Solución Numérica de Ecuaciones No Lineales

Ingeniería en Computadores
Instituto Tecnológico de Costa Rica

CE-3102: Análisis Numéricos para Ingeniería

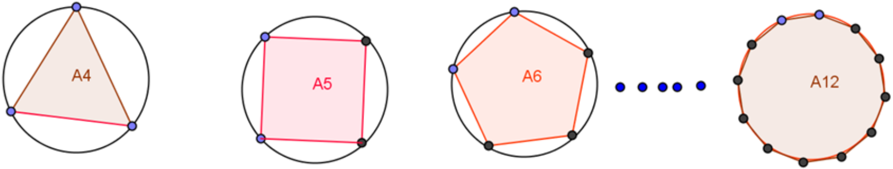
Juan Pablo Soto Quirós
jusoto@tec.ac.cr

Introducción

El análisis numérico es la rama de las matemáticas que se encarga de diseñar algoritmos para **simular** procesos matemáticos más complejos aplicados a procesos del mundo real.

Estos procesos complejos requieren, en la práctica, el uso de técnicas numéricas para aproximar las soluciones de los mismos.

Introducción



El análisis numérico proporcionará todo el *andamiaje* necesario para llevar a cabo todos aquellos procedimientos matemáticos susceptibles de expresarse algorítmicamente, basándose en algoritmos que permitan su simulación o cálculo en procesos más sencillos.

Una palabra importante en el análisis numérico es **APROXIMAR**. Esta aproximación se realiza en muchas ocasiones usando **métodos iterativos**.

Introducción

Un método iterativo trata de resolver un problema matemático mediante aproximaciones sucesivas a la solución, empezando desde una estimación inicial:

$$\begin{cases} x_k = & \text{expresión en términos de } x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots \\ x_0 = & \text{valor inicial} \end{cases}$$

Lo anterior genera una sucesión de elementos $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

Se espera que cada x_k aproxime mejor la solución del problema que las iteraciones anteriores.

Introducción

Ejemplo

Un método iterativo para aproximar el valor decimal de $a^{-1} = \frac{1}{a}$, donde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, es

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1}\left(2 - a \cdot x_{k-1}\right) \\ \\ x_0 = \text{ un valor cercano a } a^{-1}. \end{cases}$$

Introducción

Ejemplo

Para aproximar el valor de $7^{-1} = \frac{1}{7}$, con $x_0 = 0.1$, se obtiene

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1}\left(2 - 7 \cdot x_{k-1}\right) \\ \\ x_0 = 0.1 \end{cases}$$

Entonces:

- $x_1 = x_0\left(2 - 7 \cdot x_0\right) = 0.1\left(2 - 7 \cdot 0.1\right) = 0.13$
- $x_2 = x_1\left(2 - 7 \cdot x_1\right) = 0.13\left(2 - 7 \cdot 0.13\right) = 0.1417$

$$\vdots$$

- $x_5 = x_4\left(2 - 7 \cdot x_4\right) = 0.142857142857143...$ (17 dígitos iguales)

Introducción

Por otra parte, diversas aplicaciones físicas y áreas de investigación matemática requieren el estudio de varios tipos de ecuaciones. Algunas de estas ecuaciones son bastante simples de resolver, como por ejemplo la ecuación lineal

$$ax + b = 0,$$

donde a y b son números reales con a $a \neq 0$ y cuya solución es dada por $x = -b/a$.

Introducción

Muchas otras ecuaciones son no lineales, como por ejemplo la clásica ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

con a, b y c números reales tal que a $a \neq 0$. Las dos soluciones de esta ecuación, denominadas x_1 y x_2 son de la forma:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Introducción

Sin embargo, de manera general, resolver una ecuación puede presentar dos inconvenientes, como por ejemplo, resolver la ecuación $e^x - x - 2 = 0$.

La siguiente figura muestra que la función $f(x) = e^x - x - 2$ tiene dos soluciones: $x_1 = -1.84141...$ y $x_2 = 1.14619...$, como lo muestra la siguiente figura:

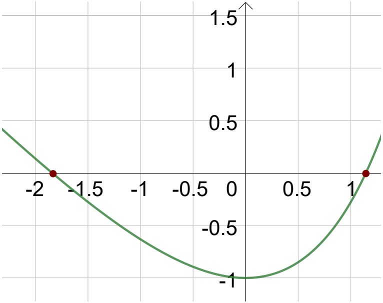


Figura: Gráfica de la función $f(x) = e^x - x - 2$.

Introducción

Otro ejemplo es el siguiente:

Ejemplo

La velocidad v de caída de un paracaidista está dada por

$$v = \frac{g \cdot m}{c}\left(1 - e^{-\frac{c \cdot t}{m}}\right)$$

donde $g = 9.8m/s^2$. Para el paracaidista, con un coeficiente de razonamiento de $c = 14kg/s$, calcule la masa m de éste de tal forma que la velocidad sea de $v = 35m/s$ en $t = 7s$.

Introducción

Así, las técnicas numéricas usuales consideradas para resolver el siguiente problema:

Problema modelo

Dada una función real f definida y continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, encontrar $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$.

Para resolver una ecuación se utilizará una aproximación inicial x_0 de la solución, donde a partir de ella se construya una nueva aproximación x_1 y así sucesivamente se genera x_k a partir de x_{k-1}.

En otras palabras, la idea general consiste en construir una sucesión (x_k) de tal forma que $x_k \to \xi$ cuando $k \to \infty$ (**UN MÉTODO ITERATIVO**).

Introducción

Para eso, se explicarán algunos métodos iterativos para aproximar la solución de una ecuación, entre ellos:

- Método de Bisección
- Método de Newton-Raphson
- Método de la Secante
- Método de la Falsa Posición
- Método de Punto Fijo
- Método de Müller

Introducción

Antes de presentar estos métodos, existe una forma de determinar la solución de una ecuación, mediante un método gráfico.

El **método gráfico** permite determinar la existencia de soluciones de una ecuación formada pro funciones elementales.

Ejemplo

Utilizando un graficador, determine un intervalo (si es posible) donde se garantice la existencia de una solución de las siguientes ecuaciones

- $\ln(x) = x - 2$.
- $100\cos(x) = x^2$.
- $e^x = x$.
- $(0.8)^x = \sqrt{x}$.

Nota: En el curso, se necesita saber realizar la gráfica (en papel y lápiz) de las siguientes funciones: $f_1(x) = a^x$, $f_2(x) = \log_a(x)$, $f_3(x) = mx + b$, $f_4(x) = ax^2 + bx + c$, $f_5(x) = \sin(x)$, $f_6(x) = \cos(x)$, $f_7(x) = \sqrt{x}$ y $f_8(x) = \sqrt[3]{x}$.

Método de la Bisección

Uno de los teoremas importantes para la determinar la existencia de una solución para una ecuación es el siguiente:

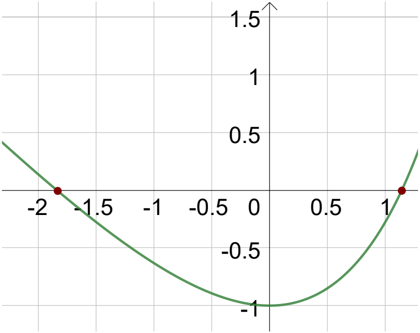
Teorema del Bolzano

Sea f una función real, definida y continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si se cumple que $f(a)f(b) \leqslant 0$, entonces existe $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$.

Método de la Bisección

Ejemplo

Considere la función $f(x) = e^x - x - 2$ sobre $[0, 2]$ y note que $f(0) = -1 < 0$ y $f(2) = 3.389... > 0$. Por lo tanto, existe $\xi \in [0, 2]$ tal que $f(\xi) = 0$, que en este caso es $\xi = 1.14619...$.



Método de la Bisección

El teorema anterior establece que si f es continua en $[a, b]$, donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución en $]a, b[$. Pero el teorema no brinda la solución, sólo garantiza su **existencia**.

Además, el recíproco del teorema es falso, ya que es posible considerar una función f continua en $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$ tiene solución en $]a, b[$, pero que $f(a)f(b) > 0$. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ sobre $]-1, 1[$.

Método de la Bisección

El método de la bisección se basa en el teorema explicado anteriormente. Se busca definir una sucesión (x_k) que converja a ξ cuando $k \to \infty$, donde $f(\xi) = 0$ y $\xi \in [a, b]$. Para ello, se debe cumplir la condición de cambio de signo $f(a)f(b) < 0$ y luego considerar x_1 el punto medio de $[a, b]$. Si $a_1 = a$ y $b_1 = b$, entonces lo anterior significa

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2},$$

con lo que el intervalo $[a_1, b_1]$ es dividido en dos subintervalos: $[a_1, x_1]$ y $[x_1, b_1]$, donde en alguno de ellos se encuentra ξ.

