Koordinátageometria
Megoldások

1) Adott két pont: $A\left(-4;\frac{1}{2}\right)$ és $B\left(1;\frac{3}{2}\right)$ Írja fel az AB szakasz felezőpontjának koordinátáit! (2 pont)

Megoldás:

AB felezőpontja legyen F. $F\left(\frac{-4+1}{2};\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}\right)=F\left(-\frac{3}{2};1\right)$ (2 pont)

2) Egy kör sugarának hossza 4, középpontja a $B(-3;5)$ pont. írja fel a kör egyenletét! (2 pont)

Megoldás:

$\boldsymbol{(x+3)^2+(y-5)^2=16}$, vagy $\boldsymbol{x^2+y^2+6x-10y+18=0}$ (2 pont)

3) Írja fel a $(-2;7)$ ponton átmenő, $\underline{n}(5;8)$ normálvektorú egyenes egyenletét! (2 pont)

Megoldás:

$5x+8y=-10+56$ (1 pont)

$\boldsymbol{5x+8y=46}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

4) Adottak az $\underline{a}=(6;4)$ és az $\underline{a-b}=(11;5)$ vektorok. Adja meg a b vektort a koordinátával! (3 pont)

Megoldás:

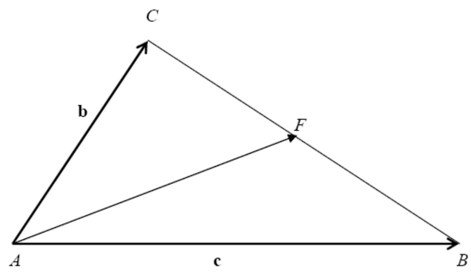
$6-b_1=11$ (1 pont)

$4-b_2=5$ (1 pont)

$\boldsymbol{\underline{b}(-5;-1)}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

5) Az ABC háromszög két oldalának vektora $AB=\underline{c}$ és $AC=\underline{b}$. Fejezze ki ezek segítségével az A csúcsból a szemközti oldal F felezőpontjába mutató AF vektort! (2 pont)



Megoldás:

$\boldsymbol{\overrightarrow{AF}=\frac{b+c}{2}}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

6) Egy négyzet oldalegyenesei a koordinátatengelyek és az $x=1$, valamint az $y=1$ egyenletű egyenesek.

a) Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben a négyzetet, és adja meg csúcsainak koordinátáit! (2 pont)

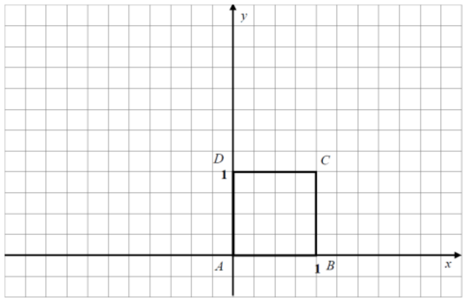
b) Írja fel a négyzet köré írható kör egyenletét! (5 pont)

c) Állapítsa meg, hogy a négyzet kerülete hány százaléka a kör kerületének? (2 pont)

d) Az $y=-4x+2$ egyenletű egyenes a négyzetet két részre bontja. Számítsa ki e részek területének arányát! (8 pont)

Megoldás:

a)



(1 pont)

A csúcspontok koordinátái: $\boldsymbol{A}(\mathbf{0;0})$, $\boldsymbol{B}(\mathbf{1;0})$, $\boldsymbol{C}(\mathbf{1;1})$, $\boldsymbol{D}(\mathbf{0;1})$. (1 pont)

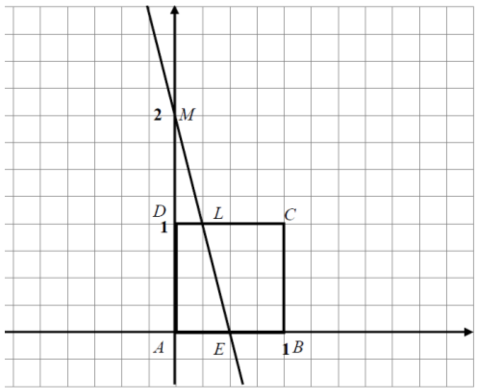
b) A kör középpontja: $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ (1 pont)

A kör sugara: $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (2 pont)

A kör egyenlete: $\left(\boldsymbol{x}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}+\left(\boldsymbol{y}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$. (2 pont)

c) *Lásd: Síkgeometria 60. feladat*

d) L rajta van az $y=1$ és az $y=-4x+2$ egyenesek metszéspontján. (1 pont)



Így $L\left(\frac{1}{4};1\right)$, (1 pont)

ezért $DL=\frac{1}{4}$ (1 pont)

Az AEDL trapéz területe $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}\cdot 1=\frac{3}{8}\cdot 1=\frac{3}{8}$ (2 pont)

Az EBCL trapéz területe $\frac{5}{8}$ (2 pont)

A két terület aránya $\mathbf{3:5}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

7) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $\boldsymbol{P}(\mathbf{3};-\mathbf{5})$ ponton és párhuzamos a $\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{5}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ egyenletű egyenessel! (3 pont)

Megoldás:

$\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{5}\boldsymbol{y}=-\mathbf{13}$ (3 pont)

Összesen: 3 pont

8) Egy rombusz átlóinak hossza 12 és 20. Számítsa ki az átlóvektorok skalárszorzatát! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Az átlóvektorok merőlegesek egymásra, ezért (1 pont)
a skalárszorzat értéke **0**. (2 pont)

Összesen: 3 pont

9) a) Ábrázolja koordináta-rendszerben az *e* egyenest, melynek egyenlete $\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}\boldsymbol{y}=-\mathbf{11}$.

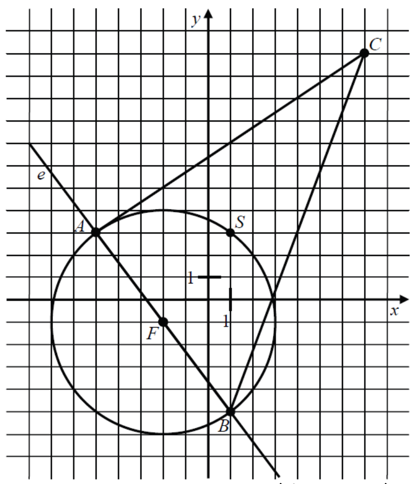
Számítással döntse el, hogy a $P(100;-36)$ pont rajta van-e az egyenesen! Az egyenesen levő Q pont ordinátája (második koordinátája) 107.
Számítsa ki a Q pont abszcisszáját (első koordinátáját)! (4 pont)

b) **Írja fel az AB átmérőjű kör egyenletét, ahol $A(-5;3)$ és $B(1;-5)$. Számítással döntse el, hogy az $S(1;3)$ pont rajta van-e a körön! (7 pont)**

c) **Adja meg az ABC háromszög C csúcsának koordinátáit, ha tudja, hogy az $S(1;3)$ pont a háromszög súlypontja! (6 pont)**

Megoldás:

a) Mivel $4\cdot100+3\cdot(-36)\neq-11$ ezért a ***P* pont nincs az egyenesen**. (1 pont)
Az *e* egyenes ábrázolása. (1 pont)
A *Q* pontra: $4x+3\cdot107=-11$, (1 pont)
ahonnan a *Q* pont abszcisszája: $\boldsymbol{x=-83}$. (1 pont)



b) Az *AB* szakasz felezőpontja *F*. $F(-2;-1)$ (2 pont)
$r=\left|\overrightarrow{AF}\right|=\sqrt{(-2+5)^2+(-1-3)^2}=5$ (2 pont)
A kör egyenlete: $(x+2)^2+(y+1)^2=25$ (2 pont)
Mivel $(1+2)^2+(3+1)^2=25$ **ezért az *S* pont rajta van a körön**. (1 pont)

c) A *C* pont koordinátái: $(x_c;y_c)$
S koordinátáira felírható: $1=\dfrac{-5+1+x_c}{3}$; $3=\dfrac{3+(-5)+y_c}{3}$ (3 pont)
Ahonnan $x_c=7$, (1 pont)
$y_c=11$ (1 pont)
Tehát $\mathbf{C(7;11)}$ (1 pont)
A feladat megoldható vektorműveletekkel is azt az összefüggést felhasználva, hogy a háromszög súlypontja a súlyvonalon az oldalhoz közelebbi harmadolópont.

