1

Logique, symboles, raisonnement mathématique

1 Propositions logiques

1.1 Définition et opérations logiques

Définition 1 (Proposition logique)

Une proposition logique est une affirmation qui peut être soit vraie, soit fausse.
Cette affirmation peut prendre la forme d'une expression mathématique ou d'une phrase en français (ou d'un "mélange" des deux)

Exemples

- J'ai 18 ans.
- $\sqrt{3} < 1$.
- La suite u est croissante.
- La fonction g est continue.

Remarque 1

Au sein d'une rédaction mathématique, pour annoncer qu'une proposition logique $\mathcal{A}$ est vraie, on se contente souvent d'écrire : "$\mathcal{A}$" ou bien "On a : $\mathcal{A}$" à la place de "$\mathcal{A}$ est vraie".

Ainsi, écrire simplement "$\sqrt{3} < 2$" a le même sens que "La proposition $\sqrt{3} < 2$ est vraie".

Définition 2 ("ou", "et")

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions logiques.

($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est une proposition logique qui est vraie lorsque au moins une des propositions logiques $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ est vraie.

($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) est une proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont simultanément vraies.

On a ainsi les tables de vérité suivantes :

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$
vraie	vraie	vraie
vraie	fausse	vraie
fausse	vraie	vraie
fausse	fausse	fausse

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$
vraie	vraie	vraie
vraie	fausse	fausse
fausse	vraie	fausse
fausse	fausse	fausse

Remarque 2

Notons qu'il s'agit d'un "ou" inclusif : si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont toutes les deux vraies, alors ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est vraie.

Exemples

Pour un réel x, on dispose des propositions logiques : "$x = 1$ ou $x = -1$", "$1 < x$ et $x < 3$".
Cette dernière s'écrit plus simplement : "$1 < x < 3$".

Définition 3 (Négation)

Soit $\mathcal{A}$ une proposition logique.

$non(\mathcal{A})$ est une proposition logique qui est vraie lorsque $\mathcal{A}$ est fausse.

On l'appelle la négation de $\mathcal{A}$.

Exemples

Soit x un réel.

- Si $\mathcal{A}$ est "$x = 0$", $non(\mathcal{A})$ est "$x \neq 0$".
- Si $\mathcal{B}$ est "$x \geqslant 5$", $non(\mathcal{B})$ est "$x < 5$".

Proposition 1 (Propriétés de la négation)

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions logiques.

- La négation de $non(\mathcal{A})$ est $\mathcal{A}$.
- La négation de ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) est ($non(\mathcal{A})$ ou $non(\mathcal{B})$).
- La négation de ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est ($non(\mathcal{A})$ et $non(\mathcal{B})$).

Exercice 1

Soit x un réel. Écrire la négation des propositions logiques suivantes :

- $\mathcal{A}$: "$x = \pm 1$", • $\mathcal{B}$: "$x > 0$ ou $x \leqslant -1$", • $\mathcal{C}$: "$-1 < x < 1$"

- $\mathcal{A}$ se ré-écrit : "$x = 1$ ou $x = -1$" donc $non(\mathcal{A})$: "$x \neq 1$ et $x \neq -1$"
- $non(\mathcal{B})$: "$x \leqslant 0$ et $x > -1$" se qui se ré-écrit "$-1 < x \leqslant 0$"
- $\mathcal{C}$ se ré-écrit : "$-1 < x$ et $x < 1$" donc $non(\mathcal{C})$: "$x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$"

1.2 Implication, implication réciproque, contraposée

Définition 4 (Implication)

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions logiques. On dit que "$\mathcal{A}$ implique $\mathcal{B}$" et on note $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ lorsque :

"Si $\mathcal{A}$ est vraie, alors $\mathcal{B}$ est vraie".

Dans ce cas, on dit aussi que :
- $\mathcal{A}$ est une condition suffisante pour que $\mathcal{B}$ soit vraie (pour que $\mathcal{B}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{A}$ soit vraie !)
- $\mathcal{B}$ est une condition nécessaire pour que $\mathcal{A}$ soit vraie (pour que $\mathcal{A}$ soit vraie, il faut que $\mathcal{B}$ soit vraie !).

Exemples

Soit x un réel.

- On a : $x \in [0, 1] \Longrightarrow x \geqslant 0$. • On a : $x > 0 \Longrightarrow 2x + 3 > 2$.
- On a : $x^2 = 1 \Longrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1)$. • L'implication $x^2 > 4 \Longrightarrow x > 2$ est fausse !

En effet il est possible que $x^2 > 4$ sans pour autant que $x > 2$. C'est le cas pour $x = -3$ par exemple.

Remarque 3

Notons que l'implication $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$ est fausse lorsque l'on peut avoir $\mathcal{A}$ vraie et $\mathcal{B}$ fausse.
On pourra ainsi retenir la négation logique de l'implication $\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$:

$$\boxed{non(\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}) : \quad (\mathcal{A} \text{ et } non(\mathcal{B}))}$$

Exercice 2

Écrire la négation de la proposition logique : "S'il fait beau, je mets des lunettes de soleil"

Cette proposition peut se ré-écrire : Beau $\Longrightarrow$ Lunettes.
La négation est donc : Beau et non(Lunettes), c'est à dire : "Il fait beau et je n'ai pas de lunettes".

Attention !

Lorsqu'on a $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, cela signifie que "sous l'hypothèse $\mathcal{A}$, on a $\mathcal{B}$". Ainsi :

- Si $\mathcal{A}$ est vraie, $\mathcal{B}$ est vraie.
- Si $\mathcal{A}$ est fausse, $\mathcal{B}$ peut être vraie ou bien fausse !

