Solución de Sistemas de Ecuaciones
Métodos Directos

Ingeniería en Computadores
Instituto Tecnológico de Costa Rica

CE-3102: Análisis Numéricos para Ingeniería

Juan Pablo Soto Quirós
jusoto@tec.ac.cr

1 Introducción

2 Repaso: Sistemas de Ecuaciones

3 Métodos Directos
- Eliminación Gaussiana
- Factorización LU
- Factorización de Cholesky
- Método de Thomas

1 Introducción

2 Repaso: Sistemas de Ecuaciones

3 Métodos Directos

- Eliminación Gaussiana
- Factorización LU
- Factorización de Cholesky
- Método de Thomas

1. Introducción

2. Repaso: Sistemas de Ecuaciones

3. Métodos Directos
   - Eliminación Gaussiana
   - Factorización LU
   - Factorización de Cholesky
   - Método de Thomas

1 Introducción

2 Repaso: Sistemas de Ecuaciones

3 Métodos Directos

- Eliminación Gaussiana
- Factorización LU
- Factorización de Cholesky
- Método de Thomas

Introducción

Es usual encontrarse con la necesidad de resolver uno o más sistemas de ecuaciones cuando se trabaja con algunos modelos matemáticas.

En muchos de los casos, estos estas ecuaciones tienen una gran cantidad de variables o una gran cantidad de sistemas por resolver, lo cual genera un alto costo computacional.

Por lo que las técnicas que se utilicen para resolver dichos sistemas tienen que ser, computacionalmente, las más eficientes.

Introducción

Los métodos para resolver los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar en dos grupos:

- **Métodos Directos:** Estos métodos dan la solución exacta a un sistema de ecuaciones lineales. Algunos ejemplos son eliminación Gaussiana (con pivoteo), eliminación de Gauss-Jordan y factorización LU.
- **Métodos Indirectos:** Estos métodos aproximan la solución de un sistema de ecuaciones lineales utilizando algún método iterativo. Algunos ejemplos son los métodos de, Gauss-Seidel y Gradiente Conjugado.

A continuación se explicarán dos de los métodos directos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: eliminación Gaussiana (con pivoteo), factorización LU y la descomposición de Cholesky.

1 Introducción

2 Repaso: Sistemas de Ecuaciones

3 Métodos Directos
- Eliminación Gaussiana
- Factorización LU
- Factorización de Cholesky
- Método de Thomas

Introducción

Definición

Un sistema de ecuaciones lineales (o ecuaciones algebraicas lineales) es un conjunto de ecuaciones lineales, y es de la forma

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Introducción

En esta parte del curso se trabajará con sistemas de ecuaciones donde $m = n$, es decir, el número de ecuaciones independientes y el número de incógnitas son las mismas, es decir:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Introducción

Los sistemas de ecuaciones se pueden representar en forma matriz vector:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\Rightarrow Ax = b$$

Introducción

Sean las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Considere la representación matricial de un sistema de ecuaciones $Ax = b$:

- La matriz A se llama *matriz de coeficientes*.
- La matriz x se llama *matriz de incógnitas*.
- La matriz b se llama *matriz de términos independientes*.

En un sistema de ecuaciones lineales se pueden cumplir tres casos:

- *el sistema no tiene solución* (en dicho caso decimos que el sistema está sobredeterminado o que es incompatible)
- *el sistema tiene una única solución* (el sistema es compatible determinado)
- *el sistema tiene un número infinito de soluciones* (el sistema es compatible indeterminado).

Introducción

Si del sistema de ecuaciones $Ax = b$ se sabe que A es invertible, entonces el sistema tiene solución única y por lo tanto $x = A^{-1}b$.

Pero el costo computacional de calcular la inversa de la matriz A es alto (más si la matriz A es de una dimensión grande).

Por lo tanto, aunque la solución existe matemáticamente ($x = A^{-1}b$), el computo no es tan trivial. Por esta razón existen otros métodos alternativos para determinar la solución del sistema.

1 Introducción

2 Repaso: Sistemas de Ecuaciones

3 Métodos Directos

- Eliminación Gaussiana
- Factorización LU
- Factorización de Cholesky
- Método de Thomas

1 Introducción

2 Repaso: Sistemas de Ecuaciones

3 Métodos Directos

- Eliminación Gaussiana
- Factorización LU
- Factorización de Cholesky
- Método de Thomas

Eliminación Gaussiana

El método de *eliminación Gaussiana* o *eliminación de Gauss*, es uno de los algoritmo más utilizado para resolver sistemas de ecuaciones.

