

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

SISTEMAS DE CONTROL II

Filminas para apuntes de clases a cargo de

Prof. Dr. Ing. Julián A. Pucheta

Primer Semestre

1. Introducción

1.1. Motivación: Problema de control

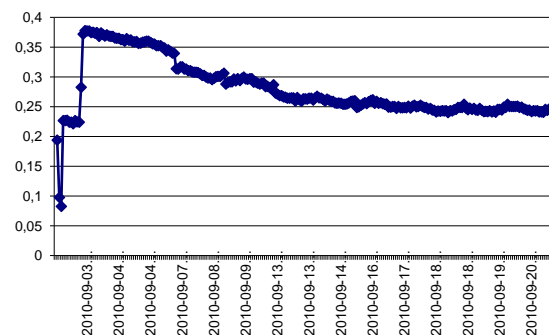
Es frecuente que en problemas de ingeniería se necesite manipular una variable para establecerle sus rangos según el propósito del usuario. Se requiere lograr que la variable evolucione a lo largo del tiempo dentro de un rango determinado para lo cual se hace necesario especificar un sistema de control. Existen numerosos casos cotidianos, por ejemplo, la velocidad de un motor, la acidez de un líquido, la temperatura de un horno, la humedad o temperatura de un ambiente, etc.

Una clasificación que puede hacerse de los procesos es a través de la velocidad en la que varían sus variables. Por ejemplo, procesos de dinámica rápida, media o lenta. Como procesos de dinámica rápida se puede pensar en los procesos electromecánicos, o para comunicación como PLL etc. De dinámica lenta se pueden encontrar procesos biológicos, hidráulicos, o térmicos. Entre estos dos extremos, se pueden agrupar los procesos de dinámica media, como los químicos, termodinámicos, etc.

Dentro de los procesos de dinámica lenta, puede clasificarse a la humedad de suelo o contenido de agua en suelo. Así, si se desea controlar el contenido de agua en el suelo en un cultivo agrícola, se puede instalar un sistema como se muestra en la Fig. 1-1 (a), que cuenta con mangueras y sensores específicos. En la Fig. 1-1 (b) se muestra la evolución temporal de la humedad de suelo en un punto obtenida mediante el sensor.



(a)



(b)

Fig. 1-1. Problema de control automático donde se pretende mantener la humedad de suelo en un determinado valor especificado por el productor.

Para lograr el objetivo de control, que es manipular a las variables de tal manera que la humedad de suelo esté en los rangos deseados, se procede a utilizar la matemática para formular y resolver el problema.

1.2. Formulación del problema de control

En la Fig. 1-2 se detalla el procedimiento general para resolver problemas de ingeniería basado en matemática aplicada. La formulación del problema consiste en proponer fórmulas o formas matemáticas que describan el funcionamiento del proceso. Así, siguiendo con el

concepto de la Fig. 1-2, se hace una simplificación del problema real mediante una descripción matemática o abstracción. Una vez hecha la abstracción se dispone de una expresión matemática del problema, que mediante matemática pura se obtiene una solución al problema y luego se verifica en el proceso real dicha solución obtenida. La abstracción exige la determinación de las variables, y su definición matemática mediante una expresión formal.

La expresión puede ser definida en el dominio de la frecuencia, o del tiempo. Sus variables pueden ser determinísticas o estocásticas, y las relaciones entre las variables puede ser lineal o no lineal que a su vez pueden variar con el parámetro tiempo. Esta abstracción se conoce como *modelado* del proceso, y es una expresión matemática que representa su funcionamiento. Se denomina entonces *modelo* a una representación simplificada de la realidad. El ingeniero es quién decide qué tan simple es la abstracción según los requerimientos de la solución que requiere el usuario.

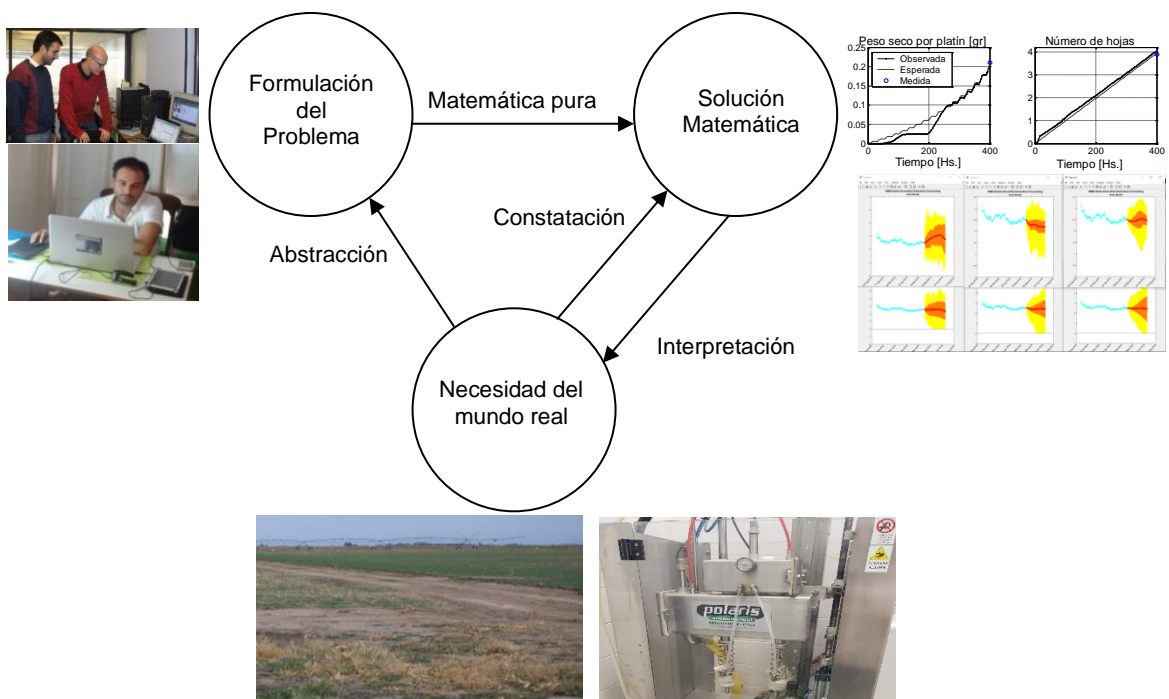


Fig. 1-2. Metodología de solución de problemas de ingeniería. El origen del procedimiento es el mundo real, y también donde se verifica la solución.