En particulier, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ne signifie par pour autant que $non(\mathcal{A}) \Rightarrow non(\mathcal{B})$!

Définition 5 (Implication réciproque)

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions logiques.
La réciproque de l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est l'implication : $\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A}$.

Exemples

Soit x un réel.

- $x^2 = 1 \Longrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1)$ est vraie, et sa réciproque $(x = 1 \text{ ou } x = -1) \Longrightarrow x^2 = 1$ aussi.
- $x > 1 \Longrightarrow x^2 > 1$ est vraie, mais sa réciproque $x^2 > 1 \Longrightarrow x > 1$ est fausse !

Attention !

Ainsi, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ne signifie par pour autant que $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$!

Définition 6 (Contraposée)

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions logiques.
La contraposée de l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est l'implication : $non(\mathcal{B}) \Longrightarrow non(\mathcal{A})$.

Intérêt : L'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie si et seulement si l'implication $non(\mathcal{B}) \Rightarrow non(\mathcal{A})$ est vraie !

Exemple

L'affirmation "Si tu mesures moins de 2 mètres, alors tu peux passer la porte" est parfaitement équivalente à : "Si tu ne peux pas passer la porte, alors tu mesures plus de 2 mètres".

1.3 Équivalence

Définition 7 (Équivalence)

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux propositions logiques.
On dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalentes, et on note $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$ lorsque l'on a à la fois $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$.

Dans ce cas, on dit aussi que :

- $\mathcal{A}$ est vraie si et seulement si $\mathcal{B}$ est vraie.
- $\mathcal{A}$ est une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que $\mathcal{B}$ soit vraie.

(pour que $\mathcal{B}$ soit vraie, il faut et il suffit que $\mathcal{A}$ soit vraie !)

Exemples

Soit x un réel. Compléter avec les symboles d'implication/équivalence appropriés :

- $x^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1 \text{ ou } x = -1$
- $x > 2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 > 4$
- $2x + 2 > 0 \quad \Longleftarrow \quad x > 0$

Attention !

Lorsque les propositions logiques dépendent d'un ou plusieurs paramètres (x dans les exemples précédents), il est indispensable de préciser dans quel ensemble on prend ce paramètre avant d'écrire une implication ou une équivalence !

- Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équivalence $x = 1 \iff x^2 = 1$ est fausse. (Implication réciproque fausse)
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$. L'équivalence $x = 1 \iff x^2 = 1$ est vraie !

Méthode : Déterminer une "CNS"

Déterminer une CNS (condition nécessaire et suffisante) pour qu'une proposition $\mathcal{A}$ soit vraie, c'est déterminer une proposition $\mathcal{B}$ (en général plus "simple" que $\mathcal{A}$!) telle que : $\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$.

Exemple : Soit x un réel. Déterminer une CNS pour que $(2x+1)(x-2) > 0$.
On a les équivalences :

$$\begin{aligned}(2x+1)(x-2) > 0 &\iff (2x+1 > 0 \text{ et } x-2 > 0) \text{ ou } (2x+1 < 0 \text{ et } x-2 < 0)\\ &\iff (x > -1/2 \text{ et } x > 2) \text{ ou } (x < -1/2 \text{ et } x < 2)\\ &\iff x > 2 \text{ ou } x < -1/2.\end{aligned}$$

Une CNS est donc : "$x > 2$ ou $x < -1/2$"

1.4 Quantificateurs

Définition 8 (Symboles "quel que soit" et "il existe")

- Le symbole $\forall$ signifie : "quel que soit" ou bien "pour tout".
- Le symbole $\exists$ signifie : "il existe ... tel que".

Pour spécifier l'unicité, on écrit parfois $\exists!$ pour signifier : "il existe un unique ... tel que".

Exemples

Traduire les propositions logiques suivantes avec des quantificateurs :

- "Tout réel de $[0,1]$ est strictement positif" : $\forall x \in [0,1],\ x > 0$
- "Pour tout x réel, $f(x)$ est négatif" : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0.$
- "Il existe un entier naturel n tel que $u_n > v_n$" : $\exists n \in \mathbb{N},\ u_n > v_n.$
- "La fonction g s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$" : $\exists! x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0.$
- "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante" : $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = C$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N},\ u_n = u_m.$

Attention !

Notons que les propositions $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$ et $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) \geqslant 0$ sont équivalentes !
Les variables x et y employées ici sont dites "muettes" : leur nom n'importe pas, elle sont introduites temporairement et ne font sens qu'au sein d'une seule affirmation.

Pour cette raison : **1)** Il est interdit d'utiliser les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ dans une phrase rédigée !
2) Si, au sein d'une démonstration, on souhaite utiliser une variable (x, y, n, etc...) pendant plus d'une affirmation, il est impératif de l'introduire dans une phrase en français !

Exemples

Ne pas écrire : "Montrons que $\exists x$ positif tel que $f(x) = 0$".
Écrire : "Montrons qu'il existe x positif tel que $f(x) = 0$" ou "Montrons : $\exists x \geqslant 0,\ f(x) = 0$".

Ne pas écrire : "On sait que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x^2$. Donc $g(2x) = (2x)^2 = 4x^2$."
Écrire : "On sait que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = x^2$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a donc $g(2x) = (2x)^2 = 4x^2$."

Ne pas écrire : "L'entier n est impair donc : $\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k+1$. On a alors $n^2 = 4k^2 + +4k + 1$"
Écrire : "L'entier n est impair : soit donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. On a alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$."

