LABORATORIO 2 - 14 Marzo 2019

Argomenti: Sistemi lineari e metodi iterativi

Algoritmo Gauss-Seidel

Input: A, b, x, $toll$, k_{max}, ier
Output: x, k, ier

for $k = 1, \ldots, k_{max}$
    $y \leftarrow x_1$
    $x_1 \leftarrow \left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j\right) / a_{11}$
    $x_{max} \leftarrow |x_1|$
    $e_{max} \leftarrow |y - x_1|$
    for $i = 2, \ldots, n$
        $y \leftarrow x_i$
        $x_i \leftarrow \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j\right) / a_{ii}$
        $e \leftarrow |y - x_i|$
        if $x_{max} < |x_i| \implies x_{max} \leftarrow |x_i|$
        if $e_{max} < e \implies e_{max} \leftarrow e$
    end
    if $e_{max} < toll \cdot x_{max} \implies ier \leftarrow 0$, exit
end
$ier \leftarrow 1$

1. Scrivere una *function* `Matlab`, denominata `gauss_seidel.m`, che implementi l'algoritmo di Gauss-Seidel. Successivamente,
    - generare la matrice quadrata `A=magic(n)` con $n = 5$;
    - verificare che A è non singolare;
    - generare la matrice $B = A^T A$;
    - verificare che B è simmetrica e definita positiva;
    - generare un vettore $b \in I\!R^5$ in modo che $x = (1, \ldots, 1)^T$ sia la soluzione del sistema $Bx = b$;

- utilizzare la function `gauss_seidel.m` per risolvere in modo approssimato il sistema $Bx = b$, con $tol = 1.0e-05$, $k_{max} = 100$ e $x^{(0)}$ coincidente con il vettore nullo;
- calcolare l'errore relativo in norma infinito commesso all'iterazione finale k:

$$\frac{||x - x^{(k)}||_\infty}{||x||_\infty}$$

2. Sia dato un sistema lineare sparso di ordine n. Memorizzare solamente gli elementi non nulli e costruire l'algoritmo di Gauss-Seidel utilizzando un solo vettore per memorizzare le approssimazioni della soluzione. Implementare il suddetto algoritmo in una function denominata `gauss_seidel_sparse.m`.

   Successivamente, utilizzare il comando `A = sprandsym(n,isp,a)` per generare una matrice A di ordine `n=400`, simmetrica, sparsa, pseudocasuale, con indice di sparsità `isp=0.01` ($isp = \frac{nnz(A)}{n^2}$) e con autovalori memorizzati in `a`, pseudocasuali compresi tra 1 e 10.

   Utilizzando i comandi `tic` e `toc`, confrontare i tempi di esecuzione delle function `gauss_seidel.m` e `gauss_seidel_sparse.m` applicati a 20 matrici, generate in sequenza e del tipo sopra descritto. Fornire per ciascuna di esse $tol = 1.0e-06$, $k_{max} = 10000$ e $x^{(0)}$ coincidente con il vettore nullo.

3. Implementare in due *m-file* di tipo *function*, denominati `jacobi_mat.m` e `gauss_seidel_mat.m` i metodi iterativi di Jacobi e di Gauss Seidel rispettivamente, per la risoluzione di un sistema lineare $Ax = b$.

   Utilizzare la forma matriciale dei suddetti metodi, ovvero

$$Dx^{(k+1)} = b - Cx^{(k)}$$

   con `D=diag(diag(A))` per il metodo di Jacobi e `D=tril(A)` per il metodo di Gauss-Seidel.

   Applicare entrambi i metodi per la risoluzione approssimata dei sistemi $A_i x = b_i$, $i = 1, \ldots, 4$, con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2/5 \\ 0 & 5 & 2/5 \\ 5/2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

   e b_i definito in modo tale che la corrispondente soluzione x coincida con il vettore con tutte le componenti uguali a 1. Per ciascuno di essi richiedere un numero massimo di iterazioni $k_{max} = 100$, $tol = 1.0e-07$ e fornire il vettore nullo come vettore iniziale $x^{(0)}$. Commentare i risultati.

4. Il sistema $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ha soluzione $x = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$. Risolvere il sistema usando dapprima il metodo di Jacobi e successivamente il metodo di Gauss-Seidel. Fornire come approssimazione iniziale $x^{(0)}$ il vettore nullo e valutare la soluzione con precisione relativa $tol = 0.0001$. Osservare la velocità di convergenza dei due metodi.

5. Nel problema precedente usare il metodo SOR con $\omega = 1 + 0.2k$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e osservare la variazione del numero di iterazioni richieste (nei casi $k < 5$) per raggiungere la precisione desiderata.