23

Variables aléatoires discrètes

Introduction et motivation

Il y a quelques temps, nous avons défini et développé la notion de variable aléatoire réelle finie.
Une telle variable aléatoire était de support $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ fini, c'est à dire qu'elle ne pouvait prendre qu'un nombre fini de valeurs distinctes.

Exemple

On lance une pièce équilibré n fois d'affilée.
On note X le nombre de Pile obtenus au cours de ces n lancers.

X est ainsi une variable aléatoire finie, de support $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

$\Big($En fait, on sait même que X suit la loi de probabilité binomiale : $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. $\Big)$

Nous allons à présent étudier des variables aléatoires dont le support $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ est infini (mais tout de même dénombrable !), qui pourront ainsi prendre une infinité de valeurs possibles.
On s'intéressera typiquement à des variables X à valeurs entières : $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ou bien $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Exemple

On lance une pièce équilibrée indéfiniment.
On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier Pile.
(en adoptant la convention : $X = 0$ lorsque l'on n'obtient jamais Pile)

Alors X est une variable aléatoire discrète, de support $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$.

En réalité, puisque l'évènement $[X = 0]$ correspond à "Ne jamais obtenir Pile pendant la succession infinie de lancers", on voit que $P(X = 0) = 0$.

On choisit donc en général de "retirer" naturellement cette valeur du support : $X(\Omega) = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}^*$.

On verra que la loi de probabilité de cette variable aléatoire est la loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{1}{2})$.

1 Notion de variable aléatoire discrète

Définition 1 (Variable aléatoire réelle discrète)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
(On rappelle que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est donc "l'ensemble des évènements")

Une **variable aléatoire réelle discrète** (ou simplement **variable aléatoire discrète**)

est une application $\begin{array}{rccc} X : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$ (à une issue ω on associe une valeur réelle $X(\omega)$)

satisfaisant les deux propriétés suivantes :

$\boxed{1}$ Le support $X(\Omega)$ (l'ensemble des valeurs prises par X) est fini ou infini dénombrable : il peut donc s'écrire $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$, où I est une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$.

$\boxed{2}$ Pour tout $i \in I$, $[X = x_i]$ est un évènement, c'est à dire que

$$[X = x_i] = \Big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\Big\} \in \mathcal{A}.$$

Remarques 1

- Les variables aléatoires finies sont en particulier des variables aléatoires discrètes !
- Les variables discrètes non-finies que nous verrons seront en général de support $X(\Omega) = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$.
- Le qualificatif "discret", en mathématiques, s'oppose à celui de "continu". Vous étudierez l'année prochaine des variables aléatoires "continues", de support non-dénombrable : $X(\Omega) = [0, 1]$ ou $\mathbb{R}$...

Exercice 1

On lance une pièce équilibrée indéfiniment. Cette expérience est modélisée par l'univers

$$\Omega = \{(x_n)_{n\geqslant 1} \mid \forall n \geqslant 1,\ x_n \in \{Pile, Face\}\} = \{Pile, Face\}^{\mathbb{N}^*}$$

On admet que l'on dispose d'un ensemble des évènements $\mathcal{A}$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n ="Obtenir Pile au n-ième tirage " soit un élément de $\mathcal{A}$, c'est à dire un événement.

On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier Pile, avec la convention $X = 0$ si l'on n'obtient jamais Pile. Montrer que X est une variable aléatoire discrète.

- Le support de X est $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$ qui est dénombrable.
- Vérifions que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[X = k] \in \mathcal{A}$, c'est à dire que $[X = k]$ est un évènement que l'on peut considérer.

$[X = 0] =$ "Ne jamais obtenir Pile" $= \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_n} \in \mathcal{A}$.

Pour tout $k \geqslant 1$, $[X = k] =$ "Obtenir le premier Pile au k-ème tirage" $= \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k \in \mathcal{A}$.

Remarque 2

En pratique, dans les exercices, il est rare que l'on précise l'univers Ω et l'ensemble des évènements $\mathcal{A}$ avec lesquels on travaille ! Bien souvent, on se contente de décrire X à l'aide d'une phrase et on admet qu'il s'agit bien d'une variable aléatoire, c'est à dire que l'on peut bien considérer les évènements $[X = x]$ pour tout $x \in X(\Omega)$!

