... $(k+1)$ équivaut à k quand $k \to +\infty$.
Ainsi :

$$P(T'_n > k) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^k} \times \frac{k^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \times k^{n-1} \times \left(\frac{1}{n}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

par croissance comparée. (En effet, $n \geqslant 2$, donc $\frac{1}{n} \in]0, \frac{1}{2}]$ et donc $\left(\frac{1}{n}\right)^k$ tend vers 0 rapidement)

On a bien montré : $\boxed{\lim_{k\to+\infty} P(T'_n > k) = 0}$.

(b) On peut par exemple dire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$[T'_n = +\infty] \subset [T'_n > k] \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant P(T'_n = +\infty) \leqslant P(T'_n > k).$$

Puisque $\lim_{k\to+\infty} P(T'_n > k) = 0$, on en déduit d'après le théorème des gendarmes que $\boxed{P(T'_n = +\infty) = 0}$.

Rappelons que $[T'_n = +\infty]$ correspond à la situation où l'escargot ne franchit jamais le seuil n.
On vient de montrer que cet évènement est négligeable.
Autrement dit : $\boxed{\text{l'escargot, même flemmard, finira presque-sûrement par franchir le seuil } n}$.

21. On doit vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad P(T'_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(Z = k)$.
Pour cela, comme en question 14, (la fin du raisonnement sera la même) il suffit de vérifier que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(T'_n > k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{k!}.$$

On travaille ici avec $k \in \mathbb{N}$ fixé. On a alors (raisonnement déjà vu avec les équivalents) :

$$P(T'_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{k+n-1}{k} = \frac{1}{n^k} \times \frac{\overbrace{(n+k-1)(n+k-2)\dots n}^{k \text{ termes}}}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^k} \times \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{k!}$$

Ainsi $P(T'_n > k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{k!}$. On conclut que $\boxed{(T'_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers } Z}$.