Consiste en transformar la matriz de coeficientes de un sistema lineal $Ax = b$, en una matriz triangular superior realizando operaciones elementales de matrices sobre filas.

La razón de hacer esto es que un sistema triangular es fácil y rápido de resolver en comparación a uno donde la matriz es densa

(Una **Matriz Densa** es una matriz con una muy poca cantidad de ceros entre sus elementos).

Eliminación Gaussiana

Ejemplo

Encuentre el conjunto solución del siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 - \ \ x_3 + \ \ 3x_4 & = & 4, \\ -x_2 - \ \ x_3 - \ \ 5x_4 & = & -7, \\ 3x_3 + 13x_4 & = & 13, \\ -13x_4 & = & -13. \end{array}\right.$$

Eliminación Gaussiana

Solución:

La representación matricial del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Eliminación Gaussiana

Se puede apreciar que la matriz de coeficientes es una matriz triangular superior, por lo que aplicando sustitución hacia atrás, se tiene que la solución del sistema corresponde a:

- $x_4 = \dfrac{-13}{-13} = 1,$
- $x_3 = \dfrac{13 - 13x_4}{3} = \dfrac{13 - 13(1)}{3} = 0,$
- $x_2 = \dfrac{-7 + 5x_4 + x_3}{-1} = \dfrac{-7 + 5(1) + (0)}{-1} = 2,$
- $x_1 = \dfrac{4 - 3x_4 + x_3 - x_2}{1} = 4 - 3(1) + (0) - (2) = -1.$

Por lo tanto, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ y $x_4 = 1$.

Eliminación Gaussiana

Resolver el sistema triangular superior, tal y como se ilustró en el ejemplo anterior, consiste en un procedimiento rápido, denominado *sustitución hacia atrás* (*back substitution*) y se define como:

$$x_i \;=\; \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\cdot x_j\right), \quad \text{para } i = n, n-1, \ldots, 2, 1.$$

Eliminación Gaussiana

Para resolver un sistema triangular inferior se procede de forma similar, pero en este caso primero se calcula el valor de la varia x_1, luego x_2 y así sucesivamente. Este caso se conoce como *sustitución hacia adelante* (*forward substitution*).

Ejercicio

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
2x_1 &= -8 \\
3x_1 + 2x_2 &= 10 \\
3x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\
x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 3
\end{aligned}$$

Eliminación Gaussiana

Ahora, **¿cómo se procede para resolver un sistema de ecuaciones que no sea triangular?**. Para eso utilizamos el método de *eliminación Gaussiana* (también conocido como método de Gauss).

Se explicará una forma gráfica para resolver el sistema:

Sea $Ax = b$ la representación matricial sistema de ecuaciones lineales, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Considere la representación del sistema, utilizando la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array}\right)$$

Eliminación Gaussiana

Entonces, para resolver este sistema se deben realizar operaciones elementales sobre la matriz aumentada (*intercambio de filas, multiplicación de una constante a una fila, restar y/o sumar el múltiplo de otra fila*), convirtiendo en ceros las entradas debajo de la diagonal principal.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array}\right) \overbrace{\longrightarrow}^{Op.Elementales} \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{array}\right)$$

$$\swarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

Eliminación Gaussiana

Por lo tanto, se obtiene un sistema de ecuaciones, cuya matriz de coeficientes es una matriz triangular superior.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

Por lo tanto, se utiliza el método de sustitución hacia atrás para resolver el sistema. Este método se conoce como *eliminación gaussiana de sustitución hacia atrás*.

Eliminación Gaussiana

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema 4×4, mediante eliminación Gaussiana:

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 12x_3 + 16x_4 & = & 70, \\ x_1 - 2x_2 + \ 6x_3 + \ 6x_4 & = & 26, \\ -x_1 + 3x_2 - \ 3x_3 - \ 7x_4 & = & -30, \\ \qquad 4x_2 + \ 3x_3 - \ 6x_4 & = & -26. \end{cases}$$

Eliminación Gaussiana

Solución:

Considere el sistema en notación matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 12 & 16 \\ 1 & -2 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & -7 \\ 0 & 4 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 26 \\ -30 \\ -26 \end{pmatrix}.$$

