9

Limites de fonctions

Dans ce chapitre, f désignera une fonction numérique.

1 Limite d'une fonction en un point

1.1 Limite finie en un point

Définition 1 (Limite finie en un point)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : D \to \mathbb{R}$ avec $\underline{D = I \text{ ou } D = I \setminus \{x_0\}}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f a pour limite ℓ en x_0 lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou bien $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

Dessin :

Interprétation : $f(x)$ peut devenir aussi proche que l'on veut de ℓ, pourvu que x soit assez proche de x_0 ! Quel que soit un seuil $\varepsilon > 0$ fixé (aussi petit soit il), on peut toujours trouver un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in D,\ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Notons que la valeur de ce δ dépend en général de ε (pour plus de clarté, on pourrait le noter δ_ε).

Remarque 1

On a l'équivalence : $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - \ell| = 0}$

Exercice 1

En vérifiant la définition, montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $D = \mathbb{R}_+$. On a ici $x_0 = 0$.

On doit donc vérifier : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \forall x \in [0, \delta[,\ |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a les équivalences :

$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon \iff \sqrt{x} < \varepsilon \iff x < \varepsilon^2.$$

Ainsi, en choisissant par exemple $\delta = \dfrac{\varepsilon^2}{2} > 0$, on a bien $\forall x \in [0, \delta[,\ |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$.

Remarque 2

Bien-sûr, comme pour les suites, on ne sera presque jamais amené à calculer une limite en vérifiant cette définition. On préfèrera utiliser les règles de calculs, les limites usuelles, les encadrements, etc...

Proposition 1 (Unicité de la limite en un point)

Si $f : D \to \mathbb{R}$ admet une limite finie en x_0, alors cette limite est unique.

Preuve rapide :
Même preuve que pour l'unicité de limite d'une suite !
Si $\ell_1 < \ell_2$, $f(x)$ ne peut pas "se rapprocher" à la fois de ℓ_1 et de ℓ_2 quand x tend vers x_0... $\square$

Remarques 3

- Si f admet une limite en x_0 et si f est définie en x_0, alors, nécessairement, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

La **limite** de f en x_0 est nécessairement égale à la **valeur** de f en x_0.
On dira dans ce cas que f est *continue en* x_0 . (cf. chapitre suivant)

- Une fonction f peut avoir une limite (finie) en x_0 même si f n'est pas définie en x_0 !

On dira dans ce cas que f est *prolongeable par continuité en* x_0. (cf chapitre suivant)

Exemple simple : Considérons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$. Alors f n'est pas définie en 0, mais $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Dessin :

- Une fonction f peut ne pas admettre de limite en x_0 (qu'elle soit ou non définie en x_0).

De nombreuses situations sont possibles dans ce cas...

Dessin :

1.2 Limite infinie en un point

Définition 2 (Limite infinie en un point)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : D \to \mathbb{R}$ avec $\underline{D = I \setminus \{x_0\}}$.

- On dit que f tend vers $+\infty$ en x_0 lorsque :

$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D\cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ f(x) > A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou bien $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$

- On dit que f tend vers $-\infty$ en x_0 lorsque :

$$\forall A < 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D\cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ f(x) < A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ ou bien $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$

Dessin :

Remarque 4

Si f admet une limite infinie en x_0, f ne peut pas être définie en x_0 !

Proposition 2 (Rappels : deux limites infinies usuelles)

- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ est pair, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.

Dessin :

1.3 Limite à droite, limite à gauche

Définition 3 (Limites à droite et à gauche)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D = I$ ou $D = I \setminus \{x_0\}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que f admet une limite à gauche en x_0 égale à ℓ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D \cap \,]x_0 - \delta, x_0[,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- On dit que f admet une limite à gauche en x_0 égale à $+\infty$ lorsque :

$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D \cap \,]x_0 - \delta, x_0[,\ f(x) > A$$

- On dit que f admet une limite à gauche en x_0 égale à $-\infty$ lorsque :

$$\forall A < 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D \cap \,]x_0 - \delta, x_0[,\ f(x) < A$$

Si f admet une limite à gauche en x_0, elle est notée $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ ou bien $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$.

- On dit que f admet une limite à droite en x_0 égale à ℓ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D \cap \,]x_0, x_0 + \delta[,\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- On dit que f admet une limite à droite en x_0 égale à $+\infty$ lorsque :

$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D \cap \,]x_0, x_0 + \delta[,\ f(x) > A$$

- On dit que f admet une limite à droite en x_0 égale à $-\infty$ lorsque :

$$\forall A < 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D \cap \,]x_0, x_0 + \delta[,\ f(x) < A$$

Si f admet une limite à droite en x_0, elle est notée $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ou bien $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$.

