Solución de Sistemas de Ecuaciones
Métodos Iterativos - Parte 1

Ingeniería en Computadores
Instituto Tecnológico de Costa Rica

CE-3102: Análisis Numéricos para Ingeniería

Juan Pablo Soto Quirós
jusoto@tec.ac.cr

1. Introducción
2. Preliminares
3. Métodos Iterativos
   - Iteración de Jacobi
   - Iteración de Gauss-Seidel

Introducción

Como se explico en anteriormente, los métodos para resolver los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar en dos grupos:

- **Métodos Directos:** Estos métodos dan la solución exacta a un sistema de ecuaciones lineales. Algunos ejemplos son eliminación Gaussiana (con pivoteo) y factorización LU. (**Ya vistos en clases**)
- **Métodos Iterativos:** Estos métodos aproximan la solución de un sistema de ecuaciones lineales utilizando algún método iterativo. Algunos ejemplos son los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel, SOR, método del punto fijo y gradiente conjugado.

A continuación se explicarán dos de los métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Normas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio vectorial de entradas reales de dimensión n.

Norma en $\mathbb{R}^n$

Una norma en $\mathbb{R}^n$ se define como una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que para todo $v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple

- $\|v\| \geqslant 0$
- $\|v\| = 0$ si y solo si $v = (0, 0, ..., 0)^T$.
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
- $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$

Normas en $\mathbb{R}^n$

Sea $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Tres normas en $\mathbb{R}^n$ que se utilizarán en este curso son:

- **Norma** 1:
$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |x_1| + |x_2| + ...|x_n|$$
- **Norma** 2:
$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2}$$
- **Norma** ∞:
$$\|x\|_\infty = \max_{k=1,...,n} |x_k|$$

Normas en $\mathbb{R}^n$

Ejemplo

Sea $x = (1, -3, 10, -15, 7)^T \in \mathbb{R}^5$. Entonces:

- **Norma** 1:

$$\|x\|_1 = |1| + |-3| + |10| + |-15| + |7| = 36$$

- **Norma** 2:

$$\|x\|_2 = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (10)^2 + (-15)^2 + (7)^2} = \sqrt{384} \approx 19.5959...$$

- **Norma** ∞:

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1,\ldots,5} |x_k| = |-15| = 15$$

Normas en $\mathbb{R}^{m\times n}$

Sea $\mathbb{R}^{m\times n}$ el espacio matrices de entradas reales con m filas y n columnas.

Norma en $\mathbb{R}^{m\times n}$

Una norma en $\mathbb{R}^{m\times n}$ se define como una función $||\cdot||:\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$ tal que para todo $A, B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ y $\alpha\in\mathbb{R}$ se cumple

- $||A||\geqslant 0$
- $||A|| = 0$ si y solo si $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$.
- $||\alpha A|| = |\alpha|\cdot||A||$
- $||A+B||\leqslant||A||+||B||$

Normas en $\mathbb{R}^{m\times n}$

Un ejemplo de norma matricial es la norma de Frobenius:

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(A_{i,j})^2}$$

Ejemplo

Calcular la norma de Frobenius de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} &||A||_F \\ &= \sqrt{(1)^2+(2)^2+(3)^2+(4)^2+(5)^2+(6)^2+(1)^2+(2)^2+(1)^2+(0)^2+(1)^2+(2)^2} \\ &= \sqrt{102} \approx 10.0995... \end{aligned}$$

Normas en $\mathbb{R}^{m\times n}$

Norma Inducida

Sea $||\cdot||$ una norma vectorial en $\mathbb{R}^n$. Entonces $||\cdot|| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ definida por

$$||A|| = \max_{x\in\mathbb{R}^n-\{0\}} \frac{||Ax||}{||x||}$$

es una norma matricial. Esta norma es conocida como **norma inducida**.

Normas en $\mathbb{R}^{m\times n}$

Dependiendo de la norma vectorial utilizada, se puede obtener una fórmula explícita para ellas. Algunos ejemplos de normas inducidas por una norma vectorial son:

- **Norma inducida por $||\cdot||_\infty$:**

$$||A||_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

  Es decir,la máxima suma de los valores absolutos de sus filas.

