

# Polynômes

## 1 Ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$

### 1.1 Notion de polynôme

Rappel : Étant données deux fonctions  $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on peut naturellement définir les fonctions  $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ ,  $f \times g : x \mapsto f(x) \times g(x)$ ,  $f^k : x \mapsto (f(x))^k$  (pour  $k \in \mathbb{N}$ ).

#### 📖 Définition 1 (Monômes)

- On note  $X$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $X : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{matrix}$
- Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a ainsi  $X^k : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{matrix}$  (au sens de la multiplication de fonctions).
- Par convention,  $X^0$  est la fonction constante égale à 1, c'est à dire  $X^0 : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{matrix}$

#### 📖 Définition 2 (Polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ )

Un polynôme (ou fonction polynômiale) est une **combinaison linéaire de monômes**, c'est à dire une fonction de la forme  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_0 X^0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ , avec  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ .

Autrement dit,  $P : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^n a_k x^k \end{matrix} = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

Les réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont alors appelés **les coefficients du polynôme  $P$** .

L'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  est noté  $\mathbb{R}[X]$ .

#### 👉 Exemples

- La fonction définie par  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$  est un polynôme. Avec les notations introduites, on la note :  $P = 3X^3 - 2X^2 + X + 2X^0$ . Plus simplement encore, on écrira :  $P = 3X^3 - 2X^2 + X + 2$  en comprenant bien que ce "2" désigne la fonction constante égale à 2. On peut ainsi écrire  $3X^3 - 2X^2 + X + 2 \in \mathbb{R}[X]$ .
- De même,  $X^2 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ ,  $X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ ,  $3 \in \mathbb{R}[X]$  (polynôme constant égal à 3!)

#### 💬 Remarque 1

- Un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  étant en fait une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , on peut naturellement évaluer sa valeur  $P(a)$  en n'importe quel  $a \in \mathbb{R}$ .

Dans les calculs, tout se passe alors comme si on "remplaçait"  $X$  par  $a$ .

Exemple : Pour  $P = 2X^3 + X^2 - 1 \in \mathbb{R}[X]$  on a  $P(0) = -1$ ,  $P(1) = 2$ ,  $P(-1) = -2$ .

- Pour cette raison, il arrive que l'on utilise la notation  $P(X)$  pour désigner le polynôme  $P$ .

Exemple : On peut écrire  $P = X^2 - 1 \in \mathbb{R}[X]$  ou bien  $P(X) = X^2 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ .

## 1.2 Opérations sur les polynômes

Les polynômes étant des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , étant donnés  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ , on peut bien-sûr définir :

- $P + Q : x \mapsto P(x) + Q(x)$
- $PQ : x \mapsto P(x)Q(x)$
- $P \circ Q : x \mapsto P(Q(x))$
- $\lambda P : x \mapsto \lambda P(x)$  (pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

### 🚩 Proposition 1 (Stabilité de $\mathbb{R}[X]$ )

L'ensemble  $\mathbb{R}[X]$  est stable par somme, produit, composition, multiplication par un réel.

Autrement dit, pour  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$   $P + Q \in \mathbb{R}[X]$ ,  $PQ \in \mathbb{R}[X]$ ,  $P \circ Q \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\lambda P \in \mathbb{R}[X]$ .

### 👉 Exemples

Posons  $P = X^2 + 1$  et  $Q = 2X - 1$ .

- $\forall x \in \mathbb{R}, (P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = x^2 + 1 + 2x - 1 = x^2 + 2x$ .

Ainsi  $P + Q = X^2 + 2X \in \mathbb{R}[X]$ .

- $\forall x \in \mathbb{R}, (PQ)(x) = P(x)Q(x) = (x^2 + 1)(2x - 1) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ .

Ainsi  $PQ = 2X^3 - X^2 + 2X - 1 \in \mathbb{R}[X]$ .

Pour effectuer ces calculs, le plus simple est en fait de travailler directement sur les polynômes, en traitant  $X$  "comme une variable" !

- $P + Q = X^2 + 1 + 2X - 1 = X^2 + 2X$
- $PQ = (X^2 + 1)(2X - 1) = 2X^3 - X^2 + 2X - 1$ .

### ✎ Exercice 1

On pose  $P = X^2 + 2X - 3$  et  $Q = X^2 + 3X + 1$ . Calculer  $P + Q$ ,  $PQ$ ,  $3P$ ,  $P \circ Q$  et  $Q \circ P$ .

- $P + Q = X^2 + 2X - 3 + X^2 + 3X + 1 = 2X^2 + 5X - 2$ .
- $PQ = (X^2 + 2X - 3)(X^2 + 3X + 1) = X^4 + 5X^3 + 4X^2 - 7X - 3$
- $3P = 3(X^2 + 2X - 3) = 3X^2 + 6X - 9$ .
- $P \circ Q = P(Q) = Q^2 + 2Q - 3 = (X^2 + 3X + 1)^2 + 2(X^2 + 3X + 1) - 3 = X^4 + 6X^3 + 13X^2 + 12X$

Remarque : Si  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ , on a  $P + Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k + \sum_{k=0}^n b_k X^k = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) X^k$ .

### 🚩 Proposition 2 (Coefficients d'un produit)

Si  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^p b_k X^k$ , alors  $PQ = \sum_{k=0}^{n+p} c_k X^k$  avec  $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$   
(avec la convention  $a_i = 0$  si  $i > n$ ,  $b_j = 0$  si  $j > p$ )

### 👉 Exemple

Cette formule est utile pour développer rapidement et efficacement un produit de polynômes.

$$(a_0 + a_1 X + a_2 X^2)(b_0 + b_1 X + b_2 X^2) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)X + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)X^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)X^3 + a_2 b_2 X^4$$

### 1.3 Identification des coefficients

Il est bien entendu naturel de décréter que deux polynômes sont les mêmes lorsqu'ils sont égaux en tant que fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

#### Définition 3 (Égalité dans $\mathbb{R}[X]$ )

Soient  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ . On dit que  $P$  et  $Q$  sont égaux, et on note  $P = Q$  lorsque :  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = Q(x)$ .

En fait, on peut également dire que deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients !  
Commençons par un résultat intermédiaire.

#### Proposition 3 (Polynôme nul)

La fonction constante égale à 0 est appelée **polynôme nul** et noté simplement  **$0 \in \mathbb{R}[X]$** .

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ . On a l'équivalence :  $P = 0 \iff \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = 0$ .