1.3. Solución del problema de control mediante planteo de entrada-salida

Es posible realizar el control de un proceso mediante un controlador en un esquema entrada salida como se muestra en la Fig. 1-3. Aquí el Controlador se implementa mediante un regulador que genera una acción de control según una proporcionalidad del error (P), otra de su integral en el tiempo (I) y otra acción relacionada a su derivada temporal (D), es decir PID.

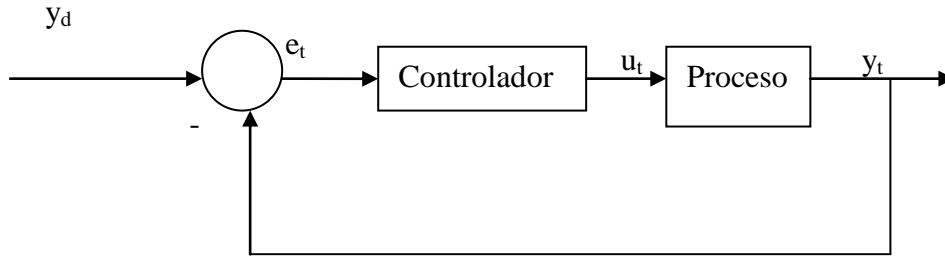


Fig. 1-3. Esquema de control en la representación de sistemas Entrada-Salida.

Se genera una acción de control proporcional al error de control, también proporcional a su integral y a su derivada. Se define así la acción de control como

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \dot{e}(t) \quad (1-1)$$

donde las constantes K_P , K_I y K_D se deben definir por el ingeniero para establecer el comportamiento deseado del proceso en lazo cerrado. Nótese que puede implementarse mediante técnicas de electrónica digital, si se realiza la discretización con un retentor de orden cero.

Para hallar la versión digital para implementarla en un sistema digital, se parte de la expresión temporal del controlador (1-1), y se despeja la constante K proporcional, quedando

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \dot{e}(t) \right) \quad (1-2)$$

y se trabaja en digitalizar el paréntesis, que es donde se tiene a la variable *tiempo*. Para digitalizar en el tiempo, se propone un intervalo de muestreo T , luego reemplazar la integral por una sumatoria de trapecios y la derivada del error por su cociente incremental,

$$u(k) = K \left(e(k) + \frac{1}{T_I} \sum_{h=1}^k \left(\frac{e(h-1) + e(h)}{2} \right) T + T_D \frac{(e(k) - e(k-1))}{T} \right). \quad (1-3)$$

Para escribirlo en forma compacta y buscar su transformada Z , se procede a estudiar mediante secuencias a la sumatoria,

$$\frac{1}{T_I} \sum_{h=1}^k \left(\frac{e_{h-1} + e_h}{2} \right) T = \frac{T}{2T_I} \left(\sum_{h=0}^k e_h + \sum_{h=0}^{k-1} e_h - e_0 \right). \quad (1-4)$$

Analizando la primera secuencia,

$$\sum_{h=0}^k e_h \quad (1-5)$$

se tiene que la suma se produce como

$$s_0 = e_0$$

$$s_1 = e_0 + e_1 = s_0 + e_1$$

$$s_2 = e_0 + e_1 + e_2 = s_1 + e_2$$

luego de k sumas se tiene

$$s_k = s_{k-1} + e_k$$

y tomando transformada Z en ésta última se tiene

$$z \left[\sum_{h=0}^k e_h \right] = \frac{1}{1-z^{-1}} e(z) \quad (1-6)$$

Analizando la segunda secuencia,

$$\sum_{h=0}^{k-1} e_h \quad (1-7)$$

se tiene que luego de $k-1$ sumas se llega a

$$s_{k-1} = s_{k-2} + e_{k-1}$$

y tomando transformada Z en ésta última se tiene que es la (1-6) multiplicada por z^{-1} ,

$$z \left[\sum_{h=0}^{k-1} e_h \right] = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} e(z) \quad (1-8)$$

por lo tanto, reemplazando la transformada z de la (1-3)

$$u(z) = K \left(e(z) + \frac{T}{2T_i} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} e(z) + \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} e(z) \right) + T_D \frac{(e(z) - z^{-1}e(z))}{T} \right) \quad (1-9)$$

si se suma y resta 1 en el segundo término de la parte integral

$$u(z) = K \left(e(z) + \frac{T}{2T_i} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} e(z) + \frac{1-1+z^{-1}}{1-z^{-1}} e(z) \right) + T_D \frac{(e(z) - z^{-1}e(z))}{T} \right) \quad (1-10)$$

entonces

$$u(z) = K \left(e(z) + \frac{T}{2T_i} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} e(z) + \frac{1}{1-z^{-1}} e(z) - e(z) \right) + T_D \frac{(e(z) - z^{-1}e(z))}{T} \right) \quad (1-11)$$

reordenando los términos, se tiene el PID en transformada z

$$u(z) = K \left(1 - \frac{T}{2T_i} + \frac{T}{T_i} \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{T_D}{T} (1-z^{-1}) \right) e(z) \quad (1-12)$$

es decir

$$u(z) = \left(K_p(T) + K_i(T) \frac{1}{1-z^{-1}} + K_d(T) (1-z^{-1}) \right) e(z) \quad (1-13)$$

donde se tiene que los parámetros del PID de tiempo continuo de la (1-1) están relacionados con los de la versión en Z, como

$$\begin{aligned} K_p(T) &= K_p - \frac{K_p T}{2T_i} = K_p - \frac{TK_i}{2} \\ K_i(T) &= K_p \frac{T}{T_i} = TK_i \\ K_d(T) &= K_p \frac{T_D}{T} = \frac{K_D}{T} \end{aligned} \quad (1-14)$$

