### MAT02035 - Modelos para dados correlacionados

Modelando a média: análise de perfis de respostas

Rodrigo Citton P. dos Reis citton.padilha@ufrgs.br

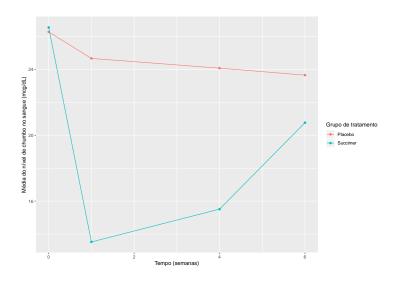
Universidade Federal do Rio Grande do Sul Instituto de Matemática e Estatística Departamento de Estatística

Porto Alegre, 2019



- Nesta aula apresentamos um método para analisar dados longitudinais que impõe uma estrutura mínima ou restrições na resposta média ao longo do tempo e na covariância entre as medidas repetidas.
- O método foca na análise de perfis de respostas e pode ser aplicado para dados longitudinais quando o delineamento é balanceado, com um conjunto de ocasiões de medidas comum para todos os indivíduos no estudo.
  - A análise de perfis de respostas também pode contemplar dados incompletos devido à perda (ou seja, estudos longitudinais incompletos com delineamentos balanceados).

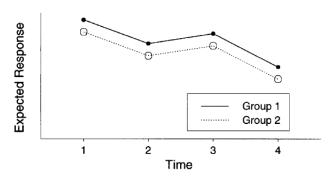
- Métodos para analisar perfis de respostas são atraentes quando existe uma única covariável categórica (grupo de tratamento ou exposição) e quando nenhum padrão específico a priori para diferenças em perfis de respostas entre grupos pode ser especificado.
- Os dados podem ser resumidos pela resposta média em cada ocasião de tempo, estratificado por níveis do fator de grupo.
- ► Em qualquer nível do fator de grupo, a sequência de médias no tempo é referida como o **perfil de resposta** médio.



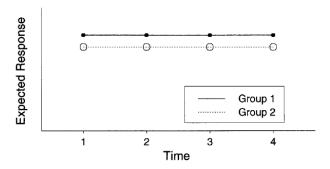
- O principal objetivo da análise de perfis de respostas é caracterizar os padrões de mudança na resposta média ao longo do tempo nos grupos e para determinar quanto as formas dos perfis de respostas médias diferem entre os grupos.
- O método de perfis de respostas pode ser generalizado para estudos com mais de um único fator de grupo de tratamento (exposição) e quando existem covariáveis medidas na linha de base que precisam ser ajustadas.
  - ► Em estudos observacionais, os grupos são definidos por características dos indivíduos do estudo, tais como idade, sexo, ou nível de exposição.
  - Em estudos aleatorizados, os grupos são definidos por um mecanismo aleatório.

- Em nossa discussão sobre a análise dos perfis de resposta, focamos inicialmente no delineamento de dois grupos, mas as generalizações para mais de dois grupos são diretas.
- Dada uma sequência de n medidas repetidas em vários grupos distintos de indivíduos, três questões principais relacionadas aos perfis de resposta podem ser colocadas:

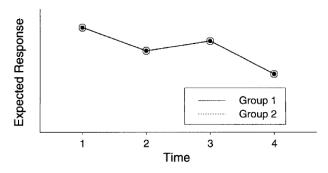
- 1. Os perfis de resposta média são semelhantes nos grupos, no sentido de que os perfis de resposta média são paralelos?
  - Essa é uma pergunta que diz respeito ao efeito de interação grupo × tempo.



- 2. Supondo que os perfis médios de resposta da população sejam paralelos, as médias são constantes ao longo do tempo?
  - Esta é uma pergunta que diz respeito ao efeito do tempo.



- 3. Supondo que os perfis médios de resposta da população sejam paralelos, eles também estão no mesmo nível, no sentido de que os perfis médios de resposta para os grupos coincidem?
  - Esta é uma pergunta que diz respeito ao efeito do grupo.