Eliminación Gaussiana

Ahora, utilizando la matriz aumentada se obtiene:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -6 & 12 & 16 & 70 \\ 1 & -2 & 6 & 6 & 26 \\ -1 & 3 & -3 & -7 & -30 \\ 0 & 4 & 3 & -6 & -26 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 1 & -2 & 6 & 6 & 26 \\ -1 & 3 & -3 & -7 & -30 \\ 0 & 4 & 3 & -6 & -26 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_1 + f_3]{-f_1 + f_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -6 & -26 \end{array}\right)$$

Eliminación Gaussiana

$$\xrightarrow[f_1 + f_3]{-f_1 + f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -6 & -26 \end{array}\right) \xrightarrow{-4f_2+f_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{3}f_3]{-f_3 + f_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 8 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

A partir de este sistema, se puede realizar eliminación gaussiana hacia atrás, del cual se obtiene $x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$ y $x_4 = 5$.

Eliminación Gaussiana

Ejemplo

Resuelva el siguiente sistema, utilizando el método de eliminación gaussiana hacia atrás.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= -20 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Eliminación Gaussiana

El método de sustitución hacia atrás tiene un coste computacional n^2, mientras que el proceso de eliminación Gaussiana un coste computacional de n^3.

Nota: El coste computacional consiste en el número de operaciones (sumas y multipliaciones) que se necesitan para que un método o algoritmo sea realizado. En este caso, representa una aproximación del grado del polinomio de dicha cantidad de operaciones.

Eliminación Gaussiana

Ejemplo

Resuelva, utilizando artimética punto flotante con 3 cifras significativas y redondeo, el sistema lineal:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0.100 \times 10^{-2}x + 0.183 \times 10^{2}y & = & 0.183 \times 10^{2}, \\ 0.523 \times 10^{2}x + 0.796 \times 10^{3}y & = & 0.132 \times 10^{4}. \end{array} \right.$$

Solución:

Lo primero consiste en escribir el sistema en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} 0.100 \times 10^{-2} & 0.183 \times 10^{2} \\ 0.523 \times 10^{2} & 0.796 \times 10^{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.183 \times 10^{2} \\ 0.132 \times 10^{4} \end{pmatrix}.$$

Eliminación Gaussiana

Ahora, se aplica el método de eliminación Gaussiana para transformar la matriz en una triangular superior, junto con sustitución hacia atrás para resolver el nuevo sistema.

En este caso particular, cada operación se representa en artimética punto flotante con 3 cifras significativas y el método de aproximación es por redondeo.

Eliminación Gaussiana

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.100\times10^{-2} & 0.183\times10^{2} & 0.183\times10^{2} \\ 0.523\times10^{2} & 0.796\times10^{3} & 0.132\times10^{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(0.100\times10^{-2})^{-1}f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.183\times10^{5} & 0.183\times10^{5} \\ 0.523\times10^{2} & 0.796\times10^{3} & 0.132\times10^{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-0.523\times10^{2}f_1+f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.183\times10^{5} & 0.183\times10^{5} \\ 0 & -0.956\times10^{6} & -0.956\times10^{6} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-0.956\times10^{6})^{-1}f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.183\times10^{5} & 0.183\times10^{5} \\ 0 & 1 & 0.100\times10^{1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-0.183\times10^{5}f_2+f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0.000\times10^{0} \\ 0 & 1 & 0.100\times10^{1} \end{array}\right)$$

Eliminación Gaussiana

Por lo tanto, las soluciones del sistema corresponden a: $x = 0$ y $y = 1$.

Pero la solución obtenida en el ejemplo anterior no es correcta. La solución correcta corresponde a $x = 10$ y $y = 1$.

Además, la razón de obtener una solución errónea no sólo se debe a que se trabaja en precisión finita, sino que también el método de eliminación Gaussiana es numéricamente inestable cuando no se cuenta con todos los decimales.

Es decir, que la propagación de errores de este método es muy elevada y por lo tanto, debe ser utilizado con cautela.

Eliminación Gaussiana

Una forma de conseguir aproximaciones con mayor precisión, consiste en realizar *técnicas de pivoteo* (operaciones elementales de intercambio de filas y columnas) durante el proceso de eliminación Gaussiana, de entre las cuales se consideran las siguientes:

1. **Pivoteo parcial:** consiste en intercambiar filas, de manera que

$$|a_{kk}| = \max_{j=k}^{n}\{|a_{jk}|\}, \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

   al hacer ceros por debajo de la diagonal. Es decir, se toma como pivote el mayor valor absoluto de los elementos de la columna, por debajo de la diagonal, antes de empezar a hacer estos valores cero.