Proposition 1 (Système complet d'évènements associé à une V.A.R discrète)

Soit X une variable aléatoire discrète.
La famille d'évènements $\Big([X = x]\Big)_{x\in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements.

On l'appelle le système complet d'événements associé à X.

Preuve :

Notons le support $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ avec des réels x_i deux à deux distincts. Quelle que soit l'issue ω de l'expérience aléatoire, $X(\omega)$ prendra une des valeurs possibles x_i pour $i \in I$. Autrement dit, un et un seul des évènements $[X = x_i]$ pour $i \in I$ sera toujours réalisé : c'est donc que la famille d'évènements $([X = x_i])_{i\in I}$ est un S.C.E. □

2 Loi de probabilité

2.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Dans la plupart des énoncés portant sur les variables aléatoires, l'enjeu premier est bien souvent de déterminer la **loi de probabilité** des variables mises en jeu.

Définition 2 (Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète.

On appelle **loi de probabilité de** X (ou "loi de X") la donnée de :

$\boxed{1}$ Le support de X : $X(\Omega)$

$\boxed{2}$ La valeur des probabilités $P([X = x])$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

On retiendra que la somme de ces probabilités vaut toujours 1 : $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} P(X = x) = 1.$

Remarques 3

- Comme dans le cas fini, connaître la loi de probabilité de X, c'est connaître :

$\boxed{1}$ Les valeurs que X peut prendre. $\boxed{2}$ Avec quelle probabilité X prend chacune de ces valeurs.

- Par définition d'une variable aléatoire discrète, pour tout $x \in X(\Omega)$, $[X = x]$ est un évènement ! Cela a donc bien un sens de considérer la probabilité $P([X = x])$.
Comme d'habitude, pour alléger les notation, cette probabilité est notée simplement $P(X = x)$.

- Notons que si le support $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ est infini, la somme $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = \sum_{i \in I} P(X = x_i)$ est une somme infinie !

Preuve du fait que la somme des ces probabilités vaut 1 :

Notons le support $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$.
On a vu que $\Big([X = x_i]\Big)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements.
On a donc l'union disjointe : $\displaystyle\bigcup_{i \in I} [X = x_i] = \Omega$.

Ainsi $P\left(\displaystyle\bigcup_{i \in I} [X = x_i]\right) = P(\Omega) = 1$, c'est à dire $\displaystyle\sum_{i \in I} P([X = x_i]) = 1$ i.e $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$. □

Comme dans le cas d'une variable aléatoire finie, une fois que l'on connait la loi de probabilité de X, on peut facilement déterminer des probabilités du type $P(X \leqslant x)$, $P(X > x)$, $P(a \leqslant X \leqslant b)$ et, plus généralement, la probabilité de n'importe quel évènement associé à X :

Méthode : Calcul de probabilités à partir de la loi de X

Si l'on connaît la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X, alors on peut calculer la probabilité de n'importe quel évènement associé à X : pour toute partie $E \subset \mathbb{R}$,

$$P(X \in E) = \sum_{x \in X(\Omega) \cap E} P(X = x).$$

(cette somme étant éventuellement infinie !)

Exercice 2

On lance une pièce équilibrée indéfiniment. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier Pile, avec la convention $X = 0$ si l'on obtient jamais Pile.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(X \leqslant n)$ et $P(X \geqslant n)$.
3. Quelle est la probabilité que X soit pair ?

1. On a déjà vu que $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$.
En notant encore, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n ="Obtenir Pile au n-ième lancer" :

- Pour tout $k \geqslant 1$, $P(X = k) = P(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k) = P(\overline{A_1}) \times \ldots \times P(\overline{A_{k-1}}) \times P(A_k)$ par indépendance, donc $\boxed{P(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k}$.

- $P(X = 0) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ donc $\boxed{P(X = 0) = 0.}$

(Ou alors $P(X = 0) = P\left(\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = \lim_{N \to +\infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{N} \overline{A_n}\right) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2^N} = 0$)

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X \leqslant n) = P(\bigcup_{k=0}^{n}[X=k]) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1/2 - (1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

$$P(X \geqslant n) = P(\bigcup_{k=n}^{+\infty}[X=k]) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Le plus simple est d'écrire $P(X \geqslant n) = 1 - P(X < n) = 1 - P(X \leqslant n-1) = 1 - (1 - \frac{1}{2^{n-1}}) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

3. $P(\text{"}X \text{ est pair"}) = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}[X=2k]\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} - 1$

ainsi $P(\text{"}X \text{ est pair"}) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \dfrac{1}{3}$.

