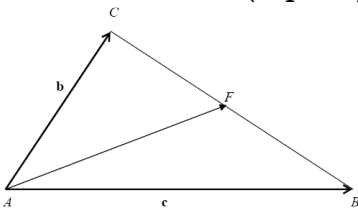


Koordinátageometria

- 1) Adott két pont: $A\left(-4; \frac{1}{2}\right)$ és $B\left(1; \frac{3}{2}\right)$ Írja fel az AB szakasz felezőpontjának koordinátáit! (2 pont)
 - 2) Egy kör sugarának hossza 4, középpontja a $B(-3;5)$ pont. írja fel a kör egyenletét! (2 pont)
 - 3) Írja fel a $(-2;7)$ ponton átmenő, $\underline{n}(5;8)$ normálvektorú egyenes egyenletét! (2 pont)
 - 4) Adottak az $\underline{a} = (6;4)$ és az $\underline{a} - \underline{b} = (11;5)$ vektorok. Adja meg a \underline{b} vektort a koordinátáival! (3 pont)
 - 5) Az ABC háromszög két oldalának vektora $AB = \underline{c}$ és $AC = \underline{b}$. Fejezze ki ezek segítségével az A csúcsból a szemközti oldal F felezőpontjába mutató AF vektort! (2 pont)
- 
- 6) Egy négyzet oldalegyenesei a koordinátatengelyek és az $x=1$, valamint az $y=1$ egyenletű egyenesek.
 - a) Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben a négyzetet, és adja meg csúcsainak koordinátáit! (2 pont)
 - b) Írja fel a négyzet köré írható kör egyenletét! (5 pont)
 - c) Állapítsa meg, hogy a négyzet kerülete hány százaléka a kör kerületének? (2 pont)
 - d) Az $y = -4x + 2$ egyenletű egyenes a négyzetet két részre bontja. Számítsa ki e részek területének arányát! (8 pont)
 - 7) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(3;5)$ ponton és párhuzamos a $4x + 5y = 0$ egyenletű egyenessel! (3 pont)
 - 8) Egy rombusz átlóinak hossza 12 és 20. Számítsa ki az átlóvektorok skalárszorzatát! Válaszát indokolja! (3 pont)
 - 9) a) Ábrázolja koordináta-rendszerben az e egyenest, melynek egyenlete $4x + 3y = -11$.
 Számítással döntse el, hogy a $P(100; -36)$ pont rajta van-e az egyenesen!
 Az egyenesen levő Q pont ordinátája (második koordinátája) 107.
 Számítsa ki a Q pont abszcisszáját (első koordinátáját)! (4 pont)
 - b) Írja fel az AB átmérőjű kör egyenletét, ahol $A(-5;3)$ és $B(1;-5)$.
 Számítással döntse el, hogy az $S(1;3)$ pont rajta van-e a körön! (7 pont)
 - c) Adja meg az ABC háromszög C csúcsának koordinátáit, ha tudja, hogy az $S(1;3)$ pont a háromszög súlypontja! (6 pont)
 - 10) Fejezze ki az \underline{i} és a \underline{j} vektorok segítségével a $\underline{c} = 2\underline{a} - \underline{b}$ vektort, ha $\underline{a} = 3\underline{i} - 2\underline{j}$ és $\underline{b} = -\underline{i} + 5\underline{j}$! (3 pont)
 - 11) Az $ABCD$ négyzet középpontja K , az AB oldal felezőpontja F . Legyen $\underline{a} = \overrightarrow{KA}$ és

$\underline{b} = \overline{KB}$. Fejezze ki az \underline{a} és \underline{b} vektorok segítségével a \overline{KF} vektort! (2 pont)

12) Adott a koordináta-rendszerben az $A(9;-8)$ középpontú, 10 egység sugarú kör.

a) Számítsa ki az $y = -16$ egyenletű egyenes és a kör közös pontjainak koordinátáit! (8 pont)

b) Írja fel a kör $P(1;-2)$ pontjában húzható érintőjének egyenletét! Adja meg ennek az érintőnek az iránytangensét (meredekségét)! (4 pont)

13) Az $A(-7;12)$ pontot egy \underline{r} vektorral eltolva a $B(5;8)$ pontot kapjuk. Adja meg az \underline{r} vektor koordinátáit! (2 pont)

14) Jelölje X-szel a táblázatban, hogy az alábbi koordináta-párok közül melyiknek adják meg a 300° -os irányszögű egységvektor koordinátáit és melyiknek nem!

