Normované a unitární prostory

ZPRACUJE: Mystik

Obsah

Základní pojmy

Lineární prostor

Lineární prostor (nebo také vektorový prostor)

- $\mathcal{L}$ - neprázdná množina prvků (nazávaných body nebo vektory)
- **operace + (sčítání prvků)**
  - komutativní grupa (komutativní, asociativní, neutrální prvek (θ < *math* > − *nulovvektor*),*inverznprvek*) * '''*operace* * (*nsobenvektoruskalrem*)''' * * < *math* > α - skalár - číslo z nějakého číselného tělesa T
  - ke každému skaláru α a vektoru $x \in \mathcal{L}$ je jednoznačně přiřazen vektor $\alpha x \in \mathcal{L}$
  - $\alpha(\beta)x = (\alpha\beta)x$ (asociativní)
  - $1x = x$ (identita)
- distribuční zákony
  - $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
  - $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Lineární závislost

prvky jsou lineárně závislé pokud existují konstanty takové, že součet prvků vynásobených konstantami je nulový vektor

$$\alpha x + \beta y + \ldots + \lambda w = \theta$$

- tj. prvky jsou lienárně závislé pokud se mohou navzájem vyrušit

Dimenze

maximální počet lin. nezávislých prvků, které lze v prostoru nalézt

Báze prostoru

libovolný systém n lin. nezávislých prvků v n-dimenzionálním prostoru

Normovaný lineární prostor

Normovaný lineární prostor

každému prvku x prostoru je přiřazena **norma** , kterou značíme $||x||$

$$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$
$$||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$$
$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$ (trojůhelníková nerovnost)

- v klasickém vektorovém prostoru = délka vektoru
- každý normovaný prostor je metrický ($\varrho(x, y) = ||x - y||$)

Příklad: reálný n-rozměrný lineární prostor

$\mathcal{L}$ - n-tice reálných čísel
T - reálná čísla

a) lineární norma

$$||x||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

b) kvadratická norma

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Banachův prostor

úplný lin. normovaný prostor

Normovaný prvek (normovaný vektor)

prvek pro který platí $||x|| = 1$

každý vektor lze normovat jeho vynásobením $\frac{1}{||x||}$

Ekvivalentní normy

dvě normy $||x||_1$ a $||x||_2$jsou ekvivalentní v případě, že existujeí dvě konstanty C, D > 0 takové, že pro všechny vektory prostoru platí:

$$C \cdot ||x||_1 \leq ||x||_2 \leq D \cdot ||x||_1$$

Podprostory

Podprostor lineárního prostoru

podmnožina prvků, které samy tvoří lineární prostor

- Průnik podprostorů je podprostor

Nulový podprostor

podprostor skládající se pouze z prvku θ

- existuje v každém prsotoru

Vlastní podprostor

obsahuje alespoň jeden nenulový prvek a množina jeho prvků je vlastní podmnožinou prvků nad-prostoru (tj. není shodná s množinou nadprosotru)

Normované prostory konečné dimenze

- Prostor konečné dimenze je prostor, ve kterém lze nalézt nejvýše n navzájem lineárně nezávislých vektorů, kde n je konečné.
- Každý lin. prostor konečné dimenze je izomorfní s množinou vektorů euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, proto lze jeho prvky považovat za n-tice čísel.

Reiszova věta

aby posloupnost vektorů konvergovala k nějakému vektoru je nutné a stačí aby jednotlivé příslušné složky vektorů konvergovaly k příslušné složce vektoru (tj, aby první položky vektorů tvořily konvergentní řadu, druhé složky vektorů také, ...)

- k-tou položku vektoru v značíme $\xi_k^{(v)}$
- posloupnost k-tých složek vektorů značíme $\{\xi_k\}$

Je-li posloupnost vektorů $\{x_v\}$ ohraničená pak je ohraničená i každá posloupnost příslušných složek těchto vektorů $\{\xi_k^{(v)}\}$

Důsledky:

- Aby podmnožina konečné-dimenzionálního normovaného prostoru byla kompaktní je nutné a stačí aby byla ohraničení a naopak
- každý normovaný prostor konečné dimenze je úplný
- konečně-dimenzionální lin. podprostor libovolného norm. prostoru je uzavřený

Kvazikolmice

v normovaném lineárním podprostoru X_0 nelze definovat kolmici (chybí nám skalární součin)

kolmici lze aproximovat normovaným vektorem x_0 ($||x_0|| = 1$) pro který platí $\varrho(x_o, X_0) = 1$ (Reiszovo lemma)

Unitární prostory

Skalární součin (značíme (x,y))

funkce jejímiž parametry jsou dva vektory a výsledkem je kladné reálné číslo

$f(x,y) = f(y,x)$ (komutativní)

$f(x_1 + x_2,y) = f(x_1,y) + f(x_2),y$ (distributivní)

$f(\alpha x,y) = \alpha f(x,y)$ (násobení konstantou)

$f(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (nulová pouze pro nulové vektory)

Unitární prostor

normovaný lineární prostor v němž je definován skalární součin

norma se zavádí jako $||x|| = \sqrt{(x,x)}$

- operace sčítání, násobení konstantou a skalární součin jsou v unitárním prostoru vždy spojité

Úhel vektorů

$$cos(\varphi) = \frac{(x,y)}{||x|| + ||y||}$$

Ortogonální (kolmé) vektory

vektory jsou kolmé (φ = 90°) právě když (x,y) = 0

- ortogonální vektory jsou lin. nezávislé

Ortogonální soustava vektorů

všechny vektory jsou navzájem kolmé

- je-li rpsotor separabilní je každý ortogonální systém nejvýše spočetný

Ortonormální soustava vektorů

ortogonální soustava v níž všechny vektory mají normu rovnou 1 (tj. platí (x,x) = 1)

Ortonormalizace

převod ortogonální ho systému na odpovídající ortonormální

Ortonormální báze

úplná ortonormální soustava vektorů (tj. nejmenší uzavřený podprostor tvořený ortonormální bází je celý prostor)

- v separabilním unitárním prostoru vždy existuje ortonormální báze

Schmidtova věta o ortogonalizaci

každý prvek unitárního prostoru lze vyjádřit jako jednoznačnou lineární kombinaci prvků ortonormální báze - prvek pak lze jednoznačně zapsat jako řadu koeficientů

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$$

(x -prvek, n-dimenze prostru, c - koeficienty, e - prvky ortonormální báze)

Úplné unitární prostory, Fourierovy řady

Zobecnění vyjádření prvku unitárního prostoru v prostorech s nekonečnou dimenzí

Fourierovy oeficienty

$\varphi_1, \varphi_2, \dots$ je ortonormální systém v unitárním proostru nekonečné dimenze

každý prvek f lze vyjádřit jako řadu Fourierových koeficientů c tak, že platí

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$$

n-tý fourierův polynom

je n-tý částečný součet fourierovy řady

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$$

Fourierova řada

řada fourierových polynomů (posloupnost částečných součtů)

Besselova nerovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq ||f||^2$$

tj. součet druhých mocnin velikostí průmětů vektoru f do vzájemně ortogonálních směrů není vetší než druhá mocnina délky vektoru f

Uzavřený ortonormální systém

platí v něm Parsevalova rovnost:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = ||f||^2$$

tj. součet druhých mocnin velikostí průmětů vektoru f do vzájemně ortogonálních směrů je roven druhé mocnině délky vektoru f

- v separabilním unitárním prostoru je každý úplný ortonormální systém uzavřený a obráceně

Kategorie: Státnice 2011 | Matematické struktury v informatice

Stránka byla naposledy editována 29. 5. 2011 v 13:23.