Ahora, para determinar en cuál subintervalo se encuentra ξ, basta verificar si $f(a_1)f(x_1) > 0$ o si $f(x_1)f(b_1) \leqslant 0$.

Método de la Bisección

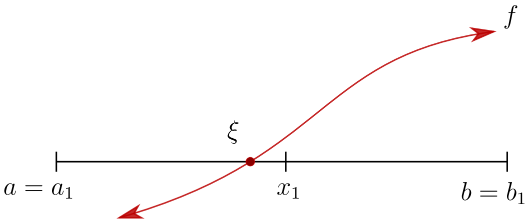


Figura: Ejemplo gráfico de la iterción de la bisección

Método de la Bisección

El método de bisección genera un sucesión de subintervalos $I_k = [a_k, b_k]$, donde satisfacen la propiedad $f(a_k)f(b_k) < 0$, donde

$$I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, x_k] & si \quad f(a_k)f(x_k) < 0 \\ [x_k, b_k] & si \quad f(a_k)f(x_k) > 0 \end{cases}$$

Método de la Bisección

La convergencia y una cota del error absoluto del método de la bisección es presentada en el siguiente teorema.

Teorema del método de la bisección

Supongamos que f es una función continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$. El método de la bisección genera una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a un valor cero $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$, tal que

$$e_k = |x_k - \xi| \leqslant \frac{b-a}{2^k}.$$

Prueba

Queda de ejercicio.

Otra condición de parada puede estar dado, al utilizar una cantidad máxima de iteraciones: $k < iterMax$.

Método de la Bisección

Ejemplo

Utilice el método de bisección para aproximar la solución de la ecuación $e^x - x - 2 = 0$ en el intervalo $[0, 2]$ para una tolerancia de 3×10^{-1}.

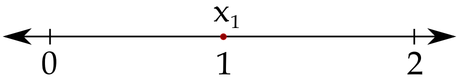
Solución

Primero se verifica que $f(0)f(2) < 0$, lo cual es cierto. Ahora, la condición de parada indica que el proceso se detiene cuando $e_k < 3 \times 10^{-1} = 0.3$.

Método de la Bisección

Solución (Continuación)

- **Iteración 1:** Se tiene que $a_1 = 1$, $b_1 = 2$ (intervalo original) y $x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = \dfrac{0+2}{2} = 1.$
  Así
  $$e_1 \leqslant \frac{b-a}{2^1} = \frac{2-0}{2^1} = 1 \nless 0.3$$
  Por lo tanto, se continua el proceso.



Método de la Bisección

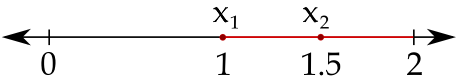
Solución (Continuación)

- **Iteración 2:** Ahora se tiene que dividir el intervalo $[0,2]$ en dos subintervalos: $[0,1]$ y $[1,2]$. Ahora, con el intervalo $[1,2]$ se cumple que $f(1)f(2)<0$. Por lo tanto $a_2=1$ y $b_2=2$.

  Entonces $x_2=\dfrac{a_2+b_2}{2}=\dfrac{1+2}{2}=1.5.$

  Así
  $$e_2 \leqslant \frac{b-a}{2^2}=\frac{2-0}{2^2}=0.5 \nless 0.3.$$

  Por lo tanto, se continúa el proceso.



Método de la Bisección

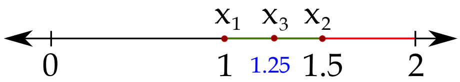
Solución (Continuación)

- **Iteración 3:** Ahora se tiene que dividir el intervalo $[1, 2]$ en dos subintervalos: $[1, 1.5]$ y $[1.5, 2]$. Ahora, en el intervalo $[1, 1.5]$ se cumple que $f(1)f(1.5) < 0$. Por lo tanto $a_3 = 1$ y $b_3 = 1.5$.

  Entonces $x_3 = \dfrac{a_3 + b_3}{2} = \dfrac{1 + 1.5}{2} = 1.25.$

  Así
$$e_3 \leqslant \frac{b-a}{2^3} = \frac{2-0}{2^3} = 0.25 < 0.3.$$

  Por lo tanto se detiene el método.



Método de la Bisección

Solución (Continuación)

Por lo tanto, la aproximación a la solución de la ecuación $e^x - x - 2 = 0$ en el intervalo $[0, 2]$ para una tolerancia de 3×10^{-1} utilizando el método de la bisección es $x_3 = 1.25$.

Método de la Bisección

Solución (Continuación)

Si del ejemplo anterior se hubiera utilizado una tolerancia de 10^{-4}, se hubieran utilizado 8 iteraciones y la aproximación es $x_7 = 1.1484375$.

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$	e_k
1	0	2	1	-0.2817	1
2	1	2	1.5	0.9816	0.5
3	1	1.5	1.25	0.2403	0.25
4	1	1.25	1.125	-0.0447	0.125
5	1.125	1.25	1.1875	0.0913	0.0625
6	1.125	1.1875	1.15625	0.0217	0.03125
7	1.125	1.15625	1.140625	-0.0119	0.015625
8	1.140625	1.15625	1.1484375	0.0048	0.0078125

Cuadro: Método de la bisección para $f(x) = e^x - x - 2$, en $[1, 2]$, con $tol = 10^{-4}$.

Método de la Bisección

Ejercicios

1. Use el método de la bisección para encontrar una solución de la ecuación $x = 2^{-x}$ en el intervalo de $[0, 1]$, calculando 4 iteraciones. Luego calcule una cota para el error absoluto.
2. Encuentre una aproximación para $\sqrt{3}$, con un error menor a 10^{-1}, utilizando el método de la bisección. **Sugerencia:** plantee una ecuación que no involucre raíces, cuya solución sea $\sqrt{3}$.

Método de la Bisección

En la iteración del bisección se tiene que $e_k \leqslant \frac{b-a}{2^k}$; además se considera $e_k \leqslant tol$ como condición de parada; entonces para nuestros casos se debe cumplir que $\frac{b-a}{2^k} \leqslant tol$. Entonces:

$$\frac{b-a}{2^k} \leqslant tol \Rightarrow \frac{b-a}{tol} \leqslant 2^k \Rightarrow \log_2\left(\frac{b-a}{tol}\right) \leqslant k,$$

así, si se desea utilizar una tolerancia tol, entonces el valor mínimio de $iterMax$ para la iteración de bisección puede ser considerado de la forma:

$$iterMax = \left\lfloor \log_2\left(\frac{b-a}{tol}\right) \right\rfloor + 1.$$

donde $\lfloor x \rfloor$ representa la parte entera de x.

Método de la Bisección

Ejemplo

Considere el polinomio de Legendre de grado 5, dado por

$$p_5(x) = \frac{x}{8}(63x^4 - 70x^2 + 15).$$

Este polinomio tiene un cero en el intervalo $[0.6, 1]$. Calcule el número de iteraciones máximas que se necesitan para aproximar este cero por el método de bisección, con una tolerancia de 10^{-10}.

Respuestas: Utilizando la ecuación anterior, se obtiene que

$$iterMax = \left\lfloor \log_2\left(\frac{1-0.6}{10^{-10}}\right)\right\rfloor + 1 = \lfloor 31.89735... \rfloor + 1 = 32$$

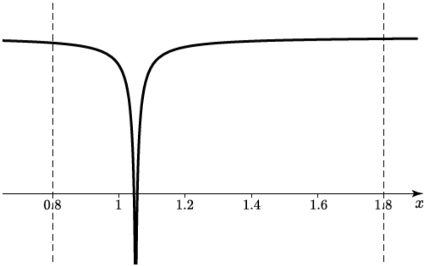
Por lo tanto, las iteraciones máximas necesarias es de al menos 32.

Método de Newton-Raphson

Considere la función

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + 200|x - 1.05|},$$

en el intervalo $[0.8, 1.8]$.



Método de Newton-Raphson

Las soluciones de la ecuación $f(x)=0$ son

$$\xi_1 = 1.05 - \frac{1}{200} \text{ y } \xi_1 = 1.05 + \frac{1}{200},$$

es decir, que ambas soluciones se encuentran a una distancia de $\frac{2}{200}=\frac{1}{100}$ unidades, y es claro ver que ambas soluciones están muy juntas. Aunque existe una solución en el intervalo $[0.8, 1.8]$ (es más, hay dos), se cumple que $f(a)f(b)>0$, por lo que no se puede usar el método de la bisección con ese intervalo.