	IGEN	NEM
$e\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		
$e\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$		
$e\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		
$e(\sin 30^\circ; -\cos 30^\circ)$		

(4 pont)

15) Számítsa ki a következő vektorok skaláris szorzatát!

Határozza meg a két vektor által bezárt szöget!

$$\underline{a}(5;8) \quad \underline{b}(-40;25)$$

(3 pont)

16) Adott az $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 56 = 0$ egyenletű kör és az $x - 8,4 = 0$ egyenletű egyenes.

a) Számítsa ki a kör és az egyenes közös pontjainak koordinátáit! (6 pont)

b) Mekkora távolságra van a kör középpontja az egyenestől? (5 pont)

Egy 9 cm sugarú kört egy egyenes két körívre bont. Az egyenes a kör középpontjától 5,4 cm távolságban halad.

c) Számítsa ki a hosszabb körív hosszát! (A választ egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (6 pont)

17) Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(0;0)$, $B(-2;4)$, $C(4;5)$.

a) Írja fel az AB oldal egyenesének egyenletét! (2 pont)

b) Számítsa ki az ABC háromszög legnagyobb szögét! A választ tized fokra kerekítve adja meg! (7 pont)

c) Számítsa ki az ABC háromszög területét! (3 pont)

18) Három egyenes egyenlete a következő (a és b valós számokat jelölnek):

$$e: y = -2x + 3$$

$$f: y = ax - 1$$

$$g: y = bx - 4$$

Milyen számot írjunk az a helyére, hogy az e és f egyenesek párhuzamosak

legyenek?

Melyik számot jelöli b , ha a g egyenes merőleges az e egyenesre? (3 pont)

19) Egy kör az $(1;0)$ és $(7;0)$ pontokban metszi az x tengelyt. Tudjuk, hogy a kör középpontja az $y = x$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Írja fel a kör középpontjának koordinátáit! Válaszát indokolja! (3 pont)

20) Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-3;2)$, $B(3;2)$ és $C(0;0)$.

a) Számítsa ki az ABC háromszög szögeit! (5 pont)

b) Írja fel az ABC háromszög körülírt körének egyenletét! (7 pont)

21) Adott két egyenes: $e: 5x - 2y = -14,5$, $f: 2x + 5y = 14,5$.

a) Határozza meg a két egyenes P metszéspontjának koordinátáit! (4 pont)

b) Igazolja, hogy az e és az f egyenesek egymásra merőlegesek! (4 pont)

c) Számítsa ki az e egyenes x tengellyel bezárt szögét! (4 pont)

22) Írja fel annak az e egyenesnek az egyenletét, amelyik párhuzamos a $2x - y = 5$ egyenletű f egyenessel és áthalad a $P(3;-2)$ ponton! Válaszát indokolja! (2 pont)

23) Adja meg az $(x+2)^2 + y^2 = 9$ egyenletű kör K középpontjának koordinátáit és sugarának hosszát! (3 pont)

24) Adja meg a $2x + y = 4$ egyenletű egyenes és az x tengely M metszéspontjának a koordinátáit, valamint az egyenes meredekségét! (3 pont)

25) A PQR háromszög csúcsai: $P(-6;-1)$, $Q(6;-6)$ és $R(2;5)$.

a) Írja fel a háromszög P csúcsához tartozó súlyvonal egyenesének egyenletét! (5 pont)

b) Számítsa ki a háromszög P csúcsnál lévő belső szögének nagyságát! (7 pont)

26) Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-2;-1)$, $B(9;-3)$, és $C(-3;6)$.

a) Írja fel a BC oldal egyenesének egyenletét! (3 pont)

b) Számítsa ki a BC oldallal párhuzamos középvonal hosszát! (3 pont)

c) Számítsa ki a háromszögben a C csúcsnál lévő belső szög nagyságát! (6 pont)

27) Tekintsük a koordinátarendszerben adott $A(6;9)$, $B(-5;4)$ és $C(-2;1)$ pontokat!

a) Mekkora az AC szakasz hossza? (2 pont)

b) Írja fel az AB oldalegyenes egyenletét! (4 pont)

c) Igazolja (számítással), hogy az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van! (6 pont)

d) Írja fel az ABC háromszög körülírt körének egyenletét! (5 pont)

28) Adottak az $\underline{a}(4;3)$ és $\underline{b}(-2;1)$ vektorok.

a) Adja meg az \underline{a} hosszát! (2 pont)

b) Számítsa ki az $\underline{a} + \underline{b}$ koordinátáit! (2 pont)

29) Adott a síkon az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0$ egyenletű kör.

a) Állapítsa meg, hogy az $A(7;7)$ pont illeszkedik-e a körre! (2 pont)

b) Határozza meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát! (5 pont)

- c) Legyenek $A(7;7)$ és $B(0;0)$ egy egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai. A háromszög C csúcsa rajta van az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0$ egyenletű körön. Számítsa ki a C csúcs koordinátáit! (10 pont)

30) Adott a koordináta-rendszerben két pont: $A(1;-3)$ és $B(7;-1)$.

- a) Írja fel az A és B pontokra illeszkedő e egyenes egyenletét! (4 pont)
b) Számítással igazolja, hogy az A és a B pont is illeszkedik az $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 10$ egyenletű k körre, és számítsa ki az AB húr hosszát! Az f egyenesről tudjuk, hogy illeszkedik az A pontra és merőleges az AB szakaszra. (4 pont)
c) Számítsa ki a k kör és az f egyenes (A -tól különböző) metszéspontjának koordinátáit! (9 pont)

31) Adott az $A(5;2)$ és a $B(-3;-2)$ pont.

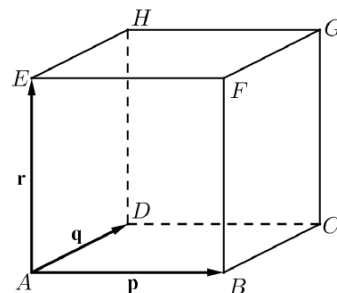
- a) Számítással igazolja, hogy az A és B pontok illeszkednek az $x - 2y = 1$ egyenletű e egyenesre! (2 pont)
b) Írja fel az AB átmérőjű kör egyenletét! (5 pont)
c) Írja fel annak az f egyenesnek az egyenletét, amely az AB átmérőjű kört a B pontban érinti! (5 pont)

32) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az $(1;-3)$ ponton, és egyik normálvektora a $(8;1)$ vektor! (2pont)

33) Egy kör érinti az y tengelyt. A kör középpontja a $K(-2;3)$ pont. Adja meg a kör sugarát, és írja fel az egyenletét! (3 pont)

34) Egy kör egyenlete $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$. Adja meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör átmérőjének hosszát! (3 pont)

35) Az ábrán látható kocka A csúcsából kiinduló élvektorai $\overrightarrow{AB} = \underline{p}$; $\overrightarrow{AD} = \underline{q}$ és $\overrightarrow{AE} = \underline{r}$. Fejezze ki \underline{p} , \underline{q} , és \underline{r} segítségével a \overrightarrow{GC} , az \overrightarrow{AG} és az \overrightarrow{FH} vektorokat! (3 pont)



36) Az \overrightarrow{AB} és \overrightarrow{AC} vektorok 120° -os szöget zárnak be egymással, és mindkét vektor hossza 5 egység.