- **Norma inducida por $||\cdot||_1$:**

$$||A||_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

  Es decir,la máxima suma de los valores absolutos de sus columnas.

Normas en $\mathbb{R}^{m\times n}$

Ejemplo

Sea $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

- La máxima suma en valor absoluto de las filas se obtiene en la fila 2, cuyo resultado es 8. Entonces $||B||_\infty = 8$.
- La máxima suma en valor absoluto de las columnas se obtiene en la columna 3, cuyo resultado es 10. Entonces $||B||_\infty = 10$.

Métodos Iterativos

Dado el sistema lineal $Ax = b$, considere la matriz del sistema como la diferencia de dos nuevas matrices, es decir

$$A = M - N,$$

donde M es invertible. Entonces sustituyendo esta descomposición en el sistema se obtiene:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ (M-N)x &= b \\ Mx &= Nx + b \\ x &= M^{-1}Nx + M^{-1}b \end{aligned}$$

Métodos Iterativos

A partir de la descomposición $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$ se obtiene el siguiente teorema que define un método iterativo para aproximar la solución de un sistema lineal.

Teorema 1

Sean $A, M, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $A = M - N$, con A y M matrices y $b \in \mathbb{R}^n$. Entonces si $\|M^{-1}N\|_\infty < 1$, el método iterativo definido por

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b, \\ x^{(0)} \end{cases}$$

converge hacia la solución del sistema lineal $Ax = b$, para cualquier valor inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Demostración

No se considerará en este curso.

Métodos Iterativos

Dos criterios de parada para este método iterativo son:

- **Error Relativo**:

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} < tol,$$

- **Error Absoluto**:

$$\|b - Ax^{(k)}\| < tol,$$

donde $tol \in \mathbb{R}^+$ es una tolerancia dada.

Nota 1: Si no se indica cual norma de vectores hay que utilizar, entonces siempre se utilizará la **norma infinito**.

Nota 2: Si no se indica cual error utilizar, entonces siempre se utilizará **el error absoluto**.

Métodos Iterativos

Dependiendo de la elección del M y N se definen los métodos iterativos. Algunas elecciones para M son dadas en las siguientes secciones, considerando la descomposición:

$$A = L + D + U,$$

donde L y D son las matrices formadas por la parte estrictamente triangular inferior y superior de A, respectivamente; mientras que D es la matriz formada por la diagonal principal.

Métodos Iterativos

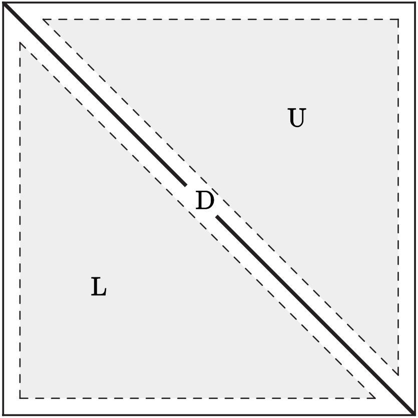

Figura: Descomposición $A = L + D + U$

Métodos Iterativos

Ejemplo

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$. Entonces: $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 10 & 0 & 0 \\ 13 & 14 & 15 & 0 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Métodos Iterativos: Iteración de Jacobi

Sea $Ax = b$ y $A = L + D + U$. La **iteración de Jacobi** o **método de Jacobi** se obtiene al elegir

$$M = D \qquad \text{y} \qquad N = -(L + U).$$

Entonces:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b \\ x^{(0)} \end{cases}$$

Por el Teorema 1 visto anteriormente, el método converge para cualquier $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ si $\|D^{-1}(L+U)\|_\infty < 1$.

Métodos Iterativos: Iteración de Jacobi

Ejemplo

Utilizando la iteración de Jacobi, determine la aproximación $x^{(5)}$, del sistema

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 7, \end{cases}$$

con valor inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

Métodos Iterativos: Iteración de Jacobi

Solución:

Para el sistema dado por $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$.

