

Logika, gráfok Megoldások

- 1) Egy rejtvényújságban egymás mellett két, szinte azonos rajz található, amelyek között 23 apró eltérés van. Ezek megtalálása a feladat.

Először Ádám és Tamás nézték meg figyelmesen az ábrákat: Ádám 11, Tamás 15 eltérést talált, de csak 7 olyan volt, amelyet mindketten észrevettek.

- a) Hány olyan eltérés volt, amelyet egyikük sem vett észre? (4 pont)

Közben Enikő is elkezdte számolni az eltéréseket, de ő sem találta meg az összeset. Mindössze 4 olyan volt, amelyet mind a hárman megtaláltak. Egyeztetve kiderült, hogy az Enikő által bejelöltekből hatot Ádám is, kilencet Tamás is észrevett, és örömmel látták, hogy hárman együtt az összes eltérést megtalálták.

- b) A feladat szövege alapján töltsd ki az alábbi halmazábrát arról, hogy ki hányat talált meg! (7 pont)

- c) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását! Enikő minden eltérést megtalált. (2 pont)

- d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy eltérést véletlenszerűen kiválasztva, azt legalább ketten megtalálták? (4 pont)

Megoldás:

- a) Lásd: Halmazok 1. feladat

- b) Lásd: Halmazok 1. feladat

- c) Van olyan eltérés, amit Enikő nem talált meg.

VAGY: Enikő nem minden eltérést talált meg.

VAGY: Enikő nem találta meg az összes eltérést.

(2 pont)

- d) Lásd: Valószínűségszámítás 2. feladat

Összesen: 17 pont

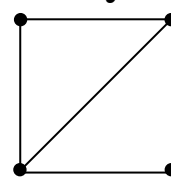
- 2) Egy gráfban 4 csúcs van. Az egyes csúcsokból 3; 2; 2; 1 él indul. Hány éle van a gráfnak? (2 pont)

Megoldás:

Egy lehetséges ábrázolás:

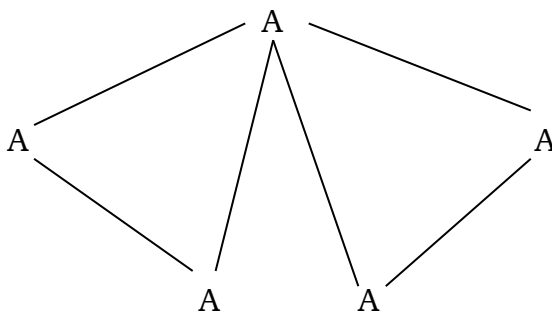
A gráfnak 4 éle van. (ábra nélkül is jár a 2 pont)

(2 pont)



- 3) Egy sakkverseny döntőjébe 5 versenyző jutott be. Közülük 1 versenyző mindegyik társát ismeri, a többiek pedig egyenként 2-2 személyt ismernek a döntő résztvevői közül. Szemléltesse rajzzal (gráf alkalmazásával) az ismeretségeket, ha az ismeretségek kölcsönösek! (3 pont)

Megoldás:

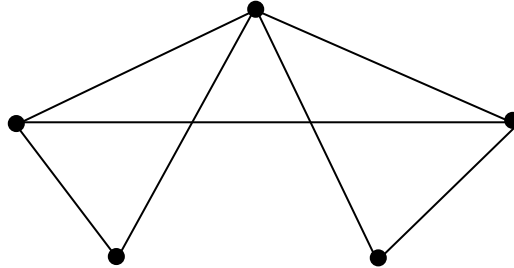


(3 pont)

Összesen: 3 pont

- 4) Rajzoljon egy olyan öt csúcspontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma 4; 3; 3; 2; 2! (2 pont)

Megoldás:



(2 pont)

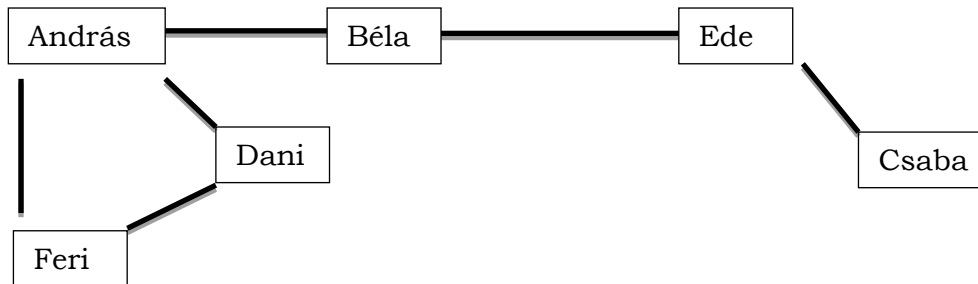
Összesen: 2 pont

- 5) A városi középiskolás egyéni teniszbajnokság egyik csoportjába hatan kerültek: András, Béla, Csaba, Dani, Ede és Feri. A versenykiírás szerint bármely két fiúnak pontosan egyszer kell játszania egymással. Eddig András már játszott Bélával, Danival és Ferivel. Béla játszott már Edével is. Csaba csak Edével játszott, Dani pedig Andrásen kívül csak Ferivel. Ede és Feri egyaránt két mérkőzésen van túl.

- a) Szemléltesse gráffal a lejátszott mérkőzéseket! (4 pont)
 b) Hány mérkőzés van még hátra? (3 pont)
 c) Hány olyan sorrend alakulhat ki, ahol a hat versenyző közül Dani az első két hely valamelyikén végez? (5 pont)

Megoldás:

a)



(4 pont)

- b) Lásd: Kombinatorika 9. feladat
 c) Lásd: Kombinatorika 9. feladat

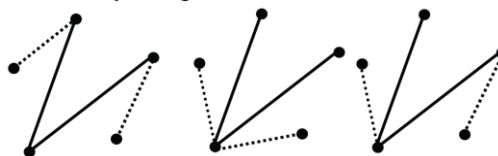
Összesen: 12 pont

- 6) Az ábrán látható térképvázlat öt falu elhelyezkedését mutatja. Az öt falu között négy olyan út megépítésére van lehetőség, amelyek mindegyike pontosan két falut köt össze. Ezekből két út már elkészült. Rajzolja be a további két út egy lehetséges elhelyezkedését úgy, hogy bármelyik faluból bármelyik faluba eljuthassunk a megépült négy úton!



