

# Simulação e Métodos de Monte Carlo

## Projeto

Ângelo Ferreira  
Giorgio Canezin

Julho, 2021

### Resumo

Inspirados pela curiosidade em estudar a sorte no contexto de casinos (e assim saber se vale a pena experimentar ir a um), iremos fazer uma análise de algumas estratégias de jogo em jogos de sorte e averiguar a sua fiabilidade, com recurso à simulação de Monte Carlo.

## Introdução

Jogos de sorte não são algo que se resume simplesmente à aplicação de cálculo de probabilidades: neste tipo de jogos o progresso é influenciado pela ação humana. Quando se realizam apostas, o fator humano tem um grande impacto, pois um jogador não se interessa apenas pela probabilidade matemática das várias jogadas, mas em vez, o jogador tem expectativas do jogo para além da jogada em que se encontra.

De modo a obter resultados favoráveis desta expectativa, os apostadores tentam estar o mais informados possível, incluindo sobre estatísticas de jogo, de modo a construírem estratégias.

Neste trabalho iremos fazer uma abordagem bastante *straightforward* (recorrendo a gráficos como explicação) a alguns dos casos mais comuns de estratégias de jogo em jogos de sorte, começando por uma situação mais simples e evoluindo a partir daí.

## Casinos e estratégias de jogo

### O apostador simples

De modo geral, no que toca a casinos, estes esperam ter um retorno a longo prazo, oferecendo aos jogadores a possibilidade de obterem um lucro a curto prazo. Tal é conseguido pela introdução em cada jogo de um elemento, normalmente subtil, que favoreça o lucro do casino a longo prazo<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Enquanto que em certos jogos é possível desenvolver uma aptidão estratégica extraordinária para reverter o "azar" pré-condicionante (ou inerente) a longo prazo e conseguir assim vantagem sobre o jogo, são necessários vários anos de treino de memória, numeramento e observação

Considere-se então, por exemplo, e de modo a representar a situação descrita, uma roleta europeia. Esta é composta por 37 compartimentos com números de 0 a 36, embora nos iremos basear em cores. O número zero é verde, os restantes números são divididos igualmente pelas cores vermelha e preta, sendo que iremos fazer os números pares corresponder à cor vermelha e os números ímpares à cor preta.

Neste jogo escolhemos uma cor, apostando assim que uma bola que roda numa plataforma côncava exterior à roleta em sentido contrário àquele com que é feita a roleta rolar, irá, ao perder momento, aproximar-se da roleta e parar num compartimento cuja cor é aquela em que apostámos, ganhando assim a aposta.

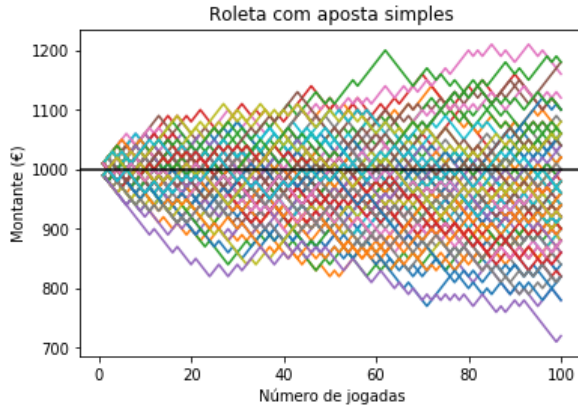


Figura 1: Jogo da roleta.

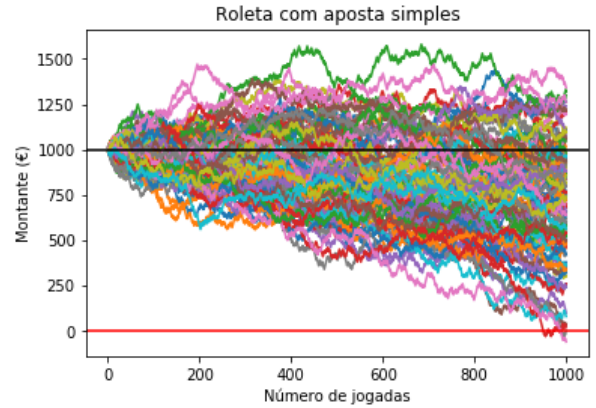
O zero é introduzido aqui como o elemento que confere uma desvantagem inerente a qualquer jogador (quer este aposte na cor vermelha quer na cor preta). É de notar também que acaba por ser indiferente a cor que se escolhe, daí fazer-se uma simplificação: a probabilidade de se ganhar em cada jogada é de  $16/37$ , e é com base nesta probabilidade que iremos ver o quão vantajoso ou desvantajoso pode ser o jogo da roleta a longo prazo.