La implementación en el espacio de las muestras se puede plantear a partir de la (1-13), operando en z

$$u(z) = \left(\frac{K_p(T)(1-z^{-1}) + K_i(T) + K_d(T)(1-z^{-1})^2}{1-z^{-1}} \right) e(z) \quad (1-15)$$

$$u(z)(1-z^{-1}) = [K_p(T) + K_i(T) + K_d(T) - (K_p(T) + 2K_d(T))z^{-1} + K_d(T)z^{-2}]e(z) \quad (1-16)$$

$$u_k = u_{k-1} + [K_p(T) + K_i(T) + K_d(T)]e_k - [K_p(T) + 2K_d(T)]e_{k-1} + K_d(T)e_{k-2} \quad (1-17)$$

y más compacto

$$u_k = u_{k-1} + Ae_k + Be_{k-1} + Ce_{k-2} \quad (1-18)$$

$$\begin{aligned} A &= K_p(T) + K_i(T) + K_d(T) = K_p - \frac{TK_i}{2} + TK_i + \frac{K_d}{T} = \frac{2K_pT + K_iT^2 + 2K_d}{2T} \\ B &= -K_p(T) - 2K_d(T) = -K_p + \frac{TK_i}{2} - 2\frac{K_d}{T} = \frac{-2K_pT + K_iT^2 - 4K_d}{2T} \\ C &= K_d(T) = \frac{K_d}{T}. \end{aligned} \quad (1-19)$$

Finalmente, la versión en tiempo discreto con tiempo de muestreo T es

$$u(k) = u(k-1) + Ae(k) + Be(k-1) + Ce(k-2) \quad (1-20)$$

donde los coeficientes A , B y C se relacionan con los parámetros del PID de tiempo continuo mediante

$$\begin{aligned} A &= \frac{2K_pT + K_iT^2 + 2K_d}{2T} \\ B &= \frac{-2K_pT + K_iT^2 - 4K_d}{2T} \\ C &= \frac{K_d}{T}. \end{aligned}$$

1.3.1. Ejemplo

Se propone controlar un motor CC que tiene que mantener una velocidad constante, para lo cual se implementó un controlador PID y se emplearon tres ternas de parámetros. En el apartado 1.3.2 se muestra en detalle cómo se realiza la implementación para simularlo.

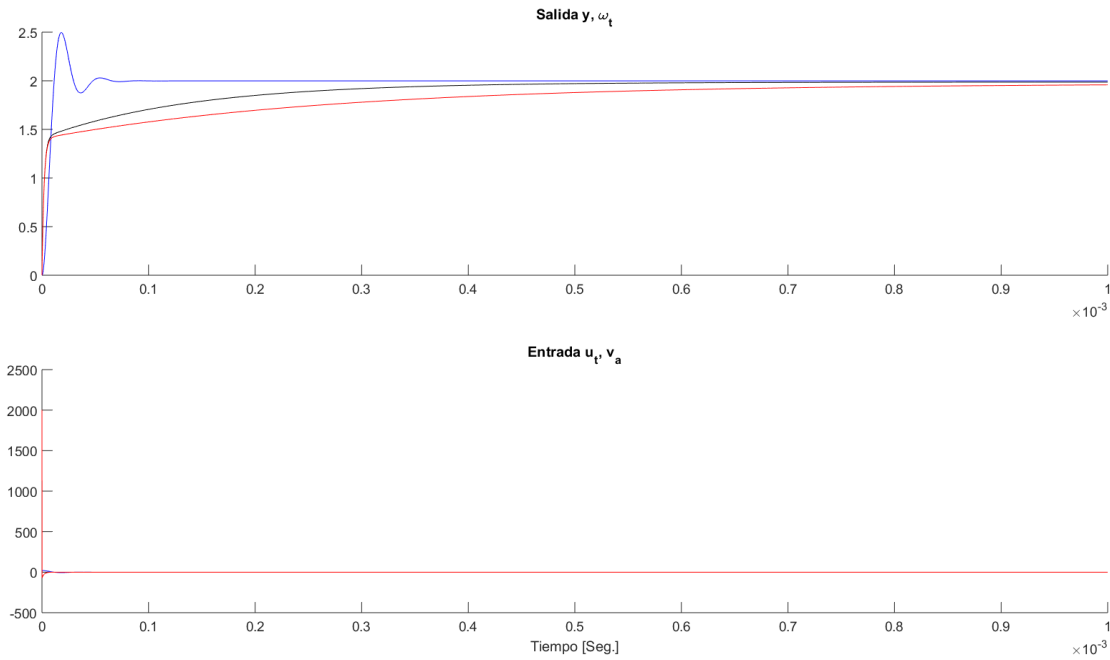


Fig. 1-4. Evolución de la velocidad de un motor CC cuando se emplea un controlador PID digital, con ternas de parámetros diferentes. % $K_p=.500$; $K_i=0.001$; $K_d=0.0001$; $\text{color_}='r'$; % $K_p=1$; $K_i=0$; $K_d=0.0001$; $\text{color_}='k'$; % $K_p=10$; $K_i=0$; $K_d=0$; $\text{color_}='b'$;

1.3.2. Simulación de un Motor CC usando Euler

Se tiene un modelo de un motor de corriente continua con un torque de carga en el rotor, como muestra la Fig. 1-5.