(2 pont)

Megoldás:

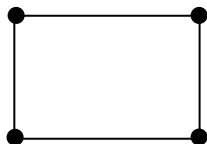


(2 pont)

- 7) Egy négytagú csoportban minden tagnak pontosan két ismerőse van a csoport tagjai között. Szemléltessen gráffal egy ilyen ismeretségi rendszert! (Az ismeretség kölcsönös.) (2 pont)

Megoldás:

Például:



(2 pont)

Összesen: 2 pont

- 8) Egy baráti társaság minden tagja írt egy-egy SMS üzenetet a társaság minden további tagjának. Így mindenki 11 üzenetet írt. Hány SMS-t írtak egymásnak összesen a társaság tagjai? (2 pont)

Megoldás:

A társaság 12 tagú. (1 pont)

132 SMS-t írtak összesen. (1 pont)

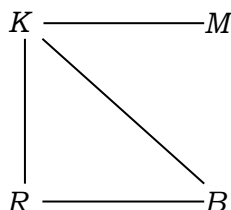
Összesen: 2 pont

- 9) A diákönkormányzat újonnan választott négytagú vezetősége: Kata, Mari, Réka és Bence. Közülük Kata három, Réka és Bence pedig két-két vezetőségi tagot ismert korábról. Mari a négyes csoportnak csak egy tagját ismerte. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

Rajzolja fel a négytagú vezetőség választás előtti ismeretségi gráfját!

(2 pont)

Megoldás:

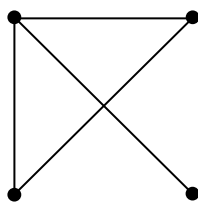


(2 pont)

Összesen: 2 pont

- 10) Rajzoljon le egy 4 pontú egyszerű gráfot, amelyben a pontok fokszáma rendre 3, 2, 2, 1! (2 pont)

Megoldás:



(2 pont)

Összesen: 2 pont

- 11) Egy iskola asztalitenisz bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármát, Enikő és Feri négyet-négyet.

a) Rajzolja le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját!

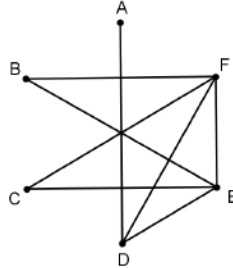
(4 pont)

b) Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta? (Igen válasz esetén rajzoljon egy megfelelő gráfot; nem válasz esetén válaszát részletesen indokolja!) (6 pont)

- c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a hat játékos közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, ők eddig még nem játszották le az egymás elleni mérkőzésüket! (7 pont)

Megoldás:

- a) Az egyik lehetséges megoldás (a résztvevőket nevük kezdőbetűjével jelölve): (4 pont)



- b) Ha Andi egyetlen mérkőzését Barnabással játszotta volna, akkor például Feri eddigi mérkőzéseit Barnabással, Csabával, Danival és Enikővel játszotta volna. (3 pont)
Ekkor azonban Enikőnek már nem lehet meg a négy mérkőzése, hiszen legfeljebb Csabával, Danival és Ferivel játszhatott volna. (2 pont)
Tehát igazoltuk, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését nem játszhatta Barnabással. (1 pont)
- c) Lásd: Valószínűségszámítás 32. feladat

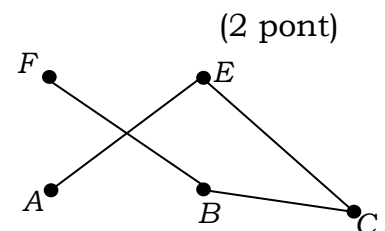
Összesen: 17 pont

- 12) Rajzoljon egy gráfot, melynek 5 csúcsa és 5 éle van, továbbá legalább az egyik csúcsának a fokszáma 3. (2 pont)

Megoldás:

A feltételeknek megfelelő gráf.

- 13) Az ábrán látható hatpontú gráfba rajzoljon be 2 élt úgy, hogy a kapott gráf minden csúcsából 2 él induljon ki! A berajzolt éleket két végpontjukkal adja meg! (2 pont)

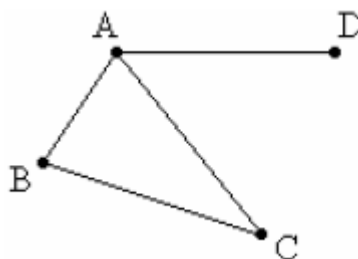


Megoldás:

A berajzolt élek: **A-D** és **D-F**. (2 pont)

- 14) Egy álláshirdetésre négyen jelentkeznek: Aladár, Béla, Cecil és Dénes. Az adott időben megjelennek a vállalatnál, s akkor kiderül, hogy közülük hárman, Aladár, Béla és Cecil osztálytársak voltak. Dénes csak Aladárt ismeri, ők régebben egy kosárlabdacsapatban játszottak. Szemléltesse az ismeretségeket gráffal! (Az ismeretségek kölcsönösek.) (2 pont)

Megoldás:



(2 pont)
Összesen: 2 pont

15) Egy osztályban a következő háromféle sportkört hirdették meg: kosárlabda, foci és röplabda. Az osztály 30 tanulója közül kosárlabdára 14, focira 19, röplabdára 14 tanuló jelentkezett. Ketten egyik sportra sem jelentkeztek. Három gyerek kosárlabdázik és focizik, de nem röplabdázik, hatan fociznak és röplabdáznak, de nem kosaraznak, ketten pedig kosárlabdáznak és röplabdáznak, de nem fociznak. Négyen mind a háromféle sportot üzik.

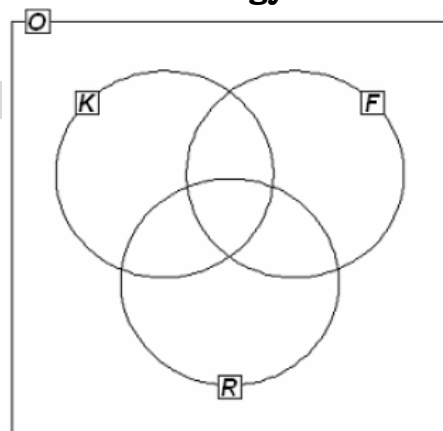
a) Írja be a megadott halmazábrába (1. ábra) a szövegnek megfelelő számokat!

b) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását!