- Exceto em circunstâncias muito raras, não faz sentido fazer a segunda e a terceira perguntas se os perfis médios de resposta não são paralelos.
- Isso é consistente com o princípio geral de que os efeitos principais (por exemplo, efeitos de grupo ou tempo) normalmente não são de interesse quando há uma interação entre eles.
- Ou seja, quando há uma interação grupo × tempo, os perfis médios de resposta nos grupos são diferentes (perfis não paralelos); consequentemente, sua forma pode ser descrita apenas com referência a um grupo específico, e seu nível pode ser descrito apenas com referência a um tempo específico.

Formulação do modelo linear geral

## Formulação do modelo linear geral

### Perfis de respostas e o modelo linear geral

 Antes de ilustrarmos as principais ideias com um exemplo numérico, consideramos como a análise de perfis de respostas pode ser implementada no modelo linear geral

$$\mathsf{E}\left(Y_{i}|X_{i}\right)=\mu_{i}=X_{i}\beta,$$

para uma escolha apropriada de  $X_i$ .

- ▶ Também descreveremos como as principais hipóteses de nenhum efeito de interação  $grupo \times tempo$  em termos de  $\beta$ .
- ► Considere *n* o número de medidas repetidas e *N* o número de indivíduos.
- ▶ Para expressar o modelo para o delineamento longitudinal com G grupos e n ocasiões de medições, precisaremos de  $G \times n$  parâmetros para G perfis de respostas médias.

## Perfis de respostas e o modelo linear geral

- Considere dois grupos medidos em três ocasiões, há 2 x 3 = 6 parâmetros de média.
- ▶ Para o **primeiro grupo**, a matriz de delineamento  $3 \times 6$ ,  $X_i$ , fica

$$X_i = \left( egin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} 
ight).$$

Para o **segundo grupo**, a matriz de delineamento fica

$$X_i = \left( egin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} 
ight).$$

## Perfis de respostas e o modelo linear geral: interpretação

► Em termos do modelo

$$\mathsf{E}(Y_i|X_i) = \mu_i = X_i\beta,$$

em que  $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_6)'$  é um vetor 6 imes 1 de coeficientes de regressão,

$$\mu(1) = \begin{pmatrix} \mu_1(1) \\ \mu_2(1) \\ \mu_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix};$$

similarmente

$$\mu(2) = \begin{pmatrix} \mu_1(2) \\ \mu_2(2) \\ \mu_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{pmatrix}.$$

## Perfis de respostas e o modelo linear geral: hipóteses

- Como resultado, hipóteses sobre os perfis médios de resposta nos dois grupos podem ser facilmente expressas em termos de hipóteses sobre os componentes de β.
- Especificamente, a hipótese de nenhum efeito de interação grupo × tempo pode ser expressa como

$$H_{01}: (\beta_1 - \beta_4) = (\beta_2 - \beta_5) = (\beta_3 - \beta_6).$$

- Nesta parametrização, hipóteses sobre a interação  $grupo \times tempo$  não podem ser expressas em termos de certos componentes de  $\beta$  serem zero
- ▶ Em vez disso, essas hipóteses podem ser expressas em termos de  $L\beta = 0$ , para escolhas particulares de vetores ou matrizes L.

# Perfis de respostas e o modelo linear geral: hipóteses

▶ Por exemplo, a hipótese nula de nenhum efeito de interação grupo × tempo,

$$H_{01}: (\beta_1 - \beta_4) = (\beta_2 - \beta_5) = (\beta_3 - \beta_6),$$

pode ser expressa como

$$H_{01}: L\beta = 0,$$

em que

$$L = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

## Perfis de respostas e o modelo linear geral: dados ausentes

Uma característica atraente da formulação geral do modelo linear

$$\mathsf{E}\left(Y_{i}|X_{i}\right)=\mu_{i}=X_{i}\beta,$$

é que ele pode lidar com configurações em que os dados de alguns indivíduos estão ausentes.