De modo a visualizar o efeito da probabilidade inerentemente desvantajosa, imagine-se um jogo da roleta onde participam 100 jogadores e onde cada jogador começa com 1000 euros. Em cada jogada, cada jogador aposta 10 euros.

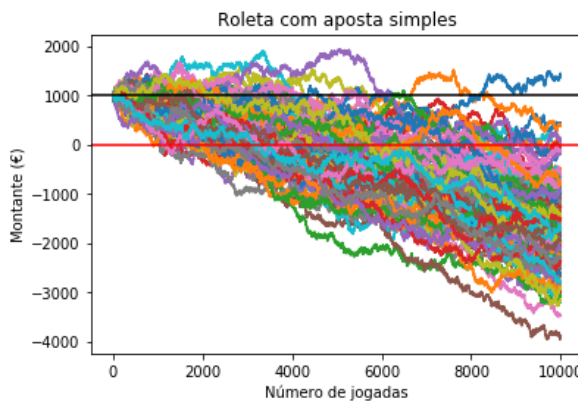
Para conseguirmos uma melhor interpretação do que se passa neste caso, iremos acrescentar a percentagem de jogadores que "sobreviveram", ou seja, que chegaram ao fim do número de jogadas sem terem ido à falência. Fazendo a simulação do jogo para 100, 1000, 10000 e 100000 jogadas por jogo, obtiveram-se os seguintes gráficos:



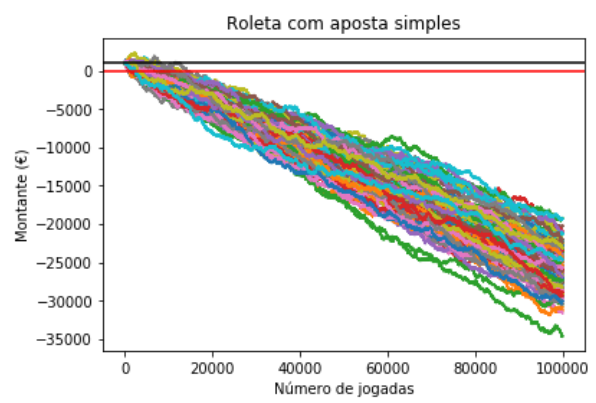
(a) 100 jogadas, taxa de sobrevivência de 99.0%



(b) 1000 jogadas, taxa de sobrevivência de 98.0%



(c) 10000 jogadas, taxa de sobrevivência de 6.0%



(d) 100000 jogadas, taxa de sobrevivência de 0.0%

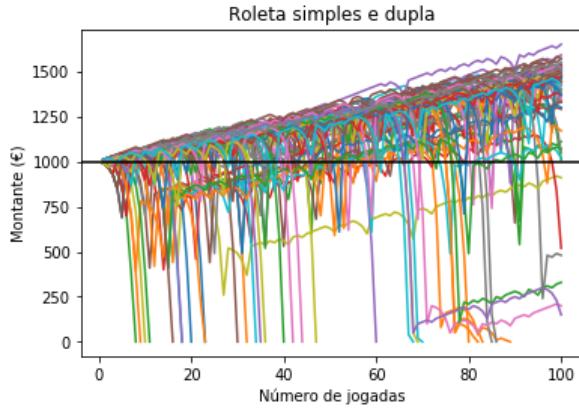
Figura 2: Jogo da roleta com 100 participantes, cada qual começando com um montante inicial de 1000 euros e indo apostando 10 em cada jogada, para jogos com diferentes números de jogadas. Nestas simulações permitimos apostas em débito para vermos a tendência negativa do retorno do jogo.

Torna-se então claro que, a longo prazo, é impossível ficar a ganhar (existe uma tendência que se mostra claramente negativa quando aumentamos o número de jogadas por jogo), uma vez que para um número suficientemente elevado de jogadas por jogo<sup>2</sup>, vemos que todos os jogadores acabam por ir à falência. A melhor hipótese que se tem de ganhar dinheiro neste jogo da roleta em específico é então sendo-se um jogador furtivo.