De la matriz de coeficiente A se obtiene:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Métodos Iterativo: Iteración de Jacobi

Por lo tanto, se define el método de Jacobi de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b \\ x^{(0)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Métodos Iterativos: Iteración de Jacobi

Del método iterativo se obtiene:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.4 \\ 1.4 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

Métodos Iterativos: Iteración de Jacobi

De forma similar se obtiene:

- $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.84 \\ 0.84 \\ 0.84 \end{pmatrix}$
- $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.064 \\ 1.064 \\ 1.064 \end{pmatrix}$
- $x^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.9744 \\ 0.9744 \\ 0.9744 \end{pmatrix}$
- $x^{(5)} = \begin{pmatrix} 1.01024 \\ 1.01024 \\ 1.01024 \end{pmatrix}$

Métodos Iterativos: Iteración de Jacobi

Por lo tanto se tiene una aproximación

$$x^{(5)} = (1.01024, 1.01024, 1.01024)^T.$$

Sabiendo que la solución del sistema es $x = (1, 1, 1)^T$, el error relativo de la aproximación usando la norma 2 es

$$\frac{\|x - x^{(5)}\|_2}{\|x\|_2} = 0.01024$$

y el error absoluto de la aproximación es

$$\|b - Ax^{(5)}\|_2 = 0.1241534.$$

Métodos Iterativos: Iteración de Jacobi

Para efectos de implementación, se puede obtener un método iterativo que no necesite el realizar el producto de matrices y vectores. Para eso, considere como ejemplo el siguiente sistema 4×4:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{2,1} \cdot x_2 + a_{3,1} \cdot x_3 + a_{4,1} \cdot x_4 & = & b_1 \\ a_{1,2} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + a_{3,2} \cdot x_3 + a_{4,2} \cdot x_4 & = & b_2 \\ a_{1,3} \cdot x_1 + a_{2,3} \cdot x_2 + a_{3,3} \cdot x_3 + a_{4,3} \cdot x_4 & = & b_3 \\ a_{1,4} \cdot x_1 + a_{2,4} \cdot x_2 + a_{3,4} \cdot x_3 + a_{4,4} \cdot x_4 & = & b_4 \end{array}\right.$$

donde $a_{i,j}$ y b_i son número reales, y x_i son variables, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Métodos Iterativos: Iteración de Jacobi

Otra forma de ver la iteración de Jacobi consiste en despejar los términos de la diagonal del lado derecho, es decir,

$$\begin{cases} x_1 & = & \dfrac{b_1 - a_{1,2}\cdot x_2 - a_{1,3}\cdot x_3 - a_{1,4}\cdot x_4}{a_{1,1}} \\ x_2 & = & \dfrac{b_2 - a_{2,1}\cdot x_1 - a_{2,3}\cdot x_3 - a_{2,4}\cdot x_4}{a_{2,2}} \\ x_3 & = & \dfrac{b_3 - a_{3,1}\cdot x_1 - a_{3,2}\cdot x_2 - a_{3,4}\cdot x_4}{a_{3,3}} \\ x_4 & = & \dfrac{b_4 - a_{4,1}\cdot x_1 - a_{4,2}\cdot x_2 - a_{4,3}\cdot x_3}{a_{4,4}} \end{cases}$$

Métodos Iterativos: Iteración de Jacobi

De esta manera, la iteración de Jacobi se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = & \dfrac{b_1 - a_{1,2}\cdot x_2^{(k)} - a_{1,3}\cdot x_3^{(k)} - a_{1,4}\cdot x_4^{(k)}}{a_{1,1}} \\ x_2^{(k+1)} & = & \dfrac{b_2 - a_{2,1}\cdot x_1^{(k)} - a_{2,3}\cdot x_3^{(k)} - a_{2,4}\cdot x_4^{(k)}}{a_{2,2}} \\ x_3^{(k+1)} & = & \dfrac{b_3 - a_{3,1}\cdot x_1^{(k)} - a_{3,2}\cdot x_2^{(k)} - a_{3,4}\cdot x_4^{(k)}}{a_{3,3}} \\ x_4^{(k+1)} & = & \dfrac{b_4 - a_{4,1}\cdot x_1^{(k)} - a_{4,2}\cdot x_2^{(k)} - a_{4,3}\cdot x_3^{(k)}}{a_{4,4}} \end{cases}$$

