Kalkulus 1

Andai Attila*

2014. május 10.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Köszönettel tartozom *Dr. Tóth Jánosnak* az előzetes verziókban szereplő elírások kijavításáért és értékes megjegyzéseiért. Köszönöm *Joó Attilának*, hogy felhívta figyelmem a halmazelmélet részben pár pontatlanságra a jegyzet előzetes változatában.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a $\triangleq$ szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \triangleq b$ azt jelenti, hogy a már ismert b kifejezést a továbbiakban a jelöli.

2022. március 7.
Andai Attila

1. Halmazelméleti alapok

1.1. Definíció. A halmazelmélet keretein belül *formulának* nevezzük a karaktersorozatok azon legszűkebb $F_\in$ családjának elemeit, melyre teljesül, hogy

- minden x_i és x_j változójel esetén az $x_i \in x_j$ karaktersorozat $F_\in$ eleme;
- minden x_i és x_j változójel esetén az $x_i = x_j$ karaktersorozat $F_\in$ eleme;
- minden $p, q \in F_\in$ és x_i változójel esetén

$$\neg(p), (p) \vee (q), \exists x_i(p) \in F_\in$$

  teljesül.

1.2. Definíció. A logikai jelek felhasználásával a következő logikai műveleteket definiáljuk. Legyen p, q formula és x_i változójel.

- $(p) \wedge (q)$: *p és q*, ha $\neg((\neg(p)) \vee (\neg(q)))$;
- $(p) \to (q)$: *p-ből q következik*, ha $(\neg(p)) \vee (q)$;
- $(p) \leftrightarrow (q)$: *p és q ekvivalensek*, ha $((p) \to (q)) \wedge ((q) \to (p))$;
- $\forall x(p)$: *minden x esetén* p teljesül, ha $\neg(\exists x(\neg(p)))$.

1.3. Definíció. Egy adott formula lehet *igaz* (i), vagy *hamis* (h). Adott p és q formula igaz vagy hamis formula esetén az alábbi *igazságtáblázaban* foglaljuk össze $\neg p$ és $p \vee q$ igaz vagy hamis voltát.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$
i	i	h	i
i	h	h	i
h	i	i	i
h	h	i	h

1.4. Definíció. A p és q formulákat *ekvivalensnek* nevezünk, ha igazságtartalmuk azonos, azaz, ha $p \leftrightarrow q$ igaz, ennek jele $p \equiv q$.

1.5. Definíció. Adott A, B halmaz esetén $A \cup B$ jelöli azt a halmazt, melyre

$$\forall v \;\; (v \in A \cup B \;\leftrightarrow\; (v \in A \;\vee\; v \in B))$$

teljesül, valamint *A és B uniójának* nevezzük.

1.6. Definíció. Adott A, B halmaz esetén $A \cap B$ jelöli azt a halmazt, melyre

$$\forall v \;\; (v \in A \cap B \;\leftrightarrow\; (v \in A \;\wedge\; v \in B))$$

teljesül, valamint *A és B metszetének* nevezzük.

1.7. Definíció. Adott A halmaz esetén $\mathcal{P}(A)$ halmaz jelöli azt a halmazt, melyre

$$\forall v \;\; (v \in \mathcal{P}(A) \;\leftrightarrow\; v \subseteq A)$$

teljesül, valamint az *A hatványhalmazának* nevezzük.

1.8. Definíció. Adott A, B halmaz esetén az $\{x \in A |\ x \notin B\}$ halmazt *A és B különbségének* nevezzük, ennek jele $A \setminus B$.

1.9. Definíció. Adott x, y halmazok esetén az

$$(x, y) \stackrel{\triangle}{=} \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

halmazt *rendezett párnak* nevezzük.

1.10. Definíció. Az A és B halmaz *Descartes-szorzatának* nevezzük az

$$A \times B \triangleq \{(a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

halmazt.