Összesen: 17 pont

10) Fejezze ki az $\underline{i}$ és a $\underline{j}$ vektorok segítségével a $\underline{c}=2\underline{a}-\underline{b}$ vektort, ha $\underline{a}=3\underline{i}-2\underline{j}$ és $\underline{b}=-\underline{i}+5\underline{j}$! (3 pont)

Megoldás:

$\overline{c}=2\overline{a}-\overline{b}$; $\underline{c}=2\left(3\underline{i}-2\underline{j}\right)-\left(-\underline{i}+5\underline{j}\right)$ (1 pont)
$\underline{c}=6\underline{i}-4\underline{j}+\underline{i}-5\underline{j}$ (1 pont)
$\boldsymbol{\underline{c}=7\underline{i}-9\underline{j}}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

11) Az *ABCD* négyzet középpontja *K*, az *AB* oldal felezőpontja *F*. Legyen $\underline{a}=\overrightarrow{KA}$ és $\underline{b}=\overrightarrow{KB}$. Fejezze ki az *a* és *b* vektorok segítségével a $\overline{KF}$ vektort! (2 pont)

Megoldás:

$\overrightarrow{\boldsymbol{KF}} = \dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{\mathbf{2}}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

12) Adott a koordináta-rendszerben az $A(9;-8)$ középpontú, 10 egység sugarú kör.

a) Számítsa ki az $y=-16$ egyenletű egyenes és a kör közös pontjainak koordinátáit! (8 pont)

b) Írja fel a kör $P(1;-2)$ pontjában húzható érintőjének egyenletét! Adja meg ennek az érintőnek az iránytangensét (meredekségét)! (4 pont)

Megoldás:

a) A kör egyenlete $(x-9)^2+(y+8)^2=100$ (2 pont)

Ebbe behelyettesítve az $y=-16$-ot:

$(x-9)^2=36$ (2 pont)

Az egyenlet megoldva: $x=15$ vagy $x=3$ (2 pont)

A közös pontok: $(15;-16)$ és $(3;-16)$ (2 pont)

b) Az érintő normálvektora az $\overrightarrow{AP}$ vektor. (1 pont)

$\overrightarrow{AP}=(-8;6)$ (1 pont)

Az érintő egyenlete $\mathbf{4}\boldsymbol{x}-\mathbf{3}\boldsymbol{y}=\mathbf{10}$ (1 pont)

Az érintő iránytangense $\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

13) Az $A(-7;12)$ pontot egy $\underline{r}$ vektorral eltolva a $B(5;8)$ pontot kapjuk. Adja meg az $\underline{r}$ vektor koordinátáit! (2 pont)

Megoldás:

A keresett vektor: $\underline{\boldsymbol{r}}=(\mathbf{12};-\mathbf{4})$. (2 pont)

14) Jelölje X-szel a táblázatban, hogy az alábbi koordináta-párok közül melyikek adják meg a 300°-os irányszögű egységvektor koordinátáit és melyikek nem!

	IGEN	NEM
$\boldsymbol{e}\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$		
$\boldsymbol{e}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$		
$\boldsymbol{e}\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$		
$\boldsymbol{e}\left(\sin 30^\circ;-\cos 30^\circ\right)$		

(4 pont)

Megoldás:

	IGEN	NEM
$e\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		**X**
$e\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$		**X**
$e\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	**X**	
$e\left(\sin 30^\circ;-\cos 30^\circ\right)$	**X**	

(4 pont)

15) Számítsa ki a következő vektorok skaláris szorzatát!
Határozza meg a két vektor által bezárt szöget!
$\underline{\boldsymbol{a}}(5;8)$ $\underline{\boldsymbol{b}}(-40;25)$ **(3 pont)**

Megoldás:

A két vektor skaláris szorzata **0**. (2 pont)
A két vektor szöge **derékszög**. (1 pont)
Összesen: 3 pont

16) Adott az $x^2+y^2-6x+8y-56=0$ egyenletű kör és az $x-8,4=0$ egyenletű egyenes.

a) Számítsa ki a kör és az egyenes közös pontjainak koordinátáit! (6 pont)

b) Mekkora távolságra van a kör középpontja az egyenestől? (5 pont)

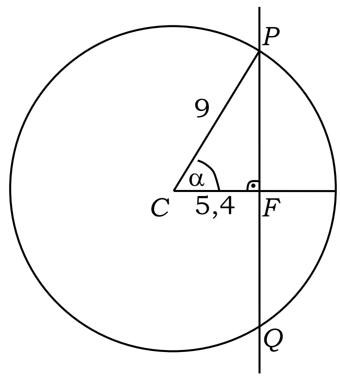
Egy 9 cm sugarú kört egy egyenes két körívre bont. Az egyenes a kör középpontjától 5,4 cm távolságban halad.

c) Számítsa ki a hosszabb körív hosszát! (A választ egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (6 pont)

Megoldás:

a) Megoldandó az $x^2+y^2-6x+8y-56=0 \land x=8,4$ egyenletrendszer. (1 pont)
Behelyettesítés után: $y^2+8y-35,84=0$ (1 pont)
amelyből $y=3,2$ vagy $y=-11,2$. (2 pont)
Két közös pont van: $\boldsymbol{P_1(8,4;3,2)}$, $\boldsymbol{P_1(8,4;-11,2)}$ (2 pont)

b) A kör egyenlete átalakítva: $(x-3)^2+(y+4)^2=81$ (1 pont)
A kör középpontja $C(3;-4)$ (és sugara 9) (1 pont)
Az egyenes párhuzamos az ordinátatengellyel, (1 pont)
ezért a $C(3;-4)$ pontból az egyenesre bocsátott merőleges talppontja $T(8,4;-4)$ (1 pont)
Az egyenes $\boldsymbol{TC}=8,4-3=\mathbf{5,4}$ egység távolságra van a kör középpontjától. (1 pont)



c) Helyes ábra (1 pont)

A *CFP* derékszögű háromszögből: $\cos\alpha = \frac{5,4}{9} = 0,6$ (1 pont)

tehát $\alpha \approx 53,13^\circ$ (1 pont)

A *PQ* hosszabb körívhez tartozó középponti szög $360^\circ - 2\alpha \approx 253,74^\circ$ (1 pont)

A körív hossza:

$\frac{2\cdot 9\cdot \pi\cdot 253,74}{360} \approx 39,9$ (1 pont)

A hosszabb *PQ* körív hossza kb. **39,9 cm**. (1 pont)

A feladat megoldható a rövidebb PQ körívhez tartozó 2α középponti szög kiszámításával, majd ebből a körív hosszának meghatározásával is.

Összesen: 17 pont

17) Az *ABC* háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(0;0)$, $B(-2;4)$, $C(4;5)$.

a) Írja fel az *AB* oldal egyenesének egyenletét! (2 pont)

b) Számítsa ki az *ABC* háromszög legnagyobb szögét! A választ tized fokra kerekítve adja meg! (7 pont)

c) Számítsa ki az *ABC* háromszög területét! (3 pont)

Megoldás:

a) Az egyenes átmegy az origón $m = \frac{4}{-2} = -2$, (1 pont)

Egyenlete: $\boldsymbol{y = -2x}$ (1 pont)

b) A háromszög legnagyobb szöge a legnagyobb oldallal szemben van (vagy mindhárom szöget kiszámolja). (1 pont)

Az oldalhosszúságok: $AB = \sqrt{20}$, $AC = \sqrt{41}$, $BC = \sqrt{37}$. (2 pont)

Az *AC*-vel szemben levő szög legyen β.

Alkalmazva a koszinusztételt: (1 pont)

$41 = 20 + 37 - 2\sqrt{20\cdot 37}\cos\beta$ (1 pont)

$\cos\beta \approx 0,2941$, (1 pont)

$\boldsymbol{\beta \approx 72,9^\circ}$ (1 pont)

c) A háromszög egy területképlete: $t = \frac{AB\cdot BC\cdot \sin\beta}{2}$ (1 pont)

$t = \frac{\sqrt{20\cdot 37}\cdot \sin 72,9^\circ}{2}$. (1 pont)

A háromszög területe **13** (területegység). (1 pont)

Összesen: 12 pont

18) Három egyenes egyenlete a következő (*a* és *b* valós számokat jelölnek):

$\boldsymbol{e:\ y = -2x + 3}$

$\boldsymbol{f:\ y = ax - 1}$

$\boldsymbol{g:\ y = bx - 4}$

Milyen számot írjunk az *a* helyére, hogy az *e* és *f* egyenesek párhuzamosak legyenek?

