

Sommes et produits

1 Somme de nombres

1.1 Symbole Σ

Définition 1 (Somme avec indices successifs)

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Soient a_m, a_{m+1}, \dots, a_n des nombres réels.

La somme de tous ces nombres se note : $\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$

Cette notation se lit : “Somme pour k allant de m à n des a_k ”.

On dit que :

- a_k est le terme général de la somme.
- k est l'indice de sommation.
- m et n sont les bornes de la somme.

Remarque 1

- L'indice de sommation k (qui parcourt les entiers de m jusqu'à n) est une variable muette : le nom qu'on lui donne est arbitraire, et il n'a de sens que “localement”, à l'intérieur de la somme. On peut ainsi choisir un autre nom pour cet indice (en général on l'appelle i, j ou k) :

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{i=m}^n a_i = \sum_{j=m}^n a_j = \sum_{\text{indice}=m}^n a_{\text{indice}}$$

En particulier, la valeur de la somme $\sum_{k=m}^n a_k$ ne peut pas dépendre de k .

- En revanche, les bornes m et n de la somme sont des entiers définis et fixés à l'avance !

La valeur de la somme $\sum_{k=m}^n a_k$ dépend (en général) de m et n .

- Si jamais $m > n$ alors la somme est “vide” : par convention on décide que $\sum_{k=m}^n a_k = 0$

Exemples

- $\sum_{k=0}^5 k = \sum_{i=0}^5 i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$
- $\sum_{j=2}^4 2^j = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 4 + 8 + 16 = 28.$
- $\sum_{\ell=2}^2 \ell^2 = 2^2 = 4.$
- $\sum_{k=2}^0 (k+1)^2 = 0 \text{ car } 2 > 0.$

Définition 2 (Somme avec indices généraux)

- La somme $\sum_{k=m}^n a_k$ se note également : $\sum_{k \in [m, n]} a_k$ ou encore $\sum_{m \leq k \leq n} a_k.$
- Plus généralement, si $A = \{i_1, i_2, \dots, i_p\} \subset \mathbb{N}$, on note $\sum_{k \in A} a_k = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_p}.$

Exemples

- $\sum_{0 \leq i \leq 3} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$
- $\sum_{k \in \{1, 3, 4\}} \frac{k}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} = \frac{8}{2} = 4.$

On peut construire un algorithme basique permettant de calculer des sommes de nombres, à l'aide d'une boucle `for`. (Cette syntaxe sera bientôt étudiée en Python)

➤ **Algorithme : Calculer une somme** $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$

```
S = 0
for k in range(0,n+1) : # k = 0 puis 1, puis ..., puis n
    S = S + a_k
print(S)
```

Exemple : Algorithme calculant la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{100}$:

```
S = 0
for k in range(1,101) : # k = 1,2,...,100
    S = S + 1/k
print(S)
```

1.2 Règles de calcul de sommes

🚩 Proposition 1 (Chasles, séparation et factorisation)

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Soient $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_m, b_{m+1}, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

- **Relation de Chasles :** Pour tout $j \in \llbracket m, n-1 \rrbracket$,
$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^j a_k + \sum_{k=j+1}^n a_k$$
- **“Séparation” des sommes :**
$$\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k$$
- **Factorisation :** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{k=m}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^n a_k$$

Preuve :

Il suffit d'écrire les sommes “avec des pointillés” pour constater que ces propriétés sont vraies :

- $a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = (a_m + a_{m+1} + \dots + a_j) + (a_{j+1} + a_{j+2} + \dots + a_n)$
- $(a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \dots + (a_n + b_n) = (a_m + a_{m+1} + \dots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \dots + b_n)$
- $\lambda a_m + \lambda a_{m+1} + \dots + \lambda a_n = \lambda(a_m + a_{m+1} + \dots + a_n)$ □

💬 Remarques 2

- Les deux dernières propriétés se généralisent facilement à des sommes avec indices généraux $\sum_{k \in A} a_k$.
- Pour résumer les deux dernières propriétés, on peut affirmer que le symbole \sum est “linéaire” :

$$\text{Pour toutes constantes } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=m}^n (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=m}^n a_k + \mu \sum_{k=m}^n b_k$$

- La relation de Chasles permet en particulier d’“isoler” les termes extrémaux de la somme :

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + \sum_{k=m+1}^n a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n.$$

👉 Exemples

- $\sum_{j=1}^3 5j^3 = 5 \sum_{j=1}^3 j^3 = 5(1^3 + 2^3 + 3^3) = 5 \times 36.$
- $\sum_{k=0}^4 (2k + 3k^2) = 2 \sum_{k=0}^4 k + 3 \sum_{k=0}^4 k^2 = 2(0 + 1 + 2 + 3 + 4) + 3(0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 2 \times 10 + 3 \times 30 = 110.$
- $\sum_{k=1}^n kn = n \sum_{k=1}^n k$
- $\sum_{k=1}^4 (1 - k) + \sum_{i=1}^4 i = \sum_{k=1}^4 (1 - k) + \sum_{k=1}^4 k = \sum_{k=1}^4 (1 - k + k) = \sum_{k=1}^4 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$

⚠ Attention !

