

# Nombres réels, fonctions numériques

## Exercice 1 (Calculs de sup et inf)

- $A = ]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ . On a donc  $\inf(A) = -\sqrt{2}$  et  $\sup(A) = \sqrt{2}$ . Pas de minimum ni de maximum
- On a  $0 \in B$  et  $0$  est un minorant de  $B$ . Ainsi  $\min(B) = \inf(B) = 0$ .  
Il est "clair" que  $\sup(B) = 1$ . Ce n'est pas un maximum.
- Posons  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f(x) = xe^{-x}$ . Après étude rapide de cette fonction, on obtient  $C = f(\mathbb{R}_*) = ]0, e^{-1}[$ .  
On a donc  $\inf(C) = 0$  (pas de minimum) et  $\max(C) = \sup(C) = e^{-1}$ .
- Pour tout  $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ , on a

$$(x+y)^2 \geqslant 0 \iff x^2 + y^2 + 2xy \geqslant 0 \iff 2xy \geqslant -x^2 - y^2 \iff \frac{2xy}{x^2 + y^2} \geqslant -1.$$

Ceci montre que  $D$  est minoré par  $-1$ . De plus  $-1 \in D$  puisqu'on peut écrire par exemple  $-1 = \frac{2 \times 1 \times (-1)}{1^2 + (-1)^2}$ .  
On a donc  $\min(D) = -1 = \inf(D)$ . De la même façon, pour tout  $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ , on a :

$$(x-y)^2 \geqslant 0 \iff x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0 \iff x^2 + y^2 \geqslant 2xy \iff 1 \geqslant \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Ceci montre que  $D$  est majoré par  $1$ . De plus  $1 \in D$  puisqu'on peut écrire par exemple  $1 = \frac{2 \times 1 \times 1}{1^2 + 1^2}$ .  
On a donc  $\max(D) = 1 = \sup(D)$ .

## Exercice 2 (Exercice d'abstraction)

Montrons d'abord que  $A$  est majoré. Soit  $y \in B$  fixé (existe puisque  $B \neq \emptyset$ ). On sait que  $\forall x \in A$ ,  $x \leqslant y$ .  
Ceci montre que  $A$  est majoré par  $y$ .

Puisque  $A$  est non-vide est majoré, on peut introduire sa borne supérieure  $\sup(A)$ .

Puisque  $\sup(A)$  est le plus petit des majorants de  $A$  et que  $y$  est un majorant de  $A$ , on a  $\sup(A) \leqslant y$ .

Ce raisonnement est valable quel que soit  $y \in B$ . On obtient donc aussi  $\forall y \in B$ ,  $\sup(A) \leqslant y$ .

Ceci montre que  $B$  est minoré par  $\sup(A)$ .

Puisque  $B$  est non-vide est minoré, on peut introduire sa borne inférieure  $\inf(B)$ .

Puisque  $\inf(B)$  est le plus grand des minorants de  $B$  et que  $\sup(A)$  est un minorant de  $B$ , on a  $\sup(A) \leqslant \inf(B)$ .

## Exercice 3 (Disjonctions de cas)

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $|4x+2| = \begin{cases} -(4x+2) & \text{si } x \leqslant -\frac{1}{2} \\ 4x+2 & \text{si } x \geqslant -\frac{1}{2} \end{cases}$  et  $|2-5x| = \begin{cases} 2-5x & \text{si } x \leqslant \frac{2}{5} \\ -(2-5x) & \text{si } x \geqslant \frac{2}{5} \end{cases}$ .

Ainsi :

- Si  $x \leqslant -\frac{1}{2}$ ,  $|4x+2| - |2-5x| = -(4x+2) - (2-5x) = x-4$ ,
- Si  $-\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{2}{5}$ ,  $|4x+2| - |2-5x| = 4x+2 - (2-5x) = 9x$ ,
- Si  $x > \frac{2}{5}$ ,  $|4x+2| - |2-5x| = 4x+2 + 2-5x = -x+4$ .

## Exercice 4 ((In)équations)

(a)  $|x-3| \geqslant 4 \iff (x-3 \leqslant -4) \text{ ou } (x-3 \geqslant 4) \iff x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 7$ .

