

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física de São Carlos

**Seleção de grupo: entendendo o  
conflito entre o bem coletivo e o  
interesse individual**

Angelo Antonio Vernaschi Zampronio, 12702579  
Orientador: Prof. José Fernando Fontanari

Agosto 2023  
São Carlos

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Metodologia</b>	<b>2</b>
2.1	Simulação . . . . .	2
2.2	Ganho médio . . . . .	3
2.3	Probabilidade de fixação . . . . .	6
2.4	Cadeias de Markov . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>9</b>
3.1	Sem punição . . . . .	9
3.2	Punidor pessoal de primeira ordem . . . . .	11
3.3	Punidor pessoal de segunda ordem . . . . .	14
3.4	Punidor institucional de primeira ordem . . . . .	17
3.5	Punidor institucional de segunda ordem . . . . .	20
3.6	Punidor pessoal e institucional de primeira ordem . . . . .	22
3.7	Punidor pessoal e institucional de segunda ordem . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>29</b>
<b>5</b>	<b>Referências</b>	<b>30</b>

## Lista de Figuras

1	População de estratégias X, Y e Z. . . . .	10
2	Ganho de uma população de estratégias X, Y e Z. . . . .	11
3	População de estratégias X, Y, Z e W com punição de primeira ordem. . . . .	13
4	Ganho de uma população de estratégias X, Y, Z e W com punição de primeira ordem. . . . .	14
5	População de estratégias X, Y, Z e W com punição de segunda ordem. . . . .	16
6	Ganho de uma população de estratégias X, Y, Z e W com punição de segunda ordem. . . . .	17
7	População de estratégias X, Y, Z e V com punição de primeira ordem. . . . .	18
8	Ganho de uma população de estratégias X, Y, Z e V com punição de primeira ordem. . . . .	19
9	População de estratégias X, Y, Z e V com punição de segunda ordem. . . . .	21
10	Ganho de uma população de estratégias X, Y, Z e V com punição de segunda ordem. . . . .	22
11	População de estratégias X, Y, Z, V e W com punição de primeira ordem. . . . .	24
12	Ganho de uma população de estratégias X, Y, Z, V e W com punição de primeira ordem. . . . .	25
13	População de estratégias X, Y, Z, V e W com punição de segunda ordem. . . . .	27
14	Ganho de uma população de estratégias X, Y, Z, V e w com punição de segunda ordem. . . . .	28

# 1 Introdução

O jogo do bem público é um modelo usado para se estudar a cooperação entre uma população que depende entre si para atingir um resultado ótimo, havendo estratégias egoístas dentro desta população. Tais estratégias se beneficiam em relação às demais, porém prejudicando o resto dos jogadores, assim como a si mesmas a longo prazo.

O objetivo deste relatório é estudar a dinâmica de uma economia baseada no jogo do bem público e os efeitos que diferentes estratégias e punições possuem nesta. Essa dinâmica será analisada tanto de forma analítica como computacional, utilizando processos estocásticos, como as cadeias de Markov, na primeira abordagem, e simulações numéricas na segunda. Os parâmetros utilizados para avaliar cada modelo englobam tanto a estabilidade populacional, medindo a constância das frequências das estratégias durante a dinâmica, quanto o ganho médio da economia.

Para modelar a versão do jogo do bem público aqui estudada, assume-se que, dentro de uma população  $M$ ,  $N$  indivíduos escolhidos aleatoriamente participam em uma interação, cada indivíduo pode escolher contribuir um valor  $c > 0$  para o bem público local (apenas os  $N$  indivíduos interagem entre si). O valor de cada contribuição será multiplicado por um fator  $r > 1$  e dividido igualmente entre os outros jogadores no grupo. Se todos contribuírem, cada jogador ganha  $(r - 1)c$ . Jogadores egoístas não contribuem e mesmo assim recebem do bem público, levando vantagem sobre os demais. Se todos adotarem esta estratégia, o ganho geral seria zero, levando ao colapso do sistema. Após cada jogador ganhar sua quantia, cada jogador irá comparar seu ganho com outro jogador aleatório do mesmo grupo e, se seu ganho for menor, este irá trocar de estratégia, imitando o outro jogador, estratégias com o mesmo ganho tem 50% de chance de imitar a outra estratégia.

Para evitar a estagnação da dinâmica após esta atingir uma população homogênea cada jogador irá, nesta situação, com certa probabilidade  $\mu > 0$ , mudar para uma estratégia diferente. Após a mudança acontecer, a população irá ser invadida ou regridirá para a situação anterior, no qual a mudança ocorrerá novamente.

Neste relatório, serão analisados dois tipos de punidores, institucionais e pessoais. Punidores institucionais não só contribuem  $c$  para o bem público, mas também um valor  $G$  para a instituição punidora. Os infratores serão multados em um valor  $B * N_v$ , onde  $N_v$  é o número de punidores institucionais no grupo. Punidores pessoais contribuem  $c$  para o bem público e, depois do jogo, multam em um valor  $\beta$  cada infrator no grupo, gastando  $\gamma$  em cada multa. Além dos diferentes punidores, serão estudados também dois tipos de punição, de primeira e segunda ordem. A punição de primeira considera

como infratores apenas os jogadores que não contribuem para o bem público, já a de segunda ordem, considera também os jogadores que não contribuem para a punição. Um detalhe a se notar é que, como o punidor pessoal investe na punição apenas depois do jogo, ele é visto como infrator pelo punidor institucional, quando a punição é de segunda ordem.

Por fim, existem os jogadores que não participam do jogo, ganhando um valor  $\sigma$  independente dos outros jogadores.

## 2 Metodologia

Nesta seção serão apresentadas as ferramentas matemáticas utilizadas para estudar a dinâmica e a maneira como os dados foram produzidos numericamente.

Seja  $M$  o tamanho da população;  $X$  o número de jogadores que contribuem para o bem público, mas não punem;  $Y$  o número de jogadores que participam, mas não contribuem em nada;  $Z$  o número de não participantes;  $V$  o número de punidores institucionais; e  $W$  o número de punidores pessoais.

### 2.1 Simulação

Os dados foram produzidos por uma simulação em python usando as bibliotecas matplotlib e random. Dada uma população de tamanho fixo  $M$ , foram realizadas diversas simulações com diferentes composições das diferentes estratégias  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $V$  e  $W$ .

A população inicial em cada simulação é composta apenas pela estratégia  $Y$ .

As médias tanto de frequência quanto de ganho médio foram calculadas usando 100 simulações independentes. Foram realizadas simulações de curto prazo ( $10^4$  iterações) e longo prazo ( $10^5$  iterações).

Para as simulações, considerou-se os seguintes valores para os parâmetros:

Parâmetro	Explicação	Valor
$M$	Tamanho da população	100
$N$	Tamanho do grupo	5
$r$	Multiplicador do bem público	3
$c$	Contribuição para o bem público	1
$\sigma$	Renda fixa da estratégia $Z$	1
$G$	Contribuição para a instituição punidora	0.7
$B$	Multa aplicada pelos punidores institucionais	0.7
$\beta$	Multa aplicada pelos punidores pessoais	0.7
$\gamma$	Custo da multa aplicada pelos punidores pessoais	0.7
$\mu$	Probabilidade de mudança de estratégia	$10^{-3}$

Tabela 1: Valor dos parâmetros usados na simulação.

