A rendre le Jeudi 18 décembre 2025

Devoir Maison n°3 – Corrigé

Partie I - Cas général d'une fonction convexe

1. f est <u>continue</u> sur $[a,b]$ puisqu'elle y est de classe C^1 (donc dérivable). De plus, $f(a)<0$ et $f(b)>0$.
$\boxed{\text{D'après le TVI, on en déduit que } f \text{ s'annule (au moins une fois) dans }]a,b[}$.

2. (a) Par hypothèse, f' est strictement croissante sur $[a,b]$. Ainsi :
   - Soit f' est de signe constant sur $[a,b]$:
   $$\forall x\in[a,b], f'(x)<0 \text{ ou alors } \forall x\in[a,b],\ f'(x)>0.$$
   - Soit f' change de signe sur $[a,b]$.
   Dans ce cas, puisqu'elle est strictement croissante, c'est forcément que $f'(a)<0<f'(b)$.
   De plus, f' est continue sur $[a,b]$ puisque f est de classe C^1.
   D'après le TVI avec stricte monotonie, il existe donc un unique $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

   Ainsi : $\boxed{f' \text{ est de signe constant ou bien s'annule exactement une fois sur } [a,b]}$.

   (b) Montrons à présent que f s'annule en un unique $\alpha\in]a,b[$.
   - <u>Premier cas :</u> $f'<0$ sur $[a,b]$.
   Ceci est impossible, car alors f serait strictement décroissante sur $[a,b]$, et donc on ne pourrait pas avoir $f(a)<0<f(b)$ comme l'indique l'énoncé. Ce cas est donc exclu.
   - <u>Deuxième cas :</u> $f'>0$ sur $[a,b]$.
   Dans ce cas, f est strictement croissante sur $[a,b]$, et on sait que $f(a)<0<f(b)$.
   D'après le TVI avec stricte monotonie : $\exists!\alpha\in]a,b[,\ f(\alpha)=0$.
   On note qu'on a bien : $\forall x\in[\alpha,b],\ f(x)\geqslant 0$ et $f'(x)>0$.
   - <u>Troisième et dernier cas :</u> f' change de signe sur $[a,b]$.
   Dans ce cas, comme vu dans le (a), f' est strictement croissante et s'annule en un unique $c\in]a,b[$.
   Il en résulte que : $\forall x\in[a,c[,\ f'(x)<0$ et $\forall x\in]c,b],\ f'(x)>0$.
   On obtient donc le tableau de signe et de variations suivant :

x	a		c		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(a)<0$	$\searrow$	$f(c)<0$	$\nearrow$	$f(b)>0$

   A nouveau en appliquant le TVI avec stricte monotonie, on lit sur ce tableau qu'il existe un unique $\alpha\in]a,b[$ (précisément, $\alpha\in]c,b[$ tel que $f(\alpha)=0$.
   On note aussi qu'on a bien : $\forall x\in[\alpha,b],\ f(x)\geqslant 0$ et $f'(x)>0$.

   <u>Conclusion :</u> Dans tous les cas, $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha\in]a,b[\text{ tel que } f(\alpha)=0}$.
   De plus, $\boxed{\forall x\in[\alpha,b],\ f(x)\geqslant 0 \text{ et } f'(x)>0}$.

3. Supposons x_n construit. L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_n est alors :
$$y=f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n).$$
Cherchons l'abscisse x où cette droite coupe l'axe des abscisses, c'est à dire satisfait $y=0$.
On doit pour cela avoir :
$$f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)=0 \iff f'(x_n)(x-x_n)=-f(x_n) \iff x-x_n=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \iff x=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
Ainsi le point d'intersection est $x=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, c'est à dire $\boxed{\text{effectivement } x=x_{n+1}}$.

4. Soient $x, y \in [a, b]$.
   - D'abord, si $x = y$, l'inégalité est évidente :

   $$f(x) \geqslant f(y) + f'(y)(x-y) \iff f(x) \geqslant f(x) + f'(x)(x-x) \iff f(x) \geqslant f(x) \text{ ce qui est bien vrai.}$$

   - Supposons $x < y$.