Eliminación Gaussiana

2. **Pivoteo total:** consiste en intercambiar filas y columnas de la matriz, de manera que

$$|a_{kk}| \ = \ \text{máx}\{|a_{ij}| \ / \ j \geqslant k \wedge i \geqslant k\}, \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

   En otras palabras, se considera como pivote al mayor valor absoluto, dentro del rango $[k, n] \times [k, n]$.

Nota: Para efectos del curso, solo se utilizará el pivoteo parcial como método para mejorar el método de eliminación gaussiana.

Eliminación Gaussiana

Así, si se considera el pivoteo parcial para resolver el sistema del ejemplo anterior, entonces se debe realizar un intercambio, entre la fila 1 y la fila 2 inicialmente y luego se continua con el método con normalidad:

Eliminación Gaussiana

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 0.100\times10^{-2} & 0.183\times10^{2} & 0.183\times10^{2} \\ 0.523\times10^{2} & 0.796\times10^{3} & 0.132\times10^{4} \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{f_1\leftrightarrow f_2}\left(\begin{array}{cc|c} 0.523\times10^{2} & 0.796\times10^{3} & 0.132\times10^{4} \\ 0.100\times10^{-2} & 0.183\times10^{2} & 0.183\times10^{2} \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(0.523\times10^{2})^{-1}f_1}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.152\times10^{2} & 0.252\times10^{2} \\ 0.100\times10^{-2} & 0.183\times10^{2} & 0.183\times10^{2} \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{-0.100\times10^{-2}f_1+f_2}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.152\times10^{2} & 0.252\times10^{2} \\ 0 & 0.183\times10^{2} & 0.183\times10^{2} \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{(0.183\times10^{2})^{-1}f_2}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.152\times10^{2} & 0.252\times10^{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{-0.152\times10^{2}f_2+f_1}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0.100\times10^{2} \\ 0 & 1 & 0.100\times10^{1} \end{array}\right)
$$

Eliminación Gaussiana

Ejemplo

Resuelva, utilizando artimética punto flotante con 3 cifras significativas y redondeo, el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 0.03x + 58.9y &= 59.2 \\ 5.31x - 6.10y &= 47.0 \end{cases}$$

Eliminación de Gauss-Jordan

- Ver los documentos *Gauss-Jordan_1.pdf* y *Gauss-Jordan_2.pdf* para estudiar el método de eliminación de Gauss-Jordan.

Ejercicio

Resuelva el siguiente sistema, utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 + 12x_3 + 16x_4 &= 70 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 &= 26 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 7x_4 &= 30 \\ 4x_2 + 3x_3 - 6x_4 &= -26 \end{aligned}$$

1 Introducción

2 Repaso: Sistemas de Ecuaciones

3 Métodos Directos
- Eliminación Gaussiana
- Factorización LU
- Factorización de Cholesky
- Método de Thomas

Factorización LU

Considere el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$. Este proceso consiste en factorizar la matriz A, como el producto de dos matrices: una matriz triangular inferior y otra matriz triangular superior. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz tal que

$$A = LU$$

donde

- $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz triangular inferior, cuyas entradas de su diagonal principal son iguales a 1.
- $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz triangular superior.

Factorización LU

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & * & 1 \end{pmatrix}}_{\text{L=triangular inferior}} \underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}}_{\text{U=triangular superior}}$$

Factorización LU

Ejemplo

La matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

es una matriz no singular, entonces posee una factorización LU:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{U}$$

Factorización LU

Nota: No todas las matrices tiene una factorización LU. Para determinar cuando una matriz A se puede factorizar de la forma $A = LU$, donde L es triangular inferior unitaria (entradas en su diagonal igual a 1) y U triangular superior, se define primero el concepto de **submatriz principal**.

Submatriz Principal

Suponga que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $n \geqslant 2$ y sea $1 \leqslant k \leqslant n$. La **submatriz principal** de orden k de A es definida como la matriz $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ que tiene por entradas, los elementos a_{ij} de A con $1 \leqslant i, j \leqslant k$. Es decir, $A^{(k)}$ es obtenida de A eliminando las últimas $n - k$ filas y columnas.

Factorización LU

$$
\begin{array}{cccccc}
A^{(1)} & A^{(2)} & A^{(3)} & & A^{(n\text{-}1)} & A^{(n)} \\
\multicolumn{6}{c}{\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}}
\end{array}
$$

Figura: Submatrices principales.