- Pour “regrouper” deux sommes, il est indispensable qu’elles aient les mêmes bornes !

Exemple : $\sum_{k=1}^4 k + \sum_{k=1}^4 3k^2 = \sum_{k=1}^4 (k + 3k^2)$ mais $\sum_{k=1}^2 k + \sum_{k=1}^4 3k^2 \neq \sum_{k=1}^2 (k + 3k^2)$

- La propriété de factorisation affirme que l’on peut “sortir” de la somme une constante multiplicative. En revanche, on ne peut pas “sortir” de la somme un terme qui dépend de l’indice de sommation !

Exemple : $\sum_{k=1}^n 3 \times 2^k = 3 \times \sum_{k=1}^n 2^k$ mais $\sum_{k=1}^n k \times 2^k \neq k \times \sum_{k=1}^n 2^k$ (d’ailleurs ceci n’a pas de sens !)

- Une somme de produits n’est pas égal (en général) au produit des sommes !

Exemple : $\sum_{k=1}^n k \times 2^k \neq \left(\sum_{k=1}^n k \right) \times \left(\sum_{k=1}^n 2^k \right)$

🚩 Proposition 2 (Distributivité)

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $n', m' \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$ et $m' \leq n'$.

Soient $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_{m'}, b_{m'+1}, \dots, b_{n'} \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left(\sum_{i=m}^n a_i \right) \left(\sum_{j=m'}^{n'} b_j \right) = \sum_{i=m}^n \left(\sum_{j=m'}^{n'} a_i b_j \right) = \sum_{j=m'}^{n'} \left(\sum_{i=m}^n a_i b_j \right)$$

👉 Exemple

Développons le produit $\left(\sum_{i=1}^3 a_i \right) \left(\sum_{j=1}^2 b_j \right)$ de ces deux façons différentes :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^3 a_i \right) \left(\sum_{j=1}^2 b_j \right) &= (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2) = (a_1 b_1 + a_1 b_2) + (a_2 b_1 + a_2 b_2) + (a_3 b_1 + a_3 b_2) \\ &= \sum_{j=1}^2 a_1 b_j + \sum_{j=1}^2 a_2 b_j + \sum_{j=1}^2 a_3 b_j = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^2 a_i b_j \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^3 a_i \right) \left(\sum_{j=1}^2 b_j \right) &= (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2) = (a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_3 b_2) \\ &= \sum_{i=1}^3 a_i b_1 + \sum_{i=1}^3 a_i b_2 = \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{i=1}^3 a_i b_j \right). \end{aligned}$$

1.3 Sommes usuelles

Théorème 1 (Sommes usuelles)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les sommes explicites suivantes :

- **Somme des 1** : $\sum_{k=1}^n 1 = n$ et plus généralement, pour $m \leq n$, $\sum_{k=m}^n 1 = n - m + 1$ ♥
- **Somme des n premiers entiers** : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ♥
- **Somme des n premiers carrés** : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- **Somme des n premiers cubes** : $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- **Somme géométrique** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ ♥

Preuve :

- Somme des 1 : $\sum_{i=1}^n 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = n$.

Plus généralement, une somme “ $\sum_{k=m}^n$ ” contient $n-m+1$ termes, donc $\sum_{i=m}^n 1 = 1 + 1 + \dots + 1 = n - m + 1$.

- Somme des n premiers entiers : On va donner deux preuves.

- Preuve du “petit Gauss” : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note que $(1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n + (n-1) + \dots + 1) = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) = n \times (n+1)$

Ceci montre que $2 \times \sum_{k=1}^n k = n(n+1)$, d'où $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Preuve par récurrence :

Posons $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Vérifions $\mathcal{P}(0)$: on a bien $\sum_{k=1}^0 k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On a bien montré $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

- Sommes de n premiers carrés/cubes : Par récurrence (à faire pour s'entraîner !)

