Predikátová logika

Obsah

1 Logika pojmy
2 Jazyk predikátové logiky 1. řádu
2.1 Logické symboly
2.2 Speciální symboly
2.3 Pojmy
3 Sémantika
4 Logické formule
4.1 Výskyty proměnných ve formuli
5 Dokazování logických formulí
5.1 Axiomy predikátové logiky
5.2 Řešený příklad
5.3 Příklady k procvičení
6 Věty o úplnosti a kompaktnosti
7 Prenexní tvar formulí
7.1 Postup
7.1.1 1. Vyloučení zbytečných kvantifikátorů
7.1.2 2. Přejmenování proměnných
7.1.3 3. Eliminace ekvivalence
7.1.4 4. Přesun negace dovnitř
7.1.5 5. Přesun kvantifikátorů doleva
7.2 Řešený příklad
7.3 Příklady k procvičení

Logika pojmy

Axiom je výchozí tvrzení dané teorie, které nedokazujem, jejich platnost se předpokládá.

Důsledek je tvrzení odvozené z dedukcí axiomů.

Bezespornost- vyvozené důsledky nesmějí obsahovat dané tvrzení a jeho negaci.

Symboly tvoří abecedu torií, spojením vznikají slova - **formule**.

Prvotní formule $p,q,...$ jsou jednoduché výroky, které dále neanalyzujeme. Složitější výroky konstruujeme pomocí spojek $\neg$, &, $\vee,\ \rightarrow,\ \equiv$ a závorek.

Pravdivostní ohodnocení formulí je zobrazení do množiny {0,1}, kde 1 znamená pravdivé hodnocení.

Tautologie jsou formule, které jsou pravdivé při libovolném ohodnocení, píšeme $\models$, např.:

- **zákon vyloučení třetího:** $A \vee \neg A$
- **zákon dvojí negace:** $\neg\neg A \equiv A$
- **zákon vyloučení sporu:** $\neg(A$ & $\neg A)$

Logicky ekvivalentní formule mají stejne pravdivostní ohodnocení při libovolném ohodnocení jejich částí.

Jazyk predikátové logiky 1. řádu

je specifikován jeho funkčními a predikátovými symboly (určují oblast, kterou jazyk popisuje). Predikátová logika 1. řádu umožňuje kvantifikovat pouze proměnné pro individua, ne množiny nebo relace ($\forall_{n=0}^{\infty} x$)

Logické symboly

- **Proměnné** označují libovolný prvek z daného oboru objektů.
- **Konstanty** označují jediný objekt (většinou něčím význačný).
- **Logické spojky a pomocné symboly** jsou definovány stejně jako ve výrokové logice (negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence)
- **Kvantifikátory**označují platnost pro *všechny* objekty oboru, popř. *existenci* požadovaného objektu (v dalším textu označuje symbol Q predikáty $\forall$ nebo $\exists$)
- **Závorky** ()
- **Predikátový symbol rovnosti =**

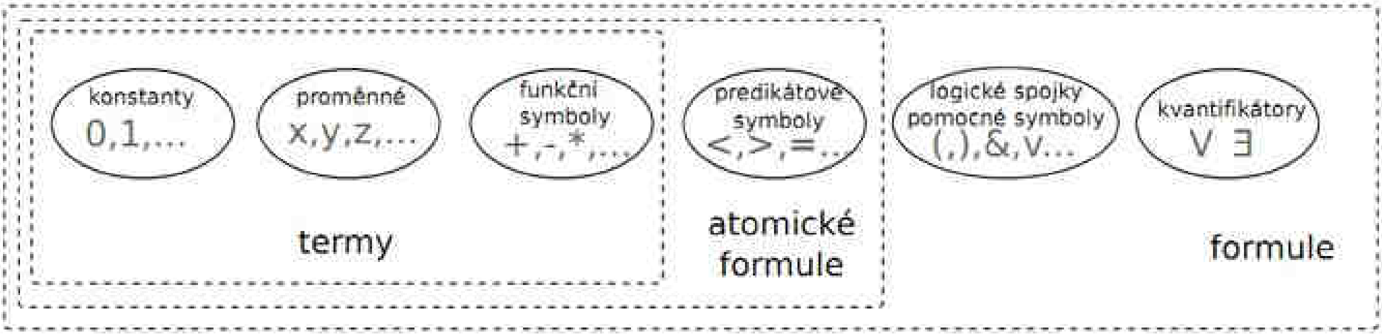
Speciální symboly

- **Funkční symboly** (f, g, ...) označují operace nad objekty. Mají *aritu* (četnost) - celé číslo, které udává počet argumentů (konstanta je *nulární funkce*).
- **Predikátové symboly** (p, q, ...) označují vlastnosti objektů (predikáty) a vztahy mezi nimi (je menší než, rovná se,...), také mají aritu.