Método de Newton-Raphson

Si se desea utilizar el método iterativo de la bisección, la selección del intervalo $[a, b]$ que cumple $f(a)f(b) < 0$ va a ser muy difícil, ya que el valor de a y b estarán muy juntos.

Por situaciones como la anterior, se buscan otros métodos iterativos que ayuden a aproximar la solución de ecuaciones. Uno de estos métodos el **método de Newton-Raphson**.

A continuación, se presentarán algunos conceptos preliminares relacionados con el método iterativo de Newton-Raphson.

Método de Newton-Raphson

Otro método iterativo para obtener la solución de una ecuación de la forma $f(x) = 0$ se deduce a partir de la expansión de Taylor de f alrededor de un punto $\overline{\xi}$ (donde $f'(\overline{\xi}) \neq 0$):

$$f(x) = f(\overline{\xi}) + f'(\overline{\xi})(x - \overline{\xi}) + (x - \overline{\xi})^2 \frac{f''(\overline{\xi})}{2!} + \dots$$

Truncando a partir del término de grado 2 se obtiene:

$$f(x) \approx f(\overline{\xi}) + f'(\overline{\xi})(x - \overline{\xi}).$$

Sea $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $f(\xi) = 0$. Evaluando en la expresión obtenemos que

$$0 = f(\xi) \approx f(\overline{\xi}) + f'(\overline{\xi})(\xi - \overline{\xi}).$$

De la ecuación anterior, si despejamos ξ, obtenemos

$$\xi \approx \overline{\xi} - \frac{f(\overline{\xi})}{f'(\overline{\xi})}.$$

Método de Newton-Raphson

Lo anterior nos prepara para introducir el método de Newton:

Iteración de Newton

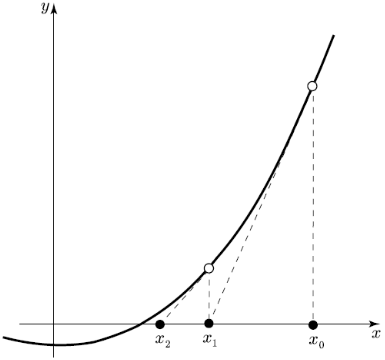
La **iteración de Newton** o **iteración de Newton-Raphson** para aproximar la solución de $f(x) = 0$ es dada por

$$x_{k+1} \;=\; x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

con $f'(x_k) \neq 0$ para todo $k \geqslant 0$ y x_0 algún valor inicial.

Método de Newton-Raphson

La siguiente figura muestra la representación grafica de la iteración de Newton



Método de Newton-Raphson

Ejemplo

Considere la ecuación $\cos^2(2x) = x^2$, la cual posee un cero en $\left[0, \frac{3}{2}\right]$. Tomando $x_0 = \frac{3}{4}$, determine el valor de x_4 de la iteración de Newton.

Respuesta:

Dado que $f(x) = \cos^2(2x) - x^2$ y $f'(x) = -2\,\mathrm{sen}(4x) - 2x$, entonces:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &= x_k - \frac{\cos^2(2x_k) - x_k^2}{-2\,\mathrm{sen}(4x_k) - 2x_k} \\ &= x_k + \frac{\cos^2(2x_k) - x_k^2}{2\,\mathrm{sen}(4x_k) + 2x_k} \end{aligned}$$

Método de Newton-Raphson

Entonces:

- $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 0.4371935074$
- $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0.5147024678$
- $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 0.5149332479$
- $x_4 = x_3 - \dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)} \approx 0.5149332646$

Por lo tanto, $x_4 = 0.5149332646$, la cual es una buena aproximación a la solución dada por $\xi = 0.51493326466113\ldots$.

Método de Newton-Raphson

Dos condiciones de parada para los métodos iterativos de solución de ecuaciones se obtienen a través de las fórmulas para aproximar el error absoluto o el error relativo, que son dadas por

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant tol \qquad \text{ó} \qquad \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} \leqslant tol,$$

respectivamente, donde tol es una tolerancia dada.

Observaciones

1. Para propósitos de este curso; se utilizará como condición de parada la fórmula que aproxima el error relativo (excepto que se diga lo contrario).
2. Este tipo de error también se puede usar en los métodos de la bisección y del punto fijo.

Método de Newton-Raphson

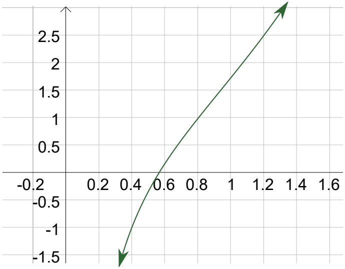
Ejemplo

Usando el método iterativo de Newton, determine una solución de la ecuación $e^x - \frac{1}{x} = 0$ con una tolerancia de 10^{-4} y $x_0 = 1$.

Respuesta: Sea $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$ y $f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$.

Entonces:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \dfrac{e_k^x - \frac{1}{x_k}}{e^x k + \frac{1}{x_k^2}} \\ x_0 = 1 \end{cases}$$



Método de Newton-Raphson

La siguiente tabla contempla las iteraciones realizadas:

k	x_k	$e_k = \dfrac{\lvert x_{k+1} - x_k \rvert}{\lvert x_{k+1} \rvert}$	¿$e_k \leqslant 10^{-4}$?
0	1	-	-
1	$0.53788284...$	$0.8591409237...$	No
2	$0.56627701...$	$0.0501418378...$	No
3	$0.56714258...$	$0.0015261947...$	No
4	$0.56714329...$	$1.2518882... \times 10^{-6}$	Si

Por lo tanto, la aproximación de la solución de la ecuación $e^x - \frac{1}{x} = 0$, con una tolerancia de 10^{-4}, es $0.56714329...$

Método de Newton-Raphson

Ejercicio

Usando el método iterativo de Newton, determine una solución de la ecuación

$$\ln\left(\frac{4}{3}x\right) = 2\cos(x) - \frac{1}{2},$$

con una tolerancia de 10^{-2} y $x_0 = 1.5$.

Método de Newton-Raphson

Lema

Sea f una función continua en $[a, b]$ y sea $\xi \in]a, b[$. Sea $f(\xi) = 0$ y sea $L > 0$ un valor dado (**cualquiera**). Demuestre que existe $\delta > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant L$, para toda $x \in [\xi - \delta, \xi + \delta] \subseteq [a, b]$.

Demostración

Ejercicio. (Sugerencia: Usar definición de continuidad de f en el punto ξ).

Observación: Note que el valor de L puede ser seleccionado arbitrariamente, siempre y cuando se cumplan las condiciones necesarias (es decir, f continua y $f(\xi) = 0$).

Método de Newton-Raphson

Dado un valor inicial x_0, el siguiente teorema muestra la convergencia del método de Newton-Raphson.

Teorema del método de Newton-Raphson

Sea f una función continua en $[a, b]$ y dos veces diferenciable, donde cada derivada es continua en $[a, b]$. Si $\xi \in [a, b]$ es tal que $f(\xi) = 0$ y $f'(\xi) \neq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que el método de Newton-Raphson genera una sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a ξ, para cualquier aproximación inicial $x_0 \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$.

Demostración

La demostración se basa en analizar el método de Newton-Raphson como un caso particular del método del punto fijo. Para esto, se considera la iteración $x_n = \varphi(x_{n-1})$, para $n \geqslant 1$, donde

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Método de Newton-Raphson

Demostración (Continuación)

Sea $L \in]0,1[$ un número arbitrario. Para demostrar este teorema, necesitamos demostrar las dos hipótesis del teorema del método del punto fijo:

1. Encontrar un intervalo $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ tal que si $x \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$, entonces $\varphi(x) \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$.
2. Probar que $|\varphi'(x)| \leqslant L$, para todo $x \in]\xi - \delta, \xi + \delta[$.

Primero demostraremos la existencia del intervalo $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ y la hipótesis 2.

Como $f'(\xi) \neq 0$ y f' es continua, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que $f'(x) \neq 0$ para $x \in [\xi - \delta_1, \xi + \delta_1] \subseteq [a, b]$. Por lo tanto, φ está definida y es continua en $[\xi - \delta_1, \xi + \delta_1]$.