## 2.2 Ganho médio

O ganho médio de uma estratégia é calculado somando o ganho de cada composição possível de um grupo pesado pela probabilidade de tal composição acontecer. Por exemplo, a probabilidade de um jogador com estratégia  $X$  estar em um grupo com  $l$  jogadores de estratégia  $Y$ ,  $m$  jogadores de estratégia  $Z$  e  $k$  outros jogadores de estratégia  $X$  é dado por uma distribuição hipergeométrica:

$$\frac{\binom{X-1}{k} \binom{Z}{m} \binom{Y}{l}}{\binom{M-1}{N-1}}$$

Multiplicando esta probabilidade pelo ganho  $g_x$  do jogador  $X$  e somando sobre todas as composições possíveis do grupo obtemos o ganho médio:

$$G_x = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\binom{X-1}{k} \binom{Z}{m} \binom{Y}{l}}{\binom{M-1}{N-1}} g_x(k, m, l, N) \delta_{k+m+l, N-1} \quad (1)$$

No caso de haver  $N-1$  não participantes, isto é,  $m = N-1$ , temos que o ganho da estratégia  $X$  será  $\sigma$ , pois não haverá participantes para que o jogo aconteça. Caso contrário, o ganho de  $X$  será  $rc \frac{k}{N-1-m} - c$ . Assim, o ganho médio de  $X$  será dado por:

$$\begin{aligned}
G_x = & rc \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-2} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\binom{X-1}{k} \binom{Z}{m} \binom{Y}{l}}{\binom{M-1}{N-1}} \frac{k}{N-1-m} \delta_{k+m+l, N-1} - \\
& -c \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-2} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\binom{X-1}{k} \binom{Z}{m} \binom{Y}{l}}{\binom{M-1}{N-1}} \delta_{k+m+l, N-1} + \\
& \sigma \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\binom{X-1}{k} \binom{Z}{N-1} \binom{Y}{l}}{\binom{M-1}{N-1}}
\end{aligned}$$

Começando com o primeiro termo da equação acima:

$$rc \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-2} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\binom{X-1}{k} \binom{Z}{m} \binom{Y}{l}}{\binom{M-1}{N-1}} \frac{k}{N-1-m} \delta_{k+m+l, N-1}$$

Fazendo a soma sobre l, obtém-se:

$$rc \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-2} \frac{\binom{X-1}{k} \binom{Z}{m} \binom{Y}{N-1-m-k}}{\binom{M-1}{N-1}} \frac{k}{N-1-m} \quad (2)$$

Somando sobre k:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} \binom{X-1}{k} \binom{Y}{N-1-m-k} k &= \binom{X+Y-1}{N-1-m} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\binom{X-1}{k} \binom{Y}{N-1-m-k} k}{\binom{X+Y-1}{N-1-m}} = \\
&= \binom{X+Y-1}{N-1-m} (N-1-m) \frac{X-1}{X+Y-1}
\end{aligned}$$

Substituindo o resultado em (2):

$$rc \sum_{m=0}^{N-2} \frac{\binom{Z}{m} \binom{X+Y-1}{N-1-m}}{\binom{M-1}{N-1}} \frac{X-1}{X+Y-1}$$

Por fim, somando em m:

$$\begin{aligned} rc \frac{X-1}{X+Y-1} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\binom{Z}{m} \binom{X+Y-1}{N-1-m}}{\binom{M-1}{N-1}} - rc \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}} \frac{X-1}{X+Y-1} = \\ = \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right] rc \frac{X-1}{X+Y-1} \end{aligned} \quad (3)$$

Agora, o segundo termo:

$$\begin{aligned} -c \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-2} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\binom{X-1}{k} \binom{Z}{m} \binom{Y}{l}}{\binom{M-1}{N-1}} \delta_{k+m+l, N-1} = \\ = -c \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\binom{X-1}{k} \binom{Z}{m} \binom{Y}{l}}{\binom{M-1}{N-1}} \delta_{k+m+l, N-1} + c \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}} = \\ -c \left(1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

O terceiro termo será apenas:

$$\frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}} \sigma \quad (5)$$



que é a probabilidade de apenas jogadores  $Z$  serem escolhidos para o grupo multiplicado pelo ganho  $\sigma$

Somando todos os termos (3), (4) e (5), obtém-se o resultado de (1):

$$G_x = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}} \sigma + \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right] c \left(r \frac{X-1}{X+Y-1} - 1\right)$$

## 2.3 Probabilidade de fixação

Para modelar a imitação, será usado a equação (6) tomando o limite de  $s \rightarrow \infty$ . Assim, a probabilidade de imitação será 1 se o jogador  $j$  tiver um ganho maior do que a do jogador  $i$  e 0 quando o contrário ocorrer. Isto irá simular bem a dinâmica descrita anteriormente.

$$\frac{1}{1 + \exp[-s(G_j - G_i)]} \quad (6)$$

Agora, considere uma população homogênea de jogadores da estratégia  $k$ , ou seja,  $X_k = M$ . Nesta população, surge um mutante usando a estratégia  $l$ , ou seja,  $X_l = 1$  e  $X_k = M - 1$ . Será deduzida à seguir a probabilidade  $\rho_{kl}$  de que esse mutante domine a população. Para facilitar os cálculos, será calculada a probabilidade que a estratégia  $l$  seja extinta, isto é, o complementar de  $\rho_{kl}$ . A seguir, serão feitas algumas definições.

Seja  $u_i$  a probabilidade que a estratégia  $l$  se extinga quando  $X_l = i$ . Tem-se que  $u_0 = 1$  e  $u_M = 0$ .

Seja  $\lambda_i$  a probabilidade que o número de jogadores  $l$  aumente de uma unidade numa interação do jogo quando  $X_l = i$ . Essa é a taxa de nascimento.

Seja  $\mu_i$  a probabilidade que o número de jogadores  $l$  diminua de uma unidade numa interação do jogo quando  $X_l = i$ . Essa é a taxa de morte.

Obviamente, como a população total é fixa,  $\lambda_0 = \mu_0 = \lambda_M = \mu_M = 0$

A probabilidade de extinção satisfaz a equação de recorrência:

$$u_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} u_{i+1} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} u_{i-1} \quad (7)$$

Manipulando (7), chega-se em:

$$u_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} u_{i+1} - \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} u_i + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} u_i + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} u_{i-1}$$

$$(u_{i+1} - u_i) = \frac{\mu_i}{\lambda_i} (u_i - u_{i-1}) \quad (8)$$

Aplicando a mudança de variável a seguir:

$$\nu_i = u_{i+1} - u_i \quad (9)$$

$$\nu_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i} \nu_{i-1} \quad (10)$$

chega-se em outra equação de recorrência. Expandindo esta equação:

$$\nu_i = \nu_0 \prod_{j=1}^i \frac{\mu_j}{\lambda_j} \quad (11)$$

Agora, somando os dois lados de (9) obtém-se:

$$\sum_{i=1}^m \nu_i = \sum_{i=1}^m (u_{i+1} - u_i) = u_{m+1} - u_1 \quad (12)$$

Substituindo (11) em (12):

$$u_{m+1} - u_1 = (u_1 - 1) \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^i \frac{\mu_j}{\lambda_j}$$

Manipulando esta equação chega-se em:

$$\begin{aligned} u_M - u_1 &= (u_1 - 1) \sum_{i=1}^{M-1} \prod_{j=1}^i \frac{\mu_j}{\lambda_j} \\ u_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{M-1} \prod_{j=1}^i \frac{\mu_j}{\lambda_j}}{1 + \sum_{i=1}^{M-1} \prod_{j=1}^i \frac{\mu_j}{\lambda_j}} \\ 1 - u_1 &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{M-1} \prod_{j=1}^i \frac{\mu_j}{\lambda_j}} \end{aligned} \quad (13)$$