Las especificaciones son los parámetros que se muestran en la Fig. 1-5. y las variables de interés del motor se relacionan según las Ec (1-21), (1-22) y (1-23).

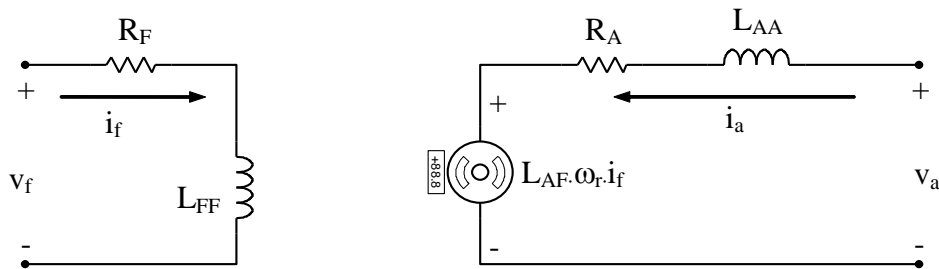


Fig. 1-5. Circuito eléctrico que representa al motor de CC. Las tensiones v_f y v_a son variantes en el tiempo y representan valores instantáneos.

Las variables de interés en el motor de CC son i_a , i_f , y ω_r . Las ecuaciones que las relacionan dinámicamente son:

$$\frac{di_f}{dt} = -\frac{R_F}{L_{FF}} i_f + \frac{1}{L_{FF}} v_f \quad (1-21)$$

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{R_A}{L_{AA}} i_a - \frac{L_{AF}}{L_{AA}} i_f \omega_r + \frac{1}{L_{AA}} v_a \quad (1-22)$$

$$\frac{d\omega_r}{dt} = -\frac{B_m}{J} \omega_r + \frac{L_{AF}}{J} i_f i_a - \frac{1}{J} T_L \quad (1-23)$$

donde J es la inercia del rotor, B_m es el amortiguamiento, y T_L es el torque de la carga. Se puede simplificar cuando la corriente de magnetización i_f es constante.

Entonces se tiene

$$K_i = \frac{L_{AF}}{J} i_f \quad (1-24)$$

$$T_m = K_i i_a$$

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{R_A}{L_{AA}} i_a - \frac{K_m}{L_{AA}} \omega_r + \frac{1}{L_{AA}} v_a \quad (1-25)$$

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{K_i}{J} i_a - \frac{B_m}{J} \omega_r - \frac{1}{J} T_L. \quad (1-26)$$

De donde la función de transferencia es

$$\frac{\omega_r(s)}{v_a(s)} = \frac{K_i}{s^2 L_{AA} J + s(R_A J + L_{AA} B) + (R_A B + K_i K_m)}. \quad (1-27)$$

Asignando los valores de un motor determinado, se tiene

```
Laa=366e-6;
J=5e-9;
Ra=55.6;
B=0;
Ki=6.49e-3;
Km=6.53e-3;
```

$$\frac{\omega_r(s)}{v_a(s)} = \frac{3,57 \cdot 10^9}{s^2 + 1,52 \cdot 10^5 s + 2,31 \cdot 10^7} \quad (1-29)$$

Nótese que los polos son $\lambda_1 = -1,5185 \cdot 10^5$, $\lambda_2 = -152,1259$. Aquí se puede encontrar el tiempo al que corresponde el 95% de la dinámica más rápida $\exp(\lambda_1 t)$ es $t_R = \ln(.95) / \lambda_1$

$$t_R = \frac{\ln(0,95)}{\lambda_1} = 3,3779 \cdot 10^{-7} \quad (1-30)$$

de donde se selecciona el tiempo de integración menor que ése t_R calculado, por ejemplo, tres veces menor, por ejemplo $1 \cdot 10^{-7}$.

Luego, para calcular el tiempo de simulación en el cual prácticamente ya no hay más transitorios, se toma la constante de tiempo más lenta y se calcula el tiempo para que la $\exp(\lambda_2 t)$ llegue al 5%, ese tiempo sería

$$t_L = \frac{\ln(0,05)}{\lambda_2} = 0,0197 \quad (1-31)$$

se puede tomar, por ejemplo, el triple de ese valor t_L , 0,06 seg.

En la Tabla 1-1 se detalla el código para simular el desarrollo de las variables de estado con la respuesta al escalón, es decir $u_t = 1$. En la Tabla 1-2 está el detalle del modelo lineal del motor CC.

```
clear;%close all;
X=[0; 0];ii=0;t_etapa=1e-7;wRef=2;tF=.001;
```



```

%Constantes del PID
Kp=.500;Ki=0.001;Kd=0.0001;color_='r';
% Kp=1;Ki=0;Kd=0.0001;color_='k';
% Kp=10;Ki=0;Kd=0;color_='b';
Ts=t_etapa;
A1=((2*Kp*Ts)+(Ki*(Ts^2))+(2*Kd))/(2*Ts);
B1=(-2*Kp*Ts+Ki*(Ts^2)-4*Kd)/(2*Ts);
C1=Kd/Ts;
e=zeros(tF/t_etapa,1);u=0;
for t=0:t_etapa:tF
    ii=ii+1;k=ii+2;
    X=modmotor(t_etapa, X, u);
    e(k)=wRef-X(1); %ERROR
    u=u+A1*e(k)+B1*e(k-1)+C1*e(k-2); %PID
    x1(ii)=X(1); %Omega
    x2(ii)=X(2); %wp
    acc(ii)=u;
end
t=0:t_etapa:tF;
subplot(2,1,1);hold on;
plot(t,x1,color_);title('Salida y, \omega_t');
subplot(2,1,2);hold on;
plot(t,acc,color_);title('Entrada u_t, v_a');
xlabel('Tiempo [Seg.]');
% % Para verificar
% Laa=366e-6;
% J=5e-9;
% Ra=55.6;
% B=0;
% Ki=6.49e-3;
% Km=6.53e-3;
% num=[Ki]
% den=[Laa*J Ra*J+Laa*B Ra*B+Ki*Km]; %wpp*Laa*J+wp*(Ra*J+Laa*B)+w*(Ra*B+Ki*Km)=Vq*Ki
% sys=tf(num,den)
% step(sys)

