Programme de khôlles ECG1-B

Semaines 19 et 20

Séries, Espaces probabilisés généraux

• Énoncés / notions à connaitre :

Séries

— Notion de série. Notation $\sum u_n$ pour désigner la série $\left(\sum_{n=n_0}^{N} u_n\right)_{N \geqslant n_0}$.

— Nature d'une série. Notations $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ et $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ pour une série convergente.

— Manipulation de sommes infinies (lorsqu'elles sont bien définies).

— Nature des séries usuelles :
  - Séries géométriques et dérivées $\sum x^n$, $\sum nx^{n-1}$, $\sum n(n-1)x^{n-2}$ (et valeur des sommes),
  - Séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$,
  - Série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$ (et valeur de la somme).

— Méthode de comparaison série / intégrale.

— Étude des séries à termes positifs :
  - Critère de convergence (une série à termes positifs converge ssi elle est majorée),
  - Théorèmes de comparaison (Natures de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ si $u_n \leqslant v_n$, si $u_n = o(v_n)$, si $u_n \sim v_n$).

— Notion de convergence absolue. Une série absolument convergente est convergente.

Espaces probabilisés généraux

— Union/intersection infinie d'évènements $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$

— Définition d'une probabilité sur un univers Ω, muni d'un "ensemble des évènements" $\mathcal{A}$.

— Calcul de la probabilité d'une union/intersection infinie :
Théorème de la limite monotone et ses conséquences, probabilité d'une union disjointe infinie.

— Notion d'évènement presque-sûr, d'évènement négligeable.

— Formules habituelles avec les probabilités conditionnelles : formule des probabilités totales, formule des probabilités composées, formule de Bayes.

• Démonstrations à connaitre :

— Convergence et somme des séries $\sum x^n$ et / ou $\sum nx^{n-1}$. (Théorème 2)

— Nature de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ (Théorème 3) : on demandera de traiter la démonstration dans un particulier (Ex : montrer que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, que $\sum \frac{1}{n}$ diverge, que $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge...)

— Limite monotone : si (A_n) est une suite croissante d'évènements, $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$ (Théorème 2)

— Enoncé et preuve de la formule des probabilités totales (Proposition 3)