- a) Számítsa ki az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ vektor hosszát! (3 pont)
b) Számítsa ki az $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ vektor hosszát! (4 pont)

A $PRST$ rombusz középpontja a $K(4;-3)$ pont, egyik csúcspontja a $T(7;1)$ pont. Tudjuk, hogy az RT átló hossza fele a PS átló hosszának.

- c) Adja meg a P ; az R és az S csúcsok koordinátáit! (10 pont)

37) a) Az ABC háromszög két csúcsa $A(-3;-1)$ és $B(3;7)$, súlypontja az origó. Határozza meg a C csúcs koordinátáit! (3 pont)

- b) Írja fel a hozzárendelési utasítását annak a lineáris függvénynek, amely -3 -hoz -1 -et és 3 -hoz 7 -et rendel! (A hozzárendelési utasítást $x \mapsto ax + b$ alakban adja meg!) (5 pont)

- c) Adott az $A(-3;-1)$ és a $B(3;7)$ pont. Számítsa ki, hogy az x tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz! (9 pont)

38) Adott két pont a koordinátasíkon: $A(2;6)$ és $B(4;-2)$.

a) Írja fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét! (6 pont)

b) Írja fel az A ponton átmenő, B középpontú kör egyenletét! (4 pont)

Adott z $y = 3x$ egyenletű és az $x^2 + 8x + y^2 - 4y = 48$ egyenletű kör.

c) Adja meg koordinátaikkal az egyenes és a kör közös pontjait! (7 pont)

39) A derékszögű koordináta-rendszerben adott a $4x + y = 17$ egyenletű e egyenes, továbbá az e egyenesre illeszkedő $C(2;9)$ és $T(4;1)$ pont. Az A pont az origóban van.

a) Igazolja, hogy az ATC szög derékszög! (4 pont)

Az A pont e egyenesre vonatkozó tükörképe a B pont.

b) Számítsa ki a B pont koordinátáit! (4 pont)

c) Határozza meg az ABC egyenlő szárú háromszög körülírt köre középpontjának koordinátáit! (9 pont)

40) Egy számtani sorozat negyedik tagja 4, tizenhatodik tagja -2 .

a) Számítsa ki a sorozat első 120 tagjának az összegét! (5 pont)

b) Adott egy szakasz két végpontja: $A(0;4)$ és $B(2;3)$. Írja fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét! (5 pont)

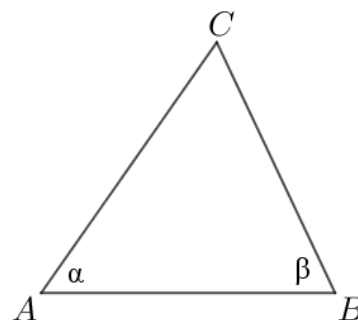
c) Egy elsőfokú függvény a 0-hoz 4-et, a 2-höz 3-at rendel. Írja fel a függvény hozzárendelési szabályát! (4 pont)

41) Adott a derékszögű koordináta-rendszerben a $P(-2;3)$ és a $K(3;15)$ pont.

a) Tükrözzük a P pontot a K pontra. Számítsa ki az így kapott P' pont koordinátáit! (4 pont)

Az ABC háromszög szögeinek nagysága: $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 65^\circ$. A háromszög A , illetve B csúcsához tartozó magasságvonalainak metszéspontját jelölje M . Az M pontot az AB oldal egyenesére tükrözve az M' pontot kapjuk.

b) Határozza meg az $AM'BC$ négyszög belső szögeinek nagyságát! (8 pont)



42) Az f egyenes egyenlete $2x - y = 5$.

a) Adja meg az f egy normálvektorát! (1 pont)