Proposition 2 (Négation et quantificateurs)

Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(x)$ une proposition logique qui dépend de $x \in E$.

La négation de $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ est $\exists x \in E,\ non(\mathcal{P}(x))$.

La négation de $\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ est $\forall x \in E,\ non(\mathcal{P}(x))$.

Exemples

Nier les propositions logiques suivantes :

- $non(\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant x)$: $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < x$
- *non*("Il existe un élève d'ECG1 qui est mineur") : "Tous les élèves d'ECG1 sont majeurs"
- *non*("La fonction f s'annule au moins une fois sur $[0,1]$") : $\forall x \in [0,1],\ f(x) \neq 0$.

Remarque 4

La négation "inverse" les quantificateurs successivement :

$$\begin{aligned} non(\forall x \in E, \exists y \in E,\ \mathcal{P}(x,y)) &\iff \exists x \in E, non(\exists y \in E,\ \mathcal{P}(x,y)) \\ &\iff \exists x \in E, \forall y \in E,\ non(\mathcal{P}(x,y)). \end{aligned}$$

Exemples

- $non(\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y))$: $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(y)$
- $non(\forall a \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n > a)$: $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant a$.

2 Rédaction et raisonnements

2.1 Méthodologie générale

Méthode : Rédaction mathématique

1	**Annonces**	Hypothèses éventuelles (**Supposons que...**). Résultat que l'on va démontrer (**Montrons que... (Mq)**) Préciser éventuellement le raisonnement (**Absurde, récurrence...**)
2	**Développement**	Coeur du raisonnement. (**Soit... On a... Donc... Ainsi...**)
3	**Conclusion**	Bilan de ce qui vient d'être fait. (**On a bien montré que ...**)

- Chaque **variable** $(x, n, f\ldots)$ utilisée au cours de la démonstration doit être **introduite** au préalable !
  - Dans une expression avec des quantificateurs pour une utilisation "ponctuelle".
  - Dans une phrase rédigée ("Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que...", "On peut introduire $y > 0$ tel que...") si les variables sont employées plusieurs fois.
  - Il n'est pas nécessaire d'introduire les variables déjà présentées dans l'énoncé de la question.
- Faire bon usage des **connecteurs logiques** en français, pour clarifier le fil du raisonnement.
  - Pour rappeler les hypothèses/faits établis : "On a", "On sait que", "Rappelons que", "Or"
  - Pour annoncer un fait qui découle ($\Rightarrow$) : "Donc", "Par suite", "Il en résulte", "On en déduit"
  - Pour annoncer un fait équivalent ($\iff$) : "C'est à dire", "Id est (ou juste i.e)"
  - Pour justifier un enchaînement : "Car", "Puisque", "Comme"
  - Pour faire un bilan : "Ainsi", "Pour conclure' '

2.2 Démontrer une implication...

...Par raisonnement direct

Pour démontrer l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, le raisonnement direct consiste simplement à supposer que $\mathcal{A}$ est vraie et démontrer qu'alors $\mathcal{B}$ est vraie.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n est pair, alors n^2 est pair.

Supposons que n est pair. Montrons que n^2 est pair.
Puisque n est pair, on peut introduire $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. On a donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$.
On peut ainsi écrire $n^2 = 2k'$ avec $k' = 2k^2 \in \mathbb{N}$. On a bien montré que n^2 est pair. $\square$

...Par contraposition

On a vu que l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ est vraie si et seulement si sa contraposée $non(\mathcal{B}) \Rightarrow non(\mathcal{A})$ est vraie.

Si l'on souhaite démontrer l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, il est parfois plus simple de démontrer sa contraposée !

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

On veut montrer l'implication : n^2 pair $\Rightarrow$ n pair.
Par contraposition, montrons plutôt : n impair $\Rightarrow$ n^2 impair.

Supposons que n est impair. Montrons que n^2 est impair.

Puisque n est impair, on peut introduire $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
On a donc $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$.

On peut ainsi écrire $n^2 = 2k' + 1$ avec $k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. On a bien montré que n^2 est impair. $\square$

Remarque 5

Les deux exercices précédents permettent d'affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad n$ est pair $\Longleftrightarrow$ n^2 est pair.

2.3 Démontrer une équivalence...

...Par équivalences successives

Pour démontrer une équivalence $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$, il est parfois possible de procéder par équivalences successives : on part de $\mathcal{A}$ et on essaye de ré-exprimer la proposition jusqu'à obtenir $\mathcal{B}$. Les équivalences successives sont particulièrement utiles lorsqu'il s'agit de résoudre des équations ou des inéquations.

Exercice 5

Soient $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Montrer que : $\dfrac{a+1}{b+1} = \dfrac{a-1}{b-1} \Longleftrightarrow a = b$.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned}\frac{a+1}{b+1}=\frac{a-1}{b-1} \iff (a+1)=\frac{(a-1)(b+1)}{b-1} &\iff (a+1)(b-1)=(a-1)(b+1)\\ &\iff ab-a+b-1=ab+a-b-1\\ &\iff 2b=2a\\ &\iff a=b. \ \square\end{aligned}$$

Attention !

Le symbole $\iff$ a un sens logique précis et n'est pas à utiliser à la légère !
À chaque étape d'un raisonnement par équivalence, il faut s'assurer que l'on peut bien "revenir en arrière", c'est à dire que l'on a bien une double implication et pas seulement une implication simple (sans quoi la "chaîne d'équivalence" est rompue !)

