A rendre le Jeudi 17 octobre 2024

Devoir Maison n°1 : Fonctions et suites réelles

Ce travail peut être réalisé en groupe de <u>3 étudiants maximum</u>. (1 copie rendue par groupe)
Les résultats non encadrés/soulignés/surlignés ne seront pas pris en compte.

On propose d'étudier le comportement d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{2-|u_n|}.$$

A cette fin, on définit : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xe^{2-|x|}$.

1. Faire l'étude complète de la fonction f : parité, tableau de variations complet, limites, borne inférieure / supérieure. f admet-elle un minimum/maximum ?
2. Montrer que f admet 3 points fixes que l'on déterminera.
   Vocabulaire important : On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un point fixe de f lorsque $f(x) = x$.
3. (a) Dessiner, sur un même graphe, la courbe représentative de f ainsi que la droite diagonale d'équation $y = x$. On fera apparaitre toutes les abscisses / ordonnées importantes.
   (b) Déduire de ce dessin l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < x$ et de l'inéquation $f(x) > x$.
4. (a) Déterminer les ensembles : $f(\mathbb{R})$, $f([0,1])$, $f([-1,2])$, $f([1,+\infty[)$.
   (b) Démontrer que l'intervalle $I = [1,e]$ est stable par f.
   Vocabulaire important : Ceci signifie que $f(I) \subset I$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $u_0 \in [1,e]$.

5. Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = 2$?

On ajoute à présent l'hypothèse $u_0 \neq 2$.

6. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in [1,e] \setminus \{2\}$.
   (b) En distinguant les cas $u_0 \in [1,2[$ et $u_0 \in]2,e]$, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.
7. On considère les suites des termes pairs et impairs définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = (f\circ f)(v_n)$ et $w_{n+1} = (f \circ f)(w_n)$.
   (b) Etablir le sens de variation de $f \circ f$ sur l'intervalle $[1,e]$. Dessiner ensuite, sur un même graphe, la courbe représentative de $f \circ f$ sur $[1,e]$ ainsi que la droite diagonale d'équation $y = x$.
   En déduire les solutions des inéquations $(f \circ f)(x) < x$ et $(f \circ f)(x) > x$ sur $[1,e]$.
   (c) En distinguant à nouveau les cas $u_0 \in [1,2[$ et $u_0 \in]2,e]$, montrer que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement monotones, de sens de variation contraires.

Pour finir, on propose d'étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de Python.

8. (a) Définir en Python une fonction `f` qui prend en entrée un réel x et renvoie la valeur $f(x) = xe^{2-|x|}$.
   (b) En utilisant cette fonction `f`, compléter le programme suivant pour que la fonction `suiteU` (qui prend en entrée un réel a et un entier n) renvoie la valeur du terme u_n, avec la condition initiale $u_0 = a$.

```python
def suiteU(a,n) :
    u = a
    for k in ... :
        u = ...
    return u
```

   (c) On tape l'instruction suivante dans la console : `print([suiteU(1.5,k) for k in range(8)])`
   Le résultat affiché est le suivant : `[1.5, 2.47, 1.54, 2.43, 1.57, 2.41, 1.59, 2.38]`
   Expliquer en quoi ceci confirme l'étude menée en 7.(c).
   (d) L'instruction `suiteU(1.5,100000)` renvoie la valeur `1.9945`.
   Quelle conjecture raisonnable pourrait-on avancer pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 \in [1,e]$?