**Preuve :**

L'implication réciproque  $\Leftarrow$  est évidente : démontrons l'implication directe.

Supposons  $P = 0$ , c'est à dire  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0$ . Ceci se ré-écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, P(x) = x^n \left( \frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n \right) = 0$$

Si jamais  $a_n \neq 0$ , on a ainsi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \times a_n = \pm\infty$  (selon le signe de  $a_n$ ). Contradiction !

C'est donc que  $a_n = 0$ . Mais alors on peut écrire :  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} = 0$  et reprendre le même raisonnement avec  $a_{n-1}$ .

On conclut ainsi que  $a_n = 0$ , puis  $a_{n-1} = 0$ , puis  $\dots$  puis  $a_1 = 0$ .

Finalement, il reste :  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 = 0$ , donc  $a_0 = 0$ .

On a bien montré que  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = 0$ . □

#### Théorème 1 (Identification des coefficients)

Soient  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$  avec  $a_n \neq 0$  et  $Q = \sum_{k=0}^p b_k X^k \in \mathbb{R}[X]$  avec  $b_p \neq 0$ .

On a l'équivalence :  $P = Q \iff \left( n = p \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = b_k \right)$

En particulier, les coefficients d'un polynôme  $P$  sont uniques.

**Preuve :**

L'implication réciproque  $\Leftarrow$  est évidente : démontrons l'implication directe.

Supposons  $P = Q$ , c'est à dire  $P - Q = 0$ .

D'après la Proposition 1, tous les coefficients de  $P - Q$  doivent donc être nuls.

• Supposons  $n \neq p$ , disons  $n > p$  (l'autre cas est similaire).

$$\text{Alors on peut écrire } P - Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k - \sum_{k=0}^p b_k X^k = \sum_{k=0}^p (a_k - b_k) X^k + \sum_{k=p+1}^n a_k X^k.$$

Absurde car le coefficient devant  $X^n$  est  $a_n \neq 0$  !

• Ainsi  $n = p$  et on peut écrire  $P - Q = \sum_{k=0}^n (a_k - b_k) X^k = 0$ .

Tous les coefficients étant nuls, on conclut :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = b_k$ . □

## Exercice 2

Montrer qu'il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que :  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ .

Pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ ,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} \iff \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a(x+1) + bx}{x(x+1)} \iff \frac{1}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)} \iff 1 = (a+b)x + a$$

On cherche donc  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, (a+b)x + a = 1$ .

Il est suffisant de choisir  $a$  et  $b$  tels que  $(a+b)X + a = 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

En identifiant les coefficients :  $a+b=0$  et  $a=1$ , donc  $a=1$  et  $b=0$  conviennent.

(En fait c'est la seule solution : on verra que deux polynômes qui coïncident sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$  doivent être les mêmes.)

### Proposition 4 (Produit nul dans $\mathbb{R}[X]$ )

Pour tous  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ , on a :  $PQ = 0 \iff (P = 0 \text{ ou } Q = 0)$ .

Autrement dit, dans  $\mathbb{R}[X]$  : "un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul".

#### Preuve :

L'implication  $(P = 0 \text{ ou } Q = 0) \Rightarrow PQ = 0$  est évidente.

Au lieu de montrer l'implication réciproque  $PQ = 0 \Rightarrow (P = 0 \text{ ou } Q = 0)$ , on va montrer sa contraposée :  $(P \neq 0 \text{ et } Q \neq 0) \Rightarrow PQ \neq 0$ .

Si  $P \neq 0$  et  $Q \neq 0$ , on peut toujours écrire  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  avec  $a_n \neq 0$  et  $Q = \sum_{k=0}^p b_k X^k$  avec  $b_p \neq 0$ .

On constate alors que le coefficient devant  $X^{n+p}$  dans  $PQ$  est  $a_n b_p \neq 0$ . Ainsi  $PQ \neq 0$  (car sinon tous ses coefficients seraient nuls).

□

### Corollaire 1 ("Simplification" dans $\mathbb{R}[X]$ )

Soit  $P, Q, A \in \mathbb{R}[X]$ . Si  $AP = AQ$  et si  $A \neq 0$ , alors  $P = Q$ .

#### Preuve :

On écrit que  $AP - AQ = 0$ , c'est à dire  $A(P - Q) = 0$ . L'un des facteurs doit être nul !

Comme  $A \neq 0$ , on en déduit que  $P - Q = 0$ , c'est à dire  $P = Q$ .

□

## Attention !

Cette "simplification" ne revient pas à "diviser par  $A$ " comme on le ferait pour des réels !

Un raisonnement du type :  $AP = AQ \Rightarrow \frac{AP}{A} = \frac{AQ}{A} \Rightarrow P = Q$  est à proscrire !

L'ensemble  $\mathbb{R}[X]$  est stable par multiplication, mais pas par division : on ne peut pas diviser un polynôme par un autre dans  $\mathbb{R}[X]$ .

## 1.4 Notion de degré

### ■ Définition 4 (Degré d'un polynôme)

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$  un polynôme, avec  $a_n \neq 0$ .

L'entier  $n \in \mathbb{N}$  est appelé **degré de  $P$**  et est noté  **$\deg(P)$** .

Le coefficient  $a_n$  est appelé **coefficient dominant de  $P$** .

(Lorsque celui-ci est égal à 1, on dit que le polynôme est **unitaire**.)

Par convention, le degré du polynôme nul est  $\deg(0) = -\infty$ .

### 👉 Exemples

- Les polynômes de degré 0 sont les polynômes constants non nuls :  $P = a_0 X^0$  avec  $a_0 \neq 0$  (que l'on peut simplement noter  $P = a_0$ ).
- Les polynômes de degré 1 sont les fonctions affines  $P = a_1 X + a_0$  avec  $a_1 \neq 0$ .
- Les polynômes de degré 2 sont de la forme  $P = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$  avec  $a_2 \neq 0$ .
- Si  $P = 3X^4 - X^2 + 2X - 1$  on a  $\deg(P) = 4$ .

### ■ Définition 5 (Ensemble des polynômes de degré au plus $n$ )

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$ .

### ⚠ Attention !

$\mathbb{R}_n[X]$  n'est pas l'ensemble des polynômes de degré égal à  $n$  !

### 👉 Exemple

$\mathbb{R}_2[X]$  est composé des polynômes de degré 2, 1, 0, et du polynôme nul (degré  $-\infty$ ).

On a ainsi :  $3X^2 - 2 \in \mathbb{R}_2[X]$ ,  $X + 1 \in \mathbb{R}_2[X]$ ,  $2 \in \mathbb{R}_2[X]$ .

