Cheatsheet Analisi

Angelo Passarelli

May 12, 2022

1 Forme Indeterminate

- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- 1^∞
- 0^0
- ∞^0

2 Limiti

2.1 Limiti Fondamentali

- $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+$
- $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \ se \ a > 1$
- $\lim_{x \to +\infty} a^x = 1 \ se \ a = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0^+ \ se \ a < 1$
- $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0^+ \ se \ a > 1$
- $\lim_{x \to -\infty} a^x = 1 \ se \ a = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \ se \ 0 < a < 1$
- $\lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty \ se \ a > 0$
- $\lim_{x \to +\infty} x^a = 1 \ se \ a = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} x^a = 0^+ \ se \ a < 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^a} = +\infty \ se \ a > 1$
- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^a} = 0^+ \ se \ 0 < a < 1$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{g(x) \cdot log(f(x))}$

2.2 Limiti Notevoli

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

3 Proprietà degli Infinitesimi

1. $f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$
2. $o(k \cdot g) = o(g)$, con $k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$
3. $o(g) + o(g) = o(g)$
4. Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, allora $f(x) \cdot g(x) = o(g)$
5. Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, allora $o(g) + o(f \cdot g) = o(g)$
6. $o(o(g)) = o(g)$
7. $o(f+g) = o(f) + o(g)$
8. $o(g) \cdot o(f) = o(g \cdot f)$

4 Sviluppi al 1°/2° ordine

- $\sin x = x + o(x^2)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $e^x = 1 + x + o(x)$
- $\log(1+x) = x + o(x)$
- $\tan x = x + o(x)$
- $\arctan x = x + o(x^2)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$

5 Derivate

- $D(x) = 1$
- $D(x^n) = n \cdot x^{n-1}$
- $D(\sin x) = \cos x$
- $D(\cos x) = -\sin x$
- $D(\tan x) = D(\frac{\sin x}{\cos x}) = 1 + \tan^2 x$ oppure $\frac{1}{\cos^2 x}$
- $D(\sqrt{x}) = D(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

- $D(log_a x) = \frac{1}{x \cdot \log a}$
- $D(a^x) = D(e^{x \cdot \log a}) = a^x \cdot \log a$
- $D(f^{-1}(x)) = \frac{1}{D(f(f^{-1}(x)))}$
- $D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $D(f(x) \cdot g(x)) = D(f(x)) \cdot g(x) + f(x) \cdot D(g(x))$
- $D(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{D(f(x)) \cdot g(x) - D(g(x)) \cdot f(x)}{g(x)^2}$

6 Serie di Taylor con resto di Peano

- $\sin x = (\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j \cdot x^{2j+1}}{(2j+1)!}) + o(x^{2n+2})$
- $\cos x = (\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j \cdot x^{2j}}{(2j)!}) + o(x^{2n+1})$
- $\log(1+x) = (\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \cdot \frac{x^j}{j}) + o(x^n)$
- $e^x = (\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}) + o(x^n)$
- $\arctan x = (\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \cdot \frac{x^{2j+1}}{2j+1}) + o(x^{2n+2})$
- $(1+x)^a = 1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+\frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

7 Integrali di Riemann

7.1 Primitive Notevoli

1. $\int e^x \, dx = e^x + k$
2. $\int \cos x \, dx = \sin x + k$
3. $\int \sin x \, dx = -\cos x + k$
4. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x) + k$
5. $\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x| + k$
6. $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + k$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin(x) + k$

7.2 Teorema di Torricelli

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = [G(x)]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$$

7.3 Integrali con estremi variabili

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$$

$$G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

7.4 Integrazione per parti

$$\int f \cdot g\,dx = F \cdot g - \int F \cdot g'\,dx$$

7.5 Integrazione per sostituzione

$$\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi'\,dx = (F \cdot \varphi) + k$$

7.6 Integrali di funzioni razionali

- $q(x)$ con grado 1:

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\log|ax+b| + k$$

- Se il grado di $p(x) > 0$ si fa la divisione per $q(x)$ utilizzando Ruffini.
- Se $q(x)$ ha grado 2:
  1. Due radici uguali e numeratore costante:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} = -\frac{1}{x-a} + k$$

  2. Due radici diverse e numeratore costante:

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \cdot \log\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + k$$

  3. Denominatore senza radici reali e numeratore costante:

$$\int \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{1}{k} \cdot \arctan(\frac{x}{k}) + c$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}$$