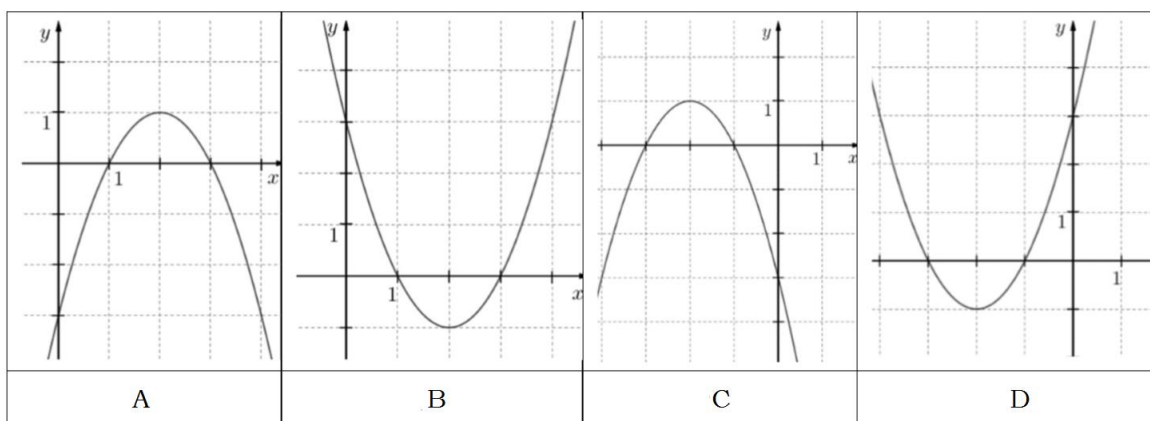
b) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az f egyenessel, és átmegy a $(2;1)$ ponton! (2 pont)

43) Adott az $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 3$ függvény.

a) Írja fel két elsőfokú tényező szorzataként az $x^2 + 4x + 3$ kifejezést! (2 pont)

b) A $P(-6, 5; y)$ pont illeszkedik az f grafikonjára. Számítsa ki y értékét! (2 pont)

c) Az alábbi grafikonok közül válassza ki az f függvény grafikonját (karikázza be a megfelelő betűt), és határozza meg az f értékkészletét! (3 pont)



Adott a $g: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 6x + 5$ függvény. Az a három pont, ahol a g grafikonja metszi a koordinátatengelyeket, egy háromszöget határoz meg.

d) Határozza meg ennek a háromszögnek a területét! (7 pont)

44) Egy egyenes egyenlete: $2x + 5y = 18$. Adja meg az egyenes meredekségét!

(2 pont)

45) Az $ABCDEFGH$ kocka élhosszúsága 6 cm.

a) Számítsa ki az ábrán látható $ABCDE$ gúla felszínét! (6 pont)

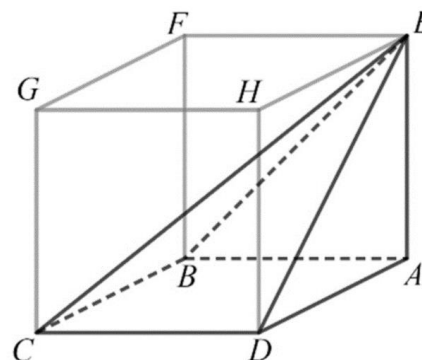
b) Fejezze ki az \overrightarrow{EC} vektort az \overrightarrow{AB} , az \overrightarrow{AD} és az \overrightarrow{AE} vektorok segítségével! (3 pont)

Egy 12 cm magas forgáskúp alapkörének sugara 6 cm.

c) Mekkora szöget zár be a kúp alkotója az alaplappal? (3 pont)

A fenti forgáskúpot két részre vágjuk az alaplap síkjával párhuzamos síkkal. Az alaplap és a párhuzamos sík távolsága 3 cm.

d) Számítsa ki a keletkező csonkakúp térfogatát! (5 pont)