### 🚩 Proposition 5 (Opérations et degré)

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes.

- $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
- Si  $Q \neq 0$  et  $P \circ Q \neq 0$ ,  $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$
- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ .

Il y a inégalité stricte lorsque  $\deg(P) = \deg(Q)$  avec des coefficients dominants opposés.

En particulier, si  $\deg(P) < \deg(Q)$ , on a  $\deg(P + Q) = \deg(Q)$ .

### 👉 Exemples

- Si  $P = X^2 - 1$  et  $Q = 2X + 2$ , on a  $PQ = (X^2 - 1)(2X + 2) = 2X^3 + 2X^2 - 2X - 2$ .

Ainsi  $\deg(PQ) = 3 = 2 + 1 = \deg(P) + \deg(Q)$ .

- Si  $P = X^2 - 1$  et  $Q = 2X + 2$ , on a  $P + Q = X^2 + 2X + 1$ .

Ainsi  $\deg(P + Q) = 2 = \max(2, 1) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ .

- En revanche, si  $P = X^2 + 1$  et  $Q = -X^2 + 2X + 3$ , on a  $P + Q = 2X + 4$

Ainsi  $\deg(P + Q) < 2 = \max(\deg(P), \deg(Q))$  !

### ➡ Corollaire 2 (Stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ )

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par addition et multiplication par un réel.

Autrement dit, pour  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $P + Q \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $\lambda P \in \mathbb{R}_n[X]$ .

**Preuve :**

Soient  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a donc  $\deg(P) \leq n$  et  $\deg(Q) \leq n$ .

- On a vu que  $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ , donc  $\deg(P+Q) \leq n$ , c'est à dire  $(P+Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ .
- Si  $\lambda \neq 0$ , on a vu que  $\deg(\lambda P) = \deg(\lambda) + \deg(P) = \deg(P) \leq n$ .
- Si  $\lambda = 0$ ,  $\deg(\lambda P) = \deg(0) = -\infty \leq n$ . Dans les deux cas, on a  $\deg(\lambda P) \leq n$ , i.e  $\lambda P \in \mathbb{R}_n[X]$ .

□

## 2 Divisibilité

### 2.1 Division euclidienne

#### 👑 Théorème 2 (Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ )

Soient  $A \in \mathbb{R}[X]$ ,  $B \in \mathbb{R}[X]$  avec  $B \neq 0$ .

Il existe un unique couple  $(Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^2$  satisfaisant : 
$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

On dit alors que :

- $Q$  est le **quotient de la division euclidienne de  $A$  par  $B$** .
- $R$  est le **reste de cette division**.

#### ⚠ Attention !

Si  $A = BQ + R$ , cela ne suffit pas pour dire que  $Q$  est le quotient et  $R$  le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ . Il faut aussi faire attention au degré de  $R$  !

(On peut toujours écrire  $A = BQ + R$  en prenant  $Q = 0$  et  $R = A...$ )

#### 💬 Remarques 2

Le degré de  $Q$  peut être déterminé par d'avance :

- Si  $\deg(B) > \deg(A)$ , alors  $Q = 0$  (et donc  $R = A$ ).

Exemple : Division euclidienne de  $X + 1$  par  $X^2$  :  $X + 1 = 0 \times X^2 + (X + 1)$ .

- Si  $\deg(B) \leq \deg(A)$ , alors  $\deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$ .

Exemple : Division euclidienne de  $2X^2 + 1$  par  $X^2 + X + 2$  :  $2X^2 + 1 = 2 \times (X^2 + X + 2) + (-2X - 2)$

#### ⚡ Méthode : Effectuer la division euclidienne de deux polynômes "explicites"

On peut "poser" une division euclidienne de polynômes comme on "pose" une division pour des entiers.

On construit le quotient petit à petit (en commençant par les monômes de plus haut degré) et l'on réduit au fur et à mesure le dividende, jusqu'à obtenir le reste.

### Exercice 3

1. Effectuer la division euclidienne de  $A = X^2$  par  $B = (X - 1)$  :
2. Effectuer la division euclidienne de  $A = X^3 + 5X^2 - X + 1$  par  $B = X^2 - 3X + 2$  :

1.

$$\begin{array}{r|l} X^2 & X-1 \\ -X(X-1) & X+1 \\ \hline X & \\ -1(X-1) & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Conclusion :  $X^2 = (X - 1)(X + 1) + 1$

2.

$$\begin{array}{r|l} X^3 + 5X^2 - X + 1 & X^2 - 3X + 2 \\ -X(X^2 - 3X + 2) & X + 8 \\ \hline 8X^2 - 3X + 1 & \\ -8(X^2 - 3X + 2) & \\ \hline 21X - 15 & \end{array}$$

Conclusion :  $X^3 + 5X^2 - X + 1 = (X^2 - 3X + 2)(X + 8) + 21X - 15$

## 2.2 Diviseurs et multiples

### Définition 6 (Diviseur / Multiple)

Soient  $A \in \mathbb{R}[X]$ ,  $B \in \mathbb{R}[X]$  avec  $B \neq 0$ .

On dit que  $B$  divise  $A$ , et on note  $B \mid A$  lorsqu'il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $A = BQ$ .  
(autrement dit, lorsque le reste dans la division euclidienne de  $A$  par  $B$  est nul)

On alors dit que  $B$  est un diviseur de  $A$  ou encore que  $A$  est un multiple de  $B$ .

### Exemple

$X - 1$  est un diviseur de  $X^2 - 1$  car  $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ .

### Remarques 3

- Le polynôme nul est divisible par n'importe quel polynôme  $B$  :  $0 = B \times 0$ .
- Un polynôme  $A$  est toujours divisible par n'importe quel polynôme constant  $\lambda \neq 0$  :  $A = \lambda \times (\frac{1}{\lambda}A)$ .
- Un polynôme  $A \neq 0$  est toujours divisible par lui même :  $A = A \times 1$ .

### Proposition 6 (Diviseurs et degré)

Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes non nuls.

- Si  $B \mid A$ , alors  $\deg(B) \leq \deg(A)$
- Si  $B \mid A$  et si  $\deg(B) = \deg(A)$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tel que  $A = \lambda B$ .
- En particulier, si  $B \mid A$  et  $A \mid B$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tel que  $A = \lambda B$ .

### Preuve de la Proposition 6 :

Supposons que  $B|A$  : on peut écrire  $A = BQ$  avec  $Q \in \mathbb{R}[X]$  et  $Q \neq 0$  (car  $A \neq 0$ ).

