# L'intuition derrière le changement de variable...

On cherche ici à donner une interprétation intuitive, "physique", du **théorème de changement de variable** :

Si $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ et $x \in C^1([0,T],[a,b])$ est strictement croissante, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_0^T f(x(t)) \cdot x'(t)\,dt$

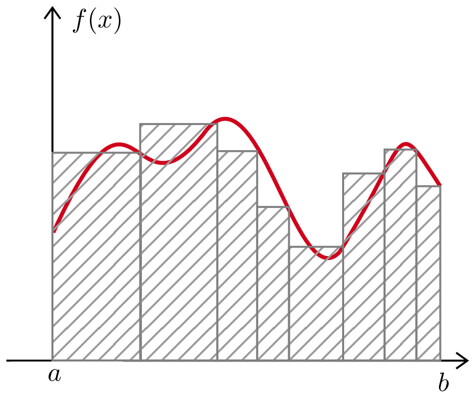
## L'intégrale au sens de Riemann

Considérons une fonction continue $f$ définie sur $[a,b]$.

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ s'interprète comme l'aire du domaine sous la courbe représentative de $f$, comptée algébriquement.

Cette aire est naturellement approchée par une suite de rectangles de plus en plus fins.

On rappelle ci-après la définition traditionnelle de l'intégrale au sens de Riemann.



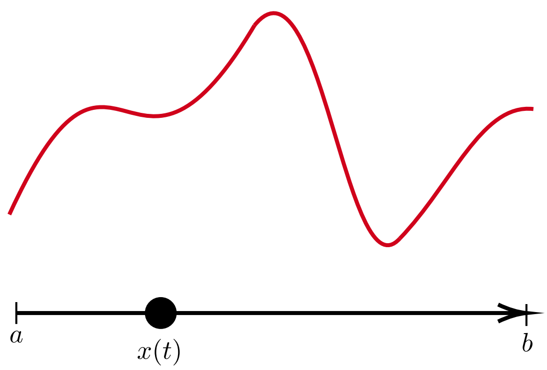

**Définition 1 (Intégrale comme limite des sommes de Riemann)**

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que,
pour toute subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ de $[a,b]$ de pas $\sigma = \max\limits_{i \in [\![1,N]\!]}(x_i - x_{i-1}) \leqslant \delta$,

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \varepsilon.$$

On pourrait résumer ce résultat en : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{\sigma \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$.
(cette limite étant uniforme sur toutes les subdivisions de pas $\sigma$)

## Estimation au cours d'un trajet




Imaginons une **montagne** s'étendant en longueur d'un point $a$ à un point $b$.

Pour tout $x \in [a,b]$, on désigne par $f(x)$ la hauteur de la montagne à la position $x$, et on suppose pour simplifier que la fonction $f$ ainsi définie est continue sur $[a,b]$.

On cherche à estimer la **hauteur moyenne** de la montagne entre $a$ et $b$, qui s'interprète comme l'intégrale :

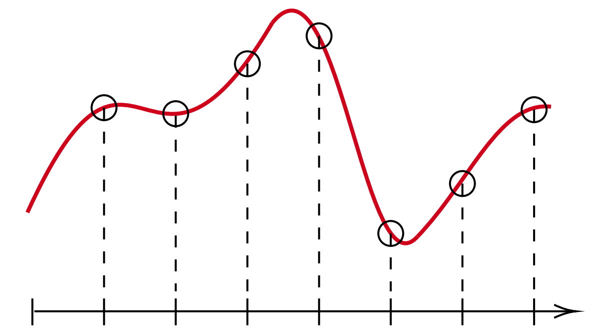
$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Dans cette optique, une **sonde** voyage du point $a$ au point $b$ en un temps $T$. Pour tout $t \in [0,T]$, on note $x(t)$ la position de la sonde à l'instant $t$. On suppose que la fonction $x : [0,T] \to [a,b]$ est de classe $C^1$ et strictement croissante.