1.11. Definíció. Adott X, Y halmazok esetén a Descartes-szorzatuk tetszőleges részhalmazát *relációnak* nevezzük, azaz R reláció, ha $R \subseteq X \times Y$. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció

– *értelmezési tartománya*

$$\operatorname{Dom} R \triangleq \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x,y) \in R\};$$

– *értékkészlete*

$$\operatorname{Ran} R \triangleq \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x,y) \in R\};$$

– *inverze*

$$\overset{-1}{R} \triangleq \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in R\};$$

– általi *képe a $H \subseteq X$ halmaznak*

$$R(H) \triangleq \{y \in Y \mid \exists x \in H : (x,y) \in R\};$$

– *megszorítása* vagy *leszűkítése* a $H \subseteq X$ halmazra

$$R|_H \triangleq R \cap (H \times Y).$$

Az $R_1 \subseteq X \times Y$ és $R_2 \subseteq Y \times Z$ reláció *kompozíciója*

$$R_2 \circ R_1 \triangleq \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y :\ (x,y) \in R_1 \wedge (y,z) \in R_2\}.$$

1.12. Definíció. Tetszőleges X halmaz esetén

$$\mathrm{id}_X \triangleq \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$$

jelöli az *identitásrelációt.*

1.13. Definíció. Az $R \subseteq X \times Y$ reláció *függvény*, ha

$$\forall x \forall y \forall y' (((x,y) \in R \wedge (x,y') \in R) \to y = y')$$

teljesül.

1.14. Definíció. Az $f : X \twoheadrightarrow Y$ függvény
– *injektív*, ha $\forall x, x' \in X :\ (f(x) = f(x') \to x = x')$;
– *szürjektív*, ha $\operatorname{Ran} f = Y$;
– *bijektív*, ha $\operatorname{Dom} f = X$, injektív és szürjektív.
Az $f : X \to X$ bijekciót az X halmaz *permutációjának* is nevezzük.

1.15. Definíció. Ha f injektív függvény, akkor az $\overset{-1}{f}$ függvényt f^{-1} jelöli és ez az f *függvény inverze.* Amennyiben egy függvénynek létezik inverze, akkor azt mondjuk, hogy a függvény *invertálható.*

1.16. Definíció. Valamilyen X halmaz esetén az $X \times X \to X$ függvényeket gyakran *műveletnek* nevezzük és jelölésükre általában az infix módot használjuk. Vagyis például az $+ : X \times X \to X$ művelet és $x, y \in X$ esetén az $x + y \triangleq +(x,y)$ jelöléssel élünk.
– Azt mondjuk, hogy a $+$ művelet *kommutatív*, ha $\forall x, y \in X : x + y = y + x$.
– A $+$ művelet *asszociatív*, ha $\forall x, y, z \in X : x + (y + z) = (x + y) + z$.

- A $+$ művelet *egységelemes*, ha $\exists e \in X, \forall x \in X : x + e = e + x = x$.
- Azt mondjuk, hogy a $+$ egységelemes művelet *inverzelemes* ha
$$\forall x \in X : \exists x' \in X : x + x' = e \ \wedge \ x' + x = e,$$
ahol e jelöli az egységelemet.
- A $\cdot : X \times X \to X$ művelet *disztributív a $+$ műveletre nézve*, ha $\forall x, y, z \in X$ elemre
$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \quad (y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x).$$

1.17. Definíció. Legyen I és A nem üres halmaz. Az $f : I \to \mathcal{P}(A)$ függvényt *halmazrendszernek* nevezzük, minden $i \in I$ esetén az $A_i \triangleq f(i)$ jelölés használjuk a függvény értékére, valamint az I halmazt *indexhalmaznak* nevezzük. Az f függvényre pedig gyakran az $(A_i)_{i \in I}$ jelölést használjuk.

1.18. Definíció. Legyen $I, A \neq \emptyset$ és $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer. Az $(A_i)_{i \in I}$ *halmazrendszer uniója*
$$\bigcup_{i \in I} A_i \triangleq \{x \in A | \exists i \in I : \ x \in A_i\}$$
és *metszete*
$$\bigcap_{i \in I} A_i \triangleq \{x \in A | \forall i \in I : \ x \in A_i\}.$$

1.19. Definíció. Az $(A_i)_{i \in I}$ *halmazrendszer Descartes-szorzatán* a
$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \ \middle| \ \forall i \in I : \ f(i) \in A_i \right\}$$
halmazt értjük. Adott $f \in \prod_{i \in I} A_i$ és $k \in I$ esetén az $f_k \triangleq f(k)$ jelölést is fogjuk használni.