- $\deg(A) = \deg(B) + \deg(Q) \geq \deg(B)$ .
- Si  $\deg(A) = \deg(B)$ , c'est donc que  $\deg(Q) = 0$  :  $Q = \lambda$  pour un  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .
- Si  $B|A$  et  $A|B$ , d'après le premier point on a  $\deg(B) \leq \deg(A)$  et  $\deg(A) = \deg(B)$ .  
Donc d'après le deuxième point, on conclut que  $Q = \lambda$  pour un  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

□

### 🚩 Proposition 7 (Relation de divisibilité)

- Soient  $A, B, C \in \mathbb{R}[X]$  avec  $B \neq 0, C \neq 0$ .  
Si  $C|B$  et si  $B|A$ , alors  $C|A$ . (Transitivité)
- Soient  $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}[X]$  et  $B \in \mathbb{R}[X]$  avec  $B \neq 0$ .  
Si  $B$  divise  $A_1, A_2, \dots$  et  $A_n$  alors  $B$  divise tout polynôme de la forme  $P = A_1C_1 + \dots + A_nC_n$   
(avec  $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}[X]$ ).

### Preuve rapide :

- Si  $B = CQ_1$  et  $A = BQ_2$ , on peut écrire  $A = C(Q_1Q_2)$ .
- Si  $A_1 = BQ_1, \dots, A_n = BQ_n$ , on peut écrire  $A_1C_1 + \dots + A_nC_n = B(Q_1C_1 + \dots + Q_nC_n)$ .

□

## 3 Dérivation et formule de Taylor

Rappel : Pour  $f$  et  $g$  des fonctions dérivables (sur  $\mathbb{R}$ ) et  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a :

$$(af + bg)' = (af)' + (bg)' = af' + bg'. \quad (\text{linéarité de la dérivation})$$

Ainsi si  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$  alors par linéarité de la dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}.$$

### 📖 Définition 7 (Polynôme dérivé, dérivées successives)

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ .

- Le polynôme dérivé de  $P$  est :  $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} \in \mathbb{R}[X]$ .
- Soit  $i \in \mathbb{N}$ . En répétant  $i$  fois cette dérivation on obtient la dérivée  $i$ -ième de  $P$ , notée  $P^{(i)}$ .  
Ainsi :  $P^{(0)} = P$  (par convention) et  $\forall i \in \mathbb{N}, P^{(i+1)} = (P^{(i)})'$ .

### 💬 Remarques 4

- Si  $P = 0$ , alors  $\forall i \in \mathbb{N}, P^{(i)} = 0$ .
- La définition de  $P'$  coïncide bien-sûr avec la notion classique de dérivée d'une fonction.  
On a ainsi les règles de calcul habituelles :  $(P + Q)' = P' + Q', (PQ)' = P'Q + PQ'$  etc...
- En particulier, notons que pour  $a, b \in \mathbb{R}, (aP + bQ)' = aP' + bQ'$ .  
En dérivant de nouveau :  $(aP + bQ)'' = (aP' + bQ')' = aP'' + bQ''$ . Par récurrence immédiate :

$$\forall i \in \mathbb{N}, (aP + bQ)^{(i)} = aP^{(i)} + bQ^{(i)} \quad (\text{linéarité de la dérivation (successive)})$$



#### Exercice 4

Calculer les dérivées successives de  $P = 3X^3 - X^2 + 2X + 7$ .

- $P^{(0)} = P = 3X^3 - X^2 + 2X + 7$
- $P^{(1)} = P' = 9X^2 - 2X + 2$
- $P^{(2)} = P'' = 18X - 2$
- $P^{(3)} = 18$
- $P^{(4)} = 0$  et donc  $\forall i \geq 4, P^{(i)} = 0$ .

#### Proposition 8 (Dérivation et degré)

Soit  $P$  un polynôme non constant. Alors  $\deg(P') = \deg(P) - 1$ .

Plus généralement :

- Pour tout  $0 \leq i \leq \deg(P)$   $\deg(P^{(i)}) = \deg(P) - i$
- Pour tout  $i > \deg(P)$ ,  $P^{(i)} = 0$ .

#### Preuve rapide :

Notons  $n = \deg(P) \geq 1$  : on peut donc écrire  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  avec  $a_n \neq 0$ .

On a alors  $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$ . Le coefficient dominant de  $P'$  est  $n a_n \neq 0$  (coeff. devant  $X^{n-1}$ ).

On voit donc que  $P'$  est de degré  $n - 1$ . On a bien montré  $\deg(P') = \deg(P) - 1$ .

Les points suivants s'obtiennent par récurrence immédiate, puisque chaque dérivation abaisse de 1 le degré du polynôme ! Au bout de  $n$  dérivations, on a  $\deg(P^{(n)}) = 0$ , c'est à dire que  $P^{(n)}$  est un polynôme constant. Il en résulte que  $P^{(n+1)} = 0$ , et toutes les dérivées suivantes sont également nulles.  $\square$

#### Proposition 9 (Coefficients de $P^{(i)}$ )

• **Dérivées d'un monôme :** Pour  $k \in \mathbb{N}$ , les dérivées successives de  $X^k$  sont données par :

- Pour tout  $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$ ,  $(X^k)^{(i)} = k(k-1) \dots (k-i+1) X^{k-i} = \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i}$ .
- Pour tout  $i > k$ ,  $(X^k)^{(i)} = 0$ .

• **Dérivées d'un polynôme :** Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ . Les dérivées successives de  $P$  sont données par :

- Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P^{(i)} = \sum_{k=i}^n a_k \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i}$ .
- Pour tout  $i > n$ ,  $P^{(i)} = 0$ .

#### Preuve rapide :

- Les dérivées de  $X^k$  s'obtiennent facilement par récurrence.
- Si  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , par linéarité de la dérivation :  $P^{(i)} = \sum_{k=0}^n a_k (X^k)^{(i)} = \sum_{k=i}^n a_k (X^k)^{(i)}$ .  
(car  $(X^k)^{(i)} = 0$  pour  $k < i$  !)

En appliquant la formule du premier point, on obtient bien  $P^{(i)} = \sum_{k=i}^n a_k \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i}$ .  $\square$

### ➡ Corollaire 3 (Coefficients en fonction de dérivées en 0)

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ . Ses coefficients sont donnés par :  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_i = \frac{P^{(i)}(0)}{i!}$ .

