LABORATORIO 3 - 21 Marzo 2019

Argomenti: Sistemi lineari e metodi del gradiente

Algoritmo gradiente

Input: A, b, $x^{(0)}$, tol, k_{max}, ier
Output: $x^{(k+1)}$, ier

1. $r^{(0)} \leftarrow b - Ax^{(0)}$
2. for $k = 1, \ldots, k_{max}$
3. $\quad s \leftarrow Ar^{(k)}$
4. $\quad \alpha_k \leftarrow \frac{r^{(k)T} r^{(k)}}{r^{(k)T} s}$
5. $\quad x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}$
6. $\quad r^{(k+1)} \leftarrow r^{(k)} - \alpha_k s$
7. $\quad$ if $||r^{(k+1)}||_2 \leq tol \cdot ||b||_2 \implies ier \leftarrow 0$, exit
8. end
9. $ier \leftarrow 1$

1. Scrivere una *function* `Matlab`, denominata `gradiente.m`, che implementi il metodo del gradiente. Successivamente definire i sistemi lineari $Ax = b$, con A simmetrica e definita positiva di ordine $n = 10, 50, 100$ alternativamente data da:

   `A = gallery('toeppd',n);`

   `A = delsq(numgrid('S',n));` [1]

   e con b definito in modo tale che la soluzione del sistema coincida con il vettore $x = (1, \ldots, 1)^T$.

---

[1] Il comando `A = delsq(numgrid('S',n))` genera la matrice a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} B & -I & O & \ldots & O \\ -I & B & -I & \ldots & O \\ O & -I & B & -I & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -I \\ O & O & \ldots & -I & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N,N}$$

con $N = (n-2)^2$ e ove ciascun blocco B, I e O ha ordine $n-2$. In particolare

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \ldots & 0 \\ O & -1 & 4 & -1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-2,n-2},$$

$I \in \mathbb{R}^{n-2,n-2}$ è la matrice identità e $O \in \mathbb{R}^{n-2,n-2}$ è la matrice nulla.

Applicare a ciascuno dei suddetti sistemi, i metodi di Gauss-Seidel, del gradiente, del gradiente coniugato precondizionato e non (function `pcg` di Matlab), utilizzando $kmax = 1000$, $tol = 1.0e-5$ e fornendo il vettore nullo come approssimazione iniziale della soluzione.

Infine, per ciascuno sistema, calcolare $||x-x^{(k)}||_2/||x||_2$ e $||r^{(k)}||_2/||b||_2$, ove $x^{(k)}$ indica l'ultima iterata calcolata. Commentare i risultati.

2. Definire la matrice `A = delsq(numgrid('S',N))` con $N = 1000$ e risolvere il sistema $Ax = b$, con b definito in modo tale che la soluzione del sistema coincida con il vettore $x = (1,\ldots,1)^T$, mediante il metodo del gradiente coniugato precondizionato e non. Utilizzare $kmax = 1000$, $tol = 1.0e-12$ e fornire il vettore nullo come approssimazione iniziale della soluzione. Rappresentare graficamente il vettore dei residui e commentare i risultati.