UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
MAT02035 - Modelos para dados correlacionados

Lista de exercícios 1

Instruções

- A lista pode ser realizada em dupla.
- A data de entrega da lista é 08/10/2019.

Questões

1. Apresente exemplos de dados correlacionados.
2. Apresente as principais características de um estudo longitudinal.
3. Apresente o(s) principal(is) objetivo(s) em uma análise de dados longitudinais?
4. Para um estudo longitudinal, descreva as diferenças entre os delineamentos balanceado e desbalanceado.
5. Considere a seção "Propriedades de valores esperados e variâncias" dos slides da **Aula 02**. Dada as condições no slide 44, demonstre as propriedades de 1 a 5 para o valor esperado (slide 46) e as propriedades de 1 a 5 da variância (slide 47).
6. Considere $Y_1, \ldots, Y_N$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média μ e variância σ^2. Considere o seguinte estimador para a média $\hat{\mu} = \bar{Y}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$. Encontre o erro padrão de $\hat{\mu}$. O que esta medida representa?
7. Com o auxílio do computador, faça os exercícios do Capítulo 2 do livro "Applied Longitudinal Analysis" (páginas 44 e 45).
8. Considere o modelo de regressão linear para o vetor de respostas médias

$$\mathrm{E}\left(Y_i|X_i\right) = X_i\beta,\ i = 1, \ldots, N,$$

em que Y_i é um vetor $n_i \times 1$ de respostas, X_i é uma matriz $n_i \times 1$ de covariáveis, β é um vetor $p \times 1$ de coeficientes de regressão desconhecidos e N é o número de indivíduos observados. Ainda, assuma que Y_i tem uma distribuição condicional normal multivariada com média dada por $\mathrm{E}\left(Y_i|X_i\right)$ e matriz de covariância $\mathrm{Cov}\left(Y_i|X_i\right) = \Sigma_i$ $(n_i \times n_i)$. Suponha Σ_i conhecida.

   (a) Escreva a função de verossimilhança do modelo.

   (b) Considere o estimador de mínimos quadrados generalizados $\hat{\beta} = \left\{\sum_{i=1}^{N}\left(X_i'\Sigma^{-1}X_i\right)\right\}^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i'\Sigma^{-1}y_i\right)$.

      i. Justifique o fato que, neste caso, este é o estimador de máxima verossimilhança.

      ii. Demonstre que $\mathrm{E}\,(\hat{\beta}) = \beta$.

      iii. Demonstre que $\mathrm{Cov}\,(\hat{\beta}) = \left\{\sum_{i=1}^{N}\left(X_i'\Sigma^{-1}X_i\right)\right\}^{-1}$.

      iv. Considere o caso que $\Sigma_i = \sigma^2 I$ (I é a matriz identidade). Demonstre que $\hat{\beta}$ é reduzido ao estimador de mínimos quadrados ordinários.

9. Considere os dados do estudo dos níveis de chumbo no sangue (TLC). Proponha um modelo de regressão linear para a média com base nas questões de pesquisa. Com o auxílio do computador, **utilize gráficos** para justificar a sua proposta de modelo.