Factorización LU

Teorema (Existencia y Unicidad de la factorización LU)

Sea $n \geqslant 1$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1. Si toda submatriz principal $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ con $1 \leqslant k < n$ es invertible (es decir, SIN INCLUIR la matriz A), entonces existen matrices L triangular inferior unitaria y U triangular superior, tales que $A = LU$.

2. Si toda submatriz principal $A^{(k)} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ con $1 \leqslant k \leqslant n$ es invertible (es decir, INCLUYENDO la matriz A), entonces existe una **única** matriz L triangular inferior unitaria y existe una **única** matriz U triangular superior, tales que $A = LU$.

Nota: Como en este curso solo se considera los sistemas de ecuaciones con solución única, entonces solo analizaremos el punto 2. La demostración del punto 1 se omite.

Factorización LU

Demostración

Existencia (Por inducción): Para $n = 1$ se tiene que $\mathbf{A} = (a_{11})$, de ella basta con tomar $\mathbf{L} = (\ 1\ )$ y $\mathbf{U} = (a_{11})$ y se cumple que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. Asuma que la proposición es válida para $1, \ldots, n$ (h.i.). Ahora, se debe probar que la proposición es válida para $n+1$, para ello considere $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ tal que $\mathbf{A}^{(k)}$ para $1 \leq k \leq n$ es no singular. Además, considere $\mathbf{A}$ como una matriz por bloques de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^{(n)} & \boldsymbol{\alpha} \\ \hline \boldsymbol{\beta}^T & a_{n+1,n+1} \end{array}\right),$$

con $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$ vectores y $\mathbf{A}^{(n)}$ submatriz principal. El objetivo es factorizar $\mathbf{A}$ de la forma $\mathbf{LU}$, tal y como se muestra:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^{(n)} & \boldsymbol{\alpha} \\ \hline \boldsymbol{\beta}^T & a_{n+1,n+1} \end{array}\right)}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{L}} & \mathbf{0} \\ \hline \boldsymbol{\gamma}^T & 1 \end{array}\right)}_{\mathbf{L}} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{U}} & \boldsymbol{\delta} \\ \hline \mathbf{0} & p \end{array}\right)}_{\mathbf{U}},$$

Factorización LU

Demostración (Continuación)

donde $\tilde{\mathbf{L}}$ es una matriz triangular inferior unitaria, $\tilde{\mathbf{U}}$ triangular superior, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^n$ vectores y $p \in \mathbb{R}$. Al multiplicar $\mathbf{L}$ por $\mathbf{U}$, se tiene la igualdad:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^{(n)} & \boldsymbol{\alpha} \\ \hline \boldsymbol{\beta}^T & a_{n+1,n+1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{U}} & \tilde{\mathbf{L}}\boldsymbol{\delta} \\ \hline \boldsymbol{\gamma}^T\tilde{\mathbf{U}} & \boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\delta} + p \end{array}\right),$$

de donde se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(n)} &= \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{U}}, & (4.1) \\ \boldsymbol{\alpha} &= \tilde{\mathbf{L}}\boldsymbol{\delta}, & (4.2) \\ \boldsymbol{\beta}^T &= \boldsymbol{\gamma}^T\tilde{\mathbf{U}}, & (4.3) \\ a_{n+1,n+1} &= \boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\delta} + p, & (4.4) \end{aligned}$$

Factorización LU

Demostración (Continuación)

Luego, como $\mathbf{A}^{(n)}$ es una matriz que tiene sus submatrices principales no singulares, entonces por (h.i.), el sistema (4.1) tiene solución, debido a que $\tilde{\mathbf{L}}$ y $\tilde{\mathbf{U}}$ existen. Además, $\tilde{\mathbf{L}}$ es triangular inferior unitaria, por lo que el sistema (4.2) tiene solución única, con lo que el vector $\boldsymbol{\delta} = \tilde{\mathbf{L}}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$ existe. Ahora, nótese que

$$0 \neq \det\left(\mathbf{A}^{(n)}\right) = \det\left(\tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{U}}\right) = \det\left(\tilde{\mathbf{L}}\right) \cdot \det\left(\tilde{\mathbf{U}}\right), \qquad (4.5)$$

por lo que $\tilde{\mathbf{L}}$ y $\tilde{\mathbf{U}}$ son matrices no singulares. Así, el sistema (4.3) tiene solución única $\boldsymbol{\gamma}^T = \boldsymbol{\beta}^T\tilde{\mathbf{U}}^{-1}$. Finalmente, ya que $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\delta}$ existen, entonces se tiene que $p = a_{n+1,n+1} - \boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{\delta}$. Por lo tanto, existen matrices $\mathbf{L}$ triangular inferior unitaria y $\mathbf{U}$ triangular superior, las cuales cumplen que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$.