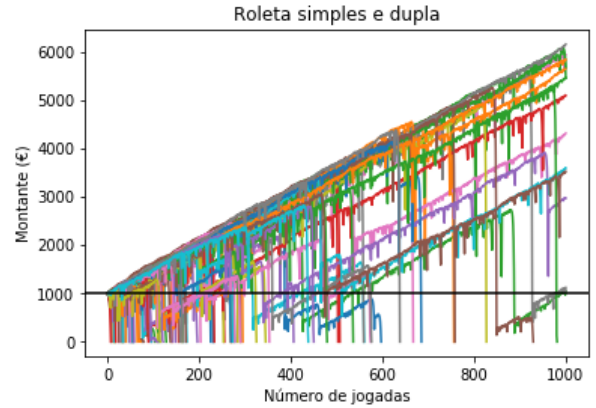
## O apostador duplo

Também chamada de estratégia de martingale, consiste em apostar o dobro da aposta corrente de cada vez que um jogador perde, até que este ganhe, voltando após a vitória à aposta inicial. ignorando graficamente agora prejuízos negativos.

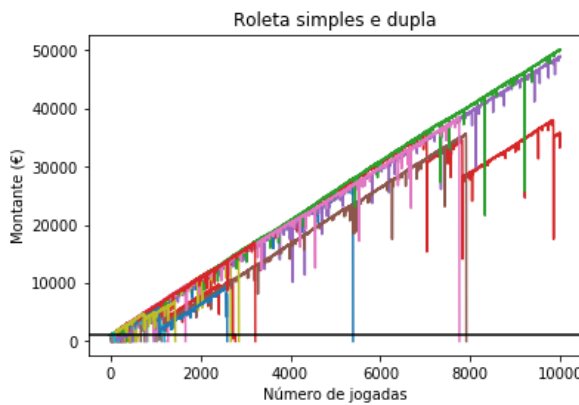
<sup>2</sup>Isto pode de certa forma ser traduzido para um número suficientemente grande de jogos.



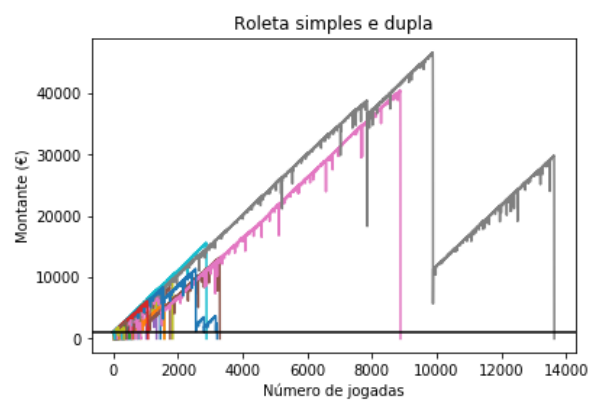
(a) 100 jogadas, taxa de sobrevivência de 71.0%



(b) 1000 jogadas, taxa de sobrevivência de 14.0%



(c) 10000 jogadas, taxa de sobrevivência de 3.0%



(d) 100000 jogadas, taxa de sobrevivência de 0.0%

Figura 3: Jogo da roleta usando a aposta dupla com 100 participantes, cada qual começando com um montante inicial de 1000 euros e aposta base 10, para jogos com diferentes números de jogadas.

No caso do apostador duplo temos um efeito interessante, que é uma notória tendência de subida nos lucros dos apostadores que se mantêm "vivos" no fim do jogo. Vemos ao longo dos gráficos que, quantas mais jogadas um jogo de roleta tiver, tanto mais provável é de se ir à falência, como de se ter um lucro maior caso se sobreviva.

Notamos, a partir do jogo da roleta para 100 jogadas, quer no caso do apostador simples quer no do duplo, que, no caso simples, não houve nenhum jogador a ir à falência, e que, além disso, a este ponto, a tendência total de retorno é aproximadamente constante. Por outro lado, vemos que no caso do apostador duplo, para um jogo com o mesmo número de jogadas, cerca de metade dos apostadores vão à falência. E isto acontece para todos os jogos: o apostador simples possui uma maior probabilidade de sobrevivência comparando com o apostador duplo para jogos com um maior número de jogadas.

Tal mostra-nos claramente que apostar o dobro de cada vez que se perde é uma estratégia mais arriscada, pois a aposta de maiores quantias de dinheiro leva ou mais rapidamente à falência ou a uma maior recompensa, que no entanto é tanto menos provável quanto maior for a quantia de dinheiro em jogo.

Vemos assim que, embora famosa, esta estratégia é incapaz de contrariar a desvantagem

inerente ao jogo da roleta, ainda que no entanto confira altos lucros aos raros sobreviventes.