Remarque 4

En particulier, pour une variable discrète à valeurs entières (i.e lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$), on pourra retenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) \quad \text{et} \quad P(X \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k).$$

Il arrive parfois qu'un énoncé donne directement la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

Méthode : Vérifier qu'une loi de probabilité est "valide"

Supposons que l'on pose : $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in I\}$ et $\forall i \in I,\ P(X = x_i) = p_i$.
Ceci définit bien la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X si :

$\boxed{1}$ Pour tout $i \in I$, $p_i \geqslant 0$. $\quad \boxed{2}$ $\sum_{i \in I} p_i = 1$.

Exercice 3

Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ peut on considérer une variable aléatoire discrète X,
de support $X(\Omega) = \mathbb{N}$, avec $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \dfrac{a}{3^k}$?

Il faut déjà que $a \geqslant 0$. De plus, on doit avoir

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1 \iff \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a}{3^k} = 1 \iff a \times \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 1 \iff a \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1 \iff a = \frac{2}{3}.$$

2.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est définie de la même façon que dans le cas fini.
Les calculs se font similairement. (cf. Chapitre 15 pour le détail)

Définition 3 (Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète)

Si X est une variable aléatoire discrète, alors sa fonction de répartition se ré-exprime comme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{\substack{y \in X(\Omega) \\ y \leqslant x}} P(X=y).$$

Exercice 4

Représenter la fonction de répartition F_X de la variable X de l'Exercice 2.

Dessin :

Rappelons quelques résultats, identiques au cas des variables aléatoires finies :

Théorème 1 (La fonction de répartition "caractérise la loi")

Deux variables aléatoires discrètes ont la même fonction de répartition si et seulement si elles ont la même loi de probabilité.

Proposition 2 (Calcul de probabilités à partir de F_X)

Soit X une variable aléatoire discrètes et F_X sa fonction de répartition.

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$, $\quad P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Si X est à valeurs entières, c'est à dire $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- $P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) = F_X(k) - F_X(k-1)$.
- $P(X = k) = P(X < k+1) - P(X < k)$.
- $P(X = k) = P(X \geqslant k) - P(X \geqslant k+1)$.
- $P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$.

2.3 "Transfert" d'une variable aléatoire discrète

Rappel : Soit $X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$ une variable aléatoire. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

En posant : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = g(X(\omega))$ on définit une nouvelle variable aléatoire finie Y, que l'on note simplement $Y = g(X)$. On dit que Y est le "transfert de X par g".

Exemples

Si X une variable aléatoire, on peut ainsi parler des variables aléatoires :

$$2X+1, \quad X^2, \quad e^X, \quad |X|, \quad \text{etc...}$$

Le calcul de la loi de probabilité d'un transfert $g(X)$ à partir de la loi de probabilité de X est tout à fait identique au cas d'une variable aléatoire finie. (cf. Chapitre 15 pour le détail)

Proposition 3 (Loi de probabilité de $g(X)$)

Soit X une variable aléatoire discrète et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Alors $g(X)$ est aussi une variable aléatoire discrète :

- Le support de la variable aléatoire $g(X)$ est l'image du support de X par la fonction g.

Autrement dit : c'est $g(X(\Omega))$.

- Pour tout $y \in g(X(\Omega))$, on a : $\quad P(g(X) = y) = \displaystyle\sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} P(X = x)$

où on rappelle que $g^{-1}(\{y\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = y\}$ est l'ensemble des antécédents de y par g.

Exercice 5

On considère la variable aléatoire X de loi : $\quad X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \geqslant 1,\ P(X = k) = \dfrac{1}{2^k}$
Déterminer la loi de $Y = |X - 3|$.

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $Y(\Omega) = \{|x-3|,\ x \in \mathbb{N}^*\} = \mathbb{N}$.