Melyik számot jelöli *b*, ha a *g* egyenes merőleges az *e* egyenesre? (3 pont)

Megoldás:

$\boldsymbol{a = -2}$ (1 pont)

$\boldsymbol{b = \frac{1}{2}}$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

19) Egy kör az $(1;0)$ és $(7;0)$ pontokban metszi az x tengelyt. Tudjuk, hogy a kör középpontja az $y = x$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Írja fel a kör középpontjának koordinátáit! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

A középpont a húr felező merőlegesén van, (1 pont)
így az első koordinátája 4. (1 pont)
A középpont: $\boldsymbol{O(4;4)}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

20) Az *ABC* háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-3;2)$, $B(3;2)$ és $C(0;0)$.

a) Számítsa ki az *ABC* háromszög szögeit! (5 pont)

b) Írja fel az *ABC* háromszög körülírt körének egyenletét! (7 pont)

Megoldás:

a) Az *ABC* háromszög egyenlő szárú. (1 pont)
Az *AB* alapon fekvő hegyesszögek tangense $\frac{2}{3}$ (2 pont)
tehát az alapon fekvő szögek nagysága **33,7°**, (1 pont)
a szárak szöge pedig **112,6°**. (1 pont)

b) A körülírt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek közös pontja, ez a szimmetria miatt az ordinátatengelyen van. (1 pont)
Az *AC* oldal felezőmerőlegese átmegy a $(-1,5;1)$ felezőponton. (1 pont)
Az *AC* oldal felezőmerőlegesének egy normálvektora a *CA*, (1 pont)
$CA(-3;2)$. (1 pont)
Az *AC* oldal felezőmerőlegesének egyenlete:
$-3x + 2y = 6,5$. (1 pont)
Ez az y tengelyt a $(0;3,25)$ pontban metszi (ez a körülírt kör középpontja).
A kör sugara 3,25. (1 pont)
A körülírt kör egyenlete: $\boldsymbol{x^2 + (y - 3,25)^2 = 3,25^2}$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

21) Adott két egyenes: $e: 5x - 2y = -14,5$, $f: 2x + 5y = 14,5$.

a) Határozza meg a két egyenes *P* metszéspontjának koordinátáit! (4 pont)

b) Igazolja, hogy az *e* és az *f* egyenesek egymásra merőlegesek! (4 pont)

c) Számítsa ki az *e* egyenes *x* tengellyel bezárt szögét! (4 pont)

Megoldás:

a) (A két egyenes egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldása adja a *P* koordinátáit.)
Az első egyenletből: $y = 2,5x + 7,25$. (1 pont)
Ezt behelyettesítve a második egyenletbe és rendezve $x = -1,5$. (1 pont)
$y = 3,5$ (1 pont)
Tehát $\boldsymbol{P(-1,5;3,5)}$. (1 pont)

b) Az egyenesek meredeksége: $m_e = \frac{5}{2}$ (1 pont)

$m_f = -\frac{2}{5}$ (1 pont)

A meredekségek szorzata -1, (1 pont)
tehát a két egyenes **merőleges**. (1 pont)
A feladat megoldható a normálvektorok skaláris szorzatát megvizsgálva is.

c) Az e egyenes meredeksége 2,5, tehát az egyenes x tengellyel bezárt α szögére igaz, hogy $\mathrm{tg}\alpha = 2{,}5$. (3 pont)

Ebből $\alpha = \mathbf{68{,}2^\circ}$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

22) Írja fel annak az *e* egyenesnek az egyenletét, amelyik párhuzamos a $2x - y = 5$ egyenletű *f* egyenessel és áthalad a $P(3;-2)$ ponton! Válaszát indokolja! (2 pont)

Megoldás:

Az f egyenes meredeksége 2, így az e egyenes meredeksége is 2.
$m(x - x_0) = y - y_0$
$\boldsymbol{y = 2x - 8}$ (2 pont)

23) Adja meg az $(x+2)^2 + y^2 = 9$ egyenletű kör *K* középpontjának koordinátáit és sugarának hosszát! (3 pont)

Megoldás:

$\boldsymbol{K(-2;0)}$ (2 pont)
$\boldsymbol{r = 3}$ (1 pont)

Összesen: (3 pont)

24) Adja meg a $2x + y = 4$ egyenletű egyenes és az *x* tengely *M* metszéspontjának a koordinátáit, valamint az egyenes meredekségét! (3 pont)

Megoldás:

A metszéspont $\boldsymbol{M(2;0)}$. (2 pont)
Az egyenes meredeksége $\mathbf{-2}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

25) A *PQR* háromszög csúcsai: $P(-6;-1)$, $Q(6;-6)$ és $R(2;5)$.

a) Írja fel a háromszög *P* csúcsához tartozó súlyvonal egyenesének egyenletét! (5 pont)

b) Számítsa ki a háromszög *P* csúcsnál lévő belső szögének nagyságát! (7 pont)

Megoldás:

a) A kérdéses súlyvonalra a P csúcs és a vele szemközti oldal felezőpontja illeszkedik. (1 pont)
A QR szakasz felezőpontja $F(4;-0{,}5)$. (1 pont)
A súlyvonal egy irányvektora: $\overrightarrow{PF}(10;0{,}5)$. (1 pont)
A súlyvonal egyenlete: $\boldsymbol{x - 20y = 14}$. (2 pont)

b) (A kérdéses szöget a háromszög oldalvektorai skalárszorzatának segítségével lehet meghatározni.) Az oldalvektorok $PQ(12;-5)$ és $PR(8;6)$. (2 pont)

A két vektor skalárszorzata a koordinátákból: $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=12\cdot 8+(-5)\cdot 6=66$

(1 pont)

Az oldalvektorok hossza $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=13$ és $\left|\overrightarrow{PR}\right|=10$ (1 pont)

A két vektor skalárszorzata a definíció szerint: $\left(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}\right)=66=13\cdot 10\cdot\cos\alpha$,

ahol α a két vektor által bezárt szöget jelöli. (1 pont)

Innen: $\cos\alpha\approx 0{,}5077$ (1 pont)

$\alpha=\mathbf{59{,}5°}$ (mivel $0°<\alpha<180°$) (1 pont)

Összesen: 12 pont

26) Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-2;-1)$, $B(9;-3)$, és $C(-3;6)$.

a) Írja fel a *BC* oldal egyenesének egyenletét! (3 pont)

b) Számítsa ki a *BC* oldallal párhuzamos középvonal hosszát! (3 pont)

c) Számítsa ki a háromszögben a *C* csúcsnál lévő belső szög nagyságát! (6 pont)

Megoldás:

a) A BC oldalegyenes egy irányvektora a $\overrightarrow{BC}(-12;9)$ vektor. (1 pont)

Ezzel az egyenes egyenlete: $9x+12y=9\cdot 9+12\cdot(-3)$, (1 pont)

azaz: $\mathbf{9x+12y=45}$ $\mathbf{(3x+4y=15)}$. (1 pont)

b) A BC oldallal párhuzamos középvonal hossza fele a BC oldal hosszának.

(1 pont)

A BC oldal hossza: $\sqrt{12^2+(-9)^2}=15$ (1 pont)

A középvonal hossza: $\mathbf{7{,}5}$. (1 pont)

c) Az ABC háromszög oldalainak hossza: $AB=\sqrt{125}$, $BC=15$, $AC=\sqrt{50}$.

(2 pont)

A C csúcsnál lévő belső szöget jelölje γ. Alkalmazva a koszinusztételt: (1 pont)

$125=225+50-2\cdot 15\cdot\sqrt{50}\cdot\cos\gamma$ (1 pont)

$\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\approx 0{,}7071)$ (1 pont)

(Mivel $0°<\gamma<180°$, így) $\boldsymbol{\gamma=45°}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

27) Tekintsük a koordinátarendszerben adott $A(6;9)$, $B(-5;4)$ és $C(-2;1)$ pontokat!