Remarque 5

- Bien-sûr, si f est définie seulement "à gauche de x_0", la notion de limite à gauche en x_0 coïncide avec la notion de limite (tout court). De même pour la limite à droite.

Exemple : On a naturellement $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Proposition 3 (Rappels : quelques limites usuelles à gauche et à droite)

- Si $n \in \mathbb{N}^*$ est impair, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.
- Si $x_0 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (pour un $k \in \mathbb{Z}$), $\lim\limits_{x \to x_0^-} \tan(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} \tan(x) = -\infty$.

Dessin :

Théorème 1 (Lien entre limite à gauche / à droite / "tout court")

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit x_0 un point de I qui n'est pas une extrémité de I.
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D = I$ ou $D = I \setminus \{x_0\}$.

$\boxed{1}$ Si f admet une limite (finie ou infinie) en x_0, alors elle admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

$\boxed{2}$ Réciproquement :

- Cas $D = I \setminus \{x_0\}$: Si f admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 (finies ou infinies) et si ces limites sont égales alors f admet une limite en x_0 et

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

- Cas $D = I$: Si f admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 (finies ou infinies) et si ces limites sont égales à $f(x_0)$ alors f admet une limite en x_0 et

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Exemple

Si $k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x\to k^-} \lfloor x \rfloor = k-1$ et $\lim_{x\to k^+} \lfloor x \rfloor = k$ Ainsi la limite en k de $\lfloor \cdot \rfloor$ n'existe pas !

Illustrons quelques situations possibles dans le cas où les limites à gauche et à droite existent et sont finies :

Cas $D = I \setminus \{x_0\}$:

Dessin :

Cas $D = I$:

Dessin :

2 Limite d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition 4 (Limite finie ou infinie en $\pm\infty$)

• Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où D contient un intervalle de la forme $]C, +\infty[$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in D \cap]B, +\infty[,\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ lorsque :

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in D \cap]B, +\infty[,\quad f(x) > A$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ lorsque :

$$\forall A < 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in D \cap]B, +\infty[,\quad f(x) < A$$

Cette limite (finie ou infinie est notée) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ou bien $\lim\limits_{+\infty} f$.

• Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où D contient un intervalle de la forme $]-\infty, C[$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B < 0,\ \forall x \in D \cap]-\infty, B[,\quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ lorsque :

$$\forall A > 0,\ \exists B < 0,\ \forall x \in D \cap]-\infty, B[,\quad f(x) > A$$

On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ lorsque :

$$\forall A < 0,\ \exists B < 0,\ \forall x \in D \cap]-\infty, B[,\quad f(x) < A$$

Cette limite (finie ou infinie est notée) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ou bien $\lim\limits_{-\infty} f$.

Illustration dans le cas $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$:

Dessin :

Bien-sûr, on a à nouveau unicité de la limite, lorsqu'elle existe.

Proposition 4 (Unicité de la limite en l'infini)

Si f admet une limite (finie ou infinie) en $+\infty$ ou $-\infty$, alors cette limite est unique.

Proposition 5 (Rappels : quelques limites usuelles finies en l'infini)

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- Plus généralement, pour tout réel $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Proposition 6 (Rappels : quelques limites usuelles infinies en l'infini)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.
- Plus généralement, pour tout réel $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$. En particulier $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$

Remarque 6

Bien-entendu, certaines fonctions n'admettent pas de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Exemples : cos et sin.

3 Calculs de limites

Dans la suite, on aura parfois besoin que certains propriétés soient vérifiées "localement", au voisinage de certains points.

Définition 5 (Voisinage)

- Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a tout intervalle contenant a et dont a n'est pas une extrémité.
- On appelle voisinage de $+\infty$ tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ ou $[A, +\infty[$.
- On appelle voisinage de $-\infty$ tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ ou $]-\infty, A]$.

Si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on dit qu'une propriété $\mathcal{P}(x)$ est vraie "au voisinage de a" lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Exemple

- On a $x^2 \leqslant |x|$ au voisinage de 0.
- On a $\ln(x) \leqslant x$ au voisinage de $+\infty$

3.1 Limites usuelles

Les limites usuelles suivantes permettent de lever la plupart des indéterminées.