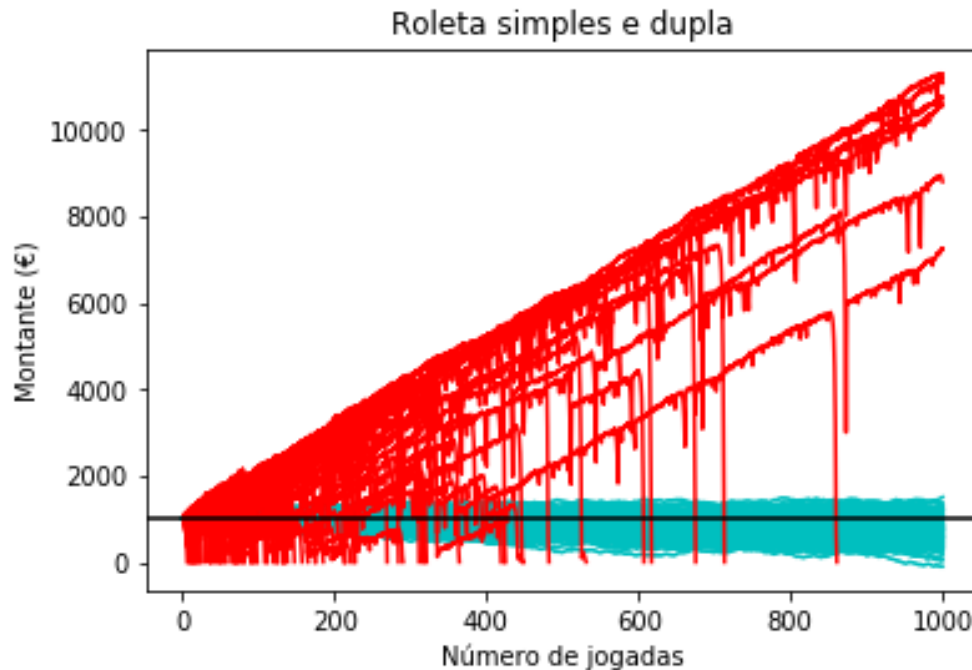


Figura 4: Comparação da estratégia de aposta simples com a de aposta dupla para um jogo de 1000 jogadas, sendo ambos os conjuntos compostos por 100 jogadores que começam com 1000 euros e com aposta base de 10.

Oferecendo agora dados mais concretos, com a simulação anterior (para um jogo com 1000 jogadas) obtivemos as seguintes taxas de lucro e de falência:

Taxa de lucro dos apostadores simples: 22.0 %  
Taxa de falência dos apostadores simples: 2.0 %  
Taxa de lucro dos apostadores duplos: 6.0 %  
Taxa de falência dos apostadores duplos: 94.0 %

Poderíamos ter feito uma tabela com os valores de probabilidade de lucro e falência para os jogos com diferente número de jogadas, mas é intuitivo perceber que tanto a margem de lucro diminui como a de falência aumenta para jogos com maior número de jogadas. O importante aqui era ter um meio de comparação numérica para um caso entre apostadores simples e duplos.

## O apostador múltiplo

Vimos atrás que com o apostador duplo, apesar de ter menos probabilidade de lucrar que o apostador simples, se lucrasse ia ter uma recompensa bastante elevada. Imagine-se agora que em vez de um apostador que dobra a aposta de cada vez que perde uma jogada, este multiplica sempre a aposta por um número que maximiza a probabilidade de lucro e minimiza a probabilidade de falência para as condições específicas do jogo.



Foi desenvolvido um código que faz o número de amostras em testes de cada jogo, sendo que em cada jogo descobre-se o múltiplo ótimo (que maximiza a probabilidade de lucro e minimiza a de falência) respetivo. A cada iteração do conjunto de jogos, compara-se o múltiplo ótimo de um jogo com o considerado múltiplo ótimo global (o critério de comparação é se o múltiplo ótimo do jogo em comparação possui simultaneamente uma maior probabilidade de lucro e uma menor de falência que o múltiplo ótimo global), até que no fim obtemos o múltiplo ótimo pretendido.