Agora, a probabilidade de que um jogador  $j$  diminua em uma unidade será a probabilidade deste de se encontrar com um jogador  $k$  de outra estratégia, multiplicado pela probabilidade do jogador  $j$  imitar o jogador  $k$ .

$$\mu_j = \frac{j}{M} \frac{M-j}{M} \frac{1}{1 + \exp[-s(G_k - G_l)]} \quad (14)$$

De maneira parecida, a probabilidade de que um jogador  $j$  aumente em uma unidade será a probabilidade deste jogador de se encontrar com outro jogador  $k$  de estratégia diferente, multiplicado pela probabilidade do jogador  $k$  imitar o jogador  $j$ .

$$\lambda_j = \frac{j}{M} \frac{M-j}{M} \frac{1}{1 + \exp[-s(G_l - G_k)]} \quad (15)$$

Dividindo (14) por (15):

$$\frac{\mu_j}{\lambda_j} = \frac{1 + \exp[-s(G_l - G_k)]}{1 + \exp[-s(G_k - G_l)]} = \exp[-s(G_l - G_k)]$$

e substituindo em (13), obtém-se finalmente:

$$1 - u_1 = \rho_{kl} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{M-1} \exp[-s \sum_{j=1}^i (G_l - G_k)]} \quad (16)$$

Esta é a probabilidade de fixação que será usada na cadeia de Markov da dinâmica para determinar as frequências de estratégias na população a longo prazo.

No caso limite onde  $s \rightarrow \infty$  a equação (16) simplifica significativamente.

$$\begin{cases} \rho_{kl} = 1, & \text{se } G_l > G_k \\ \rho_{kl} = 0, & \text{se } G_l < G_k \\ \rho_{kl} = \frac{1}{M}, & \text{se } G_l = G_k \end{cases} \quad (17)$$

Existem algumas exceções, em geral relacionadas à estratégia Z, estes casos serão explicados separadamente.

## 2.4 Cadeias de Markov

Uma cadeia de Markov é um sistema que transita de um estado para outro em intervalos discretos de tempo, sendo a probabilidade de transição para um novo estado depende apenas do estado atual e não dos estados anteriores. As propriedades e comportamento das cadeias de Markov podem ser estudados matematicamente, e muitas vezes são representados através de matrizes de probabilidade de transição, que descrevem as probabilidades de transição entre diferentes estados da cadeia.

Os estados da cadeia de Markov da dinâmica aqui estudada serão as populações homogêneas das diferentes estratégias e a transição de um estado para o outro será a invasão de certa estratégia na população.

Por exemplo, considere a entrada 1.1 da matriz (18). A chance de uma população homogênea de estratégia X continuar neste estado seria o complemento da probabilidades de transição para os outros estados, neste exemplo existem duas transições possíveis, de X para Y e de X para Z, como ambas são igualmente prováveis multiplica-se a probabilidade de transição das duas

por meio. Já a entrada 2.3 é a probabilidade de transição de uma população homogênea de estratégia  $Y$  se invadida por uma estratégia  $Z$ , como a chance de um indivíduo desta estratégia é meio, dividi-se a probabilidade por este valor.

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\rho_{XY} - \frac{1}{2}\rho_{XZ} & \frac{1}{2}\rho_{XY} & \frac{1}{2}\rho_{XZ} \\ \frac{1}{2}\rho_{YX} & 1 - \frac{1}{2}\rho_{YX} - \frac{1}{2}\rho_{YZ} & \frac{1}{2}\rho_{YZ} \\ \frac{1}{2}\rho_{ZX} & \frac{1}{2}\rho_{ZY} & 1 - \frac{1}{2}\rho_{ZX} - \frac{1}{2}\rho_{ZY} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Em um caso alternativo, multiplica-se a probabilidade de transição de cada entrada da matriz por  $n - 1$ , sendo  $n$  o número de estratégias participando do jogo.

### 3 Resultados

Nesta seção, serão analisados sete casos baseados no modelo explicado anteriormente. Cada caso será estudado primeiro matematicamente e depois usando simulação numérica, os resultados de ambos serão comparados no final de cada subseção.

As matrizes e as frequências serão organizadas na seguinte sequência:  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $W$ ,  $V$ .

#### 3.1 Sem punição

Considere uma população de estratégias  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . O ganho médio destas estratégias é:

$$G_x = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\sigma + \left(1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right)c\left(r\frac{X-1}{X+Y-1} - 1\right)$$

$$G_y = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\sigma + \left(1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right)rc\frac{X}{X+Y-1}$$

Substituindo os ganhos na equação (16) e montando a matriz de markov como descrito anteriormente, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad (19)$$

A razão para os termos  $1/4$  na última linha é que um único mutante-X em uma população de jogadores-Z não pode participar de nenhum jogo e tem um pagamento  $\sigma$ , assim como os outros não participantes. A próxima mudança obtida através do processo de imitação tem igual probabilidade de retornar o jogador-X ao grupo ou de produzir um segundo jogador-X. A partir desse ponto, os jogadores-X têm um pagamento esperado maior que  $\sigma$  e aumentarão até a fixação.

O autovetor à esquerda desta matriz é  $(1/4, 1/4, 1/2)$ . Estes números, como falado anteriormente, representam a distribuição estacionária da dinâmica.

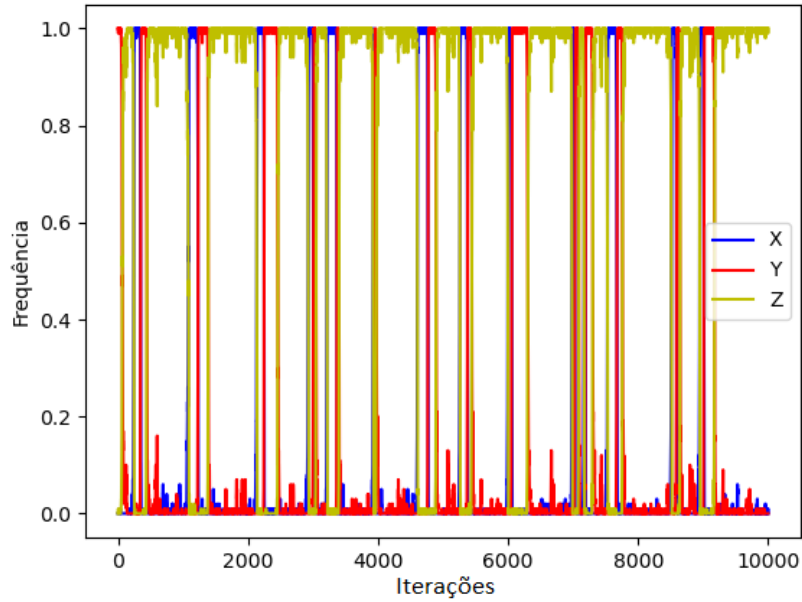


Figura 1: População de estratégias X, Y e Z.

Observa-se na figura 1 que uma população composta apenas das estratégias X, Y e Z é altamente instável. Existe um ciclo que se repete ao longo da dinâmica  $Y \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow Y$ . Em outras palavras, a sequência em que a população se torna homogênea e a estratégia representante segue o ciclo descrito anteriormente.