- Somme géométrique : Si $x = 1$, on a $\sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$, CQFD. Soit maintenant $x \neq 1$.

Posons $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Vérifions $\mathcal{P}(0)$: on a bien $\sum_{k=0}^0 x^k = x^0 = 1 = \frac{1-x}{1-x}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1} + (1-x)x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

On a bien montré $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

□

👉 Exemples

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{i=1}^{10} i &= \frac{10 \times 11}{2} = 55. & \bullet \sum_{j=1}^6 j^2 &= \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = 7 \times 13 = 91. \\ \bullet \sum_{k=0}^{10} 2^k &= \frac{1-2^{11}}{1-2} = \frac{1-2^{11}}{-1} = 2^{11} - 1. \end{aligned}$$

💬 Remarques 3

- Notons que les sommes de n premiers entiers/carrés/cubes peuvent aussi bien démarrer à 0 :

$$\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k, \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \sum_{k=1}^n k^3.$$

$$\bullet \text{ En revanche, } \sum_{k=0}^n x^k \neq \sum_{k=1}^n x^k \quad \text{car} \quad \sum_{k=0}^n x^k = x^0 + \sum_{k=1}^n x^k = 1 + \sum_{k=1}^n x^k.$$

On fera ainsi bien attention aux bornes de la somme lorsqu'on souhaite utiliser des formules usuelles !

Pour calculer des sommes, il faudra bien souvent se ramener aux formules des sommes usuelles, en utilisant les règles de calcul vues précédemment.

✎ Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes : $\sum_{k=1}^n (3k+1)$, $\sum_{j=0}^{n-1} 3^{2j+1}$, $\sum_{i=1}^n 2^{-i}$.

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{k=1}^n (3k+1) &= 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 = 3 \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{3n(n+1) + 2n}{2} = \frac{n(3(n+1) + 2)}{2} = \frac{n(3n+5)}{2}. \\ \bullet \sum_{j=0}^{n-1} 3^{2j+1} &= \sum_{j=0}^{n-1} 3^{2j} \times 3 = \sum_{j=0}^{n-1} (3^2)^j \times 3 = 3 \sum_{j=0}^{n-1} 9^j = 3 \frac{1-9^n}{1-9} = \frac{3(9^n-1)}{8}. \\ \bullet \sum_{i=1}^n 2^{-i} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \\ &= 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 1 = 2 - \frac{1}{2^n} - 1 = 1 - \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Proposition 3 (Sommes usuelles avec bornes générales)

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$. On a les sommes explicites suivantes :

- Somme des entiers “décalée” :
$$\sum_{k=m}^n k = \frac{(m+n) \times (n-m+1)}{2}.$$
- Somme géométrique “décalée” : Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{k=m}^n x^k = \begin{cases} \frac{x^m - x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n-m+1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \heartsuit$$

Preuve rapide :

- $$\sum_{k=m}^n k = \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^{m-1} k = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(m-1)m}{2} = \frac{n^2 + n - m^2 + m}{2} = \frac{(m+n)(n-m+1)}{2}.$$
- $$\sum_{k=m}^n x^k = \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=0}^{m-1} x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1-x^m}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1-m & \text{si } x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^m - x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n-m+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}. \quad \square$$

Exemples

- $$\sum_{k=3}^7 \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^8}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^8 \right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^7$$
- $$\sum_{k=n}^{2n} 3^k = \frac{3^n - 3^{2n}}{1-3} = \frac{3^{2n} - 3^n}{2} = \frac{3^n}{2}(3^n - 1).$$

1.4 Changement d'indice

☞ Méthode : (Poser un changement d'indice dans une somme)

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Soit ℓ un entier fixé (souvent $\ell = 1, 2, -1$ ou -2)

Si un indice k parcourt les entiers de m à n , l'indice $i = k + \ell$ parcourt les entiers de $m + \ell$ à $n + \ell$.

Dans une somme, poser le changement d'indice “ $i = k + \ell$ ”, c'est écrire :
$$\sum_{k=m}^n a_{k+\ell} = \sum_{i=m+\ell}^{n+\ell} a_i$$

Pour poser le changement d'indice “ $i = k + \ell$ ”, il faut donc :

- 1 Transformer tous les $k + \ell$ en i (ou les k et $i - \ell$) à l'intérieur de la somme
- 2 Changer les bornes pour refléter les entiers parcourus par i .

☞ Exemples

- $$\sum_{k=1}^n 2^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1. \quad (\text{en posant } i = k - 1)$$
- $$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\text{en posant } i = k + 1)$$

⚠ Attention !

