Mouvement Brownien

ANDRIAMANAMBINTSOA Rojoniaina Angelo

March 31, 2025

Exercice 2 :

Soit B_t un mouvement Brownien standard.

1. $X_t = -B_t$.
   On va montrer que X_t est un mouvement Brownien standard.

   ⋆ $X_0 = -B_0 = 0$. p.s.

   ⋆ Comme B_t est processus gaussien et X_t est une combinaison linéaire de B_t, alors X_t est un processus gaussien.

   ⋆ $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(-B_t) = -\mathbb{E}(B_t) = 0$.

   ⋆ Soient $s, t \geq 0$. Donc

   $$\begin{aligned} Cov(X_t, X_s) &= Cov(-B_t, -B_s) \\ &= (-1)(-1)Cov(B_t, B_s) \\ &= \min(t, s). \end{aligned}$$

   Ainsi X_t est un mouvement Brownien standard.

2. $X_t = a^{-1/2} B_{at}, \quad a > 0$.
   On va montrer que X_t est un mouvement Brownien standard.

   ⋆ $X_0 = a^{-1/2} B_{a.0} = 0$ p.s.

   ⋆ Comme B_t est processus gaussien, $a > 0$ et X_t est une combinaison linéaire de B_{at}, alors X_t est un processus gaussien.

   ⋆ $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(a^{-1/2} B_{at}) = a^{-1/2}\mathbb{E}(B_a t) = 0$.

   ⋆ Soient $s, t \geq 0$. Comme $a > 0$, on a :

   $$\begin{aligned} Cov(X_t, X_s) &= Cov(a^{-1/2} B_{at}, a^{-1/2} B_{as}) \\ &= (a^{-1/2})^2 Cov(B_{at}, B_{as}) \\ &= a^{-1} \min(at, as) \\ &= a^{-1} a \min(t, s) \\ &= \min(t, s). \end{aligned}$$

   Ainsi X_t est un mouvement Brownien standard.

3. $X_t = B_{t+T} - B_T, \quad T \geq 0.$
   On va montrer que X_t est un mouvement Brownien standard.

   - $\star$ $X_0 = B_{0+T} - B_T = 0.$
   - $\star$ Comme B_t est processus gaussien, $T \geq 0$ et X_t est une combinaison linéaire de B_{t+T} et B_T, alors X_t est un processus gaussien.
   - $\star$ $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(B_{t+T} - B_T) = \mathbb{E}(B_{t+T}) - \mathbb{E}(B_T) = 0.$
   - $\star$ Soient $s, t \geq 0$. Comme $T \geq 0$, on a :

   $$\begin{aligned} Cov(X_t, X_s) &= Cov(B_{t+T} - B_T, B_{s+T} - B_T) \\ &= Cov(B_{t+T}, B_{s+T}) - Cov(B_{t+T}, B_T) - Cov(B_T, B_{s+T}) + Cov(B_T, B_T) \\ &= \min(t+T, s+T) - 2\min(t+T, T) + \min(T, T) \\ &= \min(t, s) + T - 2T + T \\ &= \min(t, s). \end{aligned}$$

   Ainsi X_t est un mouvement Brownien standard.

4. $X_t = tB_{1/t}, \quad t > 0, X_0 = 0.$
   On va montrer que X_t est un mouvement Brownien standard.

   - $\star$ $X_0 = 0$
   - $\star$ Comme B_t est processus gaussien, $1/t > 0$ et X_t est une combinaison linéaire de $B_{1/t}$, alors X_t est un processus gaussien.
   - $\star$ $\mathbb{E}(X_t = \mathbb{E}(tB_{1/t}) = t\mathbb{E}(B_{1/t}) = 0.$
   - $\star$ Soient $s, t > 0$. Donc

   $$\begin{aligned} Cov(X_t, X_s) &= Cov(tB_{1/t}, sB_{1/s}) \\ &= tsCov(B_{1/t}, B_{1/s}) \\ &= ts\min(1/t, 1/s) \\ &= \min(ts/t, ts/s) \\ &= \min(t, s). \end{aligned}$$

   Ainsi X_t est un mouvement Brownien standard.

5. $X_t = B_{T-t} - B_T, \quad t \in [0, T], T > 0.$
   On va montrer que X_t est un mouvement Brownien standard.