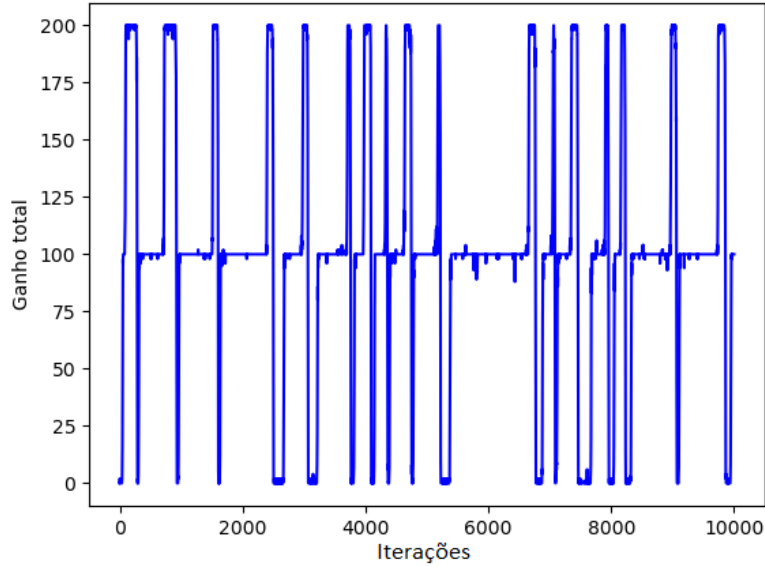


Figura 2: Ganho de uma população de estratégias X, Y e Z.

Os valores de ganho total próximos de 200, 100 e 0 representam, respectivamente, a dominância das estratégias X, Z e Y.

Iterações	Ganho total médio	X	Y	Z
$10^4$	99.3681	0.1517	0.1595	0.6954
$10^5$	99.8532	0.1508	0.1538	0.6888

Tabela 2: Frequência média de cada estratégia e ganho total médio.

O resultado obtido analiticamente prevê à longo prazo uma distribuição da forma  $(0.25, 0.25, 0.75)$ . Este resultado difere cerca de 40% em relação às estratégias X e Y e 8% em relação a estratégia Z. Apesar disto, a frequência dominante continua sendo a estratégia Z e as frequências de X e Y são aproximadamente iguais, como mostram os dois resultados.

### 3.2 Punidor pessoal de primeira ordem

Adicionando a estratégia W, com punição de primeira ordem. Os ganhos médios de cada estratégia são:

$$G_x = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}} \sigma + \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right] c \left[r \frac{X+W-1}{M-Z-1} - 1\right]$$

$$G_y = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}} \sigma + \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right] r c \frac{X+W}{M-Z-1} - \beta W \frac{(N-1)}{M-1}$$

$$G_w = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}} \sigma + \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right] c \left[r \frac{X+W-1}{M-1} - 1\right] - \gamma Y \frac{N-1}{M-1}$$

Montando a matriz de markov:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \frac{1}{3M} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3M} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3M} & 0 & 0 & 1 - \frac{1}{3M} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Observe que, durante uma transição entre as estratégias  $X$  e  $W$ , surgem os termos  $1/M$ , que representam situações em que os ganhos se equivalem. Isso ocorre porque a estratégia  $W$  não impõe punições a nenhum jogador na presença de uma população com estratégia  $X$  e ambas contribuem para o bem público. Em outras palavras,  $W$  e  $X$  manifestam comportamento idêntico nesse contexto. A distribuição estacionária desta dinâmica é dada por:  $\frac{1}{M+8}(2, 2, 2, M+2)$ .

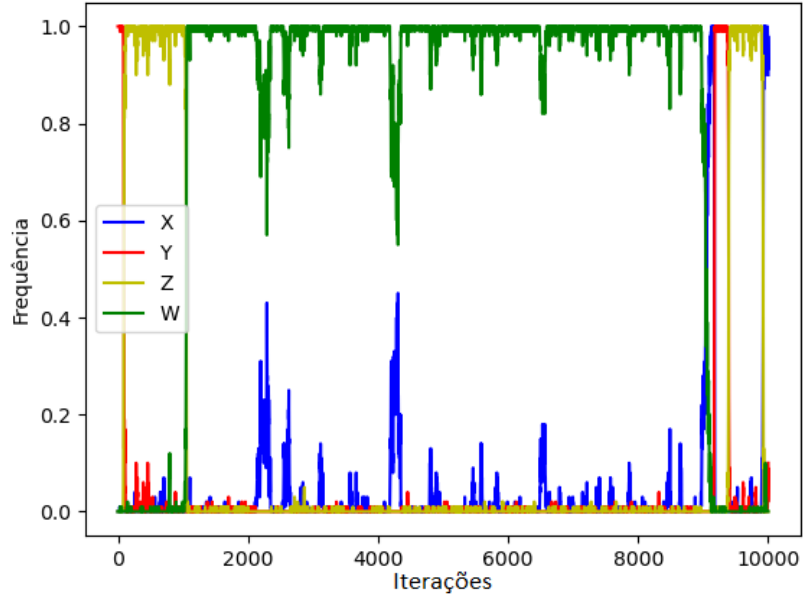


Figura 3: População de estratégias X, Y, Z e W com punição de primeira ordem.

Adicionando a estratégia  $W$ , com punição de primeira ordem, obtém-se uma economia mais estável, porém a população ainda pode ser invadida por  $Y$ . Existem dois ciclos principais nesta dinâmica,  $Y \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow Y$  e  $Y \rightarrow Z \rightarrow W \rightarrow X \rightarrow Y$ , havendo também um possível ciclo intermediário  $X \rightarrow W \rightarrow X/W \rightarrow X \rightarrow W$ .



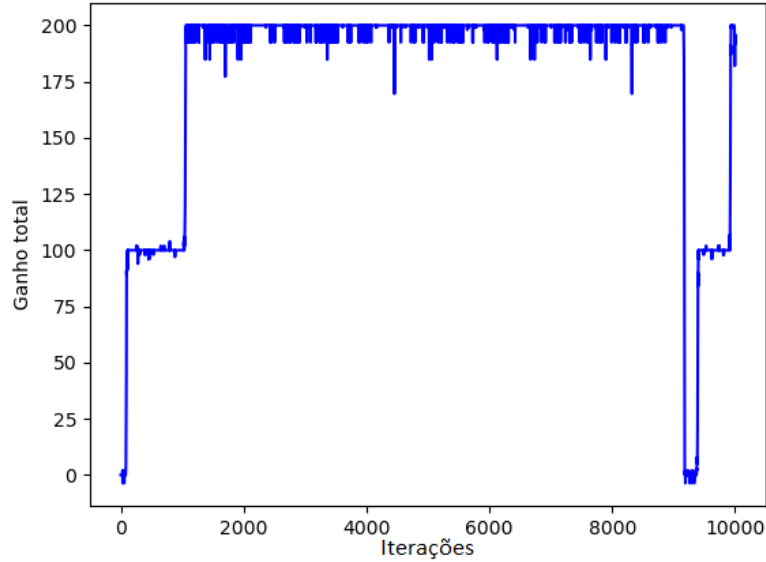


Figura 4: Ganho de uma população de estratégias X, Y, Z e W com punição de primeira ordem.

Os valores de ganho próximos de 200 representam a dominância das estratégias W e X (incluindo a mistura das duas), enquanto que os valores próximos de 100 e 0 representam, respectivamente, a dominância das estratégias Z e Y.

Iterações	Ganho total médio	X	Y	Z	W
$10^4$	179.5295	0.0726	0.0468	0.1092	0.7714
$10^5$	185.5304	0.0671	0.0323	0.0783	0.8222

Tabela 3: Frequência média de cada estratégia.

