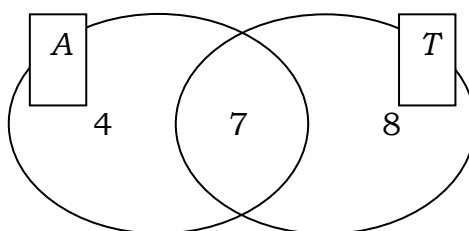


Halmazok Megoldások

- 1) Egy rejtvényújságban egymás mellett két, szinte azonos rajz található, amelyek között 23 apró eltérés van. Ezek megtalálása a feladat. Először Ádám és Tamás nézték meg figyelmesen az ábrákat: Ádám 11, Tamás 15 eltérést talált, de csak 7 olyan volt, amelyet mindketten észrevettek.
- a) Hány olyan eltérés volt, amelyet egyikük sem vett észre? (4 pont)
Közben Enikő is elkezdte számolni az eltéréseket, de ő sem találta meg az összeset. Mindössze 4 olyan volt, amelyet mind a hárman megtaláltak. Egyeztetve kiderült, hogy az Enikő által bejelöltekből hatot Ádám is, kilencet Tamás is észrevett, és örömmel látták, hogy hárman együtt az összes eltérést megtalálták.
- b) A feladat szövege alapján töltsd ki az alábbi halmazábrát arról, hogy ki hányat talált meg! (7 pont)
- c) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását! Enikő minden eltérést megtalált. (2 pont)
- d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy eltérést véletlenszerűen kiválasztva, azt legalább ketten megtalálták? (4 pont)

Megoldás:

a)



(2 pont)

Legalább az egyikük által észrevett eltérések száma: $4 + 7 + 8 = 19$

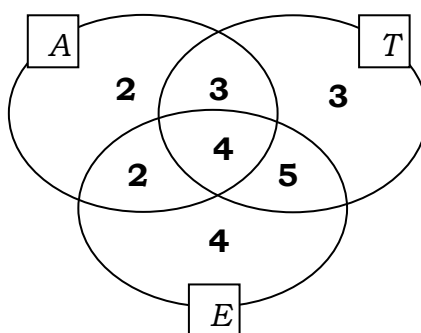
(1 pont)

Egyikük sem vett észre $23 - 19 = 4$ eltérést.

(1 pont)

(Halmazábra nélkül is felírható a megtalált eltérések száma.)

b)



(7 pont)

c) Lásd: Logika, gráfok 1. feladat

d) Lásd: Valószínűségszámítás 2. feladat

Összesen: 17 pont

- 2) Egy középiskolába 700 tanuló jár. Közülük 10% sportol rendszeresen a két iskolai szakosztály közül legalább az egyikben. Az atlétika szakosztályban 36 tanuló sportol rendszeresen, és pontosan 22 olyan diák van, aki az atlétika és a kosárlabda szakosztály munkájában is részt vesz.

a) Készítsen halmazábrát az iskola tanulóiról a feladat adatainak

feltüntetésével!

(4 pont)

b) Hányan sportolnak a kosárlabda szakosztályban?

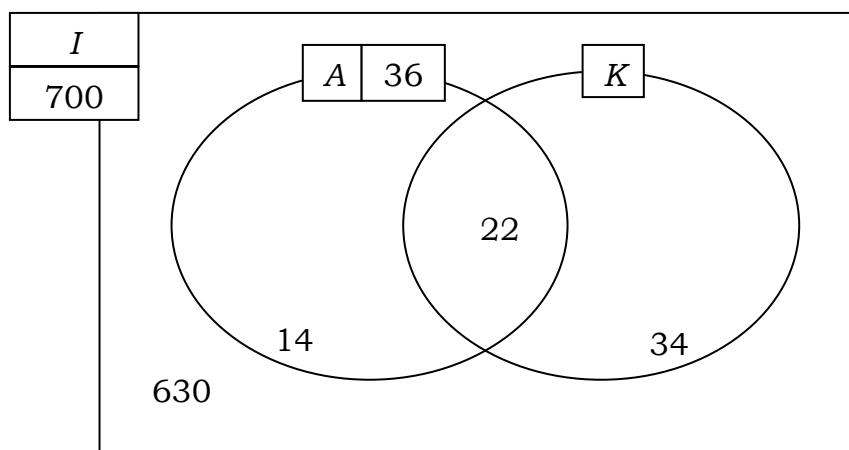
(4 pont)

c) Egy másik iskola sportegyesületében 50 kosaras sportol, közülük 17 atletizál is. Ebben az iskolában véletlenszerűen kiválasztunk egy kosarast. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott tanuló atletizál is?

(4 pont)

Megoldás:

a)



(4 pont)

b) 36 atlétából 22 kosarazik is, tehát 14-en csak atletizálnak.

(1 pont)

70 tanuló sportol összesen, tehát 34 fő csak kosarazik.

(2 pont)

 $22 + 34 = \mathbf{56}$ tanuló kosarazik.

(1 pont)

c) Lásd: Valószínűségszámítás 3. feladat

Összesen: 12 pont

3) Az A és a B halmazokról a következőket tudjuk: $A \cap B = \{1; 2\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, $A \setminus B = \{5; 7\}$. Adja meg az A és a B halmaz elemeit!

(4 pont)

Megoldás:

$$A = \{1; 2; 5; 7\}$$

(2 pont)

$$B = \{1; 2; 3; 4; 6\}$$

(2 pont)

Összesen: 4 pont

4) Egy 10 tagú csoportban mindenki beszéli az angol és a német nyelv valamelyikét. Hatan beszélnek közülük németül, nyolcan angolul. Hányan beszélik mindkét nyelvet? Válaszát indokolja számítással, vagy szemléltesse Venn-diagrammal!

(3 pont)

Megoldás:

$$(6 + 8) - 10 = 4$$

(2 pont)

Mindkét nyelvet 4 fő beszéli.

(1 pont)

Összesen: 3 pont

5) Sorolja fel a H halmaz elemeit, ha $H = \{\text{kétjegyű négyzetszámok}\}$

(2 pont)

Megoldás:

$$H = \{16; 25; 36; 49; 64; 81\}$$

(2 pont)

6) Egy iskola teljes tanulói létszáma 518 fő. Ők alkotják az A halmazt. Az

iskola 12. C osztályának 27 tanulója alkotja a B halmazt. Mennyi az $A \cap B$ halmaz számossága? (2 pont)

Megoldás:

$A \cap B$ számossága: 27. (2 pont)

7) Az A halmaz elemei a háromnál nagyobb egyjegyű számok, a B halmaz elemei pedig a húsznál kisebb pozitív páratlan számok. Sorolja fel az $A \cap B$ halmaz elemeit! (2 pont)

Megoldás:

$A \cap B = \{5; 7; 9\}$ (2 pont)

8) Egy fordítóiroda angol és német fordítást vállal. Az irodában 50 fordító dolgozik, akiknek 70%-a angol nyelven, 50%-a német nyelven fordít. Hány fordító dolgozik mindkét nyelven? Válaszát indokolja! (4 pont)

Megoldás:

Mindkét nyelven a dolgozók 20%-a fordít. (3 pont)

A mindkét nyelven fordítók száma: 10. (1 pont)

Összesen: 4 pont

9) Sorolja fel az $A = \{1; 10; 100\}$ halmaz összes kételemű részhalmazát! (2 pont)

Megoldás:

