

# Semaines 1 et 2

## Logique et ensembles, Sommes et produits, Applications

### • Énoncés / formules à connaître :

#### Logique, raisonnement, ensembles

- Notions d'implications entre propositions logiques.
- Maîtrise de différents types de raisonnement : direct, contraposée, absurde, analyse-synthèse...
- Rédaction d'une récurrence simple, double, éventuellement forte.
- Utilisation des quantificateurs.
- Union/intersection (pour une famille finie d'ensemble), complémentaire.
- Propriétés :  $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B, (\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B, \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}, \overline{\bigcap_{i \in I} A_i}$ , etc...

#### Sommes et produits

- Sommes classiques :  $\sum_{k=1}^n k, \sum_{k=1}^n k^2, \sum_{k=1}^n k^3, \sum_{k=0}^n x^k$ , développement de  $a^n - b^n$
- Notion de factorielle ( $n!$ )
- Calcul de sommes et produits par changement d'indice ou télescopage.
- Calcul de somme double :  $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j}, \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}, \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}$ .

#### Applications

- Image directe, image réciproque d'un ensemble par une application, ensemble image. (Tout ceci se lit sur un tableau de variation/graphes pour des fonctions numériques)
- Application identité.
- Notion de composée  $g \circ f$  (avec éventuellement un domaine à déterminer).
- Injectivité, surjectivité, bijectivité : définitions "en français" (au plus/au moins/exactement un antécédent...) et avec des quantificateurs.
- Notion de bijection réciproque. Calcul de réciproque en résolvant l'équation  $y = f(x)$ .

### • Démonstrations à connaître :

- Calcul de  $\sum_{k=1}^n k$  (preuve "du petit Gauss" ou bien par récurrence).
- Calcul de  $\sum_{k=0}^n x^k$  (par récurrence).
- Identité  $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ .
- La composée de deux injections est une injection.
- La composée de deux surjections est une surjection.