O resultado esperado analiticamente para uma população de 100 indivíduos é uma frequência de população dada por (0.0185, 0.0185, 0.0185, 0.9444). Apesar da frequência dominante nos dois resultados ser a estratégia W, os demais valores possuem muita imprecisão.

### 3.3 Punidor pessoal de segunda ordem

Assumindo agora a punição de segunda ordem, o ganho médio das estratégias são:

$$G_x = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}} \sigma + \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right] c \left[ r \frac{X+W-1}{M-Z-1} - 1 \right] - \frac{N-1}{M-1} GX \left[1 - \frac{\binom{M-Y-2}{N-2}}{\binom{M-2}{N-2}}\right]$$

$$G_y = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}} \sigma + \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right] r c \frac{X+W}{M-Z-1} - \beta W \frac{(N-1)}{M-1}$$

$$G_w = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}} \sigma + \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right] c \left[ r \frac{X+W-1}{M-Z-1} - 1 \right] - \frac{N-1}{M-1} \gamma \left[ Y + X \left(1 - \frac{\binom{M-Y-2}{N-2}}{\binom{M-2}{N-2}}\right) \right]$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \frac{1}{3M} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3M} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3M} & 0 & 0 & 1 - \frac{1}{3M} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Note que, apesar dos ganhos serem diferentes, a matriz se mantém a mesma que a da punição de primeira ordem. Isto se deve ao fato de que a dinâmica aqui estudada não permite a mistura de mais de duas estratégias ao mesmo tempo. Nesse cenário, os termos diferentes nos ganhos dos dois tipos de punição equivalem. A distribuição estacionária desta dinâmica é igual à anterior:  $\frac{1}{M+8}(2, 2, 2, M+2)$ .

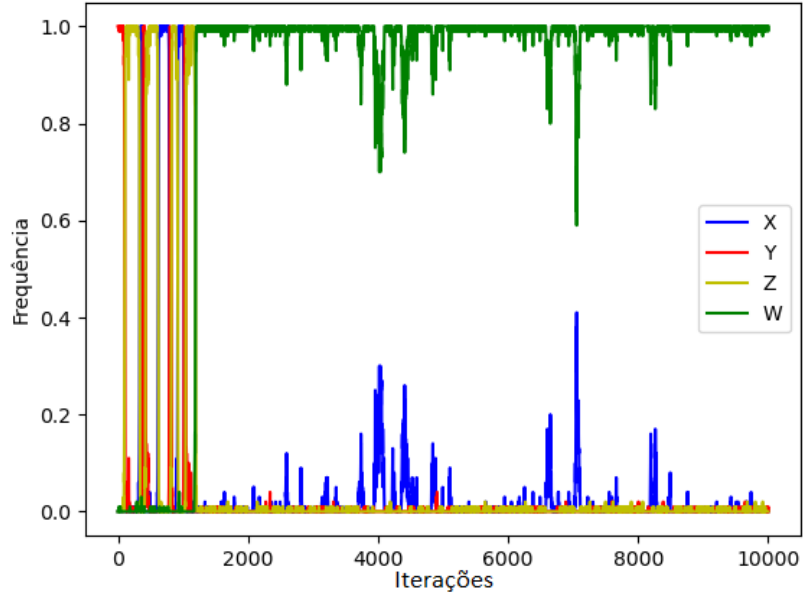


Figura 5: População de estratégias  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  e  $W$  com punição de segunda ordem.

A punição de segunda ordem torna-se um problema quando se trata da estratégia  $W$ . Isto porque as estratégias  $X$  e  $W$  se comportam da mesma forma quando não há presença de infratores e, como esse modelo só permite a coexistência de duas estratégias, torna-se impossível diferenciar as duas estratégias quando estas coexistem, assim sendo,  $W$  não consegue punir  $X$  e a punição de segunda ordem gera a mesma dinâmica que a de primeira ordem.

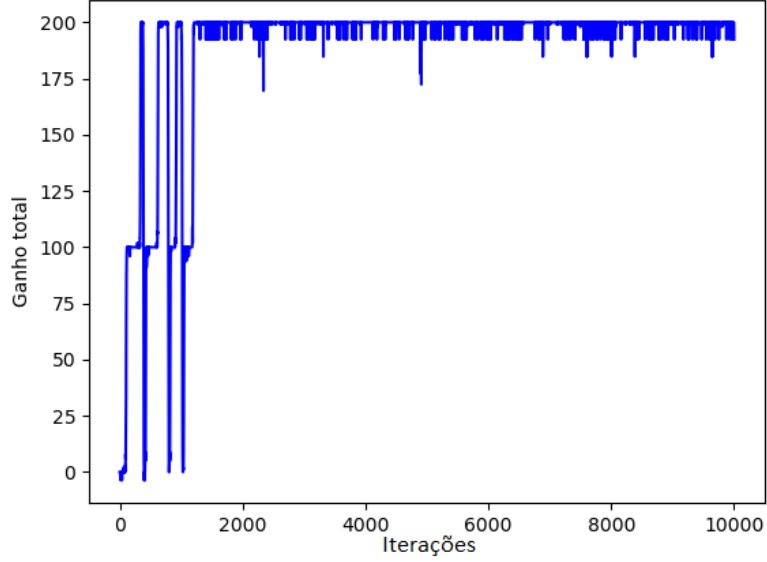


Figura 6: Ganho de uma população de estratégias X, Y, Z e W com punição de segunda ordem.

Iterações	Ganho total médio	X	Y	Z	W
$10^4$	179.5295	0.0726	0.0468	0.1092	0.7714
$10^5$	185.5304	0.0671	0.0323	0.0783	0.8222

Tabela 4: Frequência média de cada estratégia.

Os resultados obtidos aqui são idênticos aos obtidos na seção 3.2.

### 3.4 Punidor institucional de primeira ordem

Considere agora uma população de estratégias X, Y, Z e V com punição de primeira ordem. O ganho médio das estratégias é:

$$G_x = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}} \sigma + \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right] c \left[r \frac{X+V-1}{M-Z-1} - 1\right]$$

$$G_y = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\sigma + \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right]rc \frac{X+V}{M-Z-1} - BV \frac{(N-1)}{M-1}$$

$$G_v = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\sigma + \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right][rc \frac{X+V-1}{M-Z-1} - (G+c)]$$

Montando a matriz de Markov, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (22)$$

A distribuição estacionária é dada por:  $\frac{1}{7}(2, 2, 2, 1)$ .

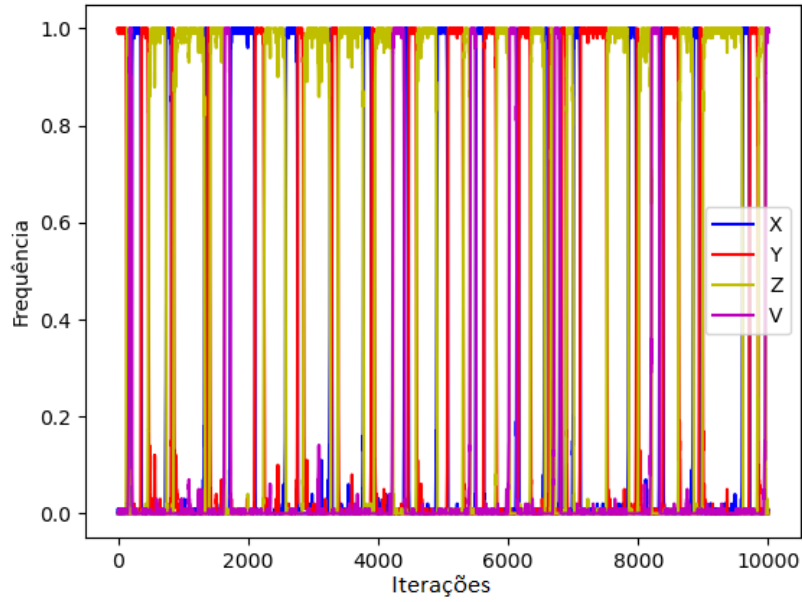


Figura 7: População de estratégias X, Y, Z e V com punição de primeira ordem.