Método de Newton-Raphson

Demostración (Continuación)

Además,

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

para $x \in [\xi - \delta_1, \xi + \delta_1]$ y como f'' es continua, entonces φ es continua en $[\xi - \delta_1, \xi + \delta_1]$. Por suposición $f(\xi) = 0$, entonces

$$\varphi(\xi) = \frac{f(\xi)f''(\xi)}{[f'(\xi)]^2} = 0.$$

Como φ' es continua y tomando $L \in]0, 1[$, **el lema anterior** implica que existe $0 < \delta < \delta_1$ tal que

$$|\varphi'(x)| \leqslant L \qquad \text{para toda } x \in [\xi - \delta, \xi + \delta], \tag{1}$$

donde $[\xi - \delta, \xi + \delta] \subseteq [\xi - \delta_1, \xi + \delta_1] \subseteq [a, b]$. Es claro que la ecuación (1) se cumple para $x \in]\xi - \delta, \xi + \delta[$.

Método de Newton-Raphson

Demostración (Continuación)

Con lo anterior, hemos demostrado la segunda hipótesis del teorema del método del punto fijo. Falta demostrar la primera hipótesis, es decir, si $x \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$, entonces $\varphi(x) \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$.
Si $x \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$, entonces por el teorema del valor medio existe c entre x y ξ tal que $|\varphi(x) - \varphi(p)| = |\varphi'(c)||x - p|$. Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcl} |\varphi(x) - \xi| & = & |\varphi(x) - \varphi(\xi)| \\ & = & |\varphi'(c)||x - \xi| \\ & \leqslant & L|x - \xi| \\ & < & |x - \xi|. \end{array}$$

De lo anterior se obtiene que si $x \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$, entonces $|\varphi(x) - p| < |x - p|$.

Método de Newton-Raphson

Demostración (Continuación)

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
x \in [\xi - \delta, \xi + \delta] \quad &\Rightarrow \quad |x - \xi| \leqslant \delta \\
&\Rightarrow \quad |\varphi(x) - \xi| < |x - \xi| \leqslant \delta \\
&\Rightarrow \quad |\varphi(x) - \xi| < \delta \\
&\Rightarrow \quad \varphi(x) \in]\xi - \delta, \xi + \delta[\\
&\Rightarrow \quad \varphi(x) \in [\xi - \delta, \xi + \delta]
\end{aligned}
$$

Con lo anterior demostramos la primera hipótesis del teorema del método del punto fijo. Entonces, el teorema del método de Newton-Rapshon queda demostrado. Por lo tanto, el método de Newton-Rapshon converge a la solución de la ecuación $f(x) = 0$.

Método de Newton-Raphson

Ejercicios

Aplique el método de Newton-Raphson para obtener soluciones con una tolerancia de 10^{-5} para los siguientes problemas

1. $2x\cos(2x) = (x-2)^2$, para $x_0 = 2.5$.
2. $e^x + 2^{-x} + 2\cos(x) - 6 = 0$, para $1 \leqslant x \leqslant 2$.
3. $\sin(x) - e^{-x} = 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$; $3 \leqslant x \leqslant 4$; $6 \leqslant x \leqslant 7$.

Método de la Secante

El método de Newton-Raphson aproxima una solución de la ecuación $f(x) = 0$ considerando la primera la primera derivada de f.

Sin embargo, muchas de las ecuaciones contienen funciones no diferenciables. Además, en la práctica, determinar $f'(x)$ conlleva a un alto costo computacional (y mental).

Por esta razón es intuitivo tratar de conseguir una aproximación para la derivada f', y modificar el método de Newton-Raphson.

Método de la Secante

Una manera de aproximar el valor de f' es a través de la fórmula de la pendiente:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Entonces, haciendo la modificación a la iteración de Newton se obtiene:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ &\approx x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} \\ &\approx x_k - \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \right) f(x_k) \end{aligned}$$

Método de la Secante

A partir de la idea anterior se define el método de la secante.

Método de la secante

El **método de la secante** se define como

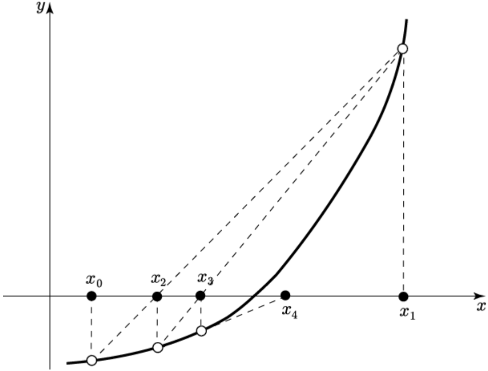
$$x_{k+1} \;=\; x_k - \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\right) f(x_k),$$

para $k = 1, 2, \ldots,$ donde x_0 y x_1 son los valores iniciales y se asume que $f(x_k) - f(x_{k-1}) \neq 0$ para todo $k \geqslant 1$.

Nota: El método iterativo de la secante necesita dos valores iniciales x_0 y x_1 para empezar.

Método de la Secante

La siguiente figura muestra la representación gráfica de la iteración de la Secante



Método de la Secante

Ejemplo

Considere la ecuación $e^{-x^2} = x$ y utilice el método de la secante para aproximar una solución de esta ecuación, con una tolerancia de $tol = 10^{-3}$ y valores iniciales de $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$.

Respuesta: Sea $f(x) = e^{-x^2} - x$. Entonces

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \left(\dfrac{x_k - x_{k-1}}{(e^{-x_k^2} - x_k) - (e^{-x_{k-1}^2} - x_{k-1})} \right) (e^{-x_k^2} - x_k) \\ x_1 = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Método de la Secante

Respuesta:

La siguiente tabla contempla las iteraciones realizadas:

k	x_k	$e_k = \dfrac{\lvert x_{k+1} - x_k \rvert}{\lvert x_{k+1} \rvert}$	¿$e_k \leqslant 10^{-2}$?
0	0	-	-
1	1	-	-
2	$0.612699\ldots$	$0.632120\ldots$	No
3	$0.653442\ldots$	$0.062350\ldots$	No
4	$0.652917\ldots$	$0.000804\ldots$	Si

Por lo tanto, la aproximación de la solución de la ecuación $e^{-x^2} = x$, con una tolerancia de 10^{-2}, es $0.652917\ldots$

Método de la Secante

Ejercicio

Usando el método iterativo de la Secante, determine una solución de la ecuación

$$e^{2x} - 10 = \ln\left(\frac{x}{2}\right),$$

con una tolerancia de 10^{-2} con $x_0 = 1$ y $x_1 = 1.2$.

Método de la Secante

El siguiente teorema explica las condiciones de convergencia para que el método de la Secante.

Convergencia de la iteración de la secante

Suponga que f es una función real, definida, continua y con primera derivada continua sobre un intervalo $I = [\xi - \delta, \xi + \delta]$, con $\delta > 0$. Suponga además que $f(\xi) = 0$ y $f'(\xi) \neq 0$, entonces la iteración (x_k) de la secante converge a ξ, para x_0 y x_1 suficientemente cercanos a ξ.

Demostración

No se considerará en este curso.

Método de la Posición Falsa

El *método de la posición falsa* o *método de regula falsi*, es un método iterativo de resolución numérica de ecuaciones no lineales. El método combina el método de bisección y el método de la secante con el fin de acelerar la convergencia.

Método de la Posición Falsa

Pasos del método de la posición falsa.

Consideramos una ecuación $f(x) = 0$ en un intervalo $[a, b]$.

Paso 1: Procedimiento inicial. Sea $x_0 = a$ y $x_1 = b$. Verificar que $f(x_0)f(x_1) < 0$ y calcular x_2 utilizando el método de la secante. Sea $a_2 = a$ y $b_2 = b$, donde $x_2 \in [a_2, b_2]$.

Para $k \geqslant 2$, aplicar los siguientes pasos:

Paso 2: Método de la Bisección. Como $x_k \in [a_k, b_k]$, entonces el intervalo se divide en dos sub-intervalos, $[a_k, x_k]$ y $[x_k, b_k]$. Se escoge el intervalo donde se garantice que existe un cero de la función f. Es decir,

- si $f(a_k)f(x_k) < 0$, entonces se escoge el intervalo $[a_k, x_k]$.
- si $f(x_k)f(b_k) < 0$, entonces se escoge el intervalo $[x_k, b_k]$.