   On applique alors l'EAF à la fonction f, qui est dérivable sur le segment $[x, y]$.
   Il existe donc un $c \in [x, y]$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.
   Ceci se ré-écrit :

   $$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) \iff f(x) - f(y) = f'(c)(x-y) \iff f(x) = f(y) + f'(c)(x-y).$$

   On note alors que puisque $c \in [x, y]$, on a $c \leqslant y$ et donc $f'(c) \leqslant f'(y)$ (car f' est strictement croissante).
   Puisque $(x - y) < 0$ ici, on obtient bien :

   $$f(x) = f(y) + \underbrace{f'(c)}_{\leqslant f'(y)} \underbrace{(x-y)}_{<0} \geqslant f(y) + f'(y)(x-y). \text{ C'est l'inégalité voulue.}$$

   - Supposons $x > y$.

   On fait dans ce cas la même chose en appliquant l'EAF sur le segment $[y, x]$.
   Il existe donc un $c \in [y, x]$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$.
   Ceci se ré-écrit :

   $$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) \iff f(x) - f(y) = f'(c)(x-y) \iff f(x) = f(y) + f'(c)(x-y).$$

   On note cette fois que puisque $c \in [y, x]$, on a $c \geqslant y$ et donc $f'(c) \geqslant f'(y)$ (car f' est strictement croissante).
   Puisque $(x - y) > 0$ ici, on obtient bien :

   $$f(x) = f(y) + \underbrace{f'(c)}_{\geqslant f'(y)} \underbrace{(x-y)}_{>0} \geqslant f(y) + f'(y)(x-y). \text{ C'est l'inégalité voulue.}$$

   <u>Conclusion :</u> Dans tous les cas, on a montré que $\boxed{f(x) \geqslant f(y) + f'(y)(x-y)}$.

   <u>Remarque :</u> Ceci s'interprète en disant que, quel que soit un $y \in [a, b]$ fixé, le graphe de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ est toujours au dessus du graphe de la fonction $x \mapsto f(y) + f'(y)(x-y)$, qui n'est autre que la tangente au point d'abscisse y. Autrement dit, le graphe d'une fonction dérivable convexe (i.e telle que f' est croissante) est toujours "au dessus de ses tangentes" !

5. Posons $\forall x \in [\alpha, b],\ F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
   Notons que ceci a bien un sens car on a vu en 2.(b) que $\forall x \in [\alpha, b], f'(x) > 0$, donc $f'(x) \neq 0$.
   On va vérifier que F est croissante en revenant à la définition.
   Soient donc $x, y \in [\alpha, b]$ tels que $x \leqslant y$. Montrons que $F(x) \leqslant F(y)$.
   Partons de l'inégalité du 4. On sait que :

   $$\begin{aligned} f(x) \geqslant f(y) + f'(y)(x-y) &\iff \frac{f(x)}{f'(y)} \geqslant \frac{f(y)}{f'(y)} + (x-y) \quad \text{(préserve le sens car } y \in [\alpha, b] \text{ donc } f'(y) > 0) \\ &\iff \frac{f(x)}{f'(y)} - x \geqslant \frac{f(y)}{f'(y)} - y \\ &\iff x - \frac{f(x)}{f'(y)} \leqslant y - \frac{f(y)}{f'(y)} \quad \text{(en multipliant par } -1) \\ &\iff x - \frac{f(x)}{f'(y)} \leqslant F(y) \quad \text{(en multipliant par } -1). \end{aligned}$$

   Le membre de gauche est "presque" $F(x)$...

Pour conclure, il faut noter que puisque f' est (strictement) croissante sur $[a, b]$,

$$x \leqslant y \text{ donc } f'(x) \leqslant f'(y) \text{ donc } \frac{1}{f'(x)} \geqslant \frac{1}{f'(y)} \text{ donc } \frac{f(x)}{f'(x)} \geqslant \frac{f(x)}{f'(y)} \text{ (car } x \in [\alpha, b] \text{ donc } f(x) \geqslant 0).$$

Ainsi $-\frac{f(x)}{f'(x)} \leqslant -\frac{f(x)}{f'(y)}$ et on obtient donc :

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leqslant x - \frac{f(y)}{f'(x)} \leqslant F(y).$$

On a bien montré que $\boxed{F \text{ est croissante sur } [\alpha, b]}$.