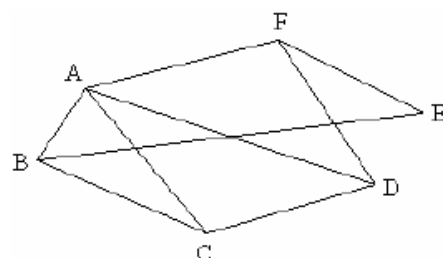
A focira jelentkezett tanulók közül mindenkinek van testvére. (2 pont)

c) A focira jelentkezett 19 tanulóból öten vehetnek részt egy edzőtáborban. Igazolja, hogy több, mint 10 000-féleképpen lehet kiválasztani az öt tanulót! (3 pont)

d) Az iskolák közötti labdarúgóbajnokságra jelentkezett 6 csapat között lejátszott mérkőzéseket szemlélteti a 2. ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik a bajnokságban? (Válaszát indokolja!) (3 pont)



1. ábra



2. ábra

Megoldás:

a) Lásd: Halmazok 19. feladat

b) **A focira jelentkezettek között van olyan, akinek nincs testvére.** VAGY: **A focira jelentkezettek közül nem mindenkinek van testvére.** (2 pont)

c) Lásd: Kombinatorika 21. feladat

d) A mérkőzések száma összesen: $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ (1 pont)

Eddig lejátszottak 9 mérkőzést. (1 pont)

6 mérkőzés van még hátra. (1 pont)

Összesen: 12 pont

16) Rajzoljon egy olyan öt csúcspontú gráfot, amelynek 4 éle van! (2 pont)

Megoldás:

Több megoldás is elképzelhető, például:



(2 pont)

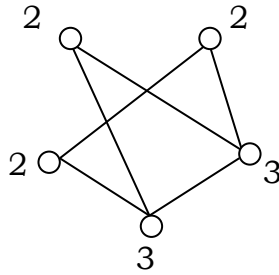
Összesen: 2 pont

17) Rajzoljon egy olyan 5 csúcsú gráfot, melyben a csúcsok fokszámának összege 12. (2 pont)

Megoldás:

A feltételeknek megfelelő gráf.
Például:

(2 pont)

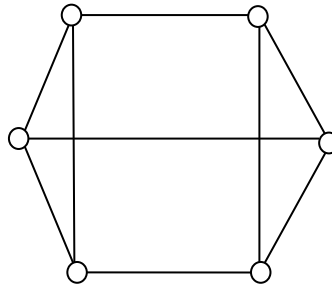


Összesen: 2 pont

- 18) Egy irodai számítógép-hálózat hat gépből áll. Mindegyik gép ezek közül három másikkal van közvetlenül összekötve. Rajzoljon egy olyan gráfot, amely ezt a hálózatot szemlélteti! (2 pont)

Megoldás:

Egy megfelelő gráf például:



(2 pont)

Összesen: 2 pont

- 19) Döntse el, hogy az alább felsoroltak közül melyik mondat a tagadása a következő állításnak! (2 pont)

Minden érettségi feladat egyszerű.

- Minden érettségi feladat bonyolult.
- Van olyan érettségi feladat, ami nem egyszerű.
- Sok érettségi feladat bonyolult.
- Van olyan érettségi feladat, ami egyszerű.

Megoldás:

- b) Van olyan érettségi feladat, ami nem egyszerű.

(2 pont)

Összesen: 2 pont

- 20) Egy végzős osztály diákjai projektmunka keretében különböző statisztikai felméréseket készítettek az iskola tanulóinak körében.

- Éva 150 diákot kérdezett meg otthonuk felszereltségéről. Felméréséből kiderült, hogy a megkérdezettek közül kétszer annyian rendelkeznek mikrohullámú sütővel, mint mosogatógéppel. Azt is megtudta, hogy 63-an mindkét géppel, 9-en egyik géppel sem rendelkeznek. A megkérdezettek hány százalékának nincs otthon mikrohullámú sütője? (6 pont)
- Jóska a saját felmérésében 200 diákot kérdezett meg arról, hogy hány számítógépük van a háztartásban. A válaszokat a következő táblázatban összesítette:

A számítógépek száma a háztartásban	Gyakoriság
0	3
1	94
2	89
3	14

Jóska felmérése alapján töltse ki az alábbi táblázatot az egy háztartásban található számítógépek számáról! (4 pont)

A számítógépek számának átlaga	
A számítógépek számának mediánja	
A számítógépek számának módusza	

- c) Tamás a saját felmérése alapján a következőt állítja:
Minden háztartásban van televízió.
 Az alábbi négy állítás közül válassza ki azt a kettőt, amely Tamás állításának tagadása!
- A) Semelyik háztartásban nincs televízió.
 B) Van olyan háztartás, ahol van televízió.
 C) Van olyan háztartás, ahol nincs televízió.
 D) Nem minden háztartásban van televízió. (2 pont)

Megoldás:

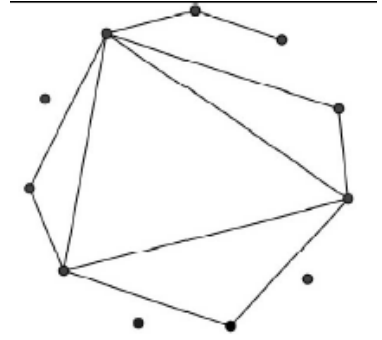
- a) Lásd: Halmazok 22. feladat
 b) Lásd: Statisztika 28. feladat
 c) Az állítás tagadásai: **C** és **D**. (2 pont)
- Összesen: 12 pont**

