Predikátová logika

Obsah

Logika pojmy

Axiom je výchozí tvrzení dané teorie, které nedokazujem, jejich platnost se předpokládá.

Důsledek je tvrzení odvozené z dedukcí axiomů.

Bezespornost- vyvozené důsledky nesmějí obsahovat dané tvrzení a jeho negaci.

Symboly tvoří abecedu torií, spojením vznikají slova - **formule**.

Prvotní formule $p,q,...$ jsou jednoduché výroky, které dále neanalyzujeme. Složitější výroky konstruujeme pomocí spojek $\neg$, &, $\vee,\ \rightarrow,\ \equiv$ a závorek.

Pravdivostní ohodnocení formulí je zobrazení do množiny {0,1}, kde 1 znamená pravdivé hodnocení.

Tautologie jsou formule, které jsou pravdivé při libovolném ohodnocení, píšeme $\models$, např.:

- **zákon vyloučení třetího:** $A \vee \neg A$
- **zákon dvojí negace:** $\neg\neg A \equiv A$
- **zákon vyloučení sporu:** $\neg(A$ & $\neg A)$

Logicky ekvivalentní formule mají stejne pravdivostní ohodnocení při libovolném ohodnocení jejich částí.

Jazyk predikátové logiky 1. řádu

je specifikován jeho funkčními a predikátovými symboly (určují oblast, kterou jazyk popisuje). Predikátová logika 1. řádu umožňuje kvantifikovat pouze proměnné pro individua, ne množiny nebo relace ($\forall_{n=0}^{\infty} x$)

Logické symboly

- **Proměnné** označují libovolný prvek z daného oboru objektů.
- **Konstanty** označují jediný objekt (většinou něčím význačný).
- **Logické spojky a pomocné symboly** jsou definovány stejně jako ve výrokové logice (negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence)
- **Kvantifikátory**označují platnost pro *všechny* objekty oboru, popř. *existenci* požadovaného objektu (v dalším textu označuje symbol Q predikáty $\forall$ nebo $\exists$)
- **Závorky** ()
- **Predikátový symbol rovnosti** =

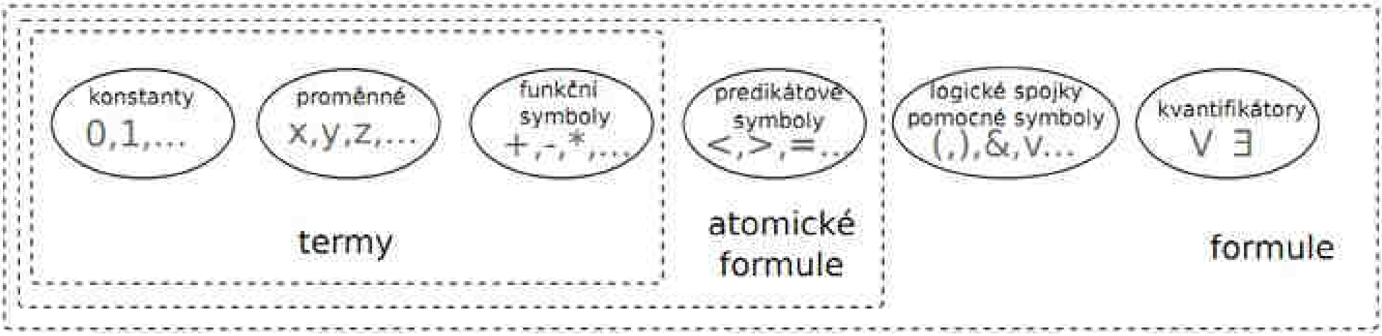
Speciální symboly

- **Funkční symboly** (f, g, ...) označují operace nad objekty. Mají *aritu* (četnost) - celé číslo, které udává počet argumentů (konstanta je *nulární funkce*).
- **Predikátové symboly** (p, q, ...) označují vlastnosti objektů (predikáty) a vztahy mezi nimi (je menší než, rovná se,...), také mají aritu.

Pojmy

- **Termy** jsou tvrzení sestavená pomocí proměnných, konstant a funkčních symbolů.
- **Atomické formule** jsou tvrzení sestavená pomocí termů a predikátových symbolů.

- **Formule** jsou tvrzení sestavená pomocí atomických formulí (termy + predikátové symboly), logických spojek a kvantifikátorů.



