A rendre le **Jeudi 5 février 2026**

Devoir Maison n°4 : Problème de Bâle

L'objectif de ce devoir est d'établir la célèbre formule suivante :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}}$$

Cette somme infinie est bien-entendu à interpréter de la façon suivante : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les intégrales :

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n} dt \quad \text{et} \quad B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t)^{2n} dt.$$

1. A l'aide d'une intégration par partie, démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2nA_n = (2n-1)A_{n-1}$.
2. A l'aide de deux intégrations par partie, démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = (2n-1)nB_{n-1} - 2n^2 B_n$.
3. (a) Montrer : $\forall t \in\ [0, \frac{\pi}{2}],\ t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\sin(t)$.

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les majorations : $B_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}(A_n - A_{n+1})$ puis $B_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{8}\dfrac{A_n}{n+1}$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{B_n}{A_n} = 0$.
4. En exploitant les égalités établies en questions 1 et 2, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} - \frac{B_n}{A_n}\right).$$

5. Etablir pour finir la formule de Bâle : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.