Consideremos agora um jogo cujo montante inicial são 1000€, aposta base 10€, que cada jogo tem 100 jogadas e que a nossa amostra é de 100 jogadores. Fazendo então o mesmo número de *trials* que o da nossa amostra (100), obtivemos nestas condições, para o melhor *trial*:

Múltiplo ótimo: 1.7045702822482716

Taxa de falência: 14.0%

Taxa de lucro: 70.0%

Ou seja, nas condições descritas deste jogo, descobrimos por quando devemos multiplicar a nossa aposta de cada vez que perdemos uma jogada de modo a simultaneamente maximizarmos a chance de lucro e minimizarmos a de falência. E note-se que, agora pela primeira vez neste trabalho deparamo-nos com uma situação em que é rentável apostar, mesmo apesar da desvantagem inerente do jogo (!).

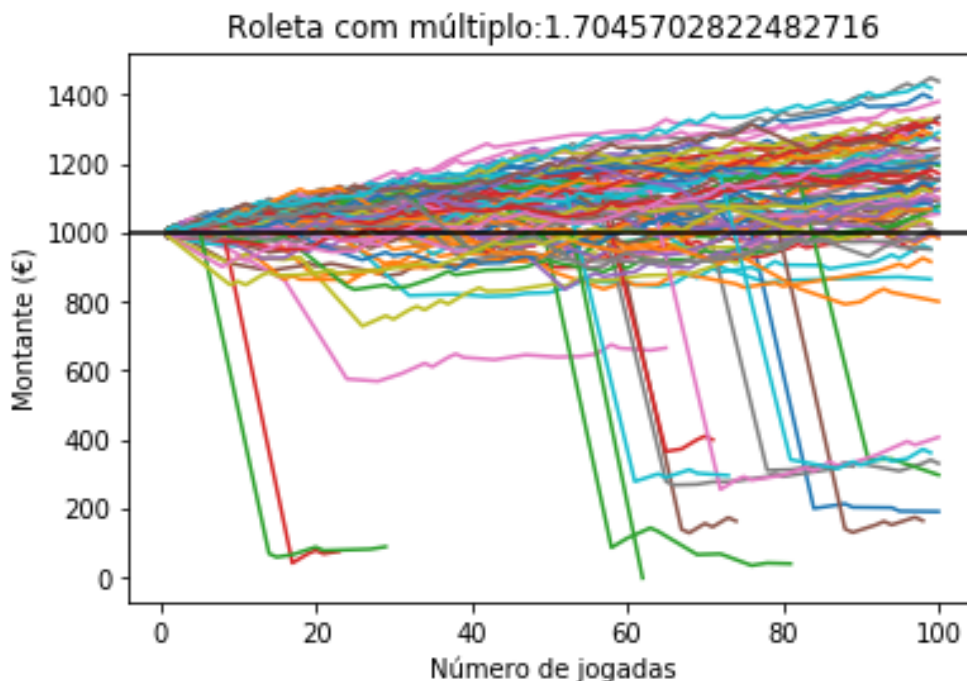


Figura 5: Jogo da roleta com 100 jogadores, montante inicial de 1000€, aposta base 10€, 100 jogadas e o múltiplo ótimo obtido na simulação em cima descrita.

Através da conclusão anterior, de que é possível e até provável lucrar num jogo inerentemente desvantajoso, conseguimos responder à premissa inicial, concluindo que realmente, é

possível arranjar estratégias que contrariem a desvantagem probabilística inerente a certos jogos.

No entanto, vamos ainda explorar outro método. O método seguinte, ao contrário dos anteriores, é um método que supostamente deve ser usado em apostas onde a probabilidade de ganhar ou perder é igual.

## Método de D’Alambert

Supomos agora que o *slot* verde do jogo da roleta permite uma nova jogada, e então, que temos igual probabilidade de ganhar ou perder.

Nesta subsecção iremos discutir a estratégia de D’Alambert, que de certa forma é semelhante à do apostador duplo: de cada vez que um jogador perde uma jogada este aumenta a aposta corrente por uma unidade, no entanto, de cada vez que ganha, em vez de retomar com a aposta base, apenas fica a apostar menos uma unidade do que tinha apostado na última jogada (aquela em que ganhou).

Neste caso consideramos a unidade como sendo a aposta base. Ou seja, por exemplo, se estamos a apostar uma aposta base de 10€ e perdemos uma jogada, na jogada seguinte apostamos 20€. Se perdemos novamente, 30€. No entanto, se ganharmos a jogada seguinte, ao invés de voltarmos à aposta base, como no caso do apostador duplo e do múltiplo, subtraímos a aposta base da aposta corrente, e assim na jogada seguinte irá apostar-se  $30-10=20$ €. E por daí em diante.

Aqui vamos alargar ainda mais a nossa análise, ao procurarmos saber para um jogo, qual foi o retorno do investimento, ou seja, se no *overall* de um jogo houve lucro global ou prejuízo.