$A_1 = \{1; 10\}$; $A_2 = \{1; 100\}$; $A_3 = \{10; 100\}$ (2 pont)

10) Az A és a B halmazok a számegyenes intervallumai: $A = [-1; 5; 12]$, $B = [3; 20]$. Adja meg az $A \cup B$ és a $B \cap A$ halmazokat! (4 pont)

Megoldás:

$A \cup B = [-1; 5; 20]$ (2 pont)

$B \cap A = [3; 12]$ (2 pont)

Összesen: 4 pont

11) Legyen az A halmaz a 10-nél kisebb pozitív prímszámok halmaza, B pedig a hattal osztható, harmincnál nem nagyobb pozitív egészek halmaza. Sorolja fel az A , a B és az $A \cup B$ halmazok elemeit! (3 pont)

Megoldás:

Az A halmaz elemei: $\{2; 3; 5; 7\}$. (1 pont)

A B halmaz elemei: $\{6; 12; 18; 24; 30\}$. (1 pont)

Az $A \cup B$ halmaz elemei: $\{2; 3; 5; 6; 7; 12; 18; 24; 30\}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

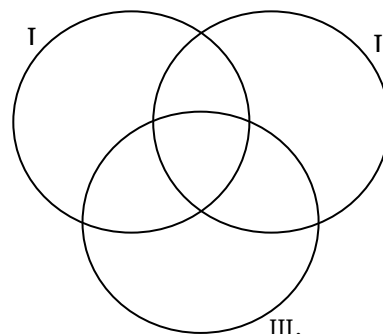
12) Egy középiskolába 620 tanuló jár. Az iskola diákbizottsága az iskolánpra három kiadványt jelentetett meg:

I. Diákok Hangja

II. Iskolaélet

III. Miénk a sul!

Később felmérték, hogy ezeknek a kiadványoknak milyen volt az olvasottsága az iskola tanulóinak körében.



A Diákok Hangját a tanulók 25%-a, az Iskolaéletet 40%-a, a Miénk a sulii! c. kiadványt pedig 45%-a olvasta. Az első két kiadványt a tanulók 10%-a, az első és harmadik kiadványt 20%-a, a másodikat és harmadikat 25%-a, mindhármat pedig 5%-a olvasta.

- a) Hányan olvasták mindhárom kiadványt? (2 pont)
 b) A halmazábra az egyes kiadványokat elolvasott tanulók létszámát szemlélteti. Írja be a halmazábra mindegyik tartományába az oda tartozó tanulók számát! (6 pont)
 c) Az iskola tanulóinak hány százaléka olvasta legalább az egyik kiadványt? (2 pont)

Az iskola 12. évfolyamára 126 tanuló jár, közöttük kétszer annyi látogatta az iskolanap rendezvényeit, mint aki nem látogatta. Az Iskolaélet című kiadványt a rendezvényeket látogatók harmada, a nem látogatóknak pedig a fele olvasta. Egy újságíró megkérdez két, találmra kiválasztott diákot az évfolyamról, hogy olvasták-e az Iskolaéletet.

- d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a két megkérdezett diák közül az egyik látogatta az iskolanap rendezvényeit, a másik nem, viszont mindketten olvasták az Iskolaéletet? (7 pont)

Megoldás:

- a) **31 tanuló** olvasta mindhárom kiadványt. (2 pont)
 b) Ábra (6 pont)
 c) (372 fő, tehát) a tanulók **60 %**-a olvasta legalább az egyik kiadványt. (2 pont)
 d) Lásd: Valószínűségszámítás 24. feladat

Összesen: 17 pont

- 13) Adott az A és B halmaz: $A\{a;b;c;d\}$,
 $B\{a;b;d;e;f\}$. Adja meg elemeik felsorolásával az $A \cap B$ és $A \cup B$ halmazokat!

Megoldás:

$$A \cap B = \{a; b; d\} \quad (1 \text{ pont})$$

$$A \cup B = \{a; b; c; d; e; f\} \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

- 14) Az A halmaz az 5-re végződő kétjegyű pozitív egészek halmaza, a B halmaz pedig a kilenccel osztható kétjegyű pozitív egészek halmaza.

Adja meg elemeik felsorolásával az alábbi halmazokat:

$$A; B; A \cap B; A \setminus B; \quad (4 \text{ pont})$$

Megoldás:

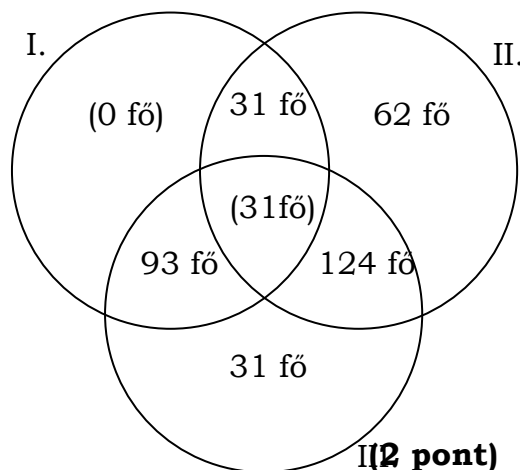
$$A = \{15; 25; 35; 45; 55; 65; 75; 85; 95\} \quad (1 \text{ pont})$$

$$B = \{18; 27; 36; 45; 54; 63; 72; 81; 90; 99\} \quad (1 \text{ pont})$$

$$A \cap B = \{45\} \quad (1 \text{ pont})$$

$$A \setminus B = \{15; 25; 35; 55; 65; 75; 85; 95\} \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 4 pont



15) Jelölje \mathbb{N} a természetes számok halmazát, \mathbb{Z} az egész számok halmazát és \emptyset az üres halmazt! Adja meg az alábbi halmazműveletek eredményét!

- a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$
 b) $\mathbb{Z} \cup \emptyset$
 c) $\emptyset \setminus \mathbb{N}$

(3 pont)

Megoldás:

- a) \mathbb{N}
 b) \mathbb{Z}
 c) \emptyset

(1 pont)

(1 pont)

(1 pont)

Összesen: 3 pont

16) Tekintsük a következő halmazokat:

$A = \{\text{a 100-nál nem nagyobb pozitív egész számok}\}$

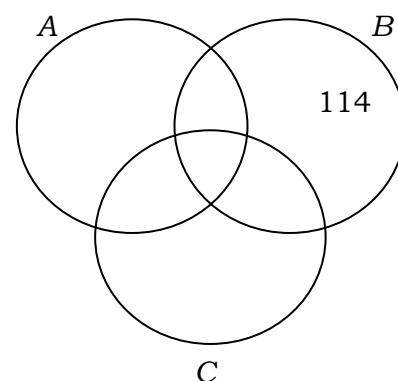
$B = \{\text{a 300-nál nem nagyobb, 3-mal osztható pozitív egész számok}\}$

$C = \{\text{a 400-nál nem nagyobb, 4-gyel osztható pozitív egész számok}\}$

- a) Töltse ki a táblázatot a minta alapján, majd a táblázat alapján írja be az 52, 78, 124, 216 számokat a halmazára megfelelő tartományába!