(b)  $|x^2 - 1| \leqslant 3 \iff -3 \leqslant x^2 - 1 \leqslant 3 \iff -2 \leqslant x^2 \leqslant 4 \iff x^2 \leqslant 4 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2$

(c) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $|2x-4| = \begin{cases} -2x+4 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2x-4 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$  et  $|x+3| = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x \leqslant -3 \\ x+3 & \text{si } x \geqslant -3 \end{cases}$ .

Ainsi :

$$|2x-4| = |x+3| \iff \begin{cases} x \leqslant -3 & \text{et} \\ -3 < x \leqslant 2 & \text{et} \\ x > 2 & \text{et} \end{cases} \quad \begin{cases} -2x+4 = -x-3 \\ -2x+4 = x+3 \\ 2x-4 = x+3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leqslant -3 & \text{et} \\ -3 < x \leqslant 2 & \text{et} \\ x > 2 & \text{et} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 \\ x = \frac{1}{3} \\ x = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \text{ou} \\ x = 7 \end{cases}$$

(d) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $|\frac{1}{x} - 3| \leq 2 \iff -2 \leq \frac{1}{x} - 3 \leq 2 \iff 1 \leq \frac{1}{x} \leq 5 \iff \frac{1}{5} \leq x \leq 1$ .

---

### Exercice 5 (Partie entière)

1. Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- On sait que  $\lfloor x \rfloor \leq x$  et  $\lfloor y \rfloor \leq y$  donc  $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y$ .

Ainsi  $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$  est un entier inférieur ou égal à  $x + y$ .

Puisque  $\lfloor x + y \rfloor$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x + y$ , on en déduit :  $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$ .

- On sait que  $\lfloor x + y \rfloor \leq x + y$  avec  $x < \lfloor x \rfloor + 1$  et  $y < \lfloor y \rfloor + 1$ .

On a donc  $\lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ . Puisqu'il s'agit d'entiers, cela revient à dire  $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

Ainsi on a montré que  $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ .

Puisqu'il s'agit d'entiers, cet encadrement montre que l'on a toujours  $\lfloor x + y \rfloor = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \\ \text{ou bien} \\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1. \end{cases}$

Exemples : Pour  $x = 1$  et  $y = 1$ , on a  $\lfloor x + y \rfloor = 2 = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ .

Pour  $x = 1.5$  et  $y = 2.5$ , on a  $\lfloor x + y \rfloor = 4 = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

Par définition,  $\lfloor x + n \rfloor$  est l'unique entier  $N \in \mathbb{Z}$  satisfaisant l'encadrement  $N \leq x + n < N + 1$ .

Or on a  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$  donc  $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < (\lfloor x \rfloor + n) + 1$ .

Ainsi, l'entier  $N = \lfloor x \rfloor + n \in \mathbb{Z}$  satisfait l'encadrement précédent, c'est donc que  $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ .

3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\lfloor kx \rfloor = n \iff n \leq kx < n + 1 \iff \frac{n}{k} \leq x < \frac{n+1}{k}.$$

---

### Exercice 6 (Fonctions "quasi-usuelles")

Dessins faciles.

On pourra retenir que la transformation  $x \mapsto f(x) + a$  correspond à translater le graphe de  $f$  "de  $a$  vers le haut" et que la transformation  $x \mapsto f(x + a)$  correspond à translater le graphe de  $f$  "de  $a$  vers la gauche".

---

### Exercice 7 (Étude "sans dériver")

(a) • Domaine de définition :  $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} = ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

• Pas de parité, pas de périodicité.

• Tableau de variations :

$x$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$0$	$-\infty$	$0$

• Fonction non bornée.

(b) • Domaine de définition :  $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

•  $g$  est  $\frac{\pi}{2}$  périodique ( $\forall x \in D_g, g(x + \frac{\pi}{2}) = \tan(2(x + \frac{\pi}{2})) = \tan(2x + \pi) = \tan(2x) = g(x)$ ).

• Tableau de variations sur  $] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$  :

$x$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

• Fonction non bornée.

- (c) • Domaine de définition :  $D_h = \mathbb{R}$ .  
•  $h$  est clairement paire.  
• Tableau de variations :  $h$  est clairement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , le reste est rempli "par symétrie".

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

- Fonction bornée. Minimum atteint en 0 :  $\min(h) = -\frac{\pi}{4}$ . Pas de maximum, mais  $\sup(h) = \frac{\pi}{2}$ .