Factorización LU

Demostración (Continuación)

Unicidad: Queda de ejercicio. (*Sugerencia:* Hacerlo por contradicción. Además, recordar que el producto de dos matrices triangulares inferiores es una matriz triangular inferior. Lo mismo sucede para matrices triangulares superiores).

Factorización LU

Ejemplo

Considere la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

Las submatrices principales son:

$$A^{(1)} = (4),\ A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 20 & -7 \end{pmatrix} \text{ y } A^{(3)} = A.$$

Ahora $|A^{(1)}| = 4$, $|A^{(2)}| = 12$. Entonces la matriz A tiene por lo menos una factorización LU.

Además $|A^{(3)}| = -24$; por lo tanto la factorización LU es única.

Factorización LU

Para calcular la matriz L y la matriz U de la factorización LU de una matriz A se realiza lo siguiente.

- A la matriz A se le realiza la operación de restar y/o sumar el múltiplo de otra fila convirtiendo en ceros las entradas debajo de la diagonal principal, **sin modificar los valores obtenidos en la diagonal principal. Es decir, solo utilizar la operación de sumar y/o restar el múltiplo de otra fila**. Esta matriz resultante es la matriz U.
- La matriz L se obtiene de los multiplicadores utilizados para convertir en cero las entradas debajo de la diagonal principal. Para esto se coloca los opuestos de los multiplicadores utilizados en las operaciones de cada fila en la columna k, en la columna k de la matriz identidad I_n, debajo del primer elemento diagonal de I_n de forma ordenada.

Factorización LU

Ejemplo

Calcule la factorización LU de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 5 & 21 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

Solución: Realizando operaciones elementales, se convierte en ceros las entradas debajo de la diagonal principal de la columna 1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 5 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow[-4\cdot f_1+f_4]{\substack{-2\cdot f_1+f_2 \\ 1\cdot f_1+f_3}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 8 \\ 0 & -3 & 5 & 17 \end{pmatrix}$$

Ahora se construye la matriz L con los opuestos de los multiplicadores.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

Realizando operaciones elementales, se convierte en ceros las entradas debajo de la diagonal principal de la columna 2.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 8 \\ 0 & -3 & 5 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3 \cdot f_2 + f_4]{-3 \cdot f_2 + f_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 14 \end{pmatrix}$$

Se actualiza la matriz L con los opuestos de los multiplicadores en la columna 2

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

Por último, realizando operaciones elementales, se convierte en cero la entrada debajo de la diagonal principal de la columna 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2 \cdot f_3 + f_4} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Se actualiza la matriz L con el opuesto del multiplicador en la columna 3

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 5 & 21 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{U}$$

Factorización LU

Ejercicio

Considere la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 10 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

- Determine si la matriz A tiene una factorización LU. ¿Será única esa factorización?
- Calcule una factorización LU de la matriz A.

A continuación, se explicará la aplicación de la factorización LU para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Factorización LU

Considere el sistema $Ax = b$. Si A es una matriz que posee una factorización LU, entonces $A = LU$. Por lo tanto el sistema original se convierte en

$$LUx = b$$

Una posible estrategia de solución consiste en tomar $y = Ux$ y resolver el sistema

$$Ly = b$$

Como la matriz L es triangular inferior este sistema puede resolverse mediante sustitución hacia adelante. Una vez con los valores encontrados de y, las incógnitas al sistema inicial se resuelve despejando x de

$$Ux = y$$

Nuevamente, como U es triangular superior, este sistema puede resolverse en caso de tener solución mediante sustitución hacia atrás.

Factorización LU

Ejemplo

Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11 \\ 20x_1 - 7x_2 + 12x_3 &= 70 \\ -8x_1 + 13x_2 + 17x_3 &= 17 \end{aligned}$$

Factorización LU

La representación matricial del sistema anterior es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 70 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Del primer ejemplo de esta sección, se conoce la factorización LU de la matriz de coeficientes:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{U} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 70 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

Del sistema matricial anterior

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{y} = \begin{pmatrix} 11 \\ 70 \\ 17 \end{pmatrix}$$

primero resolvemos el siguiente sistema, que es un sistema cuya matriz de coeficientes es una matriz triangular inferior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 70 \\ 17 \end{pmatrix}$$

cuyo resultado es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

Ahora, como se tienen los valores y_1, y_2 y y_3, se resuelve el sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ -6 \end{pmatrix}$$

cuyo resultado es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ y $x_3 = 3$.