(8 pont)

	A halmaz	B halmaz	C halmaz
114	<i>nem eleme</i>	<i>eleme</i>	<i>nem eleme</i>
52			
78			
124			
216			



- b) Határozza meg az $A \cap B \cap C$ halmaz elemszámát! (3 pont)

- c) Számítsa ki annak valószínűségét, hogy az A halmazból egy elemet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám nem eleme sem a B, sem a C halmaznak! (6 pont)

Megoldás:

	A halmaz	B halmaz	C halmaz
52	<i>eleme</i>	<i>nem eleme</i>	<i>eleme</i>
78	<i>eleme</i>	<i>eleme</i>	<i>nem eleme</i>
124	<i>nem eleme</i>	<i>nem eleme</i>	<i>eleme</i>
216	<i>nem eleme</i>	<i>eleme</i>	<i>eleme</i>

- a) Táblázat: (8 pont)

- b) A három halmaz közös részében azok a pozitív egész számok vannak, melyek 100-nál nem nagyobbak és 3-mal és 4-gyel is (tehát 12-vel) oszthatók. (1 pont)

Ezek a számok:

$$A \cap B \cap C = \{12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96\}$$

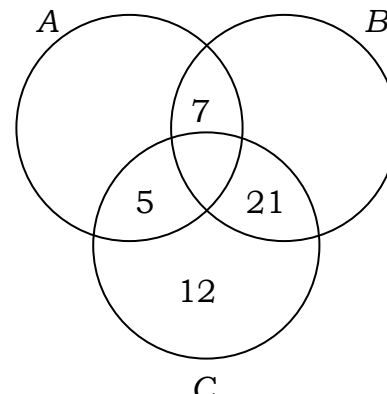
(1 pont)

Összesen **8 darab** ilyen szám van.

(1 pont)

- c) Lásd: Valószínűségszámítás 30. feladat

Összesen: 17 pont



- 17) Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ és $B \setminus A = \{1; 2; 4; 7\}$.

Elemeinek felsorolásával adja meg az A halmazt!

(2 pont)

Megoldás:

$$A = \{3; 5; 6; 8; 9\}$$

(2 pont)

- 18) Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A \setminus B = \{1; 4\}$ és $A \cap B = \{2; 5\}$. Sorolja fel az A és a B halmaz elemeit!

(2 pont)

Megoldás:

$$A = \{1; 2; 4; 5\}.$$

(1 pont)

$$B = \{2; 3; 5; 6\}$$

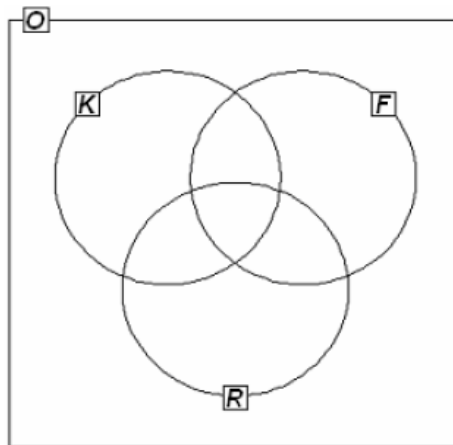
(1 pont)

Összesen: 2 pont

- 19) Egy osztályban a következő háromféle sportkört hirdették meg: kosárlabda, foci és röplabda. Az osztály 30 tanulója közül kosárlabdára 14, focira 19, röplabdára 14 tanuló jelentkezett. Ketten egyik sportra sem jelentkeztek. Három gyerek kosárlabdázik és focizik, de nem röplabdázik, hatan fociznak és röplabdáznak, de nem kosaraznak, ketten pedig kosárlabdáznak és röplabdáznak, de nem fociznak. Négyen mind a háromféle sportot üzik.

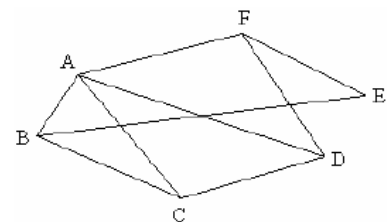
- a) Írja be a megadott halmazábrába (1. ábra) a szövegnek megfelelő számokat!

(4 pont)



1. ábra

- b) Fogalmazza meg a következő állítás tagadását!
A focira jelentkezett tanulók közül mindenkinek van testvére. (2 pont)
- c) A focira jelentkezett 19 tanulóból öten vehetnek részt egy edzőtáborban. Igazolja, hogy több, mint 10 000-féleképpen lehet kiválasztani az öt tanulót! (3 pont)
- d) Az iskolák közötti labdarúgóbajnokságra jelentkezett 6 csapat között lejátszott mérkőzéseket szemlélteti a 2. ábra. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik a bajnokságban? (Válaszát indokolja!) (3 pont)

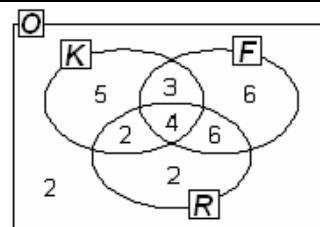


2. ábra

Megoldás:

- a) Ábra
 b) Lásd: Logika, gráfok 15. feladat
 c) Lásd: Kombinatorika 21. feladat
 d) Lásd: Logika, gráfok 15. feladat

(4 pont)



Összesen: 12 pont

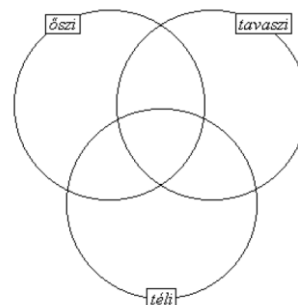
20) Egy zeneiskola minden tanulója szerepelt a tanév során szervezett három hangverseny, az őszi, a téli, a tavaszi koncert valamelyikén. 20-an voltak, akik az őszi és a téli koncerten is, 23-an, akik a télin és a tavaszin is, és 18-an, akik az őszi és a tavaszi hangversenyen is szerepeltek. 10 olyan növendék volt, aki mindhárom hangversenyen fellépett.

- a) Írja be a halmazábrába a szövegben szereplő adatokat a megfelelő helyre! (4 pont)

A zeneiskolába 188 tanuló jár. Azok közül, akik csak egy hangversenyen léptek fel, kétszer annyian szerepeltek tavasszal, mint télen, de csak negyedannyian ősszel, mint tavasszal.

- b) Számítsa ki, hogy hány olyan tanuló volt, aki csak télen szerepelt! (8 pont)

- c) 32 tanuló jár az A osztályba, 28 pedig a B-be. Egy ünnepélyen a két osztályból véletlenszerűen kiválasztott 10 tanulóból álló csoport képviseli az iskolát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a két osztályból pontosan 5-5 tanuló kerül a kiválasztott csoportba? (5 pont)

**Megoldás:**

- a) A **8; 10; 10; 13** számokat kell beírni a metszetekbe. (4 pont)

- b) Csak télen szerepelt: x tanuló (1 pont)

Csak tavasszal szerepelt: $2x$ tanuló (1 pont)

Csak ősszel szerepelt: $\frac{x}{2}$ tanuló (2 pont)

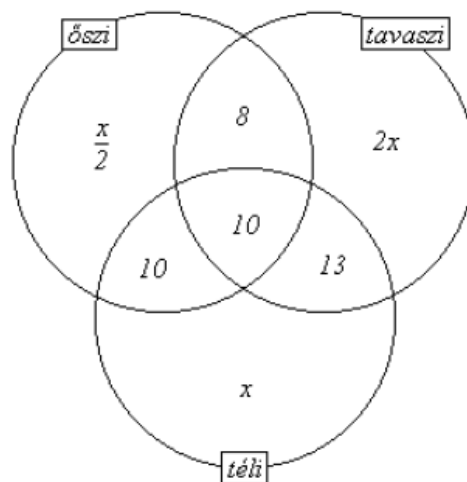
$$\text{Az egyenlet: } x + \frac{x}{2} + 2x + 10 + 10 + 13 + 8 = 188$$

(2 pont)

Ebből $x = 42$ (1 pont)

Tehát **42** olyan tanuló van, aki csak télen szerepelt (1 pont)

- c) Lásd: Valószínűségszámítás 39. feladat



Összesen: 17 pont

21) Az A halmaz elemei a (-5) -nél nagyobb, de 2 -nél kisebb egész számok. B a pozitív egész számok halmaza. Elemeinek felsorolásával adja meg az $A \setminus B$ halmazt! (2 pont)

Megoldás:

$$A \setminus B = \{-4; -3; -2; -1; 0\}$$

(2 pont)

22) Egy végzős osztály diákjai projektmunka keretében különböző statisztikai felméréseket készítettek az iskola tanulóinak körében.