**Preuve :**

Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a vu que  $P^{(i)} = \sum_{k=i}^n a_k \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i} = a_i \times i! + \sum_{k=i+1}^n a_k \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i}$ .

Donc en évaluant en 0 :  $P^{(i)}(0) = a_i \times i! + 0 = a_i \times i!$ . On en déduit  $a_i = \frac{P^{(i)}(0)}{i!}$ . □

### 👑 Théorème 3 (Formule de Taylor pour les polynômes)

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Pour tout  $n \geq \deg(P)$ , on peut écrire la **formule de Taylor à l'ordre  $n$  en  $\alpha$**  :

$$P = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + \dots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X - \alpha)^n = \sum_{i=0}^n \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}(X - \alpha)^i.$$

### 💬 Remarque 5

Traditionnellement, on donne un polynôme  $P$  comme une combinaison linéaire de puissances de  $X$ . La formule de Taylor en  $\alpha$  permet en fait de ré-exprimer  $P$  comme une combinaison linéaire de puissances de  $(X - \alpha)$ . On écrira en général la formule à l'ordre  $n = \deg(P)$ .

Exemple : Pour  $P = X^3 - 2X + 1$ , écrivons la formule de Taylor à l'ordre 3 en 1 :

$$P = P(1) + P'(1)(X - 1) + \frac{P''(1)}{2!}(X - 1)^2 + \frac{P^{(3)}(1)}{3!}(X - 1)^3.$$

On calcule : •  $P = X^3 - 2X + 1$  donc  $P(1) = 0$  •  $P' = 3X^2 - 2$  donc  $P'(1) = 1$ .  
•  $P'' = 6X$  donc  $P''(1) = 6$ . •  $P^{(3)} = 6$  donc  $P^{(3)}(1) = 6$ .

On obtient ainsi :  $P = (X - 1) + 3(X - 1)^2 + (X - 1)^3$

**Preuve :**

On a  $n \geq \deg(P)$ , donc on peut écrire  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  (avec éventuellement des coefficients nuls).

• Montrons la formule pour  $\alpha = 0$ . On a vu que pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_i = \frac{P^{(i)}(0)}{i!}$ .

On a donc bien :  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i = \sum_{i=0}^n \frac{P^{(i)}(0)}{i!} (X - 0)^i$ .

• Montrons la formule pour un  $\alpha \in \mathbb{R}$  quelconque. Posons  $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = P(x + \alpha)$  (\*)

Cela revient à poser le polynôme  $Q = Q(X) = P(X + \alpha) = \sum_{k=0}^n a_k (X + \alpha)^k \in \mathbb{R}[X]$ .

On peut appliquer la formule de Taylor à l'ordre  $n$  en 0 à  $Q$  :  $Q = \sum_{k=0}^n \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k$ .

En dérivant (\*), on voit facilement que :  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, Q^{(i)}(x) = P^{(i)}(x + \alpha)$ .

En particulier,  $Q^{(i)}(0) = P^{(i)}(\alpha)$ . Ainsi :  $Q = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} X^k$

et donc  $P = P(X) = Q(X - \alpha) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$ . □

### Exercice 5

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  satisfaisant  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P^{(i)}(2) = 0$ . Que dire de  $P$  ?

On a  $\deg(P) \leq n$ , donc on peut écrire la formule de Taylor à l'ordre  $n$  en 2 :

$$P = P(2) + P'(2)(X - 2) + \dots + \frac{P^{(n)}(2)}{n!}(X - 2)^n = P(2).$$

$P$  est donc un polynôme constant.

Inversement, tout polynôme  $P$  constant satisfait  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P^{(i)}(2) = 0$ .

## 4 Racines d'un polynôme

### 4.1 Notion de racine et divisibilité

#### Définition 8 (Racine d'un polynôme)

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . On dit que  $\alpha \in \mathbb{R}$  est une racine de  $P$  lorsque  $P(\alpha) = 0$ .

#### Exemples

- $P = X + 1$  admet une racine :  $-1$ .  $P(x) = 0 \iff x + 1 = 0 \iff x = -1$ .
- $P = X(X - 1)$  admet deux racines :  $0$  et  $1$ .  $P(x) = 0 \iff x(x - 1) = 0 \iff x = 0$  ou  $x = 1$
- $P = X^2 + 1$  n'admet pas de racine (dans  $\mathbb{R}$ ) !  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^2 + 1 \geq 1$ .

#### Attention !

Rappelons que  $X$  est un polynôme, donc une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  !

Lors de la recherche de racines, on évitera donc d'écrire  $X(X - 1) = 0 \iff X = 0$  ou  $X = 1$ .

On préférera évaluer le polynôme  $P$  en un réel particulier ( $P(\alpha) = \dots$ )  
ou bien introduire  $x \in \mathbb{R}$  et résoudre l'équation  $P(x) = 0$  d'inconnue  $x$ .

#### Remarque 6

Le polynôme nul admet n'importe quel réel comme racine.

On verra que c'est l'unique polynôme admettant une infinité de racine !

#### Théorème 4 (Racines et divisibilité)

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

- 1 Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a l'équivalence :  $\alpha$  est une racine de  $P \iff (X - \alpha) \mid P$ .
- 2 Plus généralement, pour  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  des réels deux à deux distincts, on a l'équivalence :  
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont des racines de  $P \iff P$  est divisible par  $(X - \alpha_1) \times \dots \times (X - \alpha_n)$ .

#### Preuve du Théorème 4 :

**[1]** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Écrivons la division euclidienne de  $P$  par  $X - \alpha$  :  $P = (X - \alpha) \times Q + R$ .

On doit avoir  $\deg(R) < \deg(X - \alpha) = 1$  c'est à dire  $\deg(R) \leq 0$ .  $R$  est donc un polynôme constant : on peut écrire  $R = \lambda \in \mathbb{R}$ . Ainsi  $P(X) = (X - \alpha)Q(X) + \lambda$  et donc  $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + \lambda = \lambda$ .

On a donc les équivalences :

$$\alpha \text{ est une racine de } P \iff P(\alpha) = 0 \iff \lambda = 0 \iff R = 0 \iff (X - \alpha) | P$$

(car  $(X - \alpha)$  divise  $P$  si et seulement si le reste dans la division euclidienne est nul !)