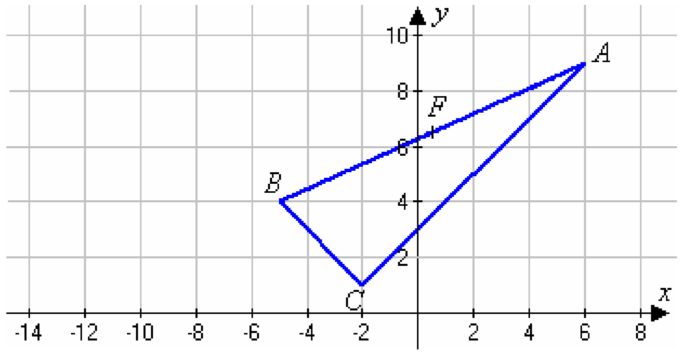
a) Mekkora az *AC* szakasz hossza? (2 pont)

b) Írja fel az *AB* oldalegyenes egyenletét! (4 pont)

c) Igazolja (számítással), hogy az *ABC* háromszög *C* csúcsánál derékszög van! (6 pont)

d) Írja fel az *ABC* háromszög körülírt körének egyenletét! (5 pont)

Megoldás:



a) $\overrightarrow{AC}(-8;-8)$

$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{128} =$

$\mathbf{8 \cdot \sqrt{2} \approx 11,31}$ (2 pont)

b) $\overrightarrow{AB} = \underline{v}(-11;-5)$

$\underline{n}(-5;11)$

$m = \dfrac{5}{11}$ (2 pont)

Az AB egyenes egyenlete: $\mathbf{-5x + 11y = 69}$ vagy $\boldsymbol{y = \dfrac{5}{11}x + \dfrac{69}{11}}$ (2 pont)

c) A $\overrightarrow{CB}(-3;3)$ (1 pont)

$\overrightarrow{CA}(8;8)$ (1 pont)

A vektorok skaláris szorzata: $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -3 \cdot 8 + 8 \cdot 3 = 0$ (2 pont)

Mivel a két vektor skaláris szorzata 0, a két vektor merőleges egymásra, azaz **a C csúcsnál derékszög van**. (2 pont)

d) Mivel derékszögű a háromszög, Thalész tétele alapján a körülírt kör középpontja az átfogó felezőpontja, a kör sugara pedig az átfogó fele. (1 pont)

$F(0,5;6,5)$ (2 pont)

A kör sugara: $R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{146}}{2} \approx 6,04$ (1 pont)

A kör egyenlete: $\mathbf{(x - 0,5)^2 + (y - 6,5)^2 = 36,5}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

28) Adottak az $\underline{a}(4;3)$ és $\underline{b}(-2;1)$ vektorok.

a) Adja meg az $\underline{a}$ hosszát! (2 pont)

b) Számítsa ki az $\underline{a} + \underline{b}$ koordinátáit! (2 pont)

Megoldás:

a) $\underline{a} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \mathbf{5}$ (2 pont)

b) $\underline{a} + \underline{b} = (4 + (-2); 3 + 1) = \mathbf{(2;4)}$ (2 pont)

29) Adott a síkon az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0$ egyenletű kör.

a) Állapítsa meg, hogy az $A(7;7)$ pont illeszkedik-e a körre! (2 pont)

b) Határozza meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát! (5 pont)

c) Legyenek $A(7;7)$ és $B(0;0)$ egy egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai. A háromszög C csúcsa rajta van az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0$ egyenletű körön. Számítsa ki a C csúcs koordinátáit! (10 pont)

Megoldás:

a) $49 + 49 + 14 - 14 - 47 \neq 0$ **Tehát a pont nem illeszkedik a körre.** (2 pont)

b) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 49$ (3 pont)

$\boldsymbol{K = (-1;1)}$ $\boldsymbol{r = 7}$ (2 pont)

c) A háromszög harmadik csúcsa az alap felezőmerőlegesén van. (1 pont)

Az AB oldal felezőpontja: $F(3,5;3,5)$ (1 pont)

Az AB oldal felezőmerőlegesének normálvektora $\underline{n}(7;7)$ (1 pont)

A felezőmerőleges egyenlete $x+y=7$. (1 pont)

A háromszög harmadik csúcsát a kör és a felezőmerőleges metszéspontja adja: $\left.\begin{array}{l}(x+1)^2+(y-1)^2=49\\ y=7-x\end{array}\right\}$ (1 pont)

$x^2-5x-6=0 \quad x_1=6 \quad x_2=-1$ (3 pont)

$y_1=1 \quad y_2=8$ (1 pont)

$\mathbf{C_1=(6;1)}$; $\mathbf{C_2=(-1;8)}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

30) Adott a koordináta-rendszerben két pont: $A(1;-3)$ és $B(7;-1)$.

a) Írja fel az A és B pontokra illeszkedő e egyenes egyenletét! (4 pont)

b) Számítással igazolja, hogy az A és a B pont is illeszkedik az $x^2+y^2-6x-2y=10$ egyenletű k körre, és számítsa ki az AB húr hosszát! (4 pont)

Az f egyenesről tudjuk, hogy illeszkedik az A pontra és merőleges az AB szakaszra.

c) Számítsa ki a k kör és az f egyenes (A-tól különböző) metszéspontjának koordinátáit! (9 pont)

Megoldás:

a) $\overrightarrow{AB}(6;2)$ (1 pont)

Az e egyenes egy normálvektora: $\underline{n}(1;-3)$, (1 pont)

egyenlete: $x-3y=7-3\cdot(-1)\Rightarrow$ (1 pont)

$\Rightarrow \mathbf{x-3y=10}$ (1 pont)

b) A pont koordinátáinak behelyettesítésével adódik:

$1^2+(-3)^2-6\cdot1-2\cdot(-3)=10$, tehát az A pont illeszkedik a k körre. (1 pont)

B pont koordinátáinak behelyettesítésével adódik:

$7^2+(-1)^2-6\cdot7-2\cdot(-1)=10$, tehát a B pont illeszkedik a k körre. (1 pont)

Az AB húr hossza $\sqrt{(7-1)^2+(-1+3)^2}=$ (1 pont)

$=\mathbf{\sqrt{40}\,(\approx 6,32)}$. (1 pont)

c) Az f egyenes egy normálvektora: $\underline{n}(3;1)$ (1 pont)

Az f egyenes egyenlete $3x+y=0$. (2 pont)

A metszéspont koordinátáit a k kör és az f egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásával kapjuk. (1 pont)

Az f egyenes egyenletéből $y=-3x$. (1 pont)

Ezt a kör egyenletébe helyettesítve:

$x^2+9x^2-6x-2\cdot(-3x)=10$. (1 pont)

Egyszerűsítés után adódik: $x^2=1$. (1 pont)

Ennek (az 1-től különböző) megoldása $x=-1$. (1 pont)

Így a keresett pont: $\mathbf{C(-1;3)}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

31) Adott az $A(5;2)$ és a $B(-3;-2)$ pont.

a) Számítással igazolja, hogy az A és B pontok illeszkednek az $x-2y=1$ egyenletű e egyenesre! (2 pont)

b) Írja fel az AB átmérőjű kör egyenletét! (5 pont)

c) Írja fel annak az f egyenesnek az egyenletét, amely az AB átmérőjű kört a B pontban érinti! (5 pont)

Megoldás:

a) $5-2\cdot 2=\mathbf{1}$ (igaz) (1 pont)

$(-3)-2\cdot(-2)=\mathbf{1}$ (igaz) (1 pont)

b) A kör középpontja az AB szakasz C felezőpontja, (1 pont)

ennek koordinátái $(1;0)$. (1 pont)

A kör sugara az AC szakasz, (1 pont)

ennek hossza $\sqrt{20}$. (1 pont)

A kör egyenlete: $\mathbf{(x-1)^2+y^2=20}$. (1 pont)

c) Az f merőleges az AB szakaszra. (1 pont)

Az f egy normálvektora a $\overrightarrow{BA}$ vektor, (1 pont)

ennek koordinátái $(8;4)$ (1 pont)

Az f egyenlete: $8x+4y=8\cdot(-3)+4\cdot(-2)$ (1 pont)

azaz $\mathbf{8x+4y=-32}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

32) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $(1;-3)$ ponton és egyik normálvektora a $(8;1)$ vektor! (2 pont)

***Megoldás*:**

$\mathbf{8x+y}$ (1 pont)

$\mathbf{=5}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

33) Egy kör érinti az y tengelyt. A kör középpontja a $K(-2;3)$ pont. Adja meg a kör sugarát, és írja fel az egyenletét! (3 pont)

Megoldás:

A kör sugara: $\mathbf{r=2}$, (1 pont)

egyenlete: $\mathbf{(x+2)^2+(y-3)^2}=$ (1 pont)

$\mathbf{=4}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

34) Egy kör egyenlete $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. Adja meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör átmérőjének hosszát! (3 pont)

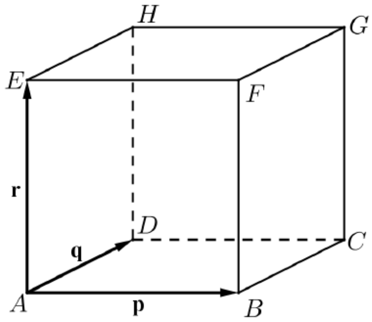
Megoldás:

A kör középpontja $\mathbf{(-3;4)}$. (1 pont)

A kör átmérője **10**. (2 pont)

Összesen: 3 pont

35) **Az ábrán látható kocka A csúcsából kiinduló élvektorai $\overrightarrow{AB} = \underline{p}$; $\overrightarrow{AD} = \underline{q}$ és $\overrightarrow{AE} = \underline{r}$. Fejezze ki $\underline{p}$, $\underline{q}$, és $\underline{r}$ segítségével a $\overrightarrow{GC}$, az $\overrightarrow{AG}$ és az $\overrightarrow{FH}$ vektorokat!** **(3 pont)**



Megoldás:

$\overrightarrow{GC} = -\underline{r}$ (1 pont)

$\overrightarrow{AG} = \underline{p} + \underline{q} + \underline{r}$ (1 pont)

$\overrightarrow{FH} = \underline{q} - \underline{p}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

36) **Az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok 120°-os szöget zárnak be egymással, és mindkét vektor hossza 5 egység.**

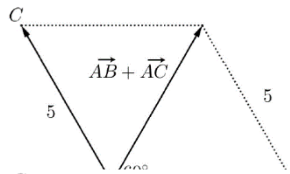
a) Számítsa ki az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ vektor hosszát! **(3 pont)**

b) Számítsa ki az $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ vektor hosszát! **(4 pont)**

A $PRST$ rombusz középpontja a $K(4;-3)$ pont, egyik csúcspontja a $T(7;1)$ pont. Tudjuk, hogy az RT átló hossza fele a PS átló hosszának.

c) Adja meg a P; az R és az S csúcsok koordinátáit! **(10 pont)**

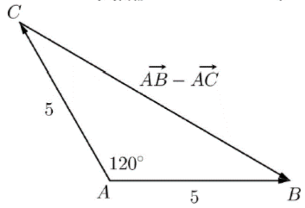
Megoldás:



a) Ábra. (1 pont)

Az $\overline{AB} + \overline{AC}$ és az $\overline{AB}$ vektorok egy olyan egyenlő szárú háromszög két oldalát határozzák meg, amelynek egyik szöge 60°-os, így a háromszög szabályos. (1 pont)

Az összegvektor hossza ezért **5 egység**. (1 pont)



b) Ábrázoljuk a $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ vektort. (1 pont)

Az így kapott háromszögre alkalmazzuk a koszinusztételt. (1 pont)

$\left|\overline{AB} - \overline{AC}\right| = \sqrt{5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ} \approx$ **8,66 egység.** (1 pont)

c) A rombusz átlói felezik egymást a K pontban, így a K pont a TR átló felezőpontja. Ezt kihasználva megkaphatjuk az $R(x_R; y_R)$ pont koordinátáit.

$\frac{7 + x_R}{2} = 4$, illetve $\frac{1 + y_R}{2} = -3$. (1 pont)

Ebből $x_R = 1$ és $y_R = -7$, tehát $\mathbf{R(1;-7)}$. (1 pont)

A $\overrightarrow{KT}(3;4)$ vektort 90°-kal elforgatva megkapjuk a $(-4;3)$ vektort. (3 pont)

Ennek kétszerese a $\overrightarrow{KP}(-8;6)$ vektor, amelynek ellentettje a $\overrightarrow{KS}(8;-6)$ vektor. (2 pont)

A K pont koordinátáihoz adva ezeknek a vektoroknak a megfelelő koordinátáit, megkapjuk a hiányzó csúcsok koordinátáit. (1 pont)

Ebből $\mathbf{P(-4;3)}$ és $\mathbf{S(12;-9)}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

37) **a) Az ABC háromszög két csúcsa $A(-3;-1)$ és $B(3;7)$, súlypontja azorigó. Határozza meg a C csúcs koordinátáit!** **(3 pont)**

b) **Írja fel a hozzárendelési utasítását annak a lineáris függvénynek, amely -3-hoz -1-et és 3-hoz 7-et rendel! (A hozzárendelési utasítást $x \mapsto ax+b$ alakban adja meg!)** **(5 pont)**

c) **Adott az $A(-3;-1)$ és a $B(3;7)$ pont. Számítsa ki, hogy az x tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz!** **(9 pont)**

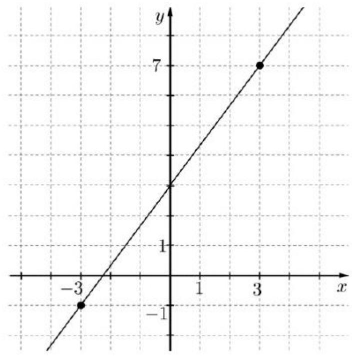
***Megoldás*:**

a) A háromszög súlypontjának koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepe, a $C(c_1;c_2)$ pont koordinátáira felírhatóak az alábbi egyenletek. (1 pont)

$0=\frac{-3+3+c_1}{3}$, amelyre $\boldsymbol{c_1=0}$ (1 pont)

$0=\frac{-1+7+c_2}{3}$, amelyre $\boldsymbol{c_2=-6}$ (1 pont)

b) A függvény képe egy egyenes, meredeksége $m=\frac{7-(-1)}{3-(-3)}=\frac{4}{3}$. (2 pont)



A $(3;7)$ ponton átmenő $\frac{4}{3}$ meredekségű egyenes egyenlete pedig $y-7=\frac{4}{3}(x-3)$, így a hozzárendelés szabálya $\boldsymbol{x \mapsto \frac{4}{3}x+3}$. (3 pont)

c) Jelöljük a kérdéses pontot P-vel! Mivel a P pont az x tengelyen van, így a második koordinátája 0. (1 pont)

Ha $P(x;0)$, akkor $\overrightarrow{PA}=(-3-x;-1)$ és $\overrightarrow{PB}=(3-x;7)$. (2 pont)

$\overrightarrow{PA}$ és $\overrightarrow{PB}$ vektorok pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $\overrightarrow{PA}$ és $\overrightarrow{PB}$ vektorok skaláris szorzata 0. (1 pont)

$(-3-x)\cdot(3-x)+(-1)\cdot 7=0 \Rightarrow x^2-9-7=0$, amelynek gyökei $x_1=4$ és $x_2=-4$. (4 pont)

Tehát a feladatnak két megoldása van, $\boldsymbol{P_1(4;0)}$ és $\boldsymbol{P_2(-4;0)}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

38) Adott két pont a koordinátasíkon: $A(2;6)$ és $B(4;-2)$.

a) **Írja fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét!** **(6 pont)**

b) **Írja fel az A ponton átmenő, B középpontú kör egyenletét!** **(4 pont)**

Adott z $y=3x$ egyenletű és az $x^2+8x+y^2-4y=48$ egyenletű kör.

c) **Adja meg koordinátáikkal az egyenes és a kör közös pontjait!** **(7 pont)**

Megoldás:

a) Az AB szakasz felezőpontja:

$F_{AB}=\left(\frac{2+4}{2};\frac{6+(-2)}{2}\right)=(3;2)$ (2 pont)

A felezőmerőleges egy normálvektora: $n=\overrightarrow{AB}=(2;-8)$ (2 pont)

Az egyenes egyenlete: $\boldsymbol{2x-8y=-10}$ (2 pont)

b) $AB = \sqrt{(4-2)^2 + ((-2)-6)^2} = \sqrt{2^2 + (-8)^2} = \sqrt{68}$ (2 pont)

A kör egyenlete: $\boldsymbol{(x-4)^2 + (y+2)^2 = 68}$ (2 pont)

c) A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} y &= 3x \\ x^2 + 8x + y^2 - 4y &= 48 \end{aligned}\right\}$$ (1 pont)