- 21) Egy focicsapat 11 játékosa megérkezik az edzésre, néhányan kezet fognak egymással. (Két játékos között legfeljebb egy kézfogás történik.) Az edző felírta, hogy ki hányszor fogott kezet, és a következő számokat kapta: 0; 1; 2; 2; 2; 5; 0; 0; 4; 4; 2.
- a) Ábrázolja a kézfogásoknak egy lehetséges gráfját, ahol a pontok a játékosokat jelölik, és két pont között akkor van él, ha az illetők kezet fogtak az edzés előtt! (3 pont)
- b) Hány kézfogás történt összesen? (2 pont)
- Egy másik alkalommal az edző által feljegyzett 11 nemnegatív egész számról a következőket állapítottuk meg: a számok egyetlen módusza 2, mediánja 3, átlaga 4, terjedelme pedig 5 volt.
- c) Adjon meg a fenti feltételeknek megfelelő 11 nemnegatív egész számot! (5 pont)
- Az edzésen a játékosok a tizenegyesrúgást gyakorolják. Az egyik játékos 0,9 valószínűséggel lövi be a tizenegyest.
- d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy három rúgásból legalább egyszer betalál? A valószínűség pontos értékét adja meg! (7 pont)

Megoldás:

- a) Több lehetőség is van, például: (3 pont)
 b) Annyi kézfogás történt, ahány éle van a gráfnak, (1 pont)
 összesen **11**. (1 pont)
 c) Lásd: Statisztika 34. feladat
 d) Lásd: Valószínűségszámítás 45. feladat

Összesen: 17 pont



22) "Minden szekrény barna."

Válassza ki az alábbiak közül annak a mondatnak a betűjelét, amelyik tagadása a fenti kijelentésnek!

A: Van olyan szekrény, amelyik nem barna.

B: Nincs barna szekrény.

C: Van olyan szekrény, amelyik barna.

D: Pontosán egy szekrény barna.

(2 pont)

Megoldás:

A

(2 pont)

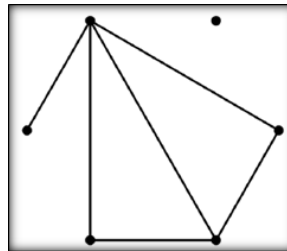
Összesen: 2 pont

23) Rajzoljon olyan hatpontú gráfot, amelyben a pontok fokszáma: 0; 1; 2; 2; 3; 4.

(2 pont)

Megoldás:

Például:



(2 pont)

Összesen: 2 pont

24) Egy hatfős társaságban mindenkit megkérdeztek, hány ismerőse van a többiek között (az ismertségek kölcsönösek). Az első öt megkérdezett személy válasza: 5, 4, 3, 2, 1.

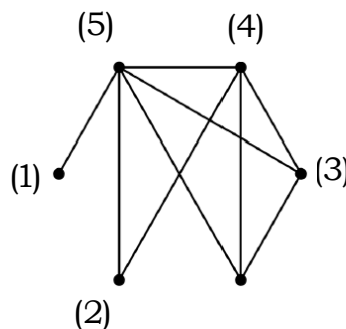
a) Ábrázolja gráffal a hatfős társaság ismertségi viszonyait!

(2 pont)

b) Hány ismerőse van a hatodik személynek a társaságban?

(1 pont)

Megoldás:



a)

(2 pont)

b) A hatodik főnek az ábráról leolvasva **3** ismerőse van.

(1 pont)

Összesen: 3 pont

- 25) Egy fiókban néhány sapka van. Tekintsük a következő állítást:**
„A fiókban minden sapka fekete.” Válassza ki az alábbiak közül az összes állítást, amely tagadása a fentinek!
A: A fiókban minden sapka fehér.
B: A fiókban nincs fekete sapka.
C: A fiókban van olyan sapka, amely nem fekete.
D: A fiókban nem minden sapka fekete. (2 pont)

Megoldás:

A helyes tagadás **C** és **D**.

(2 pont)

Összesen: 2 pont

- 26) Hány éle van egy 8 pontú teljes gráfnak?** (2 pont)

Megoldás:

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

(2 pont)

Összesen: 2 pont

- 27) Egy születésnapi összejövetelen egy 7 fős társaság tagjai közül néhányan koccintottak egymással. Lehetséges-e, hogy az egyes résztvevők 1; 2; 2; 3; 3; 6; 6 másik résztvevővel koccintottak az összejövetel során?**
Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

(Tekinthejtük a résztvevőket egy gráf csúcsainak, a koccintásokat a gráf éleinek.) Bármely gráfban a csúcsok fokszámának összege páros. (1 pont)

$$1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 6 + 6 = 23$$

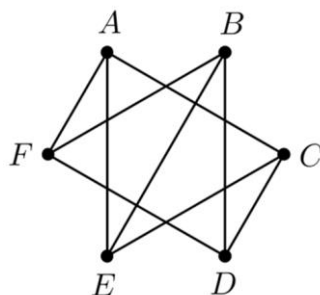
(1 pont)

Ilyen gráf nincs, tehát **nem lehetséges**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

- 28) Egy hatfős asztaltársaság tagjai: Anna, Balázs, Cili, Dezső, Egon és Fruzsina. Mindegyikük pontosan három másik személyt ismer a társaságban. Cili ismeri Dezsőt és Egont, Anna pedig nem ismeri sem Balázst, sem Dezsőt. Szemléltesse gráffal a társaság ismeretségi viszonyait! (Minden ismeretség kölcsönös.)** (4 pont)

Megoldás:



Összesen: 4 pont

- 29) Egy dobozban lévő színes golyókról szól az alábbi állítás:**
„A dobozban van olyan golyó, amelyik kék színű”
Válassza ki az alábbiak közül az összes állítást, amely tagadása a fentinek!

A: A dobozban van olyan golyó, amelyik nem kék színű.

B: A dobozban minden golyó kék színű.

C: A dobozban egyik golyó sem kék színű.

D: A dobozban nincs olyan golyó, amelyik kék színű.