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$. Quel est le problème dans le raisonnement suivant ?

$$\begin{aligned}x^2=1 \iff x^2-1=0 \iff (x-1)(x+1)=0 \iff x(x+1)-(x+1)=0 &\iff x(x+1)=(x+1)\\ &\iff x=1\end{aligned}$$

...Par double-implication

Lorsque les équivalences successives ne sont pas aisées à mettre en oeuvre, pour montrer $\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$, on procédera par double-implication : on montre l'implication $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et l'implication réciproque $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$.

Bien-sûr plutôt que $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$, on peut démontrer sa contraposée, ce qui revient en fait à montrer $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ et $non(\mathcal{A}) \Rightarrow non(\mathcal{B})$. (Si $\mathcal{A}$ est vraie $\mathcal{B}$ est vraie, si $\mathcal{A}$ est fausse $\mathcal{B}$ est fausse).

Exercice 6

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad a^2+b^2=0 \iff a=b=0$.

- Montrons l'implication $a^2+b^2=0 \Rightarrow a=b=0$.

Supposons $a^2+b^2=0$. Comme $a^2 \geqslant 0$ et $b^2 \geqslant 0$, on a $0 \leqslant a^2 \leqslant a^2+b^2=0$, d'où $a=0$.
De même, $0 \leqslant b^2 \leqslant a^2+b^2=0$, d'où $b=0$. On a bien $a=b=0$.

- L'implication réciproque $a=b=0 \Rightarrow a^2+b^2=0$ est évidente.

On a bien montré l'équivalence voulue. $\square$

2.4 Disjonction de cas

Pour démontrer qu'une proposition logique $\mathcal{A}$ est vraie, il est parfois nécessaire de distinguer plusieurs cas et de montrer que $\mathcal{A}$ est vraie dans chacun de ces cas.

Exercice 7

Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x-1|-|x-2|+1 \geqslant 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrons que $|x-1|-|x-2|+1 \geqslant 0$.

Rappelons que $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x-1 \geqslant 0 \\ -(x-1) & \text{si } x-1<0 \end{cases}$ et $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x-2 \geqslant 0 \\ -(x-2) & \text{si } x-2<0 \end{cases}$.

• Si $x < 1$ alors $|x-1| = -(x-1) = -x+1$ et $|x-2| = -(x-2) = -x+2$
donc $|x-1| - |x-2| + 1 = 1 - 2 + 1 = 0 \geqslant 0$.

• Si $1 \leqslant x < 2$ alors $|x-1| = x-1$ et $|x-2| = -(x-2) = -x+2$
donc $|x-1| - |x-2| = 2x - 2 = 2(x-1) \geqslant 0$ car $x \geqslant 1$.

• Si $2 \leqslant x$ alors $|x-1| = x-1$ et $|x-2| = x-2$
donc $|x-1| - |x-2| = 2 \geqslant 0$.

Dans tous les cas, on a bien $|x-1| - |x-2| + 1 \geqslant 0$.
C'est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc bien montré : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| - |x-2| + 1 \geqslant 0$. $\square$

Au passage, on a appliqué dans cet exercice la méthode suivante :

Méthode : Démontrer un " $\forall$ "

Pour démontrer une proposition logique du type $\boxed{\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)}$:

1. Introduire un $x \in E$ fixé.
2. Montrer que x satisfait $\mathcal{P}(x)$.
3. Conclure : " C'est valable pour tout $x \in E$, d'où le résultat. "

2.5 Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition logique $\mathcal{A}$ est vraie, il est parfois plus naturel de raisonner par l'absurde.

Méthode : Démontrer $\mathcal{A}$ par l'absurde

1. Supposer que $\mathcal{A}$ est faux (c'est à dire, prendre *non*$(\mathcal{A})$ comme hypothèse).
2. Aboutir à une absurdité ou à la contradiction d'un fait établi.
3. Conclure : " Contradiction : c'est donc que $\mathcal{A}$ est vraie. "

Exercice 8

Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel : il existe donc $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.
Quitte à faire des simplifications, on peut supposer que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible, c'est à dire que p et q n'ont pas de facteur commun.

On a $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, donc $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$ c'est à dire $2q^2 = p^2$. Ceci montre que p^2 est pair.

On en déduit (résultat vu) que p est pair : on peut introduire $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$.

L'égalité $2q^2 = p^2$ se réécrit donc $2q^2 = 4k^2$, i.e $q^2 = 2k^2$. Ceci montre que q^2 est pair.
On en déduit (résultat vu) que q est pair.

Ainsi, on a montré que p et q sont divisibles par 2, or c'est impossible car il n'ont pas de facteur commun ! Contradiction : c'est donc que $\sqrt{2}$ est irrationnel. $\square$

2.6 Raisonnement par analyse-synthèse

L'Analyse-Synthèse est souvent adaptée pour démontrer l'existence d'un élément vérifiant une certaine propriété.

Méthode : Démontrer une existence par analyse-synthèse

On souhaite démontrer une proposition logique du type $\boxed{\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)}$:

$\boxed{1}$ **Analyse :** Supposer que l'on dispose bel et bien d'un x vérifiant la propriété $\mathcal{P}$.
Chercher à obtenir un maximum d'information visant à identifier le x en question : on détermine ainsi un (ou plusieurs) "candidats" susceptibles de répondre au problème posé.
(Cette étape peut éventuellement se faire au brouillon)

$\boxed{2}$ **Synthèse :** Reporter le (ou les) candidats trouvés dans le problème initial, et déterminer s'ils satisfont bien la propriété $\mathcal{P}$ voulue.