Método de la Posición Falsa

Paso 3: Método de la Secante. Del intervalo seleccionado, se calcula x_{k+1} usando el método de la secante, donde

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - c_k}{f(x_k) - f(c_k)} f(x_k),$$

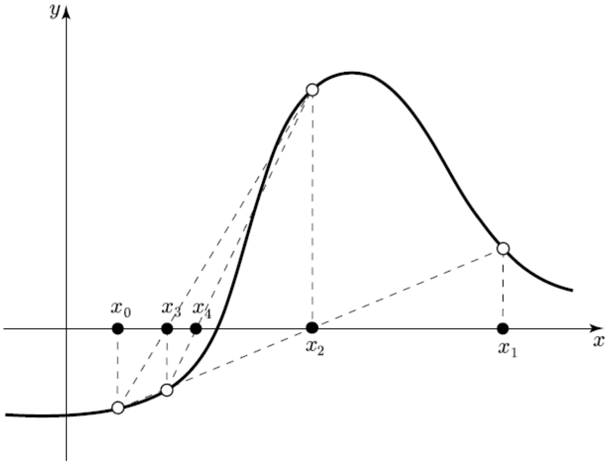
donde

$$c_k = \begin{cases} a_k & \text{si el intervalo seleccionado es } [a_k, x_k] \\ b_k & \text{si el intervalo seleccionado es } [x_k, b_k] \end{cases}$$

Luego se repite el proceso en el intervalo seleccionado y la iteración x_{k+1}.

Método de la Posición Falsa

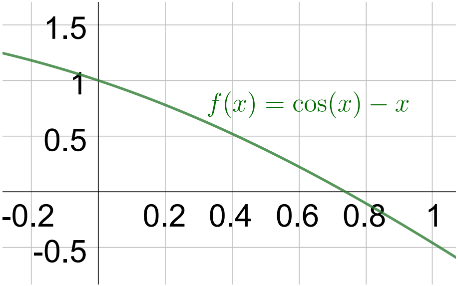
El método de la posición falsa se ilustra en la siguiente figura.



Método de la Posición Falsa

Ejemplo

Considere $\cos(x) = x$ y utilice el método de la posición falsa para aproximar una solución de esta ecuación, con una tolerancia de $tol = 10^{-3}$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$.



Método de la Posición Falsa

Respuesta: Sean $f(x) = \cos(x) - x$, $x_0 = \frac{1}{2}$ y $x_1 = \frac{\pi}{4}$. Entonces

P1. $x_2 = x_1 - \left(\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}\right) f(x_1) = 0.736384...$ y

$$e_2 = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| = 0.06656... \not< 10^{-3}.$$

Sea $x_2 \in [a_2, b_2] = \left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$. En este caso $f(x_2)f(b_2) < 0$, por lo tanto, ahora seleccionamos el intervalo $[x_2, b_2] = \left[0.736384..., \frac{\pi}{4}\right]$ y $c_2 = b_2$.

P2. $x_3 = x_2 - \left(\frac{x_2 - c_2}{f(x_2) - f(c_2)}\right) f(x_2) = 0.739058...$ y

$$e_3 = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| = 0.00361811... \not< 10^{-3}.$$

Sea $x_3 \in [a_3, b_3] = \left[0.736384..., \frac{\pi}{4}\right]$. En este caso $f(x_3)f(b_3) < 0$, por lo tanto, ahora seleccionamos el intervalo $[x_3, b_3] = \left[0.739058..., \frac{\pi}{4}\right]$ y $c_3 = b_3$.

Método de la Posición Falsa

P3. $x_4 = x_3 - \left(\frac{x_3 - x_1}{f(x_3) - f(x_1)}\right) f(x_3) = 0.739084$ y

$$e_4 = \left|\frac{x_4 - x_3}{x_4}\right| = 0.0000361590 < 10^{-3}.$$

En este caso, se cumple la tolerancia establecida. Por lo tanto, una aproximación a la solución de la ecuación $\cos(x) = x$, es dada por 0.739084.

Ejercicio

Continue el ejercicio anterior hasta que la aproximación satisfaga una tolerancia de 10^{-5}.

Método de la Posición Falsa

Ejercicio

Usando el método iterativo de la posición falsa, determine una solución de la ecuación

$$\cos(x) = \ln(x) - e^{-x},$$

con una tolerancia de 10^{-3} en el intervalo $[1, 2]$.

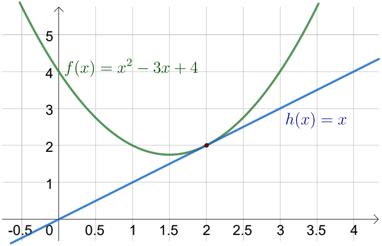
Método del Punto Fijo

Punto Fijo

Sea una función de variable real $f(x)$. Se dice que $\xi \in \mathbb{R}$ es una punto fijo de f si y solo si $f(\xi) = \xi$

Ejemplo

Sea $f(x) = x^2 - 3x + 4$; $x = 2$ es un punto fijo de la función $f(x)$ ya que $f(2) = 2$.



Observación: Note que si la ecuación $f(x) = x$ tiene solución en los números reales, entonces $f(x)$ tiene, al menos, un punto fijo.

Método del Punto Fijo

Una condición suficiente para garantizar la existencia de la solución de $f(x) = 0$, consiste en reescribir esta ecuación de la forma equivalente $x - \varphi(x) = 0$, donde φ es una función real, definida y continua sobre $[a, b]$. (La elección de φ y su relación con f será aclarada más adelante)

Luego, encontrar una solución $\xi \in [a, b]$ de $f(x) = 0$, es equivalente a encontrar una solución para $x - \varphi(x) = 0$.

Método del Punto Fijo: Existencia

El Teorema del Punto fijo de Brouwer garantiza la existencia de un punto fijo bajo unas condiciones dadas.

Teorema del punto fijo de Brouwer

Sea φ una función real, definida y continua sobre un intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ y $\varphi(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces existe ξ en $[a, b]$, tal que $\xi = \varphi(\xi)$.

Demostración

- **Caso 1**: $\varphi(a) = a$ y $\varphi(b) = b$.
  En este caso, φ tiene un punto fijo en los extremos.

Método del Punto Fijo: Existencia

Demostración (Continuación)

- **Caso 2**: $\varphi(a) \neq a$ ó $\varphi(b) \neq b$.
  Como $\varphi(x) \in [a,b]$, entonces $\varphi(a) > a$ y $\varphi(b) < b$. Como φ es continua en $[a,b]$, entonces $h(x) = \varphi(x) - x$ es continua en $[a,b]$, y por lo tanto

  $$h(a) = \varphi(a) - a > 0 \qquad \text{y} \qquad h(b) = \varphi(b) - b < 0.$$

  Por el teorema de Bolzano, entonces existe $\xi \in [a,b]$ tal que

  $$\begin{aligned} h(\xi) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \varphi(\xi) - \xi = 0 \\ &\Rightarrow \quad \varphi(\xi) = \xi \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe el punto fijo.

Método del Punto Fijo: Existencia

Ejemplo

Sea $\varphi(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Demuestre que φ tiene, al menos, un punto fijo en $[-1, 2.4]$.

Respuesta: Utilizando el Teorema de Brouwer, debemos probar que si $x \in [-1, 2.4]$, entonces $\varphi(x) \in [-1, 2.4]$. Para esto, basta con demostrar que el máximo y el mínimo de φ en $[-1, 2.4]$ toman valores entre $[-1, 2.4]$.

NOTA: Recordemos que para calcular los máximo y mínimo de una función continua en un intervalo, se deben evaluar los puntos críticos y los extremos del intervalo en dicha función.

Método del Punto Fijo: Existencia

- **Puntos Críticos:** Resolver $\varphi'(x) = 0$, es decir $3x^2 - 4x - 1 = 0$. Los puntos críticos son $\dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$, y ambos valores estan en $[-1, 2.4]$. Ahora $\varphi\left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right) = -0.63113...$ y $\varphi\left(\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right) = 2.11261....$
- **Extremos del intervalos:** En este caso son -1 y 2.4. Ahora, $\varphi(-1) = 0$ y $\varphi(2.4) = 1.904$

Entonces, el valor máximo que alcanza φ en $[-1, 2.4]$ es $2.11261...$ y el valor mínimo que alcanza φ en $[-1, 2.4]$ es $2.11261....$ Por lo tanto, podemos concluir que para todo $x \in [-1, 2.4]$, se cumple que $\varphi(x) \in [-1, 2.4]$. Por el teorema de Brouwer, se concluye que la función φ tiene, al menos un punto fijo en $[-1, 2.4]$.