Supponendo che $a = 1$:

$$x^2 + bx + c = (x^2 + bx + \frac{b^2}{4}) - \frac{b^2}{4} + c =$$

$$= (x + \frac{b}{2})^2 + \frac{1}{4}(-b^2 + 4c)$$

Poniamo $k^2 = \frac{1}{4}(-b^2 + 4c) > 0$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\, dx = \int \frac{dx}{(x + \frac{b}{2})^2 + k^2} = \frac{1}{k} \cdot \arctan(\frac{x + \frac{b}{2}}{k}) + c$$

- Numeratore non costante, con grado uguale a 1:

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d}\, dx = \frac{a}{2} \cdot \log\left|x^2 + cx + d\right| + \frac{a}{2} \cdot \int \frac{-c + \frac{2b}{a}}{x^2 + cx + d} dx$$

8 Integrali Impropri

8.1 Calcolo

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{M \to b^-} \int_a^M f(x)\, dx = L$$

Se L é:

- Finito, l'integrale diverge in senso generalizzato su $[a, b)$.
- $+\infty$, l'integrale diverge positivamente su $[a, b)$.
- $-\infty$, l'integrale diverge negativamente su $[a, b)$.

8.2 Integrali Impropri Notevoli

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

- Se $\alpha = 1$, $\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| \rightsquigarrow \lim_{M \to +\infty} [\log|x|]_1^M = +\infty$
- Se $\alpha \neq 1$, $\int \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} + c \rightsquigarrow \lim_{M \to +\infty} [\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}]_1^M = \frac{1}{1-\alpha} \cdot M^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$
  - Se $1 - \alpha > 0$, $\alpha < 1$, il limite é $+\infty$.
  - Se $1 - \alpha < 0$, $\alpha > 1$, il limite é finito ed é $\frac{1}{1-\alpha} > 0$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

- Se $\alpha = 1$, $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| \rightsquigarrow \lim_{M\to 0^+} [\log|x|]_M^1 = +\infty$
- Se $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M\to 0^+} [\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}]_M^1 = \lim_{M\to 0^+} \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\cdot M^{1-\alpha}$
  - Se $1-\alpha > 0$, $\alpha < 1$, il limite é finito ed é $\frac{1}{1-\alpha} > 0$.
  - Se $1-\alpha < 0$, $\alpha > 1$, il limite é $+\infty$.

8.3 Criterio del Confronto

Date due funzioni $f, g : [a,b)$, se esiste un intorno di b dove $0 < f(x) < g(x)$:

1. Se $\int_a^b g(x)$ converge, allora anche $\int_a^b f(x)$ converge.
2. Se $\int_a^b f(x)$ diverge, allora anche $\int_a^b g(x)$ diverge.

8.4 Criterio del Confronto Asintotico

Date due funzioni $f, g : [a,b)$, se esiste un intorno di b dove $f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$, ed esiste $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, allora:

- Se $l \neq 0,\ l \neq +\infty$, allora $\int_a^b f(x)dx$ converge $\Leftrightarrow$ $\int_a^b g(x)dx$ converge.
- Se $l = 0$, allora $\int_a^b g(x)dx$ converge $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx$ converge.
- Se $l = +\infty$, allora $\int_a^b f(x)dx$ converge $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x)dx$ converge.

8.5 Criterio dell'Assoluta Convergenza

Se $\int_I \left|f(x)\right|\,dx$ converge, allora anche $\int_I f(x)\,dx$ converge.

9 Successioni

9.1 Limiti di Funzioni e Successioni

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{n\to x_0} f(a_n) = l\ se\ \forall\ \{a_n\} \subseteq A : \lim_{n\to +\infty} a_n = x_0\ e\ a_n \neq x_0\ definitivamente$$

9.2 Sottosuccessioni

Data $\{a_n\}$ e le sottosuccessioni $\{a_{k_n}\}$ e $\{a_{h_n}\}$ che partizionano tutto $\mathbb{N}$:

$$\lim_{x \to +\infty} a_{k_n} = l \text{ e } \lim_{x \to +\infty} a_{h_n} = l \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} a_n = l$$

9.3 Criterio del Rapporto

Se $\{a_n\} > 0$ definitivamente ed esiste $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, allora:

1. se $0 \leq l < 1$, allora $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.
2. se $l > 1$, allora $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.
3. se $l = 1$, il criterio non si applica.

9.4 Criterio della Radice

Se $\{a_n\} > 0$ definitivamente ed esiste $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, allora:

1. se $0 \leq l < 1$, allora $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.
2. se $l > 1$, allora $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.
3. se $l = 1$, il criterio non si applica.