Les changements d'indice doivent être de la forme $i = k + \ell$, ou éventuellement $i = \ell - k$, avec ℓ un entier fixé. On ne pas poser, par exemple, $i = 2k$ ou $i = 3k + 1$!

Exercice 2

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. À l'aide d'un changement d'indice, retrouver la formule pour la somme décalée $\sum_{k=m}^n x^k$ à partir de celle pour la somme $\sum_{k=0}^n x^k$.

$$\sum_{k=m}^n x^k = \sum_{i=0}^{n-m} x^{i+m} = \sum_{i=0}^{n-m} x^i x^m = x^m \sum_{i=0}^{n-m} x^i = x^m \left(\frac{1 - x^{n-m+1}}{1 - x} \right) = \frac{x^m - x^{n+1}}{1 - x}.$$

1.5 Sommes télescopiques

Proposition 4 (Sommes télescopiques)

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Soient $a_{m-1}, a_m, \dots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{R}$.

On a : $\sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$ et $\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{m-1}$.

Preuve “avec des pointillés” :

$$\sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) = (a_{m+1} - a_m) + (a_{m+2} - a_{m+1}) + (a_{m+3} - a_{m+2}) + \dots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_m.$$

L'autre égalité est similaire. □

Preuve avec un changement d'indice :

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) &= \sum_{k=m}^n a_{k+1} - \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{i=m+1}^{n+1} a_i - \sum_{k=m}^n a_k = \left(\sum_{i=m+1}^n a_i + a_{n+1} \right) - \left(a_m + \sum_{k=m+1}^n a_k \right) \\ &= a_{n+1} - a_m. \end{aligned}$$

L'autre égalité est similaire. □

Méthode : Calculer une somme par “télescopage”

- 1 Mettre la somme sous la forme $\sum (a_{k+1} - a_k)$ ou bien $\sum (a_k - a_{k-1})$
- 2 Repérer les termes extrémaux : quel est l'indice le plus grand possible ? le plus petit possible ?
- 3 Conclure quant à la valeur de la somme (attention au signe!).

Exemples

- $\sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \sqrt{n+1} - 1$
- $\sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=2}^n (\ln(k-1) - \ln(k)) = \ln(1) - \ln(n) = -\ln(n)$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Que vaut la somme $S = \sum_{k=1}^n ((k+1)^2 - k^2)$?
2. Montrer que $S = 2 \sum_{k=1}^n k + n$.
3. Retrouver ainsi la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n k$.

1. Par télescopage, $S = \sum_{k=1}^n ((k+1)^2 - k^2) = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n = n(n+2)$.
2. En développant, $S = \sum_{k=1}^n ((k+1)^2 - k^2) = \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k + 1 - k^2) = \sum_{k=1}^n (2k + 1) = 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$
donc $S = 2 \sum_{k=1}^n k + n$.
3. On en déduit que $S = n(n+2) = 2 \sum_{k=1}^n k + n$ donc $2 \sum_{k=1}^n k = n(n+2) - n = n(n+1)$
et on retrouve $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour finir, on déduit de cette méthode de “télescopage” l’identité suivante :

Théorème 2 (Une identité remarquable)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a l’identité : $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$. 

Preuve :

$$\begin{aligned} (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} (a - b) a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} (a^{k+1} b^{n-1-k} - a^k b^{n-k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a^{k+1} b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k}) = a^{n-1+1} b^{n-(n-1+1)} - a^0 b^{n-0} = a^n - b^n. \end{aligned}$$

La deuxième égalité est obtenue en prenant $a = x$ et $b = 1$. □

Exemple

Pour $n = 4$, on obtient la factorisation : $a^4 - b^4 = (a - b)(b^3 + ab^2 + a^2b + a^3)$

Remarques 4

- En prenant $a = x$ et $b = 1$, on obtient en particulier l’égalité :

$$x^n - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

- Pour $n = 2$, on retrouve l’identité remarquable bien connue : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
L’identité du théorème est une “généralisation” de cette formule!

- On verra bientôt une formule, impliquant également une somme, qui sera une “généralisation” de l’autre identité remarquable : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2 Produit de nombres

2.1 Symbole \prod

Définition 3 (Produit avec indices successifs)

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Soient a_m, a_{m+1}, \dots, a_n des nombres réels.

Le produit de tous ces nombres se note : $\prod_{k=m}^n a_k = a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n$

Cette notation se lit : “Produit pour k allant de m à n des a_k ”.