- Pour tout $y \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= P(|X-3| = y) = P([X-3 = y] \cup [X-3 = -y]) \\ &= P(X-3 = y) + P(X-3 = -y) = P(X = y+3) + P(X = -y+3). \end{aligned}$$

On a $P(X = y+3) = \dfrac{1}{2^{y+3}}$ et $P(X = -y+3) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{-y+3}} \text{ si } & -y+3 \geqslant 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{-y+3}} \text{ si } & y \leqslant 2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Ainsi :
Pour $y \in \{1, 2\}$, $\quad P(Y = y) = \dfrac{1}{2^{y+3}} + \dfrac{1}{2^{-y+3}}$
Pour $y \geqslant 3$, $\quad P(Y = y) = \dfrac{1}{2^{y+3}}$

- Pour $y = 0$:

$$P(Y = 0) = P(|X-2| = 0) = P(X = 2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

2.4 Variables aléatoires discrètes indépendantes

Définition 4 (Indépendance mutuelle)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes.
On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont **(mutuellement) indépendantes** lorsque :
pour tous $x_1 \in X_1(\Omega), x_2 \in X_2(\Omega), \ldots, x_n \in X_n(\Omega)$,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$$

S P O I L E R . . .

Ce concept d'indépendance de variables aléatoires, assez intuitif, sera étudié plus en détail un peu plus tard : dans le cas particulier de deux variables cette année, et en toute généralité l'année prochaine.

Exemple

On lance un dé 3 fois consécutivement. On note X_1 (resp. X_2, X_3) le résultat obtenu au 1er (resp. 2ème, 3ème) lancer. Les variables X_1, X_2, X_3 sont clairement mutuellement indépendantes !

3 Espérance et variance

3.1 Espérance d'une variable aléatoire discrète infinie

Rappel : Si X est une variable aléatoire finie de support $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$,
l'espérance de X est définie par : $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$.

Comment définir, à présent, l'espérance d'une variable aléatoire discrète de support infini ?

Définition 5 (Espérance d'une variable aléatoire discrète non-finie)

Soit X une variable aléatoire discrète non-finie.
On note ainsi son support $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

On dit que X **admet une espérance** lorsque la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente.

Dans ce cas, l'espérance de X est définie comme la somme infinie : $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.

$\Big($c'est à dire $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)\Big)$

Remarques 5

• Si une variable aléatoire finie admet toujours une espérance, une variable aléatoire discrète de support infini n'en admet pas forcément !

• Pour que l'espérance soit bien définie, il faut bien annoncer que la série associée est **absolument** convergente. Bien-sûr, si X est à valeurs positives (c'est à dire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n \geqslant 0$), alors la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est à termes positifs, donc la convergence absolue revient à la convergence "tout court".

• En pratique, on a souvent $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Dans ce cas : $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n)$

(sous-réserve, à nouveau, que cette série soit convergente !)

Exercice 6

1. On lance une pièce équilibrée indéfiniment et on note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier Pile, avec la convention $X = 0$ si l'on obtient jamais Pile.
Montrer que X admet une espérance et la calculer.

2. On considère la variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

(a) Vérifier qu'il s'agit effectivement d'une loi de probabilité bien définie.
(b) Y admet-elle une espérance ?

1. On a déjà vu que $P(X = 0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \frac{1}{2^n}$.

Vérifions que la série $\sum nP(X = n) = \sum n\frac{1}{2^n}$ est (absolument) convergente :

$$\sum_{n=0}^{N} nP(X = n) = \sum_{n=1}^{N} n\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ceci montre que X admet une espérance et $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = 2.$

Conclusion : Le nombre moyen de lancer qu'il faut effectuer pour obtenir le premier Pile est 2. (logique !)

2. (a) Il faut vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$ Or :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1, \text{ d'où le résultat.}$$

(b) Pour que Y admette une espérance, il faut que la série $\sum nP(Y=n) = \sum n \frac{1}{n(n+1)} = \sum \frac{1}{n+1}$ soit (absolument) convergente. Or la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum \frac{1}{n+1}$ également : Y n'admet pas d'espérance !

Par suite, sous réserve d'existence des espérances mises en jeu, tous les résultats connus pour des variables aléatoires finies se prolongent sans problème au cas des variables aléatoires discrètes :

Théorème 2 (Linéarité de l'espérance)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
Alors la variable aléatoire discrète $aX + bY$ admet une espérance et $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Corollaire 1 (Linéarité généralisée)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes admettant une espérance, et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
Alors $\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$ admet une espérance, et $E\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k \right) = \sum_{k=1}^{n} a_k E(X_k)$.