Pojmy

- **Termy** jsou tvrzení sestavená pomocí proměnných, konstant a funkčních symbolů.
- **Atomické formule** jsou tvrzení sestavená pomocí termů a predikátových symbolů.

- **Formule** jsou tvrzení sestavená pomocí atomických formulí (termy + predikátové symboly), logických spojek a kvantifikátorů.



- **Vázaný výskyt proměnné** x ve formuli φ znamená, že proměnná x se nachází v podformuli φ tvaru $\forall x \varphi$. Pak se φ nazývá *obor kvantifikátoru*, jinak je proměnná x *volnou proměnnou*.
- **Uzavřená formule = výrok**, neobsahuje žádnou volnou proměnnou.

Sémantika

Realizací jazyka *L* je algebraická struktura $\mathcal{M}$, složená z:

- univerzum *M* - neprázdná množina objektů
- fukční zobrazení $f_{\mathcal{M}}: \ M^n \longrightarrow M$
- predikátová relace $p_{\mathcal{M}} \subseteq M^n$

Ohodnocení proměnných je libovolné zobrazení e všech proměnných do M.

Formule φ je splněna v realizaci $\mathcal{M}$, pokud je pravdivá při každém ohodnocení e. Píšeme $\mathcal{M} \models \varphi$. Je-li φ uzavřená, pak říkáme, že φ je pravdivá v $\mathcal{M}$.

Formule φ je logicky platná, pokud pro každou realizaci $\mathcal{M}$ platí $M \models \varphi$.

Formule φ a ψ jsou logicky ekvivalentní, pokud při libovolné realizaci $\mathcal{M}$ a libovolném ohodnocení e je $\mathcal{M} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{M} \models \psi[e]$.

Každá formule φ je ekvivalentní nějaké formuli ψ, ve které se nevyskytuje jeden kvantifikátor, popř. takové, ve které se vyskytují pouze spojky $\neg$ a $\longrightarrow$ a kvantifikátor $\forall$.

Substituce termů za proměnné: Pokud v termu t dosadíme za proměnné další termy, t zůstává termem. Dosazením termů za proměnné ve formuli vytvoří opět formuli. Ne vždy je to vhodné, proměnná musí být *substituovatelná*.

Substituovatelná proměnná x je taková, že žádný její volný výskyt neleží v oboru kvantifikátoru proměnné y, která je obsažená v substituovaném termu. Např. $S(y)$ není substituovatelný za x ve formuli $x \longrightarrow \exists y(x = S(y))$.

Logické formule

Výskyty proměnných ve formuli

Vázaný výskyt proměnné x ve formuli φ znamená, že proměnná x se nachází v podformuli φ tvaru $\forall x \varphi$ nebo $\exists x \varphi$. Pak se φ nazývá *obor kvantifikátoru*, jinak je proměnná x *volnou proměnnou*.

Příklad

Majme formulu $\varphi : \exists x \forall y p(x, z)$. Potom

- y nie je volná v φ,
- z je volná v φ,

- x je viazaná v φ.

Příklad 2

Majme formulu $\forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists z R(y,z)) \rightarrow \forall x S(x,y)$. P, R, S sú nejaké predikáty. Potom

- y je viazaná v podformuli $\forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists z R(y,z))$,
- z je viazaná v podformuli $\forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists z R(y,z))$,
- y je volná v podformuli $(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists z R(y,z))$,
- z nie je (volná) v podformuli $\exists x P(x,y)$,
- z je viazaná v podformuli $(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists z R(y,z))$.

Dokazování logických formulí

Axiomy predikátové logiky

Axiomy lze definovat pouze za použití spojek $\neg$ a $\longrightarrow$ a kvantifikátoru $\forall$. $\exists x \varphi$ znamená $\neg(\forall x(\neg\varphi))$.

Výrokové axiomy

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
2. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \eta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \eta))$
3. $((\neg\psi) \rightarrow (\neg\varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

Axiom kvantifikátoru

$(\forall x(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x \psi))$, x **nemá** volný výskyt v φ.

Axiom substituce

$(\forall x \varphi) \rightarrow \varphi_x[t]$, kde t je term substituovatelný za x

Axiomy rovnosti

$x_1 = y_1 \rightarrow (x_2 = y_2 \rightarrow (\ldots (x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)) \ldots))$, obdobně pro predikáty.

