# Samedi 22 Mars 2025

# Devoir Sur Table n°5 – Durée : 4h

L'utilisation de la calculatrice, des feuilles/notes de cours ou d'exercices est interdite.
La présentation, la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation de la copie.
Les résultats non encadrés/soulignés/surlignés ne seront pas pris en compte.

## Exercice 1 : Autour des polynômes annulateurs d'une matrice

Dans tout cet exercice, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On utilisera la notation $\mathbb{R}[x]$ pour désigner l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
(pour éviter la confusion avec $X$ qui désignera une matrice colonne) Quelques rappels :

- On dit que $P$ est un polynôme unitaire lorsque son coefficient dominant est 1.
- Pour tout polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$, on note $P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- On dit que $P$ est un polynôme annulateur de $A$ lorsque $P(A) = 0$ (matrice nulle).

On définit les applications :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ P & \mapsto & P(A) \end{array}$$

1. Montrer que les applications $f$ et $\varphi$ sont linéaires.

2. *Etude de l'application $f$.*
   (a) Déterminer une base de $Im(f)$.
   (b) Déterminer une base de $Ker(f)$.
   (c) L'application $f$ est-elle injective ? surjective ?

3. *Polynôme annulateur de $A$ de degré minimal.*
   (a) Montrer que la famille $(I_3, A, A^2)$ est libre.
   (b) Déduire que le seul polynôme annulateur de $A$ de degré inférieur ou égal à 2 est le polynôme nul.
   (c) Montrer que la famille $(I_3, A, A^2, A^3)$ est liée et que le polynôme suivant est annulateur de $A$ :
   $$\Pi(x) = x^3 + 2x^2 + x$$
   (d) Montrer que $\Pi$ est l'unique polynôme annulateur de $A$ unitaire de degré 3.
   *On introduira un autre polynôme annulateur $P$ unitaire de degré 3, et on montrera que $P = \Pi$.*

4. Justifier que pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$, il existe un unique couple de polynôme $(Q, R) \in \mathbb{R}[x]^2$ tel que $P(x) = \Pi(x)Q(x) + R(x)$, avec $\deg(R) \leqslant 2$.

5. *Etude de l'application $\varphi$.*
   (a) A l'aide de la question 4., montrer que $Im(\varphi) = Vect(I_3, A, A^2)$.
   (b) A l'aide des questions 4. et 3.(b), montrer que $Ker(\varphi) = \left\{\Pi(x)Q(x),\ Q(x) \in \mathbb{R}[x]\right\}$
   (c) Soit $n \geqslant 3$. On note $\varphi_n$ l'application $\varphi$ restreinte à l'ensemble de départ $\mathbb{R}_n[X]$.
   Déterminer une base de $Ker(\varphi_n)$.

## Exercice 2 : Rang d'apparition du $n$-ième Pile

On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce déséquilibrée : à chaque lancer, la pièce a une probabilité $p \in ]0,1[$ de tomber sur Pile, $1-p$ de tomber sur Face. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle "$n$-ième Pile" le lancer pour lequel on observe Pile pour la $n$-ème fois depuis le début de la succession de lancers.

Par exemple, si les premiers lancers donnent : Face, Pile, Face, Pile, Pile, Face, Face, ...
Le 1er Pile apparait au lancer numéro 2, le 2ème Pile apparait au lancer numéro 4, le 3ème Pile apparait au lancer numéro 5.

Pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, on note $A_{n,k}$ l'évènement "Le $n$-ième Pile apparaît au lancer numéro $k$".
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $C_n$ l'évènement "Le $n$-ième Pile finit par apparaître (à un moment)".

1. *Apparition du premier Pile*
   (a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_{1,k}) = (1-p)^{k-1}p$.
   *On pourra exprimer $A_{1,k}$ en fonction d'autres évènements adéquats que l'on introduira.*
   (b) Exprimer $C_1$ en fonction des évènements $A_{1,k}$ et déduire que $C_1$ se réalise presque-sûrement.
   (c) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $B_k$ l'évènement "On obtient uniquement Face aux $k$ premiers lancers"". Exprimer $\overline{C_1}$ en fonction des $B_k$ et retrouver différemment le fait que $C_1$ se réalise presque-sûrement.

2. *Implémentation informatique de l'expérience.*
   (a) Compléter le programme Python suivant pour que la fonction `premier_pile(p)` renvoie le numéro (aléatoire) du tirage où le premier Pile apparaît. **On recopiera l'intégralité des programmes**.

```
import numpy.random as rd
def premier_pile(p) :
    lancer = 1;
    while ......... :
        lancer = .........
    return lancer
```

   (b) On propose le programme suivant :

```
N = 10**6; S = 0;
for k in range(N) :
  S = S + premier_pile(1/4)
print(S/N)
```

   Le résultat affiché est : `3.993912`. Expliquer le fonctionnement du programme et interpréter le résultat affiché dans le contexte d'une expérience aléatoire.

3. *Apparition du $n$-ième Pile.* Soit $n \geqslant 2$ fixé.
   (a) Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, que vaut $P(A_{n,k})$ ? Justifier.
   (b) Soit $k \geqslant 2$ et $i \in [\![0, k-1]\!]$.
   On note $D_{i,k}$ l'évènement "Obtenir exactement $i$ Piles lors des $k-1$ premiers lancers"".
   En reconnaissant une situation usuelle, donner la probabilité de cet évènement en fonction de $i$, $k$ et $p$.
   (c) En déduire que pour tout $k \geqslant n$, $\quad P(A_{n,k}) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$.