```

Tabla 1-1. Código de integración de Euler para el sistema lineal del motor de CC con PID.

```

function [X]=modmotor(t_etapa, xant, accion)
Laa=366e-6; J=5e-9;Ra=55.6;B=0;Ki=6.49e-3;Km=6.53e-3;
Va=accion;
h=1e-7;
omega= xant(1);
wp= xant(2);
for ii=1:t_etapa/h
    wpp = (-wp*(Ra*J+Laa*B)-omega*(Ra*B+Ki*Km)+Va*Ki)/(J*Laa);
    wp=wp+h*wpp;
    omega = omega + h*wp;
end
X=[omega,wp];

```

Tabla 1-2. Código del modelo del sistema lineal del motor de CC.

1.4. Ejercicios Sugeridos

1.4.1. Diseño de control lineal en procesos lineales

Se estudia un ejemplo de caso entrada salida de fase no mínima. Sea el ejemplo PM7.4 extraído de la literatura ([Dorf. Sistemas de Control Moderno 10ta edición. Pearson Prentice Hall 2005](#))

$$G(s) = \frac{(1+p)s - p}{s^2 + 3s + 6} \quad (1-32)$$

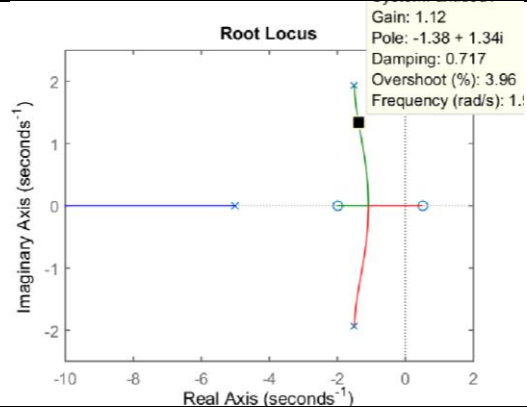
con $0 \leq p \leq \infty$, ¿para qué valores de p el lazo cerrado es estable? Trabajar con $P=1$. Hallar el compensador que haga estabilizar al sistema y tenga error de regulación nulo. Para ello, trazar el lugar de raíces para $-KG(s)$ y luego compensar en adelante. Después, mediante un controlador PI establecer error nulo en regulación.

Se fija $P=1$.

```
P=1; %PM7.4 del DORF
num=[1+P -P];
den=[1 3 6];
G=tf(num,den);
```

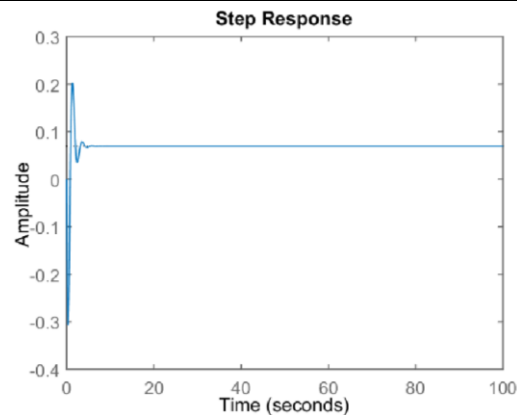
Se diagrama rlocus(-KCG) con un compensador en adelanto:

```
T1=1/2; %Cero
T2=1/5; %Polo
alfa=T2/T1; %Da entre 0 y 1
Kc=1; % K del rlocus(G)
C=tf(Kc*[1 1/T1],[1 1/(T2)]);
rlocus(-C*G)
```



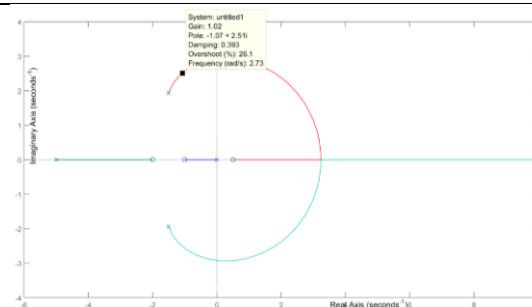
Fijando la ganancia K en -1.2, se puede cerrar el lazo y simular la respuesta al escalón.