- **Vázaný výskyt proměnné** x ve formuli φ znamená, že proměnná x se nachází v podformuli φ tvaru $\forall x \varphi$. Pak se φ nazývá *obor kvantifikátoru*, jinak je proměnná x *volnou proměnnou*.
- **Uzavřená formule = výrok**, neobsahuje žádnou volnou proměnnou.

Sémantika

Realizací jazyka *L* je algebraická struktura $\mathcal{M}$, složená z:

- univerzum *M* - neprázdná množina objektů
- fukční zobrazení $f_{\mathcal{M}} : M^n \longrightarrow M$
- predikátová relace $p_{\mathcal{M}} \subseteq M^n$

Ohodnocení proměnných je libovolné zobrazení e všech proměnných do M.

Formule φ je splněna v realizaci $\mathcal{M}$, pokud je pravdivá při každém ohodnocení e. Píšeme $\mathcal{M} \models \varphi$. Je-li φ uzavřená, pak říkáme, že φ je pravdivá v $\mathcal{M}$.

Formule φ je logicky platná, pokud pro každou realizaci $\mathcal{M}$ platí $M \models \varphi$.

Formule φ a ψ jsou logicky ekvivalentní, pokud při libovolné realizaci $\mathcal{M}$ a libovolném ohodnocení e je $\mathcal{M} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{M} \models \psi[e]$.

Každá formule φ je ekvivalentní nějaké formuli ψ, ve které se nevyskytuje jeden kvantifikátor, popř. takové, ve které se vyskytují pouze spojky $\neg$ a $\longrightarrow$ a kvantifikátor $\forall$.

Substituce termů za proměnné: Pokud v termu t dosadíme za proměnné další termy, t zůstává termem. Dosazením termů za proměnné ve formuli vytvoří opět formuli. Ne vždy je to vhodné, proměnná musí být *substituovatelná*.

Substituovatelná proměnná x je taková, že žádný její volný výskyt neleží v oboru kvantifikátoru proměnné y, která je obsažená v substituovaném termu. Např. $S(y)$ není substituovatelný za x ve formuli $x \longrightarrow \exists y(x = S(y))$.

Logické formule

Výskyty proměnných ve formuli

Vázaný výskyt proměnné x ve formuli φ znamená, že proměnná x se nachází v podformuli φ tvaru $\forall x \varphi$ nebo $\exists x \varphi$. Pak se φ nazývá *obor kvantifikátoru*, jinak je proměnná x *volnou proměnnou*.

Příklad

Majme formulu $\varphi : \exists x \forall y p(x, z)$. Potom

- y nie je volná v φ,
- z je volná v φ,

- x je viazaná v φ.

Příklad 2

Majme formulu $\forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists z R(y,z)) \rightarrow \forall x S(x,y)$. P, R, S sú nejaké predikáty. Potom

- y je viazaná v podformuli $\forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists z R(y,z))$,
- z je viazaná v podformuli $\forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists z R(y,z))$,
- y je volná v podformuli $(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists z R(y,z))$,
- z nie je (volná) v podformuli $\exists x P(x,y)$,
- z je viazaná v podformuli $(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists z R(y,z))$.

Dokazování logických formulí

Axiomy predikátové logiky

Axiomy lze definovat pouze za použití spojek $\neg$ a $\longrightarrow$ a kvantifikátoru $\forall$. $\exists x\varphi$ znamená $\neg(\forall x(\neg\varphi))$.

Výrokové axiomy

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
2. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \eta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \eta))$
3. $((\neg\psi) \rightarrow (\neg\varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

Axiom kvantifikátoru

$(\forall x(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x\psi))$, x **nemá** volný výskyt v φ.

Axiom substituce

$(\forall x\varphi) \rightarrow \varphi_x[t]$, kde t je term substituovatelný za x

Axiomy rovnosti

$x_1 = y_1 \rightarrow (x_2 = y_2 \rightarrow (\ldots(x_n = y_n \rightarrow f(x_1,\ldots,x_n) = f(y_1,\ldots,y_n))\ldots))$, obdobně pro predikáty.

Odvozovací pravidlo Modus Ponens (Pravidlo odloučení)

Z formulí $\varphi, \varphi \rightarrow \psi$ (předpoklady) lze odvodit ψ(závěr).