**[2]** Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  deux à deux distincts.

• L'implication réciproque  $\Leftarrow$  est évidente : si  $P$  est divisible par  $\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ , on peut écrire

$$P(X) = Q(X) \times \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) \text{ et en évaluant on voit que } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(\alpha_k) = 0.$$

• Montrons l'implication directe  $\Rightarrow$  par récurrence. Pour tout  $n \geq 1$ , posons :

$$\mathcal{P}(n) : \text{"Si } P \in \mathbb{R}[X] \text{ et } \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ sont des racines de } P \text{ 2 à 2 distinctes, alors } \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) \mid P \text{"}$$

- La proposition  $\mathcal{P}(1)$  est vraie d'après le point **[1]** (cas d'une seule racine)

- Soit  $n \geq 1$ . Supposons  $\mathcal{P}(n)$ , montrons  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$  des racines de  $P$  deux à deux distinctes.

Montrons que  $P$  est divisible par  $\prod_{k=1}^{n+1} (X - \alpha_k)$ .

On sait que  $\alpha_{n+1}$  est racine de  $P$ . Donc d'après **[1]**,  $(X - \alpha_{n+1})$  divise  $P$  :

il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(X) = Q(X) \times (X - \alpha_{n+1})$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $P(\alpha_k) = 0$ , i.e  $Q(\alpha_k)(\alpha_k - \alpha_{n+1}) = 0$  et donc  $Q(\alpha_k) = 0$ .

Ainsi  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont des racines de  $Q$  2 à 2 distinctes !

D'après  $\mathcal{P}(n)$  (appliquée au polynôme  $Q$ !), il en résulte que  $Q$  est divisible par  $\prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ .

Il existe donc  $\tilde{Q} \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $Q = \tilde{Q} \times \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$ .

$$\text{On conclut : } P = Q \times (X - \alpha_{n+1}) = \tilde{Q} \times \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) \times (X - \alpha_{n+1}) = \tilde{Q} \times \prod_{k=1}^{n+1} (X - \alpha_k).$$

Ceci montre  $\mathcal{P}(n+1)$  et achève la récurrence.

□

Une conséquence importante de ce théorème est que le nombre de racines distinctes d'un polynôme est limité par son degré !

### 🚩 Proposition 10 (Nombre de racines distinctes)

- Un polynôme non nul de degré  $n \in \mathbb{N}$  admet au plus  $n$  racines distinctes.
  - Si  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  (i.e  $\deg(P) \leq n$ ) admet  $n + 1$  racines distinctes, alors  $P = 0$ .
- En particulier si un polynôme admet une infinité de racines, il est nul.

**Preuve :**

- Soit  $P$  un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}$  (ainsi  $P \neq 0$ ).

Si  $P$  admet  $r$  racines distinctes  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , d'après le Théorème 4,  $\prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)$  divise  $P$ .

Il faut donc que  $\deg\left(\prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)\right) \leq \deg(P)$ , c'est à dire  $r \leq n$ .

Ainsi  $P$  admet au plus  $n$  racines distinctes !

- Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Si jamais  $P \neq 0$ , d'après le premier point,  $P$  admet au plus  $\deg(P)$  racines distinctes, donc moins de  $n + 1$  racines distinctes.
- Par contraposée, si  $P$  admet au moins  $n + 1$  racines, il doit être nul. □

### 👉 Exemples

Ainsi, un polynôme de degré 2 admet au maximum 2 racines distinctes (on le savait déjà !), un polynôme de degré 3 admet au maximum 3 racines distinctes, etc...

### ⚠ Attention !

Il s'agit bien d'une majoration : le nombre de racines distinctes n'est pas forcément égal au degré !

Exemples :

- $X(X - 1)$  est de degré 2 et admet deux racines distinctes : 0 et 1.
- $(X - 1)^2$  est de degré 2 et admet une seule racine : 1.
- $X^2 + 1$  est de degré 2 et n'admet aucune racine (réelle).

### ✎ Exercice 6

Justifier que la fonction  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  n'est pas un polynôme.

La fonction  $\cos$  s'annule une infinité de fois (en  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ).

Si c'était un polynôme, il aurait une infinité de racine, donc serait le polynôme nul !

Or bien-sûr  $\cos \neq 0$  (car  $\cos(0) = 1$  par exemple).

Le résultat suivant, conséquence de la Proposition 10, est souvent utile (à re-démontrer au cas par cas) :

### ➡ Corollaire 4 (Polynômes "qui coïncident")

Soient  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ . Si  $P$  et  $Q$  coïncident en au moins  $n + 1$  points distincts, alors  $P = Q$ .

En particulier, deux polynômes qui coïncident en une infinité de points sont égaux.

**Preuve (à savoir reproduire):**

On pose  $A = P - Q$ . Comme  $\deg(P) \leq n$  et  $\deg(Q) \leq n$ , on a aussi  $\deg(A) \leq n$ .

Si  $P$  et  $Q$  coïncident en au moins  $n + 1$  points, alors  $A$  admet au moins  $n + 1$  racines.

C'est donc que  $A = 0$  i.e  $P = Q$ . □

## 4.2 Multiplicité d'une racine

### Définition 9 (Racine multiple)

Soient  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ .

On dit que  $\alpha$  est une racine de  $P$  de multiplicité  $m$  lorsque :

$P$  est divisible par  $(X - \alpha)^m$  mais pas par  $(X - \alpha)^{m+1}$ .

- Lorsque  $m = 1$ , on parle de racine **simple**.
- Lorsque  $m = 2$ , on parle de racine **double**.

### Remarque 7

Notons que la multiplicité d'une racine est forcément inférieure ou égale au degré du polynôme !

### Exemples

- Si  $P = (X - 1)^2(X + 2)$  :  $P$  est de degré 3, 1 est racine double et  $-2$  est racine simple.

Ainsi,  $P$  n'admet que deux racines distinctes, mais on dit qu'il admet 3 racines "comptées avec multiplicité" (on compte 1 deux fois).

- Si  $P = (X^2 + 1)(X - 2)^3(X + 1)$  :  $P$  est de degré 6, 2 est racine triple,  $-1$  est racine simple.

Ainsi,  $P$  n'admet que deux racines distinctes, mais 4 racines comptées avec multiplicité (on compte 2 trois fois).

On dispose naturellement d'un équivalent du Théorème 4 (Racines et divisibilité) pour les racines multiples :

### Théorème 5 (Racines multiples et divisibilité (admis))

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  sont des racines de  $P$  deux à deux distinctes, de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_r$ , alors  $P$  est divisible par  $(X - \alpha_1)^{m_1} \times \dots \times (X - \alpha_r)^{m_r}$ .