6. L'intérêt d'introduire la fonction F est que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = F(x_n).$$

On voudrait montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad x_n \in [\alpha, b]$.
(ça garantira que la suite est bien définie puisque F est bien définie sur $[\alpha, b]$ comme on l'a déjà dit)
Pour cela, classiquement, il suffit de vérifier que <u>l'intervale $[\alpha, b]$ est stable par F</u> !
Puisque F est croissante sur $[\alpha, b]$, on a :

$$\forall x \in [\alpha, b], \quad F(\alpha) \leqslant F(x) \leqslant F(b)$$

Or, $\quad F(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$ (car $f(\alpha) = 0$) $\quad$ et $F(b) = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \leqslant b$ (car $f(b) > 0$ et $f'(b) > 0$).
On obtient ainsi :

$$\forall x \in [\alpha, b], \quad \alpha \leqslant F(x) \leqslant b,$$

c'est à dire que $\boxed{F([\alpha, b]) \subset [\alpha, b]}$. A partir de là, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [\alpha, b]$ par récurrence immédiate.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x_{n+1} = x_n - \underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{\geqslant 0} \leqslant x_n$$

car, puisque $x_n \in [\alpha, b]$, $f(x_n) \geqslant 0$ et $f'(x_n) > 0$ (d'après 2.(a)). Ainsi $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.
Comme elle est également minorée par α, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un certain réel $\ell \in [\alpha, b]$. Pour trouver ce ℓ, on passe à la limite dans l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = F(x_n) \quad \text{pour obtenir } \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} F(x_n), \text{ c'est à dire } \ell = F(\ell).$$

. Notons qu'on utilise ici le fait que $\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{x\to\ell} F(x) = F(\ell)$ car <u>F est une fonction continue</u>.
En effet, on rappelle $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, différence et quotient de fonction continues :
f est continue (car dérivable) et f' est continue (car f est de classe C^1).
On obtient ainsi :

$$F(\ell) = \ell \iff \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)} = \ell \iff f(\ell) = 0 \iff \ell = \alpha. \text{ (puisque } \alpha \text{ est le seul point d'annulation de } f)$$

On a ainsi bien montré que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha}$.
Ceci peut être facilement conjecturé graphiquement, en construisant à partir des tangentes (interprétation géométrique décrite en 3.) x_0, puis x_1, puis x_2, etc...

Partie II - Etude d'un exemple

8. On pose $\forall x \in [0, N],\ f(x) = x^2 - N$. Alors :
   - $f(0) = -N$ donc $\boxed{f(0) < 0}$ et $f(N) = N^2 - N = N(N-1)$ donc $\boxed{f(N) > 0}$ (car $N \geqslant 2$)
   - $\boxed{f \in C^1([0, N], \mathbb{R})}$ (car c'est un polynôme)
   - $\boxed{f' : x \mapsto 2x \text{ est strictement croissante sur } [0, N]}$.
9. La suite de la méthode de Newton est construite en posant la relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n)^2 - N}{2x_n} = \frac{2(x_n)^2 - ((x_n)^2 - N)}{2x_n}$$
$$= \frac{(x_n)^2 + N}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{(x_n)^2}{x_n} + \frac{N}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right).$$

   Ainsi, $\boxed{\text{on retrouve bien la méthode de Héron}}$.

10. (a) On repère ici un utilisation de l'IAF. Précisons. On considère la fonction F définie par :

$$\forall x \in [\sqrt{N}, N], \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - N}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{N}{x}\right) \quad \text{(cf calcul précédent)}$$

   F est ainsi dérivable sur $[\sqrt{N}, N]$ et :

$$\forall x \in [\sqrt{N}, N], \quad F'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{N}{x^2}\right).$$

   Puisque $\sqrt{N} \leqslant x \leqslant N$, on a $N \leqslant x^2 \leqslant N^2$ donc $\frac{1}{N} \leqslant \frac{N}{x^2} \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant 1 - \frac{N}{x^2} \leqslant 1 - \frac{1}{N}$.
   Ainsi, on obtient :

$$\forall x \in [\sqrt{N}, N], \quad 0 \leqslant F'(x) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

   donc en particulier :

$$\boxed{\forall x \in [\sqrt{N}, N], \quad \left|F'(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right).}$$