Au cours de son trajet, la sonde prend $N$ **photographies** de la montagne **à intervalles de temps réguliers** :
à chaque instant $t_i = i\dfrac{T}{N}$ pour $i \in [\![1,N]\!]$, elle mesure la hauteur $f(x(t_i))$ à sa position actuelle.

On cherche ensuite à construire, à partir de ces mesures, une estimation de la hauteur moyenne de la montagne.

**1 - Voyage à vitesse constante**




On considère d'abord que la sonde voyage à la vitesse constante $c = \dfrac{b-a}{T}$ du point $a$ au point $b$.

Autrement dit, son trajet est donné par :

$$\forall t \in [0,T],\ x(t) = a + \frac{b-a}{T}t.$$

Les positions de la sonde aux instants $t_0, t_1, \ldots, t_N$ forment ainsi une **subdivision régulière** de $[a,b]$ :

$$\forall i \in [\![0,N]\!],\ x(t_i) = a + i\frac{b-a}{N}.$$

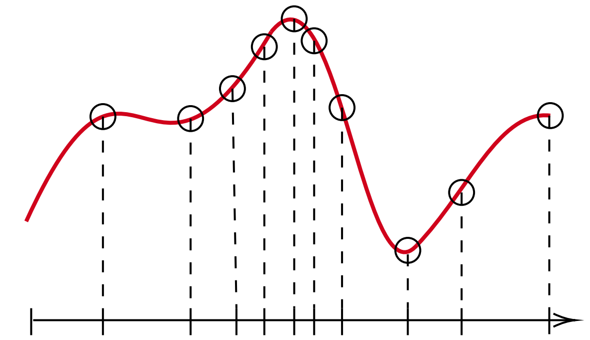
(en ajoutant, par convention, $t_0 = 0$)

Lorsque $N$ est grand, d'après la définition de l'intégrale, $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{N} f(x(t_i))\Big(x(t_i) - x(t_{i-1})\Big) = \sum_{i=1}^{N} f(x(t_i)) \cdot \frac{b-a}{N}}$

Autrement dit, pour estimer la hauteur moyenne de la montagne, on se contente de calculer la **moyenne arithmétique** des hauteurs mesurées par la sonde au cours de son trajet :

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x(t_i))}.$$

**2 -Voyage à vitesse non-constante**




A présent, la sonde voyage du point $a$ au point $b$ avec une vitesse variable (donnée à chaque instant par $x'(t)$).

Du fait des accélérations ou des ralentissements, les positions de la sonde aux instants $t_0, t_1, \ldots, t_N$ forment une subdivision de $[a,b]$ qui n'est **plus régulière**.

Si la sonde s'attarde dans certaines régions et se hâte dans d'autres, on comprend facilement que la moyenne arithmétique des mesures $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} f(x(t_i))$ n'est plus une bonne estimation de la hauteur moyenne de la montagne...

Lorsque $N$ est grand, on a toujours $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{N} f(x(t_i))\Big(x(t_i) - x(t_{i-1})\Big)$.

La distance $x(t_i) - x(t_{i-1})$ parcourue entre deux photographies consécutives est, cette fois, variable.
On a cependant l'approximation naturelle $\Big(x(t_i) - x(t_{i-1})\Big) \simeq x'(t_i)\cdot(t_i - t_{i-1})$, qui conduit à :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{N} f(x(t_i)) \cdot x'(t_i) \cdot (t_i - t_{i-1})} \qquad \text{(avec } t_i - t_{i-1} = \tfrac{T}{N}\text{)}.$$

Si aux instants $t_1, t_2, \ldots, t_N$, la sonde mesure sa vitesse instantanée $x'(t_i)$ en plus de la hauteur $f(x(t_i))$, on peut ainsi estimer la hauteur moyenne de la montagne avec la formule :

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \ \simeq\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x(t_i)) \cdot \frac{x'(t_i)}{c}} \qquad \left(\text{où } c = \frac{b-a}{T}\right)$$