   - $\star$ $X_0 = B_{T-0} - B_T = 0.$
   - $\star$ Comme B_t est processus gaussien, $T - t \geq 0$ et X_t est une combinaison linéaire de B_{T-t} et B_T, alors X_t est un processus gaussien.
   - $\star$ $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(B_{T-t} - B_T) = \mathbb{E}(B_{T-t}) - \mathbb{E}(B_T) = 0.$

- ⋆ Soient $s, t \in [0, T]$. Donc

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_s) &= Cov(B_{T-t} - B_T, B_{T-s} - B_T) \\ &= Cov(B_{T-t}, B_{T-s}) - Cov(B_{T-t}, B_T) - Cov(B_T, B_{T-s}) + Cov(B_T, B_T) \\ &= \min(T-t, T-s) - \min(T-t, T) - \min(T-s, T) + \min(T, T) \\ &= T + \min(-t, -s) - (T-t) - (T-s) + T \\ &= \min(-t, -s) + t + s \\ &= \min(t+s-t, t+s-s) \\ &= \min(t, s). \end{aligned}$$

Ainsi X_t est un mouvement Brownien standard.

Exercice 3 :

$$X_t = \rho B_t + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{B}_t$$

1. On va montrer que X_t est un mouvement Brownien standard.

   - ⋆ $X_0 = \rho B_0 + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{B}_0 = 0.$
   - ⋆ Comme B_t et $\tilde{B}_t$ sont gaussiens et X_t est une combinaison linéaire de B_t et $\tilde{B}_t$, on a X_t est gaussien.
   - ⋆ $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\rho B_t + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{B}_t) = \rho\mathbb{E}(B_t) + \sqrt{1-\rho^2}\mathbb{E}(\tilde{B}_t) = 0.$
   - ⋆ Comme B_t et $\tilde{B}_t$ sont indépendants, on a $Cov(B_t, \tilde{B}_s) = 0, \forall t, s \geq 0$. Donc

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_s) &= Cov(\rho B_t + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{B}_t, \rho B_s + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{B}_s) \\ &= Cov(\rho B_t, \rho B_s + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{B}_s) + Cov(\sqrt{1-\rho^2}\tilde{B}_t, \rho B_s + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{B}_s) \\ &= Cov(\rho B_t, \rho B_s) + Cov(\rho B_t, \sqrt{1-\rho^2}\tilde{B}_s) \\ &+ Cov(\sqrt{1-\rho^2}\tilde{B}_t, \rho B_s) + Cov(\sqrt{1-\rho^2}\tilde{B}_t, \sqrt{1-\rho^2}\tilde{B}_s) \\ &= \rho^2 Cov(B_t, B_s) + \rho\sqrt{1-\rho^2}Cov(B_t, \tilde{B}_s) + \sqrt{1-\rho^2}\rho Cov(\tilde{B}_t, B_s) \\ &+ (1-\rho^2)Cov(\tilde{B}_t, \tilde{B}_s) \\ &= \rho^2\min(t, s) + (1-\rho^2)\min(t, s) = \min(t, s). \end{aligned}$$

   Donc X_t est un mouvement Brownien standard.

2. Maintenant, on va prouver que X_t et B_t sont corrélés.
   On a :

$$\begin{aligned} Cov(X_t, B_t) &= Cov(\rho B_t + \sqrt{1-\rho^2}\tilde{B}_t, B_t) \\ &= Cov(\rho B_t, B_t) + Cov(\sqrt{1-\rho^2}\tilde{B}_t, B_t) \\ &= \rho Cov(B_t, B_t) + \sqrt{1-\rho^2}Cov(\tilde{B}_t, B_t) \\ &= \rho \end{aligned}$$

   Donc X_t et B_t sont corrélées avec un coefficient de corrélation ρ.

Exercice 4 :

$$X_t = B_t.1_{\{B_t \geq 0\}}.$$

1. Montrons que la fonction de densité de probabilité de X_t est $f_{X_t}(x) = 2f_{B_t}(x)$ pour $x \geq 0$.
   Soit $x \geq 0$. Comme $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, on a $\mathbb{P}(B_t \geq 0) = \frac{1}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(x \leq X_t \leq x+dx) &= \mathbb{P}(x \leq B_t.1_{\{B_t \geq 0\}} \leq x+dx) \\
&= \mathbb{P}(x \leq B_t \leq x+dx | B_t \geq 0) \\
&= \frac{\mathbb{P}(x \leq B_t \leq x+dx)}{\mathbb{P}(B_t \geq 0)} \\
&= 2\mathbb{P}(x \leq B_t \leq x+dx).
\end{aligned}$$