Considerando agora a estratégia  $V$ , com punição de primeira ordem, nota-se uma população altamente instável contendo dois ciclos,  $Y \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow Y$  e  $Y \rightarrow Z \rightarrow V \rightarrow X \rightarrow Y$

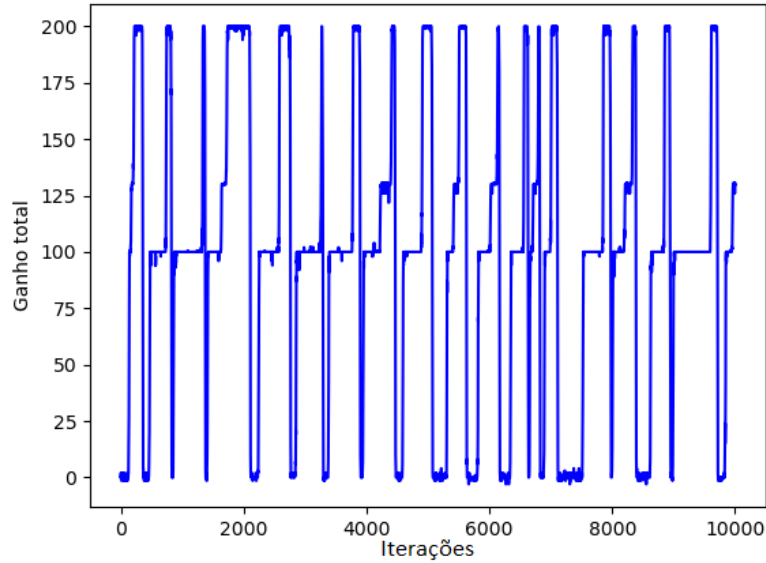


Figura 8: Ganho de uma população de estratégias  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  e  $V$  com punição de primeira ordem.

Os valores próximos de 200, 100 e 0 representam, respectivamente, a dominância das estratégias  $X$ ,  $Z$  e  $Y$ . Os "degraus" observados na transição entre 100 e 200 representam a dominância da estratégia  $V$ .

Iterações	Ganho total médio	$X$	$Y$	$Z$	$V$
$10^4$	102.4645	0.1941	0.2004	0.5060	0.0995
$10^5$	102.6656	0.1928	0.1969	0.5113	0.0989

Tabela 5: Frequência média de cada estratégia.

O resultado obtido analiticamente para a frequência das populações é  $(0.2857, 0.2857, 0.2857, 0.1429)$ . Assim como obtido numericamente, a frequência das estratégias  $X$  e  $Y$  são aproximadamente iguais e a estratégia  $V$  é a menos frequente. No entanto, a frequência da estratégia  $Z$  obtida numericamente é cerca de 57% maior do que a obtida matematicamente.

### 3.5 Punidor institucional de segunda ordem

Assumindo agora a punição de segunda ordem, o ganho médio das estratégias é:

$$G_x = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\sigma + \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right]c\left[r\frac{X+V-1}{M-Z-1} - 1\right] - BV\frac{N-1}{M-1}$$

$$G_y = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\sigma + \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right]rc\frac{X+V}{M-Z-1} - BV\frac{(N-1)}{M-1}$$

$$G_v = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\sigma + \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right]\left[rc\frac{X+V-1}{M-Z-1} - (G+c)\right]$$

Montando a matriz de markov:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

A distribuição estacionária é  $(0, 0, 0, 1)$ . Observe que esta distribuição é dominada pela estratégia V, isto significa que esta estratégia não pode ser invadida.

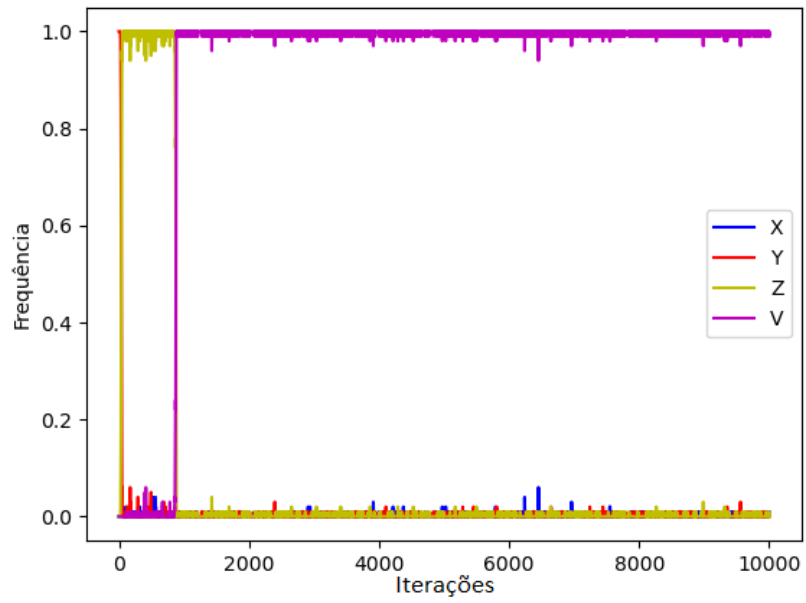


Figura 9: População de estratégias X, Y, Z e V com punição de segunda ordem.

Neste caso, a punição de segunda ordem estabiliza a população, não havendo ciclos após a estratégia  $V$  se estabelecer.



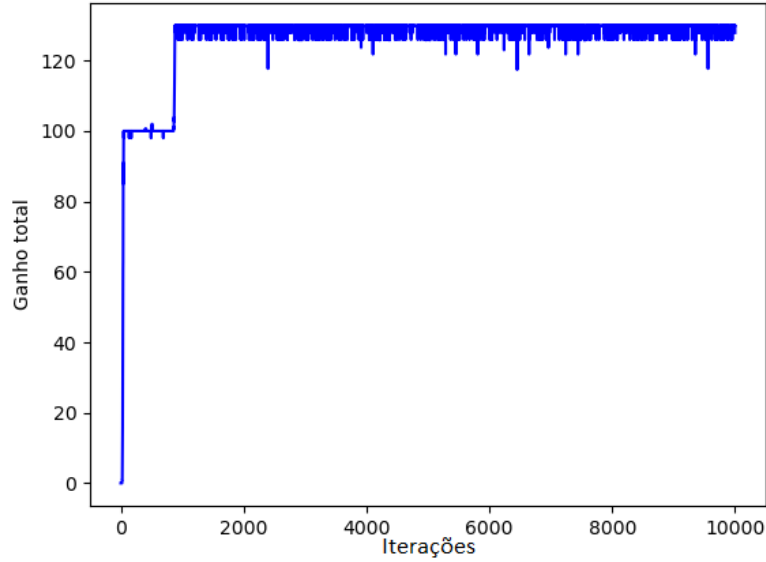


Figura 10: Ganho de uma população de estratégias X, Y, Z e V com punição de segunda ordem.