Pravidlo zobecnění

Pro libovolnou proměnnou x z φ lze odvodit $\forall x(\varphi)$

Dedukce

$T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ právě tehdy, když $T, \varphi \vdash \psi$.

Řešený příklad

1) Dokažte větu $\exists x(\neg\varphi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \psi)$.

Postup:	*Řešení:*
1. Použijte tautologii $\varphi \longrightarrow \neg\neg\varphi$.	1. $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$
2. Proveďte distribuci kvantifikátoru $\forall$	2. $\forall x\varphi \rightarrow \forall x\neg\neg\varphi$
3. Užijte třetí axiom výrokové logiky ve tvaru $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$.	3. $(\forall x\varphi \rightarrow \forall x\neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\forall x\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\forall x\varphi)$
4. Aplikujte pravidlo odloučení.	4. $\neg\forall x\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\forall x\varphi$
5. Použijte tautologii $\neg(\forall x\varphi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \psi)$.	5. $\neg(\forall x\varphi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \psi)$
6. Složte implikace ze 4. a 5.	6. $\neg\forall x\neg\neg\varphi \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \psi)$
	7. $\exists x\neg\varphi \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \psi)$

7. Proveďte úpravu (nahraďte kvantifikátor $\forall x$ kvantifikátorem $\exists x$).

Příklady k procvičení

[2007/2008 - **nekompletné zadanie, neznámy zdroj - TODO doplniť**]

To, že platí $\vdash \forall x \forall y \phi(x,y) \rightarrow \forall x \phi(x,x)$, můžete dokázat dle následujíciho návodu:

1. Vezměte formuli $\vdash \forall x \forall y \phi(x,y)$ jako předpoklad, pak užijte
2. axiom substituce
3. pravidlo odloučení
4. axiom substituce
5. pravidlo odloučení
6. pravidlo zobecnění
7. výsledek úvah 1-6 ve tvaru vztahu o dokazatelnosti formule z předpokladu
8. větu o dedukci.

Zadání vypádá kompletní. Řešení dle mě je:

1. $\vdash \forall x \forall y \phi(x,y)$
2. $\vdash \forall x \forall y \phi(x,y) \rightarrow \forall y \phi(y,y)$
3. $\vdash \forall y \phi(y,y)$
4. $\vdash \forall y \phi(y,y) \rightarrow \phi(x,x)$
5. $\vdash \phi(x,x)$
6. $\vdash \forall x \phi(x,x)$
7. $\forall x \forall y \phi(x,y) \vdash \forall x \phi(x,x)$
8. $\vdash \forall x \forall y \phi(x,y) \rightarrow \forall x \phi(x,x)$

Věty o úplnosti a kompaktnosti

Teorie T je libovolná množina formulí daného jazyka L a má svou realizaci M.

Teorie T je uplná, pokud je bezesporná a pro každou uzavřenou formuli platí buď $T \models \phi$ nebo $T \models \neg\phi$

Postova věta o úplnosti: Dokazatelné formule jsou tautologiemi ($\vdash A \Leftrightarrow \models A$).

Věta o úplnosti (Goedel): Teorie T je bezesporná, právě když má nějaký model.

Věta o kompaktnosti: Nechť T je množina formulí jazyka L. Pak teorie T má nějaký model právě když každá její konečná podmnožina $Q \subseteq T$ má model.

Prenexní tvar formulí

Postup

Převedení formule na prenexní tvar probíhá v 5 krocích v tomto pořadí

1. Vyloučení zbytečných kvantifikátorů

Vynecháme $\forall x$ resp. $\exists x$ v podformulích $\forall x B$ resp. $\exists x B$, pokud se proměnná x nevyskytuje v B.

2. Přejmenování proměnných

Nejlevější podformuli QxA (x se nevyskytuje volně v A), pokud má další výskyt ve výchozí formuli, nahradíme $Qx'A'$, kde x' je různá od ostatních proměnných. Opakujeme, až všechny kvantifikátory mají různé proměnné a žádná proměnná není v nové formuli současně volná a vázaná.

3. Eliminace ekvivalence

$A \Leftrightarrow B$ nahradíme za $(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$

4. Přesun negace dovnitř

Provádíme postupně náhrady, než se spojka negace vyskytne nevýše bezprostředně před atomickými formulemi.