**Interprétation :** La vitesse $x'(t_i)$ (ou plutôt le ratio adimensionnel $\frac{x'(t_i)}{c}$) vient pondérer la mesure $f(x(t_i))$ effectuée à l'instant $t_i$ dans le calcul de la moyenne. On accorde moins d'importance à une mesure effectuée à une vitesse faible (région où la sonde "s'attarde", donc dans laquelle de nombreuses mesures seront effectuées) et plus d'importance à une mesure effectuée à une vitesse élevée (région "survolée" par la sonde, peu de mesures effectuées)

On revient pour finir à l'approximation obtenue : $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{N} f(x(t_i)) \cdot x'(t_i) \cdot (t_i - t_{i-1})}$.

Puisque $t_0 < t_1 < \ldots < t_N$ constitue une subdivision du segment $[0, T]$, on note que cette dernière somme de Riemann est celle qui approche naturellement l'intégrale $\displaystyle\int_0^T f(x(t)) \cdot x'(t)dt$.

Ceci conduit finalement à la formule du changement de variable : $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_0^T f(x(t)) \cdot x'(t)\, dt}$.

## Une preuve plus rigoureuse...

On peut évidemment traduire les arguments heuristiques avancés ici "avec des $\simeq$" en une démonstration plus rigoureuse.

On reprend les mêmes notations que précédemment : $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, $x \in C^1([0,T],[a,b])$ strictement croissante.
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on introduit la subdivision de $[0,T]$ : $\forall i \in [\![0,N]\!],\ t_i = i\dfrac{T}{N}$.
Puisque $(x(t_i))_{i\in[\![0,N]\!]}$ forme alors une subdivision de $[a,b]$, d'après la définition de l'intégrale de Riemann, on sait que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} f(x(t_i)) \cdot (x(t_i) - x(t_{i-1}))}_{S_N} \quad \text{et} \quad \int_0^T f(x(t))x'(t)dt = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} f(x(t_i)) \cdot x'(t_i) \cdot (t_i - t_{i-1})}_{R_N}.$$

Pour conclure que ces deux intégrales sont les mêmes, il suffit de montrer que $\lim\limits_{N\to\infty}(S_N - R_N) = 0$.
D'après l'égalité des accroissements finis, pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, on peut introduire

$$c_i \in ]t_{i-1}, t_i[ \ \text{ tel que } \ x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(c_i) \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\Big|S_N - R_N\Big| &= \Big|\sum_{i=1}^{N} f(x(t_i)) \cdot x'(c_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{N} f(x(t_i)) \cdot x'(t_i) \cdot (t_i - t_{i-1})\Big| \\ &= \Big|\sum_{i=1}^{N} f(x(t_i)) \cdot (x'(c_i) - x(t_i)) \cdot (t_i - t_{i-1})\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |f(x(t_i))| \cdot |x'(c_i) - x(t_i)| \cdot (t_i - t_{i-1}).\end{aligned}$$

$f$ étant continue sur $[a,b]$, elle y est bornée. Notons $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.
$x'$ étant continue sur $[0,T]$, elle y est uniformément continue.
Notons $w(\delta) = \sup\limits_{|t-s|\leqslant\delta} |x'(t) - x'(s)|$ son module de continuité (de sorte que $w(\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$).
Puisque pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, $|c_i - t_i| \leqslant \dfrac{T}{N}$, on obtient la majoration :

$$\Big|S_N - R_N\Big| \leqslant M \cdot w\left(\frac{T}{N}\right) \cdot \sum_{i=1}^{N}(t_i - t_{i-1}) \quad \text{c'est à dire} \quad \Big|S_N - R_N\Big| \leqslant M \cdot w\left(\frac{T}{N}\right) \cdot T.$$

Finalement, $\lim\limits_{N\to+\infty} w\left(\dfrac{T}{N}\right) = 0$, ce qui conclut la preuve.