Odvozovací pravidlo Modus Ponens (Pravidlo odloučení)

Z formulí $\varphi, \varphi \rightarrow \psi$ (předpoklady) lze odvodit ψ(závěr).

Pravidlo zobecnění

Pro libovolnou proměnnou x z φ lze odvodit $\forall x(\varphi)$

Dedukce

$T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ právě tehdy, když $T, \varphi \vdash \psi$.

Řešený příklad

1) Dokažte větu $\exists x(\neg\varphi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \psi)$.

Postup:

1. Použijte tautologii $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$.
2. Proveďte distribuci kvantifikátoru $\forall$
3. Užijte třetí axiom výrokové logiky ve tvaru $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$.
4. Aplikujte pravidlo odloučení.
5. Použijte tautologii $\neg(\forall x \varphi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \psi)$.
6. Složte implikace ze 4. a 5.

Řešení:

1. $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$
2. $\forall x \varphi \rightarrow \forall x \neg\neg\varphi$
3. $(\forall x \varphi \rightarrow \forall x \neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\forall x \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\forall x \varphi)$
4. $\neg\forall x \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\forall x \varphi$
5. $\neg(\forall x \varphi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \psi)$
6. $\neg\forall x \neg\neg\varphi \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \psi)$
7. $\exists x \neg\varphi \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \psi)$

7. Proveďte úpravu (nahraďte kvantifikátor $\forall x$ kvantifikátorem $\exists x$).

Příklady k procvičení

[2007/2008 - **nekompletné zadanie, neznámy zdroj - TODO doplniť**]

To, že platí $\vdash \forall x \forall y \phi(x, y) \rightarrow \forall x \phi(x, x)$, můžete dokázat dle následujíciho návodu:

1. Vezměte formuli $\vdash \forall x \forall y \phi(x, y)$ jako předpoklad, pak užijte
2. axiom substituce
3. pravidlo odloučení
4. axiom substituce
5. pravidlo odloučení
6. pravidlo zobecnění
7. výsledek úvah 1-6 ve tvaru vztahu o dokazatelnosti formule z předpokladu
8. větu o dedukci.

Zadání vypádá kompletní. Řešení dle mě je:

1. $\vdash \forall x \forall y \phi(x, y)$
2. $\vdash \forall x \forall y \phi(x, y) \rightarrow \forall y \phi(y, y)$
3. $\vdash \forall y \phi(y, y)$
4. $\vdash \forall y \phi(y, y) \rightarrow \phi(x, x)$
5. $\vdash \phi(x, x)$
6. $\vdash \forall x \phi(x, x)$
7. $\forall x \forall y \phi(x, y) \vdash \forall x \phi(x, x)$
8. $\vdash \forall x \forall y \phi(x, y) \rightarrow \forall x \phi(x, x)$

Věty o úplnosti a kompaktnosti

Teorie T je libovolná množina formulí daného jazyka L a má svou realizaci M.

Teorie T je uplná, pokud je bezesporná a pro každou uzavřenou formuli platí buď $T \models \phi$ nebo $T \models \neg\phi$

Postova věta o úplnosti: Dokazatelné formule jsou tautologiemi ($\vdash A \Leftrightarrow \models A$).

Věta o úplnosti (Goedel): Teorie T je bezesporná, právě když má nějaký model.

Věta o kompaktnosti: Nechť T je množina formulí jazyka L. Pak teorie T má nějaký model právě když každá její konečná podmnožina $Q \subseteq T$ má model.

Prenexní tvar formulí

Postup

Převedení formule na prenexní tvar probíhá v 5 krocích v tomto pořadí

1. Vyloučení zbytečných kvantifikátorů

Vynecháme $\forall x$ resp. $\exists x$ v podformulích $\forall x B$ resp. $\exists x B$, pokud se proměnná x nevyskytuje v B.

2. Přejmenování proměnných

Nejlevější podformuli QxA (x se nevyskytuje volně v A), pokud má další výskyt ve výchozí formuli, nahradíme $Qx'A'$, kde x' je různá od ostatních proměnných. Opakujeme, až všechny kvantifikátory mají různé proměnné a žádná proměnná není v nové formuli současně volná a vázaná.

3. Eliminace ekvivalence

$A \Leftrightarrow B$ nahradíme za $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

4. Přesun negace dovnitř

Provádíme postupně náhrady, než se spojka negace vyskytne nevýše bezprostředně před atomickými formulemi.

