TP # 9

Résolution d'équations par dichotomie

Calcul approché d'une solution de $f(x) = 0$ par dichotomie

Soient $a < b$ et f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ avec $\underline{f(a) < 0 < f(b)}$.

Le T.V.I garantit que l'équation $\boxed{f(x) = 0}$ admet (au moins) une solution dans $[a, b]$.

On peut approcher une telle solution à l'aide des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ suivantes :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases} \quad \text{puis pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on pose } c_n = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et :}$$

- $\underline{\text{Si } f(c_n) < 0}$, on pose $\begin{cases} a_{n+1} = c_n \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$
- Sinon, on pose $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_n \end{cases}$

Par construction, on a alors :

(1) $\forall n \in \mathbb{N},\ a \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b$ **(2)** $\forall n \in \mathbb{N},\ f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n)$

(3) $(a_n)_{n\geqslant 0}$ croissante, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ décroissante, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$.

Ainsi, les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers une même limite $c \in [a, b]$, qui satisfait, en passant à la limite dans **(2)** : $\boxed{f(c) = 0}$.

Notons qu'on a toujours l'encadrement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant c \leqslant b_n}$.

Pour un $\varepsilon > 0$ fixé, on aura à partir d'un certain rang $\underline{b_n - a_n \leqslant \varepsilon}$,
c'est à dire que le segment $[a_n, b_n]$ contenant c sera de longueur inférieure à ε.

Le calcul de a_n et/ou b_n pour une valeur de n suffisamment grande fournit donc une bonne approximation d'une solution c de l'équation $f(x) = 0$.

Dessin :

Mise en pratique

Exercice 1

Calcul approché d'une racine d'un polynôme

On considère la fonction polynômiale définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 1$.

1. Déterminer rapidement le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
En déduire que f admet une unique racine α et que de plus $\alpha \in]-1, 0[$.

2. Définir la fonction f en Python :

3. Compléter le script suivant pour que la fonction `dichotomie(eps)` renvoie deux valeurs encadrant α à `eps` près.

```
def dichotomie(eps) :
    a = ... ;   b = ...
    while ................ :
        c = (a+b)/2
        if .............. :
            a = .......
        else :
            b = .......
    return(a,b)
```

4. Donner une approximation de α avec 3 chiffres (corrects !) après la virgule :

On choisit `eps` = ... : on obtient : .... $\leqslant \alpha \leqslant$ ....

On en déduit $\alpha \simeq$ ....

Exercice 2

1. Montrer que l'équation $\tan(x) - \frac{1}{2} = 0$ (d'inconnue x) admet une unique solution sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Justifier qu'elle appartient à $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Quelle est en fait cette solution ?

2. Adapter les fonctions `f` et `dichotomie` définies dans l'exercice précédent, pour calculer une approximation de la valeur $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$, à ε près, par valeur inférieure.

```
def f(x) :
```

```
def dichotomie(eps) :
    a = ... ;   b = ...
    while ................ :
        c = (a+b)/2
        if .............. :
            a = .......
        else :
            b = .......
    return( ... )
```

Approximation de $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ à 10^{-5} près : ....

Exercice 3

Le cas "$f(a) > 0 > f(b)$".

On considère la fonction définie par $\forall x > 0,\ f(x) = \ln(5x) - x$.

1. Calculer les valeurs suivantes à l'aide de Python.

$f(1) \simeq$ .... et $f(3) \simeq$ ....

Ainsi, d'après le T.V.I, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur $[1, 3]$.
(Cette solution est en fait unique : f est strictement décroissante sur $[1, 3]$...)

On est dans le cas où $f(a) > 0 > f(b)$ (avec $a = 1$ et $b = 3$ ici).
Deux options pour mettre en place l'algorithme de dichotomie dans ce cas :

Option 1 : Adapter la définition des suites dichotomiques $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$:
Si $f(c_n) < 0$ on pose cette fois $b_{n+1} = c_n$, sinon on pose $a_{n+1} = c_n$.

Option 2 : On se ramène au cas précédent en posant $g = -f$,
L'équation $g(x) = 0$ équivaut à $f(x) = 0$, et on a cette fois $g(a) < 0 < g(b)$!
On peut donc appliquer l'algorithme de dichotomie précédent à la fonction g.

2. Définir la fonction g en Python, et adapter la fonction `dichotomie` précédente pour calculer une approximation de la solution de $\ln(5x) - x = 0$ sur $[1, 3]$, à ε près, par valeur supérieure.

```
def g(x) :
```

```
def dichotomie(eps) :
    a = ... ;   b = ...
    while ................ :
        c = (a+b)/2
        if .............. :
            a = .......
        else :
            b = .......
    return( ... )
```

Approximation de la solution à 10^{-5} près : ....