Método del Punto Fijo: Existencia

Ejemplo

Dada la ecuación $e^x - 2x - 1 = 0$ para $x \in [1, 2]$, encuentre $\varphi(x)$ que cumpla las condiciones del teorema del punto fijo de Brouwer.

Respuesta: Una forma de reescribir la ecuación $e^x - 2x - 1 = 0$ de la forma equivalente $\varphi(x) = x$, con φ continua sobre $[1, 2]$, es

$$e^x - 2x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; e^x - 1 = 2x \;\Rightarrow\; x = \frac{e^x - 1}{2},$$

es decir, $\varphi(x) = \frac{1}{2}(e^x - 1)$.

Pero, $\varphi(1) \approx 0.8591 \notin [1, 2]$, y no cumplen las condiciones del teorema del punto fijo. Hay que considerar otra forma para $\varphi(x)$.

Método del Punto Fijo: Existencia

Realizando un despeje alternativo para x, dado por:

$$e^x - 2x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; e^x = 2x + 1 \;\Rightarrow\; x = \ln(2x + 1),$$

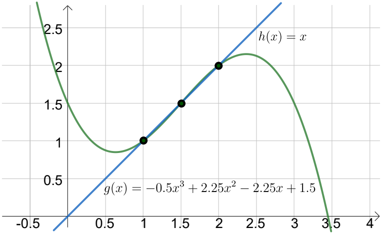
es decir $\varphi(x) = \ln(2x + 1)$, se tiene que $\varphi(1) \approx 1.0986 \in [1, 2]$ y $\varphi(2) \approx 1.6094 \in [1, 2]$.

Como $\varphi(x)$ es creciente, entonces se cumple que $\varphi(x) \in [1, 2]$ para todo $x \in [1, 2]$, y con ello se tiene la existencia de un punto fijo $\xi \in [1, 2]$ de φ, tal que $f(\xi) = 0$.

Método del Punto Fijo: Unicidad

Ejercicio

Consideremos la función la función $g(x) = -0.5x^3 + 2.25x^2 - 2.25x + 1.5$ en el intervalo $[0, 3]$.



Note que g tiene 3 puntos fijos en $x = 1$, $x = 1.5$ y $x = 2$. Aquí, el punto fijo no es única y cumple las condiciones del teorema de Brouwer.

Para que el método del punto fijo converja, se debe garantizar la existencia de **un único punto fijo** en un intervalo establecido.

Método del Punto Fijo: Unicidad

Para garantizar la convergencia de la iteración de punto fijo a un único punto fijo ξ, es necesaria el siguiente resultado.

Teorema de unicidad del punto fijo

Sea φ una función que cumple las condiciones del teorema de Brouwer. Si además $\varphi'(x)$ existe en $]a,b[$ y existe una constante positiva $L < 1$ tal que $|\varphi'(x)| \leqslant L$ para todo $x \in]a,b[$, entonces el punto fijo en $[a,b]$ es único.

Demostración

Realicemos la demostración por contradicción. Supongamos que $|\varphi'(x)| \leqslant L < 1$ y que p y q son puntos fijos en $[a,b]$ tal que $p \neq q$. Entonces $\varphi(p) = p$ y $\varphi(q) = q$.

Método del Punto Fijo: Unicidad

Demostración (Continuación)

Por el teorema del valor medio (**REPASAR**), existe $\xi \in]p, q[$ (y por lo tanto $\xi \in [a, b]$) tal que

$$\frac{\varphi(p) - \varphi(q)}{p - q} = \varphi'(\xi).$$

Por lo tanto,

$$|p - q| = |\varphi(p) - \varphi(q)| = |\varphi'(\xi)||p - q| \leqslant L|p - q| < |p - q|.$$

Lo que se concluye que $|p - q| < |p - q|$, lo cual es una contradicción. Entonces, lo que se asume es falso, es decir, $p = q$. Por lo tanto, el punto fijo en $[a, b]$ es único.

Método del Punto Fijo: Unicidad

Ejercicio

Considere la función $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$ en el intervalo $[-1, 1]$. Demuestre que g tiene un único punto fijo.

Solución

Es claro que g es una función real, definida y continua sobre $[-1, 1]$.

- Primero, hay que probar que existe el punto fijo. Para eso, debe cumplir las condiciones del teorema de Brouwer, es decir, $g(x) \in [-1, 1]$ para $x \in [-1, 1]$.

  Los extremos (máximos y mínimos) de g en $[-1, 1]$ se obtienen en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$, donde $g(-1) = g(1) = 0$ y $g(0) = -\frac{1}{3}$.

  Entonces, se concluye que $g(x) \in [-1, 1]$ para $x \in [-1, 1]$. Por lo tanto, existe al menos un punto fijo.

Método del Punto Fijo: Unicidad

Solución (Continuación)

- Segundo, hay que probar que es único. Es decir, que existe $0 < L < 1$ tal que $|g'(x)| \leqslant L$, para todo $x \in]-1, 1[$.

  Es claro que $g'(x) = \frac{2x}{3}$, el cual es creciente. Por lo tanto

$$\begin{aligned} g'(-1) \leqslant g'(x) \leqslant g'(1) \quad &\Rightarrow \quad -\frac{2}{3} \leqslant g'(x) \leqslant \frac{2}{3} \\ &\Rightarrow \quad |g'(x)| \leqslant \frac{2}{3} \end{aligned}$$

  Entonces $L = \frac{2}{3} < 1$. Por lo tanto, por teorema de unicidad, el punto fijo es único.

Método del Punto Fijo

Ejemplo

Considere la función

$$h(x) = \frac{(x-3)e^{x-2}+2}{2}.$$

Demuestre que h tiene un único punto fijo en el intervalo $\left[0, \frac{7}{3}\right]$.

Solución

Es claro que la función h es una función real, definida y continua en el intervalo $\left[0, \frac{7}{3}\right]$.

- Primero, hay que probar la existencia del punto fijo. Utilizando el Teorema de Brouwer, debemos probar que si $x \in \left[0, \frac{7}{3}\right]$, entonces $g(x) \in \left[0, \frac{7}{3}\right]$.

Método del Punto Fijo

Ejemplo (Continuación)

Basta con probar que el máximo y mínimo de g en el intervalo $\left[0, \frac{7}{3}\right]$ están dentro del mismo intervalo $\left[0, \frac{7}{3}\right]$. Para eso, primero calculamos los puntos críticos, es decir, resolver la ecuación

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^{x-2}(x-2)}{2} = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Luego, evaluamos el punto crítico $x = 2$ y los extremos del intervalo $x = 0$ y $x = \frac{7}{3}$, para determinar los valores extremos:

- $g(0) = 0.797...$ (Máximo)
- $g(2) = 0.5$ (Mínimo)
- $g(7/3) = 0.535...$

Entonces, es claro que si $x \in \left[0, \frac{7}{3}\right]$, entonces $g(x) \in \left[0, \frac{7}{3}\right]$. Por lo tanto, el punto fijo existe.

Método del Punto Fijo

Ejemplo (Continuación)

- Segundo, hay que probar que el punto fijo es único. Es decir, hay que probar que si $x \in \left[0, \frac{7}{3}\right]$, entonces $|g'(x)| \leqslant L$, donde $0 < L < 1$. Es decir, hay que demostrar que los valores extremos de g' están en intervalo $]-1, 1[$.
  Primero calculamos los puntos críticos de g' resolviendo la ecuación

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^{x-2}(x-1)}{2} = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Método del Punto Fijo

Ejemplo (Continuación)

Luego, evaluamos el punto crítico $x = 1$ y los extremos del intervalo $x = 0$ y $x = \frac{7}{3}$, para determinar los valores extremos de g':

- $g'(0) = -0.135...$
- $g'(1) = -0.184...$ (Mínimo)
- $g'(7/3) = 0.233...$ (Máximo)

Es claro que

$$\begin{aligned} -0.184... \leqslant g'(x) \leqslant 0.233... \quad &\Rightarrow \quad -0.233 \leqslant g'(x) \leqslant 0.233... \\ &\Rightarrow \quad |g'(x)| < 0.233... \end{aligned}$$

Sea $L = 0.233...$, donde es claro que $0 < L < 1$. Por lo tanto, el punto fijo es único.

En resumen, existe el punto fijo de g en $x \in \left[0, \frac{7}{3}\right]$ y además es único.

Método del Punto Fijo: Unicidad

Ejercicio

Considere la función $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2x}$.

1. Demuestre la existencia de puntos fijos de $\varphi(x)$ en $[3,4]$.
2. Demuestre que $\varphi(x)$ tiene un único punto fijo $[3,4]$.