   Ainsi

$$f_{X_t}(x) = 2f_{B_t}(x), \quad x \geq 0.$$

2. Comme $X_t = B_t.1_{\{B_t \geq 0\}}$ et $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, $f_{X_t}(x) = 0$ pour$x < 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_t) &= \int_0^{+\infty} x.f_{X_t}(x)dx \\
&= 2\int_0^{+\infty} x.f_{B_t}(x)dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2t}}dx \\
&= \frac{2t}{\sqrt{2\pi t}}(0-(-1)) \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi}}.
\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_t^2) &= \int_0^{+\infty} x^2.f_{X_t}(x)dx \\
&= 2\int_0^{+\infty} x^{\cdot} f_{B_t}(x)dx \\
&= \mathbb{E}(B_t^2) = t.
\end{aligned}$$

   Donc

$$\mathbb{E}(X_t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$$

   et

$$\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) - \mathbb{E}(X_t)^2 = t - \frac{2t}{\pi} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)t.$$

3. X_t n'est pas gaussien car sa distribution est asymétrique.
   X_t n'est pas faiblement stationnaire car $\mathbb{E}(X_t)$ et $\mathbb{V}(X_t)$ dépendent de t.

4.
$$Y_t = |B_t| = B_t.1_{\{B_t \geq 0\}} - B_t.1_{\{B_t < 0\}} = X_t - B_t.1_{\{B_t < 0\}}.$$

Par symétrie de la loi normale B_t, on a

$$\mathbb{E}(B_t.1_{\{B_t < 0\}}) = -\mathbb{E}(B_t.1_{\{B_t \geq 0\}}) = -\mathbb{E}(X_t).$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(X_t) - (-\mathbb{E}(X_t)) = 2\mathbb{E}(X_t) \neq \mathbb{E}(X_t).$$

Ainsi X_t et Y_t ne sont pas identiquement distribuées.

Exercices 5 :

$$A_t = \int_0^t B_s ds, \quad t \geq 0.$$

1. Considérons une partition de $[0, t]$ en n sous-intervalles : $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, avec $t_i - t_{i-1} = 1/n$. Par définition de l'intégrale de Riemann, on a :

$$A_t = \int_0^t B_s ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} B_{t_i}(t_i - t_{i-1}).$$

Comme B_t est un processus gaussien et la limite d'une suite de variables gaussiennes reste gaussienne, A_t est un processus gaussien.

2. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(A_t) &= \mathbb{E}(\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} B_{t_i}(t_i - t_{i-1})) \\
&= \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} B_{t_i}(t_i - t_{i-1})) \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})\mathbb{E}(B_{t_i}) = 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(A_t) &= \mathbb{E}(A_t^2) - \mathbb{E}(A_t)^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} B_{t_i}(t_i - t_{i-1})\right)^2\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} B_{t_i}(t_i - t_{i-1})\right)^2\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} B_{t_i}^2(t_i - t_{i-1})^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} B_{t_i}B_{t_j}(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1})\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})^2\mathbb{E}(B_{t_i}^2) + 2\sum_{1\le i<j\le n}(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1})\mathbb{E}(B_{t_i}B_{t_j})\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i - t_{i-1})^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} t_i(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1})\right].
\end{aligned}$$

On a

$$\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i - t_{i-1})^2 \le t.\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = t^2.\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i<j\le n} t_i(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) &= \sum_{i=1}^{n} t_i(t_i - t_{i-1})\sum_{j=i+1}^{n}(t_j - t_{j-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} t_i(t_i - t_{i-1})(t_n - t_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} t_i(t_i - t_{i-1})(t - t_i)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(A_t) &= 2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} t_i(t - t_i)(t_i - t_{i-1}) \\
&= 2\int_0^t s(t-s)ds = \frac{t^3}{3}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{E}(A_t) = 0$ et $\mathbb{V}(A_t) = \frac{t^3}{3}$. Puisque $\mathbb{V}(A_t) \neq t$, le processus A_t n'est pas un mouvement Brownien standard.