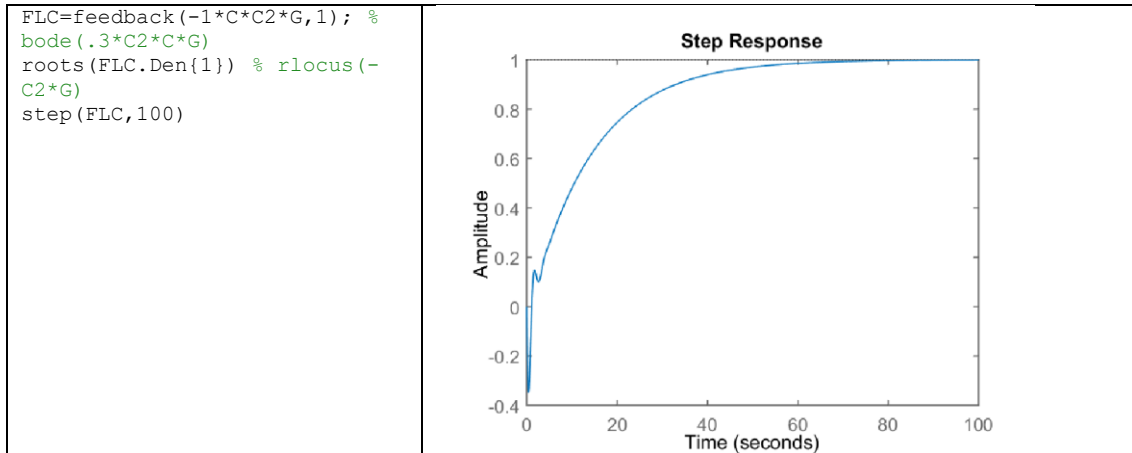
```
FLC=feedback(-1.12*C*G,1); %
bode(.3*C2*C*G)
roots(FLC.Den{1})
step(FLC,100)
```



Para que el error de respuesta al escalón sea nulo, se agrega un nuevo compensador PI, donde se ubica el polo de manera que no afecte a la dinámica rápida ya que es estable, y se vuelve a bosquejar el rlocus().

```
Kp=1; Ki=1;
C2=tf(Kp*[1 Ki/Kp],[1 0]);
rlocus(-1*C*C2*G)
```





Para mejorarse la velocidad de respuesta y que el tiempo de establecimiento disminuya de 20 segundos, debe volver a repetirse el cálculo del compensador en adelante y luego el proporcional integrativo. Es un proceso iterativo, que puede resultar útil en muchos casos, pero es poco intuitivo y difícil de ajustar.

1.4.2. Caso 1

Sea un modelo de un router TCP/IP cuya probabilidad de caída de paquetes (que deben retransmitirse) se controla mediante el uso de [un algoritmo](#) [1] de detección temprana aleatoria (random early detection, RED).

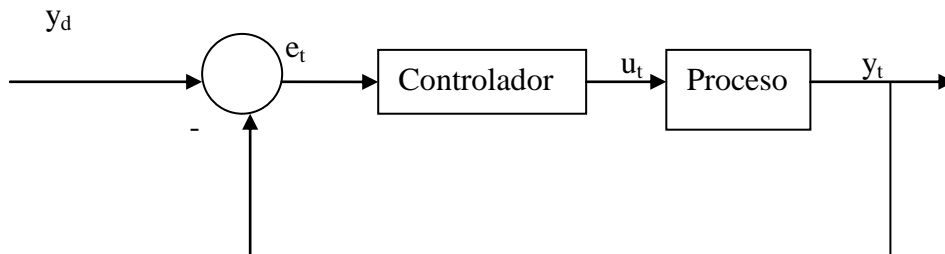


Fig. 1-6. Modelo de lazo cerrado.

Usando el modelo de lazo cerrado de la Fig. 1-6, la función de transferencia de lazo abierto $G(s)$ específica de la pila del router (cuya longitud es la variable para controlar) denotado como Proceso es

$$G(s) = \frac{7031250 \cdot e^{-0.2s}}{(s + 0.667)(s + 5)(s + 50)} \quad (1-33)$$

La función $e^{-0.2s}$ representa el retardo. La función retardo se puede reemplazar por una función de aproximación racional como

$$e^{-sT} \approx \frac{1 - \frac{T}{2}s}{1 + \frac{T}{2}s} \quad (1-34)$$

Una función de aproximación de Padé de primer orden que puede usarse es

$$e^{-sT} \approx 1 - Ts \quad (1-35)$$

Empleando estas aproximaciones, obtener un Controlador que estabilice el sistema de lazo cerrado con un error de regulación de estado estacionario menor al 10%, compare los resultados con el caso sin aproximar.

Tip: aproximar al retardo 0,2 segundos por un número entero de tiempos de integración h , y luego construir un arreglo de memoria circular para retardar la acción de control u , cantidades enteras de tiempo.

```
R_U=zeros(1,round(td/h)); %Inicia con valores nulos
:
. %Luego, en el bucle:
    U=función(error);
    R_U = circshift(R_U,[0,-1]); % Pila primero en entrar-
    R_U(end)=U;                  % primero en salir
    u(i)=R_U(1);                 % Sale del buffer circular
```