Corollaire 2 (Espérance d'une transformation affine)

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance et $a, b \in \mathbb{R}$.
Alors $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Proposition 4 (Espérance d'une variable aléatoire positive)

Soit X une variable aléatoire discrètes à valeurs positives : $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$. (ou encore $P(X \geqslant 0) = 1$).
Si X admet une espérance, alors $E(X) \geqslant 0$.
De plus on a égalité si et seulement si X est constante égale à 0 : $E(X) = 0 \iff P(X = 0) = 1$.

Corollaire 3 (Croissance de l'espérance)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance.
On suppose que $X \leqslant Y$ presque sûrement (c'est à dire : $P(X \leqslant Y) = 1$)
Alors $E(X) \leqslant E(Y)$.
En particulier, pour tout $c \in \mathbb{R}$:

- Si $P(X \leqslant c) = 1$ alors $E(X) \leqslant c$
- Si $P(X \geqslant c) = 1$ alors $E(X) \geqslant c$.

On dispose toujours du très utile "Théorème de transfert" :

Théorème 3 (Théorème de transfert)

Soit X une variable aléatoire discrète non-finie.
On note ainsi son support $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Alors $g(X)$ admet une espérance si et seulement si $\sum g(x_n) P(X = x_n)$ converge absolument

et dans ce cas, $\quad E(g(X)) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g(x_n) P(X = x_n) \quad \Big($c'est à dire : $E(g(X)) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P(X = x)\Big)$

Remarque 6

Dans le cas courant $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on obtient : $\quad E(g(X)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g(n) P(X = n)$ (sous réserve de CVA).

Quelques cas particulier utiles : $\quad E(|X|) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |n| P(X = n) \qquad E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(X = n).$

Exercice 7

On reprend à nouveau : $\quad X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{1}{2^n}.$
Montrer que X^2 admet une espérance et calculer $E(X^2)$.

1. Vérifions que la série $\sum n^2 P(X = n)$ est (absolument) convergente :

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 P(X = n) = \sum_{n=1}^{N} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{N} (n(n-1) + n) \left(\frac{1}{n}\right)^n$$
$$= \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{N} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{4} \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 6$$

Ceci montre que X^2 admet une espérance et $E(X^2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n P(X = n) = 6.$

Ajoutons un dernier résultat, admis, qui pourra permettre de justifier l'existence d'une espérance :

Théorème 4 (Existence d'une espérance par domination)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On suppose que :

$$|X| \leqslant Y \quad \text{et} \quad Y \text{ admet une espérance.}$$

Alors X admet également une espérance. $\qquad$ De plus, on a $|E(X)| \leqslant E(Y)$.

3.2 Variance, écart-type d'une variable aléatoire discrète

Définition 6 (Variance, écart-type de X)

Soit X une variable aléatoire discrète.

- Sous réserve d'existence, on appelle **variance de** X le réel $V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big)$.

Ainsi, pour qu'une variable discrète non-finie X admette une variance, il faut que :

$\boxed{1}$ X admette une espérance $E(X) = m$.

$\boxed{2}$ $(X-m)^2$ admette une espérance, i.e $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} (x-m)^2 P(X=x)$ soit (absolument) convergente.

Le théorème de transfert donne alors l'expression :

$$V(X) = E((X-m)^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x-m)^2 P(X=x).$$

- Lorsque X admet une variance, on appelle **écart-type de** X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque 7

A nouveau, l'existence d'une variance est toujours acquise pour une variable aléatoire finie, mais pas automatique pour une variable aléatoire discrète de support infini !
Evidemment, si X n'admet pas d'espérance, elle n'admet pas de variance.
Mais il existe aussi des variables aléatoires admettant une espérance et toujours pas de variance...

Proposition 5 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire discrète.
Alors X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance.
Dans ce cas, on a : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Preuve :

- Supposons que X^2 admette une espérance.