Az első egyenletből y-t a másodikba helyettesítve $x^2 + 8x + 9x^2 - 12x - 48 = 0$
(1 pont)

$10x^2 - 4x - 48 = 0$ (1 pont)

$x_1 = -2 \quad x_2 = 2{,}4$ (2 pont)

$y_1 = -6 \quad y_2 = 7{,}2$ (1 pont)

A közös pontok: $\boldsymbol{P(-2;-6)}$ és $\boldsymbol{Q(2{,}4;7{,}2)}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

39) A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $4x + y = 17$ egyenletű e egyenes, továbbá az e egyenesre illeszkedő $C(2;9)$ és $T(4;1)$ pont. Az A pont az origóban van.

a) Igazolja, hogy az *ATC* szög derékszög! (4 pont)

Az A pont e egyenesre vonatkozó tükörképe a B pont.

b) Számítsa ki a B pont koordinátáit! (4 pont)

c) Határozza meg az *ABC* egyenlő szárú háromszög körülírt köre középpontjának koordinátáit! (9 pont)

Megoldás:

a) Az ATC háromszög oldalainak hossza:

$AT = \sqrt{17}$, $CT = \sqrt{68}$, $AC = \sqrt{85}$. (2 pont)

Mivel $\left(\sqrt{17}\right)^2 + \left(\sqrt{68}\right)^2 = \left(\sqrt{85}\right)^2$ teljesül, (1 pont)

így a (Pitagorasz-tétel megfordítása miatt) a **kérdéses szög valóban derékszög**. (1 pont)

b) Mivel az ATC szög derékszög, ezért az A pontból az e egyenesre bocsátott merőleges talppontja a T pont, (1 pont)

ezért a T pont felezi az AB szakaszt. (1 pont)

Így $B(b_1;b_2)$ koordinátáira $\dfrac{0+b_1}{2} = 4$ és $\dfrac{0+b_2}{2} = 1$. (1 pont)

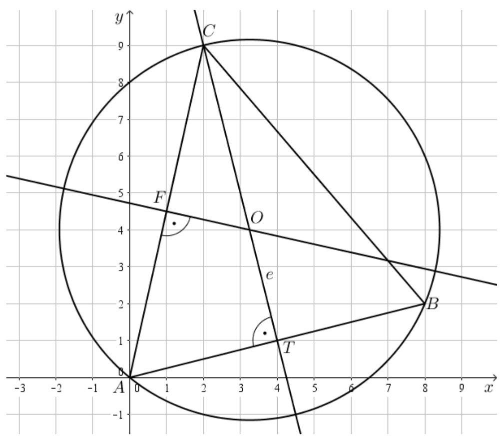
Tehát $\boldsymbol{B(8;2)}$ (1 pont)

c) Az ABC háromszög körülírt körének középpontja az e egyenesnek és az AC szakasz f felezőmerőlegesének metszéspontja. (1 pont)

Jelölje F az AC szakasz felezőpontját. Ekkor $F(1;4{,}5)$. (1 pont)

Az f egyenes egy normálvektora: $\overrightarrow{AC}(2;9)$.
(1 pont)

f egyenlete: $2x + 9y = 42{,}5$. (2 pont)



A kör középpontjának $(x;y)$ koordinátáit a következő egyenletrendszer megoldása adja:

$$\left.\begin{array}{l}2x+9y=42,5\\4x+y=17\end{array}\right\}$$ (1 pont)

Az első egyenlet 2-szereséből kivonva a második egyenletet:
$17y=68$. (1 pont)

amiből $y=4$, majd $x=3,25$. (1 pont)

Tehát a körülírt kör középpontja: $\boldsymbol{O(3,25;4)}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

40) Egy számtani sorozat negyedik tagja 4, tizenhatodik tagja –2.

a) Számítsa ki a sorozat első 120 tagjának az összegét! (5 pont)

b) Adott egy szakasz két végpontja: $A(0;4)$ és $B(2;3)$. Írja fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét! (5 pont)

c) Egy elsőfokú függvény a 0-hoz 4-et, a 2-höz 3-at rendel. Írja fel a függvény hozzárendelési szabályát! (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Sorozatok 48. feladat*

b) Az AB szakasz felezőpontja: $F_{AB}=\left(\frac{0+2}{2};\frac{4+3}{2}\right)=(1;\ 3,\ 5)$ (2 pont)

A felezőmerőleges egyik normálvektora: $\underline{n}(2;-1)$ (1 pont)

Az egyenes normálvektoros egyenlete: $\boldsymbol{2x-y=-1,5}$ (2 pont)

c) A hozzárendelési szabály legyen $x\mapsto mx+b$. (1 pont)

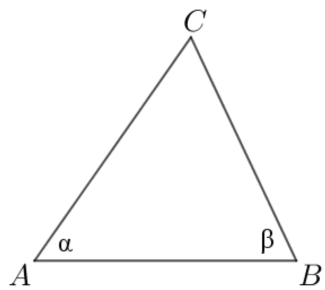
A függvény grafikonja egyenes, melynek meredeksége: $\left(\frac{3-4}{2-0}=\right)-0,5$ (2 pont)

A függvény az y tengelyt 4-nél metszi, így a hozzárendelési szabály:
$\boldsymbol{x\mapsto -0,5x+4}$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

41) Adott a derékszögű koordináta-rendszerben a $P(-2;3)$ és a $K(3;15)$ pont.

a) Tükrözzük a P pontot a K pontra. Számítsa ki az így kapott P' pont koordinátáit! (4 pont)



Az ABC háromszög szögeinek nagysága: $\alpha=55^\circ$, $\beta=65^\circ$. A háromszög A, illetve B csúcsához tartozó magasságvonalainak metszéspontját jelölje M. Az M pontot az AB oldal egyenesére tükrözve az M' pontot kapjuk.

b) Határozza meg az $AM'BC$ négyszög belső szögeinek nagyságát! (8 pont)

Megoldás:

a) A P pont tükörképét jelölje P'. A tükrözés miatt K pont a PP' szakasz felezőpontja, tehát $\overrightarrow{PK}=\overrightarrow{KP'}$. (1 pont)

A K pont koordinátáiból a P pont koordinátáit kivonva megkapjuk, hogy $\overrightarrow{PK}=(5;12)$. (1 pont)

A $\overrightarrow{PK}$ koordinátáit a K pont koordinátáihoz hozzáadva kapjuk a P' pont koordinátáit: $\boldsymbol{P'(8;27)}$. (2 pont)

b) *Lásd: Síkgeometria 50. feladat*

Összesen: 12 pont

42) Az f egyenes egyenlete $2x - y = 5$.

- **a) Adja meg az f egy normálvektorát! (1 pont)**
- **b) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az f egyenessel, és átmegy a (2;1) ponton! (2 pont)**

Megoldás:

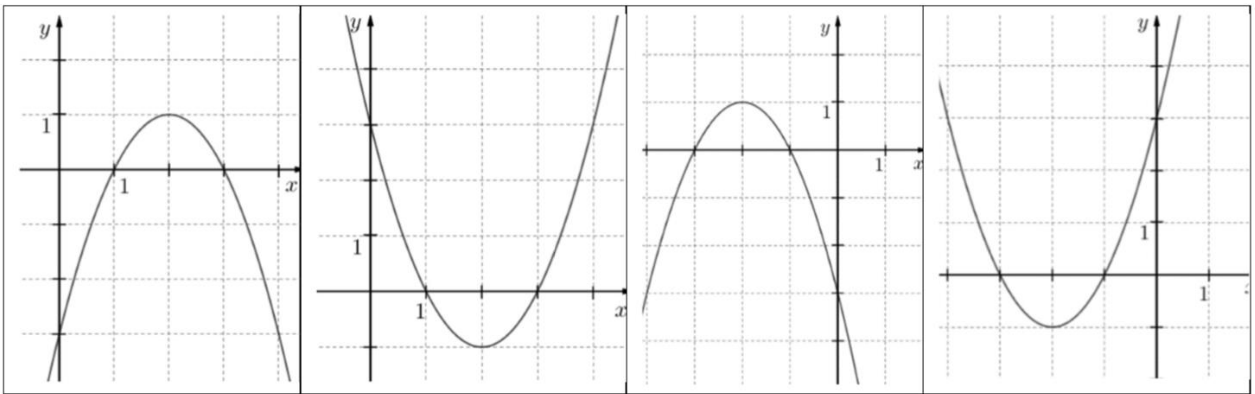
a) Az f egyenes normálvektora $\overrightarrow{n_f}(2;-1)$ (vagy $\overrightarrow{n_f}(-2;1)$). (1 pont)

b) Két egyenes akkor lesz párhuzamos, ha változóik együtthatói megegyeznek. Az egyenlet jobb oldalára $2 \cdot 2 - 1 = 3$ kerül. Tehát az f egyenessel párhuzamos, (2;1) ponton átmenő egyenes egyenlete: $\mathbf{2x - y = 3}$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

43) Adott az $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 4x + 3$ függvény.