1.4.3. Caso 2

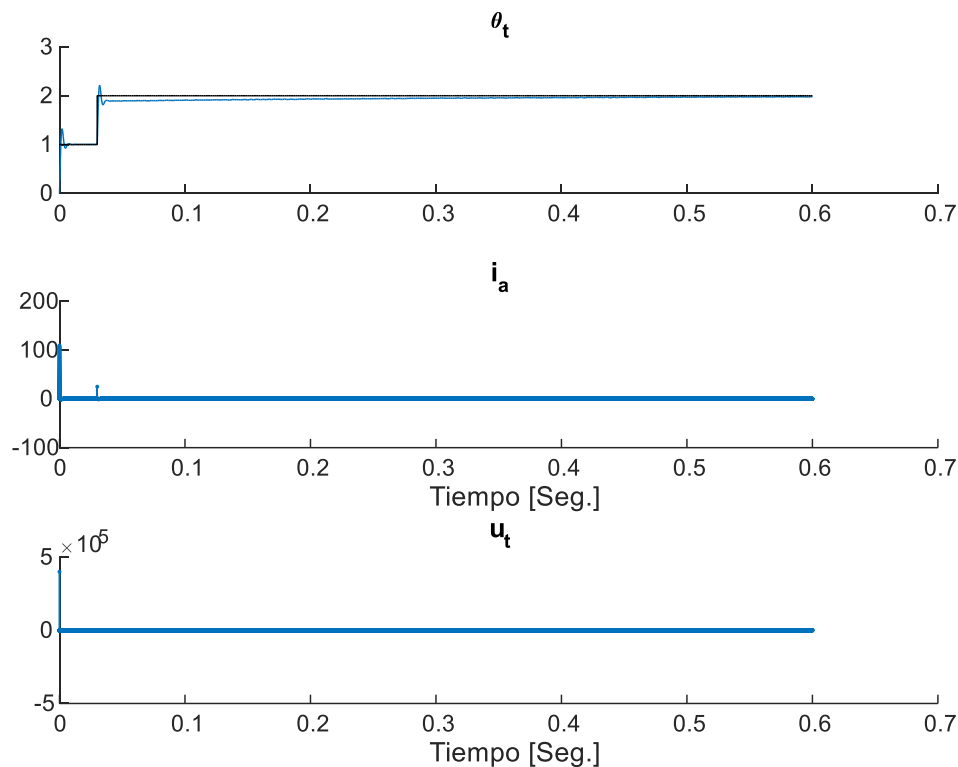


Fig. 1-7. Evolución de las variables involucradas en el control del ángulo del motor CC.

Proponer un esquema que permita el control del ángulo, dado un Torque acotado de perturbación menor a $1,15 \cdot 10^{-5}$, a partir de un tiempo de 0,05 seg con la referencia cambiando de 1 a 2, por lo que el sistema tiene una nueva variable de estado, θ_t ,

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{R_A}{L_{AA}} i_a - \frac{K_m}{L_{AA}} \omega_r + \frac{1}{L_{AA}} v_a \quad (1-36)$$

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{K_i}{J} i_a - \frac{B_m}{J} \omega_r - \frac{1}{J} T_L \quad (1-37)$$

$$\frac{d\theta_t}{dt} = \omega_r. \quad (1-38)$$

Se pretende obtener una gráfica como la Fig. 1-7. Nótese que los valores de tensión y corriente son inviables, por lo que deberá tenerse en cuenta que la tensión nominal del motor CC es de 12V, y su corriente máxima.

1.5. Modelo en el espacio de estados

La representación de sistemas en el espacio de estado constituye una herramienta para el análisis y diseño de sistemas de control en el dominio temporal. En particular resulta de gran importancia para el tratamiento de los sistemas multivariable en el transitorio a partir de condiciones iniciales no necesariamente nulas, como lo exige el dominio de Laplace. Esta forma de representación fue desarrollada para el tratamiento de modelos en tiempo continuo y fue extendida posteriormente a los modelos en tiempo discreto debido a los requerimientos impuestos por el control digital.

Se puede dar informalmente para un proceso la siguiente definición de estado dinámico del sistema.

El **estado** de un sistema causal es la información mínima que es necesario conocer en un instante $t=t_0$ para que juntamente con el valor de las entradas definidas en todo tiempo a partir de $t \geq t_0$; se pueda determinar el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$.

El **estado dinámico** de un sistema constituye una información instantánea que se va modificando con la evolución temporal del sistema. Las variables que son necesarias para definir el estado se denominan *variables de estado*. Se puede dar la siguiente definición.

Las **variables de estado** constituyen el conjunto más pequeño de variables, tales que el conocimiento de estas en $t=t_0$, juntamente con las entradas para $t \geq t_0$, determinan el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$.

De igual modo se puede definir el **vector de estados**, como aquél cuyas componentes están constituidas por las n variables de estado.

Finalmente se define al **espacio de estados** como el espacio geométrico n -dimensional donde se puede representar cualquier estado por un punto.

Las **ecuaciones** en el espacio de estado relacionan las variables de estado con las de salida y las de entrada al proceso real. Por ello, el sistema dinámico debe incorporar elementos que *memoricen* los valores de las entradas para $t \geq t_1$, siendo los *integradores* dispositivos con capacidad de memoria. Así, las salidas de los integradores sirven como variables de estado. Se expresa la ecuación en el espacio de estados, entonces, como

$$x_t = \int_{t_0}^t f(x_\tau; u_\tau; \tau) d\tau, \quad (1-39)$$

y la ecuación de la salida del sistema es

$$y_t = g(x_t; u_t; t), \quad (1-40)$$

donde x es la variable de estado, u es la entrada al sistema, $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ son las funciones de estado y salida, respectivamente.

Para que las Ecs. (1-39) y (1-40) estén en función de una única variable tiempo t , se puede expresar al sistema (1-39) como

$$\dot{x}_t = f(x_t; u_t; t), \quad (1-41)$$

y la salida resulta igual que (1-40).

Si la dinámica del proceso involucra más que un integrador, entonces quedará definida una variable de estado para cada integrador. Así, para un sistema con n integradores, se define con n ecuaciones de estado y n variables de estado, y se tiene, entonces

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_t; t), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_t; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_t; t) \end{aligned} \quad (1-42)$$

y la salida resulta

$$y(t) = g(x_1, x_2, \dots, x_n; u_t; t). \quad (1-43)$$

En el caso de que el sistema tenga r entradas y m salidas, con una dinámica de n integradores, se tiene entonces el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \quad (1-44)$$

y la salida

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \quad (1-45)$$

quedando definida la representación en el espacio de estados de un sistema de múltiples entradas y múltiples salidas, de orden n .

Si se definen vectores o arreglos a partir de cada una de las variables y ecuaciones, se obtiene

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \quad (1-46)$$

y la salida análogamente

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}, \quad (1-47)$$

entonces el sistema dinámico definido por las Ecs. (1-44) y (1-45) se reduce a la representación

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1-48)$$

para la ecuación de estados, y

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1-49)$$

para la ecuación de salida.