Factorización LU

Ejercicio

Resuelva el siguiente sistema lineal, usando el método de factorización LU.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = & 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 10x_3 & = & 16 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 & = & 2 \end{cases}$$

1 Introducción

2 Repaso: Sistemas de Ecuaciones

3 Métodos Directos

- Eliminación Gaussiana
- Factorización LU
- Factorización de Cholesky
- Método de Thomas

Matriz Simétrica Definida Positiva

Sea A una matriz de tamaño $n \times n$.

- Se dice que la matriz A es **simétrica**, si $A = A^t$.
- Se dice que una matriz es **positiva definida** si el determinante se todas las submatrices principales de A es positivo.
- Una matriz es **simétrica definida positiva** si es simétrica y positiva definida a la vez.

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Es claro que $A = A^t$. Además, el determinante de las submatrices principales es $|A^{(1)}| = 4$, $|A^{(2)}| = 16$ y $|A^{(3)}| = 83$. Por lo tanto, A es una matriz **simétrica definida positiva**.

Factorización de Cholesky

- La **factorización o descomposición de Cholesky** es un tipo de factorización para una matriz simétrica definida positiva,, la cual puede ser descompuesta como el producto de una matriz triangular inferior y la traspuesta de la matriz triangular inferior.

- La matriz triangular inferior es el triángulo de Cholesky de la matriz original.

Teorema de existencia

Sea A una matriz simétrica definida positiva de tamaño $n \times n$. Entonces existe una matriz triangular inferior de tamaño $n \times n$, tal que

$$A = LL^t.$$

Factorización de Cholesky: Ejemplo para el caso $n = 3$

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una matriz simétrica definida positiva de tamaño 3×3 tal que

$$A = LL^t = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}.$$

Como A es simétrica, se obtiene que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ a_{21} & a_{22} & * \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}^2 & * & * \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & * \\ l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Factorización de Cholesky: Ejemplo para el caso $n = 3$

De lo anterior, se obtiene que

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 & 0 \\ a_{21}/l_{11} & \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} & 0 \\ a_{31}/l_{11} & \left(a_{32} - l_{31}l_{21}\right)/l_{22} & \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} \end{pmatrix}$$

En general, las entradas de la matriz L están dadas por las siguientes fórmulas

- $l_{j,j} = \sqrt{a_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{j,k}^2}$,
- $l_{i,j} = \frac{1}{l_{j,j}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} l_{j,k} \right)$ para $i > j$.

Factorización de Cholesky

Ejemplo

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 & -10 \\ 15 & 10 & 1 & -7 \\ -5 & 1 & 21 & 4 \\ -10 & -7 & 4 & 18 \end{pmatrix}.$$

1. Demuestre que a la matriz A se le puede calcular la factorización de Cholesky.
2. Calcule la factorización de Cholesky de A.
3. Si $b = (-25 - 19 - 21 - 5)^t$, entonces resuelva el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, usando la factorización de Cholesky.

Factorización de Cholesky

Solución

1. Es claro que la matriz A es simétrica, es decir, $A = A^t$. Sean $A^{(j)}$ las sub-matrices principales de orden $j \times j$.

   Entonces $|A^{(1)}| = 25 > 0$, $|A^{(2)}| = 25 > 0$, $|A^{(3)}| = 100 > 0$ y $|A^{(4)}| = 400 > 0$.

   Por lo tanto, a la matriz A se le puede calcular la factorización de Cholesky.

