Metrické prostory

ZPRACUJE: Mystik

Kompaktní množiny v metrických prostrech už do okruhu nepatří?

Obsah

Metrické prostory

Metrický prostor

$\chi = (X, \varrho)$
X - množina prvků (nazývaných body)
ϱ - funkce vzdálenosti

- v případě, že nemůže dojít k záměně můžeme značit i jen jako X

Funkce vzdálenosti

- definována pro všechny dvojice bodů $x, y \in X$
- výsledky jsou nezáporná reálná čísla
- $\varrho(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$
- $\varrho(x,y) = \varrho(y,x)$ (symetrie)
- $\varrho(x,y) + \varrho(y,z) \geq \varrho(x,z)$ (trojúhelníková nerovnost)

Příklady

Prostor izolovaných bodů

- X - libovolná naprázdná množina
- $\varrho(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pokud} \quad x = y \\ 1 & \text{pokud} \quad x \neq y \end{cases}$

Metrický prostor R^1 (1-rozměrný)

- $X = \mathbb{R}$
- $\varrho(x,y) = |x - y|$

n-rozměrný eukleidovský prostor R^n

- $X = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2 \times \cdots \times \mathbb{R}_n$ (n-tice reálných čísel)
- $\varrho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}$

Metrický prostor R_0^n

- $X = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2 \times \cdots \times \mathbb{R}_n$ (n-tice reálných čísel)
- $\varrho(x,y) = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k - x_k|$

Prostor spojitých funkcí C^0

- $X = C(<a,b>)$ (funkce spojité na intervalu <a, b>)
- $\varrho(f,g) = \max_{a \leq t \leq b} |g(t) - f(t)|$ (maximální rozdíl funkčních hodnot na intervalu <a,b>)

Prostor spojitých funkcí s kvadratickou metrikou C_2^0

- $X = C(<a,b>)$ (funkce spojité na intervalu <a, b>)

- $\varrho(f,g) = \sqrt{\int_a^b (g(t) - f(t))^2 dt}$

Metrický prostor M^∞

- Nekonečně rozměrný prostor
- X = množina všech ohraničených posloupností libovolné délky
- $\varrho(x,y) = sup|x_k - y_k|$

Další pojmy

Otevřená koule

$S(x_0, r) := (x \in X : \varrho(x, x_0) < r)$
$x_0 \in X$ - střed koule, $r \in \mathbb{R}$ - poloměr

- tj. všechny body, které jsou od středu v menší vzdálenosti než poloměr

Uzavřená koule

$S(x_0, r) := (x \in X : \varrho(x, x_0) \leq r)$
$x_0 \in X$ - střed koule, $r \in \mathbb{R}$ - poloměr

- tj. všechny body, které jsou od středu v menší nebo maximálně stejná vzdálenosti jako poloměr

Okolí bodu

otevřená koule jejímž je bod středem

Hromadný bod množiny M

bod jehož libovolné okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů z M, hromadný bod nemusí náležet M

Izolovaný bod množiny M

existuje okolí, které neobsahuje žádný bod z M kromě samotného izolovaného bodu

Uzávěr množiny M (značíme $\overline{M}$)

množina všech bodů j jejichž libovolném okolí je alespoň jeden bod z M

- uzávěr uzávěru je roven uzávěru
- jestliže $M_1 \leq M$ pak $\overline{M_1} \subset \overline{M}$
- uzávěr sjednocení je sjednocení uzávěrů $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$
- každý bod uzávěru množiny je buď hromadným bodem nebo izolovaným bodem

Uzávěr se skládá z:

- izolovaných bodů M (které náleží M)
- hromadných bodů M, které náleží M
- hromadných bodů M, které nenáleží M

Z toho plyne: uzávěr = množina + hromadné body

Vnitřní bod množiny M

existuje okolí bodu, které je celé v M

Uzavřená množina

$M = \overline{M}$

Otevřená množina

všechny její body jsou vnitřní

Hustá množina A v B

množina A je hustá v B $\Leftrightarrow \overline{A} \supseteq B$

tj. nejsou v ní mezery

Všude hustá množina A v B

množina A je všude hustá v B $\Leftrightarrow \overline{A} = B$
tj. její uzávěr je celý prostor

Separabilní metrický prostor

obsahuje všude hustou spočetnou množinu (obsahuje spočetnou množinu jejíž uzávěr tvoří celou množinu)

- separabilní prostory: prostor izolovaných bodů tvořený spočetnou množinou, libovolně-rozměrný metrický prostor reálných čísel (racionální čísla tvoří všude hustou spočetnou množinu), ...
- neseparabilní prostory: metrický prostor m_∞ (každá všude hustá množina v něm je nespočetná)

Konvergence posloupností

Posloupnost $(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ v metrickém prostoru M

Konvergence posloupnosti

posloupnost konverguje k bodu $x \in M$ jestliže každé okolí bodu x obsahuje všechny body posloupnosti od nějakého indexu výše
tj. pokud se body posloupnosti se zvyšujícími indexy čím dál víc blíží k bodu x (nebo se alespoň nevzdalují)

- pokud posloupnost konverguje k X pak libovolná pod-posloupnost vybraná z této posloupnosti také konverguje k x

Limita posloupnosti

bod ke kterému posloupnost konverguje
žádná posloupnost nemůže mít dvě různé limity

Bod $x \in \overline{M}$ tehdy a jen tehdy jestliže existuje posloupnost bodů v M konvergující k x

Bod x je hromadný bod M tehdy a jen tehdy, když existuje posloupnost bodů M konvergující k M taková, že pro $m \neq n$ platí $x_m \neq x_n$ (tj. jednotlivé body posloupnosti se liší)

Spojitá izometrická zobrazení

Uvažujeme dva metrické prostory $\mathcal{X} = (X, \varrho)$ a $\mathcal{Y} = (Y, \varrho^*)$ a zobrazení $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$.