- ▶ Por exemplo, suponha que o *i*-ésimo sujeito pertença ao primeiro grupo e esteja faltando a resposta na terceira ocasião.
- A matriz de delineamento apropriada para esse sujeito é a seguinte matriz 2 × 6, obtida pela remoção da última linha da matriz de delineamento de dados completa para os sujeitos do primeiro grupo:

$$X_i = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

## Perfis de respostas e o modelo linear geral: dados ausentes

- ▶ Para padrões mais gerais de perda de dados, a matriz de delineamento apropriada para o i-ésimo indivíduo é simplesmente obtida removendo linhas da matriz de delineamento de dados completa correspondentes às respostas ausentes.
- Isso permite que a análise dos perfis de resposta seja baseada em todas as observações disponíveis dos sujeitos.

Note que o modelo linear geral para dois grupos medidos em duas ocasiões,

$$\mathsf{E}(Y_i|X_i) = \mu_i = X_i\beta,$$

poderia também ser expressado em termo das seguintes duas matrizes de delineamento:

$$X_i = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

para o primeiro grupo e

$$X_i = \left( egin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} 
ight),$$

para o segundo grupo.

Neste caso

$$\mu(2) = \begin{pmatrix} \mu_1(2) \\ \mu_2(2) \\ \mu_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_1 + \beta_2 \\ \beta_1 + \beta_3 \end{pmatrix},$$

е

$$\mu(1) = \begin{pmatrix} \mu_1(1) \\ \mu_2(1) \\ \mu_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_4 \\ (\beta_1 + \beta_4) + (\beta_2 + \beta_5) \\ (\beta_1 + \beta_4) + (\beta_3 + \beta_6) \end{pmatrix}.$$

- ► Esta parametrização é a mais utilizada pelos softwares estatísticos.
- A escolha desta parametrização, e a categoria de referência, é uma escolha do usuário do software (no R veja a formulação ~ −1 e a função relevel()).
- Com esta parametrização as hipóteses de interesse de pesquisa podem ser reescritas:

$$H_{01}: \beta_5 = \beta_6 = 0.$$

$$H_{02}: \beta_2 = \beta_3 = 0.$$

$$H_{03}: \beta_4 = 0.$$

## Perfis de respostas e o modelo linear geral: estrutura de covariância

► Finalmente, dado que a análise de perfis de respostas pode ser expressa em termos do modelo de regressão linear,

$$\mathsf{E}\left(Y_{i}|X_{i}\right)=\mu_{i}=X_{i}\beta,$$

em que  $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_p)'$  é um vetor  $p\times 1$  de coeficientes de regressão (com  $p=G\times n$ ), **estimação** de máxima verossimilhança de  $\beta$ , e a construção de testes de hipóteses para a interação *grupo*  $\times$  *tempo* (e efeitos principais de tempo e grupo), **são possíveis uma vez que a covariância** de  $Y_i$  foi especificada.

Na análise de perfis, a covariância de  $Y_i$  é usualmente assumida ser **não estruturada** com nenhuma restrição nos n(n+1)/2 parâmetros de covariância.

### Estudo de caso

## Estudo de tratamento de crianças expostas ao chumbo

- Lembre-se de que o estudo TLC foi um estudo aleatorizado, controlado por placebo, de um agente quelante administrado por via oral, succimer, em crianças com níveis confirmados de chumbo no sangue de 20 a 44  $\mu$ g/dL.
- As crianças do estudo tinham idades entre 12 e 33 meses e viviam em moradias deterioradas no centro da cidade.
- ► A análise a seguir é baseada em dados sobre os níveis de chumbo no sangue na linha de base (ou semana 0), semana 1, semana 4 e semana 6 durante o primeiro período de tratamento.

