

# Limites de suites

## 1 Suites convergentes, suites divergentes.

### 1.1 Convergence vers un réel, divergence

#### Définition 1 (Notion de convergence)

On dit qu'une suite  $u$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$  (ou qu'elle admet pour limite le réel  $\ell$ ) lorsque :

Autrement dit lorsque :

De manière équivalente, on peut aussi écrire, avec des quantificateurs :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell \iff$

La suite  $u$  est alors dite convergente.

Le réel  $\ell$  est appelé la limite de la suite et on note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  ou bien  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ .

 Dessin :

Il faut comprendre que  $u_n$  peut devenir aussi proche que l'on veut de  $\ell$ , pourvu que  $n$  soit assez grand !  
Quel que soit un seuil  $\varepsilon > 0$  fixé (aussi petit soit-il), on peut toujours trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite  $u$  sont à une distance de  $\ell$  inférieure à  $\varepsilon$ .

#### Remarque 1

On a l'équivalence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff$$

#### Exercice 1

En vérifiant la définition, démontrer que la suite  $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$  converge vers 0.

## 💬 Remarque 2

En pratique, on sera rarement amené à montrer qu'une suite converge en vérifiant cette définition : on préférera utiliser des limites connues de suites usuelles, des encadrements, la monotonie...

### 📖 Définition 2 (Suite divergente)

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

### 👉 Exemples

- La suite  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge : elle n'admet pas de limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .
- La suite  $(n^2 + 1)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge : elle ne converge pas vers un réel  $\ell \in \mathbb{R}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

### 🚩 Proposition 1 (Unicité de la limite)

Si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, sa limite est unique.

Lorsque celle-ci existe, on pourra donc parler sans équivoque de  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

### Preuve visuelle :

Supposons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge à la fois vers  $\ell_1$  et  $\ell_2$  avec  $\ell_1 \neq \ell_2$ , disons par exemple  $\ell_1 < \ell_2$ .

Alors en posant  $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} > 0$ , les intervalles  $I_1 = ]\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon[$  et  $I_2 = ]\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon[$  doivent tous deux contenir toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang : c'est impossible !

Illustration :

□

### 🚩 Proposition 2 (Encadrement à partir d'un certain rang)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ . Soient  $b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $b < \ell < c$ .

Alors on a :  $b < u_n < c$  à partir d'un certain rang, c'est à dire :

### Preuve :

$I = ]b, c[$  est un intervalle ouvert contenant  $\ell$ . D'après la définition de la limite,  $I$  doit donc contenir toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang. □

### 👉 Exemple

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell > 0$ , alors on peut affirmer que

(Attention, la réciproque est fausse : une suite à termes strictement positifs peut converger vers 0)

### 🔗 Corollaire 1 (Toute suite convergente est bornée)

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

### Preuve :

Soit  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in \mathbb{R}$ . En posant  $K_1 = |\ell| + 1$ , on a  $-K_1 < \ell < K_1$ .

Il existe donc  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N, -K_1 < u_n < K_1$ , c'est à dire :  $\forall n \geq N, |u_n| \leq K_1$ .

De plus, en posant  $K_2 = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|)$ , on a :  $\forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, |u_n| \leq K_2$ .

Donc, en posant  $K = \max(K_1, K_2)$ , on a finalement :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq K$ . □

## 1.2 Divergence vers $\pm\infty$

Lorsqu'une suite  $u$  ne converge pas vers un réel (i.e lorsqu'elle est divergente), deux cas sont possibles :

- 1) La suite  $u$  n'admet pas de limite.
- 2) La suite  $u$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ , selon les définitions suivantes :

### Définition 3 (Divergence vers $+\infty$ )

On dit qu'une suite  $u$  tend vers  $+\infty$  lorsque :

De manière équivalente, avec des quantificateurs :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } +\infty \iff$$

On note dans ce cas  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  ou bien  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ .

 Dessin :

### Définition 4 (Divergence vers $-\infty$ )

On dit qu'une suite  $u$  tend vers  $-\infty$  lorsque :

De manière équivalente, avec des quantificateurs :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tend vers } -\infty \iff$$

On note dans ce cas  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  ou bien  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$ .