46) Egy háromszög csúcsai a koordináta rendszerben $A(-8; -12)$, $B(8; 0)$ és $C(-1; 12)$. Az A pontnak a B pontra vonatkozó tükörképe a D pont.

a) Számítsa ki a D pont koordinátáit! (3 pont)

b) Írja fel az ABC háromszög B csúcsán áthaladó magasságvonalának egyenletét! (4 pont)

c) Igazolja, hogy az ABC háromszög B csúcsánál derékszög van! (4 pont)

Az A , B és C pontokat szeretnénk a kék, zöld és sárga színekkel színezní úgy, hogy mindhárom pontot színezzük valamelyik színnel, de egy színezésen belül nem használjuk fel mindhárom színt.

d) Hány különböző színezés lehetséges ezekkel a feltételekkel? (6 pont)

47) Tekintsük az A , B , C , D és E pontokat egy gráf csúcsainak.

a) Egészítse ki élekkel a fenti ábrát úgy, hogy a kapott gráfban minden csúcs fokszáma 2 vagy 3 legyen! (2 pont)

b) Lehet-e olyan 5 csúcsú gráfot rajzolni, amelyben minden csúcs fokszáma pontosan 3? (3 pont)

Az A , B , C , D pontok egy paralelogrammát alkotnak, az E pont az átlók metszéspontja.

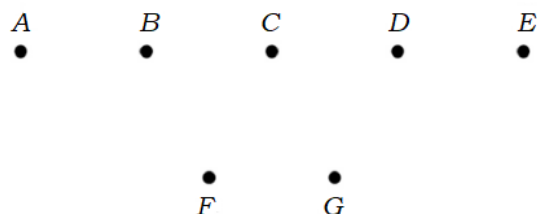
c) Fejezze ki az \overrightarrow{AB} vektort a \overrightarrow{DA} és \overrightarrow{DE} vektorok segítségével! (3 pont)

Egy $ABCD$ paralelogrammát elhelyeztünk a koordináta-rendszerben. Tudjuk, hogy az AB egyenes egyenlete $2x - 5y = -4$, az AD egyenes egyenlete pedig $3x - 2y = -6$. A C pont koordinátái $(5; 5)$, a B pont első koordinátája 3.

d) Határozza meg a paralelogramma A , B és D csúcsának koordinátáit!

(9 pont)

48) Az ábrán szereplő A , B , C , D és E pontok egy olyan egyenesre illeszkednek, amely párhuzamos az F és G pontokra illeszkedő egyenessel.



a) Hány olyan különböző egyenes létezik, amely az ábrán lévő pontok közül legalább kettőre illeszkedik?

b) Hány olyan háromszög van, amelynek a csúcsait az ábrán szereplő 7 pont közül választjuk ki? (Két háromszöget különbözőnek tekintünk, ha legalább az egyik csúcsukban eltérnek egymástól.) (5 pont)

Egy háromszög csúcsai: $K(-1;5)$, $L(1;1)$, $M(5;3)$.

c) Igazolja, hogy a háromszög L -nél lévő szöge derékszög! (4 pont)

d) Írja fel a háromszög körülírt körének az egyenletét! (5 pont)

49) Egy kör középpontja a $K(3;2)$ pont, a kör átmegy a $P(-1;5)$ ponton. Adja meg a kör sugarának hosszát, és írja fel a kör egyenletét! (4 pont)

50) Egy háromszög csúcsai a koordináta-rendszerben: $A(5;6)$, $B(4;2)$ és $C(8;2)$.

a) Számítsa ki a háromszög A -nál lévő belső szögét! (6 pont)

b) Írja fel a háromszög B -re illeszkedő magasságvonalának egyenletét, és számítsa ki a háromszög M magasságpontjának koordinátáit! (7 pont)

Az ABC háromszöget a B pontból középpontosan a kétszeresére nagyítjuk, így az $A'B'C'$ háromszöget kapjuk.

c) Adja meg az $A'B'C'$ háromszög csúcsainak koordinátáit! (4 pont)