(2 pont)

Megoldás:

A helyes megoldások: **C és D állítás**

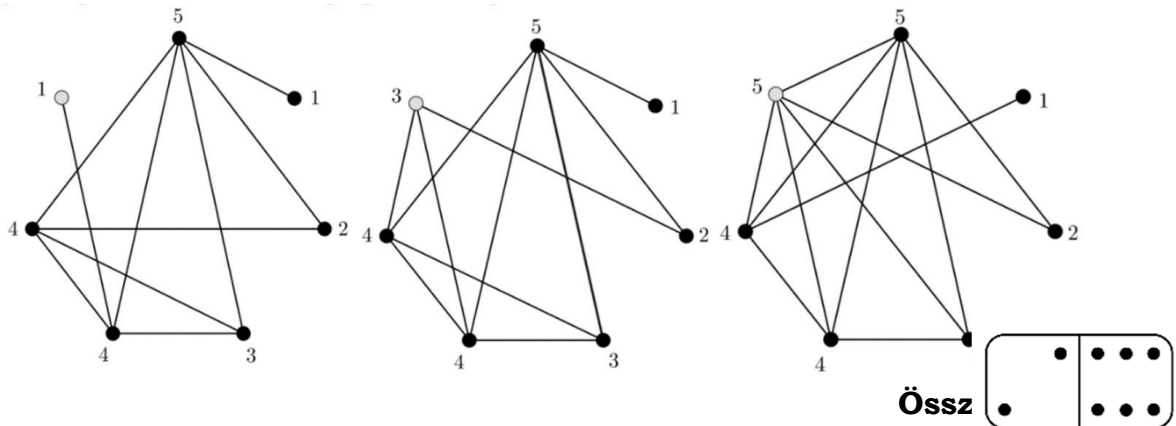
Összesen: 2 pont

- 30) Egy héttagú társaság hat tagjáról tudjuk, hogy hány ismerőse van a társaságban: 1, 2, 3, 4, 4, 5. Rajzoljon erről a társaságról egy lehetséges ismeretségi gráfot, és adja meg a hetedik ember (G) ismerőseinek számát ebben az esetben! (Az ismeretségek kölcsönösek.) (3 pont)

Megoldás:

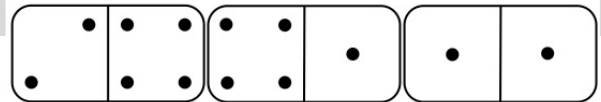
Egy megfelelő ismeretségi gráf felrajzolása például:

(3 pont)



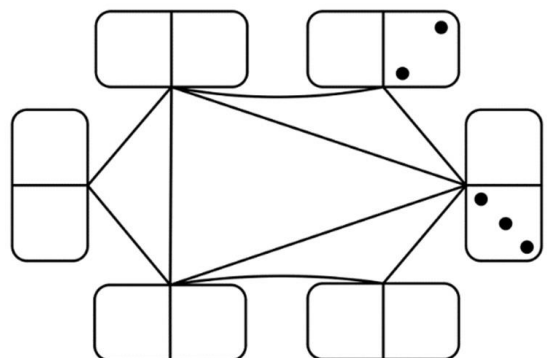
- 31) Anna dominókészletében a dominókövek egyik oldala egy vonallal két részre van osztva. Az egyes részekben a pöttyök száma 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 lehet. A készletben minden lehetséges pöttyözésű dominóból pontosan egy darab van. Az ábrán a 2-6-os (6-2-es) dominó látható.

- a) Hány olyan dominó van a készletben, amelyen a két részen lévő pöttyök számának szorzata prímszám? (4 pont)



A játékban két dominó akkor csatlakozhat egymáshoz, ha a két érintkező részen ugyanannyi pötty van. (Lásd az ábrát.)

Anna egy lapra elhelyezte dominókészletének azt a hat dominóját, amelyek mindkét részén van legalább 1, de legfeljebb 3 pötty. Ezután összekötötte azokat a dominókat, amelyeket a játékban csatlakoztatni lehetne egymáshoz. Az alábbi ábra a hat dominót és az összekötő vonalakat mutatja, de csak két részen adtuk meg a pöttyöket.



- b) Rajzolja be a tíz üres részre a hiányzó pöttyöket az összekötésnek megfelelően!

(4 pont)

Anna a teljes 28 darabos készletből kihúzta a 2-6-os dominót. Ezután véletlenszerűen kihúz még egy dominót.

- c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a másodiknak kihúzott dominót csatlakoztatni tudja az elsőhöz! (5 pont)

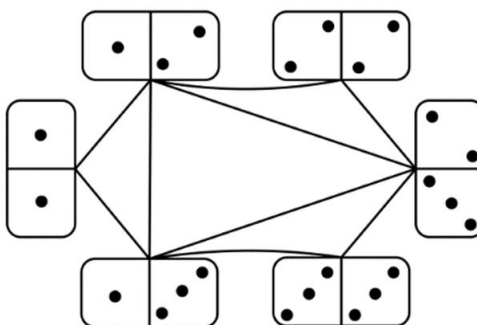
Egy játékbemutatóra Anna és Balázs 1800 dominót szeretne felállítani a földre úgy, hogy a legelsőt meglökve az összes dominó sorban eldőljön. Anna egyedül 6 óra alatt, Balázs pedig 9 óra alatt építené meg a dominóláncot.

d) Ha Anna és Balázs – tartva a saját tempójukat – együtt dolgozna, akkor hány óra alatt végeznének az 1800 dominó felállításával?(4 pont)

Megoldás:

a) Lásd: Szöveges feladatok 46. feladat

b) Az összekötésnek megfelelő pöttyök:



(4 pont)

c) Lásd: Szöveges feladatok 46. feladat

d) Lásd: Szöveges feladatok 46. feladat

Összesen: 17 pont

32) Hét csapat körmérkőzést játszik, azaz minden csapat minden másik csapattal egyszer mérkőzik meg. Eddig összesen 9 mérkőzést játszottak le. Hány mérkőzés van hátra? (2 pont)

Megoldás:

Ha mind a 7 csapat játszik mindegyik másikkal, akkor összesen $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ mérkőzés zajlik le. Mivel 9 mérkőzést már lejátszottak, $21 - 9 = 12$ mérkőzés van hátra. (2 pont)

Összesen: 2 pont

33) Határozza meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

A) Van olyan ötpontú gráf, amelyben a csúcsok fokszáma 0; 1; 2; 4; 2.

B) Van olyan téglalap, amely deltoid.

C) A $\frac{4,17}{3}$ racionális szám. (2 pont)

Megoldás:

A) Hamis

B) Igaz

C) Igaz

(2 pont)

Összesen: 2 pont

34) „Minden egér szereti a sajtot.”

Válassza ki az alábbiak közül annak az állításnak a betűjelét, amelyik tagadása a fenti kijelentésnek!

A) Minden egér szereti a diót.

B) Egyik egér sem szereti a sajtot.

C) Van olyan egér, amelyik nem szereti a sajtot.

D) Van olyan egér, amelyik szereti a sajtot.