Método del Punto Fijo

El método iterativo del punto fijo se define de la siguiente manera:

Método del punto fijo

Suponga que φ es una función real, definida y continua sobre $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ y $\varphi(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$. Dado un valor cualquiera $x_0 \in [a, b]$, se define la iteración por recursión

$$x_{k+1} \;=\; \varphi(x_k), \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

conocida como el **método iterativo del punto fijo**.

Método del Punto Fijo

Ejemplo

Considere la ecuación $x = \operatorname{sen}(x)$ y determine x_5, donde (x_k) es la iteración de punto fijo y el valor inicial corresponde a $x_0 = 2$.

Respuesta: Considerando $\varphi(x) = \operatorname{sen}(x)$, se tiene que:

$$
\begin{array}{lcl}
x_0 & = & 2, \\
x_1 & = & \varphi(x_0) \; = \; \operatorname{sen}(2) \; \approx \; 0.9092974268, \\
x_2 & = & \varphi(x_1) \; = \; \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2)) \; \approx \; 0.7890723436, \\
x_3 & = & \varphi(x_2) \; = \; \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2))) \; \approx \; 0.7097000402, \\
x_4 & = & \varphi(x_3) \; = \; \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2)))) \; \approx \; 0.6516062636, \\
x_5 & = & \varphi(x_4) \; = \; \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2))))) \; \approx \; 0.6064643449.
\end{array}
$$

Método del Punto Fijo

Suponiendo que la iteración $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge, esta debe converger a un punto fijo ξ de φ:

$$\xi \;=\; \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} \;=\; \underbrace{\lim_{k\to+\infty} \varphi(x_k) \;=\; \varphi\left(\lim_{k\to+\infty} x_k\right)}_{(*)} \;=\; \varphi(\xi).$$

(la igualdad $(*)$ es consecuencia de la continuidad de φ).

Método del Punto Fijo

El siguiente teorema muestra las condiciones para que el método del punto fijo converja.

Teorema del método del punto fijo

Sea φ una función que cumple las condiciones del teorema de Brouwer. Además, $\varphi'(x)$ existe en $]a, b[$ y existe una constante positiva $L < 1$ tal que $|\varphi'(x)| \leqslant L$ para todo $x \in]a, b[$.

Entonces, para cualquier número $x_0 \in [a, b]$, la sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ definida por

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

converge al único punto fijo $\xi \in [a, b]$.

Método del Punto Fijo

Demostración

Por el teorema de unicidad, φ tiene un único punto fijo $\xi \in [a, b]$. Basta probar que

$$\lim_{k\to\infty} |x_k - \xi| = 0.$$

Puesto que φ transforma $[a, b]$ en sí mismo, entonces la sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ se define para toda $k \geqslant 0$ y $x_k \in [a, b]$ para toda k.

Por hipótesis, se tiene que $|\varphi'(x)| \leqslant L < 1$. Por lo tanto, aplicando el teorema del valor intermedio ($c_k \in]a, b[$), obtenemos que para cada k

$$\begin{aligned} |x_k - \xi| &= |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\xi)| \\ &= |\varphi'(c_k)||x_{k-1} - \xi| \\ &\leqslant L|x_{k-1} - \xi| \end{aligned}$$

Método del Punto Fijo

Demostración (Continuación)

Al aplicar la desigualdad anterior varias veces, se obtiene

$$\begin{aligned} |x_k - \xi| &\leqslant L|x_{k-1} - \xi| \\ &\leqslant L^2|x_{k-2} - \xi| \\ &\vdots \\ &\leqslant L^k|x_0 - \xi| \end{aligned}$$

Puesto que $0 < L < 1$, entonces $\lim_{k\to\infty} L^k = 0$. Entonces

$$0 \leqslant \lim_{k\to\infty} |x_k - \xi| \leqslant \lim_{k\to\infty} L^k|x_0 - \xi| = 0.$$

Por lo tanto $\lim_{k\to\infty} |x_k - \xi| = 0$ y la sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ converge al único punto fijo $\xi \in [a, b]$.

Método del Punto Fijo

Ejemplo

En un ejemplo anterior se obtuvo la función $\varphi(x) = \ln(2x+1)$, para $e^x - 2x - 1 = 0$ sobre $[1,2]$. Muestre que φ una tiene un único punto fijo en $[1,2]$ y por lo tanto la iteración de punto fijo converge para cualquier $x_0 \in [1,2]$.

Respuesta: Nótese que $\varphi'(x) = \frac{2}{2x+1}$ y $\varphi''(x) = \dfrac{-4}{(2x+1)^2}$. Como $\varphi''(x) < 0$ para todo $x \in [1,2]$, entonces φ' es decreciente sobre $[1,2]$.

Luego, se puede apreciar que $\varphi'(2) \leqslant \varphi'(x) \leqslant \varphi'(1)$, con lo que $\varphi'(x) \in \left[\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right]$ para todo $x \in [1,2]$.

Entonces $\varphi'(x) \leqslant \frac{2}{3} < 1$ para todo $x \in [1,2]$. Por el teorema anterior, el método del punto fijo converge para $\varphi(x) = \ln(2x+1)$ en $[1,2]$, con $L = \frac{2}{3}$.

Método del Punto Fijo

El siguiente resultado propone dos cotas del error absoluto para el método del punto fijo.

Teorema

Si φ satisface las hipótesis del teorema dé método del punto fijo, entonces dos cotas del error de dicho método están dadas por

$$|x_k - \xi| \leqslant L^k \max\{x_0 - a, b - x_0\} \quad \text{ó} \quad |x_k - \xi| \leqslant \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|.$$

Demostración

Ejercicio.

Nota: Cuando más pequeño sea el valor de L, más rápida será la convergencia del método, la cual puede ser muy lenta si L está cerca de 1.

Método del Punto Fijo

El siguiente resultado determina el número de iteraciones máximas del método del punto fijo, dada una tolerancia $tol > 0$.

Corolario

Sea φ una función que satisface las hipótesis del teorema dé método del punto fijo. Dado $x_0 \in [a, b]$ y una tolerancia $tol > 0$, entonces el número de iteraciones máximas de dicho método puede ser considerado como:

$$iterMax = \left\lfloor \log_L \left(\frac{tol}{\max\{x_0 - a, b - x_0\}} \right) \right\rfloor + 1$$

ó

$$iterMax = \left\lfloor \log_L \left(\frac{(1-L)tol}{|x_1 - x_0|} \right) \right\rfloor + 1.$$

Demostración

Ejercicio.

Método del Punto Fijo

Ejercicio

Considere la ecuación $-\cos\left(\frac{x}{2}+1\right)+\frac{5}{2}x=0$ en el intervalo $[-1,1]$.

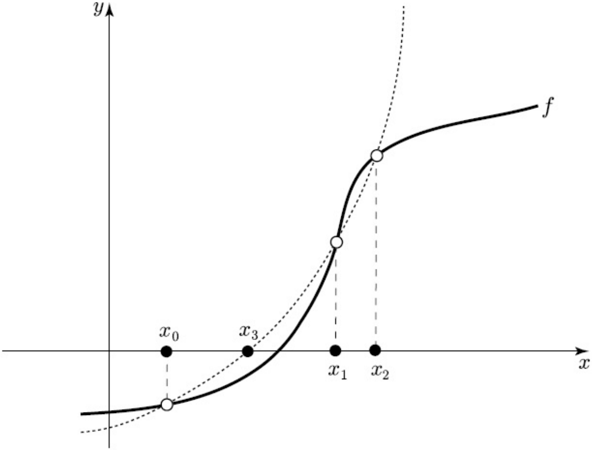
1. Re-escriba la ecuación anterior en la forma $\varphi(x)=x$, de tal manera que la función $\varphi(x)$ garantice la existencia de un único punto fijo en $[-1,1]$.
2. Utilizando el punto anterior, aplique el método iterativo del punto fijo para obtener una aproximación a la solución de la ecuación, con una tolerancia de 10^{-2} y $x_0=0.15$.
3. Determine el número de iteraciones máximas del método iterativo del punto fijo con una tolerancia 10^{-10} y utilizando como valor inicial $x_0=0.15$. (Usar el L obtenido del punto ❶)

Método de Müller

El método de Müller calcula las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $[a, b]$, de manera semejante al método de la secante, de hecho es conocido como una extensión del mismo.

El método de Müller considera tres aproximaciones iniciales x_0, x_1, x_2 y luego se construye la cuarta aproximación, como la intersección con el eje x de la parábola que pasa por lo puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.