3. Soit $t, s \geq 0$. La fonction d'auto-covariance est donnée par :

$$C_A(t, t+s) = \mathbb{E}(A_t A_{t+s}) - \mathbb{E}(A_t)\mathbb{E}(A_{t+s}).$$

Comme $\mathbb{E}(A_t) = \mathbb{E}(A_{t+s}) = 0$, on a $C_A(t, t+s) = \mathbb{E}(A_t A_{t+s})$. Nous avons, par la linéarité de l'espérance et par passage à la limite :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(A_t A_{t+s}) &= \mathbb{E}\left[\int_0^t B_u du \int_0^{t+s} B_v dv\right] \\
&= \int_0^t \int_0^{t+s} \mathbb{E}(B_u B_v) dv du \\
&= \int_0^t \left(\int_0^u v dv + \int_u^{t+s} u dv\right) du \\
&= \int_0^t \left(\frac{u^2}{2} + u(t+s-u)\right) du \\
&= \int_0^t \left((t+s)u - \frac{u^2}{2}\right) \\
&= (t+s)\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} = \frac{t^3}{3} - \frac{st^2}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi $C_A(t, t+s) = \frac{t^3}{3} - \frac{st^2}{2}, \quad \forall t, s \geq 0.$

Exercice 6 :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t).$$

1. $X_t = B_t$

   ⋆ Comme B_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable, X_t l'est.

   ⋆ D'après l'Exercice 4, question 4.,
   $$\mathbb{E}(|B_t|) = 2\sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \infty.$$

   ⋆ Pour $s \leq t$, comme $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ et B_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable, on a :
   $$\mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B_s|\mathcal{F}_s) = 0 + B_s = B_s.$$

   X_t est continue car B_t est continue. Ainsi $X_t = B_t$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale continue.

2. $Y_t = B_t^2 - t$

   ⋆ Comme B_t^2 est $\mathcal{F}_t$-mesurable, Y_t l'est.

   ⋆ $\mathbb{E}(|Y_t|) = \mathbb{E}(|B_t^2 - t|) \leq \mathbb{E}(B_t^2) + t = 2t < \infty.$

   ⋆ Pour $s \leq t$, comme $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ et B_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable, on a :
   $$\begin{aligned}
   \mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(B_t^2 - t|\mathcal{F}_s) \\
   &= \mathbb{E}((B_t - B_s + B_s)^2|\mathcal{F}_s) - t \\
   &= \mathbb{E}((B_t - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s) + B_s^2|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B_s^2|\mathcal{F}_s) - t \\
   &= \mathbb{E}((B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s) + 2\mathbb{E}(B_s(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B_s^2|\mathcal{F}_s) - t \\
   &= \mathbb{E}((B_t - B_s)^2) + 2B_s\mathbb{E}(B_t - B_s) + B_s^2 - t \\
   &= t - s + 0 + B_s^2 - t \\
   &= B_s^2 - s = Y_s
   \end{aligned}$$

Y_t est continue car B_t et $t \mapsto t$ sont continues. Ainsi $Y_t = B_t^2 - t$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale continue.

3. $Z_t = \exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

   ⋆ Comme B_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et la fonction exp est mesurable, Z_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

   ⋆ Z_t est une exponentielle d'une variable aléatoire gaussienne. On a

$$\mathbb{E}(|Z_t|) = \mathbb{E}(Z_t) = \mathbb{E}(\exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t\right)) = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} t\right) \mathbb{E}(\exp(\lambda B_t)).$$

   Comme $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, on a $\lambda B_t \sim \mathcal{N}(0, \lambda^2 t)$. Donc $\mathbb{E}(\exp(\lambda B_t)) = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} t\right)$. Par conséquent

$$\mathbb{E}(|Z_t|) = \exp\left((-\frac{\lambda^2}{2} t + \frac{\lambda^2}{2} t)\right) = 1 < \infty.$$

   ⋆ Pour $s \leq t$, comme $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ et B_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(\exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t\right) |\mathcal{F}_s) \\
&= \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} t\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(B_t - B_s + B_s)\right) |\mathcal{F}_s\right] \\
&= \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} t\right) \mathbb{E}\left[\exp(\lambda B_s) \exp(\lambda(B_t - B_s))|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} t\right) \exp(\lambda B_s) \mathbb{E}\left[\exp(\lambda(B_t - B_s))|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \exp\left(\lambda B_s - \frac{\lambda^2}{2} t\right) \mathbb{E}\left[\exp(\lambda(B_t - B_s))\right]
\end{aligned}$$

   Comme $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, on a $\lambda(B_t - B_s) \sim \mathcal{N}(0, \lambda^2(t-s))$. Donc $\mathbb{E}(\exp(\lambda(B_t - B_s))) = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right)$. Par conséquent :

$$\mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_s) = \exp\left(\lambda B_s - \frac{\lambda^2}{2} t\right) \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right) = \exp(\lambda B_s - \frac{\lambda^2}{2} s) = Z_s.$$

   Z_t est continue car B_t et $\exp$ sont continues. Ainsi Z_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale continue.