Théorème 2 (Croissances comparées en $+\infty$)

Pour tous $a, b, c > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{cx}}{x^a} = +\infty$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = +\infty$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{cx}}{(\ln x)^a} = +\infty$

Théorème 3 (Limites usuelles en 0) (admises pour le moment)

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$ $\quad$ En particulier, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$

3.2 Opérations sur les limites

Dans les tableaux suivant, on considère des limites en a, avec $a \in \mathbb{R}$ ou bien $a = \pm\infty$.

Limite d'une somme :

$\lim_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$\ell+\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Limite d'un produit :

$\lim_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x\to a} f(x)g(x)$	$\ell \times \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Limite d'un quotient : (si $g(x) \neq 0$ "au voisinage de a")

$\lim_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$\ell \neq 0$	0	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	0^-	0^+	0^-	0^+	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0	?

$\lim_{x\to a} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$\ell < 0$ ou 0^-	$\ell > 0$ ou 0^+	$\ell < 0$ ou 0^-	$\ell > 0$ ou 0^+	$\pm\infty$
$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?

Remarque 7

- Ici, 0^+ signifie : $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $f(x) > 0$ "au voisinage de 0".
- Ici, 0^- signifie : $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $f(x) < 0$ "au voisinage de 0".

Comme pour les limites de suites, on fera également bon usage de la **factorisation** pour lever d'éventuelles indéterminées. Dans une somme, il est souvent utile de factoriser par "le plus grand terme".

Exercice 2

Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x\to-\infty}(3x^3+2x^2-x+1)$ 2. $\lim_{x\to+\infty}(2x-\ln(x))$ 3. $\lim_{x\to0^+}\dfrac{\sin(x)}{x+\sqrt{x}}$

1. $3x^3+2x^2-x+1 = x^3(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})$ donc $\lim_{x\to-\infty}(3x^3+2x^2-x+1) = -\infty$.
2. $2x-\ln(x) = x(2-\frac{\ln(x)}{x})$ donc $\lim_{x\to+\infty}(2x-\ln(x)) = +\infty$.
3. $\dfrac{\sin(x)}{x+\sqrt{x}} = \dfrac{\sin(x)}{x}\times\dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$ donc $\lim_{x\to0^+}\dfrac{\sin(x)}{x+\sqrt{x}} = 0$.

3.3 Composition de limites

Théorème 4 (Limite d'une fonction composée)

Soient a, b, $c\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.
Soit f une fonction définie "au voisinage" de a et g une fonction définie "au voisinage" de b.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et si $\lim_{x\to b} g(x) = c$, alors $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$

Exemple

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(2+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{y\to2}\ln(y) = \ln(2) \quad \text{(car ln est continue en 2).}$$

Comme dans l'exemple précédent, les calculs de limites mettant en jeu une composition se ramène souvent à poser un "changement de variable".

Méthode : "Changement de variable" dans un calcul de limite

Pour déterminer une limite de la forme $\lim_{x\to a} g(f(x))$:

$\boxed{1}$ Poser "$y=f(x)$" et noter que lorsque $x\to a$, on a $y\to b$.

$\boxed{2}$ En déduire que $\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y)$.

Exercice 3

1. Déterminer $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{2x}$. 2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

3. Croissances comparées en 0 : montrer que $\boxed{\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0}$

4. Croissance comparées en $-\infty$: montrer que $\boxed{\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0}$

(On pourra retenir ces deux derniers résultats)

1. Pour tout $x\neq0$, $\dfrac{e^{x^2}-1}{2x} = \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\times\dfrac{x}{2}$.

On a $\lim_{x\to0}\dfrac{x}{2} = 0$ et $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} = \lim_{y\to0}\dfrac{e^y-1}{y} = 1$. On en déduit $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{2x} = 0$.

2. Pour tout $x > 0$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp(1) = e$.

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to+\infty}\frac{-\ln(y)}{y} = 0$.

4. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, en posant $y = e^x$ (c'est à dire $x = \ln(y)$) on peut écrire $xe^x = \ln(y)y$ et lorsque $x\to-\infty$, $y = e^x \to 0^+$.

On conclut : $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = \lim\limits_{y\to 0^+}\ln(y)\times y = 0$ d'après 3.

De la même façon, on peut composer limite de suite et de fonction (résultat déjà évoqué) :

Théorème 5 (Limites et suites)

Soient $a, b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.
Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$.

Exercice 4

Démontrer par l'absurde que les fonctions cos et sin n'admettent pas de limite en $+\infty$.