Método de Müller



Método de Müller

Sin pérdida de generalidad, suponga que la aproximación x_2 es la que está más cerca de la solución ξ de $f(x) = 0$.

De esta forma, se puede considerar la forma de la parábola dada por:

$$p(x) \;=\; a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c,$$

donde la siguiente aproximación x_3 satisface que $p(x_3) = 0$.

Método de Müller

Como $p(x_0) = f(x_0)$, $p(x_1) = f(x_1)$ y $p(x_2) = f(x_2)$, entonces las constantes a, b y c pueden ser determinadas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} f(x_0) &= a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c, \\ f(x_1) &= a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c, \\ f(x_2) &= c, \end{cases}$$

cuya solución es dada por:

$$\begin{cases} c &= f(x_2), \\ b &= \dfrac{(x_0 - x_2)^2[f(x_1) - f(x_2)] - (x_1 - x_2)^2[f(x_0) - f(x_2)]}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)}, \\ a &= \dfrac{(x_1 - x_2)[f(x_0) - f(x_2)] - (x_0 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)}. \end{cases}$$

Método de Müller

Luego, una raíz r de $p(x)$ está dado por la fórmula cuadrática racionalizada (*Recordar Errores calculo en Aritmética de Presición Finita*)

$$r = x_2 - \frac{2c}{b + \mathsf{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Así, si r es solución de la ecuación, o si r está muy cercano a x_2, el método se detiene.

En caso contrario, r es uno de los tres puntos a considerar en el siguiente paso y los otros dos puntos serán los mas cercanos a r entre x_0, x_1 y x_2 (r debe **NO NECESARIAMENTE** debe estar en el medio de los otros dos puntos).

Método de Müller

Ejemplo

Considere la función $f(x) = \sin(x) - \dfrac{x}{2}$. Utilizando el método de Müller con $x_0 = 2$, $x_1 = 2.2$ y $x_2 = 1.8$, realice dos iteraciones para calcular una aproximación de un cero de dicha f.

Respuesta:

Iteración 1: Dados los puntos $x_0 = 2$, $x_1 = 2.2$ y $x_2 = 1.8$, entonces

- $f(x_0) = -0.0907025732$
- $f(x_1) = -0.2915035962$
- $f(x_2) = 0.0738476309$

Método de Müller

Ahora se debe determinar el valor del polinomio $p_1(x)$, es decir, las constantes a_1, b_1 y c_1, tal que:

$$p_1(x) = a_1(x-1.8)^2 + b_1(x-1.8) + c_1,$$

Evaluando los puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ en el polinomio $p_1(x)$ se obtiene el sistema

$$\begin{cases} -0.0907025732 = a_1(2-1.8)^2 + b_1(2-1.8) + c_1, \\ -0.2915035962 = a_1(2.2-1.8)^2 + b_1(2.2-1.8) + c_1, \\ 0.0738476309 = c_1, \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son:

- $a_1 = -0.4531352363$
- $b_1 = -0.7321239733$
- $c_1 = 0.0738476309$

Método de Müller

Luego, con esas constantes se aproxima el cero del polinomio: x_3. Entonces

$$r_1 = x_2 - \frac{2c_1}{b_1 + \mathsf{sgn}(b_1)\sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}} = 1.895252107$$

Ahora se repite el proceso con los puntos $x_1 = 2.2$, $x_2 = 1.8$ y $x_3 = 1.895252107$.

Iteración 2: Dados los puntos $x_0 = 2$, $x_1 = 1.8$ y $x_2 = 1.895252107$ entonces

- $f(x_0) = -0.0907025732$
- $f(x_1) = 0.0738476309$
- $f(x_2) = 0.0001983067$

Método de Müller

Ahora se debe determinar el valor del polinomio $p_2(x)$, es decir, las constantes a_2, ${}_2b$ y c_2, tal que:

$$p_2(x) \;=\; a_2(x-1.895252107)^2 + b_2(x-1.895252107) + c_2,$$

Evaluando los puntos $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ y $(x_3, f(x_3))$ en el polinomio $p_2(x)$ se obtiene el sistema

$$\begin{cases} -0.0907025732 &= a_2(2-1.895...)^2 + b_2(2-1.895...) + c_2, \\ 0.0738476309 &= a_2(1.8-1.895...)^2 + b_2(1.8-1.895...) + c_2, \\ 0.0001983067 &= c_2, \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son:

- $a_2 = -0.474111419$
- $b_2 = -0.8183647091$
- $c_2 = 0.0001983067$

Método de Müller

Luego, con esas constantes se aproxima el cero del polinomio. Entonces

$$r_2 = x_2 - \frac{2c_2}{b_2 + \mathsf{sgn}(b_2)\sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}} = 1.895494394$$

Por lo tanto, la aproximación al cero de la funcion $f(x) = \sin(x) - \frac{x}{2}$ es $\xi_0 = 1.895494394$.

Ahora, el valor exacto es $\xi = 1.895494267$. Entonces el error relativo de la aproximación ξ_0 es:

$$e_2 = \frac{|\xi - \xi_0|}{|\xi|} = 6.7 \times 10^{-8}$$

Método de Müller

Ejemplo

Considere la función $f(x) = (1+x)\sin(x) - 1$. Utilizando el método de Müller con $x_0 = 2.9$, $x_1 = 3$ y $x_2 = 2.8$, realice dos iteraciones para calcular una aproximación de un cero de dicha f.

Ejemplo

Tubería circular trabajando como canal:

Considere la siguiente representación gráfica de una tubería:

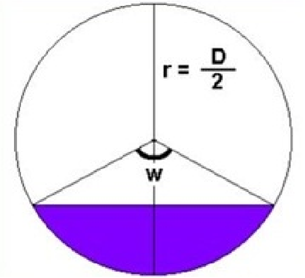


Figura: Área hidráulica representada dentro de una tubería circular

Ejemplo

El área sombreada se conoce como **área de flujo** y es representada por la fórmula

$$A = \frac{D^2}{8}(w - \sin(w)),$$

donde D es el diámetro y w es el ángulo central.

Aproxime el valor del ángulo central en el caso que el área de flujo sea $10cm^2$ y cuyo diámetro es $D = 4$, realizando una iteración del método de Müller con $x_0 = 4.1$, $x_1 = 4.2$ y $x_2 = 4.15$.

Ejercicio Aplicado

Ejercicio

En ingeniería civil se trabaja constantemente con los desplazamientos de estructuras, los cuales están determinados por oscilaciones amortiguadas. Así, para una estructura, la función que describe el desplazamiento está dada por

$$d(t) = Ae^{-\frac{bt}{2m}} \cos(\omega t + \phi), \text{ con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}},$$

donde ω es la frecuencia angular de la osilación, t representa al tiempo y A, b, m y k son constantes dadas. (Continua...)

Ejercicio Aplicado

Ejercicio (Continuación)

Ahora, la función que describe el desplazamiento de una estructura en específico es dada por $d(t) = 10e^{-0.45t}\cos(2t)$.

Determine el valor del tiempo cuando el desplazamiento de la estructura es igual a 8 ul, utilizando 5 iteraciones del método de:

- la Bisección en el intervalo $[0.2, 0.3]$.
- Newton-Raphson con $x_0 = 0.3$.
- la Secante con $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.3$.
- la Posición Falsa en el intervalo $[0.2, 0.3]$.
- Müller en el intervalo $[0.2, 0.3]$.

Si se sabe que la solución exacta es $t = 0.2367820108317...$, determine cual método iterativo fue más eficiente.

Lista de Ejercicios

1. Del libro Métodos numéricos para ingenieros, Quinta Edición, realizar los siguientes ejercicios:
   - Página 139, los ejercicios 5.2, 5.4, 5.5, 5.7, 5.8, 5.9, 5.13, 5.15, 5.16, 5.18, 5.19. 5.20. 5.21, 5.22.
   - Página 167, los ejercicios 6.1, 6.3, 6.4, 6.5, 6.7, 6.10, 6.15, 6.16, 6.17, 6.18, 6.19, 6.20, 6.21, 6.23, 6.26.
   - Página 197, los ejercicios 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.6
   - Página 216, los ejercicios 8.28, 8.29, 8.30, 8.31, 8.32
2. Del libro Métodos Numéricos con MATLAB, Tercera Edición, realizar los siguientes ejercicios:
   - Página 55, los ejercicios 1, 2, 3.
   - Página 67, los ejercicios 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11.
   - Página 93, los ejercicios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 22 13, 23.