Analisando as figuras 9 e 10, a estratégia V, quando domina a população, gera um ganho total de 130, este se mantendo para o resto das iterações.

Iterações	Ganho total médio	X	Y	Z	V
$10^4$	126.5314	0.0071	0.0179	0.0464	0.9284
$10^5$	129.3642	0.0010	0.0023	0.0055	0.9912

Tabela 6: Frequência média de cada estratégia.

A frequência média determinada analiticamente é dada por:  $(0, 0, 0, 1, 0)$ . Como pode-se observar na tabela 6, este resultado bate com a simulação.

### 3.6 Punidor pessoal e institucional de primeira ordem

Por fim, considere uma população de estratégias X, Y, Z, V e W. O ganho médio das estratégias é:

$$G_x = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\sigma + [1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}]c[r\frac{X+V+W-1}{M-Z-1} - 1]$$

$$G_y = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\sigma + [1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}]rc\frac{X+V+W}{M-Z-1} - (BV + \beta W)\frac{(N-1)}{M-1}$$

$$G_w = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\sigma + [1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}]c[r\frac{X+V+W-1}{M-1} - 1] - \gamma Y\frac{N-1}{M-1}$$

$$G_v = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\sigma + [1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}][rc\frac{X+V+W-1}{M-Z-1} - (G+c)]$$

Montando a matriz de Markov:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{4M} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4M} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4M} & 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{1}{4M} \end{pmatrix} \quad (24)$$

A distribuição estacionária da dinâmica é:  $\frac{1}{3M+23}(6, 6, 4, 1, 3M+6)$ .

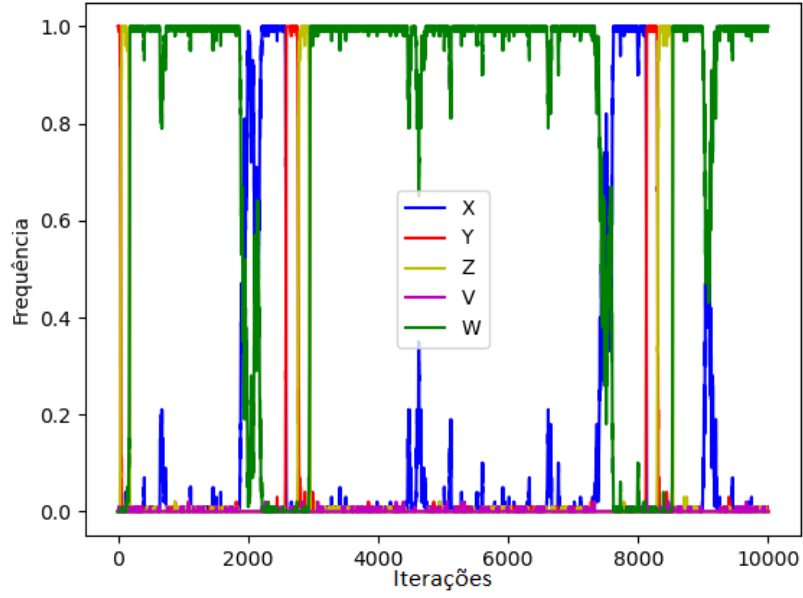


Figura 11: População de estratégias X, Y, Z, V e W com punição de primeira ordem.

Assim como nos modelos anteriores, a punição de primeira ordem gera uma economia instável. Neste caso, a população apresenta três ciclos principais  $Y \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow Y$ ,  $Y \rightarrow Z \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow X \rightarrow Y$  e  $Y \rightarrow Z \rightarrow W \rightarrow X \rightarrow Y$ , havendo um possível ciclo intermediário  $X \rightarrow W \rightarrow X/W \rightarrow X \rightarrow W$ .

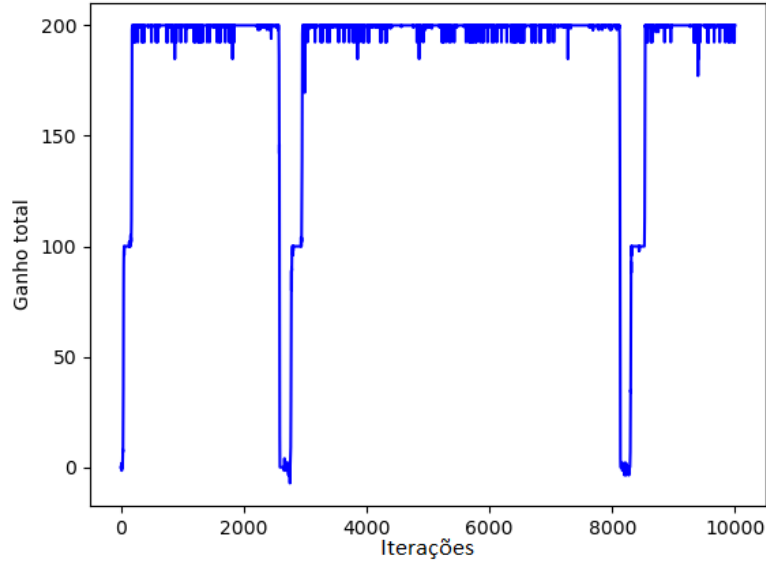


Figura 12: Ganho de uma população de estratégias X, Y, Z, V e W com punição de primeira ordem.

Apesar da população ser instável, o ganho total médio é quase sempre o mesmo. Isto acontece porque as duas estratégias dominantes na dinâmica X e W se comportam da mesma maneira quando não existem infratores, assim sendo, a transição de uma estratégia para a outra acontece de forma completamente aleatória, independente do ganho de cada jogador. Desta maneira, o ganho médio total se mantém aproximadamente o mesmo ao longo da dinâmica.

Iterações	Ganho total médio	X	Y	Z	V	W
$10^4$	178.7131	0.0660	0.0513	0.1020	0.0099	0.7709
$10^5$	186.6854	0.0618	0.0327	0.0614	0.0071	0.8370

Tabela 7: Frequência média de cada estratégia.

A frequência média determinada matematicamente é dada por: (0.0186, 0.0186, 0.0124, 0.0031, 0.9474). Assim como os dados coletados na simulação, a estratégia W e V são, respectivamente, as estratégias mais e menos frequentes. No entanto, a estratégia Z possui uma frequência maior que o esperado e a estratégia Y tem uma frequência menor que o esperado.