- (d) • Domaine de définition :  $D_u = \mathbb{R}_+^*$ .

- Pas de parité, pas de périodicité.

- Tableau de variations : les fonctions  $x \mapsto x^{-1/4}$  et  $x \mapsto -4x^{1/4}$  sont strictement décroissantes sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Il en va donc de même pour leur somme.

$x$	0	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	0

- Fonction non majorée. Pas de minimum, mais  $\inf(u) = 0$ .

- (e) La fonction  $\ln$  étant strictement croissante, le sens de variation de  $v$  est le même que le sens de variation de  $f : x \mapsto -x^2 + 4x - 3$ . Etudions rapidement cette fonction polynomiale.

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0. \text{ On a donc deux racines : } x_1 = \frac{-4 - 2}{-2} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-4 + 2}{-2} = 1.$$

Le "sommet" de la parabole est au milieu des racines : point d'abscisse  $x = \frac{3 + 1}{2} = 2$ .

$f$  admet ainsi le tableau de variations suivant sur  $\mathbb{R}$  :

$x$	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	1	0	$-\infty$

Par suite, on a le domaine de définition de la fonction  $v$  :  $D_v = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} = ]1, 3[$ .  
Et pour finir, le tableau de variations de  $v : x \mapsto \ln(f(x))$  sur  $]1, 3[$  :

$x$	1	2	3
$v(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

### Exercice 8 ((In)équations)

(a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $2 \leq [2x + 1] \leq 4 \iff 2 \leq 2x + 1 < 5 \iff 1 \leq 2x < 4 \iff \frac{1}{2} \leq x < 2$ .

(b) L'équation n'a de sens que pour  $x > 0$ . Pour tout  $x > 0$ ,

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \iff \exp(\sqrt{x} \ln(x)) = \exp(x \ln(\sqrt{x})) \iff \sqrt{x} \ln(x) = x \ln(\sqrt{x}) \iff \sqrt{x} \ln(x) = \frac{1}{2}x \ln(x).$$

On voit que  $x = 1$  est une solution de l'équation.

En supposant à présent  $x \neq 1$ , on a  $\ln(x) \neq 0$  et on peut poursuivre les équivalences :

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \iff \sqrt{x} = \frac{x}{2} \iff 1 = \frac{\sqrt{x}}{2} \iff \sqrt{x} = 2 \iff x = 4.$$

Les deux solutions sont donc  $x = 1$  ou  $x = 4$ .

(c) Pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , on sait que  $\tan(x) > 1 \iff x \in ]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ .

Par  $\pi$ -périodicité de  $\tan$ , l'ensemble de toutes les solutions est :  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ .

(d) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , puisque 1,  $\arctan(x)$  et  $\frac{\pi}{3}$  appartiennent à l'intervalle  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  où la fonction  $\tan$  est strictement croissante, on a :

$$1 < \arctan(x) < \frac{\pi}{3} \iff \tan(1) < x < \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff \tan(1) < x < \sqrt{3}.$$

Attention,  $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ , mais  $\tan(1)$  n'est pas une valeur connue ! On a  $\tan(1) \simeq 1,557\dots$

### Exercice 9 ("Exposant variable")

1. Il faut penser à écrire :  $\forall x \in I, f(x) = e^{v(x) \ln(u(x))}$ .

Ceci a bien un sens puisque par hypothèse :  $\forall x \in I, u(x) > 0$ .

En admettant que tout est dérivable, on obtient :

$$\forall x \in I, f'(x) = \left( v'(x) \ln(u(x)) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right) e^{v(x) \ln(u(x))}.$$

2. Posons  $f(x) = (1+x)^x = e^{x \ln(1+x)}$ .

Ceci est bien défini lorsque  $1+x > 0$ , c'est à dire sur le domaine  $D_f = ]-1, +\infty[$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$  et

$$\forall x > -1, f'(x) = \left( \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \right) e^{x \ln(1+x)}.$$

Le signe de cette expression est le même que celui de  $\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$ .

- Pour  $-1 < x < 0$ , on a  $\ln(1+x) < 0$  et  $\frac{x}{1+x} < 0$  donc  $f'(x) < 0$ .