Métodos Iterativos: Iteración de Jacobi

Ejemplo

Considere el ejemplo anterior, es decir el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 & = & 7 \\ x_1 + 5x_2 + \ \ x_3 & = & 7 \\ x_1 + \ \ x_2 + 5x_3 & = & 7 \end{array} \right. .$$

El método iterativo de Jacobi se define como

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & \dfrac{7 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{5} \\ x_2^{(k+1)} & = & \dfrac{7 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}}{5} \\ x_3^{(k+1)} & = & \dfrac{7 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)}}{5} \end{array} \right.$$

y da los mismos resultados del ejemplo anterior con $x^{(0)} = (0,0,0)^T$.

Métodos Iterativos: Iteración de Jacobi

Matriz Diagonalmente Dominante

Nota: Una matriz es estrictamente dominante cuando, para todas las filas, el valor absoluto del elemento de la diagonal de esa fila es estrictamente mayor que la suma de los valores absolutos del resto de elementos de esa fila. Es decir

$$|A_{i,i}| \; > \; \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |A_{i,j}|, \;\; i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

El siguiente teorema explica la convergencia del método de Jacobi.

Teorema

Sea A una matriz estrictamente diagonal dominante de tamaño $n \times n$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Entonces la iteración de Jacobi converge hacia la solución del sistema $Ax = b$ para cualquier valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Métodos Iterativos: Iteración de Jacobi

Demostración

De acuerdo al teorema 1, es suficiente con probar que $\|\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\|_\infty < 1$. Para ello, nótese que $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$, es decir,

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{-a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \frac{-a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Métodos Iterativos: Iteración de Jacobi

Demostración (Continuación)

De esta forma, para todo $i = 1, \ldots, n$ se tiene que:

$$\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,$$

luego, como $\mathbf{A}$ es estrictamente diagonal dominante, se cumple que

$$\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N})_{ij} = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < \frac{1}{|a_{ii}|} \cdot |a_{ii}| < 1, \quad \text{para } i = 1, \ldots, n.$$

Por lo tanto, $|||\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}|||_{\infty} < 1$, de donde se concluye que la iteración de Jacobi converge para cualquier $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. ∎

Métodos Iterativos: Iteración de Jacobi

Ejemplo

Considere el sistema $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El método iterativo de Jacobi aplicado al sistema anterior converge utilizando el método de Jacobi, para cualquier valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y cualquier $b \in \mathbb{R}^n$, ya que la matriz A es una matriz estrictamente diagonal dominante.

Métodos Iterativos: Iteración de Jacobi

Si el sistema $Ax = b$ no cumple que A es estrictamente diagonal dominate, entonces, **en algunos casos**, se puede reescribir el sistema de tal manera que la matriz de coeficientes sea estrictamente diagonal dominate, haciendo un intercambio de filas.

Ejercicio

Considere el sistema $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 3 \\ 10 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Considerando las condiciones necesarias, aplique el método de Jacobi al sistema anterior de tal manera que este converja, con 5 iteraciones y $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$. Calcule el error relativo.

Métodos Iterativos: Iteración de Gauss-Seidel

Sea $Ax = b$ y $A = L + D + U$. La **iteración de Gauss-Seidel** o **método de Gauss-Seidel** posee dos variantes:

- **Gauss-Seidel hacia adelante:** $M = L + D$ y $N = -U$.
- **Gauss-Seidel hacia atrás:** $M = D + U$ y $N = -L$.

Entonces:

G-S hacia adelante: $\begin{cases} x^{(k+1)} = -(L+D)^{-1}Ux^{(k)} + (L+D)^{-1}b \\ x^{(0)} \end{cases}$

G-S hacia atrás: $\begin{cases} x^{(k+1)} = -(D+U)^{-1}Lx^{(k)} + (D+U)^{-1}b \\ x^{(0)} \end{cases}$

Cada una de las variantes converge para cualquier $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ si $\|(L+D)^{-1}U\|_\infty < 1$ y $\|(D+U)^{-1}L\|_\infty < 1$, respectivamente.

