Series de Taylor

Ingeniería en Computadores
Instituto Tecnológico de Costa Rica

CE-3102: Análisis Numéricos para Ingeniería

Juan Pablo Soto Quirós
jusoto@tec.ac.cr

Series

Definición (Serie)

Dada una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$*, se define la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *como la suma de todos los términos de la sucesión* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$*. Es decir*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Definición (Suma Parcial)

Dada una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*, se define su* $k-$*ésima suma parcial, y se denota* S_k *como:*

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$$

Series

Definición (Serie Alternada)

Dada una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, *se dice que es una serie alternada, si y solo si,*

$$a_n = (-1)^n b_n$$

donde $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *es una sucesión que siempre tiene el mismo signo. Es decir,* $b_n < 0,\ \forall n = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ *ó* $b_n > 0,\ \forall n = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + ... + (-1)^k b_k + ...$$

Series

Resultado (Cota para el error en una serie alternada)

Sea $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$*, una serie alternada convergente a* S *y sea* $S_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n b_n$ *una aproximación de* S *utilizando* k *términos, entonces*

$$|S - S_k| \leqslant b_{k+1}$$

Series

Ejemplo

Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$ *alternada convergente a* S. *Determine una aproximación de* S *con un error absoluto menor que* 10^{-3}

Sea $b_n = \frac{(-1)^n}{n^3+1}$. Del Teorema anterior se obtiene

$$|S - S_n| \leqslant b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3+1}$$

por lo que bastaría determinar un valor m, que cumpla $\frac{1}{(n+1)^3+1} \leqslant 10^{-3}$.

Por inspección se tiene que $n = 9$ cumple la condición.

$$S_9 = \sum_{n=1}^{9} \frac{(-1)^n}{n^3+1} = -0.414874...$$

Serie de Taylor

Definición (Serie de Taylor)

Dada una función $f : A \to B$, tal que f admite un desarrollo en **series de potencias** *alrededor de $c \in A$ y f* **infinitamente derivable en** c*, entonces siempre es posible calcular la serie de Taylor para f alrededor de c, mediante la siguiente fórmula:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \\ &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots \end{aligned}$$

Serie de Taylor

Ejemplo

Calcule la serie de Taylor para la función $f(x) = \sin(x)$ *alrededor de* $\frac{\pi}{2}$.

Primero calcular las derivadas de f

- $f(x) = \sin(x)$; $f(\pi/2) = 1$.
- $f'(x) = \cos(x)$; $f'(\pi/2) = 0$.
- $f''(x) = -\sin(x)$; $f''(\pi/2) = -1$.
- $f'''(x) = -\cos(x)$; $f'''(\pi/2) = 0$.
- $f'^{v}(x) = \sin(x)$; $f^{(4)}(\pi/2) = 1$.
- $\vdots$

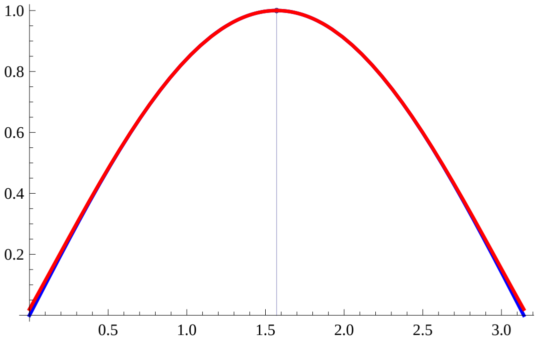
Serie de Taylor

Segundo, se realiza el desarrollo del polinomio de Taylor

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(\pi/2)}{n!}(x-\pi/2)^n \\
&= \sin(\pi/2) + \frac{\cos(\pi/2)}{1!}(x-\pi/2) + \frac{-\sin(\pi/2)}{2!}(x-\pi/2)^2 + \\
&\frac{-\cos(\pi/2)}{3!}(x-\pi/2)^3 + \frac{\sin(\pi/2)}{4!}(x-\pi/2)^4 + \ldots \\
&= 1 - \frac{(x-\pi/2)^2}{2} + \frac{(x-\pi/2)^4}{24} + \ldots
\end{aligned}$$

Serie de Taylor

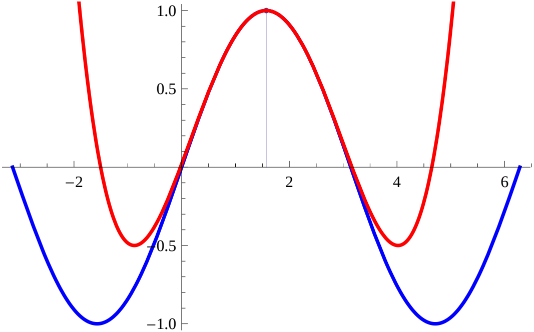
Considere la suma parcial $S_2(x) = 1 - \dfrac{(x-\pi/2)^2}{2} + \dfrac{(x-\pi/2)^4}{24}$.



$$S_2(x) = 1 - \frac{(x-\pi/2)^2}{2} + \frac{(x-\pi/2)^4}{24} \qquad f(x) = \sin(x)$$

Serie de Taylor

Considere la suma parcial $S_2(x) = 1 - \frac{(x-\pi/2)^2}{2} + \frac{(x-\pi/2)^4}{24}$.



$S_2(x) = 1 - \frac{(x-\pi/2)^2}{2} + \frac{(x-\pi/2)^4}{24}$ $\quad f(x) = \sin(x)$

Serie de Taylor

Ejemplo

Calcule la serie de Taylor para la función $f(x) = \ln(x)$ *alrededor de* $x = 1$.