1.20. Definíció. Legyen $(A_i)_{i \in I}$ halmazrendszer.
- Adott $k \in I$ esetén a
$$\mathrm{pr}_k : \prod_{i \in I} A_i \to A_k \qquad x \mapsto x_k$$
függvényt *a k-adik projekció függvénynek* nevezzük.
- Adott $a \in \prod_{i \in I} A_i$ és $k \in I$ esetén a
$$\mathrm{in}_{a,k} = \left\{ (x, u) \in A_k \times \prod_{i \in I} A_i \ \middle| \ u_k = a, \ \forall i \in I \setminus \{k\} : u_i = a_i \right\}$$
függvényt *a k koordináta a ponthoz tartozó inklúzió függvénynek* nevezzük. Vagyis $a \in \prod_{i \in I} A_i$, $k, i \in I$ és $x \in A_k$ esetén
$$(\mathrm{in}_{a,k}(x))_i = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad i = k; \\ a_k, & \text{ha} \quad i \neq k. \end{cases}$$

1.21. Definíció. Az $R \subseteq X \times X$ reláció *homogén reláció az X halmaz fölött.* Néhány fontos lehetséges tulajdonsága:
- *reflexív*, ha $\forall x \in X((x, x) \in R)$;
- *tranzitív*, ha $\forall x, y, z \in X(((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \to (x, z) \in R)$;
- *szimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X((x, y) \in R \to (y, x) \in R)$;
- *antiszimmetrikus*, ha $\forall x, y \in X(((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \to x = y)$.

1.22. Definíció. A reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív relációkat a *rendezéseknek* nevezzük. Ha $\leq$ rendezés az A halmaz felett, akkor az $(A, \leq)$ pár neve: *rendezett halmaz.*

1.23. Definíció. Legyen $(A, \leq)$ rendezett halmaz.

- Az $X \subseteq A$ halmaz *felső* (illetve *alsó*) *korlátjának* nevezünk minden olyan $x \in A$ elemet, amelyre $\forall x' \in X$ $x' \leq x$ $(x \leq x')$ teljesül.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *felülről* (illetve *alulról*) korlátos, ha létezik az X halmaznak felső (illetve alsó) korlátja. Az $X \subseteq A$ halmaz *korlátos*, ha X felülről és alulról is korlátos.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *legnagyobb* (illetve *legkisebb*) elemének nevezzük X minden olyan elemét, amely felső (illetve alsó) korlátja az X halmaznak.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *szuprémuma* (illetve *infimuma*) az X halmaz legkisebb (illetve legnagyobb) felső (illetve alsó) korlátja; jele: $\sup X$, illetve $\inf X$.
- Az $X \subseteq A$ halmaz *maximális* (illetve *minimális*) elemének nevezünk minden olyan $x \in X$ elemet, amelyre teljesül az, hogy X-nek nem létezik x-nél nagyobb (illetve kisebb) eleme.

1.24. Definíció. Az $(A, \leq)$ pár *lineárisan rendezett halmaz*, ha olyan $(A, \leq)$ rendezett halmaz, hogy A bármely két eleme összehasonlítható a $\leq$ rendezés szerint, azaz $\forall x, y \in A : (x \leq y \vee y \leq x)$ teljesül.

1.25. Definíció. Legyen $(A, \leq)$ rendezett halmaz. Az $(A, \leq)$ párt *jólrendezett halmaznak*, magát a $\leq$ relációt pedig jólrendezésnek nevezzük, ha A minden nem üres részhalmazának létezik legkisebb eleme.

1.26. Definíció. Ha $(A, \leq)$ rendezett halmaz, akkor $x, y \in A$ esetén definiáljuk az alábbi halmazokat.

$$
\begin{aligned}
[x, y] &= \{z \in A | \ x \leq z \leq y\} \\
[x, y[&= \{z \in A | \ x \leq z < y\} \\
]x, y] &= \{z \in A | \ x < z \leq y\} \\
]x, y[&= \{z \in A | \ x < z < y\}
\end{aligned}
$$

A fenti módon meghatározott halmazokat *intervallumoknak* nevezzük.

1.27. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(A, \leq)$ rendezett halmaz *induktívan rendezett halmaz*, ha minden olyan részhalmaza felülről korlátos, melynek bármely két eleme összehasonlítható.

1.28. Definíció. A reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációkat *ekvivalenciarelációknak* nevezzük.

1.29. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz és legyen $\approx$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Az $X \subseteq A$ halmazt *ekvivalenciaosztálynak* nevezzük, ha

- $X \neq \emptyset$;
- $\forall x, y \in X : x \approx y$;
- $\forall x \in X, \forall y \in A : (x \approx y \rightarrow y \in X)$.