- a) Éva 150 diákot kérdezett meg otthonuk felszereltségéről. Felméréséből kiderült, hogy a megkérdezettek közül kétszer annyian rendelkeznek mikrohullámú sütővel, mint mosogatógéppel. Azt is megtudta, hogy 63-an mindkét géppel, 9-en egyik géppel sem rendelkeznek. A megkérdezettek hány százalékának nincs otthon mikrohullámú sütője? (6 pont)
- b) Jóska a saját felmérésében 200 diákot kérdezett meg arról, hogy hány számítógépük van a háztartásban. A válaszokat a következő táblázatban összesítette:

A számítógépek száma a háztartásban	Gyakoriság
0	3
1	94
2	89
3	14

Jóska felmérése alapján töltsd ki az alábbi táblázatot az egy háztartásban található számítógépek számáról! (4 pont)

A számítógépek számának átlaga	
A számítógépek számának mediánja	
A számítógépek számának módusza	

- c) Tamás a saját felmérése alapján a következőt állítja:
Minden háztartásban van televízió.
 Az alábbi négy állítás közül válassza ki azt a kettőt, amely Tamás állításának tagadása!
- A) Semelyik háztartásban nincs televízió.
 - B) Van olyan háztartás, ahol van televízió.
 - C) Van olyan háztartás, ahol nincs televízió.
 - D) Nem minden háztartásban van televízió.
- (2 pont)

Megoldás:

- a) A mosogatógéppel rendelkezők számát jelölje x , a mikrohullámú sütővel rendelkezők számát $2x$. (1 pont)
 Valamelyik géppel 141-en rendelkeznek:
 $2x + x - 63 = 141$, (2 pont)
 amiből $x = 68$. (1 pont)
 Nincs mikrohullámú sütője $150 - 2 \cdot 68 = 14$ megkérdezettnek, (1 pont)
 ők az összes megkérdezett kb. **9,3%-át** jelentik. (1 pont)
- b) Lásd: Statisztika 28. feladat
- c) Lásd: Logika, gráfok 20. feladat

Összesen: 12 pont

- 23) Legyen A halmaz a 8-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza, B pedig a 3-mal osztható egyjegyű pozitív egész számok halmaza. Elemeinek felsorolásával adja meg az A , a B , az $A \cap B$ és az $A \setminus B$ halmazt! (4 pont)

Megoldás:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\} \quad (1 \text{ pont})$$

$$B = \{3; 6; 9\} \quad (1 \text{ pont})$$

$$A \cap B = \{3; 6\} \quad (1 \text{ pont})$$

$$A \setminus B = \{1; 2; 4; 5; 7; 8\} \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 4 pont

- 24) Egy osztályban 25-en tanulnak angolul, 17-en tanulnak németül. E két nyelv közül legalább az egyiket mindenki tanulja. Hányan tanulják mindkét nyelvet, ha az osztály létszáma 30? (2 pont)**

Megoldás:

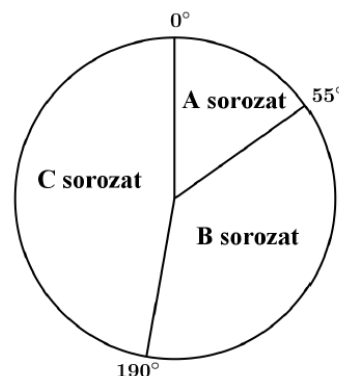
$$30 = 25 + 17 - x$$

$$-x = 30 - 25 - 17$$

$$x = 12$$

Tehát **12-en** tanulják mindkét nyelvet.

- 25) Egy közvélemény-kutató intézet azt a feladatot kapta, hogy két alkalommal – fél év különbséggel – mérje fel a TV-ben látható három filmsorozat nézettségi adatait. Az ábrán látható kérdőíven a válaszoló vagy azt jelölhette be, hogy az A, B, és C sorozatok közül melyiket nézi (akár többet is meg lehetett jelölni), vagy azt, hogy egyiket sem nézi. Az első felméréskor kapott 600 kérdőív jelöléseit összesítve megállapították, hogy az A sorozat összesen 90 jelölést kapott, a B sorozat összesen 290-et, a C sorozat pedig összesen 230-at. Érdekes módon olyan válaszadó nem volt, aki pontosan két sorozatot nézett volna, viszont 55-en mindhárom sorozatot bejelölték.**



- a) A válaszolók hány százaléka nézte az A sorozatot? (2 pont)**

- b) Hány válaszoló nem nézte egyik sorozatot sem? (5 pont)**

A második felmérés során kiválogatták azokat a kérdőíveket, amelyeken valamelyik sorozat meg volt jelölve. Ezeken a három sorozat nézettségére összesen 576 jelölés érkezett. Az adatok feldolgozói minden jelölést megszámoztak, és a végeredményről az itt látható kördiagramot készítették.

- c) Számítsa ki, hogy az egyes sorozatok nézettségére hány jelölés érkezett! (5 pont)**

Megoldás:

- a) Lásd: Statisztika 33. feladat

- b) A kizárólag az egyik sorozatot nézők számát megkapjuk, ha az adott sorozatot nézők számából kivonjuk a mindhárom sorozatot nézők számát (55), (1 pont)
ezért csak az a A sorozatot 35, csak a B sorozatot 235, csak a C sorozatot 175 válaszadó nézte. (2 pont)

Így a valamelyik sorozatot nézők száma $35 + 235 + 175 + 55 = 500$, (1 pont)
ezért egyik sorozatot sem nézte $600 - 500 = 100$ fő. (1 pont)

- c) Lásd: Statisztika 33. feladat

Összesen: 12 pont

- 26) A biológiaérettségi egyik tesztkérdésénél a megadott öt válaszlehetőség közül a két jót kell megjelölni.**

- a) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az öt lehetőség közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva a két jó választ találjuk el! (3 pont)**

Nóri, Judit és Gergő egy 58 kérdésből álló biológiateszttel mérik fel tudásukat az érettségi előtt. A kitöltés után, a helyes válaszokat megnézve az derült ki, hogy Nóri 32, Judit 38 kérdést válaszolt meg helyesen, és 21 olyan kérdés volt, amelyre mindketten jó választ adtak. Megállapították azt is, hogy 11 kérdésre mindhárman helyesen válaszoltak, és Gergő helyesen megoldott feladati közül 17-et Nóri is, 19-et Judit is jól oldott meg. Volt viszont 4 olyan kérdés, amelyet egyikük sem tudott jól megválaszolni.

b) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy kérdést véletlenszerűen kiválasztva, arra Gergő helyes választ adott! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (8 pont)