Primero calcular las derivadas de f

- $f(x) = \ln(x)$; $f(1) = 0$.
- $f'(x) = \frac{1}{x}$; $f'(1) = 1$.
- $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f''(1) = -1$.
- $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$; $f'''(1) = 2$.
- $f'^{v}(x) = -\frac{6}{x^4}$; $f'^{v}(1) = -6$.
- $f^{v}(x) = -\frac{24}{x^5}$; $f^{v}(1) = 24$.
- $\vdots$
- $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$
  $f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

Serie de Taylor

Segundo, se realiza el desarrollo del polinomio de Taylor

$$
\begin{aligned}
\ln(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n(n-1)!}(x-1)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n
\end{aligned}
$$

Serie de Taylor

Definición (Serie de Maclaurin)

En el caso particular de que la serie esté centrada en cero (0)*, a esta se le conoce como la serie de Maclaurin de* f*. Es decir:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots \end{aligned}$$

Serie de Taylor

Ejemplo

1. *Calcule la serie de Maclaurin para la función* $f(x) = e^x$.
2. *Utilice* 4 *términos de la serie de Maclaurin para la función* $f(x) = e^x$, *y aproxime*

    - e^2
    - $\sqrt{e}$

    Justifique cuál de las dos aproximaciones es mejor.

Serie de Taylor

1. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

2.
   - $e^2 \approx 1 + 2 + \dfrac{2^2}{2!} + \dfrac{2^3}{3!} \approx 6,\overline{33} = \overline{x_1}$

   $$r_{e^2} = \left| \frac{e^2 - 6,\overline{33}}{e^2} \right| \approx 0,1429 = 14,29\,\%$$

   - $\sqrt{e} = e^{1/2} \approx 1 + 1/2 + \dfrac{(1/2)^2}{2!} + \dfrac{(1/2)^3}{3!} \approx 1,6458\overline{3} = \overline{x_2}$

   $$r_{\sqrt{e}} = \left| \frac{\sqrt{e} - 1,6458\overline{3}}{\sqrt{e}} \right| \approx 0,00175 = 0,175\,\%$$

Serie de Taylor

Ejemplo

Calcule la serie de Maclaurin para $f(x) = \frac{1-e^{-x^2}}{2}$.

Serie de Taylor: $f(x) = \frac{1-e^{-x^2}}{2}$

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + .. + \frac{x^n}{n!} \ldots$
2. $e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \frac{(-x^2)^4}{4!} + .. + \frac{(-x^2)^n}{n!} \ldots$

   $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + .. + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \ldots$
3. $-e^{-x^2} = -1 + x^2 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} - \frac{x^8}{4!} + .. + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n!} \ldots$
4. $1 - e^{-x^2} = x^2 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} - \frac{x^8}{4!} + .. + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n!} \ldots$
5. $\frac{1-e^{-x^2}}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2\cdot 2!} + \frac{x^6}{2\cdot 3!} - \frac{x^8}{2\cdot 4!} + .. + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{2\cdot n!} \ldots$

Serie de Taylor: $f(x) = \frac{1-e^{-x^2}}{2}$

Por lo tanto

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x^2}}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{2 \cdot n!}$$

Serie de Taylor

Ejercicios

Encuentre la serie de Maclaurin de:

1. $f(x) = \sin(x)$.
2. $g(x) = \cos(x)$.
3. $h(x) = \ln(\sqrt{x})$.
4. $r(x) = \arctan(x)$.
5. $n(x) = \frac{1}{1-x}$.
6. $m(x) = \sinh(x)$, donde $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Serie de Taylor

Teorema - Resto del Polinomio de Taylor

Sea $f \in C^{k+1}[a,b]$ tal que $f^{(k+1)}$ esté definido en [a,b]. Entonces $\forall x \in [a,b]$, $\exists c_x$ entre c y x tal que

$$f(x) = S_k(x) + R_k(x)$$

donde

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \text{ y } R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c_x)}{(k+1)!}.(x-c)^{k+1}.$$

- $S_k(x)$ se conoce como el polinomio de Taylor de grado k y $R_k(x)$ se conoce como el resto del polinomio de Taylor fe grado k.
- El error de aproximación del $S_k(x)$ se define como

$$error = |f(x) - S_k(x)| = |R_k(x)|.$$

Serie de Taylor

Ejercicio

Calcule la cantidad de términos que se debe sumar en la serie de Maclaurin de $f(x) = e^x$ para garantizar que la aproximación de e^2 tiene un error absoluto menor a 10^{-5}.

Sugerencia: Determinar el valor de k, tal que $|R_k(x)| < 10^{-5}$.

Serie de Taylor

- Sea $P_k(x)$ el polinomio de Taylor de grado k que aproxima a una función $f(x)$.
- Si se desea evaluar un valor α en el polinomio P_k de tal manera que aproxime al valor $f(\alpha)$, se puede calcular un valor k que cumpla la siguiente condición de parada:

$$|P_k(\alpha) - P_{k-1}(\alpha)| < tol,$$

donde $tol > 0$ es una tolerancia definida.

Ejercicio

Implemente computacionalmente (en GNU Octave o Pyhton) una función que aproxime el valor de $\ln(\alpha)$ utilizando el polinomio de Taylor, donde $\alpha \in]0, 2]$, con una tolerancia $tol > 0$ definida por el usuario. Utilice el criterio de parada de la diapositiva anterior.