Orden de Convergencia de Métodos Iterativos para Solución de Ecuaciones

Ingeniería en Computadores
Instituto Tecnológico de Costa Rica

CE-3102: Análisis Numéricos para Ingeniería

Juan Pablo Soto Quirós
jusoto@tec.ac.cr

Introducción

Anteriormente se presentaron algunos métodos basados en la construcción de una sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, la cual converge a la solución númerica $\xi \in \mathbb{R}$ de la ecuación $f(x) = 0$.

Sin embargo, desde el punto de vista práctico, por lo general no es posible obtener ξ de manera exacta, debido a que no se puede llevar k al infinito.

Por tal razón, lo que se busca es una aproximación de ξ, al considerar una cantidad finita de términos de la sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Introducción

De esta forma, si se comparan dos métodos iterativos sin tener en cuenta aspectos computacionales, se dice que el método mejor es aquel que logra una buena aproximación **en el menor número de iteraciones**.

Es decir, se mide la rapidez con la cual cada método converge hacia su límite, donde un criterio que permite cuantificar dicha rapidez lo ofrece la definición de **orden de convergencia**.

Introducción

Sin embargo, dicha definición no considera la dificultad de la implementación del método, ni la complejidad computacional correspondiente a la cantidad y al costo de los cálculos, así como a la memoria requerida por el mismo.

Estos últimos factores también se deben tener en cuenta a la hora de decidir sobre el uso de un método específico.

Orden de Convergencia

Orden de convergencia

Sea $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión que converge hacia ξ.

- Se dice que la sucesión converge **por lo menos de orden** q, con $q > 0$, si y solo si existe $\mu > 0$ y una sucesión $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ que converge a 0, tales que

$$|x_k - \xi| \leqslant e_k \text{ y } \lim_{k \to +\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^q} = \mu,$$

  para $k = 0, 1, 2, \ldots$.
- Si se cumple que $|x_k - \xi| = e_k$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$, entonces se dice que la sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ converge a ξ **con orden** q.
- La constante μ se conoce como **razón de convergencia**.

Observación: El objetivo es encontrar el máximo orden de convergencia, es decir, el valor más grande de q

Orden de Convergencia

Ejemplo

Considere las sucesiones $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ y $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que $a_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k + 2$ y $b_k = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^k} + 2$. Es claro que ambas sucesiones convergen a 2.

Primero, encontraremos el orden de convergencia de $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$. Sea $e_k = |a_k - 2| = \left(\frac{1}{3}\right)^k$.

Entonces hay que encontrar el máximo valor $q > 1$, tal que el límite

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^q} = \frac{1}{3} \lim_{k \to +\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{1-q} \right)^k$$

exista.

Orden de Convergencia

Ejemplo (Continuación)

Es claro que el máximo valor que puede tomar q para que el límite exista es $q = 1$. En este caso

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = \frac{1}{3}.$$

De igual forma, se puede demostrar que el orden de convergencia de $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ es $q = 2$ y la razón de convergencia es $\mu = 1$ (**PROBAR**).

Por lo tanto, aunque ambas sucesiones convergen al misma valor, el orden de convergencia de la sucesión $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ es más grande que el de la sucesión $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Observación: Note que entre mayor sea el orden de convergencia mayor será la rapidez de convergencia.

Orden de Convergencia

Clases de Orden de Convergencia

Para $q = 1$, se distinguen los siguientes tipos de convergencia:

- si $\mu = 0$ la convergencia es **superlineal**,
- si $\mu \in]0, 1[$ la convergencia es **lineal**,
- si $\mu = 1$ la convergencia es **sublineal**.

Mientras que si $q = 2$, la convergencia es **cuadrática**.

Orden de Convergencia

Ejercicios

1. Calcule el orden de convergencia de las siguientes sucesiones:

   a. $a_k = \frac{1}{2^k}$ b. $b_k = \frac{1}{2^{2^k-1}}$ c. $c_k = \frac{1}{k!}$ d. $d_k = \frac{1}{k^3}$

2. Pruebe que la convergencia de la sucesión $p_k = \cos\left(\frac{1}{k}\right)$ es, al menos, sublineal.

3. Sea $\alpha > 0$. Si se sabe que la sucesión definida por

$$x_{k+1} = \frac{x_k(x_k^2 + 3\alpha)}{3x_k^2 + \alpha}$$

   converge a $\sqrt{\alpha}$, para cualquier $x_0 \geqslant \sqrt{\alpha}$, entonces determine el orden y la razón de convergencia de esta sucesión.

Orden de convergencia de métodos para solución de ecuaciones

Teorema: Orden de convergencia del método de la bisección

El orden de convergencia del la iteración de bisección es al menos lineal y su razón de convergencia es $\frac{1}{2}$.

Demostración

Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ la sucesión del método de la bisección que converge a ξ. Se sabe que

$$|x_k - \xi| \leqslant \frac{b-a}{2^k}.$$

Por lo tanto, consideremos la sucesión $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $e_k = \frac{b-a}{2^k}$.