En notant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant 1 + x^2$ (étude de fonction facile !)
on a $|X| \leqslant X^2 + 1$ et $X^2 + 1$ admet une espérance (puisque X^2 en admet une).
D'après le Théorème de domination (Thm 4), on en déduit que X admet une espérance.
Notons $m = E(X) \in \mathbb{R}$.
Pour montrer que $V(X) = E((X-m))^2)$ existe, il reste à montrer que la variable $Y = (X-m)^2$ admet une espérance. Or :

$$Y = (X-m)^2 = X^2 - 2mX + m^2$$

donc Y admet bien une espérance par linéarité (puisque X^2, X et 1 admettent une espérance !) On obtient ainsi $V(X) = E(Y) = E(X^2) - 2mE(X) + m^2 = E(X^2) - E(X)^2$.

- Inversement, supposons que X admet une variance.

Alors X admet une espérance (noté $m = E(X) \in \mathbb{R}$) et $Y = (X-m)^2$ admet une espérance.
Or : $X^2 = (X-m)^2 + 2mX - m^2 = Y + 2mX - m^2$
donc X^2 admet bien une espérance par linéarité (puisque Y, X et 1 admettent une espérance).

$\square$

Ainsi, pour justifier qu'une variable aléatoire discrète X admet une variance, **il faut et il suffit de vérifier que X^2 admet une espérance** ! On peut alors utiliser la formule de Koenig-Huygens pour calculer $V(X)$.

En particulier, si X^2 admet une espérance, alors X admet une espérance (et l'inverse n'est pas vrai...)

Exercice 8

On reprend à nouveau : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$.
Montrer que X admet une variance et la calculer.

On a déjà vu que X^2 admet une espérance et que $E(X^2) = 6$ (Exercice 7).
On en déduit que X admet une variance et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
On a vu que $E(X) = 2$ (Exercice 6), d'où

$$V(X) = 6 - 2^2 = 2.$$

Par suite, toujours sous réserve d'existence des variances mises en jeu, tous les résultats connus pour des variables aléatoires finies se prolongent sans problème au cas des variables aléatoires discrètes :

Proposition 6 (Cas de la variance nulle)

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. On a l'équivalence :

$$V(X) = 0 \iff \exists c \in \mathbb{R}, P(X = c) = 1.$$

Autrement dit, X est de variance nulle si et seulement si c'est une variable aléatoire constante.

Proposition 7 (Variance d'une transformation affine)

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance et $a, b \in \mathbb{R}$.
Alors la variable aléatoire discrète $aX + b$ admet une variance et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Terminons avec un rappel de vocabulaire :

Définition 7 (Variable aléatoire centrée/réduite)

Soit X une variable aléatoire discrète.

- On dit que X est **centrée** lorsque X admet une espérance et $E(X) = 0$.
- On dit que X est **centrée réduite** lorsque X admet une variance et $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.
- Si X est une variable aléatoire finie avec $\sigma(X) \neq 0$, alors $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
  (où $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ est l'écart-type)

4 Lois discrètes usuelles

4.1 Rappels sur les lois finies usuelles

a) Variable aléatoire certaine

Définition 8 (Variable aléatoire certaine)

On dit qu'une variable aléatoire X est **certaine** (ou encore "constante") lorsqu'elle ne prend qu'une seule valeur : il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) = \{c\}$ et donc $P(X = c) = 1$.

On a alors : $E(X) = c$ et $V(X) = 0$.

b) Loi uniforme

Définition 9 (Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ lorsque :

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On a alors : $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.

Reconnaître une loi uniforme : Si X prend des valeurs entre 1 et un certain entier n et que chacune des ces valeurs a la même chance d'apparaître, on peut affirmer que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

Exemples

- On lance un dé à 6 faces équilibré et on note X le nombre obtenu : on a $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 6]\!])$
- Plus généralement, si on lance un dé à n faces équilibré, le nombre obtenu suit la loi $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

c) Épreuves de Bernoulli : loi de Bernoulli et loi binomiale

Définition 10 (Épreuve de Bernoulli)

On appelle **épreuve de Bernoulli de paramètre** $p \in [0, 1]$ toute expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles :

- L'une, appelée "succès", dont la probabilité de réalisation est p.
- L'autre, appelée "échec", dont la probabilité de réalisation est $1 - p$.

Exemple

On lance une pièce qui tombe sur pile avec probabilité $p \in [0, 1]$.
On considère qu'il y a succès si on obtient Pile : c'est une épreuve de Bernoulli.