Métodos Iterativos: Iteración de Gauss-Seidel

Ejemplo

Utilizando la iteración de Gauss-Seidel hacia adelante, plantee el sistema iterativo del sistema

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 7, \end{cases}$$

con valor inicial $x^{(0)}$.

Métodos Iterativos: Iteración de Gauss-Seidel

Solución:

Para el sistema dado por $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$.

De la matriz de coeficiente A se obtiene:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Métodos Iterativos: Iteración de Gauss-Seidel

Por lo tanto, se define el método de Gauss-Seidel de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = -(L+D)^{-1}Ux^{(k)} + (L+D)^{-1}b \\ x^{(0)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{25} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{-4}{125} & \frac{-1}{25} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{25} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{-4}{125} & \frac{-1}{25} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} \end{cases}$$

■

Métodos Iterativos: Iteración de Gauss-Seidel

Para efectos de implementación, se puede obtener un método iterativo que no necesite el realizar el producto de matrices y vectores, similar al método de Gauss-Seidel hacia adelante y hacia atrás. Para eso, considere como ejemplo el siguiente sistema 4×4:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{2,1} \cdot x_2 + a_{3,1} \cdot x_3 + a_{4,1} \cdot x_4 & = & b_1 \\ a_{1,2} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + a_{3,2} \cdot x_3 + a_{4,2} \cdot x_4 & = & b_2 \\ a_{1,3} \cdot x_1 + a_{2,3} \cdot x_2 + a_{3,3} \cdot x_3 + a_{4,3} \cdot x_4 & = & b_3 \\ a_{1,4} \cdot x_1 + a_{2,4} \cdot x_2 + a_{3,4} \cdot x_3 + a_{4,4} \cdot x_4 & = & b_4 \end{array}\right.$$

donde $a_{i,j}$ y b_i son número reales, y x_i son variables, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Métodos Iterativos: Iteración de Gauss-Seidel

Otra forma de ver la iteración de Jacobi consiste en despejar los términos de la diagonal del lado derecho, es decir,

$$\begin{cases} x_1 & = & \dfrac{b_1 - a_{1,2}\cdot x_2 - a_{1,3}\cdot x_3 - a_{1,4}\cdot x_4}{a_{1,1}} \\ x_2 & = & \dfrac{b_2 - a_{2,1}\cdot x_1 - a_{2,3}\cdot x_3 - a_{2,4}\cdot x_4}{a_{2,2}} \\ x_3 & = & \dfrac{b_3 - a_{3,1}\cdot x_1 - a_{3,2}\cdot x_2 - a_{3,4}\cdot x_4}{a_{3,3}} \\ x_4 & = & \dfrac{b_4 - a_{4,1}\cdot x_1 - a_{4,2}\cdot x_2 - a_{4,3}\cdot x_3}{a_{4,4}} \end{cases}$$

Métodos Iterativos: Iteración de Gauss-Seidel

Para obtener el método iterativo de **Gauss-Seidel hacia adelante**, se realizan las mejoras a las aproximaciones posteriores, después de calcular cada una de ellas, iniciando con $x_1^{(k+1)}$, y luego aproximar lo valores hacia adelante. Es decir

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} & = & \dfrac{b_1 - a_{1,2} \cdot x_2^{(k)} - a_{1,3} \cdot x_3^{(k)} - a_{1,4} \cdot x_4^{(k)}}{a_{1,1}} \\ x_2^{(k+1)} & = & \dfrac{b_2 - a_{2,1} \cdot x_1^{(k+1)} - a_{2,3} \cdot x_3^{(k)} - a_{2,4} \cdot x_4^{(k)}}{a_{2,2}} \\ x_3^{(k+1)} & = & \dfrac{b_3 - a_{3,1} \cdot x_1^{(k+1)} - a_{3,2} \cdot x_2^{(k+1)} - a_{3,4} \cdot x_4^{(k)}}{a_{3,3}} \\ x_4^{(k+1)} & = & \dfrac{b_4 - a_{4,1} \cdot x_1^{(k+1)} - a_{4,2} \cdot x_2^{(k+1)} - a_{4,3} \cdot x_3^{(k+1)}}{a_{4,4}} \end{cases}$$