### 3.7 Punidor pessoal e institucional de segunda ordem

Considerando agora punição de segunda ordem. O ganho médio das estratégias são:

$$G_x = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\sigma + \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right]c \left[r \frac{X+W+V-1}{M-Z-1} - 1\right] - \frac{N-1}{M-1} \left[BV + GX \left[1 - \frac{\binom{M-Y-2}{N-2}}{\binom{M-2}{N-2}}\right]\right]$$

$$G_y = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\sigma + \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right]rc \frac{X+W+V}{M-Z-1} - (BV + \beta W) \frac{(N-1)}{M-1}$$

$$G_w = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\sigma + \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right]c \left[r \frac{X+W+V-1}{M-Z-1} - 1\right] - \frac{N-1}{M-1} \left[BV + \gamma[Y - X \frac{\binom{M-Y-2}{N-2}}{\binom{M-2}{N-2}}]\right]$$

$$G_v = \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\sigma + \left[1 - \frac{\binom{Z}{N-1}}{\binom{M-1}{N-1}}\right] \left[rc \frac{X+W+V-1}{M-Z-1} - (G+c)\right]$$

Montando a matriz de Markov:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4M} & 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{1}{4M} \end{pmatrix} \quad (25)$$

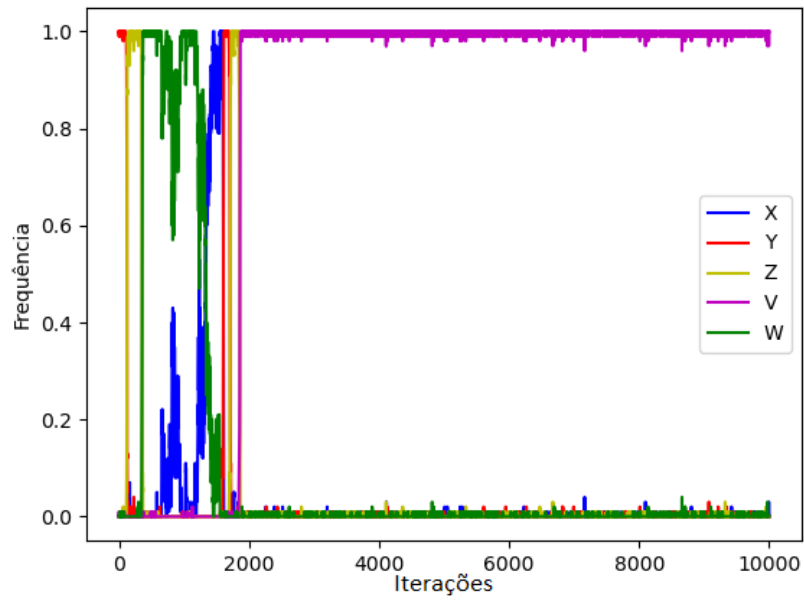


Figura 13: População de estratégias X, Y, Z, V e W com punição de segunda ordem.

A aplicação da punição de segunda ordem neste caso gera uma economia estável, impossibilitando que a estratégia V, depois de dominar a população, seja invadida.

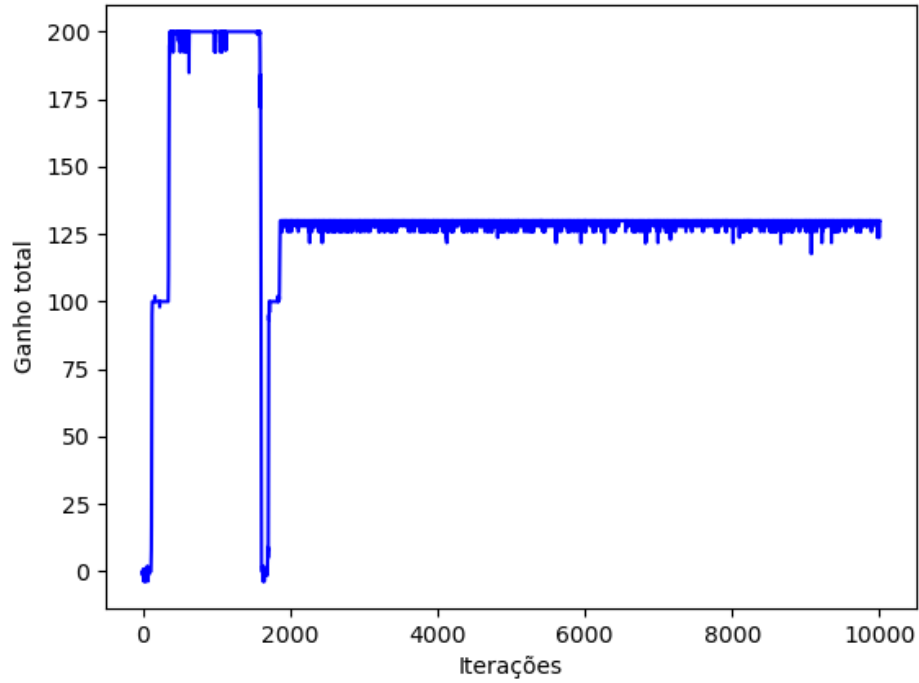


Figura 14: Ganho de uma população de estratégias X, Y, Z, V e w com punição de segunda ordem.

Iterações	Ganho total médio	X	Y	Z	V	W
$10^4$	128.8669	0.0079	0.0200	0.0361	0.9027	0.0333
$10^5$	129.5208	0.0014	0.0026	0.0050	0.9882	0.0028

Tabela 8: Frequência média de cada estratégia.

Assim como no seção 3.5, a presença da estratégia V com punição de segunda ordem gera uma distribuição estacionária dada por:  $(0, 0, 0, 1, 0)$ , onde V é a estratégia dominante. Comparando com o resultado mostrado na tabela 8 obtido pela simulação, pode-se observar que as frequências são bastante similares.

## 4 Conclusão

Nos modelos aqui estudados, apenas os modelos contendo a estratégia  $V$  e punição de segunda ordem geram economias estáveis, havendo apenas pequenas oscilações no ganho total.

Entre os sete casos, apenas o primeiro (seção 3.1) pode ser considerado um fracasso, isso porque o ganho total médio gerado foi menor que 100, este sendo o valor que os jogadores independentes  $Z$  ganhariam caso não houvesse outras estratégias. Em outras palavras, nesse caso, o jogo do bem público piora a situação econômica da população.

Considerando o ganho total médio como parâmetro de sucesso, o caso mais bem sucedido, tanto a curto quanto a longo prazo, foi o terceiro e o quinto (seção 3.3 e 3.5), com ganhos médios de, respectivamente, 188.6689 e 198.1939. Conclui-se com esses resultados que a estratégia mais efetiva de punição, considerando o ganho total médio, é a  $W$ , apesar desta não gerar uma economia estável.

Tomando agora a estabilidade econômica como parâmetro de sucesso, o caso mais bem sucedido, tanto a curto quanto a longo prazo, foi o quinto (seção 5.5), com frequências de, respectivamente, 0.9284 e 0.9912, sendo  $V$  a estratégia dominante.

A comparação entre os resultados obtidos por meio das abordagens numérica e analítica revela uma perspectiva enriquecedora das dinâmicas em estudo. Enquanto a análise numérica proporcionou uma visão detalhada das variações temporais e das interações entre estratégias, a abordagem analítica possibilitou a compreensão das tendências gerais ao longo do tempo. Embora haja discrepâncias entre a abordagem analítica e a numérica, especialmente no contexto da estratégia  $Z$ , ambas convergem para a identificação das estratégias mais e menos frequentes.

Essa discrepância se origina principalmente ao tempo em que a dinâmica é analisada nas duas abordagens: a análise matemática considera um tempo tendendo ao infinito, enquanto a abordagem numérica considera um tempo finito. Além disso, em relação à estratégia  $Z$ , a situação se torna um desafio devido à necessidade de várias mudanças aleatórias para que a invasão ocorra, como destacado na seção 3.1. A análise matemática não incorpora essa situação, apenas a probabilidade de ocorrência da transição. Portanto, em um intervalo de tempo finito, os resultados diferem.



## 5 Referências

[1] Karl Sigmund, Hannelore De Silca, Arne Traulsen e Christoph Hauert, "Social learning promotes institutions for governing the commons", Nature. 2010.

[2] Reichl, L. E., "A Modern Course in Statistical Physics", 2nd ed. Wiley-VCH, 2016.

[3] Karlin, S., Taylor, H. M., "An Introduction to Stochastic Modeling", 4th ed. Academic Press, 2014..