$\neg\forall xA$ ... $\exists x\neg A$

$\neg\exists xA$ ... $\forall x\neg A$

$\neg(A \rightarrow B)$ ... $A \land \neg B$

$\neg(A \lor B)$ ... $\neg A \land \neg B$

$\neg(A \land B)$ ... $\neg A \lor \neg B$

$\neg(\neg A)$ ... A

5. Přesun kvantifikátorů doleva

Přesun kvantifikátorů doleva pro B, ve které se nevyskytuje x, provádíme náhrady dle schemat:

$(QxA) \lor B$ ... $Qx(A \lor B)$

$(QxA) \land B$ ... $Qx(A \land B)$

$(QxA) \rightarrow B$ ... $(\neg Q)x(A \rightarrow B)$

$B \rightarrow (QxA)$ ... $Qx(B \rightarrow A)$

Řešený příklad

1) Převeďte negaci formule $[\forall xp(x,y) \rightarrow \exists x\forall yq(x,y)] \land \exists y[\forall xp(y,y) \rightarrow \forall xp(x,y)]$ do prenexního tvaru.

[2008/2009 | půlsemestrálka | skupina A,B | příklad 2]

Řešení:

1. odstranění implikace

$$[\neg\forall xp(x,y) \lor \exists x\forall yq(x,y)] \land \exists y[\neg\forall xp(y,y) \lor \forall xp(x,y)]$$

2. negace formule

$$[\forall xp(x,y) \land \neg(\exists x\forall yq(x,y))] \lor \forall y[\forall xp(y,y) \land \neg(\forall xp(x,y))]$$

3. odstranění zbytečných kvantifikátorů, přejmenování proměnných

$$[\forall x'p(x',y') \land \neg(\exists x''\forall y''q(x'',y''))] \lor \forall y[p(y,y) \land \neg(\forall xp(x,y))]$$

4. úprava negovaných kvantifikátorů

$$[\forall x'p(x',y') \land \forall x''\exists y''\neg q(x'',y'')] \lor \forall y[p(y,y) \land \exists x\neg p(x,y)]$$

5. přesunutí kvantifikátorů doleva

$$\forall x'\forall x''\exists y''\forall y\exists x[p(x',y') \land \neg q(x'',y'')] \lor [p(y,y) \land \neg p(x,y)]$$

6. pouze jedna logická spojka $\vee$

Tento krok je už zbytečný a je v něm podle mě chyba(JamesScott), protože:
$p(x,y) \vee q(x,y) = \neg[\neg p(x,y) \wedge \neg q(x,y)]$

$\forall x' \forall x'' \exists y'' \forall y \exists x [\neg p(x',y') \vee q(x'',y'') \vee \neg p(y,y) \vee p(x,y)]$

Příklady k procvičení

1) Najděte prenexní tvar formule, kde P, R a S jsou binární predikáty.

- $\forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists u R(y,u)) \rightarrow \forall x S(x,y)$
- $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(R(x,y) \rightarrow \neg \forall z S(y,z)))$

2) Převeďte formuli do prenexního tvaru a znegujte.

- $\exists x \varphi(x,y) \rightarrow \forall x(\psi(x) \vee \chi(y,z))$
- $\forall x \varphi(x,y) \rightarrow \exists x(\psi(x) \vee \chi(y,z))$

3) Formuli $\forall x \forall y(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$ převeďte do prenexního tvaru tak, aby neobsahovala logickou spojku negace.

4) Formuli φ, která je negací formule $\forall x(\neg f(x) \wedge \forall y \exists x(g(x,y) \rightarrow \exists z \neg h(x,y)))$ napište tak, aby se v ní nevyskytovala spojka $\neg$. Pak jí převeďte do prenexního tvaru.

5) K formuli $\forall x \exists y(x.y = 1) \rightarrow \forall x \forall y \forall z(x.z = y.z \rightarrow x = y)$ najděte ekvivalentní formuli v prenexním tvaru, přičemž 1 je konstanta a $.$ binární funkční symbol.

6) Převeďte negaci formule do prenexního tvaru.

- $\forall x[p(x,y) \wedge \forall y q(x,y)] \rightarrow \exists y[\forall x p(y,y) \rightarrow \forall x p(x,y)]$ [2008/2009 | půlsemestrálka | skupina C,D | příklad 2]

Kategorie: Matematické pahýly | Matematické struktury v informatice | Státnice MGM | Státnice MAT | Státnice 2011

Stránka byla naposledy editována 25. 5. 2011 v 14:18.