Nóri a biológia és kémia szóbeli érettségire készül. Biológiából 28, kémiából 30 tételt kell megtanulnia. Az első napra mindkét tárgyból 3-3 tételt szeretne kiválasztani, majd a kiválasztott tételeket sorba állítani úgy, hogy a két tantárgy tételei felváltva kövessék egymást.

c) Számítsa ki, hányféleképpen állíthatja össze Nóri az első napra szóló tanulási programját! (6 pont)

Megoldás:

a) Lásd: Valószínűségszámítás 48. feladat

b) A pontosan két diák által jól megoldott feladatok száma:

$$\text{Nóri-Judit: } 21 - 11 = 10,$$

$$\text{Nóri-Gergő: } 17 - 11 = 6 \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Judit-Gergő: } 19 - 11 = 8$$

A feladatok között $32 - 11 - 10 - 6 = 5$ olyan volt, amelyet csak Nóri, és $38 - 11 - 10 - 8 = 9$ olyan, amelyet csak Judit oldott meg helyesen. (1 pont)

Azon kérdések száma, amelyre a három tanuló közül legalább egyikük helyes választ adott: $58 - 4 = 54$. (1 pont)

$32 + 38 - 21 = 49$ olyan kérdés volt, amelyre Nóri vagy Judit helyes választ adott, (1 pont)

így $54 - 49 = 5$ olyan feladat volt, amelyet csak Gergő oldott meg helyesen. (1 pont)

A Gergő által helyesen megoldott feladatok száma: $5 + 6 + 8 + 11 = 30$. (1 pont)

Így a kérdéses valószínűség $\frac{30}{58} \approx$ (1 pont)

$\approx 0,517$. (1 pont)

c) Lásd: Kombinatorika 28. feladat

Összesen: 17 pont

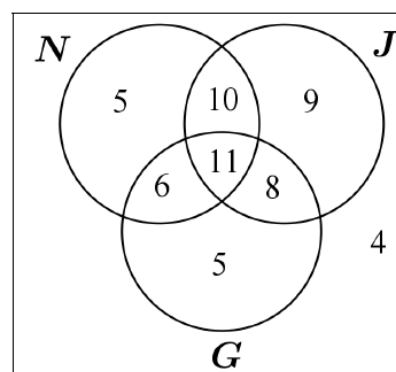
27) Az A halmaz elemei a 28 pozitív osztói, a B halmaz elemei a 49 pozitív osztói. Adja meg az $A \cap B$ és a $B \setminus A$ halmazokat elemeik felsorolásával! Megoldását részletezze! (3 pont)

Megoldás:

A halmaz elemei: $A = \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}$

B halmaz elemei: $B = \{1; 7; 49\}$ (1 pont)

$A \cap B = \{1; 7\}$ (1 pont)



$$B \setminus A = \{49\}$$

(1 pont)

Összesen: 3 pont

- 28) Tekintsük a következő két halmazt: $G = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ és $H = \{1; 2; 4; 8; 16\}$. Elemeik felsorolásával adja meg a $G \cap H$ és a $H \setminus G$ halmazokat! (2 pont)

Megoldás:

$$G \cap H = \{1; 2; 4\}$$

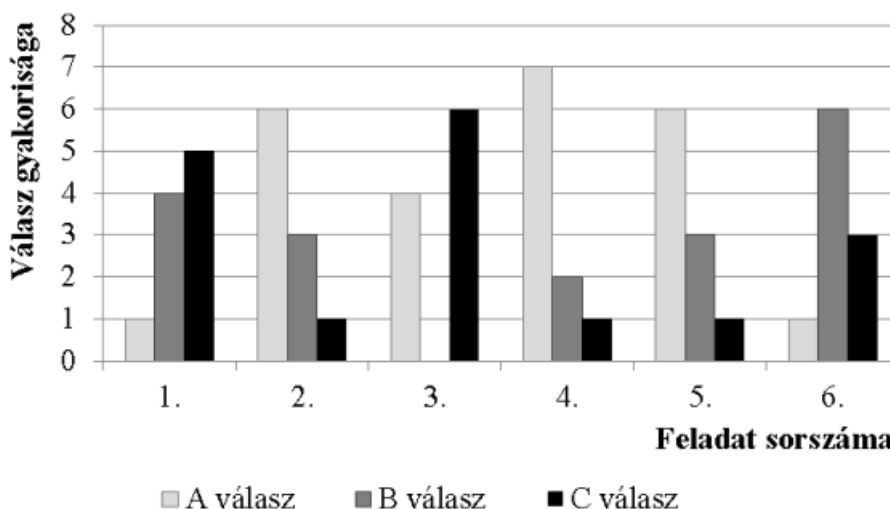
(1 pont)

$$H \setminus G = \{8; 16\}$$

(1 pont)

Összesen: 2 pont

- 29) Egy hat kérdéses tesztben minden kérdésnél a megadott három lehetőség (A, B és C) közül kellett választani a helyes választ. A tesztet tíz diák írta meg. Az alábbi diagram az egyes feladatokra adott választok eloszlását mutatja.



A teszt értékelésekor minden helyes válaszra 1 pont, helytelen válaszra pedig 0 pont jár. Tudjuk, hogy a tíz diák összesen 35 pontot szerzett.

- a) Határozza meg az összes jó és az összes rossz válasz számát, és készítsen ezekről kördiagramot! (4 pont)
- b) Igaz-e, hogy minden kérdésre az a jó válasz, amit a legtöbben jelöltek be? Válaszát indokolja! (3 pont)

Éva, János és Nóra is megírták ezt a tesztet. Egyetlen olyan kérdés volt, amelyre mindhárman jól válaszoltak. Három olyan kérdés volt, amit Éva és János is jól válaszolt meg, kettő olyan, amire János és Nóra is, és egy olyan, amire Nóra és Éva is jó választ adott. Két olyan kérdés volt, amelyet csak egyvalaki oldott meg helyesen hármuk közül.

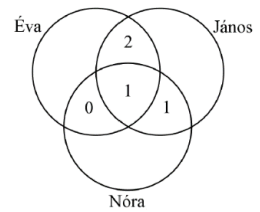
- c) Hány pontot szereztek ők hárman összesen ezen a teszten? (5 pont)
- Az egyik diák nem készült fel a tesztre, válaszait tippelve, véletlenszerűen adja meg.
- d) Mekkora valószínűséggel lesz legalább egy jó válasza a tesztben? (5 pont)

Megoldás:

- a) Lásd: Statisztika 40. feladat
- b) Lásd: Statisztika 40. feladat

- c) A megválaszolt kérdések számát egy Venn-diagramon ábrázoljuk. (2 pont)

Azért a két feladatért, amit csak egyedül oldottak meg 2 pont jár, így összesen $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 = 11$ pontot szereztek. (3 pont)



- d) Lásd: Valószínűségszámítás 52. feladat

Összesen: 17 pont

- 30) Az A halmaz elemei a 12 pozitív osztói. A B halmaz elemei a 15-nél kisebb (pozitív) prímszámok. Adja meg elemei felsorolásával az A , a B és az $A \setminus B$ halmazt! (3 pont)

Megoldás:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\} \quad (1 \text{ pont})$$

$$B = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\} \quad (1 \text{ pont})$$

$$A \setminus B = \{1; 4; 6; 12\} \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 3 pont

- 31) Egy matematikaversenyen 25 feladatot kell a résztvevőknek megoldaniuk 75 perc alatt. A felkészülés során Vera azt tervezgeti, hogy mennyi időt töltsön majd a könnyebb feladatok megoldásával, és mennyi időt hagyjon a nehezebbekre. Az első feladatra 1 percet szán. A versenyfeladatok általában egyre nehezedő sorrendben vannak megadva; Vera ezt úgy veszi figyelembe a tervezésnél, hogy a második feladattól kezdve mindig ugyanannyival növeli az egyes feladatok megoldására fordítható időt. Vera a rendelkezésére álló teljes időtartamot szeretné kitölteni a feladatok megoldásával.