Supposons que $a = \lim\limits_{x\to+\infty}\cos(x)$ existe ($a\in\mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$).

On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = 2n\pi$ et $v_n = (2n+1)\pi$.
de sorte que $\cos(u_n) = 1$ et $\cos(v_n) = -1$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on doit avoir $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(u_n) = \lim\limits_{x\to+\infty}\cos(x)$ i.e $1 = a$.

De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos(v_n) = \lim\limits_{x\to\infty}\cos(x) = a$ i.e $-1 = a$. Absurde !

3.4 Passage à la limite dans une inégalité

Dans cette partie, a est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème 6 (Passage à la limite dans une inégalité (large !))

Soit $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ et soient f et g satisfaisant $f(x)\leqslant g(x)$ "au voisinage de a".
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell\in\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'\in\mathbb{R}$, alors on a : $\ell\leqslant\ell'$.

Remarque 8

Pour pouvoir utiliser ce théorème, il faut avoir justifié au préalable l'existence des limites !

Attention !

Il est possible de passer à la limite uniquement dans des inégalités larges !
Si on a $f(x) < g(x)$ au voisinage de a, on ne peut pas conclure que $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$.
(En revanche, comme en particulier $f(x) \leqslant g(x)$, on pourra conclure $\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$)

Exemple : Posons, pour tout $x > 0$, $f(x) = 0$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.
On a $f(x) < g(x)$ pour tout $x > 0$ mais $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
(L'inégalité stricte n'est pas préservée à la limite)

4 Théorèmes de convergence

4.1 Théorème des gendarmes

Théorème 7 (Théorème des gendarmes)

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soient f, g et h satisfaisant $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ "au voisinage de a".
Si $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Corollaire 1 (Théorème des gendarmes, version "valeur absolue")

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et soient f et h satisfaisant $|f(x) - \ell| \leqslant h(x)$ "au voisinage de a".
Si $\lim_{x\to a} h(x) = 0$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Comme pour les suites, il existe un résultat équivalent pour les limites infinies.

Théorème 8 (Théorème des gendarmes, version "limite infinie")

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soient f et g satisfaisant $f(x) \leqslant g(x)$ "au voisinage de a".

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

4.2 Théorème de la limite monotone.

Théorème 9 (Théorème de la limite monotone)

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On considère une fonction f sur l'intervalle $I =]a, b[$.

- Supposons $\boxed{f \text{ croissante}}$ sur l'intervalle $I =]a, b[$.

- **À l'intérieur de I :** f admet en tout point $x_0 \in]a, b[$ une limite finie à droite et à gauche, et on a

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

- **Bord gauche de I :** f admet une limite à droite en a. Plus précisément :
  - Si f est minorée sur $]a, b[$, cette limite est finie : $\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{x\in]a,b[} f(x)$.
  - Sinon, $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

- **Bord droit de I :** f admet une limite à gauche en b. Plus précisément :
  - Si f est majorée sur $]a, b[$, cette limite est finie : $\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{x\in]a,b[} f(x)$.
  - Sinon, $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$.

- Supposons $\boxed{f \text{ décroissante}}$ sur l'intervalle $I =]a,b[$.

- **À l'intérieur de I :** f admet en tout point $x_0 \in]a,b[$ une limite <u>finie</u> à droite et à gauche, et on a

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \geqslant f(x_0) \geqslant \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

- **Bord gauche de I :** f admet une limite à droite en a. Plus précisément :
  - Si f est majorée sur $]a,b[$, cette limite est finie : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$.
  - Sinon, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

- **Bord droit de I :** f admet une limite à gauche en b. Plus précisément :
  - Si f est minorée sur $]a,b[$, cette limite est finie : $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \inf\limits_{x \in]a,b[} f(x)$.
  - Sinon, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = -\infty$.

Dessin :

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Connaître les définitions de limite avec des quantificateurs.
- Déterminer la limite d'expressions explicites (à l'aide des limites usuelles et des règles de calcul).
- Utiliser le théorème des gendarmes pour déterminer une limite.
- Passer correctement à la limite dans une inégalité.

Pour suivre

- Poser des "changements de variables" pour se ramener à des limites usuelles.
- Démontrer l'existence ou la non-existence d'une limite en étudiant les limites à gauche et à droite.
- Utiliser le théorème de la limite monotone pour justifier l'existence d'une limite.

Pour les ambitieux

- Manipuler la définition de la limite "avec des ε" quand c'est nécessaire.