1.30. Definíció. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Az A halmaz *felső* (illetve *alsó*) *korlátjának* nevezünk minden olyan $C \in \mathbb{R}$ elemet, amelyre $\forall a \in A$ $a \leq C$ $(C \leq a)$ teljesül.
- Az A halmaz *felülről* (illetve *alulról*) korlátos, ha létezik az A halmaznak felső (illetve alsó) korlátja. Az A halmaz *korlátos*, ha A felülről és alulról is korlátos.
- Az A halmaz *legnagyobb* (illetve *legkisebb*) elemének nevezzük A minden olyan elemét, amely felső (illetve alsó) korlátja az A halmaznak.
- Az A halmaz *szuprémuma* (illetve *infimuma*) az A halmaz legkisebb (illetve legnagyobb) felső (illetve alsó) korlátja; jele: $\sup A$ (illetve $\inf A$).

1.31. Definíció. Jelöljön ∞ és $-\infty$ két olyan halmazt, melyre $\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$ teljesül. Ekkor az $\overline{\mathbb{R}} \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ halmazt *bővített valós számoknak* nevezzük, a ∞ elemet *végtelennek*, a $-\infty$ elemet pedig *mínusz végtelennek* mondjuk. A valós számok halmazán értelmezett $\leq$ reláció bővítése

$$\overline{\leq} \stackrel{\triangle}{=} \leq \cup (\mathbb{R} \times \{\infty\}) \cup (\{-\infty\} \times \mathbb{R}) \cup \{(-\infty, -\infty)\} \cup \{(-\infty, \infty)\} \cup \{(\infty, \infty)\}.$$

A $+$ és $\cdot$ művelet az alábbi módon bővítjük.

- Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a + \infty \triangleq \infty + a \triangleq \infty$, továbbá legyen $\infty + \infty \triangleq \infty$.
- Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a + (-\infty) \triangleq (-\infty) + a \triangleq -\infty$, továbbá legyen $-\infty + (-\infty) \triangleq -\infty$.
- Minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén legyen

$$a \cdot \infty \triangleq \infty \cdot a \triangleq \begin{cases} \infty & \text{ha} \quad a > 0, \\ -\infty & \text{ha} \quad a < 0, \end{cases}$$

továbbá legyen $\infty \cdot \infty \triangleq (-\infty) \cdot (-\infty) \triangleq \infty$ és $(-\infty) \cdot \infty \triangleq \infty \cdot (-\infty) \triangleq -\infty$.

1.32. Definíció. A valós számok halmazán definiáljuk még az $x \in \mathbb{R}$ elem által meghatározott alábbi halmazokat.

$$\begin{aligned} [x, \infty[&= \{z \in \mathbb{R} |\ x \leq z\} \\ ]x, \infty[&= \{z \in \mathbb{R} |\ x < z\} \\ ]-\infty, x] &= \{z \in \mathbb{R} |\ z \leq x\} \\ ]-\infty, x[&= \{z \in \mathbb{R} |\ z < x\} \end{aligned}$$

Továbbá bevezetjük még az

$$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$$

jelölést. Ezen halmazokat is *intervallumoknak* nevezzük.

1.33. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ teljesen rendezett testről azt mondjuk, hogy *arkhimédészi módon rendezett*, ha $\forall x, y \in K$ elemhez $x > 0$ esetén $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $y < n \cdot x$ teljesül.

1.34. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az

$$[x] \triangleq \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{Z} |\ x < n\} - 1, & \text{ha} \quad x \notin \mathbb{Z}; \\ x, & \text{ha} \quad x \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

számot az x *egész részének* a

$$\{x\} \triangleq x - [x]$$

számot pedig az x *tört részének* nevezzük.

1.35. Definíció. Legyen A és B halmaz.
- Az A és B *ekvipotens*, ha létezik $f : A \to B$ bijekció. Ezt a tényt $|A| = |B|$ jelöli.
- Az A halmaz *kisebb-egyenlő számosságú* a B halmaznál, ha $\exists X \subseteq B : \ |A| = |X|$. Ebben az esetben az $|A| \leq |B|$ jelölést használjuk.
- Az A halmaz *kisebb számosságú* a B halmaznál, ha $|A| \leq |B|$ és $|A| \neq |B|$. Ennek jele $|A| < |B|$.
- Az A és B halmaz *számosság tekintetében összehasonlítható*, ha $(|A| \leq |B|) \vee (|B| \leq |A|)$ teljesül.