Métodos Iterativos: Iteración de Gauss-Seidel

Para obtener el método iterativo de **Gauss-Seidel hacia atrás**, se realizan las mejoras a las aproximaciones posteriores, después de calcular cada una de ellas, iniciando con $x_4^{(k+1)}$, y luego aproximar lo valores hacia atrás. Es decir

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & \dfrac{b_1 - a_{1,2}\cdot x_2^{(k+1)} - a_{1,3}\cdot x_3^{(k+1)} - a_{1,4}\cdot x_4^{(k+1)}}{a_{1,1}} \\ x_2^{(k+1)} & = & \dfrac{b_2 - a_{2,1}\cdot x_1^{(k)} - a_{2,3}\cdot x_3^{(k+1)} - a_{2,4}\cdot x_4^{(k+1)}}{a_{2,2}} \\ x_3^{(k+1)} & = & \dfrac{b_3 - a_{3,1}\cdot x_1^{(k)} - a_{3,2}\cdot x_2^{(k)} - a_{3,4}\cdot x_4^{(k+1)}}{a_{3,3}} \\ x_4^{(k+1)} & = & \dfrac{b_4 - a_{4,1}\cdot x_1^{(k)} - a_{4,2}\cdot x_2^{(k)} - a_{4,3}\cdot x_3^{(k)}}{a_{4,4}} \end{array}\right.$$

Métodos Iterativos: Iteración de Gauss-Seidel

Ejemplo

Del ejemplo anterior, que es el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x_1 + \ x_2 + \ x_3 & = & 7, \\ x_1 + 5x_2 + \ x_3 & = & 7, \\ x_1 + \ x_2 + 5x_3 & = & 7, \end{array}\right.$$

Del sistema se obtiene el método iterativo de Gauss-Seidel hacia adelante:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & \dfrac{7 - x_2^{(k)} - x_3^{(k)}}{5} \\ x_2^{(k+1)} & = & \dfrac{7 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}}{5} \\ x_3^{(k+1)} & = & \dfrac{7 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}}{5} \end{array}\right.$$

con $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

Métodos Iterativos: Iteración de Gauss-Seidel

- $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.14 \\ 1.12 \\ 0.896 \end{pmatrix}$
- $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.9968 \\ 1.0214 \\ 0.9964 \end{pmatrix}$
- $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9964 \\ 1.0014 \\ 1.0014 \end{pmatrix}$
- $x^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.9996 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$
- $x^{(5)} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$

Como la solución original es $(1,1,1)^T$, entonces la aproximación $x^{(5)}$ produce un error relativo de cero.

Métodos Iterativos: Iteración de Gauss-Seidel

El siguiente teorema explica la convergencia del método de Gauss-Seidel, tanto hacia adelante como hacia atrás.

Teorema 2

Sea A una matriz estrictamente diagonal dominante de tamaño $n \times n$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Entonces la iteración de Gauss-Seidel hacia adelante y hacia atrás converge hacia la solución del sistema $Ax = b$ para cualquier valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Demostración

No se considerará en este curso.

Métodos Iterativos: Iteración de Gauss-Seidel

De forma similar al método de Jacobi, si el sistema $Ax = b$ no cumple que A es estrictamente diagonal dominate, entonces, **en algunos casos**, se puede reescribir el sistema de tal manera que la matriz de coeficientes sea estrictamente diagonal dominate, haciendo un intercambio de filas.

Ejercicio

Considere el sistema $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 3 \\ 10 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Considerando las condiciones necesarias, aplique el método de Gauss-Seidel hacia adelante y hacia atrás al sistema anterior de tal manera que este converja, con 5 iteraciones y $x^{(0)} = (0,0,0)^T$. Calcule el error relativo.

Lista de Ejercicios

1. Del libro Métodos numéricos para ingenieros, Quinta Edición, realizar los siguientes ejercicios:
   - Página 324, los ejercicios 11.7, 11.8, 11.9, 11.10, 11.11, 11.14,
2. Del libro Métodos Numéricos con MATLAB, Tercera Edición, realizar los siguientes ejercicios:
   - Página 181, los ejercicios 1, 2, 3, 5, 6, 8.
   - Página 183, los ejercicios 4, 5.