Définition 11 (Loi de Bernoulli de paramètre p)

Soit $p \in [0, 1]$. On dit que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ lorsque :

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

On a alors : $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

Reconnaître une loi de Bernoulli : Si X prend uniquement les valeurs 0 ou 1,
alors on peut affirmer que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, avec le paramètre $p = P(X = 1)$.

Définition 12 (Loi binomiale de paramètres n et p)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On dit que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ lorsque :

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On a alors : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Reconnaître une loi binomiale : Si X peut s'interpréter comme
le nombre de succès au cours d'un nombre fini de répétitions d'une même épreuve de Bernoulli,
alors on peut affirmer que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, où :

- $n \in \mathbb{N}^*$ est le nombre de fois où l'épreuve est répétée,
- $p \in [0,1]$ est la probabilité de succès sur une seule épreuve.

Exemple

On effectue n lancers de pièce successifs. A chaque lancer, on obtient Pile avec probabilité $p \in [0,1]$. Soit X le nombre de Pile obtenus au cours des n lancers. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

4.2 Loi géométrique

Définition 13 (Loi géométrique de paramètre p)

Soit $p \in]0,1[$. On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = (1-p)^{n-1}p.$$

Remarque 8

Il s'agit bien d'une loi de probabilité valide car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1-p)^{n-1}p \geqslant 0$ et puisque $(1-p) \in]0,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1}p = p\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1} = p\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n = p\frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1.$$

Reconnaître une loi géométrique : Si X peut s'interpréter comme
le nombre de répétitions nécessaires d'une même épreuve de Bernoulli pour obtenir le premier succès,
alors on peut affirmer que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, où $p \in]0,1[$ est la probabibilité de succès sur une seule épreuve.

Preuve de cette interprétation :

On répète indéfiniment une expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès est $p \in]0,1[$.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n = "Obtenir un succès à la n-ème épreuve".

- D'abord, la probabilité de ne jamais obtenir de succès est :

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = \lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{N} \overline{A_n}\right) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} P(\overline{A_n}) = \lim_{N\to+\infty} \underbrace{(1-p)}_{\in]0,1[}{}^N = 0$$

On sait donc qu'on finit presque-sûrement par obtenir un succès !

- On peut donc introduire X la variable aléatoire comptant le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès. On a alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X=n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{A_k} \cap A_n\right) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} P(\overline{A_k})\right) \times P(A_n) = (1-p)^{n-1}p.$$

d'où $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. □

Exemples

- On lance une pièce équilibrée une infinité de fois.
On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier Pile. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{2})$.
(c'est l'exemple qui a été étudié tout au long de ce chapitre !)

- On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir 3.
On note X le nombre de lancers effectués. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{6})$.

Proposition 8 (Espérance et variance d'une loi géométrique)

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors : $E(X) = \dfrac{1}{p}$ et $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Preuve :

- Vérifions que la série $\sum nP(X=n)$ est (absolument) convergente : pour tout $N \geqslant 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} nP(X=n) = p\sum_{n=1}^{N} n(1-p)^{n-1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} p\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} = p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Ceci montre que X admet une espérance et $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n) = \frac{1}{p}$.

- Plutôt que $E(X^2)$, calculons $E(X(X-1))$ (ce sera plus simple ici).
Vérifions pour cela que la série $\sum n(n-1)P(X=n)$ est (absolument) convergente : pour tout $N \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n(n-1)P(X=n) &= \sum_{n=2}^{N} n(n-1)P(X=n) = \sum_{n=2}^{N} n(n-1)(1-p)^{n-1}p \\ &= p(1-p)\sum_{n=2}^{N} n(n-1)(1-p)^{n-2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}.\end{aligned}$$

Ceci montre que $X(X-1)$ admet une espérance et $E(X(X-1)) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) = \frac{2-2p}{p^2}$.

Puisque $X^2 = X(X-1) + X$, on en déduit par linéarité que X^2 admet une espérance et que

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = \frac{2-2p}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-2p+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens, on en déduit que X admet une variance et que

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2-p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

$\square$

Exercice 9

Combien de fois, en moyenne, faut-il lancer un dé équilibré pour obtenir 3 ?

La probabilité d'obtenir 3 sur un lancer est $\dfrac{1}{6}$.