1.36. Definíció. Legyen A tetszőleges halmaz.
- Az A halmaz *véges*, ha $\exists n \in \mathbb{N}$, melyre $|A| = |n|$ teljesül, ekkor az mondjuk, hogy A *egy n elemű halmaz* és az $|A| = n$ jelölést használjuk.
- Az A halmaz *végtelen*, ha nem véges.
- Az A halmaz *megszámlálható*, ha véges vagy $|A| = |\mathbb{N}|$.
- Az A halmaz *megszámlálhatóan végtelen*, ha $|A| = |\mathbb{N}|$.
- Az A halmaz *kontinuum számosságú*, ha $|A| = |\mathbb{R}|$.

2. A valós és komplex számok alaptulajdonságai

2.1. Definíció. Adott $x \in \mathbb{R}_0^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén azt a jól meghatározott $y \in \mathbb{R}_0^+$ számot, melyre $y^n = x$ teljesül x *n-edik gyökének* nevezzük, ennek jele $x^{\frac{1}{n}}$ vagy $\sqrt[n]{x}$.

2.2. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}^+$ *számnak a* $q \in \mathbb{Q}$ *kitevőjő hatványát* az alábbi módon értelmezzük.

$$x^q \triangleq \begin{cases} \sqrt[n]{x^m}, & \text{ha} \quad q > 0,\ q = \frac{m}{n}; \quad (m, n \in \mathbb{N}) \\ 1, & \text{ha} \quad q = 0; \\ \sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^m}, & \text{ha} \quad q < 0,\ q = -\frac{m}{n} \quad (m, n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Továbbá $q > 0$ esetén legyen $0^q \triangleq 0$ és $0^0 \triangleq 1$.

2.3. Definíció. Az $n \in \mathbb{N}$ szám *faktoriálisa*

$$n! \triangleq \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad n = 0, \\ \prod_{i=1}^{n} i, & \text{ha} \quad n > 0. \end{cases}$$

Az $n, k \in \mathbb{N}$ számokra definiáljuk az n *alatt a* k számot a

$$\binom{n}{k} \triangleq \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{ha} \quad k \leq n \\ 0 & \text{ha} \quad k > n \end{cases}$$

képlettel.

2.4. Definíció. A $(K, +, \cdot, 0, 1)$ test feletti *abszolút értéknek* nevezünk minden olyan

$$|\cdot| : K \to \mathbb{R}_0^+ \quad x \mapsto |x|$$

függvényt melyre az alábbiak teljesülnek.

- $\forall x \in K : \ (|x| = 0 \leftrightarrow x = 0)$
- $\forall x, y \in K : \ |xy| = |x| \cdot |y|$
- $\forall x, y \in K : \ |x + y| \leq |x| + |y|$

2.5. Definíció. Legyen A halmaz, $+ : A \times A \to A$ művelet, $a \in A$ és $U, V \subseteq A$. Ekkor definiáljuk az alábbi jelöléseket.

$$\begin{aligned} U + V &:= \{u + v \in A |\ u \in U,\ v \in V\} \\ a + V &:= \{a + v \in A |\ v \in V\} \\ U + a &:= \{u + a \in A |\ u \in U\} \end{aligned}$$

Ennek a segítségével értelmezhetők az alábbi *komplexus műveletek*.

$$\begin{array}{ll} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) & (U, V) \mapsto U + V \\ \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) & V \mapsto a + V \\ \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) & U \mapsto U + a \end{array}$$

2.6. Definíció. Legyen A tetszőleges nem üres halmaz.

– Ha $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor definiáljuk a *függvények összegét*, *szozatát*, *számszorosát* és *abszolút értékét* az alábbi módon.

$$\begin{array}{rl} f + g : A \to \mathbb{R} & a \mapsto f(a) + g(a) \\ fg : A \to \mathbb{R} & a \mapsto f(a)g(a) \\ cf : A \to \mathbb{R} & a \mapsto cf(a) \\ |f| : A \to \mathbb{R} & a \mapsto |f(a)| \end{array}$$

– értelmezzük az összeadás, szorzás, számmal való szorzás és abszolútérték képzés műveletét a függvények terén az alábbi módon.