$\boxed{3}$ **Conclusion :** On conclut quant à l'existence d'un (ou plusieurs) x satisfaisant la propriété $\mathcal{P}$.

Exercice 9

Montrer que pour tout réel $y \neq \frac{1}{2}$, il existe $x \neq \frac{1}{2}$ tel que $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$.

Soit $y \neq \frac{1}{2}$ fixé. Montrons qu'il existe $x \neq \frac{1}{2}$ tel que $y = \frac{x+1}{2x-1}$.

- Analyse : Supposons que l'on dispose d'un tel x. On a les équivalences :

$$y = \frac{x+1}{2x-1} \iff (2x-1)y = x+1 \iff 2xy - y = x+1 \iff x(2y-1) = y+1 \iff x = \frac{y+1}{2y-1}.$$

Ainsi, on a nécessairement $x = \dfrac{y+1}{2y-1}$.

- Synthèse : posons $x = \dfrac{y+1}{2y-1}$. Les équivalences précédentes montre qu'on a bien $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$.

Il faut aussi vérifier que $x \neq \frac{1}{2}$! Or on a les équivalences :

$$x = \frac{1}{2} \iff \frac{y+1}{2y-1} = \frac{1}{2} \iff 2(y+1) = 2y-1 \iff 2y+2 = 2y-1 \iff 2 = -1, \text{ ce qui est faux.}$$

On a donc bien $x \neq \frac{1}{2}$.

- Conclusion : on a montré qu'il existe un (unique !) $x \neq \frac{1}{2}$ tel que $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$.

C'est valable pour tout $y \neq \frac{1}{2}$, d'où le résultat voulu. $\square$

Remarque 6

Ici, le raisonnement par analyse-synthèse a permis de montrer existence ET unicité :

- L'analyse montre l'unicité : "Si jamais il existe un x tel que ... c'est forcément celui-là !"
- La synthèse assure l'existence : "On vérifie que celui-là satisfait bien la propriété ... ".

Le raisonnement par analyse-synthèse est également adapté lorsque l'on cherche à décrire exactement l'ensemble des solutions d'un problème donné.

Méthode : Déterminer un ensemble de solutions par analyse-synthèse

On cherche à déterminer tous les $x \in E$ satisfaisant une propriété $\mathcal{P}(x)$.

$\boxed{1}$ **Analyse :** Soit $x \in E$ satisfaisant $\mathcal{P}(x)$. On en déduit que ...
Déterminer ainsi un ensemble (restreint) de solutions potentielles.

$\boxed{2}$ **Synthèse :** Parmi ces solutions potentielles, vérifier lesquelles satisfont bel et bien la propriété $\mathcal{P}$.

$\boxed{3}$ **Conclusion.**

Exercice 10

Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $n^2 < 3n + 2$.

- Analyse : soit $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant $n^2 < 3n + 2$.
On a soit $n = 0$, soit $n \neq 0$ et alors $n < 3 + \frac{2}{n} \leqslant 3 + 2$, donc $n < 5$.
Ainsi, nécessairement, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

- Synthèse : On vérifie quels $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ satisfont bien $n^2 < 3n + 2$.
Seuls $n = 0, 1, 2, 3$ conviennent.

- Conclusion : L'ensemble des solutions est exactement : $\{0, 1, 2, 3\}$. $\square$

3 Raisonnement par récurrence

Considérons une proposition logique $\mathcal{P}(n)$ qui dépend d'un entier naturel n.

Exemples

- $\mathcal{P}(n)$: " $3^n > 2^n + 1$ "
- $\mathcal{P}(n)$: " L'entier 5^n est impair"

Soit n_0 un entier fixé. (Dans la majorité des cas, $n_0 = 0$ ou 1).

On souhaite démontrer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0.

Autrement dit, on veut montrer : $\boxed{\forall n \geqslant n_0,\ \mathcal{P}(n)}$.

3.1 Récurrence simple

Le principe de récurrence simple s'apparente à des dominos qui dégringolent...
- Si on sait que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie
- Si, quel que soit $n \geqslant n_0$ fixé, on a l'implication $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ ($\mathcal{P}(n)$ " entraîne " $\mathcal{P}(n+1)$)

Alors, on en déduit que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour n'importe quel entier $n \geqslant n_0$!

Méthode : Rédiger une récurrence simple

Avant de commencer :

- Énoncer clairement l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$: " Posons $\mathcal{P}(n)$: ... ".
- Annoncer ce qui va être démontré : "Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$."

Rédiger la récurrence :

$\boxed{1}$ **Initialisation :** " Vérifions que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie. "

$\boxed{2}$ **Hérédité :** " Soit $n \geqslant n_0$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. "

$\boxed{3}$ **Conclusion :** "D'après le principe de récurrence, on conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$."
(ou, si on est économe, "Ceci achève la récurrence.")

Exercice 11

Soit $x \geqslant 0$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Posons $\mathcal{P}(n)$: " $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ " et montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- Initialisation : Vérifions que $\mathcal{P}(0)$ est vraie : on a bien $(1+x)^0 = 1 \geqslant 1+0\times x$.

- Hérédité : Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
On suppose donc $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ et on veut montrer : $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$. On a :

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\times(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x.$$

On a bien montré $\mathcal{P}(n+1)$.

D'après le principe de récurrence, on conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$. $\square$

Attention !

- L'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$ doit être une proposition qui dépend **uniquement** de n !

Exemple : On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\quad u_0 = 2 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
On souhaite montrer à l'aide d'une récurrence simple que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Ne pas poser : $\mathcal{P}(n)$: " La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante " (cela n'a pas de sens : que serait $\mathcal{P}(0)$? $\mathcal{P}(1)$?)