On dit que :

- a_k est le terme général du produit.
- k est l'indice du produit.
- m et n sont les bornes du produit.

Remarque 5

- À nouveau, l'indice k (qui parcourt les entiers de m jusqu'à n) est une variable muette !

En particulier, la valeur du produit $\prod_{k=m}^n a_k$ ne peut pas dépendre de k .

- En revanche, les bornes m et n de la somme sont des entiers définis et fixés à l'avance !

La valeur du produit $\prod_{k=m}^n a_k$ dépend (en général) de m et n .

- Si jamais $m > n$ alors le produit est “vide” : par convention on décide que $\prod_{k=m}^n a_k = 1$.

Exemples

$$\bullet \prod_{k=1}^5 k = \prod_{i=1}^5 i = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

$$\bullet \prod_{j=2}^4 2^j = 2^2 \times 2^3 \times 2^4 = 2^{2+3+4} = 2^9 = 512.$$

$$\bullet \prod_{\ell=2}^2 \ell^2 = 2^2 = 4.$$


$$\bullet \prod_{k=2}^0 (k+1)^2 = 1 \text{ car } 2 > 0.$$

Définition 4 (Produit avec indices généraux)

- Le produit $\prod_{k=m}^n a_k$ se note également : $\prod_{k \in \llbracket m, n \rrbracket} a_k$ ou encore $\prod_{m \leq k \leq n} a_k$.

- Plus généralement, si $A = \{i_1, i_2, \dots, i_p\} \subset \mathbb{N}$, on note $\prod_{k \in A} a_k = a_{i_1} \times a_{i_2} \times \dots \times a_{i_p}$.

On peut construire un algorithme permettant de calculer des produits de nombres, à l'aide d'une boucle **for** (=“pour”).

 **Algorithme : Calculer un produit** $P_n = \prod_{k=0}^n a_k$

```
P = 1
for k in range(0,n+1) : # k = 0 puis 1 puis ... puis n
    P = P * a_k
print(P)
```

Exemple : On veut un algorithme calculant la valeur du produit $\prod_{k=3}^{50} \frac{k^2 - 1}{k}$.

```
P = 1
for k in range(3,51) : # k = 3,4,5,...,50
    P = P * (k**2-1)/k
print(P)
```

2.2 Règles de calcul de produits

🚩 Proposition 5 (Multiplication, quotient, puissance, exposant, factorisation)

Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Soient $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_m, b_{m+1}, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

- **Pseudo-Relation de Chasles :** Pour tout $j \in \llbracket m, n-1 \rrbracket$, $\prod_{k=m}^n a_k = \left(\prod_{k=m}^j a_k \right) \times \left(\prod_{k=j+1}^n a_k \right)$
- **Séparation par multiplication :** $\prod_{k=m}^n (a_k \times b_k) = \left(\prod_{k=m}^n a_k \right) \times \left(\prod_{k=m}^n b_k \right)$
- **Séparation par quotient :** $\prod_{k=m}^n \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=m}^n a_k}{\prod_{k=m}^n b_k}$ (si $\forall k \in \llbracket m, n \rrbracket, b_k \neq 0$)
- **Puissance :** $\prod_{k=m}^n (a_k)^p = \left(\prod_{k=m}^n a_k \right)^p$ ($p \in \mathbb{N}$ ou éventuellement $p \in \mathbb{R}$)
- **Exposants :** $\prod_{k=m}^n x^{a_k} = x^{\sum_{k=m}^n a_k}$ ($x \in \mathbb{R}$ de sorte que les puissances aient un sens)
- **“Factorisation” :** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\prod_{k=m}^n (\lambda a_k) = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^n a_k$ ($n-m+1$ = nombre de termes dans le produit)

Preuve :

Il suffit d’écrire les produits “avec des pointillés” pour constater que tout cela est vrai. C’est un bon moyen de retrouver ces propriétés si on a un doute !

- $a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n = (a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_j) \times (a_{j+1} \times a_{j+2} \times \dots \times a_n)$
- $(a_m \times b_m) \times (a_{m+1} \times b_{m+1}) \times \dots \times (a_n \times b_n) = (a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n) \times (b_m \times b_{m+1} \times \dots \times b_n)$
- $\frac{a_m}{b_m} \times \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \times \dots \times \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n}{b_m \times b_{m+1} \times \dots \times b_n}$
- $(a_m)^p \times (a_{m+1})^p \times \dots \times (a_n)^p = (a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n)^p$
- $x^{a_m} \times x^{a_{m+1}} \times \dots \times x^{a_n} = x^{a_m + a_{m+1} + \dots + a_n}$
- $(\lambda a_m) \times (\lambda a_{m+1}) \times \dots \times \lambda a_n = \lambda^{n-m+1} \times (a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n)$ □