- a) A terv szerint összesen mennyi időt szán Vera az utolsó 4 feladat megoldására? (7 pont)

A versenyzőknek minden feladat megoldása után öt lehetséges válasz közül kell az egyetlen helyes választ kiválasztaniuk. Egy versenyző pontszámának kiszámítása a $4 \cdot H - R + F$ képlettel történik, ahol H a helyes válaszok, R a rossz feladatok, F pedig a kitűzött feladatok számát jelenti (a kihagyott feladatokra 0 pont jár). Vera a 25 kitűzött feladat közül 3-at hagyott ki, és összesen 93 pontot szerzett.

- b) Hány helyes választ adott Vera? (5 pont)

Vera osztályából összesen 11-en indultak a versenyen. Közülük ugyanannyian oldották meg a 24-es, mint a 25-ös feladatot. Sőt ugyanennyien voltak azok is, akik a két feladat egyikét sem oldották meg. Egy olyan versenyző volt az osztályban, aki a 24-es és a 25-ös feladatot is megoldotta.

- c) Hányan voltak az osztályban azok, akik a 24-es feladatot megoldották, de a 25-ös feladatot nem? (5 pont)

Megoldás:

- a) Lásd: Sorozatok 45. feladat

- b) Lásd: Szöveges feladatok 42. feladat

- c) Jelölje x azoknak a diákoknak a számát, akik megoldották a 24-es illetve a 25-ös feladatot, illetve azok számát, akik egyik feladatot sem tudták megoldani.

(1 pont)

Csak a 24-es feladatot $x-1$, csak a 25-ös feladatot szintén $x-1$ tanuló

- oldotta meg. (1 pont)
 A feladat szövege alapján $2(x-1)+1+x=11$, (1 pont)
 amiből $x=4$, (1 pont)
 $(4-1)=3$ **olyan tanuló volt**, aki a 24-es feladatot megoldotta, de a 25-öst nem. (1 pont)

Összesen: 17 pont

32) Egy 20 fős társaság tagjait az április havi szabadidős tevékenységeikről kérdezték. Mindenki három eldöntendő kérdésre válaszolt (igennel vagy nemmel).

I. Volt-e moziban?

II. Olvasott-e szépirodalmi könyvet?

III. Volt-e koncerten?

A válaszokból kiderült, hogy tizenketten voltak moziban, kilencen olvastak szépirodalmi könyvet, és négy fő járt koncerten. Öten voltak, akik moziban jártak és szépirodalmi könyvet is olvastak, négyen pedig moziban és koncerten is jártak. Hárman mindhárom kérdésre igennel válaszoltak.

a) **Hány olyan tagja van a társaságnak, aki mindhárom kérdésre nemmel válaszolt?** (6 pont)

A társaság 20 tagja közül véletlenszerűen kiválasztunk kettőt.

b) **Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy legalább egyikük volt moziban április folyamán!** (5 pont)

Attól a kilenc személytől, akik olvastak áprilisban szépirodalmi könyvet, azt is megkérdezték, hogy hány könyvet olvastak el a hónapban. A válaszok (pozitív egész számok) elemzése után kiderült, hogy a kilenc szám (egyetlen) módusza 1, mediánja 2, átlaga $\frac{16}{9}$, terjedelme pedig 2.

c) **Adja meg ezt a kilenc számot!** (6 pont)

Megoldás:

a) Azok száma, akik jártak moziban, és olvastak szépirodalmi könyvet, de koncerten nem voltak: $(5-3)=2$. (1 pont)

Azok száma, akik voltak moziban és koncerten, de nem olvastak szépirodalmi könyvet: $(4-3)=1$. (1 pont)

A társaságban nem volt olyan személy, aki nem volt moziban, de olvasott szépirodalmi könyvet, és koncerten is volt. (1 pont)

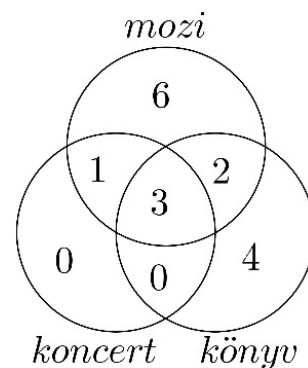
Azok száma, akik csak moziban voltak:

$12 - (2 + 3 + 1) = 6$ Hasonlóképpen azok száma, akik csak szépirodalmi könyvet olvastak (moziban és koncerten nem voltak): 4, illetve azok száma, akik csak koncerten voltak (moziban nem és könyvet sem olvastak): 0. (2 pont)

$20 - (3 + 2 + 1 + 6 + 4) = 4$ **olyan tagja van a társaságnak, aki mindhárom kérdésre nemmel válaszolt.** (1 pont)

b) Összesen $\binom{20}{2} (=190)$ -féleképpen választhatunk ki két embert. (1 pont)

A komplementer módszert használva az összes lehetséges esetből kivonjuk, azoknak az eseteknek a számát, amikor egyik kiválasztott személy sem volt



moziban. (1 pont)

Két olyan embert, aki nem járt moziban, $\binom{8}{2} (= 28)$ -féleképpen választhatunk

ki. (1 pont)

A kedvező esetek száma $190 - 28 = 162$ (1 pont)

A kérdéses valószínűség $\frac{162}{190} \approx 0,853$ (1 pont)

- c) Az adatok terjedelme 2, továbbá az adatok között szerepel az 1 és a 2, ezért a válaszok az 1, 2 és 3 számok közül kerülnek ki. (1 pont)

A számok egyetlen módusza az 1, ezért legalább négy 1-es válasz volt. (1 pont)

A nagyság szerint sorba rendezett válaszok közül az ötödik 2 (így pontosan négy 1-es válasz volt). (1 pont)

A válaszok összege (az átlag alapján) 16. (1 pont)

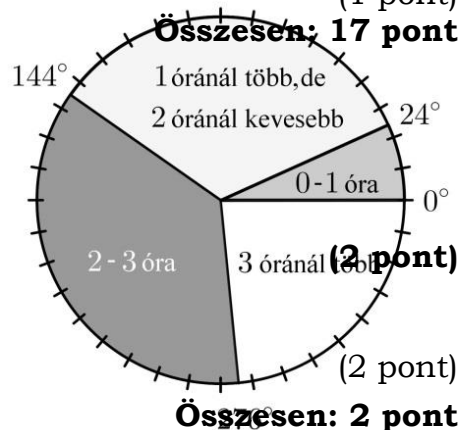
A számok között szerepel legalább egy 3-as, így a hiányzó három szám (melyek 2-esek vagy 3-asok) összege 7. Ez a három szám 2, 2, 3. (1 pont)

A kilenc szám: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3. (1 pont)

- 33) Egy 27 fős osztályban mindenki tesz érettségi vizsgát angolból vagy németből. 23 diák vizsgázik angolból, 12 diák pedig németből. Hány olyan diák van az osztályban, aki angolból és németből is tesz érettségi vizsgát?**