Poser $\mathcal{P}(n)$: " $u_{n+1} \leqslant u_n$ " afin de montrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} \leqslant u_n$.

- Pour les mêmes raisons, ne **jamais écrire "$\forall n$" dans l'hypothèse $\mathcal{P}(n)$!**

Ne pas poser : $\mathcal{P}(n)$: " $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^n > 2^n+1$" (cela n'a pas de sens : que serait $\mathcal{P}(0)$? $\mathcal{P}(1)$?)

Poser $\mathcal{P}(n)$: " $3^n > 2^n+1$" afin de montrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 0,\ 3^n > 2^n+1$.

3.2 Récurrence double

Parfois, une récurrence simple ne suffit pas, et on a besoin de supposer que $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ sont vraies pour pouvoir démontrer $\mathcal{P}(n+1)$. On parle alors de récurrence double :

- Si on sait que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies
- Si, quel que soit $n \geqslant n_0+1$ fixé, on a l'implication $(\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$

Alors, on en déduit que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$!

Méthode : Rédiger une récurrence double

Avant de commencer :

- Énoncer l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$: " Posons $\mathcal{P}(n)$: ... ".
- Annoncer : "Montrons par récurrence double que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$."

Rédiger la récurrence :

1. **Initialisation :** " Vérifions que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies. "
2. **Hérédité :** " Soit $n \geqslant n_0+1$ (denier rang de l'initialisation) fixé.
Supposons $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$. "
3. **Conclusion :** "D'après le principe de récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$."

(ou, si on est économe, "Ceci achève la récurrence double.")

Exercice 12

On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $\quad x_0 = 1,\ x_1 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant 2^n$.

Posons $\mathcal{P}(n)$: “ $x_n \leqslant 2^n$ ” et montrons par récurrence double que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- Initialisation : Vérifions que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies : $x_0 = 1 \leqslant 2^0 = 1$ et $x_1 = 1 \leqslant 2^1 = 2$.

- Hérédité : Soit $n \geqslant 1$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire : $x_{n+1} \leqslant 2^{n+1}$.
Par hypothèse, on sait que $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, donc d'après $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$,

$$x_{n+1} \leqslant 2^n + 2^{n-1} \leqslant 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

On a bien montré $\mathcal{P}(n+1)$. Ceci achève la récurrence double. $\square$

Remarques 7

- **Variante pour l'hérédité :** “ Soit $n \geqslant n_0$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$, montrons $\mathcal{P}(n+2)$. ”
Cette variante est parfois plus adaptée. Attention à bien adapter les indices dans la démonstration !

- On pourrait sans problème généraliser le principe à une récurrence triple, quadruple, etc...

3.3 Récurrence forte

Dans certains cas, il est nécessaire de supposer que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k < n+1$ pour pouvoir démontrer $\mathcal{P}(n+1)$! On parle alors de récurrence forte.

Méthode : Rédiger une récurrence forte

Avant de commencer :

- Énoncer l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$: “ Posons $\mathcal{P}(n)$: ... ”.
- Annoncer : “Montrons par récurrence forte que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.”

Rédiger la récurrence :

$\boxed{1}$ **Initialisation :** “ Vérifions que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie. ”

$\boxed{2}$ **Hérédité :** “ Soit $n \geqslant n_0$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![n_0, n]\!]$ (i.e $n_0 \leqslant k \leqslant n$) et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. ”

$\boxed{3}$ **Conclusion :** “D'après le principe de récurrence forte, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.”
(ou, si on est économe, “Ceci achève la récurrence forte.”)

Exercice 13

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\quad u_0 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = 1$.

Posons $\mathcal{P}(n)$: “ $u_n = 1$ ” et montrons par récurrence forte que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- Initialisation : Vérifions que $\mathcal{P}(0)$ est vraie : $u_0 = 1$.

- Hérédité : Soit $n \geqslant 0$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
Montrons $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire $u_{n+1} = 1$.
On sait que $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, c'est à dire que $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $\ldots$, $u_n = 1$. Ainsi :

$$u_{n+1} = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1} = \frac{1+1+\ldots+1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1.$$

On a bien montré $\mathcal{P}(n+1)$. Ceci achève la récurrence forte. $\square$

4 Ensembles

4.1 Éléments, parties d'un ensemble

Un ensemble E est une collection non-ordonnée d'éléments.

Exemples

- $E = \{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\}$ $(= \{1, 1, 2, 4, 4, 4, 3\})$.
- Un singleton : $\{x\}$
- Une paire : $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Définition 9 (Appartenance, inclusion)

Soit E un ensemble. Soient A et B des parties (c'est-à-dire des sous-ensembles) de E.

- On dit qu'un élément x de E appartient à A, et on note $x \in A$, lorsque x est un élément de A. Lorsque x n'appartient pas à A, on note $x \notin A$.
- On dit que A est inclus dans B, et on note $A \subset B$, lorsque tout élément de A est un élément de B.

Autrement dit : $A \subset B \iff \forall x \in A,\ x \in B$.

Remarque 8

L'égalité $A = B$ équivaut à : $(A \subset B$ et $B \subset A)$.

Pour montrer que deux ensembles sont égaux, on montre souvent qu'il y a “double inclusion”.

Définition 10 (Ensemble vide)

L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Définition 11 (Ensemble des parties)

Soit E un ensemble quelconque. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.
Autrement dit, il s'agit de l'ensemble de tous les ensembles inclus dans E.

Exercice 14

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$.

$$\mathcal{P}(E) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, E\Big\}$$

$\square$

Attention !