Factorización de Cholesky

Solución

2.

$$L_{1,1} = \sqrt{A_{1,1}} = \sqrt{25} = 5,$$
$$L_{2,1} = \frac{A_{2,1}}{L_{1,1}} = \frac{15}{5} = 3,$$
$$L_{3,1} = \frac{A_{3,1}}{L_{1,1}} = \frac{-5}{5} = -1,$$
$$L_{4,1} = \frac{A_{4,1}}{L_{1,1}} = \frac{-10}{5} = -2,$$

$$L_{2,2} = \sqrt{A_{2,2} - L_{2,1}^2} = \sqrt{10-9} = 1,$$
$$L_{3,2} = \frac{A_{3,2} - L_{3,1}L_{2,1}}{L_{2,2}} = \frac{1-(-3)}{1} = 4,$$
$$L_{4,2} = \frac{A_{4,2} - L_{4,1}L_{2,1}}{L_{2,2}} = \frac{-7-(-6)}{1} = -1,$$

$$L_{3,3} = \sqrt{21-1-16} = 2,$$
$$L_{4,3} = \frac{A_{4,3} - L_{4,1}L_{3,1} - L_{4,2}L_{3,2}}{L_{3,3}} = \frac{4-2-(-4)}{2} = 3,$$

$$L_{4,4} = \sqrt{A_{4,4} - L_{4,1}^2 - L_{4,2}^2 - L_{4,3}^2} = \sqrt{18-4-1-9} = 2.$$

Factorización de Cholesky

Solución

Por lo tanto, $A = LL^T$, donde

$$L = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Considere el sistema $Ax = b$, donde $A = LL^t$. Por lo tanto, el sistema se puede re-escribir de la forma

$$LL^t x = b.$$

Sea $L^t x = y$. Primero, resolveremos el sistema $Ly = b$ usando sustitución hacia adelante, cuya solución es $y = (-5, -4, -5, -2)^t$.

Factorización de Cholesky

Solución

Sabiendo que $y = (-5, -4, -5, -2)^t$, se resuelve el sistema

$$L^t x = y$$

usando sustitución hacia atrás, cuya solución es $x = (-1, -1, -1, -1)^t$.

1 Introducción

2 Repaso: Sistemas de Ecuaciones

3 Métodos Directos
- Eliminación Gaussiana
- Factorización LU
- Factorización de Cholesky
- Método de Thomas

Matriz Tridiagonal

Matriz Tridiagonal

Una matriz se llama matriz tridiagonal si todos los elementos que están fuera de la diagonal principal y las diagonales adyacentes por encima y por debajo de esta, son igual a cero. Por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Método de Thomas

- El **método de Thomas** es un algoritmo para resolver sistemas de ecuaciones $Ax = d$, donde A es una matriz tridiagonal, es decir, que el sistema se puede expresar como

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i,$$

para $i = 1, ..., n$, donde $a_1 = 0$ y $c_n = 0$.

- El sistema se puede representar matricialmente como

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

Método de Thomas

- Para dar solución a este sistema, se definen los vectores $p \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $q \in \mathbb{R}^n$, donde

$$p_i = \begin{cases} \dfrac{c_i}{b_i} & \text{si} \quad i = 1 \\ \dfrac{c_i}{b_i - p_{i-1} \cdot a_i} & \text{si} \quad i = 2, 3, \ldots, n-1 \end{cases}$$

y

$$q_i = \begin{cases} \dfrac{d_i}{b_i} & \text{si} \quad i = 1 \\ \dfrac{d_i - q_{i-1} \cdot a_i}{b_i - p_{i-1} \cdot a_i} & \text{si} \quad i = 2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

- Luego, la solución del sistema se obtiene a partir de las siguiente fórmula:

$$x_n = q_n \quad \text{y} \quad x_i = q_i - p_i \cdot x_{i+1}$$

para $i = n-1, n-2, \ldots, 1$.

Ejercicio

Implementar computacionalmente en GNU Octave y en Python el método de Thomas para resolver el sistema de ecuaciones

$$Ax = d,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ y $d \in \mathbb{R}^{100}$ tal que

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & \\ 1 & 5 & 1 & & \\ & 1 & 5 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad y \quad d = \begin{bmatrix} -12 \\ -14 \\ -14 \\ \vdots \\ -14 \\ -14 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Lista de Ejercicios

1. Del libro Métodos numéricos para ingenieros, Quinta Edición, realizar los siguientes ejercicios:
   - Página 279, los ejercicios 9.10, 9.11, 9.13, 9.18.
   - Página 303, los ejercicios 10.2, 10.4, 10.15.
   - Página 324, los ejercicios 11.2, 11.4, 11.5, 11.6, 11.22.
2. Del libro Métodos Numéricos con MATLAB, Tercera Edición, realizar los siguientes ejercicios:
   - Página 136, los ejercicios 1, 2, 3, 5, 6.
   - Página 151, los ejercicios 2, 4, 9, 11.
   - Página 168, los ejercicios 1, 2, 3, 4, 6.