Ao desenvolvermos o algoritmo do método de D’Alambert vimos que para um jogo nas condições anteriores de montante inicial 1000€, aposta base 10€, 1000 jogadas e 1000 jogadores, a taxa de lucro era aproximadamente constante (à volta dos 10-11 %) e a de falência também (à volta dos 89-90 %) (o que nos indica que no fim do jogo, praticamente todos os jogadores que não foram à falência lucraram) mas no entanto, o retorno do investimento era variável, pois a percentagem de lucro podia chegar a ser de cerca de -15% a cerca de +12 %.

Claramente que aqui existe um acentuado desvio padrão da percentagem do retorno de investimento, embora não nos tenhamos preocupado em calculá-lo. Por outro lado, decidimos multiplicar o número de jogos pelo número da amostra de jogadores (1000) (novamente, este número foi definido por convenção para o número de iterações (jogos) a simular, podia ter sido outro número qualquer) e fazer as estatísticas globais, de modo a conseguirmos ter valores do retorno de investimento e respetiva percentagem, taxa de falência e de lucro mais precisos.

Neste caso obtivemos os seguintes resultados:

Percentagem de retorno de investimento: 0.17110999999999998 %  
Percentagem de pessoas que foram à falência: 88.8692 %  
Percentagem de pessoas que obtiveram lucro: 10.9995 %

A partir destes valores obtidos, podemos confirmar que efetivamente tanto as percentagens de lucro como de falência tendem para um limite, e além disso, vemos também que a percentagem de retorno parece levar a um ligeiro retorno no investimento (esta análise feita

portante para 1000 jogos cada com 1000 jogadores, o que parece ser uma análise razoavelmente extensa).

Portanto, apesar da percentagem elevada de pessoas que vai à falência, os jogadores no global ficam a ganhar (ainda que quase uma esmola - para a nossa amostra de 1000 jogadores a começar com um montante inicial de 1000€, ao longo de 1000 jogos (com 1000 jogadas cada) o retorno global obtido é o equivalente a cada jogador ter recebido em média 1.71€).

Vale a pena notar que os jogadores que lucram, pelos motivos anteriormente referidos, conseguem quantias bem grandes. Isto além do mais significa que, se um jogador se encontrar numa maré de sorte e vir os seus lucros subirem ao longo das 1000 jogadas, torna-se menos provável que este venha a perder, e então o mais provável é que continue a ganhar e a subir os lucros.

A estratégia de D'Alembert leva-nos a uma nova descoberta interessante: afinal existem estratégias de jogo em jogos de igual probabilidade de ganho e perda que causam prejuízo aos casino a longo prazo.

## Conclusão

Concluimos que vale a pena experimentar ir a um casino apostar, no entanto, notamos na importância de determinar as estatísticas dos diferentes jogos com as suas respetivas regras e condições, de modo a depois podermos fazer uma análise pessoal mais formada. Não nos esqueçamos que o fator humano é o mais determinante, e que nem todos ambicionam o mesmo. Alguns procuram uma maior probabilidade de lucro, outros uma maior margem de lucro, ao mesmo tempo em que a relação com a possibilidade de prejuízo ou mesmo de falência também é variável.

Notamos também que a nossa análise foi bastante direta e que podia ter sido bem mais elaborada. Podiam ter sido feitas várias simulações comparando mais parâmetros e assim podíamos ter feito tabelas de comparação, no entanto, preferimos esta abordagem mais simples, até porque consideramos mais adequada a carga de trabalho que esta abordagem nos conferiu.

Além do mais, ficou por explorar a estratégia de Labouchère, também mencionada pela página da Wikipedia: *Gambling mathematics*, no entanto, mais uma vez por questões de carga de trabalho, decidimos que essa questão ficará para uma outra altura.

Neste trabalho explorámos a simulação de Monte Carlo, tendo-nos servido de suporte o código em Python que é enviado como anexo ao relatório. O código está apresentado quase como uma folha de rascunho, apresentado muitos *prints* e passos que eventualmente perderam utilidade comentados. No entanto, as variáveis encontram-se devidamente nomeadas de modo a facilitar um entendimento intuitivo do código; e além disso, com os *uncomments* certos, todos os resultados apresentados neste relatório são reproduzíveis.

## Referências

[https://en.wikipedia.org/wiki/Gambling\\_mathematics](https://en.wikipedia.org/wiki/Gambling_mathematics)

<https://en.wikipedia.org/wiki/Roulette>