Megoldás:

$$(23 + 12) - 27 = 8$$



- 34) Írja fel a $\{2; 3; 4\}$ halmaznak azokat a részhalmazait, melyeknek a 2 eleme és a 4 nem eleme!** (2 pont)

Megoldás:

Két ilyen részhalmaz létezik, a $\{2\}$ és a $\{2; 3\}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

- 35) Egy 30 fős osztályban felmérést készítettek a diákok internetezési szokásairól. Az egyik kérdés az volt, hogy naponta átlagosan ki hány órát használja az internetet a szabadidejében. A válaszok alapján az itt látható kördiagram készült.**

- a) Hány olyan diák van az osztályban, aki naponta legalább 2 órát használja az internetet a szabadidejében? (3 pont)**

Egy másik kérdés az volt, hogy a mobiltelefon, a laptop, illetve a táblagép (tablet) közül melyiket használják internetezésre. A mobiltelefont mind a 30-an, a laptopot 24-en, a táblagépet 16-an jelölték meg. A felmérésből az is kiderült, hogy a mobiltelefon, a laptop és a táblagép közül pontosan kétféle eszközt 14 diák használ.

- b) Hányan használják mind a háromféle eszközt internetezésre? (8 pont)**

A vezeték nélküli hálózati kapcsolatot létrehozó egységek (wifi routerek) 3%-a 2 éven belül meghibásodik (ezt úgy tekinthetjük, hogy 0,03 annak a valószínűsége, hogy egy készülék meghibásodik 2 év alatt). A

meghibásodott eszközt garanciálisan kicserélik. Az iskola 20 ilyen eszközt vásárolt.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 2 év alatt legfeljebb egy hibásodik meg a vásárolt eszközök közül? (6 pont)

Megoldás:

a) Egy diáknak $360^\circ : 30 = 12^\circ$ -os középponti szög felel meg. (1 pont)

2-3 órát 11 diák, 3 óránál többet 7 diák használja az internetet naponta.

(1 pont)

Összesen **18** olyan diák van az osztályban, aki naponta legalább két órát internetezik. (1 pont)

b) Mivel mobiltelefont mind a 30-an használnak, ezért az \overline{M} halmaz üres (Lásd: az ábrán). (2 pont)

Jelölje x a mindhárom eszközt használók számát.

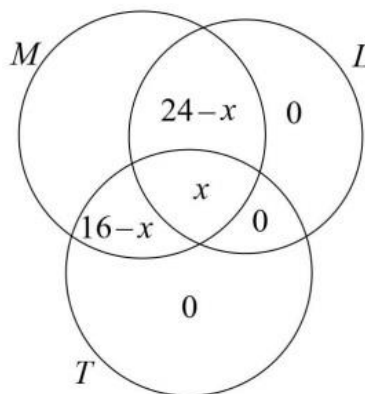
Ekkor csak mobiltelefont és laptopot $24 - x$, csak mobiltelefont és táblagépet $16 - x$ fő használ.

Mivel pontosan kétféle eszközt 14-en használnak, ezért $(24 - x) + (16 - x) = 14$. (2 pont)

Innen $x = 13$ fő használ háromféle eszközt.

Ellenőrzés a szöveg alapján: 3 fő használ egyféle eszközt, így $3 \cdot 1 + 14 \cdot 2 + 13 \cdot 3 = 70$. (1 pont)

c) Lásd: Valószínűségi számítás 61. feladat



Összesen: 17 pont

36) Egy 25 fős osztály minden tanulója tesz érettségi vizsgát angol nyelvből vagy informatikából. 21 tanuló választotta az angol nyelvet, 8 diák választotta az informatikát. Hány olyan tanuló van, aki angoltól érettségizik, de informatikából nem? (2 pont)

Megoldás:

Tudjuk, hogy $21 + 8 - 25 = 4$ olyan tanuló van, aki angoltól és informatikából is érettségizik. Ezt kivonva az angoltól érettségizők számából, megkapjuk, hogy $21 - 4 = 17$. Tehát **17 olyan tanuló van, aki angoltól érettségizik, de informatikából nem.** (2 pont)

37) Legyen az A halmaz a $[-7; 8]$ zárt intervallum, a B halmaz a $[2; 12]$ zárt intervallum. Határozza meg az $A \cap B$ halmazt! (2 pont)

Megoldás:

A keresett intervallum tartalmazza a közös elemeket, tehát $A \cap B = [2; 8]$.

(2 pont)

38) Adottak a következő halmazok:

$$A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\};$$

$$B = \{1; 4; 7; 10; 13; 16; 19\};$$

$$C = \{1; 2; 3; 5; 8; 13\}.$$

Elemi felsorolásával adja meg a $C \setminus A$ és az $(A \cup B) \cap C$ halmazt! (3 pont)

Megoldás:

A $C \setminus A$ halmaz tartalmazza az összes elemet, amit C tartalmaz, A viszont nem, ezért $C \setminus A = \{1; 8\}$. (1 pont)

Az $(A \cup B) \cap C$ halmaz tartalmazza az összes elemet, amit A vagy B tartalmaz és eleme C -nek is, így $(A \cup B) \cap C = \{1; 2; 3; 5; 13\}$. (2 pont)

Összesen: 3 pont

39) Sorolja fel az $A = \{x; y; z\}$ halmaz összes részhalmazát! (3 pont)

Megoldás:

A háromelemű halmaznak összesen $2^3 = 8$ részhalmaza van:

$\{\emptyset\}; \{x\}; \{y\}; \{z\}; \{x, y\}; \{x, z\}; \{y, z\}; \{x, y, z\}$. (3 pont)

Összesen: 3 pont

40) a) Oldja meg a $7 + x < -2 \cdot (x - 2)$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! (2 pont)

b) Oldja meg az $x^2 + x - 6 \leq 0$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! (4 pont)

c) Legyen az A halmaz a $7 + x < -2 \cdot (x - 2)$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmaza, B pedig az $x^2 + x - 6 \leq 0$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmaza. Adja meg az $A \cup B$, $A \cap B$ és $B \setminus A$ halmazokat! (6 pont)

Megoldás:

a) $7 + x < -2 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow 3x < -3$, (1 pont)

ahonnan $x < -1$. ($A =]-\infty; -1[$) (1 pont)

b) Az $x^2 + x - 6 = 0$ egyenlet gyökei: $-3; 2$ (2 pont)

Mivel a főegyüttható pozitív, (1 pont)

ezért $-3 \leq x \leq 2$. ($B = [-3; 2]$) (1 pont)

c) $A \cup B =]-\infty; 2]$ (2 pont)

$A \cap B = [-3; -1[$ (2 pont)

$B \setminus A = [-1; 2]$ (2 pont)

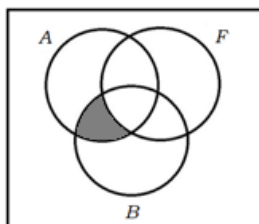
Összesen: 12 pont

41) Az alábbi ábra egy érettségiző évfolyam diákjainak a halmazát szemlélteti. A jelöli az angol nyelvből, B a biológiából, F pedig a fizikából érettségiző diákok halmazát.

Színezz be az ábrának azt a részét, amely azon diákok halmazát jelöli, akik angol nyelvből és biológiából érettségiznek, de fizikából nem!