👉 Exemples

- $\prod_{j=1}^3 (5j^2) = 5^3 \prod_{j=1}^3 j^2 = 5^3 \left(\prod_{j=1}^3 j \right)^2 = 5^3 \times (1 \times 2 \times 3)^2 = 5^3 \times 6^2$
- $\prod_{k=2}^4 (2k^2 2^k) = 2^3 \times \left(\prod_{k=2}^4 k^2 \right) \times \left(\prod_{k=2}^4 2^k \right) = 2^3 \times \left(\prod_{k=2}^4 k \right)^2 \times 2^{2+3+4} = 2^3 \times (2 \times 3 \times 4)^2 \times 2^9 = 2^{18} \times 3^2$.

Si l'on ne voit pas directement quelles règles de calcul utiliser pour avancer, il est souvent utile d'écrire le produit "avec des pointillés", puis de simplifier l'expression petit à petit.

👉 Exemple

$$\frac{\prod_{i=1}^5 i}{\prod_{i=1}^5 i^2} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times 5}{1^2 \times 2^2 \times \dots \times 5^2} = \frac{1}{1 \times 2 \times \dots \times 5} = \frac{1}{120}.$$

⚠ Attention !

- Pour "regrouper" deux produits, il est indispensable qu'ils aient les mêmes bornes !

Exemple : $\prod_{k=1}^4 k \times \prod_{k=1}^4 3k^2 = \prod_{k=1}^4 (k \times 3k^2)$ mais $\prod_{k=1}^2 k \times \prod_{k=1}^4 3k^2 \neq \prod_{k=1}^2 (k \times 3k^2)$

- La propriété de factorisation affirme que l'on peut "sortir" d'un produit une constante multiplicative (attention à la puissance!).

En revanche, on ne peut pas "sortir" du produit un terme qui dépend de l'indice !

Exemple : $\prod_{k=1}^n (3 \times 2^k) = 3^n \times \prod_{k=1}^n 2^k$ mais $\prod_{k=1}^n (k \times 2^k) \neq k^n \times \prod_{k=1}^n 2^k$ (ceci n'a pas de sens !)

- Un produit de sommes n'est pas égal (en général) à la somme des produits !

Exemple : $\prod_{k=1}^n (k + 2^k) \neq \prod_{k=1}^n k + \prod_{k=1}^n 2^k$

2.3 Exemples de calcul

Contrairement aux sommes, il n'y a pas, à proprement parler de "produit usuels" à connaître. Cependant, la valeur d'un produit s'exprime assez souvent à l'aide d'une factorielle :

📖 Définition 5 (Factorielle)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le produit $1 \times 2 \times \dots \times n = \prod_{k=1}^n k$ est appelé "factorielle n " et est noté $n!$.

Par convention, on pose $0! = 1$.

On a : $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, etc ...

De même que pour les sommes, on pourra utiliser à bon escient des changements d'indice ainsi que des produits "télescopiques".

⚙ Méthode : Calculer un produit par "télescopage"

- 1 Mettre le produit sous la forme $\prod \frac{a_{k+1}}{a_k}$ ou bien $\prod \frac{a_k}{a_{k-1}}$
- 2 Repérer les termes extrémaux : quel est l'indice le plus grand possible ? le plus petit possible ?
- 3 Conclure quant à la valeur du produit.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les produits : $\prod_{k=1}^n (3k)$, $\prod_{k=2}^n (k+1)^2$, $\prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k})$.

- $\prod_{k=1}^n (3k) = 3^n \times \prod_{k=1}^n k = 3^n \times n!$
- $\prod_{k=2}^n (k+1)^2 = \left(\prod_{k=1}^n (k+1) \right)^2 = (2 \times 3 \times \dots \times (n+1))^2 = (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n+1))^2 = ((n+1)!)^2$.
- $\prod_{k=1}^n (1 + \frac{1}{k}) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{n+1}{n} = (n+1)$.

3 Somme doubles

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

On considère maintenant une famille de nombres $(a_{i,j})$ indexée par deux indices i et j tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.