Si alguna de las funciones f o g involucran al tiempo t explícitamente, entonces se denomina *sistema variante en el tiempo*.

Las Ecs. (1-48) y (1-49) se emplean en el diseño de controladores, siempre que se considera que es no lineal con técnicas específicas (según la clase de funciones f y g) como función descriptiva, Liapunov y optimización.

1.5.1. Linealización de sistemas no lineales

Dada una función no lineal general

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1-50)$$

si se la desarrolla por serie de Taylor en un punto de operación (x_0, y_0) , se obtiene

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(x_0) + \frac{d\mathbf{f}}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2\mathbf{f}}{dx^2}(x - x_0)^2 + \dots \quad (1-51)$$

con las funciones derivadas evaluadas en el punto x_0 .

Luego, si la variación Δx es tal que Δx^2 es cercano a cero, se puede escribir

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(x_0) + \left. \frac{d\mathbf{f}}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) \quad (1-52)$$

o también, una función en pequeña excursión definida como la resta $y-f(x_0)$.

Además, si la función y es dependiente de dos variables x_1, x_2 se tiene

$$y - f(x_{10}, x_{20}) = \left. \frac{df}{dx_1} \right|_{x_1=x_{10}} (x_1 - x_{10}) + \left. \frac{df}{dx_2} \right|_{x_2=x_{20}} (x_2 - x_{20}) \quad (1-53)$$

Nótese que la Ec. (1-53) es válida en una vecindad reducida.

Si la función $f(\cdot)$ es vectorial, se obtendría un vector y , cuyas componentes son calculadas mediante la Ec. (1-53).

1.5.2. Ejemplo: sistema dinámico de una entrada y una salida

Se pretende generar la versión lineal en su punto de operación (X_0, U_0) del sistema

$$\begin{aligned} \dot{X}_t &= f(X_t, U_t) \\ Y_t &= g(X_t, U_t) \quad \text{con } X_0 = X(0), U_0 = U(0). \end{aligned} \quad (1-54)$$

Aplicando la fórmula de Taylor para funciones escalares de varias variables, se tienen las relaciones lineales

$$\begin{aligned} \dot{X}_t &= f(X_0, U_0) + \left. \frac{\partial f(X_t, U_t)}{\partial X_t} \right|_{x_0, u_0} (X_t - X_0) + \left. \frac{\partial f(X_t, U_t)}{\partial U_t} \right|_{x_0, u_0} (U_t - U_0) \\ Y_t &= g(X_0, U_0) + \left. \frac{\partial g(X_t, U_t)}{\partial X_t} \right|_{x_0, u_0} (X_t - X_0) + \left. \frac{\partial g(X_t, U_t)}{\partial U_t} \right|_{x_0, u_0} (U_t - U_0) \end{aligned} \quad (1-55)$$

que a su vez, se puede independizar de los términos constantes de f y g valuados en el punto de operación definiendo al sistema en pequeña excursión,

$$\begin{aligned} \Delta \dot{X}_t &= \left. \frac{\partial f(X_t, U_t)}{\partial X_t} \right|_{x_0, u_0} \Delta X_t + \left. \frac{\partial f(X_t, U_t)}{\partial U_t} \right|_{x_0, u_0} \Delta U_t \\ \Delta Y_t &= \left. \frac{\partial g(X_t, U_t)}{\partial X_t} \right|_{x_0, u_0} \Delta X_t + \left. \frac{\partial g(X_t, U_t)}{\partial U_t} \right|_{x_0, u_0} \Delta U_t \end{aligned} \quad (1-56)$$

que admiten condiciones iniciales ΔX_0 , ahora alrededor del punto de linealización. Tener presente que la validez de las relaciones lineales está dentro de $\Delta^2 \approx 0$.

La (1-56) tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= ax_t + bu_t \\ y_t &= cx_t + du_t \end{aligned} \quad (1-57)$$

con $x_0=x(0)$, donde a, b, c y d son coeficientes constantes, y las nuevas variables x_t, y_t y u_t son definidas como la diferencia entre el punto de operación y el modelo linealizado.

1.5.3. Caso entradas y salidas múltiples

Si las funciones f y g fuesen vectoriales, lo cual significa que $Y \in \mathfrak{R}^m$, $X \in \mathfrak{R}^n$ y $U \in \mathfrak{R}^r$ tienen varias componentes, entonces se emplean las siguientes expresiones para el cálculo el modelo linealizado

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}_i &= f(\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0) + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t)}{\partial X_j} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} (\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_{0j}) + \sum_{j=1}^r \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t)}{\partial U_j} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_{0j}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \\ \mathbf{Y}_h &= g(\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0) + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial g_h(\mathbf{U}_t, \mathbf{U}_t)}{\partial X_j} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} (\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_{0j}) + \sum_{j=1}^r \left. \frac{\partial g_h(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t)}{\partial U_j} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} (\mathbf{U}_j - \mathbf{U}_{0j}), \quad h = 1, 2, \dots, m.\end{aligned}\tag{1-58}$$

Que consiste en el Jacobiano de $f()$ y $g()$ respecto a \mathbf{X} y a \mathbf{U} valuadas en el punto de operación $(\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0)$. La (1-58) toma la forma análoga a la (1-57), como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{C}\mathbf{x}_t + \mathbf{D}\mathbf{u}_t\end{aligned}\tag{1-59}$$

con $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$, donde \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} son matrices.

[1]. [Hollot, C. V., Misra, V., Towsley, D., and Gong, W. A Control Theoretic Analysis of RED. *Proceedings of IEEE INFOCOM*, 2001, pp. 1510–1519.](#)