(2 pont)

Megoldás:A helyes válasz: **C**

(2 pont)

Összesen: 2 pont

35) Egy ötpontú gráfnak 7 éle van. Mennyi a gráfban a csúcsok fokszámának összege? (2 pont)

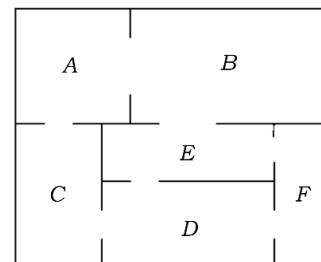
Megoldás:

Egy gráfban a csúcsok fokszámának összege duplája az élek számának, tehát $2 \cdot 7 = 14$ a fokszámok összege. (2 pont)

Összesen: 2 pont

36) Az ábrán egy kis múzeum alaprajzát látjuk. A múzeum termei közötti kapcsolatot gráffal is szemléltethetjük. A gráf pontjai a termek, élei pedig az átjárók a termek között. (Egy él egy átjárót szemléltet két terem között.)

a) Rajzolja fel a múzeum termeit és átjáróit szemléltető gráfot! (2 pont)



A múzeumba háromféle belépőjegyet lehet váltani:

Teljes árú jegy	400 Ft
Kedvezményes jegy (gyerek, diák, pedagógus, nyugdíjas)	250 Ft
Fotójegy (belépőjegy és fényképezőgép-használat)	500 Ft

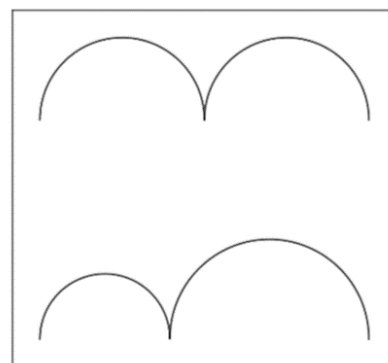
Januárban négyszer annyi kedvezményes belépőjegyet adtak el, mint teljes árú jegyet, továbbá az eladott fotójegyek száma az eladott teljes árú jegyek számának 12,5%-a volt. A múzeum belépőjegy-eladásból származó bevétele januárban 912 600 Ft volt.

b) Hány belépőjegyet adtak el januárban összesen? (4 pont)

Csilla, Dezső, Emese, Feri és Gyöngyi délelőtt 10-re beszéltek meg találkozót a múzeum előtt. Sorban egymás után érkeznek (különböző időpontokban), véletlenszerűen.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb egy lánynak kell várakoznia fiúra? (6 pont)

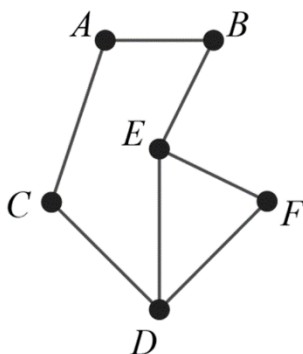
A kiállításon több gondolkodtató, minimalista kép is szerepel. Dezső szerint az ábrán látható, csatlakozó félköröket ábrázoló kép címe azért „Egyenlőség”, mert a felső és az alsó görbe vonal hossza egyenlő. A felső görbét alkotó két egyforma félkör átmérőjének összege 48 cm. Az alsó görbét alkotó két félkör átmérőjének összege szintén 48 cm.



d) Igaz-e Dezső sejtése, hogy a két görbe vonal hossza egyenlő? (5 pont)

Megoldás:

a)



(2 pont)

- b) Lásd: Szöveges feladatok 49. feladat
 c) Lásd: Valószínűségszámítás 67. feladat
 d) Lásd: Síkgeometria 58. feladat

Összesen: 17 pont

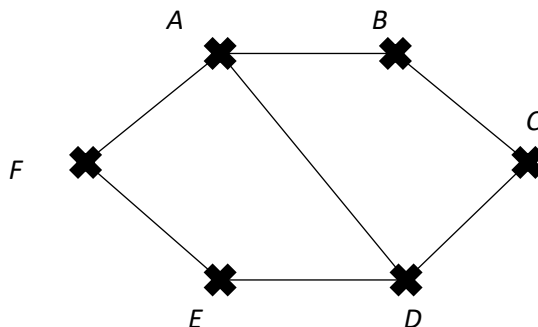
37) Rajzoljon egy olyan hatpontú gráfot, amelyben a pontok fokszámának összege 14!

(2 pont)

Megoldás:

Bármilyen gráf, aminek 6 pontja és 7 éle van megfelelő.

Pl.:



(2 pont)

Összesen: 2 pont

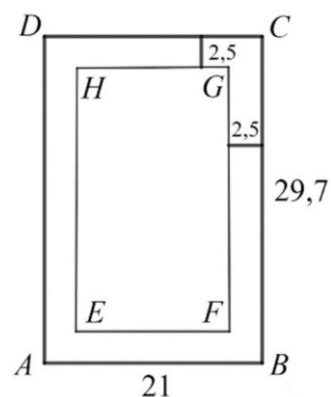
38) Egy A4-es papírlapot négy egyforma kisebb lapra vágunk. Ezekre a kisebb lapokra felírtuk az 1, 2, 3, 4 számokat, mindegyik lapra egy számot. A négy lapot véletlenszerűen sorba rakjuk.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy így sem két páros, sem két páratlan szám nem kerül egymás mellé? (4 pont)

Egy A4-es papírlap vastagsága 0,1 mm. Egy ilyen papírlapot kettévágunk, majd a keletkező két fél lapot egymásra tesszük. Az így kapott „kupacot” ismét kettévágjuk, és a keletkező négy negyedlapot egymásra tesszük (a kupac magassága ekkor 0,4 mm). Ezt a műveletet tovább folytatjuk, tehát először egy vágással a kupacot kettévágjuk, majd a keletkező lapokat egymásra tesszük. Azt tervezzük, hogy ezt a műveletet összesen 20-szor hajtjuk végre. Luca szerint, ha ezt meg tudnánk tenni, akkor a 20 vágás és egymásra rakás után keletkező kupac magasabb lenne, mint 100 méter.

b) Igaza van-e Lucának? Válaszát számítással igazolja! (4 pont)

Egy A4-es papírlap méretei: $21 \text{ cm} \times 29,7 \text{ cm}$. A szövegszerkesztő programok általában $2,5 \text{ cm}$ -es margóval dolgoznak, vagyis a papírlap minden oldalától számítva egy-egy $2,5 \text{ cm}$ -es sáv üresen marad (lásd az ábrát). A lap közepén a szövegnek fennmaradó rész szintén téglalap alakú. Zsófi szerint az $ABCD$ és az $EFGH$ téglalapok hasonlóak.



c) Igaza van-e Zsófinak? Válaszát indokolja! (5 pont)

Tekintsük a következő állítást:

Ha két négyszög hasonló, akkor megfelelő szögek páronként egyenlők.

d) Adja meg az állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Írja fel az állítás megfordítását, és adja meg a megfordítás logikai értékét is! Ez utóbbi választ indokolja! (4 pont)

Megoldás:

a) Lásd: Valószínűségszámítás 69. feladat

b) Lásd: Szöveges feladatok 52. feladat

c) Lásd: Síkgeometria 58. feladat

d) Az állítás **igaz**.

(1 pont)

Az állítás megfordítása: **ha két négyszög megfelelő szögei páronként egyenlők, akkor a két négyszög hasonló**.

(1 pont)

Ez az állítás **hamis**.

(1 pont)

Ellenpélda például egy négyzet és egy (nem négyzet) téglalap.

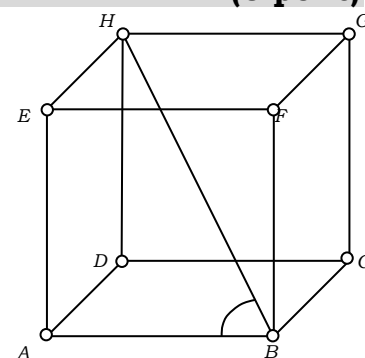
(1 pont)

Összesen 17 pont

39)

a) Számítsa ki annak a szabályos négyoldalú gúlának a térfogatát, melynek minden éle 10 cm hosszú! (6 pont)

Térgeometriai feladatok megoldásában segíthet egy olyan készlet, melynek elemeiből (kilyuggatott kisméretű gömbökből és különböző hosszúságú műanyag pálcikákból) matematikai és kémiai modellek építhetők. Az ábrán egy kocka modellje látható.



b) Számítsa ki az ABH szög nagyságát! (A test csúcsait tekintse pontoknak, az éleket pedig szakaszoknak!) (4 pont)

Anna egy molekulát modellezett a készlet segítségével, ehhez 7 gömböt és néhány pálcikát használt fel. Minden pálcika két gömböt kötött össze, és bármely két gömböt legfeljebb egy pálcika kötött össze. A modell elkészítése után feljegyezte, hogy hány pálcikát szúrt bele az egyes gömbökbe. A feljegyzett adatok: 6, 5, 3, 2, 2, 1, 1.

c) Mutassa meg, hogy Anna hibát követett el az adatok felírásában!

(4 pont)

Anna is rájött, hogy hibázott. A helyes adatok: 6, 5, 3, 3, 2, 2, 1.

d) Hány pálcikát használt fel Anna a modell elkészítéséhez? (3 pont)

Megoldás:

- a) Lásd: Térgeometria 18. feladat
 b) Lásd: Térgeometria 18. feladat
 c) A gömböket jelölje a megadott fokszámok sorrendjében A, B, C, D, E, F és G .
 Az A gömb mindegyik másik gömbbel össze van kötve. (1 pont)
 Mivel G elsőfokú gömb, ezért csak A -val van összekötve. (1 pont)
 F is elsőfokú gömb, ezért F is csak A -val van összekötve. (1 pont)
 Ezek szerint B csak A -val, C -vel, D -vel és E -vel lehet összekötve, vagyis nem lehet ötödfokú. (1 pont)
 d) Mindegyik felhasznált pálcika két gömböt köt össze, így az egyes csúcsokból induló pálcikákat megszámlálva minden felhasznált pálcikát kétszer számolunk meg. (1 pont)
 Így az összes (jól) feljegyzett szám összege éppen kétszerese a pálcikák számának. (1 pont)

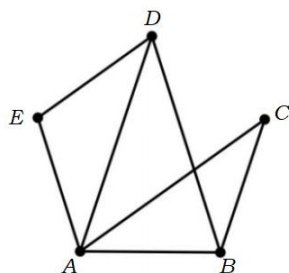
A pálcikák száma tehát: $\frac{6+5+3+3+2+2+1}{2} = 11$ (1 pont)

A pálcikák száma gráfos indoklással is megadható (a csúcsok fokszám-összege az élek számának kétszerese.)

Összesen: 17 pont

- 40) Egy nemzetközi konferencia 5 résztvevője áll egy asztal körül a kávészünetben (jelölje őket A, B, C, D , illetve E). Tudjuk, hogy A ismer mindenkit az asztalnál. B nem ismeri E -t, de a többieket ismeri. C két résztvevőt ismer, D pedig hármat.

Ábrázolja az ötfős társaság tagjai közötti ismeretségeket gráffal, és adja meg, hogy kiket ismer az asztalnál az E -vel jelölt személy! (Minden ismeretség kölcsönös.) (3 pont)



E ismerősei A és D .

(2 pont)

(1 pont)

Összesen: 3 pont

- 41) Az egyik héten a következő számokat húzták ki az ötös lottón: 16; 24; 36; 54; 81. Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!
- A: A héten kihúzott öt lottószám mindegyike osztható 3-mal.
 B: A héten kihúzott öt lottószám közül három négyzetszám.
 C: A héten kihúzott öt lottószám tekinthető egy mértani sorozat első öt tagjának. (2 pont)

Megoldás:

A: Hamis

B: Igaz

C: Igaz

(2 pont)

Összesen: 2 pont

42) Tekintsük az A, B, C, D és E pontokat egy gráf csúcsainak.

- Egészítse ki élekkel a fenti ábrát úgy, hogy a kapott gráfban minden csúcs fokszáma 2 vagy 3 legyen! (2 pont)
- Lehet-e olyan 5 csúcsú gráfot rajzolni, amelyben minden csúcs fokszáma pontosan 3? (3 pont)

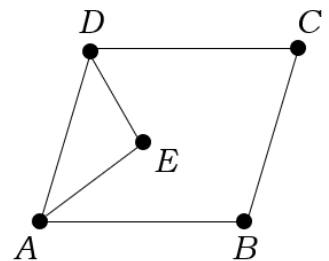
Az A, B, C, D pontok egy paralelogrammát alkotnak, az E pont az átlók metszéspontja.

c) Fejezze ki az \overrightarrow{AB} vektort a \overrightarrow{DA} és \overrightarrow{DE} vektorok segítségével! (3 pont)
Egy $ABCD$ paralelogrammát elhelyeztünk a koordináta-rendszerben. Tudjuk, hogy az AB egyenes egyenlete $2x - 5y = -4$, az AD egyenes egyenlete pedig $3x - 2y = -6$. A C pont koordinátái $(5; 5)$, a B pont első koordinátája 3.

d) Határozza meg a paralelogramma A, B és D csúcsának koordinátáit! (9 pont)

Egy megfelelő gráf, például: (2 pont)

- Ha lenne ilyen gráf, akkor abban a csúcsok fokszámának összege $3 \cdot 5 = 15$ lenne. Mivel egy gráfban a csúcsok fokszámának összege nem lehet páratlan, ezért **nincs ilyen gráf**.
- Lásd: Koordinátageometria 47. feladat
- Lásd: Koordinátageometria 47. feladat



Összesen: 17 pont

43) Válassza ki az alábbiak közül az összes állítást, amely tagadása a következőnek!

„Volt olyan nap a múlt héten, amikor esett az eső.”

A: A múlt héten minden nap esett az eső.

B: A múlt héten egyik nap sem esett az eső.

C: Nem volt olyan nap a múlt héten, amikor esett az eső.

D: Volt olyan nap a múlt héten, amikor nem esett az eső. (2 pont)

Megoldás:

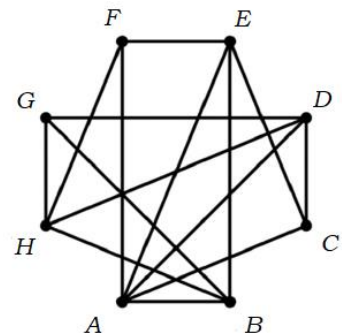
A tagadás legegyszerűbb formája, amikor a „nem” tagadószt beillesztjük a mondatba, így a **C** biztosan helyes megoldás. (1 pont)

Ezenkívül a „van olyan, ami igen” típusú szövegszerkezetek tagadása még az „egyetlen sem”, így a másik helyes válasz a **B**. (1 pont)

Összesen: 2 pont

44) Egy nyolccsapatos jégkorongbajnokságban minden csapat minden másikkal egyszer mérkőzik meg. Az ábrán látható gráf az eddig lejátszott mérkőzéseket szemlélteti. A pontok a csapatokat jelképezik, és két pont között pontosan akkor van él, ha a két csapat már játszott egymással. A bajnokságból 5 fordulót már megrendeztek, ám néhány mérkőzés elmaradt. (Egy fordulóban – ha nincs elmaradó mérkőzés – mindegyik csapat egy mérkőzést játszik.)

- Adja meg három olyan csapat betűjelét, melyek közül bármely kettő már lejátszotta az egymás közötti mérkőzését! (2 pont)
- Hány mérkőzés maradt el az első 5 fordulóban? (4 pont)



Az egyik játékos 0,3 valószínűséggel szerez gólt egy büntetőlövésből.

c) Mekkora a valószínűsége, hogy 10 büntetőlövésből pontosan 4 gólt szerez? (4 pont)

A szabványos jégkorong egy olyan vulkanizált gumihenger, amelynek magassága 2,54 cm (1 inch), alapkörének átmérője 7,62 cm (3 inch). Az egyik csapat a pálya bejáratához egy olyan nagyméretű korongot tervezett, amely (matematikai értelemben) hasonló a szabványos jégkoronghoz. A tervben szereplő nagyméretű korong térfogata 1 m^3 .

d) Számítsa ki a nagyméretű korong magasságának és alapköre átmérőjének a hosszát! (7 pont)

Megoldás:

a) Bármely olyan ponthármas, amelynek minden pontja össze van kötve a másik kettővel (vagyis kört alkotnak), megfelelő. A lehetséges megoldások **ABE, ACD, ACE, AEF, BGH, DGH**. (2 pont)

b) A gráfban a foksámok összege 30. (1 pont)

Az eddig lejátszott mérkőzések száma ennek fele, azaz 15. (1 pont)

Az 5 forduló alatt megrendezendő mérkőzések száma $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$. (1 pont)

Tehát $20 - 15 = 5$ mérkőzés maradt el. (1 pont)

c) Lásd: Valószínűségszámítás 79 feladat

d) Lásd: Térgeometria 50. feladat

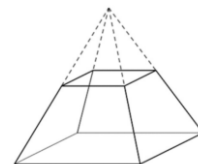
Összesen: 17 pont

45) Egy négyzet alapú szabályos gúla alapélének hossza 66 cm, a gúla magassága 56 cm.

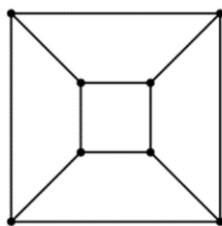
a. Számítsa ki a gúla felszínét! (5 pont)

A gúlát két részre vágjuk egy olyan síkkal, amely párhuzamos az alaplappal, és a gúla magasságát felezi.

b. Számítsa ki az így keletkező csonkagúla térfogatát! (4 pont)



A csonkagúla csúcsait és éleit gráfként is fel tudjuk rajzolni. Az így kapott 8 pontú gráfban minden pont fokszáma 3.



c) Létezik-e olyan 7 pontú gráf, amelyben minden pont fokszáma 3? (Ha válasza igen, akkor rajzoljon ilyen gráfot, ha a válasza nem, akkor válaszát indokolja.) (2 pont)

Megoldás:

a) Lásd: Térgeometria 52. feladat

b) Lásd: Térgeometria 52. feladat

c) Bármely gráfban a csúcsok foksámának összege páros. (1 pont)

Mivel $3 \cdot 7 = 21$ páratlan, ezért ilyen 7 pontú gráf **nincs**. (1 pont)

Összesen: 11 pont