On peut représenter ces nombres dans un tableau à n lignes et p colonnes. L'indice i correspond au numéro de ligne, l'indice j au numéro de colonne : $a_{i,j}$ est l'élément situé ligne i , colonne j .

| | | | | | |
|-----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|
| $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | \dots | $a_{1,j}$ | \dots | $a_{1,p}$ |
| $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | \dots | $a_{2,j}$ | \dots | $a_{2,p}$ |
| \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | | \vdots |
| $a_{i,1}$ | $a_{i,2}$ | \dots | $a_{i,j}$ | \dots | $a_{i,p}$ |
| \vdots | \vdots | | \vdots | \ddots | \vdots |
| $a_{n,1}$ | $a_{n,2}$ | \dots | $a_{n,j}$ | \dots | $a_{n,p}$ |

Remarque 6

Il y a ainsi $n \times p$ termes au total.

3.1 Somme double “libre”

Dans un premier temps, on souhaite sommer tous les nombres présents dans le tableau.

Définition 6 (Somme double)

La somme de tous ces nombres se note : $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j}$ ou $\sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket} a_{i,j}$.

Lorsque $n = p$, cette somme se note plus simplement $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$.

Exemple

Pour $n = p = 2$, on a $\sum_{1 \leq i,j \leq 2} a_{i,j} = a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,1} + a_{2,2}$

Cette somme de tous les éléments du tableau peut être calculée de deux manières différentes :

- 1 Commencer par sommer ligne par ligne, puis faire la somme des résultats obtenus :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} = (a_{1,1} + \dots + a_{1,p}) + \dots + (a_{n,1} + \dots + a_{n,p}) = \sum_{i=1}^n (a_{i,1} + \dots + a_{i,p}) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} \right).$$

Cela correspond à l'algorithme Python suivant :

► Algorithme :

```
S = 0
for i in range(1,n+1) : # i = 1,2,...,n
    for j in range(1,p+1) : # j = 1,2,...,p
        S = S + a_(i,j)
print(S)
```

- 2 Commencer par sommer colonne par colonne, puis faire la somme des résultats obtenus :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} = (a_{1,1} + \dots + a_{n,1}) + \dots + (a_{1,p} + \dots + a_{n,p}) = \sum_{j=1}^p (a_{1,j} + \dots + a_{n,j}) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right).$$

Cela correspond à l'algorithme suivant (qui renvoie le même résultat que le précédent !) :

► Algorithme :

```
S = 0
for j in range(1,p+1) : # j = 1,2,...,p
    for i in range(1,n+1) : # i = 1,2,...,n
        S = S + a_(i,j)
print(S)
```

On vient donc de démontrer la proposition suivante :

🚩 Proposition 6 (Calcul de sommes doubles)

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \right).$$

Plus généralement, on note A et B deux sous-ensembles finis de \mathbb{N} .

On rappelle que $A \times B = \{(i, j) \mid i \in A, j \in B\}$. À tout couple $(i, j) \in A \times B$, on associe $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{(i,j) \in A \times B} a_{i,j} = \sum_{i \in A} \left(\sum_{j \in B} a_{i,j} \right) = \sum_{j \in B} \left(\sum_{i \in A} a_{i,j} \right)$$

✎ Exercice 5

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Calculer la somme double : $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} ij$.

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} ij = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p ij = \sum_{i=1}^n i \sum_{j=1}^p j = \sum_{i=1}^n i \frac{p(p+1)}{2} = \frac{p(p+1)}{2} \sum_{i=1}^n i = \frac{p(p+1)}{2} \frac{n(n+1)}{2}.$$

3.2 Somme double “avec contraintes”

Revenons au tableau de nombres précédent, en nous restreignant au cas où $p = n$. Le tableau est ainsi carré :

| | | | | | |
|-----------|-----------|----------|-----------|----------|-----------|
| $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | \dots | $a_{1,j}$ | \dots | $a_{1,n}$ |
| $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | \dots | $a_{2,j}$ | \dots | $a_{2,n}$ |
| \vdots | \vdots | \ddots | \vdots | | \vdots |
| $a_{i,1}$ | $a_{i,2}$ | \dots | $a_{i,j}$ | \dots | $a_{i,n}$ |
| \vdots | \vdots | | \vdots | \ddots | \vdots |
| $a_{n,1}$ | $a_{n,2}$ | \dots | $a_{n,j}$ | \dots | $a_{n,n}$ |

- On souhaite sommer uniquement les termes $a_{i,j}$ tels que $1 \leq i \leq j \leq n$.

Ce sont les termes situés au-dessus de la diagonale principale (diagonale comprise).