4. *Formule du binôme négatif*
   Soit $x \in ]0,1[$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note (sous réserve de convergence) : $b_r = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.
   (a) Pour $r \in \mathbb{N}$ fixé, justifier que $\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$, puis en déduire que la série associée à la somme infinie $b_r$ est bien convergente.
   (b) Donner les valeurs $b_0$ et $b_1$ en fonction de $x$.
   (c) A l'aide de la formule de Pascal, démontrer que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\quad b_r + x b_{r+1} = b_{r+1}$.
   (d) En déduire la formule du binôme négatif : pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\quad \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$

5. *Illustration informatique de la convergence.*

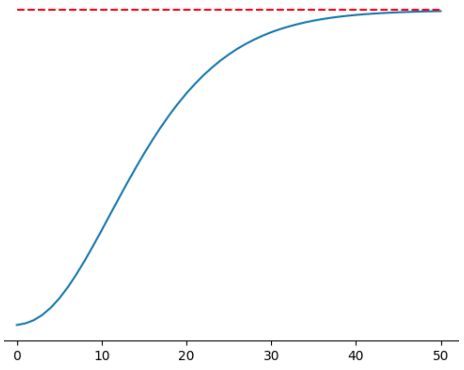
Soit $x \in ]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}$. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \binom{r+k}{r} x^k$, de sorte que $b_r = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $u_k$ en fonction de $u_{k-1}$, $x$, $k$ et $r$.

(b) Compléter le programme suivant pour que, lorsque $x \in ]0,1[$, $r \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}$, l'appel de la fonction `vecteur(x,r,N)` renvoie un vecteur contenant les valeurs $\left(\sum_{k=0}^{m} u_k\right)_{m\in[\![0,N]\!]}$

```
def vecteur(x,r,N) :
    V = ............. ; V[0] = ... ; u = ...
    for k in range( ......... ) :
        u = u * ..........
        V[ k ] = V[k-1] + u
    return V
```

(c) On souhaite alors produire le graphe suivant, qui affiche les valeurs $\left(\sum_{k=0}^{m} u_k\right)_{m\in[\![0,50]\!]}$ et l'asymptote horizontale confirmant la convergence vers la valeur $b_r$ pour $x = 0,8$ et $r = 3$ :




Compléter pour cela le programme suivant. (On suppose les bibliothèques adéquates importées).

```
N = 50; x = 0.8; r = 3;
X = ..............
Y = ..............
plt.plot(X,Y,'b-')
plt.plot( [ ... , ... ] , [ ......... ,  ......... ] , 'r--')
plt.show()
```

6. *Le n-ième Pile est presque-sûr.* Soit $n \geqslant 2$ fixé.

(a) A l'aide de la formule du binôme négatif, montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_{n,k}) = 1$.

(b) Exprimer $C_n$ en fonction des évènements $A_{n,k}$ et déduire que $C_n$ se réalise presque-sûrement.

## Exercice 3 : Dérivée d'une somme infinie

Pour tout $N \geqslant 1$, on définit la fonction $S_N$ par : $\forall x \in ]-1,1[, \quad S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n}$.

1. Soit $x \in ]-1,1[$ fixé.

   (a) Justifier que la série $(S_N(x))_{N \geqslant 1}$ est convergente. On note $S(x) = \lim_{N \to +\infty} S_N(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

   (b) Exprimer la dérivée $(S_N)'(x) = \frac{d}{dx}(S_N(x))$ comme une somme.

   Justifier que la série $((S_N)'(x))_{N \geqslant 1}$ est convergente. On note $T(x) = \lim_{N \to +\infty} (S_N)'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$.

   (c) Donner la valeur explicite de $T(x)$ en fonction de $x$.

Dans la suite de l'exercice, on cherche à démontrer rigoureusement que : $\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n}\right)$.

Autrement dit, on cherche à montrer que la fonction $S$ est dérivable sur $]-1,1[$ et que :

$$\forall x \in ]-1,1[, \; S'(x) = T(x).$$

Dans toute la suite, on fixe $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$ et $h \in \mathbb{R}$ assez proche de 0 pour que $|x| + |h| < 1$.

2. Montrer, pour tout $N \geqslant 1$, l'égalité :

$$\frac{S_N(x+h) - S_N(x)}{h} - (S_N)'(x) \; = \; \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1}\right).$$

3. Soit $n \geqslant 1$ fixé.

   (a) A l'aide de la formule du binôme, montrer que : $\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1} = h \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2}$.

   (b) Justifier que pour $k \geqslant 2$, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)}\binom{n-2}{k-2}$ puis que : $\binom{n}{k} \leqslant \frac{n(n-1)}{2}\binom{n-2}{k-2}$.

   (c) En déduire finalement la majoration suivante (*Indication : on pensera à l'inégalité triangulaire !*)

$$\left|\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1}\right| \leqslant \frac{|h|}{2} \cdot n(n-1) \cdot \Big(|x| + |h|\Big)^{n-2}.$$

4. (a) Montrer, pour tout $N \geqslant 1$, l'inégalité :

$$\left|\frac{S_N(x+h) - S_N(x)}{h} - (S_N)'(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2} \sum_{n=1}^{N} (n-1)\Big(|x| + |h|\Big)^{n-2}.$$

   (b) En déduire l'inégalité : $\left|\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - T(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2\Big(1 - |x| - |h|\Big)^2}$ .

5. Montrer finalement que $S$ est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\forall x \in ]-1,1[, \; S'(x) = T(x)$.

6. En déduire, pour tout $x \in ]-1,1[$, la valeur de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

   *Indication : On a vu que $S$ est une primitive de $T$.*

$\star\star\star$ Fin du sujet $\star\star\star$