### Remarque 8

La réciproque n'est ici pas tout à fait vraie : si  $P$  est divisible par  $(X - \alpha_1)^{m_1} \times \dots \times (X - \alpha_n)^{m_n}$ , alors  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont racines de  $P$  de multiplicité au moins  $m_1, \dots, m_n$  (mais éventuellement plus !)

Exemple :  $P = (X - 1)^3$  est bien divisible par  $(X - 1)^2$ , mais 1 est en fait racine de multiplicité 3.

À nouveau, les multiplicités des racines d'un polynôme sont limitées par son degré !

### Proposition 11 (Nombre de racines comptées avec multiplicité)

- Un polynôme non nul de degré  $n \in \mathbb{N}$  admet au plus  $n$  racines comptées avec multiplicité.
- Si  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  admet au moins  $n + 1$  racines comptées avec multiplicité, alors  $P = 0$ .

### Preuve :

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}$  (ainsi  $P \neq 0$ ).

Si  $P$  admet  $r$  racines distinctes  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_r$ ,

d'après le Théorème 5,  $\prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{m_k}$  divise  $P$ .

Il faut donc que  $\deg \left( \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{m_k} \right) \leq \deg(P)$  c'est à dire  $m_1 + \dots + m_r \leq n$ .

Ainsi la somme des multiplicités ne peut pas excéder  $n$  :  $P$  admet au plus  $n$  racines comptées avec multiplicité. Le second point découle facilement du premier.  $\square$

À partir des dérivées de  $P$ , on dispose d'un critère pour déterminer exactement la multiplicité d'une racine.

**👑 Théorème 6 (Racine multiple et dérivation)**

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ .

$\alpha$  est une racine de  $P$  de multiplicité  $m$  si et seulement si :

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

**Preuve :**

Notons  $n = \deg(P)$ . Écrivons la formule de Taylor à l'ordre  $n$  en  $\alpha$  :

$$P = \sum_{i=0}^n \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} (X - \alpha)^i = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} (X - \alpha)^i + \sum_{i=m}^n \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} (X - \alpha)^i$$

ce qui peut se ré-écrire

$$P = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} (X - \alpha)^i + (X - \alpha)^m \sum_{i=m}^n \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} (X - \alpha)^{i-m} = (X - \alpha)^m Q + R$$

$$\text{avec } Q = \sum_{i=m}^n \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} (X - \alpha)^{i-m} \text{ et } R = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} (X - \alpha)^i.$$

Comme  $\deg(R) \leq m-1 < \deg((X - \alpha)^m)$ , il s'agit de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - \alpha)^m$  !

Ainsi on a les équivalences :

$$\begin{aligned} (X - \alpha)^m \text{ divise } P &\iff R = 0 \iff \sum_{i=0}^{m-1} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} (X - \alpha)^i = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{m-1} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} (x - \alpha)^i = 0 \\ &\iff \forall y \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{m-1} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} y^i = 0 \\ &\iff \sum_{i=0}^{m-1} \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} X^i = 0 \\ &\iff \forall i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} = 0 \\ &\iff \forall i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, P^{(i)}(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

On a donc établi :  $(X - \alpha)^m \text{ divise } P \iff P(\alpha) = 0 \text{ et } P'(\alpha) = 0 \dots \text{ et } P^{(m-1)}(\alpha) = 0.$

De même :  $(X - \alpha)^{m+1} \text{ divise } P \iff P(\alpha) = 0 \text{ et } P'(\alpha) = 0 \dots \text{ et } P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) = 0.$

Ainsi, pour finir :

$$\begin{aligned} \alpha \text{ est racine de multiplicité } m &\iff (X - \alpha)^m \text{ divise } P \text{ et } (X - \alpha)^{m+1} \text{ ne divise pas } P \\ &\iff P(\alpha) = 0 \text{ et } P'(\alpha) = 0 \dots \text{ et } P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0. \end{aligned}$$

□

## Exercice 7

Montrer que 1 est racine de  $P = X^3 + X^2 - 5X + 3$  et déterminer sa multiplicité.

On calcule  $P(1) = 1 + 1 - 5 + 3 = 0$  : 1 est bien racine de  $P$ .

$P' = 3X^2 + 2X - 5$  donc  $P'(1) = 3 + 2 - 5 = 0$  : 1 est de multiplicité au moins 2.

$P'' = 6X + 2$  donc  $P''(1) = 6 + 2 = 8 \neq 0$  : donc 1 est de multiplicité 2.

## 5 Factorisation de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$

### 5.1 Rappels pour les polynômes de degré 2

#### Proposition 12 (Factorisation d'un polynôme de degré 2)

Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  avec  $a \neq 0$  et soit  $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ . On pose  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Si  $\Delta > 0$ , alors on peut écrire  $P = a(X - x_1)(X - x_2)$  avec  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .  
 $x_1$  et  $x_2$  sont ainsi des racines simples (distinctes) de  $P$ .
- Si  $\Delta = 0$ , alors on peut écrire  $P = a(X - x_0)^2$  avec  $x_0 = \frac{-b}{2a}$ .  
 $x_0$  est ainsi une racine double de  $P$ .
- Si  $\Delta < 0$ , alors  $P$  n'admet aucune racine réelle.  
On ne peut pas le factoriser sous une forme plus simple.

#### Preuve rapide :

On peut vérifier en développant que les polynômes factorisés sont bien égaux à  $P$ .

Si  $\Delta \geq 0$  (dans le cas  $\Delta = 0$  on a  $x_1 = x_2 = x_0$ ), on a :

$$a(X - x_1)(X - x_2) = a(X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1x_2) = aX^2 - a(x_1 + x_2)X + ax_1x_2$$

et on remarque que  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  et  $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ , d'où  $a(X - x_1)(X - x_2) = aX^2 + bX + c = P$ .  $\square$

### 5.2 Cas d'un polynôme général

#### Théorème 7 (Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ (admis))

Tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  non constant peut se factoriser sous la forme :

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_{j=1}^q (X^2 + b_jX + c_j)^{s_j}$$

où :

- $\lambda \in \mathbb{R}^*$  est le **coefficient dominant de  $P$** .
- $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$  sont les **racines deux à deux distinctes de  $P$** .
- $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}^*$  sont les **multiplicités de ces racines**.
- $(b_1, c_1), \dots, (b_q, c_q) \in \mathbb{R}^2$  sont deux à deux distincts, tels que :  $\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \Delta_j = b_j^2 - 4c_j < 0$   
(Autrement dit, le **discriminant** de  $X^2 + b_jX + c_j$  est **négatif**)
- $s_1, \dots, s_q \in \mathbb{N}^*$ .

Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.



### 💬 Remarque 9

Notons que les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  n'ayant aucune racine sont ceux qui se mettent sous la forme

$$P = \lambda \prod_{j=1}^q (X^2 + b_j X + c_j)^{s_j}$$

Le degré d'un tel polynôme est  $2s_1 + 2s_2 + \dots + 2s_q$  :  $P$  est donc de degré pair !

Par contraposée, on en déduit : Un polynôme de degré impair admet toujours au moins une racine.

### ⚡ Méthode : Factoriser un polynôme de degré 2

Si  $P = aX^2 + bX + c$  (avec  $a \neq 0$ ).

**Méthode 1 (basique)** : Calculer le discriminant et appliquer le résultat de la Proposition 12.

**Méthode 2 (quand c'est possible)** : Utiliser une identité remarquable.

**Méthode 3 (quand c'est possible)** : Repérer une racine évidente ( $\alpha = 0$  ou  $\pm 1$  ou  $\pm 2$ ), puis utiliser les propriétés sur la somme et le produit des racines pour déterminer la deuxième.

### ⚡ Méthode : Factoriser un polynôme de degré supérieur ou égal à 3

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  avec  $\deg(P) \geq 3$ .

L'objectif est de se ramener à un polynôme de degré inférieur, plus facile à factoriser !

- 1 Trouver une racine  $\alpha$  de  $P$  (souvent une racine évidente  $\alpha = 0$  ou  $\pm 1$  ou  $\pm 2$ ).
- 2 Déterminer la multiplicité  $m$  de  $\alpha$  en calculant  $P'(\alpha), P''(\alpha)$  etc...
- 3 On sait alors qu'on peut écrire  $P = (X - \alpha)^m \times Q$  avec  $\deg(Q) = \deg(P) - m$ .  
Déterminer le polynôme  $Q$  en posant la division euclidienne de  $P$  par  $(X - \alpha)^m$ .  
(remarque : le reste doit être nul!) (On peut aussi déterminer  $Q$  en identifiant ses coefficients...)
- 4 On est maintenant ramené à factoriser  $Q$  !  
Si  $\deg(Q) \leq 2$  c'est aisé, sinon on reprend cette même méthode à nouveau.

En plus de ça, il peut parfois être utile/plus rapide de :

- Repérer une identité remarquable
- Utiliser d'autres propriétés du polynôme  $P$

(si  $P(X)$  peut s'écrire  $Q(X^2)$  par exemple, il peut être utile de factoriser le polynôme  $Q$ ...)

**Attention** : • Ne pas oublier de mettre le coefficient dominant de  $P$  "devant" !

- Un polynôme qui n'a pas de racine peut tout de même être factorisé.

### ✎ Exercice 8

Factoriser les polynômes suivants dans  $\mathbb{R}[X]$ .

(a)  $P = 2X^3 + 2X^2 - 10X + 6$       (b)  $P = 3X^4 - 4X^3 - 4X^2 + X - 2$       (c)  $P = X^4 + 1$

(a) On remarque que  $P(1) = 2 + 2 - 10 + 6 = 0$  : 1 est racine de  $P$ .

$P' = 6X^2 + 4X - 10$  donc  $P'(1) = 6 + 4 - 10 = 0$ .

$P'' = 12X + 4$  donc  $P''(1) = 16 \neq 0$  : 1 est donc racine double.

On cherche donc à écrire  $P = (X - 1)^2 \times Q$  (on sait que  $\deg(Q) = 1$ )

On pose la division euclidienne de  $P = 2X^3 + 2X^2 - 10X + 6$  par  $(X - 1)^2 = X^2 - 2X + 1$ ...

On obtient  $P = (X - 1)^2 \times (2X + 6)$  ce qu'on peut ré-écrire  $P = 2(X - 1)^2(X + 3)$ .

(b) On remarque que  $P(-1) = 3 + 4 - 4 - 1 - 2 = 0$  :  $-1$  est racine de  $P$ .

On remarque que  $P(2) = 3 \times 16 - 4 \times 8 - 4 \times 4 + 2 - 2 = 0$ .

On pourrait chercher les multiplicités de  $-1$  et  $2$ .

Mais on peut aussi écrire tout de suite  $P = (X + 1)(X - 2)Q$ .

(On aura  $\deg(Q) = 2$ )

On pose la division euclidienne de  $P = 3X^4 - 4X^3 - 4X^2 + X - 2$  par  $(X + 1)(X - 2) = X^2 - X - 2$ .

On obtient  $P = (X + 1)(X - 2) \times (3X^2 - X + 1)$ .

Factorisons  $Q = 3X^2 - X + 1$ . Discriminant :  $\Delta = 1 - 4 \times 3 = -11 < 0$ .

On ne peut donc pas factoriser  $Q$  d'avantage !

Conclusion :  $P = (X + 1)(X - 2)(3X^2 - X + 1) = 3(X + 1)(X - 2)(X^2 - \frac{1}{3}X + \frac{1}{3})$ .

(c)  $P = X^4 + 1$ . On constate facilement que  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^4 + 1 \geq 1$ .

Donc  $P$  n'a pas de racine réelle... Il s'agit de repérer/faire apparaître une identité remarquable.

$$P = X^4 + 1 = (X^2)^2 + 1^2 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}X)^2 = (X^2 + 1 + \sqrt{2}X)(X^2 + 1 - \sqrt{2}X)$$

Ces deux polynômes de degré 2 ont un discriminant négatif (sinon  $P$  aurait une racine...).

On a donc terminé la factorisation !

### À savoir faire à l'issue de ce chapitre :



Au minimum

- Effectuer des calculs avec des polynômes.
- Déterminer facilement le degré d'un polynôme (même "non développé").
- Poser la division euclidienne de deux polynômes de petits degrés.
- Déterminer une racine et sa multiplicité.



Pour suivre

- Connaître ou retrouver rapidement la formule donnant les coefficients de  $P'$ .
- Connaître le lien entre nombre de racines et degré d'un polynôme.
- Montrer qu'un polynôme est nul en lui trouvant "trop" de racines.
- Factoriser un polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$  en repérant des racines évidentes.



Pour les ambitieux

- Savoir exploiter la formule de Taylor quand elle est utile.
- Factoriser un polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$  en utilisant des calculs astucieux (identités remarquables...)
- Maîtriser toutes les preuves du cours.