- **a) Írja fel két elsőfokú tényező szorzataként az $x^2 + 4x + 3$ kifejezést! (2 pont)**
- **b) A $P(-6,5;y)$ pont illeszkedik az f grafikonjára. Számítsa ki y értékét! (2 pont)**
- **c) Az alábbi grafikonok közül válassza ki az f függvény grafikonját (karikázza be a megfelelő betűt), és határozza meg az f értékkészletét! (3 pont)**



A	B	C	D

Adott a $g : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 6x + 5$ függvény. Az a három pont, ahol a g grafikonja metszi a koordinátatengelyeket, egy háromszöget határoz meg.

- **d) Határozza meg ennek a háromszögnek a területét! (7 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 60. feladat*

b) A $-6,5$-öt behelyettesítve az egyenes egyenletébe megkapjuk az y értékét: $y = (-6,5)^2 + 4 \cdot (-6,5) + 3 = \mathbf{19,25}$ (2 pont)

c) *Lásd: Függvények 60. feladat*

d) A g értéke 0-ban 5, így az y tengelyt az A(0; 5) pontban metszi a g grafikonja. (2 pont)

Az $x^2 - 6x + 5$ egyenlet megoldásai $x_1 = 1$ és $x_2 = 5$. (2 pont)

Ezért az x tengelyt a g függvény grafikonja a $B(1;0)$ és a $(5;0)$ pontokban metszi. (1 pont)

Az ABC háromszög (BC oldala 4 egység, a hozzá tartozó magasság 5 egység hosszú, így) területe $\frac{4\cdot 5}{2}=10$ (területegység). (2 pont)

Összesen: 14 pont

44) Egy egyenes egyenlete: $2x+5y=18$. Adja meg az egyenes meredekségét! (2 pont)

Megoldás:

Az egyenletet y-ra rendezve: $y=-0,4x+18$.

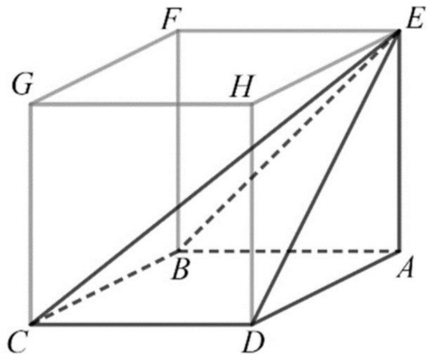
Az egyenes meredeksége az x együtthatója, azaz $\mathbf{-0,4}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

45) Az *ABCDEFGH* kocka élhosszúsága 6 cm.

a) Számítsa ki az ábrán látható *ABCDE* gúla felszínét! (6 pont)

b) Fejezze ki az $\overrightarrow{EC}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$, az $\overrightarrow{AD}$ és az $\overrightarrow{AE}$ vektorok segítségével! (3 pont)



Egy 12 cm magas forgáskúp alapkörének sugara 6 cm.

c) Mekkora szöget zár be a kúp alkotója az alaplappal? (3 pont)

A fenti forgáskúpot két részre vágjuk az alaplap síkjával párhuzamos síkkal. Az alaplap és a párhuzamos sík távolsága 3 cm.

d) Számítsa ki a keletkező csonkakúp térfogatát! (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Térgeometria 43. feladat*

b) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ (1 pont)

$\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{AE}$ és $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ (1 pont)

$\boldsymbol{\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}}$ (1 pont)

Alternatív megoldás:

$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}$ (1 pont)

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ (1 pont)

$\boldsymbol{\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}}$ (1 pont)

c) *Lásd: Trigonometria 27. feladat*

d) *Lásd: Térgeometria 43. feladat*

Összesen: 17 pont

46) Egy háromszög csúcsai a koordináta rendszerben $A(-8;-12)$, $B(8;0)$ és $C(-1;12)$. Az A pontnak a B pontra vonatkozó tükörképe a D pont.

a) Számítsa ki a D pont koordinátáit! (3 pont)

b) Írja fel az ABC háromszög B csúcsán áthaladó magasságvonalának egyenletét! (4 pont)

c) Igazolja, hogy az ABC háromszög B csúcsánál derékszög van! (4 pont)

Az A, B és C pontokat szeretnénk a kék, zöld és sárga színekkel színezni úgy, hogy mindhárom pontot színezzük valamelyik színnel, de egy színezésen belül nem használjuk fel mindhárom színt.

d) Hány különböző színezés lehetséges ezekkel a feltételekkel? (6 pont)

Megoldás:

a) A B pont az AD szakasz felezőpontja, ezért ha $D(d_1;d_2)$, akkor $8=\frac{d_1+(-8)}{2}$, amiből $d_1=24$. (1 pont)

Ugyanígy $0=\frac{d_2+(-12)}{2}$, amiből $d_2=12$. (1 pont)

Tehát $\boldsymbol{D(24;\,12)}$. (1 pont)

b) A háromszög magasságvonala a csúcson áthaladó, a szemközti oldal egyenesére merőleges egyenes. (1 pont)

A B csúcson átmenő magasságvonal egyik normálvektora $\overrightarrow{AC}=(7;\,24)$, (1 pont)

tehát egyenlete $\boldsymbol{7x+24y=7\cdot 8+24\cdot 0=56}$. (1 pont)

c) A háromszög oldalainak hossza:

$AB=\sqrt{16^2+12^2}=20$, $BC=\sqrt{9^2+12^2}=15$, $CA=\sqrt{7^2+24^2}=25$. (2 pont)

Mivel $15^2+20^2=25^2$ ezért (a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt) a háromszög valóban derékszögű (és a derékszög a B csúcsnál van). (2 pont)

d) Lásd: Kombinatorika 46. feladat

Összesen: 17 pont

47) Tekintsük az A, B, C, D és E pontokat egy gráf csúcsainak.

a) Egészítse ki élekkel a fenti ábrát úgy, hogy a kapott gráfban minden csúcs fokszáma 2 vagy 3 legyen! (2 pont)

b) Lehet-e olyan 5 csúcsú gráfot rajzolni, amelyben minden csúcs fokszáma pontosan 3? (3 pont)

Az A, B, C, D pontok egy paralelogrammát alkotnak, az E pont az átlók metszéspontja.

c) Fejezze ki az $\overrightarrow{AB}$ vektort a $\overrightarrow{DA}$ és $\overrightarrow{DE}$ vektorok segítségével! (3 pont)

Egy $ABCD$ paralelogrammát elhelyeztünk a koordináta-rendszerben. Tudjuk, hogy az AB egyenes egyenlete $2x-5y=-4$, az AD egyenes egyenlete pedig $3x-2y=-6$. A C pont koordinátái $(5;\,5)$, a B pont első koordinátája 3.

d) Határozza meg a paralelogramma A, B és D csúcsának koordinátáit! (9 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Logika, gráfok 42. feladat*

b) *Lásd: Logika, gráfok 42. feladat*

c) $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DA}$ (1 pont)

$\overrightarrow{DB} = 2 \cdot \overrightarrow{DE}$ (1 pont)

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{DA} + 2 \cdot \overrightarrow{DE}}$ (1 pont)

d) A B pont első koordinátáját az AB egyenes egyenletébe helyettesítve $2 \cdot 3 - 5y = -4$. (1 pont)

Így $y = 2$, azaz $B(3;\ 2)$ az egyik csúcs (1 pont)

Az A pont az AB és AD egyenesek metszéspontja, ezért koordinátáit a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja meg. Az első egyenletből x-et kifejezve és a második egyenletbe helyettesítve:

$3 \cdot \frac{5y-4}{2} - 2y = -6$. (2 pont)

Az egyenletet rendezve: $y = 0$. (1 pont)

Innen $x = -2$, **tehát $A(-2;\ 0)$ a másik csúcs**. (1 pont)