- Pour  $x > 0$ , on a  $\ln(1+x) > 0$  et  $\frac{x}{1+x} > 0$  donc  $f'(x) > 0$ .

On a donc, pour finir, le tableau de variations suivant :

$x$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

### Exercice 10 (La plus petite période)

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on sait que  $\lfloor x+4 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 4$ , donc :

$$f(x+4) = (x+4 - \lfloor x \rfloor - 4) \sin\left(\frac{\pi(x+4)}{2}\right) = (x - \lfloor x \rfloor) \sin\left(\frac{\pi x}{2} + 2\pi\right) = (x - \lfloor x \rfloor) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = f(x).$$

Ceci montre que  $f$  est 4-périodique.

2. (a) Soit  $p > 0$ . Supposons que  $f$  est  $p$ -périodique. En particulier, on a :

$$f(p) = f(0) \iff (p - \lfloor p \rfloor) \times \sin\left(\frac{\pi p}{2}\right) = 0 \iff p = \lfloor p \rfloor \text{ ou } \sin\left(p \times \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

L'égalité  $p = \lfloor p \rfloor$  équivaut à dire que  $p$  est un entier. L'égalité  $\sin\left(p \times \frac{\pi}{2}\right) = 0$  équivaut à dire que  $p$  est un entier (et même un entier pair). Dans tous les cas, on peut conclure que  $p \in \mathbb{N}$ .

(b) On a déjà vérifié que 4 est une période de  $f$ . Vérifions que c'est la plus petite des périodes possibles. Supposons que l'on ait  $p > 0$  une période de  $f$  avec  $p < 4$ . D'après 2.(a),  $p$  est un entier, donc  $p \in \{1, 2, 3\}$ . Or, on peut vérifier que  $f$  n'est ni 2-périodique, ni 3-périodique.

Par exemple,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 0\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$  mais :

- $f\left(\frac{1}{2} + 2\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \neq f\left(\frac{1}{2}\right)$
- $f\left(\frac{1}{2} + 3\right) = f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \neq f\left(\frac{1}{2}\right)$

Enfin,  $f$  ne peut pas être 1-périodique, car elle serait alors automatiquement 2-périodique...

Ceci montre que la plus petite période de  $f$  est 4.

### Exercice 11 (Antécédents par cos, sin, tan)

- $\cos^{-1}(\{0\}) = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $\cos^{-1}(\{1\}) = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $\cos^{-1}(\{-1\}) = \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $\sin^{-1}(\{0\}) = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $\sin^{-1}(\{1\}) = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $\sin^{-1}(\{-1\}) = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $\tan^{-1}(\{0\}) = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $\tan^{-1}(\{1\}) = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $\tan^{-1}(\{-1\}) = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

### Exercice 12 ((In)équations)

$$(a) \text{ Pour } x \in [0, 2\pi], \quad \cos(x) \leq \frac{1}{2} \iff x \in \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right].$$

Ainsi, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos(x) \leq \frac{1}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x \in \left[ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right] \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right]$ .

$$(b) \text{ Pour } y \in [-\pi, \pi], \quad \sin(y) \geq -\frac{1}{2} \iff y \in \left[ -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right].$$

Ainsi, pour  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\sin(y) \geq -\frac{1}{2} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y \in \left[ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right] \iff y \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right]$ .

Pour finir, pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \sin(2x) \geq -\frac{1}{2} &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2x \in \left[ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x \in \left[ -\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi \right] \\ &\iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ -\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi \right]. \end{aligned}$$

### Exercice 13 (Des formules de trigono)

Toutes ces formules se retrouvent facilement à partir des formules connues pour l'addition :

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \text{et} \quad \sin(x + y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y).$$

- Deux premiers points : choisir  $x = a$  et  $y = -b$ . Utiliser la parité de cos et l'imparité de sin.
- $\cos(2a) = \cos(a + a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2$ . Or on a  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ . Ainsi,  $\cos(2a) = \cos(a)^2 - (1 - \cos(a)^2)$  soit  $\cos(2a) = \cos(a)^2 - 1$ . On en déduit bien  $\cos(a)^2 = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$ .
- Pour  $\sin(a)^2$  : de même que pour le point précédent.
- Deux derniers points : partir du membre de droite, calculer  $\cos(a + b)$  et  $\cos(a - b)$  puis simplifier.

### Exercice 14 ( $\cos \circ \arctan$ )

$$\text{Soit } t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[. \text{ On a } \tan(t)^2 = \frac{\sin(t)^2}{\cos(t)^2} = \frac{1 - \cos(t)^2}{\cos(t)^2} = \frac{1}{\cos(t)^2} - 1.$$

$$\text{On en déduit que } \frac{1}{\cos(t)^2} = 1 + \tan(t)^2 \text{ et donc } \cos(t)^2 = \frac{1}{1 + \tan(t)^2}.$$

En se rappelant que  $\cos(t) > 0$  pour  $t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , on peut même écrire  $\cos(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan(t)^2}}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , en choisissant  $t = \arctan(x) \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , on obtient :

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan(\arctan(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

### Exercice 15 (Décomposition paire + impaire)

Soit  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  fixée. Montrons qu'il existe un unique couple  $(g, h)$  de fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\boxed{1} g \text{ est paire} \quad \boxed{2} h \text{ est impaire} \quad \boxed{3} f = g + h.$$

Analyse : Supposons que l'on dispose d'un tel couple  $(g, h)$ .

Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x) = g(x) + h(x)$

mais également  $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$  par parité/imparité. Ainsi :

En sommant ces deux équations, on obtient  $2g(x) = f(x) + f(-x)$  soit  $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ .

En prenant soustrayant la seconde ligne à la première, on obtient  $2h(x) = f(x) - f(-x)$  soit  $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ .

Ainsi, si des fonctions  $g$  et  $h$  satisfont  $\boxed{1}$ ,  $\boxed{2}$  et  $\boxed{3}$ , ce sont nécessairement les fonctions :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}$$

Synthèse : Inversement, les fonctions  $g$  et  $h$  que l'on vient d'identifier satisfont bien  $\boxed{1}$ ,  $\boxed{2}$  et  $\boxed{3}$  :

$\boxed{1}$   $g$  paire  $\left( \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x) \right)$

$\boxed{2}$   $h$  impaire  $\left( \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x) \right)$

$\boxed{3}$   $f = g + h$   $\left( \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x) \right)$

On a bien montré le résultat attendu.

### Exercice 16 (Périodique et monotone)

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$  fixé. Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, f(x + np) = f(x)$ .

Initialisation :  $f(x + 0 \times p) = f(x)$  évidemment.

Hérité : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $f(x + np) = f(x)$  et montrons que  $f(x + (n+1)p) = f(x)$ .

Comme  $f$  est  $p$ -périodique, on a  $\forall y \in \mathbb{R}, f(y + p) = f(y)$ , donc ici :

$$f(x + (n+1)p) = f((x + np) + p) = f(x + np) = f(x).$$

2. Puisque  $x$  et  $y$  sont des réels fixés, il est évident que  $x + np \geq y$  si l'on choisit un entier  $n \in \mathbb{N}$  assez grand...

• Première justification :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x + np) = +\infty$ , donc on aura  $x + np \geq y$  à partir d'un certain rang.

• Deuxième justification :  $x + np \geq y \iff n \geq \frac{y - x}{p}$ . Il suffit de choisir par exemple  $n = \left\lfloor \frac{y - x}{p} \right\rfloor + 1$ .

3. Soit  $f$  une fonction périodique (disons de période  $p > 0$ ) et monotone.

Supposons par exemple que  $f$  est croissante (l'autre cas est similaire).

On souhaite montrer que  $f$  est constante.

Soient donc  $x, y \in \mathbb{R}$  fixés : démontrons que  $f(x) = f(y)$ .

• Supposons que  $x \leq y$ . Alors comme  $f$  est croissante, on a  $f(x) \leq f(y)$ .

De plus, on sait qu'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x + np \geq y$ .

Par croissance de  $f$ , on a alors  $f(x + np) \geq f(y)$ , c'est à dire  $f(x) \geq f(y)$  par périodicité.

Ceci montre que  $f(x) = f(y)$ .

• Si on est dans l'autre cas  $y \leq x$ , même raisonnement en inversant le rôle de  $x$  et de  $y$ ...

On obtient de même  $f(x) = f(y)$ .

Ainsi quels que soient  $x, y \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x) = f(y)$  :  $f$  est une fonction constante !