## Carregando os dados

```
Carregando pacotes do R
library(here)
library(haven)
library(tidyr)
library(ggplot2)
# Carregando o arquivo de dados
here::here("data", "tlc.dta")
## [1] "C:/Users/Rodrigo/Documents/UFRGS/Disciplinas/2019-02/I
chumbo <- read dta(</pre>
  file = here::here("data", "tlc.dta"))
```

### Carregando os dados

#### chumbo

```
A tibble: 100 \times 6
##
         id
                      trt
                              yО
                                    y1
                                           y4
                                                 у6
                <db1+1b1>
##
      <dbl>
                          <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl>
##
               [Placebo]
                            30.8 26.9
                                        25.8
                                              23.8
##
               [Succimer] 26.5 14.8
                                        19.5
                                              21
##
    3
               [Succimer]
                            25.8 23
                                        19.1
                                              23.2
##
    4
               [Placebo]
                            24.7 24.5
                                        22
                                              22.5
    5
##
               [Succimer] 20.4 2.80
                                       3.20
                                              9.40
##
    6
               [Succimer]
                           20.4 5.40
                                         4.5
                                              11.9
##
               [Placebo]
                            28.6 20.8
                                        19.2
                                              18.4
                            33.7 31.6
##
               [Placebo]
                                        28.5
                                              25.1
##
    9
               [Placebo]
                            19.7 14.9
                                        15.3
                                              14.7
                                        29.2
##
  10
         10
            0
               [Placebo]
                            31.1 31.2
                                              30.1
         with 90 more rows
```

#### De "largo" para "longo"

#### chumbo.longo

```
6 1 [Succimer] y0
    6
                                 20.4
##
          7 0 [Placebo] y0
##
                                 28.6
          8 0 [Placebo] y0
                                 33.7
##
   8
          9 0 [Placebo] y0
                                 19.7
##
## 10
         10 0 [Placebo] y0
                                 31.1
    ... with 390 more rows
```

#### Transforma variáveis

chumbo.longo

```
## # A tibble: 400 x 4
##
         id trt
                     tempo chumbo
##
      <dbl> <fct>
                       <dbl>
                              <dbl>
##
          1 Placebo
                           0
                               30.8
##
          2 Succimer
                           0
                               26.5
    3
                               25.8
##
          3 Succimer
                           0
##
          4 Placebo
                           0
                               24.7
          5 Succimer
                               20.4
##
    5
                           0
          6 Succimer
                               20.4
##
                           0
                               28.6
##
          7 Placebo
                           0
          8 Placebo
                               33.7
##
    8
                           0
##
          9 Placebo
                           0
                               19.7
## 10
         10 Placebo
                           0
                               31.1
     ... with 390 more rows
##
```

## Time plot (perfis médios)

### "Pré-processamento"

```
library(dplyr)

chumbo.resumo <- chumbo.longo %>%
   group_by(trt, tempo) %>%
   summarise(chumbo.m = mean(chumbo))

chumbo.resumo
```

24.1

## Time plot (perfis médios)

```
## 4 Placebo 6 23.6

## 5 Succimer 0 26.5

## 6 Succimer 1 13.5

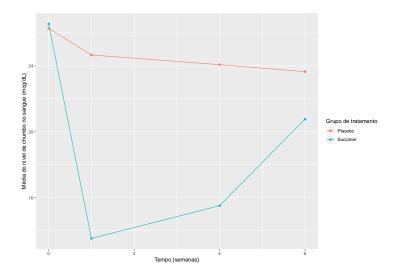
## 7 Succimer 4 15.5

## 8 Succimer 6 20.8
```