Se $a_n > 0$ definitivamente ed esiste $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, allora $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

10 Serie

10.1 Serie Geometrica

Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ e una successione $a_n = \alpha^n$:

$\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha^n.$

$\displaystyle s_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha^j = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1}.$

$\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$:

- se $|\alpha| < 1$, $\alpha^{n+1} \to 0$, $s_n = \frac{1}{1-\alpha}$, quindi la serie converge.
- se $\alpha > 1$, $\alpha^{n+1} \to +\infty$, quindi la serie diverge positivamente.
- se $\alpha = 1$, $a_n = 1^n = 1$, $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} 1 = +\infty$, quindi la serie diverge positivamente.

- se $\alpha < -1$, α^{n+1} non ha limite:
    - se n è pari ($n + 1$ è dispari), $\alpha^{n+1} < 0$, quindi la sottosuccessione tende a $-\infty$.
    - se n è dispari ($n + 1$ è pari), quindi α^{n+1} tende a $+\infty$.

10.2 Condizione Necessaria

$$\sum_n a_n \textit{ non converge } \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$$

10.3 Criterio del Confronto

Se $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente, allora:

1. se $\sum_n b_n$ converge $\Rightarrow \sum_n a_n$ converge.
2. se $\sum_n a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_n b_n$ diverge.

10.4 Criterio del Confronto Asintotico

Date $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ tali che $a_n > 0$, $b_n > 0$ definitivamente e $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R}$, allora:

1. se $l \in (0, +\infty)$, allora $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso comportamento.
2. se $l = 0$, $\sum_n b_n$ *converge* $\Rightarrow \sum_n a_n$ *converge*.
3. se $l = +\infty$, $\sum_n b_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum_n a_n$ *diverge*.

10.5 Criterio della Radice per Serie

Data $\{a_n\}$, $a_n > 0$ definitivamente, se $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \mathbb{R}$, allora:

1. se $0 \leq l < 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ converge.
2. se $l > 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ diverge.
3. se $l = 1$ il criterio non si applica.

10.6 Criterio del Rapporto per Serie

Data $\{a_n\}$, $a_n > 0$ definitivamente, se $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R}$, allora:

1. se $0 \leq l < 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ converge.
2. se $l > 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ diverge.
3. se $l = 1$ il criterio non si applica.

10.7 Criterio dell'Integrale

Dato un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ e una funzione $f : [\bar{n}, +\infty] \to \mathbb{R}$ debolmente crescente, continua e con $f(x) \geq 0 \; \forall \, x \in [\bar{n}, +\infty]$:

$$\textit{Se } a_n = f(n) \Rightarrow \sum_n a_n \textit{ e } \int_{\bar{n}}^{+\infty} f(x)\, dx \textit{ hanno lo stesso comportamento}$$

$$e \sum_{n=\bar{n}+1}^{+\infty} a_n \leq \int_{\bar{n}}^{+\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{n=\bar{n}}^{+\infty} a_n$$

10.8 Convergenza Assoluta - Serie a Segno Arbitrario

$\sum_n a_n$ converge assolutamente se $\sum_n |a_n|$ converge.

Se $\sum_n a_n$ converge assolutamente $\Rightarrow$ converge e $\left|\sum_n a_n\right| \leq \sum_n |a_n|$.

10.9 Criterio di Leibniz - Serie a Segno Alterno

Se $\{a_n\} \geq 0$ definitivamente, è debolmente decrescente e $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$,

allora $\sum_n (-1)^n a_n$ converge e $\left|\sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j a_j - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j a_j\right| \leq a_{n+1}$.

11 Calcolo Differenziale in 2 Variabili

11.1 Prodotto scalare

$x = (x_1, \ldots, x_n)$.
$y = (y_1, \ldots, y_n)$.

$\langle x, y\rangle = x \cdot y = (x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_n y_n$.

11.2 Norma

$x = (x_1, \dots, x_n)$.

$\|x\| = |x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2} \to$ lunghezza del vettore x.

11.3 Distanza

$x = (x_1, \dots, x_n)$.
$y = (y_1, \dots, y_n)$.

$dist(x, y) = d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \to$ differenza tra x e y.

11.4 Retta passante per 2 punti in $\mathbb{R}^2$

$P_1 = (x_1, y_1) = v$.
$P_2 = (x_2, y_2) = w$.
Vettore Direzione = Vettore Differenza: $u = w - v$.