$$\begin{aligned}
+ &: \mathcal{F}(A,\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(A,\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(A,\mathbb{R}) && (f,g) \mapsto f+g \\
\times &: \mathcal{F}(A,\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(A,\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(A,\mathbb{R}) && (f,g) \mapsto fg \\
\cdot &: \mathbb{R} \times \mathcal{F}(A,\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(A,\mathbb{R}) && (c,f) \mapsto cf \\
|\cdot| &: \mathcal{F}(A,\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(A,\mathbb{R}) && (f) \mapsto |f|
\end{aligned}$$

Az így bevezetett függvényműveleteket nevezzük *pontonkénti függvényműveleteknek.*

– Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és minden $i \in \{1,\ldots,n\}$ esetén legyen $f_i \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$. Ekkor az $(f_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ *függvényrendszer alsó*, illetve *felső burkolóját* az alábbi képlettel definiáljuk.

$$\begin{aligned}
\sup(f_1,\ldots,f_n) &: A \to \mathbb{R} && a \mapsto \sup(f_1(a),\ldots,f_n(a)) \\
\inf(f_1,\ldots,f_n) &: A \to \mathbb{R} && a \mapsto \inf(f_1(a),\ldots,f_n(a))
\end{aligned}$$

– Az $f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ *függvény pozitív*, illetve *negatív részét* az alábbi képletek definiálják.

$$\begin{aligned}
f_+ &: A \to \mathbb{R} && a \mapsto \sup(f(a),0) \\
f_- &: A \to \mathbb{R} && a \mapsto -\inf(f(a),0)
\end{aligned}$$

2.7. Definíció. Adott $(a_i)_{i=0,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ esetén a

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

függvényt *polinomnak* nevezzük, az a_i paramétereket pedig a polinom *együtthatóinak.* Ha $a_n \neq 0$, akkor p *n-ed fokú polinom*, melynek *főegyütthatója* a_n. Az $x_0 \in \mathbb{R}$ számot a *p polinom gyökének* nevezzük, ha $p(x_0) = 0$ teljesül.

3. Topológiai tulajdonságok

3.1. Definíció. Minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra és $x \in \mathbb{R}$ pontra a

$$B_r(x) \triangleq \{y \in \mathbb{R} | \ |x-y| < r\}$$

halmazt az *x pont körüli r sugarú nyílt gömbi környezetnek* nevezzük.

3.2. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz
– *nyílt*, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül;
– *zárt*, ha $\mathbb{R} \setminus X$ nyílt;
– *korlátos*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{R}$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

3.3. Definíció. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy x
– *belső pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \subseteq X$;
– *határpontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X \neq \emptyset \ \wedge \ B_r(x) \cap (\mathbb{R} \setminus X) \neq \emptyset$;
– *torlódási pontja az X halmaznak*, ha $\forall r \in \mathbb{R}^+ : \ (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap X \neq \emptyset$;
– *izolált pontja az X halmaznak*, ha $\exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \cap X = \{x\}$.

3.4. Definíció. Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$ és $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *környezete* az x pontnak, ha x belső pontja az X halmaznak.

3.5. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *belsejének* nevezzük az

$$\operatorname{Int} X = \{x \in \mathbb{R} | \ \exists r \in \mathbb{R}^+ : \ B_r(x) \subseteq X\}$$

halmazt, azaz a belső pontok halmazát; *lezártjának* pedig az

$$\overline{X} = \{x \in \mathbb{R} |\ \forall r \in \mathbb{R}^+ :\ B_r(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

halmazt. Az X halmaz *határának* nevezzük a

$$\mathrm{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \mathrm{Int}\, X$$

halmazt.

3.6. Definíció. Adott $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ halmazok esetén azt mondjuk, hogy az X *halmaz sűrű az Y halmazban*, ha $\overline{X} = Y$ teljesül, valamint, hogy az X *halmaz sűrű*, ha X sűrű a $\mathbb{R}$ halmazban.

3.7. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz (*be*)*fedésének* nevezünk minden olyan $(A_i)_{i\in I}$ halmazrendszert, melyre $\forall i \in I : A_i \subseteq \mathbb{R}$ és $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ teljesül. Az $(A_i)_{i\in I}$ befedés *részbefedésének* nevezünk minden olyan $(A_i)_{i\in I'}$ rendszert, melyre $I' \subseteq I$ és $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I'} A_i$ teljesül.