## 3 Placebo

## Time plot (perfis médios)

## Time plot (perfis médios)



summary(mod.unst)

```
chumbo.longo$tempo <- factor(chumbo.longo$tempo)</pre>
library(nlme)
# matriz de covariância não estruturada
mod.unst <- gls(chumbo ~ trt * tempo,</pre>
                 corr = corSymm(form = ~ 1 | id),
                 weights = varIdent(form = ~ 1 | tempo),
                 method = "REML",
                 data = chumbo.longo)
```

```
## Generalized least squares fit by REML
##
    Model: chumbo ~ trt * tempo
## Data: chumbo.longo
##
         AIC
                 BIC logLik
## 2452.076 2523.559 -1208.038
##
## Correlation Structure: General
## Formula: ~1 | id
## Parameter estimate(s):
## Correlation:
## 1 2
## 2 0.571
## 3 0.570 0.775
## 4 0.577 0.582 0.581
## Variance function:
## Structure: Different standard deviations per stratum
```

```
##
   Formula: ~1 | tempo
##
   Parameter estimates:
##
          0
                                     6
   1.000000 1.325888 1.370453 1.524826
##
  Coefficients:
##
                        Value Std.Error
                                          t-value p-value
                       26.272 0.7102888
                                        36.98777
  (Intercept)
                                                   0.0000
## trtSuccimer
                        0.268 1.0045000
                                          0.26680
                                                   0.7898
## tempo1
                       -1.612 0.7919194 -2.03556
                                                   0.0425
                       -2.202 0.8149167
                                         -2.70212
                                                   0.0072
## tempo4
                       -2.626 0.8885252
                                         -2.95546
                                                   0.0033
  tempo6
## trtSuccimer:tempo1 -11.406 1.1199432 -10.18445
                                                   0.0000
## trtSuccimer:tempo4 -8.824 1.1524662
                                         -7.65662
                                                   0.0000
## trtSuccimer:tempo6 -3.152 1.2565645 -2.50843
                                                   0.0125
##
```

```
Correlation:
##
                      (Intr) trtScc tempo1 tempo4 tempo6 trtS
##
## trtSuccimer
                      -0.707
## tempo1
                      -0.218 0.154
                      -0.191 0.135 0.680
## tempo4
                      -0.096 0.068 0.386 0.385
## tempo6
## trtSuccimer:tempo1 0.154 -0.218 -0.707 -0.481 -0.273
## trtSuccimer:tempo4 0.135 -0.191 -0.481 -0.707 -0.272
                                                          0.68
## trtSuccimer:tempo6 0.068 -0.096 -0.273 -0.272 -0.707
                                                          0.38
##
## Standardized residuals:
##
          Min
                      Q1
                                Med
                                            Q3
                                                      Max
## -2.1756390 -0.6849960 -0.1515545 0.5294173 5.6327402
##
## Residual standard error: 5.0225
## Degrees of freedom: 400 total; 392 residual
```

## Matriz de covariância estimada

```
library(lavaSearch2)
knitr::kable(
  getVarCov2(mod.unst)$0mega,
  digits = 1)
```

	0	1	4	6
0	25.2	19.1	19.7	22.2
1	19.1	44.3	35.5	29.7
4	19.7	35.5	47.4	30.6
6	22.2	29.7	30.6	58.7

## Testando hipóteses (teste de Wald)

```
library(car)
knitr::kable(
   Anova(mod.unst),
   digits = c(0, 2, 4))
```

	Df	Chisq	Pr(>Chisq)
trt	1	4.23	0.0398
tempo	3	184.48	0.0000
trt:tempo	3	107.79	0.0000

### Coeficientes estimados

```
knitr::kable(
  summary(mod.unst)$tTable[,-4],
  digits = c(3, 3, 2),
  col.names = c("Estimativa", "EP", "Z"))
```

	Estimativa	EP	Z
(Intercept)	26.272	0.710	36.99
trtSuccimer	0.268	1.005	0.27
tempo1	-1.612	0.792	-2.04
tempo4	-2.202	0.815	-2.70
tempo6	-2.626	0.889	-2.96
trtSuccimer:tempo1	-11.406	1.120	-10.18
trtSuccimer:tempo4	-8.824	1.152	-7.66
trtSuccimer:tempo6	-3.152	1.257	-2.51