Zobrazení spojité v bodě x_0

pro libovolné $\varepsilon > 0$ lze najít $\delta > 0$ takové, že $\varrho^*(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ pro všechny $\varrho(x, x_0) < \delta$

- tj. body z okolí bodu se zobrazují na body v okolí obrazu bodu - při zobrazování se nic "nepřetrhne"
- aby zobrazení bylo spojité v bodě x je nutné a stačí, aby pro posloupnost x_n konvergující k x posloupnost $f(x_n)$ konvergovala k $f(x)$
- aby zobrazení bylo spojité v bodě x je nutné a stačí, aby vzor každé uzavřené množiny z $\mathcal{Y}$ byla uzavřená množina (tj. nesmí se zobrazit neuzavřená množina na uzavřenou, uzavřená množina se nemusí nutně zobrazit na uzavřenou)

Spojité zobrazení

zobrazení spojité ve všech bodech

- je-li $\mathcal{Y}$ číselná přímka pak se spojité zobrazení nazývá spojitá funkce
- kompozice dvou spojitých zobrazení je spojité zobrazení

Spojitý homeomorfismus (spojité homeomorfní zobrazení)

je spojité zobrazení pro které existuje spojité inverzí zobrazení

- z toho plyne, že otevřené množiny se zobrazují vždy na otevřené množiny
- aby zobrazení bylo homomorfní je nunté a stačí $\varphi(\overline{M}) = \overline{\varphi(M)}$ (uzávěr zobrazení = zobrazení uzávěru)

Homeomorfní prostory

metrické prostory mezi nimiž existuje homeomorfní zobrazení

Izometrické zobrazení

speciální případ homeomorfismu ve kterém se vzdálenost vzorů rovná vzdálenosti obrazů
$\forall x_1, x_2 \in X : \varrho(x_1, x_2) = \varrho^*(f(x_1), f(x_2))$

Izometrické prostory

prostory jsou navzájem izometrické pokud mezi nimi existuje izometrické zobrazení

- izometrické prostory lze považovat za totožné - liší se jen kvalita elementů

Úplné metrické prostory

Dále uvažujeme označení $\chi = (X, \varrho)$

Cauchyovská (neboli fundamentální) posloupnost x_n

členy posloupnosti se k sobě čím dál více blíží na libovolné malou vzálenost
$\forall\epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{Z} : \varrho(x_m, x_n) < \epsilon \forall m, n \geq N(\epsilon)$
(tj. pro libovně malou vzdálenost ε lze najít místo v posloupnosti od kterého dále jsou každé dva body posloupnosti k době blíže než ε)

Úplný metrický prostor

libovolná Cauchyovská posloupnost v něm konverguje
tj. $\exists x \in X : \varrho(x_n, x) \to 0$

- Příklady úplných metrických prostorů: nejjednodušším příkladem je číselná osa, libovolně rozměrný euklidovný prostor, nekonečně rozměrný prostor je úplný, prostor izolovaných bodů (Cauchyovyské jsou pouze stacionární posloupnosti - nekonečné opakování stejného bodu - které vždy konvergují), prostor spojitých funkcí
- Příklady neúplných metrických prostorů: Prostor spojitých funkcí s kvadratickou metrikou

Není-li metrický prostor úplný vždy jej lze nějakým způsobem vnořit do úplného metrického prostoru

Podprostor

množina bodů je podmnožinou, metrika je stejná

Zúplnění (značíme χ^*)

prostor χ^* je zúplnění prostoru χ pokud χ je podprostor χ^* a χ je hustý v χ^*

- například reálná čísla jsou zúplněním racionálních čísel
- každý metrický prostor má zúplnění a všechna jeho zúplnění jsou izometrická

Banachův princip pevného bodu

Řadu problémů souvisejících s jednoznačností řešení rovnic lze převést na otázku existence a jednoznačnosti pevného bodu nějakého zobrazení metrických prostorů

Kontraktivní zobrazení (kontrakce)

zobrazení metrického prostoru sám na sebe u kterého platí Lischitzova podmínka:
$\exists\alpha < 1, \forall x, y \in X : \varrho(f(x), f(y)) \leq \alpha\varrho(x, y)$ (tj. vzdálenost obrazů je menší než vzdálenost vzorů)

- každé kontraktivní zobrazení je spojité

Pevný bod

pevný bod zobrazení je takový bod, který se zobrazí sám na sebe $f(x) = x$

- tj. pevný bod je řešení rovnice $f(x) = x$

Banachův princip pevného bodu (neboli také princip kontraktivních zobrazení)

Každé kontraktivní zobrazení definované v úplném metrickém prostoru má právě jeden pevný bod.

Metoda postupných aproximací

aplikace banachova principu pevného bodu, praktická metoda přibližného výpočtu řešení rovnice $f(x) = x$

mějme funkci f definovanou na segmentu <a, b>, která je kontraktivní
potom posloupnost $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1})$ konverguje k jeidnému kořenu rovnice $f(x) = x$

Kategorie: Státnice 2011 | Matematické struktury v informatice