 Dessin :

### Proposition 3 (Majoration/minoration)

Une suite qui tend vers  $+\infty$  est minorée et non majorée.

Une suite qui tend vers  $-\infty$  est majorée et non minorée.

## 2 Calculs de limites

### 2.1 Limites de suites classiques

#### 👑 Théorème 1 (Limites usuelles)

- **Puissances de  $n$  :**  $\forall \alpha > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$   
 En particulier, pour  $\alpha = \frac{1}{2}$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- **Exponentielle, logarithme :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$
- **Suite géométrique :**

	$q > 1$	$q = 1$	$-1 < q < 1$	$q \leq -1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	$+\infty$	$1$	$0$	$\text{diverge}$
- **Factorielle :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$

On peut être plus précis et comparer la "vitesse de divergence vers  $+\infty$ " de ces suites :

#### 👑 Théorème 2 (Croissances comparées)

Pour tous  $a, b, c > 0$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{(\ln(n))^b} = +\infty$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{cn}}{n^a} = +\infty$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^{cn}} = +\infty$

On pourra ainsi retenir :

#### 💬 Remarques 3

- La notation " $\ll$ " n'est ni standard, ni rigoureuse ! Elle signifie "très petit devant" (pour  $n$  grand). On verra plus tard une manière de rendre ces "comparaisons" rigoureuses mathématiquement.
- On peut ajouter la suite  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans ces comparaisons :
  - Si  $q > 1$ , alors  $q^n = e^{cn}$  avec  $c = \ln(q) > 0$ . Donc :  $q^n \ll e^{cn}$
  - Si  $q \in ]-1, 1[$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ . Donc :  $q^n \ll e^{-cn}$

#### 👉 Exemples

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n e^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n}{n!} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{(\ln(n))^{1000}} = +\infty$

### 2.2 Opérations et limites

Limite d'une somme :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$						

Limite d'un produit :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n$									

**Limite d'un quotient :** (si  $v_n \neq 0$  à partir d'un certain rang)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$\ell \neq 0$	0	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$								

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell < 0$ ou $0^-$	$\ell > 0$ ou $0^+$	$\ell < 0$ ou $0^-$	$\ell > 0$ ou $0^+$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$					

#### Remarque 4

- Ici,  $0^+$  signifie :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  et  $u_n > 0$  à partir d'un certain rang.
- Ici,  $0^-$  signifie :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  et  $u_n < 0$  à partir d'un certain rang.

#### Exemples

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{e^{-n}} =$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2^{-n}}{3 + \frac{1}{n}} =$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{-2^{-n}} =$

#### Méthode : Déterminer la limite d'un quotient de polynômes en $n$

- Limite d'un polynôme :**  $u_n = a_0 + a_1n + \dots + a_{p-1}n^{p-1} + a_pn^p$  avec  $a_p \neq 0$ .

Factoriser par le terme de plus haut degré :  $u_n = a_pn^p \left( \frac{a_0}{a_pn^p} + \frac{a_1}{a_pn^{p-1}} + \dots + \frac{a_{p-1}}{a_pn} + 1 \right)$ .

On en déduit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_pn^p$

- Limite d'un quotient de polynôme en  $n$  :**  $u_n = \frac{a_0 + a_1n + \dots + a_pn^p}{b_0 + b_1n + \dots + b_qn^q}$  avec  $a_p, b_q \neq 0$ .

Factoriser numérateur et dénominateur :  $u_n = \frac{a_pn^p \left( \frac{a_0}{a_pn^p} + \frac{a_1}{a_pn^{p-1}} + \dots + \frac{a_{p-1}}{a_pn} + 1 \right)}{b_qn^q \left( \frac{b_0}{b_qn^q} + \frac{b_1}{b_qn^{q-1}} + \dots + \frac{b_{q-1}}{b_qn} + 1 \right)}$ .

On en déduit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_pn^p}{b_qn^q} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_p}{b_q} n^{p-q}$ .

#### Exercice 2

Déterminer la limite des suites admettant les termes généraux suivants :

- (a)  $u_n = -3n^3 + 2n^2 + 1$       (b)  $v_n = \frac{n+3}{n-2}$       (c)  $w_n = \frac{2n^3 + 2n - 1}{n^4 + n^2 - 2n}$

### 💬 Remarque 5

Cette idée de "factoriser par le terme le plus grand" est bien souvent utile pour lever des indéterminées, notamment quand il s'agit de calculer la limite d'une somme de termes.

