Základní algebraické metody

ZPRACUJE: Mystik

Kongruence na grupách a okruzích: Spadá to do okruhu?

Spadá do okruhu podrobnosti o přímých součinech grup a okruhů?

Obsah

Relace

Relace R na množině M je podmnožina kartézského součinu
$\alpha_M = M \times M \times M \times \ldots \times M$

Binární relace

$R \subseteq M \times M$
U binárních relací místo $(x, y) \in R$ píšeme xRy (např.: x=y, x<y, ...).

- **Univerzální relace:** $\iota_M = M \times M$ (každý s každým).
- **Identická relace:** $\imath_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$ (relace rovnosti - pouze každá sám na sebe).
- **Reflexivní relace:** $\forall x \in M : \ xRx$ (každý prvek sám na sebe)
- **Symetrická relace:** $\forall x, y \in M : \ xRy \Rightarrow yRx$ (všechny vztahy obousměrně)
- **Antisymterická relace:** $\forall x, y \in M : \ xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ (žádný vztah osousměrně)
- **Tranzitivní relace:** $\forall x, y, z \in M : \ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (pokud existuje spojnice spojíme také)
- **Relace ekvivalence** je reflexivní, symetrická a tranzitivní. (rozdělění na několik ekvivalentních podmnožin) (Pozn. ekvivalenci lze definovat funkcí tak, že prvky jsou ekvivalentní pokud pro ně dané funkce dává stejný výsledek)
- **Relace částečného uspořádání** je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. (prvky lze porovnávat)

Podalgebry

Podalgebra

- množina hodnota podalgebry je podmnožinou hodnot nad-algebry
- všechny operace jsou na množině hodnot podalgebry uzavřené (tj. jejich výsledky spadají do stejné podmnožiny hodnot jako vstupy)
- Je-li v algebře definována vlastnost nějaké operace pomocí nějakého zákona (distributivní, asociativní, ...) pak má tato operace v podalgebře tuto vlastnost také.
- Průnik podalgeber je také podalgebra

Podalgebra generovaná množinou S (značíme $\langle S \rangle$)

- průnik všech podalgeber, které obsahují množinu S
- S nazýváme systém generátorů

Cyklická grupa

- $\exists x \in G : G = \langle x \rangle$
- tj. existuje prvek, který generuje celou algebru

Rozklad na třídy ekvivalence

Množinu M rozdělíme na podmnožiny (třídy ekvivalence) tak, že:

- jsou po dvou disjunktní (tj, žádné dvě množiny nemají společný prvek)
- jejich sjednocení tvoří původní množinu (tj. žádný prvek se neztratí)
- prvky každé podmnožiny jsou vzájemně ekvivalentní

Rozklad na třídy ekvivalence

rozklad množiny M je množina $\mathcal{P} \subseteq 2^M$, pro níž platí:
$\emptyset \notin \mathcal{P}, \bigcup \mathcal{P} = M$ a množiny v $\mathcal{P}$ jsou po dvou rozdílné.

Třída ekvivalence prvku a (značíme $[a]_\pi$)
je definována jako $[a]_\pi = \{b \in M \mid b\pi a\}$, kde π je relace ekvivalence na M.

- tj. podmnožina ve které jsou prvky ekvivalentní s a

Faktorová množina množiny M podle π (značíme M/π)
je definována jako $M/\pi = \{[a]_\pi \mid a \in M\}$. ($M/\pi$ je rozklad na třídy ekvivalence)

- tj. množina všech faktorových množin

Izomorfismy a homomorfismy

Homomofrismus

- je zobrazení jedné algebry na jinou algebru stejného typu
- přeznačení prvků množiny hodnot algebry $f : A \longrightarrow A^*$ (zobrazení jedné množiny hodnot na jinou)
- přeznačení operací (změní se symboly operací)
- pokud přeznačení provedeme před nebo po provedení operace dostáváme stejné výsledky (např.: f(a+b) = f(a) * f(b))

Typy -morfismů

Izomorfismus - bijektivní zobrazení (jeden na jeden)

Endomorfismus - zobrazuje se na stejnou množinu prvků

Automotfismus - izomorfismus + endomorfismus tj. zobrazení jeden na jeden do stejné množiny - jde tedy jen o přeházení prvků

Epimorfismus - surjektivní (každý prvek cílové množiny má alespoň jeden vzor)

Monomorfismus - injektivní (různé prvky mají různé obrazy)

Poznámky

- Jsou-li f a g izomorfismy pak je i f $\circ$ g izomorfismus.
- Algebraické vlastnosti jsou takové vlastnosti, které zůstávají zachovány při izomorfismech
- Každá grupa je izomorfní s nějakou grupou permutací

Kongurence a faktorové algebry

Kongruence
kongruence je taková relace ekvivalence u které platí, že pokud jsou parametry operace ekvivalentní jsou i výsledky ekvivalentní

- Příklad: ekvivalence kladných a záporných čísel je kongruence pro násobení. Platí: součin dvou kladných čísel je vždy kladné, součin dvou záporných je kladné, součin kladného i záporného je záporný
- **Triviální kongruence**
  - rovnost ($x \longrightarrow x$)
  - univerzální relace ($A \times A$)

Faktorová algebra
je algebra odpovídající kongruenci

- prvky faktorové algebry jsou faktorovou množinou původní algebry
- operace zachovávají kongruenci
- faktorovou algebra algebry M podle kongruence π značíme M / π

Přirozený homomorfismus

surjektivní homomorfismus, který zobrazuje algebru na její faktorovou algebru

Poznámky

- faktorová algebra typických algeber (viz Algebraické struktury) je algebra stejného typu. Výjimkou je obor integrity u kterého to neplatí (0 dělá problémy, protože pro ni není definováno dělení).
- každý homomorfní obraz algebry je izomorfní s nějakou faktorovou algebrou
- **Prostá algebra** je algebra, která má jen triviální kongruence

Kongruence na grupách a okruzích

Normální podgrupa N grupy G (značíme $N \triangleleft G$)

pro všechna $x \in G$ platí $xNx^{-1} \subseteq N$

- V abelovské grupě je každá podgrupa normální

TODO

viz wiki [1] (http://cs.wikipedia.org/wiki/Norm%C3%A1ln%C3%AD_podgrupa) (celkem pekne vysvetleno)

Přímé součiny algeber

Přímý součin

- n algeber téhož typu
- množina hodnot je kartézský součin množin hodnot jednotlivých algeber $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ (tj. hodnoty jsou n-tice, kde n-tý prvek je z množiny hodnot n-té algebry)
- operace přímého součinu jsou definovány nad n-ticemi hodnot tak, že výsledek operace je n-tice výsledků příslušých operací jendotlivách algeber nad příslušnými prvky n-tic (n-tý prvek výsledku se rovná výsledku provedení příslušné operace n-té algebry nad n-tými prvky vstupu)

Příklad:

$U_1 = (A_1, +)$, $U_2 = (A_2, *)$

$U_1 \times U_2 = (A_1 \times A_2, \circ)$ kde operace $\circ$ je definována jako $(a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 * b_2)$

Poznámky

- Přímé součiny typických algeber (viz Algebraické struktury) jsou algebry stejného typu kromě oboru integrity, kde to neplatí, protože (0,1) * (1,0) = (0,0)

Kategorie: Státnice 2011 | Matematické struktury v informatice

Stránka byla naposledy editována 29. 5. 2011 v 12:22.