On peut à nouveau procéder de deux manières différentes :

- 1 Commencer par sommer ligne par ligne :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} &= (a_{1,1} + \dots + a_{1,n}) + (a_{2,2} + \dots + a_{2,n}) + \dots + (a_{n,n}) \\ &= \sum_{i=1}^n (a_{i,i} + \dots + a_{i,n}) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n a_{i,j} \right) \end{aligned}$$

Cela correspond à l'algorithme suivant :

► Algorithme :

```
S = 0
for i in range(1,n+1) : # i = 1,2,...,n
    for j in range(i,n+1) : # j = i,i+1,...,n
        S = S + a_(i,j)
print(S)
```

- 2 Commencer par sommer colonne par colonne :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} &= (a_{1,1}) + (a_{1,2} + a_{2,2}) + \dots + (a_{1,n} + \dots + a_{n,n}) \\ &= \sum_{j=1}^n (a_{1,j} + \dots + a_{j,j}) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j a_{i,j} \right) \end{aligned}$$

Cela correspond à l'algorithme suivant :

► Algorithme :

```
S = 0
for j in range(1,n+1) : # j = 1,2,...,n
    for i in range(1,j+1) : # i = 1,2,...,j
        S = S + a_(i,j)
print(S)
```

- On souhaite sommer uniquement les termes $a_{i,j}$ tels que $1 \leq i < j \leq n$.
Ce sont les termes situés au-dessus de la diagonale principale (diagonale non comprise).

On peut à nouveau procéder de deux manières différentes :

1 Commencer par sommer ligne par ligne :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} &= (a_{1,2} + \dots + a_{1,n}) + (a_{2,3} + \dots + a_{2,n}) + \dots + (a_{n-1,n}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i,i+1} + \dots + a_{i,n}) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n a_{i,j} \right) \end{aligned}$$

Cela correspond à l'algorithme suivant :

► Algorithme :

```
S = 0
for i in range(1,n) : # i = 1,2,...,n-1
    for j in range(i+1,n+1) : # j = i+1,i+2,...,n
        S = S + a_(i,j)
print(S)
```

2 Commencer par sommer colonne par colonne :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} &= (a_{1,2}) + (a_{1,3} + a_{2,3}) + \dots + (a_{1,n} + \dots + a_{n-1,n}) \\ &= \sum_{j=2}^n (a_{1,j} + \dots + a_{j-1,j}) = \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} \right) \end{aligned}$$

Cela correspond à l'algorithme suivant :

► Algorithme :

```
S = 0
for j in range(2,n+1) : # j = 2,...,n
    for i in range(1,j) : # i = 1,2,...,j-1
        S = S + a_(i,j)
print(S)
```

Au final, on a démontré la proposition suivante :

► Proposition 7 (Calcul de sommes et produits doubles “avec contraintes”)

- $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j a_{i,j} \right).$
- $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n a_{i,j} \right) = \sum_{j=2}^n \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} \right).$

✎ Exercice 6

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes doubles : $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$ et $\sum_{1 \leq i < j \leq n} i$.

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^n \frac{j+1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1) + 2n}{2} = \frac{n(n+3)}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} i &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n i = \sum_{i=1}^{n-1} i \sum_{j=i+1}^n 1 = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} (ni - i^2) = n \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ &= n \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{3(n-1)n^2 - (n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)n(3n-2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Pour finir, on comprend que l'on peut définir des sommes doubles avec des ensembles indices assez généraux. On se permet donc d'introduire la définition générale suivante :

📖 Définition 7 (Somme double générale)

Soit E un sous-ensemble de \mathbb{N}^2 composé d'un nombre fini d'éléments : E est donc un ensemble de couples (i, j) avec $i, j \in \mathbb{N}$. A chaque couple $(i, j) \in E$, on associe un nombre $a_{i,j}$.

La somme de tous ces $a_{i,j}$ se note $\sum_{(i,j) \in E} a_{i,j}$.

À savoir faire à l'issue de ce chapitre :



Au minimum



Pour suivre



Pour les ambitieux

- Manipuler les symboles \sum et \prod .
- Connaître les formules de sommes usuelles marquées d'un ♥.
- Utiliser formules usuelles et règles de calculs pour calculer sommes et produits.
- Poser un changement d'indice.
- Manipuler, simplifier des expressions contenant des factorielles.
- Connaître toutes les formules de sommes usuelles.
- Utiliser des sommes et des produits télescopiques.
- Calculer une somme double "libre".
- Calculer une somme double "avec contraintes".
- Calculer une somme distinguant les entiers pairs et impairs.
- Calculer une somme double en distinguant les cas $i < j$, $i = j$, $j < i$.
(min, max, valeur absolue...)