Bien distinguer les symboles “appartenance” et “inclusion” !

Ne pas écrire : $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3\}$, $\quad 1 \subset \{1, 2, 3\}$, $\quad \{1, 2\} \subset \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$

Écrire : $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$, $\quad 1 \in \{1, 2, 3\}$, $\quad \{1, 2\} \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$

4.2 Ensembles usuels

Définition 12 (Ensembles de nombres)

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$

$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des nombres entiers relatifs. $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$

$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels,
c'est à dire des fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers relatifs.

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble de tous les nombres réels.

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble de tous les nombres complexes.

Remarque 9

Classiquement, on peut ajouter les symboles $+$, $-$, et/ou $*$ (en indice ou en exposant) pour désigner un sous-ensemble contenant uniquement les nombres positifs, négatifs, et/ou non-nuls.
Exemples : $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs, $\mathbb{N}^*$, l'ensemble des entiers naturels non-nuls.

Proposition 3

On a les inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Quand on ne peut pas lister tous les éléments d'un ensemble, on le décrira avec l'une des deux formes :

Méthode : Écrire un ensemble

• Un ensemble est donné sous forme explicite lorsque l'on décrit explicitement ses éléments, souvent en fonction d'un (ou plusieurs) paramètre(s) parcourant un ensemble donné.

$\Big\{x(t),\ t \in A\Big\}$ se lit : " L'ensemble des $x(t)$ pour t parcourant A "

Exemples : Ensemble des entiers pairs : $\Big\{2n,\ n \in \mathbb{Z}\Big\} = \Big\{2k,\ k \in \mathbb{Z}\Big\}$
Ensemble des rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*\right\} = \left\{\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*\right\}$
Image directe d'un intervalle par une fonction : $\Big\{t^2,\ t \in [-1, 1]\Big\}$

• Un ensemble est donné sous forme implicite lorsqu'on le décrit comme un ensemble d'éléments satisfaisant une certaine propriété.

$\Big\{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\Big\}$ se lit : " L'ensemble des x appartenant à E tels que $\mathcal{P}(x)$"

Exemples : Ensemble des entiers pairs : $\Big\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\Big\}$
Ensemble des rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}^*,\ x = \frac{p}{q}\right\}$
Ensemble de solutions d'une équation : $\Big\{z \in \mathbb{R} \mid z^3 - 2z^2 + z - 1 = 0\Big\}$
Ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent (au - une fois) : $\Big\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\Big\}$.

4.3 Opérations sur les ensembles

Définition 13 (Réunion, intersection, complémentaire)

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E.

- La réunion de A et B est le sous-ensemble noté $A \cup B$, constitué des éléments de E qui sont dans A **ou** dans B :

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ **ou** } x \in B\}$$

Pour tout $x \in E$, on a : $\quad x \in A \cup B \Longleftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \qquad x \notin A \cup B \Longleftrightarrow (x \notin A \text{ et } x \notin B)$

- L'intersection de A et B est le sous-ensemble noté $A \cap B$, constitué des éléments de E qui sont dans A **et** dans B :

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \textbf{ et } x \in B\}$$

Pour tout $x \in E$, on a : $\quad x \in A \cap B \Longleftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B) \qquad x \notin A \cap B \Longleftrightarrow (x \notin A \text{ ou } x \notin B)$

- La différence $A \setminus B$ (lire "A privé de B") est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Pour tout $x \in E$, on a : $\quad x \in A \setminus B \Longleftrightarrow (x \in A \text{ et } \ x \notin B)$

- Le complémentaire de A (dans E) est le sous-ensemble noté $\overline{A}$, constitué des éléments de E qui ne sont pas dans A :

$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\} = E \setminus A$$

Pour tout $x \in E$, on a : $\quad x \in \overline{A} \Longleftrightarrow x \notin A$

Dessin :

Remarque 10

Comme d'habitude, dans les expressions précédentes, le "ou" est inclusif !

Exemples

- $[1,3[\cup]2,4[=[1,4[$ $\quad$ et $\quad$ $[1,3[\cap]2,4[=]2,3[$.
- Dans $\mathbb{R}$, le complémentaire de $[0,1]$ est $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.
- $\mathbb{R}_+ \setminus [0,1] =]1,+\infty[$.

Définition 14 (Parties disjointes)

On dit que deux parties A et B d'un ensemble E sont disjointes lorsque : $A \cap B = \emptyset$.

Proposition 4 (Réunions, intersections particulières)

Soit A une partie d'un ensemble E. On a alors :

- $A \cap A = A \cup A = A$
- $A \cup E = E \quad$ et $A \cap E = A$
- $A \cup \emptyset = A \quad$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$

Proposition 5 (Propriétés de la réunion et de l'intersection)

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E.

- *Symétrie :* $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.
- *Associativité :* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- *Distributivité :* $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ et $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Remarque 11

Notons qu'on a toujours $\boxed{A \subset A \cup B \text{ et } B \subset A \cup B}$ ainsi que $\boxed{A \cap B \subset A \text{ et } A \cap B \subset B}$.