   Pour tout $x, y \in [\sqrt{N}, N]$ fixés, on peut alors appliquer l'IAF à la fonction F entre x et y :

$$\boxed{\left|F(x) - F(y)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)|x - y|.}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique l'inégalité précédente en choisissant $x = x_n$ et $y = \alpha = \sqrt{N}$:

$$\left|F(x_n) - F(\sqrt{N})\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)|x_n - \sqrt{N}|.$$

   Or, par construction, $F(x_n) = x_{n+1}$.
   De plus α (c'est à dire $\sqrt{N}$ ici) est un point fixe de F (cf. calcul en question 7.).
   Ainsi : $F(\sqrt{N}) = \sqrt{N}$. On obtient donc :

$$\left|x_{n+1} - \sqrt{N}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)|x_n - \sqrt{N}|.$$

   Pour finir, on se rappelle qu'on a montré que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant \alpha$, donc ici : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant \sqrt{N}$.
   Il en résulte que $x_n - \sqrt{N} \geqslant 0$ et $x_{n+1} - \sqrt{N} \geqslant 0$, d'où :

$$\boxed{x_{n+1} - \sqrt{N} \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(x_n - \sqrt{N}\right).}$$

   (c) A chaque étape, on multiplie la distance entre x_n et $\sqrt{N}$ par $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{N})$.
   A partir de l'inégalité précédente, on obtient par récurrence immédiate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant x_n - \sqrt{N} \leqslant \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)^n (x_0 - \sqrt{N})$$

   On remarque alors que $x_0 - \sqrt{N} = N - \sqrt{N} = \sqrt{N}(\sqrt{N} - 1)$, d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant x_n - \sqrt{N} \leqslant \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)^n \sqrt{N}(\sqrt{N} - 1)}.$$

Puisque $(1-\frac{1}{N}) \in]0,1[$, on a $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{N}) \in]0,\frac{1}{2}[$, donc bien-sûr $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{N}\right)\right)^n = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, on conclut ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - \sqrt{N}) = 0$,

et on retrouve : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{N}}$.

Partie III - Implémentation en Python

11. Ici $x_0 = 5$ et $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$. Cela donne, en Python, pour calculer x_n :

```
def suite_x(n) :
    x = 5
    for k in range(1,n+1) : # ou range(n) : n passages ici
        x = 0.5 * (x + 5/x)
    return x
```

12.

```
import numpy as np
def vecteur_x(n) :
    V = np.zeros(n+1) # vecteur vierge de taille n+1, les indices vont de 0 a n
    V[0] = 5 # valeur de x0
    for k in range(n) : # k = 0, 1, ..., n-1
        V[k+1] = 0.5 * ( V[k] + 5/V[k]) # on applique la relation
    return V
```

13. (a) Pour tout $x \geqslant \sqrt{5}$, on a les implications :

$$x^2 - 5 \leqslant 4\varepsilon \implies (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) \leqslant 4\varepsilon \implies x - \sqrt{5} \leqslant \frac{4}{x+\sqrt{5}}\varepsilon \implies x - \sqrt{5} \leqslant \varepsilon$$

car puisque $x \geqslant \sqrt{5} \geqslant 2$, on a $\dfrac{4}{x+\sqrt{5}} \leqslant \dfrac{4}{2\sqrt{5}} \leqslant \dfrac{4}{2\times 2} \leqslant 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{la condition } x^2 - 5 \leqslant 4\varepsilon \text{ implique } x - \sqrt{5} \leqslant \varepsilon}$.

(b) L'idée est d'adapter le programme de la question 11. en calculant la valeur de x_n jusqu'à ce que $x_n - \sqrt{5} \leqslant \varepsilon$.
(Puisqu'on a $x_n \geqslant \sqrt{5}$, x_n sera alors une approximation de $\sqrt{5}$ à ε près par valeur supérieure).
Pour éviter d'utiliser `np.sqrt` dans le programme, on calcule en fait la valeur de x_n jusqu'à ce que $x_n^2 - 5 \leqslant 4\varepsilon$ (ce qui garantira que $x_n - \sqrt{5} \leqslant \varepsilon$).

```
def approx(eps) :
    x = 5
    while x**2 - 5 > 4 * eps :
        x = 0.5 * ( x + 5/x )
    return x
```

(Oui, c'est `approx` et non `appxo`, la fatigue me rend dyslexique)