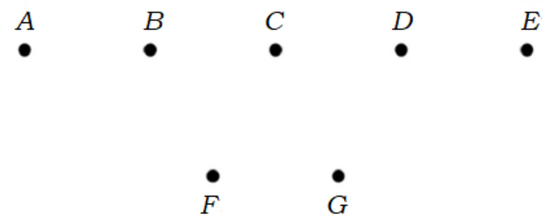
Az AC szakasz felezőpontja $E(1,5;\ 2,5)$. (1 pont)

Mivel $1,5 = \frac{d_1+3}{2}$ és $2,5 = \frac{d_2+2}{3}$, **így a $D(d_1;\ d_2)$ pont koordinátái $(0;\ 3)$.**

(2 pont)

Összesen: 17 pont

48) Az ábrán szereplő *A*, *B*, *C*, *D* és *E* pontok egy olyan egyenesre illeszkednek, amely párhuzamos az *F* és *G* pontokra illeszkedő egyenessel.



a) Hány olyan különböző egyenes létezik, amely az ábrán lévő pontok közül legalább kettőre illeszkedik? **(3 pont)**

b) Hány olyan háromszög van, amelynek a csúcsait az ábrán szereplő 7 pont közül választjuk ki? (Két háromszöget különbözőnek tekintünk, ha legalább az egyik csúcsukban eltérnek egymástól.) **(5 pont)**

Egy háromszög csúcsai: $K(-1;5)$, $L(1;1)$, $M(5;3)$.

c) Igazolja, hogy a háromszög *L*-nél lévő szöge derékszög! **(4 pont)**

d) Írja fel a háromszög körülírt körének az egyenletét! **(5 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Kombinatorika 49. feladat*

b) *Lásd: Kombinatorika 49. feladat*

c) Jelöljük az L és M pontokat összekötő vektort $\vec{k}$-val, az M és K pontokat összekötőt $\vec{l}$-lel, a K és L pontokat összekötőt pedig $\vec{m}$-mel.

$\vec{k}(4;2)$, hossza $|\vec{k}| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$. (1 pont)

$\vec{l}(6;-2)$, hossza $|\vec{l}| = \sqrt{6^2+(-2)^2} = \sqrt{40}$. (1 pont)

$\vec{m}(-2;4)$, hossza $|\vec{m}| = \sqrt{(-2)^2+4} = \sqrt{20}$. (1 pont)

$\sqrt{20}^2+\sqrt{20}^2=\sqrt{40}^2$, tehát a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt az L-nél valóban derékszög van. $\Rightarrow$ **QED** (1 pont)

Alternatív megoldás:

Jelöljük az L és M pontokat összekötő vektort $\vec{k}$-val, a K és L pontokat összekötőt pedig $\vec{m}$-mel.

$\vec{k}(4;2)$ és $\vec{m}(-2;4)$. (2 pont)

Skaláris szorzatuk: $-2\cdot 4+4\cdot 2=0$. (1 pont)

A két vektor merőleges egymásra, tehát L-nél valóban derékszög van. $\Rightarrow$ **QED** (1 pont)

d) A Thalész-tétel, illetve a megfordítása miatt derékszögű háromszögben a körülírt kör középpontja az átfogó felezőpontja, sugara pedig az átfogó fele. (1 pont)

Az átfogó felezőpontja: $F_{KM}=\left(\frac{-1+5}{2};\frac{5+3}{2}\right)=(2;4)$. (1 pont)

$r=\frac{KM}{2}=\frac{\sqrt{6^2+(-2)^2}}{2}=\frac{\sqrt{40}}{2}=\sqrt{10}$ (1 pont)

A körülírt kör egyenlete: $\boldsymbol{(x-2)^2+(y-4)^2=10}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

49) Egy kör középpontja a $K(3;2)$ pont, a kör átmegy a $P(-1;5)$ ponton. Adja meg a kör sugarának hosszát, és írja fel a kör egyenletét! (4 pont)

Megoldás:

A kör sugarának hossza: $r=\sqrt{(-1-3)^2+(5-2)^2}=\mathbf{5}$. (2 pont)

A kör egyenlete: $\boldsymbol{(x-3)^2+(y-2)^2=25}$. (2 pont)

Összesen: 4 pont

50) Egy háromszög csúcsai a koordináta-rendszerben: $A(5;6)$, $B(4;2)$ és $C(8;2)$.

a) Számítsa ki a háromszög A-nál lévő belső szögét! (6 pont)

b) Írja fel a háromszög B-re illeszkedő magasságvonalának egyenletét, és számítsa ki a háromszög M magasságpontjának koordinátáit! (7 pont)

Az ABC háromszöget a B pontból középpontosan a kétszeresére nagyítjuk, így az $A'B'C'$ háromszöget kapjuk.

c) Adja meg az $A'B'C'$ háromszög csúcsainak koordinátáit! (4 pont)

Megoldás:

a) A háromszög AB oldalának hossza a két pont távolságára vonatkozó összefüggés alkalmazásával: $AB=\sqrt{(5-4)^2+(6-2)^2}=\sqrt{17}$. (1 pont)

Ugyanígy $AC=\sqrt{(5-8)^2+(6-2)^2}=5$ és $BC=\sqrt{(4-8)^2+(2-2)^2}=4$. (2 pont)

Jelöljük az ABC háromszögben a kérdéses szöget α-val, és írjuk fel a koszinusztételt: $16 = 17 + 25 - 2 \cdot \sqrt{17} \cdot 5 \cdot \cos\alpha$. (1 pont)

Ebből $\cos\alpha \approx 0,6306$. (1 pont)

Így $\boldsymbol{\alpha \approx 50,91°}$. (1 pont)

Alternatív megoldás:

Az ábra jelöléseit használjuk. A keresett szög $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

$BT = 1,\ TC = 3,\ AT = 4$. (1 pont)

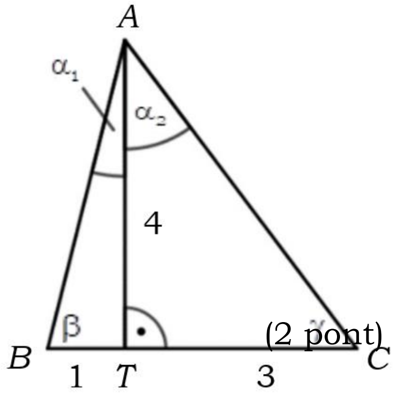
Az ABT háromszögben $\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{1}{4}$. (1 pont)

Így $\alpha_1 \approx 14,04°$. (1 pont)

Az ATC háromszögben $\mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{3}{4}$. (1 pont)

Így $\alpha_2 \approx 36,87°$. (1 pont)

Tehát $\alpha = 14,04° + 36,87° = \boldsymbol{50,91°}$. (1 pont)



b) A kérdéses magasságvonal áthalad a B ponton, és egy normálvektora az $\vec{b}(3;4)$ vektor. (2 pont)

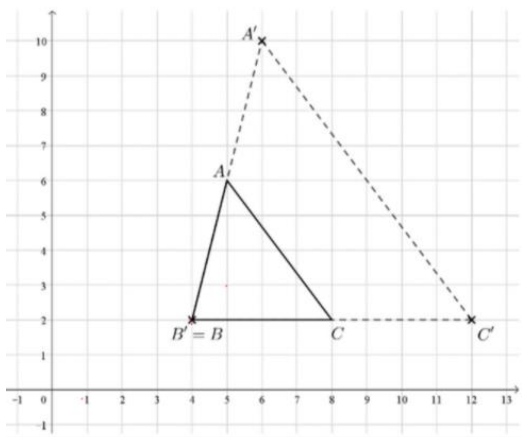
A magasságvonal egyenlete $3x - 4y = 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 2$, azaz $3x - 4y = 4$. (2 pont)

A magasságpont rajta van az A-ra illeszkedő magasságvonalon, melynek egyenlete $x = 5$, így első koordinátája 5. (1 pont)

Második koordinátáját a B-ből induló magasságvonal egyenletéből az $x = 5$ helyettesítéssel kapjuk: $y = 2,75$. (1 pont)

Tehát $\boldsymbol{M(5;2,75)}$. (1 pont)

c) Ábra. (1 pont)



A B pont képe önmaga, azaz $\boldsymbol{B'(4;2)}$. (1 pont)

$\boldsymbol{C'(12;2)}$. (1 pont)

$\boldsymbol{A'(6;10)}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont