Trigonometrikus függvények integrálása

Amennyiben egy olyan függvény határozatlan integrálját kell kiszámolnunk, amelyik függvény

$$\sin^{2k+1} x \cos^t x, \tag{1}$$

vagy

$$\cos^{2k+1} x \sin^t x \tag{2}$$

alakú, ahol k egy pozitív egész, t egy nemnegatív egész szám, akkor a következő eljárást lehet alkalmazni. (1) esetén a $\sin^{2k+1} x$ függvényt írjuk át az alábbi módon:

$$\sin^{2k+1} x = \sin x \sin^{2k} x = \sin x(\sin^2 x)^k = \sin x(1 - \cos^2 x)^k.$$

Ezt felhasználva

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^t x \, dx = \int \sin x(1 - \cos^2 x)^k \cos^t x \, dx,$$

ahol az $(1 - \cos^2 x)^k$ kifejezés kifejtése, majd a zárójel felbontása után olyan függvények összegének az integrálját kapjuk, amelyek mindegyike $f^\alpha(x) f'(x)$ alakú, ahol $f(x) = \cos x$.

(2) esetén a $\cos^{2k+1} x$ függvényt írjuk át az alábbi módon:

$$\cos^{2k+1} x = \cos x \cos^{2k} x = \cos x(\cos^2 x)^k = \cos x(1 - \sin^2 x)^k.$$

Ezt felhasználva

$$\int \cos^{2k+1} x \sin^t x \, dx = \int \cos x(1 - \sin^2 x)^k \sin^t x \, dx,$$

ahol az $(1 - \sin^2 x)^k$ kifejezés kifejtése, majd a zárójel felbontása után olyan függvények összegének az integrálját kapjuk, amelyek mindegyike $f^\alpha(x) f'(x)$ alakú, ahol $f(x) = \sin x$.

Nézzünk néhány konkrét gyakorlati példát a fentiekre vonatkozóan!

1. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx &= \int \sin x \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \sin x(1 - \cos^2 x) \cos^2 x \, dx \\
&= \int \sin x \cos^2 x - \sin x \cos^4 x \, dx = \int \sin x \cos^2 x \, dx - \int \sin x \cos^4 x \, dx \\
&= -\int \cos^2 x(-\sin x) \, dx + \int \cos^4 x(-\sin x) \, dx \\
&= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.
\end{aligned}$$

□

2. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \cos^3 x \sin^6 x \, dx$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \sin^6 x \, dx &= \int \cos x \cos^2 x \sin^6 x \, dx = \int \cos x (1-\sin^2 x) \sin^6 x \, dx \\ &= \int \cos x \sin^6 x - \cos x \sin^8 x \, dx = \int \cos x \sin^6 x \, dx - \int \cos x \sin^8 x \, dx \\ &= \frac{\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C.\end{aligned}$$

□

3. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \cos^5 x \, dx$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x \, dx &= \int \cos x \cos^4 x \, dx = \int \cos x (\cos^2 x)^2 \, dx = \int \cos x (1-\sin^2 x)^2 \, dx \\ &= \int \cos x (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \, dx = \int \cos x - 2\cos x \sin^2 x + \cos x \sin^4 x \, dx \\ &= \sin x - 2\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.\end{aligned}$$

□

Jelölje $R(\sin x, \cos x)$ mindazon valós függvényeknek a halmazát, amely függvényeket a négy alapművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás), a $\sin x$, a $\cos x$ függvény és tetszőleges valós számok felhasználásával lehet előállítani. Legyen $f(x) \in R(\sin x, \cos x)$ egy ilyen függvény. Ekkor az

$$\int f(x) \, dx$$

határozatlan integrál kiszámításánál az

$$\int f(x) \, dx = \left| \begin{array}{lll} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, & x = 2\operatorname{arctg}(t), & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \\ \\ \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}, & \frac{dx}{dt} = \frac{2}{t^2+1}, & dx = \frac{2}{t^2+1} \, dt \end{array} \right|$$

helyettesítés alkalmazásával egy olyan integrálhoz jutunk, ami a t változó egy racionális törtfüggvényének (egy olyan törtnek, amelyiknek mind a számlálója, mind a nevezője t hatványai számszorosának az összege) az integrálja.
Itt a táblázatban lévő adatoknál az alábbi összefüggéseket használtuk fel:

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2\sin x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x, \\ 1 &= \sin^2 x + \cos^2 x,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sin\left(2\,\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1} \\
&= 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\frac{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}+1} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)^2+1}, \\
\cos x &= \cos\left(2\,\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1} \\
&= \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}+1} = \frac{1-\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)^2+1}, \\
t &= \mathrm{tg}\frac{x}{2} \;\Rightarrow\; \frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\,(t) \;\Rightarrow x = 2\,\mathrm{arctg}\,(t) \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}.
\end{aligned}
$$

4. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx$$

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x}\,dx &= \left| \begin{array}{lll} t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}, & x = 2\,\mathrm{arctg}(t), & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{2}{t^2+1}, & dx = \frac{2}{t^2+1}\,dt & \end{array} \right| \\
&= \int \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1}}\frac{2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t^2+1}{2t}\frac{2}{t^2+1}\,dt \\
&= \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.
\end{aligned}
$$

□

5. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx$$

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos x}\,dx &= \left| \begin{array}{lll} t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}, & x = 2\,\mathrm{arctg}(t), & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{2}{t^2+1}, & dx = \frac{2}{t^2+1}\,dt & \end{array} \right| \\
&= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{t^2+1}}\frac{2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t^2+1}{1-t^2}\frac{2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{2}{1-t^2}\,dt \\
&= 2\int \frac{1}{1-t^2}\,dt = \begin{cases} 2\,\mathrm{arth}\,t, & \text{ha } |t|<1, \\ 2\,\mathrm{arcth}\,t, & \text{ha } 1<|t| \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2\,\mathrm{arth}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right), & \text{ha } \left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|<1, \\ 2\,\mathrm{arcth}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right), & \text{ha } 1<\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|. \end{cases}
\end{aligned}
$$

□

6. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx &= \left| \begin{array}{lll} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, & x = 2\operatorname{arctg}(t), & \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{2}{t^2+1}, & dx = \frac{2}{t^2+1}\,dt & \end{array} \right| \\
&= \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}} \frac{2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t^2+1}{2}\frac{2}{t^2+1}\,dt \\
&= \int 1\,dt = t + C = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

□

7. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx &= \left| \begin{array}{lll} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, & x = 2\operatorname{arctg}(t), & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{2}{t^2+1}, & dx = \frac{2}{t^2+1}\,dt & \end{array} \right| \\
&= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{t^2+1}} \frac{2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{1}{\frac{2t+t^2+1}{t^2+1}} \frac{2}{t^2+1}\,dt \\
&= \int \frac{t^2+1}{t^2+2t+1}\frac{2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{2}{t^2+2t+1}\,dt = 2\int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt \\
&= 2\int (t+1)^{-2}\,dt = 2\int 1\cdot(t+1)^{-2}\,dt = 2\frac{(t+1)^{-1}}{-1} + C \\
&= -2\frac{1}{t+1} + C = -2\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1} + C.
\end{aligned}$$

□

Fontos megjegyezni, hogy néha érdemes gondolkodni mielőtt mindenáron egy adott szabályt szeretnénk alkalmazni. Nézzük meg például az alábbi határozatlan integrált, amelyet már korábban kiszámoltunk, bár nem pont ebben a formában.

8. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx$$

Megoldás:

Az integrálandó függvény eleme az $R(\sin x, \cos x)$ halmaznak, hiszen az előállításánál csak az 1 valós számot, a $\sin x$, a $\cos x$ függvényt, illetve az osztás és a szorzás alapműveleteket használtuk fel. Így amennyiben a fent leírtak alapján szeretnénk kiszámolni az integrált, akkor

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx &= \left| \begin{array}{lll} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, & x = 2\operatorname{arctg}(t), & \sin x = \frac{2t}{t^2+1} \\ \\ \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}, & \frac{dx}{dt} = \frac{2}{t^2+1}, & dx = \frac{2}{t^2+1}\,dt \end{array} \right| \\
&= \int \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1}\frac{1-t^2}{t^2+1}} \frac{2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{(t^2+1)(t^2+1)}{2t(1-t^2)} \frac{2}{t^2+1}\,dt \\
&= \int \frac{(t^2+1)}{t(1-t^2)}\,dt = \int \frac{1}{t} + \frac{2t}{1-t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{2t}{1-t^2}\,dt \\
&= \int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{-2t}{1-t^2}\,dt = \ln|t| - \ln|1-t^2| + C = \ln\left|\frac{t}{1-t^2}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2}\right| + C
\end{aligned}$$

Ugyanakkor egy kis gondolkodással ez az integrál lényegesen egyszerűbb módon is kiszámolható:

$$\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,dx = \int \frac{1}{\frac{\sin x \cos^2 x}{\cos x}}\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}\,dx = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

□

Parciális törtek integrálása

9. **Állítás.** *Legyen $A \neq 0$, a tetszőleges valós szám, $k \in \mathbb{N}$ egy természetes szám. Ekkor*

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \begin{cases} \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C, & \text{ha } k \neq 1, \\ \\ A\ln|x-a| + C, & \text{ha } k = 1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Ha $k = 1$, akkor

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{1}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C,$$

ahol az utolsó integrál

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

alakú integrál az $f(x) = x - a$ függvénnyel. Amennyiben $k \neq 1$, akkor

$$\begin{aligned}
\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx &= A\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = A\int 1\cdot(x-a)^{-k}\,dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C \\
&= \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C,
\end{aligned}$$

ahol az utolsó integrál

$$\int f^{\alpha}(x) f'(x)\,dx$$

alakú, ahol $f(x) = x - a$, $\alpha = -k$. □

10. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \frac{5}{x-3}\,dx$$

Megoldás:

$$\int \frac{5}{x-3}\,dx = 5\int \frac{1}{x-3}\,dx = 5\ln|x-3| + C.$$

□

11. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \frac{2}{x-7}\,dx$$

Megoldás:

$$\int \frac{2}{x-7}\,dx = 2\int \frac{1}{x-7}\,dx = 2\ln|x-7| + C.$$

□

12. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \frac{3}{2x-5}\,dx$$

Megoldás:

$$\int \frac{3}{2x-5}\,dx = \int \frac{3}{2}\frac{1}{x-\frac{5}{2}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-\frac{5}{2}}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x-\frac{5}{2}| + C.$$

□

13. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \frac{7}{4x+9}\,dx$$

Megoldás:

$$\int \frac{7}{4x+9}\,dx = \int \frac{7}{4}\frac{1}{x+\frac{9}{4}}\,dx = \frac{7}{4}\int \frac{1}{x+\frac{9}{4}}\,dx = \frac{7}{4}\ln|x+\frac{9}{4}| + C.$$

□

14. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx$$

Megoldás:

$$\int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx = 2\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = 2\int 1\cdot(x-1)^{-2}\,dx = 2\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = -2\frac{1}{x-1} + C.$$

□

15. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \frac{5}{(x+3)^6}\,dx$$

Megoldás:

$$\int \frac{5}{(x+3)^6}\,dx = 5\int \frac{1}{(x+3)^6}\,dx = 5\int 1\cdot(x+3)^{-6}\,dx = 5\frac{(x+3)^{-5}}{-5} + C = -\frac{1}{(x+3)^5} + C.$$

□

16. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \frac{7}{(x+9)^3}\,dx$$

Megoldás:

$$\int \frac{7}{(x+9)^3}\,dx = 7\int \frac{1}{(x+9)^3}\,dx = 7\int 1\cdot(x+9)^{-3}\,dx = 7\frac{(x+9)^{-2}}{-2} + C = -\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{(x+9)^2} + C.$$

□

17. **Állítás.** *Legyenek $A \neq 0$, $a \neq 0$, b, c adott valós számok úgy, hogy $b^2 - 4ac < 0$. Ekkor*

$$\int \frac{A}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{A}{a\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}}\, arctg \left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}}\right) + C$$

Bizonyítás. Láthatjuk, hogy az állításban szereplő integrálban szereplő törtben egy olyan másodfokú kifejezés áll, aminek a diszkriminánsa negatív. Fontos megjegyezni, hogy nem a képletet érdemes megjegyezni, hanem a levezetés egyes lépéseit. Első lépésben elérjük, hogy a tört számlálója 1, nevezőjében lévő másodfokú kifejezésben az x^2 együtthatója 1 legyen.

$$\int \frac{A}{ax^2+bx+c}\,dx \quad = \quad \int \frac{A}{a}\frac{1}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\,dx = \frac{A}{a}\int \frac{1}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\,dx$$

A teljes négyzetté alakítás módszerével elérjük, hogy a nevezőben lévő másodfokú kifejezés $(x+u)^2+v^2$ alakú legyen, ahol u, v valós számok.

$$\begin{aligned} &= \frac{A}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}\,dx = \frac{A}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}\,dx \\ &= \frac{A}{a}\int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2}\,dx \end{aligned}$$

A nevezőben szereplő $(x+u)^2+v^2$ kifejezésben emeljük ki a v^2-es kifejezést, aminek elvégzése után az integráljel mögötti tört nevezője

$$\left(\frac{x+u}{v}\right)^2+1$$

alakúvá válik.

$$\begin{aligned} &= \frac{A}{a}\int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\left(\frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2}+1\right)}\,dx \\ &= \frac{A}{a\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}}\right)^2+1}\,dx \end{aligned}$$

Végezzük el a

$$t=\frac{x+u}{v}$$

helyettesítést, ami után a kiszámítandó integrál az

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \operatorname{arctg} t + C$$

alapintegrállá változik.

$$
\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{ll} t = \frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}} & x = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t - \frac{b}{2a} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} & dx = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}dt \end{array} \right| \\
&= \frac{A}{a\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2} \int \frac{1}{t^2+1} \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\, dt \\
&= \frac{A}{a\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2} \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \int \frac{1}{t^2+1}\, dt \\
&= \frac{A}{a\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}} \operatorname{arctg} t + C \\
&= \frac{A}{a\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}} \right) + C.
\end{aligned}
$$

□

Nézzük meg a fent leírtakat konkrét példákon keresztül!

18. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx$$

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\, dx = \left| \begin{array}{ll} t = x+1 & x = t-1 \\ \frac{dx}{dt} = 1 & dx = dt \end{array} \right| \\
&= \int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x+1) + C.
\end{aligned}
$$

□

19. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx$$

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx &= \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1}\, dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\, dx \\
&= \int \frac{1}{\frac{3}{4}\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}} + 1}\, dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\, dx \\
&= \left| \begin{array}{ll} t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} & x = \frac{\sqrt{3}t-1}{2} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} & dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt \end{array} \right| \\
&= \frac{4}{3} \int \frac{1}{t^2+1} \frac{\sqrt{3}}{2}\, dt = \frac{4\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} t + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C.
\end{aligned}
$$

□

20. **Példa.** *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrált!*

$$\int \frac{3}{2x^2+x+5}\, dx$$

Megoldás:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3}{2x^2+x+5}\,dx &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}+\frac{5}{2}}\,dx \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{39}{16}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{\frac{39}{16}\left(\frac{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{39}{16}}+1\right)}\,dx \\
&= \frac{3}{2}\cdot\frac{16}{39}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{x+\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{39}{16}}}\right)^2+1\right)}\,dx \\
&= \left|\begin{array}{ll} t=\frac{x+\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{39}{16}}} & x=\sqrt{\frac{39}{16}}t-\frac{1}{4} \\ \frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{39}{16}} & dx=\sqrt{\frac{39}{16}}dt \end{array}\right| \\
&= \frac{8}{13}\int \frac{1}{t^2+1}\sqrt{\frac{39}{16}}\,dt = \frac{8}{13}\sqrt{\frac{39}{16}}\,\mathrm{arctg}\,t+C \\
&= \frac{8}{13}\sqrt{\frac{39}{16}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{39}{16}}}\right)+C.
\end{aligned}$$

□