Orden de convergencia de métodos para solución de ecuaciones

Demostración (Continuación)

En este caso, consideremos $q = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} &= \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{b-a}{2^{k+1}}}{\frac{b-a}{2^k}} \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Orden de convergencia de métodos para solución de ecuaciones

Teorema 1: Orden de convergencia del método del punto fijo

Sea ξ el único punto fijo al cual converge la iteración $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. Asumimos que $\varphi'(\xi) = M$, donde $M \in \mathbb{R} - \{0\}$. Entonces el orden de convergencia del método del punto fijo es lineal.

Demostración

Utilizando la expansión de Taylor de φ alrededor de ξ, obtenemos que

$$\varphi(x) = \varphi(\xi) + \varphi'(\xi)(x - \xi) + \frac{\varphi''(c)}{2}(x - \xi)^2,$$

donde c es algún valor entre x y ξ.

Orden de convergencia de métodos para solución de ecuaciones

Demostración (Continuación)

Evaluando la función anterior en x_k, y sabiendo que $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ y $\varphi(\xi) = \xi$, obtenemos que

$$x_{k+1} = \xi + \varphi'(\xi)(x_k - \xi) + \frac{\varphi''(c_k)}{2}(x_k - \xi)^2.$$

Donde c_k esta entre x_k y ξ. Por lo tanto, $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ también converge a ξ. Restando ξ en ambos lados de la desigualdad y dividiendo por $x_k - \xi$ obtenemos

$$\frac{x_{k+1} - \xi}{x_k - \xi} = \varphi'(\xi) + \frac{\varphi''(c_k)}{2}(x_k - \xi)^2.$$

De lo anterior, obtenemos que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|} = |\varphi'(\xi)| = M.$$

Orden de convergencia de métodos para solución de ecuaciones

Teorema 2: Orden de convergencia del método del punto fijo

Sea ξ el único punto fijo al cual converge la iteración $x_{k+1} = \varphi(x_k)$. Asumimos que $\varphi'(\xi) = 0$ y $\varphi''(\xi) = M$, donde $M \in \mathbb{R} - \{0\}$. Entonces el orden de convergencia del método del punto fijo es cuadrática.

Demostración

Ejercicio

Orden de convergencia de métodos para solución de ecuaciones

Teorema: Orden de convergencia del método de Newton-Raphson

Sea f una función que cumple todas las hipótesis del teorema del método de Newton-Rapshon. Sea $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ la sucesión del método de Newton-Rapshon que converge a ξ, donde $f(\xi) = 0$. Además,

$$\frac{|f''(x)|}{|f'(y)|} \leqslant M,$$

para todo $x, y \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$. Entones el método de Newton-Raphson converge con orden cuadrático.

Demostración

Ejercicio. (**Sugerencia**: Calcular la expansión de Taylor de $f(x)$ alrededor de x_k. Evaluar en ξ y realizar un procedimiento similar al **Teorema 2**).

Orden de convergencia de métodos para solución de ecuaciones

Teorema: Orden de convergencia del método de la Secante

Sea f una función que es p veces diferenciable, con $p \geqslant 2$. Sea $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ la sucesión del método de la secante que converge a ξ, donde $f(\xi) = 0$. Entones el método de Newton-Raphson converge con un orden igual a

$$\frac{1+\sqrt{1+4(p-1)}}{2}.$$

Observación

Si $p = 2$, es decir, es dos veces diferenciable, entonces el orden de convergencia del método de la secante es $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Orden de convergencia de métodos para solución de ecuaciones

Teorema: Orden de convergencia del método de Muller

Sea f una función. El método de Muller tiene un orden de convergencia igual a 1.8393, aproximadamente.

Comparación Final de los Métodos

Método	Trabajo Requerido	Convergencia	Observaciones
Bisección	2 evaluaciones en la función f por iteración	Siempre converge, pero lentamente	Se debe conocer un intervalo inicial que cumpla la condición de Bolzano
Newton	2 evaluaciones funcionales por iteración (una evaluación en f y otra en f')	Cuadrática si tiene una solución simple Lineal si tiene múltiples soluciones	Se debe escoger un valor inicial que este cercano al valor de la raíz de f Una desventaja del método es el cálculo de la derivada de la función ya que, en algunos casos, es difícil realizar el cálculo de dicha derivada
Secante	2 evaluaciones en la función f por iteración	Superlineal	Necesita dos valores iniciales No requiere el cálculo de la derivada
Punto Fijo	1 evaluación funcional por iteración	Lineal	Encontrar la función φ que cumplas las condiciones de existencia y unicidad del punto fijo es en algunos casos difícil o imposible.
Müller	3 evaluaciones funcionales por iteración y la solución de un sistema de $3x3$	Convergencia casi cuadrática	No requiere el cálculo de la derivada