LABORATORIO 1 - 7 Marzo 2019

Argomenti: Fattorizzazioni di matrici

- Fattorizzazione $PA = LU$, $A \in R^{n,n}$
  - $P \in R^{n,n}$ matrice di permutazione
  - $L \in R^{n,n}$ matrice triangolare inferiore con diagonale unitaria
  - $U \in R^{n,n}$ matrice triangolare superiore

  Data A, vi possono essere diverse matrici P tali che $PA = LU$.

  Il costo in termini di operazioni aritmetiche, tramite il metodo delle eliminazioni di Gauss, è circa $n^3/3$ per n grande.

  Il comando Matlab per il calcolo di P, L, U è `[L,U,P] = lu(A)`; la matrice P, in tal caso, è generata dalla tecnica del pivoting parziale associata al metodo delle eliminazioni di Gauss.

- Fattorizzazione di Choleski, $A = L_1 L_1^T$, $A \in R^{n,n}$ è simmetrica e definita positiva.
  - $L_1 \in R^{n,n}$ matrice triangolare inferiore con elementi diagonali positivi.

  Data A simmetrica e definita positiva, esiste una e una sola matrice L_1 tale che $A = L_1 L_1^T$.

  Il costo in termini di operazioni aritmetiche è circa $n^3/6$ per n grande.

  Il comando Matlab per il calcolo di $R := L_1^T$ è `R = chol(A)`.

- Fattorizzazione QR, $A = QR$, $A \in R^{n,n}$
  - $Q \in R^{n,n}$ matrice ortogonale ($Q^T Q = QQ^T = I$)
  - $R \in R^{n,n}$ matrice triangolare superiore

  Data A, è sempre possibile determinare una matrice Q ortogonale e una matrice R triangolare superiore tali che $A = QR$; le matrici Q e R non sono però uniche.

  Il costo in termini di operazioni aritmetiche, tramite il metodo di Householder, è circa $2n^3/3$ per n grande.

  Il comando Matlab per il calcolo di Q e R è `[Q,R] = qr(A)`.

- Fattorizzazione svd, $A = USV^T$, $A \in R^{n,n}$
  - $U, V \in R^{n,n}$ matrici ortogonali
  - $S \in R^{n,n}$ matrice diagonale contenente i valori singolari in ordine dcrescente

  Data A, è sempre possibile determinare due matrici U, V ortogonali tali che $A = USV^T$, con S matrice diagonale i cui elementi sono positivi e in ordine decrescente; le matrici U, V non sono uniche, mentre S lo è.

  Il costo in termini di operazioni aritmetiche, tramite il metodo di Golub-Kahan, è circa $32n^3/3$ per n grande.

  Il comando Matlab per il calcolo di U, S, V è `[U,S,V] = svd(A)`.

N.B. Le fattorizzazioni $PA = LU$, $A = QR$ e $A = USV^T$ valgono anche per matrici rettangolari ad elementi complessi, $A \in C^{m,n}$.

1. Sia data una matrice simmetrica tridiagonale a diagonale dominante oppure definita positiva. Supponiamo di memorizzare la diagonale nel vettore d e la codiagonale nel vettore c. Costruire l'algoritmo di Gauss utilizzando solo vettori.

   Applicare il suddetto algoritmo al sistema $Ax = b$ ove la matrice A è tridiagonale di ordine $n = 10$, i cui elementi della diagonale sono tutti uguali a 4 e quelli delle codiagonali a -1. Il vettore termine noto b è definito in modo tale che il sistema abbia come soluzione il vettore x con tutte le componenti uguali a 1.

   Utilizzare il comando `\` per verificare la correttezza del risultato ottenuto.

2. Dedurre dal precedente algoritmo il fattore di Choleski della matrice A.

   Utilizzare il comando `chol` per verificare la correttezza del risultato ottenuto.

3. Risolvere il sistema lineare $Ax = b$ definito nell'esercizio 1 e di ordine $n = 2500$, con ciascuna delle fattorizzazioni precedentemente definite, $PA = LU$, $A = L_1 L_1^T$, $A = QR$ e $A = USV^T$.

   Confrontare i tempi di calcolo, utilizzando i comandi Matlab `tic` e `toc`. Commentare i risultati.