chumbo.longo <- arrange(chumbo.longo, id)
chumbo.longo</pre>

```
A tibble: 400 \times 4
##
         id trt
                      tempo chumbo
      <dbl> <fct> <fct>
                              <dbl>
##
##
    1
          1 Placebo
                     0
                               30.8
          1 Placebo 1
                               26.9
##
##
    3
          1 Placebo 4
                               25.8
##
          1 Placebo 6
                               23.8
##
    5
          2 Succimer 0
                               26.5
##
    6
          2 Succimer 1
                               14.8
##
          2 Succimer 4
                               19.5
##
    8
          2 Succimer 6
                               21
          3 Succimer 0
                               25.8
##
          3 Succimer 1
                               23
##
   10
```

```
## # ... with 390 more rows
```

```
model.matrix(chumbo ~ trt * tempo,
             data = chumbo.longo[chumbo.longo$id == 1,])
     (Intercept) trtSuccimer tempo1 tempo4 tempo6 trtSuccimer
##
## 1
## 2
## 3
## 4
##
     trtSuccimer:tempo4 trtSuccimer:tempo6
## 1
## 4
## attr(,"assign")
   [1] 0 1 2 2 2 3 3 3
```

```
## attr(,"contrasts")
## attr(,"contrasts")$trt
## [1] "contr.treatment"
##
## attr(,"contrasts")$tempo
## [1] "contr.treatment"
```

```
## 1 1 1 1 0 0 0 ## 2 1 1 1 0 0 0 1 ## 4 1 1 1 0 0 0 1 ## 4 trtSuccimer:tempo4 trtSuccimer:tempo6
```

```
## 3
## 4
## attr(,"assign")
## [1] 0 1 2 2 2 3 3 3
## attr(,"contrasts")
## attr(,"contrasts")$trt
## [1] "contr.treatment"
##
## attr(,"contrasts")$tempo
## [1] "contr.treatment"
```

## Matriz de delineamento (modelo sem intercepto)

```
##
     trtPlacebo trtSuccimer tempo1 tempo4 tempo6 trtSuccimer:
## 1
## 3
## 4
     trtSuccimer:tempo4 trtSuccimer:tempo6
##
## 1
## 2
## 4
## attr(,"assign")
## [1] 1 1 2 2 2 3 3 3
## attr(."contrasts")
```

# Matriz de delineamento (modelo sem intercepto)

```
## attr(,"contrasts")$trt
## [1] "contr.treatment"
##
## attr(,"contrasts")$tempo
## [1] "contr.treatment"
```

## Matriz de delineamento (modelo sem intercepto)

chumbo.longo\$trt <- relevel(chumbo.longo\$trt,</pre>

trtPlacebo:tempo1 trtPlacebo:tempo4

##

```
ref = "Succimer")
chumbo.longo$tempo <- relevel(chumbo.longo$tempo,
                               ref = "6")
model.matrix(chumbo ~ trt * tempo,
             data = chumbo.longo[chumbo.longo$id == 1,])
##
     (Intercept) trtPlacebo tempo0 tempo1 tempo4 trtPlacebo:te
## 1
## 2
## 3
## 4
```

```
## 1
## 2
## 3
## 4
## attr(,"assign")
## [1] 0 1 2 2 2 3 3 3
## attr(."contrasts")
## attr(."contrasts")$trt
## [1] "contr.treatment"
##
## attr(,"contrasts")$tempo
## [1] "contr.treatment"
```

```
##
     (Intercept) trtPlacebo tempo0 tempo1 tempo4 trtPlacebo:te
## 1
## 2
## 3
## 4
     trtPlacebo:tempo1 trtPlacebo:tempo4
##
## 1
## 2
## 3
## 4
## attr(,"assign")
## [1] 0 1 2 2 2 3 3 3
## attr(,"contrasts")
## attr(,"contrasts")$trt
```

[1] "contr.treatment"

```
##
## attr(,"contrasts")$tempo
## [1] "contr.treatment"
```

## **Exercícios**

#### **Exercícios**

- ▶ Realize os exercícios do Capítulo 5 do livro "Applied Longitudinal Analysis" (páginas 140 e 141).
- Construa intervalos de confiança de 95% para as estimativas do modelo do exemplo da aula.
- Com base na leitura da Seção 5.8 (Applied Longitudinal Analysis), faça uma discussão dos pontos fortes e fracos da análise de perfis de resposta.

### **Avisos**

#### **Avisos**

- ▶ **Próxima aula:** Modelando a média através de curvas paramétricas.
- ► Para casa: ler o Capítulo 5 do livro "Applied Longitudinal Analysis".
  - ► Caso ainda não tenha lido, leia também os Caps. 1, 2, 3 e 4.

#### Bons estudos!