Proposition 6 (Propriétés du complémentaire)

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

- $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = E$.
- $\overline{\emptyset} = E$ et $\overline{E} = \emptyset$.
- $\overline{\overline{A}} = A$
- Si $A \subset B$ alors $\overline{B} \subset \overline{A}$.
- *Lois de (De) Morgan :* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Preuve des lois de Morgan :

Pour tout $x \in E$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\iff non(x \in A \cap B) \iff non(x \in A \text{ et } x \in B) \iff non(x \in A) \text{ ou } non(x \in B) \\ &\iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \iff x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B} \iff x \in \overline{A} \cup \overline{B}. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. L'autre égalité est similaire. □

Remarque 12

Les lois de Morgan sont donc à rapprocher du fait que, pour des proposition logiques,

$$non(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ est : } (non(\mathcal{A}) \text{ ou } non(\mathcal{B})), \qquad non(\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ est : } (non(\mathcal{A}) \text{ et } non(\mathcal{B}))$$

4.4 Réunion, intersection de plusieurs ensembles

Définition 15 (Réunion d'un nombre fini d'ensembles)

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties d'un ensemble E. La réunion des $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_n.$$

C'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à (au moins) l'un des A_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Autrement dit : $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left\{x \in E \mid \exists i \in [\![1, n]\!],\ x \in A_i\right\}$.

Définition 16 (Intersection d'un nombre fini d'ensembles)

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des parties d'un ensemble E. L'intersection des $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est :

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} A_i = A_1 \cap \dots \cap A_n.$$

C'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à tous les A_i, pour $i \in [\![1,n]\!]$.

Autrement dit : $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \Big\{x \in E \mid \forall i \in [\![1,n]\!],\ x \in A_i\Big\}$.

Exemples

- $\bigcup\limits_{i=1}^{4} [i, i+1] = [1,2] \cup [2,3] \cup [3,4] \cup [4,5] = [1,5]$.
- $\bigcap\limits_{i=1}^{3} \left[0, \dfrac{1}{i}\right] = [0,1] \cap [0, \frac{1}{2}] \cup [0, \frac{1}{3}] = [0, \frac{1}{3}]$.

Proposition 7 (Propriétés de la réunion et de l'intersection)

Soient $A_1, \dots, A_n$ une famille de parties d'un ensemble E et B une partie de E.

- *Distributivité :* $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$ et $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \cup B = \bigcap\limits_{i=1}^{n} (A_i \cup B)$
- *Lois de (De) Morgan :* $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ et $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

Preuve des lois de Morgan :

Pour tout $x \in E$, on a les équivalences :

$$x \in \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} \iff non(x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i) \iff non(\forall i \in [\![1,n]\!],\ x \in A_i) \iff \exists i \in [\![1,n]\!],\ non(x \in A_i)$$
$$\iff \exists i \in [\![1,n]\!],\ x \notin A_i \iff \exists i \in [\![1,n]\!],\ x \in \overline{A_i} \iff x \in \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

Ceci montre que $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. L'autre égalité est similaire. $\square$

Remarque 13

On pourra noter les associations : $\boxed{\cup \longleftrightarrow \text{“ou”} \longleftrightarrow \exists}$ $\boxed{\cap \longleftrightarrow \text{“et”} \longleftrightarrow \forall}$ $\boxed{\overline{A} \longleftrightarrow \text{“non”}}$

4.5 Produit cartésien

Définition 17 (Produit cartésien de deux ensembles)

Soient E et F deux ensembles.
Le produit cartésien de E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$:

$$E \times F = \Big\{(x,y),\ x \in E,\ y \in F\Big\}$$

Par convention, l''ensemble $E \times E$ se note simplement E^2.

☛ Exemples

• Considérons les ensembles
$E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$.
$E \times F = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

$E \times F$	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)

• Le plan usuel est le produit cartésien $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
À chaque point du plan correspond un couple (x, y) de coordonnées :
$x \in \mathbb{R}$ désigne l'abscisse, $y \in \mathbb{R}$ désigne l'ordonnée.

⚠ Attention !

Il est toujours faux (et même dénué de sens !) d'écrire $E \subset E \times F$ ou bien $F \subset E \times F$.

Les éléments de $\mathbb{R}$ sont des nombres réels. Exemple : $-1 \in \mathbb{R}$.
Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont des couples de réels. Exemple : $(-1, 2) \in \mathbb{R}^2$.

Définition 18 (Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles)

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles. Le produit cartésien $E_1 \times \ldots \times E_n$ est défini comme

$$E_1 \times \ldots \times E_n = \Big\{(x_1, ..., x_n),\ \ x_1 \in E_1,\ \ldots\ , x_n \in E_n\Big\}.$$

Les éléments de $E_1 \times \ldots \times E_n$ sont appelés des n-uplets.
Lorsque $n = 2$, on parle de couples ; Lorsque $n = 3$, on parle de triplets.

On définit également $E^n = E \times ... \times E$ (n fois).

☛ Exemples

• $(1, \sqrt{2}, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

• L'ensemble $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est l'espace usuel à 3 dimensions : on repère un point dans l'espace à l'aide d'un triplet (x, y, z), donnant 3 coordonnées.

• Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mathbb{R}^n$: c'est l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in \mathbb{R}$.

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :

Au minimum

- Maitriser la notion d'implication entre proposition logiques : implication directe, réciproque, contraposée, équivalence.
- Interpréter et traduire une affirmation à l'aide de quantificateurs ($\forall$ et $\exists$).
- Rédiger proprement une démonstration.
- Rédiger une récurrence simple ou double.
- Écrire proprement un ensemble (forme explicite ou implicite).
- Manipuler réunion, intersection, complémentaire (distributivité, lois de Morgan).

Pour suivre

- Traduire réunion, intersection, complémentaire à l'aide de quantificateurs.
- Raisonner par l'absurde et par analyse-synthèse.
- Rédiger une récurrence forte.
- Déterminer facilement une réunion ou une intersection de n ensembles.

Pour les ambitieux

$\{\ \emptyset$