On note X le nombre de lancers de dés nécessaires pour obtenir 3 : on a donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\dfrac{1}{6})$.

Ainsi, le nombre moyen de lancers nécessaires est $E(X) = \dfrac{1}{\frac{1}{6}} = 6$ (logique !)

4.3 Loi de Poisson

Définition 14 (Loi de Poisson de paramètre λ)

Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

Remarques 9

- Il s'agit bien d'une loi de probabilité valide car $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!} \geqslant 0$, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = e^{-\lambda+\lambda} = e^0 = 1.$$

- Contrairement aux autres lois usuelles déjà étudiées, la loi de Poisson ne peut pas s'interpréter comme une quantité "simple" issue d'une expérience aléatoire...
On n'aura donc jamais à "reconnaître" une loi de Poisson à partir d'un énoncé en français !

- Donnons tout de même une forme d'interprétation : on choisit souvent la loi de Poisson pour modéliser le nombre d'occurences d'un évènement au cours d'un intervalle de temps fixé.

Exemple

Le nombre X de personnes qui se présentent à un guichet de poste entre 14h et 16h peut être naturellement modélisé par une loi de Poisson : on dira par exemple que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(15)$.
Plus le paramètre $\lambda > 0$ choisi est grand, plus il y aura d'"affluence" au guichet.

S P O I L E R . . .

On justifiera un peu plus tard cette interprétation, en comparant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ à la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$ quand n est grand, dans un Théorème intitulé "loi des évènements rares"...

Proposition 9 (Espérance et variance d'une loi de Poisson)

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors : $\quad E(X) = \lambda \quad$ *et* $\quad V(X) = \lambda.$

Preuve :

- Vérifions que la série $\sum nP(X = n)$ est (absolument) convergente : pour tout $N \geqslant 1$,

$$\sum_{n=0}^{N} nP(X=n) = \sum_{n=1}^{N} nP(X=n) = \sum_{n=1}^{N} ne^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{N}\frac{n\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}$$
$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\lambda^n}{n!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \lambda e^{-\lambda}\, e^{\lambda} = \lambda.$$

Ceci montre que X admet une espérance et $E(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n) = \lambda.$

- Plutôt que $E(X^2)$, calculons $E(X(X-1))$ (ce sera plus simple ici).
Vérifions pour cela que la série $\sum n(n-1)P(X=n)$ est (absolument) convergente : pour tout $N \geqslant 2$,

$$\sum_{n=0}^{N} n(n-1)P(X=n) = \sum_{n=2}^{N} n(n-1)P(X=n) = \sum_{n=2}^{N} n(n-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=2}^{N}\frac{n(n-1)\lambda^n}{n!}$$
$$= e^{-\lambda}\sum_{n=2}^{N}\frac{\lambda^n}{(n-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{n=2}^{N}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{N-2}\frac{\lambda^n}{n!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2.$$

Ceci montre que $X(X-1)$ admet une espérance et $E(X(X-1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) = \lambda^2$.

Puisque $X^2 = X(X-1) + X$, on en déduit par linéarité que X^2 admet une espérance et que

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = \lambda^2 + \lambda.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens, on en déduit que X admet une variance et que

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

$\square$

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Vérifier qu'une loi de probabilité discrète est "valide".
- Calculer des probabilités liées à X à partir de sa loi de probabilité.
- Justifier que $E(X)$ et $E(g(X))$ existent et les calculer.
- Justifier que $V(X)$ existe et la calculer avec la formule de Koenig-Huygens.
- Connaître les lois usuelles et leurs espérances/variances.
- Reconnaître des lois usuelles dans un énoncé.

Pour suivre

- Exprimer $[X = n]$ à partir d'autres évènements connus et en déduire, à partir d'un énoncé en français, la loi de probabilité de X.
- Calculer la loi de probabilité d'un transfert $g(X)$ à partir de celle de X.
- Définir et éventuellement calculer une fonction de répartition F_X.
- Énoncer et éventuellement exploiter l'indépendance de variables aléatoires.

Pour les ambitieux

- Connaître la définition "théorique" d'une variable aléatoire discrète.
- Déterminer une loi de probabilité à partir d'évènements $[X \leqslant k]$, $[X \geqslant k]$, à partir d'une relation de récurrence, avec la formule des probas totales, etc...