Exemple :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^n - n) =$

Terminons par un résultat simple mais parfois utile :

#### 🚩 Proposition 4 (Décalage d'indice)

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$  (avec  $a \in \mathbb{R}$  ou  $a = \pm\infty$ ), alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = a$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n-1} = a$ .

Plus généralement, si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ , alors :  $\forall k \in \mathbb{Z}, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+k} = a$ .

## 2.3 Composition de limites par une fonction

*S P O I L E R . . .*

On se permet ici d'anticiper un peu quant aux notions de limites de fonction et de continuité. Ces points seront étudiés en détail dans des chapitres ultérieurs !

En attendant, on pourra quand même utiliser la notion "intuitive" de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  vue au lycée.

On notera en particulier qu'une fonction  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

#### 👑 Théorème 3 (Composition de limites)

Soit  $u$  une suite telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$  (avec  $a \in \mathbb{R}$  ou  $a = \pm\infty$ ).

Soit  $f$  une fonction numérique vérifiant  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  (avec  $b \in \mathbb{R}$  ou  $b = \pm\infty$ ).

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) =$

En particulier, si  $a \in \mathbb{R}$  et si  $f$  est continue au point  $a$ , on obtient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) =$

### 👉 Exemples

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) =$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n^2} =$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan(n^2 + 1) =$$

### 🔧 Méthode : Déterminer la limite d'une suite récurrente convergente

On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaisant :  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)}$  où  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un certain  $\ell \in \mathbb{R}$ , et si  $f$  est continue en  $\ell$ , alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Donc en passant à la limite dans l'égalité  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on obtient l'équation :  $\boxed{\ell = f(\ell)}$ .

On dit que  $\ell$  est un **point fixe** de  $f$ . Cette équation permet parfois de déterminer la valeur de  $\ell$ .

### Exercice 3

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n^2 + 1}$ .

On admet que cette suite converge. Déterminer sa limite.

## 2.4 Passage à la limite dans une inégalité

On vient de voir avec l'exemple des suites récurrentes qu'il était utile de "passer à la limite dans une égalité" (lorsque les limites existent !)

Il est également possible de "passer à la limite dans une inégalité" (lorsque les limites existent !)

### Théorème 4 (Passage à la limite dans une inégalité (large !))

Soient  $u$  et  $v$  deux suites satisfaisant :  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang.  
(Autrement dit :  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq v_n$ .)

Si  $u$  converge vers  $\ell$  et si  $v$  converge vers  $\ell'$ , alors on a :

#### Preuve :

Par l'absurde : si jamais on avait  $\ell > \ell'$ , alors en posant  $\varepsilon = \frac{\ell - \ell'}{3} > 0$ ,  
on aurait à partir d'un certain rang :

$$u_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[ \quad \text{et} \quad v_n \in ]\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon[$$

ce qui donne  $u_n > \ell - \varepsilon > \ell' + \varepsilon > v_n$  : absurde puisque  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$  !

□

### Corollaire 2 (Limite d'une suite minorée/majorée)

- Soit  $u$  une suite minorée par  $m \in \mathbb{R}$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$ . Si  $u$  converge vers  $\ell$  alors on a :
- Soit  $u$  une suite majorée par  $M \in \mathbb{R}$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ . Si  $u$  converge vers  $\ell$  alors on a :

#### Preuve :

Il suffit d'appliquer le Théorème 4 avec  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = m$  ou bien  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = M$ .

□

### Attention !

Il est possible de passer à la limite uniquement dans des inégalités larges !

Si on a  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$ , on ne peut pas conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  !

(En revanche comme on a en particulier  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ , on pourra conclure  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .)

Exemple :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$  mais on n'a pas  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{n}) < \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$  ( $0 < 0$ )

Passer à la limite dans une inégalité permet d'obtenir des informations sur la limite d'une suite, qui peuvent se révéler utiles pour calculer sa valeur.