Forma Parametrica

$$r : \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y2 \end{pmatrix} \}$$

Forma Cartesiana

$$r : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

11.5 Retta perpendicolare a v passante per l'origine

$v = (a, b)$.
$v \perp w \Leftrightarrow < v, w > = 0$.
Quindi $< (a, b), (w_1, w_2) > = 0 \Rightarrow a \cdot w_1 + b \cdot w_2 = 0$.
Per far rispettare l'uguaglianza, w_2 e w_1 devono assumere i seguenti valori:
$w_1 = -b$.
$w_2 = a$.
$w = (-b, a)$.

Forma Parametrica

$$r : \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \}$$

Forma Cartesiana

$$r : ax + by = 0$$

11.6 Retta tangente ad 1 grafico

Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, derivabile e con derivate continue, vogliamo trovare la retta tangente al grafico nel punto (x_0, y_0).

Forma Parametrica

$$r : \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix} \}$$

Forma Cartesiana

$$r : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

11.7 Retta passante per 2 punti in $\mathbb{R}^3$

$P_1 = (x_1, y_1, z_1) = v$.
$P_2 = (x_2, y_2, z_2) = w$.
Vettore Direzione = Vettore Differenza: $u = w - v$.

Forma Parametrica

$$r : \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \}$$

Forma Cartesiana

$$\begin{cases} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \to 1 \; piano \\ \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \to 1 \; piano \end{cases}$$

L'intersezione dei due piani risultanti dal sistema costituisce una retta.

11.8 Piano passante per 3 punti in $\mathbb{R}^3$

$P_1 = (x_1, y_1, z_1) = u$.
$P_2 = (x_2, y_2, z_2) = v$.
$P_3 = (x_3, y_3, z_3) = w$.
Vettore Direzione 1: $P_2 - P_1 = v - u$.
Vettore Direzione 2: $P_3 - P_1 = w - u$.

Forma Parametrica

$$\pi : \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{pmatrix} \}$$

Forma Cartesiana

$$\pi : \frac{\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} - \frac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)}{\left(\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1} - \frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}\right)} = \frac{\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1} - \frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)}{\left(\frac{x_3-x_2}{x_2-x_1} - \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)}$$

11.9 Curve

11.9.1 Vettore Tangente

Data una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ il vettore tangente alla curva è:

$$\overset{\bullet}{\gamma}(t) = \gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

11.9.2 Retta Tangente

$$r : \gamma(t) + s\, \overset{\bullet}{\gamma}(t)$$

11.10 Limiti

11.10.1 Metodo delle Coordinate Polari

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \Theta \\ y = y_0 + \rho \sin \Theta \end{cases}$$

11.10.2 Limiti all'Infinito

$$(x, y) \to \infty \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \to +\infty \\ d((x, y), (0, 0)) \to +\infty \\ \rho \to +\infty \end{cases}$$

11.11 Derivate Parziali

11.11.1 Verificare la derivabilità in un punto

Dato un punto v (vettore), per verificare che la funzione sia derivabile in quel punto nella direzione data dal vettore (α, β):

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(v + t(\alpha, \beta)) - f(v)}{t}$$

11.12 Parametrizzazione del Bordo

1. **Segmento di estremi** (a_1, b_1) e (a_2, b_2)

$$(x, y) = (a_1, b_1) + t(a_2 - a_1, b_2 - b_1) \quad t \in [0, 1]$$

2. **Tratto del grafico** $y = \varphi(x)$ con $x \in [a, b]$

$$(x, y) = (t, \varphi(t)) \quad t \in [a, b]$$

3. **Circonferenza** di raggio r e centro (x_0, y_0)

$$(x, y) = (r \cdot \cos\Theta, r \cdot \sin\Theta) \quad \Theta \in [0, 2\pi]$$

4. **Ellisse** di equazione $ax^2 + by^2 = 1$ con $a, b > 0$

$$(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \cos\Theta, \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \sin\Theta) \quad \Theta \in [0, 2\pi]$$

11.13 Metodo dei Moltiplicatori di Lagrange

$\Phi(x, y)$ è il luogo degli zeri (bordo) dell'insieme su cui è definita la funzione $f(x, y)$.

$$S1 \begin{cases} \Phi(x, y) = 0 \\ \nabla\Phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$S2 \begin{cases} \Phi(x, y) = 0 \\ \nabla f(x, y) = \lambda \nabla\Phi(x, y) \end{cases}$$