(2 pont)

Megoldás:



(2 pont)

Összesen: 2 pont

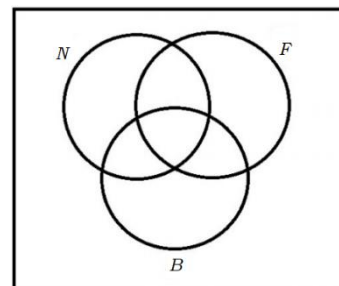
42) Egy erdészetben azt tervezték, hogy 30 nap alatt összesen 3000 fát ültetnek el úgy, hogy a második naptól kezdve minden nap 2-vel több fát ültetnek el, mint az azt megelőző napon.

- a) Hány fát kellett elültetni az első napon, és hány fát kellett elültetni a 30. napon a terv teljesítéséhez? (5 pont)

A telepítés után egy évvel három szempontból vizsgálják meg a telepített fák állapotát. Ha valamelyik nem fejlődik megfelelően akkor N jelet kap. Ha fertőző betegség tünetei mutatkoznak rajta, akkor B jelet, ha pedig valamilyen fizikai kár érte (pl. a szél megrongálta), akkor az F jelet kapja. Egy fa több jelet is kaphat.

Az összes jelölés elvégzése és összesítése után kiderült, hogy a telepített 3000 fa közül N jelet 45, B jelet 30, F jelet 20 fa kapott. Ezekben belül N és B jelet 21, N és F jelet 13, B és F jelet 4 fának adtak. 2 olyan fa van, amely mindhárom jelet megkapta.

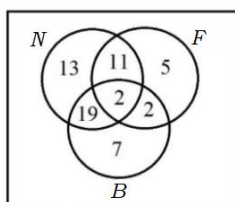
- b) Töltse ki az alábbi halmazábrát a megfelelő adatokkal! Állapítsa meg, hogy hány olyan fa van a telepítettek között, amelyik nem kapott semmilyen jelet!



Egy erdő faállománya az elmúlt időszakban évről évre 3%-kal növekedett. A faállomány most $10\,000\text{ m}^3$.

- c) Hány év múlva éri el az erdő faállománya a $16\,000\text{ m}^3$ -t, ha az továbbra is évről évre 3%-kal növekszik? (6 pont)

- a) Lásd: Sorozatok 57. feladat



- b) Helyes kitöltött ábra.

Összesen $(13 + 11 + 5 + 19 + 2 + 2 + 7 =)$ **59** fa kapott valamilyen jelölést.

Így $(3000 - 59 =)$ **2941** fa nem kapott semmilyen jelölést a telepítések között.

- c) Lásd: Sorozatok 56. feladat

Összesen: 17 pont

- 43) Adottak a következő halmazok: $A = \{1; 3; 6; 10; 15\}$, $B = \{1; 4; 10; 20\}$. Elemei felsorolásával adja meg az $A \cap B$ és az $A \setminus B$ halmazt! (2 pont)

Megoldás:

$$A \cap B = \{1; 10\} \quad (1 \text{ pont})$$

$$A \setminus B = \{3; 6; 15\} \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

- 44) Legyen A a pozitív, kétjegyű páros számok halmaza, és B pedig a 40-nél kisebb, 3-mal osztható pozitív számok halmaza. Elemei felsorolásával adja meg az $A \cap B$ halmazt! (2 pont)

Megoldás:

A feladat szövege alapján:

$$A = \{10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38; 40; \dots; 98\} \text{ és}$$

$$B = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39\}. \quad (1 \text{ pont})$$

A metszetbe azok az elemek tartoznak, melyek mindkét halmaznak elemei,

$$\text{tehát } A \cap B = \{12; 18; 24; 30; 36\}. \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 2 pont

- 45) Az A és B halmazokról tudjuk, hogy $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$,
 $A \setminus B = \{7; 8; 9\}$ és $B \setminus A = \{1; 2\}$. Adja meg az $A \cap B$ halmazt elemei
 felsorolásával! (2 pont)

Megoldás:

Adott két halmaz esetén: $A \cap B = A \cup B \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$. (1 pont)

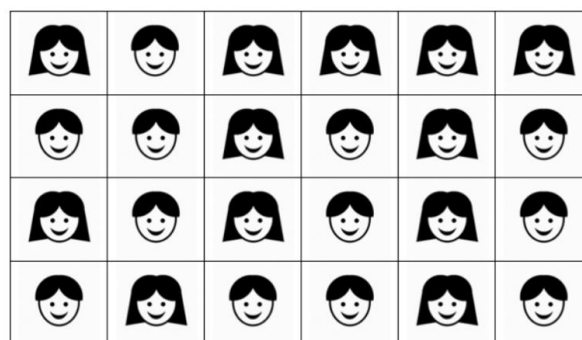
Így $A \cap B = \{3; 4; 5; 6\}$. (1 pont)

Összesen: 2 pont

- 46) Egy osztályban kétszer annyian járnak matematikafakultációra, mint fizikafakultációra. Összesen 15 olyan diák van az osztályban, aki a két fakultáció közül valamelyikre jár. A 15 diák közül 6-an mindkét fakultációra járnak.

- a) Hány olyan diák van az osztályban, aki matematikafakultációra jár, de fizikára nem? (4 pont)

A távoktatás időszakában ennek az osztálynak a tagjai a tanárral együtt 24-en vesznek részt az alapmatematikaórákon. Az órákon használt online alkalmazás 4 sorban és 6 oszlopban rendezi el a résztvevőket megjelenítő egybevágó kis téglalapokat úgy, hogy ezek kitöltik a teljes képernyőt. Stefi számítógépén a képernyő vízszintes és függőleges oldalának aránya 16:9.



- b) Adja meg egy kis téglalap vízszintes és függőleges oldalának arányát két egész szám hányadosaként! (5 pont)

Az alkalmazás a bejelentkező személyekhez tartozó 24 téglalapot véletlenszerűen rendezi el a képernyőn.

- c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a következő órán Stefit és barátnőjét, Cilit megjelenítő téglalap is a képernyő első sorába fog kerülni! (A 24 kis téglalapot az alkalmazás mindig 4 sorban és 6 oszlopban rendezi el.) (5 pont)

A 24 bejelentkező személyt a képernyőn 24!-féleképpen lehet elrendezni.

- d) Mutassa meg, hogy a 24! osztható 10 000-rel! (3 pont)

Megoldás:

- a) A fizikafakultációra járók számát jelölje x , ekkor a matematikafakultációra járók száma $2x$. A feladat szövege alapján: $2x + x - 6 = 15$. (2 pont)

Ebből $x = 7$. (1 pont)

Azaz $15 - 7 = 8$ olyan diák van az osztályban, aki matematikafakultációra jár, de fizikára nem. (1 pont)

Alternatív megoldás:

Jelölje a azok számát, akik fizikafakultációra járnak, de matematikára nem; b pedig azok számát, akik matematikafakultációra járnak, de fizikára nem.

A feladat szövege alapján:
$$\left. \begin{aligned} a + b + 6 &= 15 \\ 2 \cdot (a + 6) &= b + 6 \end{aligned} \right\} \quad (2 \text{ pont})$$

Az első egyenletből $a = 9 - b$. (1 pont)

Ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $b = 8$ olyan diák van az osztályban, aki matematikafakultációra jár, de fizikára nem. (1 pont)

- b) *Lásd: Szöveges feladatok 65. feladat*
- c) *Lásd: Valószínűségszámítás 82. feladat*
- d) *Lásd: Számelmélet 43. feladat*

Összesen: 17 pont