#### Exercice 4

Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $v_0 = 5$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2\sqrt{v_n(v_n - 3)}$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n > 4$ .
2. On admet que  $v$  converge. Déterminer sa limite.

Question : Comment démontrer que les suites  $u$  et  $v$  des Exercices 3 et 4 convergent effectivement ?

On aimerait énoncer des résultats qui, sous certaines hypothèses, garantissent la convergence d'une suite : des théorèmes de convergence !

## 3 Théorèmes de convergence

### 3.1 Encadrements et limites

#### Théorème 5 (Théorème des gendarmes)

Soient  $a, b, u$  trois suites satisfaisant :  $a_n \leq u_n \leq b_n$  à partir d'un certain rang.

Si les suites  $a$  et  $b$  convergent vers la même limite  $\ell \in \mathbb{R}$ , alors

#### Preuve rapide :

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell$ , on sait qu'à partir d'un certain rang  $N_\varepsilon$ , on aura  $a_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$  et  $b_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ . Comme  $a_n \leq u_n \leq b_n$ , à partir du rang  $N_\varepsilon$ , on aura également  $u_n \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ .

Illustration :

On a donc bien montré :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, |u_n - \ell| < \varepsilon$ .

□

### Exercice 5

Montrer que les suites admettant les termes généraux suivants convergent et déterminer leurs limites.

(a)  $u_n = 2 + \frac{\sin(n)}{n+1}$       (b)  $v_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$  (où  $x \in \mathbb{R}$ )

### Corollaire 3 (Théorème des gendarmes, version "valeur absolue")

Soit  $\ell \in \mathbb{R}$  et  $u, b$  deux suites satisfaisant :  $|u_n - \ell| \leq b_n$  à partir d'un certain rang.

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ , alors

**Preuve :**

À partir d'un certain rang, on a :  $0 \leq |u_n - \ell| \leq b_n$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ , le Théorème 5 donne :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0$ .

Cela revient exactement à dire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ . □

### Exemple

Avec la version "valeur absolue", on aurait pu traiter le (a) de l'Exercice 5 ainsi :

### Remarque 6

On pourra retenir le résultat souvent (mais on le re-démontrera à chaque fois) :

Si  $\boxed{u_n = a_n b_n \text{ avec } (a_n) \text{ bornée et } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0}$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

En effet : On peut introduire  $K > 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq K$ .

Il en résulte :  $|u_n| = |a_n| |b_n| \leq K |b_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  d'après le Théorème des gendarmes (version "valeur absolue").

Il existe un théorème équivalent pour les limites infinies :

### Théorème 6 (Théorème des gendarmes, version "limite infinie")

Soient  $u$  et  $v$  deux suites satisfaisant :  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang.

- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

### Exercice 6

Soit  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $w_0 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = w_n(w_n + 1)$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n \geq n$ .
2. En déduire la limite de la suite  $w$ .

## 3.2 Suites monotones

La monotonie est un outil précieux pour l'étude des limites de suites, grâce au résultat suivant :

### Théorème 7 (Théorème de la limite monotone)

- Toute suite croissante  $u$  admet une limite. Plus précisément :
  - Si  $u$  est majorée, alors
  - Si  $u$  n'est pas majorée,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Toute suite décroissante  $v$  admet une limite. Plus précisément :
  - Si  $v$  est minorée, alors
  - Si  $v$  n'est pas minorée,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

### Corollaire 4

Si une suite  $u$  est croissante et tend vers  $\ell$ , alors :

Si une suite  $v$  est décroissante et tend vers  $\ell$ , alors :

 Dessin :

### ☞ Méthode : Étude complète de la limite d'une suite récurrente

On considère  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaisant :  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)}$  où  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ .

Interprétation graphique : (facultatif mais utile pour prévoir le résultat)

Dessiner l'allure de la courbe représentative de  $f$ , ainsi que la diagonale d'équation  $y = x$ .

En particulier, repérer le/les points d'intersection de ces deux courbes ( $f(x) = x$ ).

S'aider de ce dessin pour prévoir le comportement de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ("escalier").

**0 Intervalle stable** : (Facultatif mais parfois utile)

Si  $u_0 \in I$  et si l'intervalle  $I$  est stable par  $f$ , c'est à dire que  $f(I) \subset I$  (i.e.  $\forall x \in I, f(x) \in I$ ), alors on en déduit par récurrence immédiate que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ .

**1 Étude du sens de variation** : Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante/décroissante.

**2 Majoration/minoration** : Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée/minorée.

(Dans certains cas, il sera plus naturel de faire **2** avant **1**. Parois **2** découle de **0**.)

D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un certain réel  $\ell$ .

**3 Calcul de la limite** : Passer à la limite dans  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour obtenir  $\ell = f(\ell)$  et déterminer  $\ell$ .

### 💬 Remarque 7

Cette méthode traite le cas "idéal" où  $f$  est croissante et où la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

Il peut être nécessaire de l'adapter selon les cas (cf. feuille d'exercices) :

- Si la fonction  $f$  est croissante, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sera toujours monotone, mais il se peut qu'elle ne soit pas minorée/majorée : dans ce cas elle tend vers  $\pm\infty$ .

- Si la fonction  $f$  est décroissante, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne sera pas monotone !

Il est alors utile d'étudier les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ...

### ✎ Exercice 7

Retour sur la suite " $\sqrt{ANS}$ " :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ .

1. On pose  $u_0 = 2$ . Montrer que  $u$  converge et déterminer sa limite.

2. On pose  $u_0 = \frac{1}{2}$ . Montrer que  $u$  converge et déterminer sa limite.

### ✎ Dessin :

### 3.3 Suites adjacentes

#### Définition 5 (Suites adjacentes)

Deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont dites adjacentes lorsqu'elles satisfont les trois propriétés suivantes :

- 
- 
- 

#### Remarque 8

Bien-sûr, symétriquement on peut aussi avoir  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante.

En français : deux suites sont adjacentes quand l'une est croissante, l'autre est décroissante, et la différence des deux tend vers 0.

 Dessin :

Le constat fait sur ce dessin fait l'objet d'un théorème (qui justifie l'intérêt des suites adjacentes).

### Théorème 8 (Convergence des suites adjacentes)

Si les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite  $\ell \in \mathbb{R}$ .

**Preuve :**

□

### Remarque 9

Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes, en notant  $\ell \in \mathbb{R}$  leur limite commune, on a l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \ell \leq b_n$$

### Exercice 8

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et  $b_n = a_n + \frac{1}{n!}$ .

Montrer que  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  sont adjacentes. En déduire que  $(a_n)_{n \geq 1}$  converge.

### 💬 Remarque 10

Appelant  $\ell$  la limite commune à  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$ , on a l'encadrement  $a_{10} \leq \ell \leq b_{10}$ , ce qui donne :

$$2,7182818 \leq \ell \leq 2,712821$$

En fait, on peut montrer que  $\ell = e$  (nombre d'Euler).

## 3.4 Convergence et suites extraites

### 👑 Théorème 9 (Convergence des termes d'indices pairs et impairs)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite et  $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  (c'est à dire  $a \in \mathbb{R}$  ou bien  $a = \pm\infty$ ).

On a l'équivalence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = a \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = a.$$

En particulier, si  $(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}) \neq (\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1})$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'admet pas de limite (elle diverge).

### ✎ Exercice 9

Montrer que la suite de terme général  $u_n = (-1)^n$  diverge.

### À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum



- Connaître les définitions de la limite avec des quantificateurs.
- Déterminer la limite d'expressions explicites (à l'aide des limites usuelles et des règles de calcul).
- Utiliser le théorème des gendarmes pour déterminer une limite.
- Utiliser le théorème de la limite monotone pour déduire l'existence d'une limite.
- Passer correctement à la limite dans une inégalité.
- Montrer que deux suites sont adjacentes et en déduire l'existence d'une limite.

Pour suivre



- Étudier spontanément (sans indications) une suite récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
- Utiliser des suites adjacentes pour déduire un encadrement de la limite. (application informatique)
- Étudier les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  pour en déduire des résultats sur  $(u_n)$ .

Pour les ambitieux



- Manipuler la définition de la limite "avec des  $\varepsilon$ " quand c'est nécessaire.
- Étudier spontanément (sans indications) une suite récurrente  $u_{n+1} = f(u_n)$  dans le cas où  $f$  est décroissante.