$\neg\forall x A$ ... $\exists x \neg A$

$\neg\exists x A$ ... $\forall x \neg A$

$\neg(A \rightarrow B)$ ... $A \wedge \neg B$

$\neg(A \vee B)$ ... $\neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B)$ ... $\neg A \vee \neg B$

$\neg(\neg A)$ ... A

5. Přesun kvantifikátorů doleva

Přesun kvantifikátorů doleva pro B, ve které se nevyskytuje x, provádíme náhrady dle schemat:

$(QxA) \vee B$ ... $Qx(A \vee B)$

$(QxA) \wedge B$ ... $Qx(A \wedge B)$

$(QxA) \rightarrow B$ ... $(\neg Q)x(A \rightarrow B)$

$B \rightarrow (QxA)$ ... $Qx(B \rightarrow A)$

Řešený příklad

1) Převeďte negaci formule $[\forall x p(x,y) \rightarrow \exists x \forall y q(x,y)] \wedge \exists y[\forall x p(y,y) \rightarrow \forall x p(x,y)]$ do prenexního tvaru.

[2008/2009 | půlsemestrálka | skupina A,B | příklad 2]

Řešení:

1. odstranění implikace

$$[\neg\forall x p(x,y) \vee \exists x \forall y q(x,y)] \wedge \exists y[\neg\forall x p(y,y) \vee \forall x p(x,y)]$$

2. negace formule

$$[\forall x p(x,y) \wedge \neg(\exists x \forall y q(x,y))] \vee \forall y[\forall x p(y,y) \wedge \neg(\forall x p(x,y))]$$

3. odstranění zbytečných kvantifikátorů, přejmenování proměnných

$$[\forall x' p(x',y') \wedge \neg(\exists x'' \forall y'' q(x'',y''))] \vee \forall y[p(y,y) \wedge \neg(\forall x p(x,y))]$$

4. úprava negovaných kvantifikátorů

$$[\forall x' p(x',y') \wedge \forall x'' \exists y'' \neg q(x'',y'')] \vee \forall y[p(y,y) \wedge \exists x \neg p(x,y)]$$

5. přesunutí kvantifikátorů doleva

$$\forall x' \forall x'' \exists y'' \forall y \exists x [p(x',y') \wedge \neg q(x'',y'')] \vee [p(y,y) \wedge \neg p(x,y)]$$

6. pouze jedna logická spojka $\vee$

Tento krok je už zbytečný a je v něm podle mě chyba(JamesScott), protože:
$p(x,y) \vee q(x,y) = \neg[\neg p(x,y) \wedge \neg q(x,y)]$

$$\forall x' \forall x'' \exists y'' \forall y \exists x [\neg p(x', y') \vee q(x'', y'') \vee \neg p(y,y) \vee p(x,y)]$$

Příklady k procvičení

1) Najděte prenexní tvar formule, kde P, R a S jsou binární predikáty.

- $\forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow \exists u R(y,u)) \rightarrow \forall x S(x,y)$
- $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(R(x,y) \rightarrow \neg \forall z S(y,z)))$

2) Převeďte formuli do prenexního tvaru a znegujte.

- $\exists x \varphi(x,y) \rightarrow \forall x(\psi(x) \vee \chi(y,z))$
- $\forall x \varphi(x,y) \rightarrow \exists x(\psi(x) \vee \chi(y,z))$

3) Formuli $\forall x \forall y(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$ převeďte do prenexního tvaru tak, aby neobsahovala logickou spojku negace.

4) Formuli φ, která je negací formule $\forall x(\neg f(x) \wedge \forall y \exists x(g(x,y) \rightarrow \exists z \neg h(x,y)))$ napište tak, aby se v ní nevyskytovala spojka $\neg$. Pak jí převeďte do prenexního tvaru.

5) K formuli $\forall x \exists y(x.y = 1) \rightarrow \forall x \forall y \forall z(x.z = y.z \rightarrow x = y)$ najděte ekvivalentní formuli v prenexním tvaru, přičemž 1 je konstanta a $.$ binární funkční symbol.

6) Převeďte negaci formule do prenexního tvaru.

- $\forall x[p(x,y) \wedge \forall y q(x,y)] \rightarrow \exists y[\forall x p(y,y) \rightarrow \forall x p(x,y)]$ [2008/2009 | půlsemestrálka | skupina C,D | příklad 2]

Kategorie: Matematické pahýly | Matematické struktury v informatice | Státnice MGM | Státnice MAT | Státnice 2011

Stránka byla naposledy editována 25. 5. 2011 v 14:18.