3.8. Definíció. Az $X \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *kompakt*, ha minden nyílt halmazokból álló befedésének létezik véges részbefedése. Azaz, ha minden $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ esetén létezik olyan véges $I' \subseteq I$ halmaz, melyre $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I'} A_i$ teljesül, ahol minden $i \in I$ esetén az A_i halmaz nyílt.

4. Sorozatok

4.1. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényeket *valós számsorozatoknak*, az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ függvényeket *komplex számsorozatoknak* nevezzük. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat értékeire az $a_n \triangleq a(n)$ jelölést használjuk.

4.2. Definíció. (*Sorozatok határértéke.*)

- Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathbb{R}$ szám az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *határértéke*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n > N \to a_n \in B_\varepsilon(x)).$$

- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *határértéke végtelen*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n > N \to \varepsilon < a_n).$$

- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *határértéke mínusz végtelen*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(n > N \to -\varepsilon > a_n).$$

- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *konvergens*, ha létezik véges határértéke.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *divergens*, ha nem konvergens.

4.3. Definíció. (*A* lim *művelet.*)

- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértékét $\lim a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ jelöli.
- Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke végtelen, a $\lim a = \infty$ vagy a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ jelölés fejezi ki.
- Azt a tényt, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke mínusz végtelen, a $\lim a = -\infty$ vagy a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ jelölés fejezi ki.

4.4. Definíció.

- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *korlátos*, ha $\mathrm{Ran}\, a$ korlátos halmaz.

- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *zérussorozat*, ha $\lim a = 0$.
- Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan függvény, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sigma(n) < \sigma(n+1)$ teljesül (az ilyen σ függvény neve *indexsorozat*), és legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $a \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatot az *a sorozat részsorozatának* nevezzük.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat monoton növő*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq a_{n+1}$.
- Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat monoton fogyó*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq a_{n+1}$.

4.5. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *limesz inferiorja*

$$\liminf a \triangleq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \in \mathbb{N},\ k \geq n} a_k \right)$$

és *limesz szuperiorja*

$$\limsup a \triangleq \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \in \mathbb{N},\ k \geq n} a_k \right).$$

4.6. Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}((N < n \ \wedge \ N < m) \to |a_n - a_m| < \varepsilon).$$

5. Sorok

5.1. Definíció. (*Sorok.*)

- Adott $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat esetén, azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatot, melyet minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ definiál, az *a sorozathoz rendelt sornak* vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ jelölést használjuk.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
- Ha $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \pm\infty$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$ jelölést használjuk megfelelő előjellel.

5.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum |a|$ sor konvergens.

5.3. Definíció. A $\sum_n (-1)^n a_n$ sor *Leibniz-típusú* vagy *Leibniz-sor*, ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton csökkenő zérussorozat.

5.4. Definíció. Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat.

- A $\sum a$ sor *átrendezésének* nevezzük a $\sum a \circ \sigma$ sort, ahol $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekció. Tehát az átrendezett sor n-edik tagja $\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *feltétlen konvergens*, ha minden átrendezése konvergens.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *feltételesen konvergens*, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

5.5. Definíció. Az a és $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *konvolúciójának* nevezzük az

$$a * b : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad n \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

sorozatot.

5.6. Definíció. A $\sum a$ és $\sum b$ sor *Cauchy-szorzatának* nevezzük az $a * b$ sorozat által meghatározott $\sum a * b$ sort.

5.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat

- *korlátos változású*, ha a
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$$
teljesül;
- *korlátos részletösszegű*, ha a
$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| < \infty$$
teljesül.

5.8. Definíció. (*Elemi hatványsorok.*)

- Legyen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt a
$$\operatorname{Dom} P_a \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \text{a } \sum_n a_n x^n \text{ sor konvergens} \right\}$$
halmazon, az alábbi módon.
$$P_a : \operatorname{Dom} P_a \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
A P_a függvényt az a *együtthatójú* 0 *középpontú hatványsornak* nevezzük.
- Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.
$$R_a \triangleq \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, & \text{ha } 0 < \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty; \\ 0, & \text{ha } \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha } \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \end{cases}$$
Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

5.9. Definíció. (*Elemi függvények.*)

- Az *exponenciális függvény*
$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$
- A *szinusz függvény*
$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
- A *koszinusz függvény*
$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

– A *tangens függvény*

$$\mathrm{tg}:\{z\in\mathbb{C}|\ \cos z\neq 0\}\to\mathbb{C}\quad z\mapsto\frac{\sin z}{\cos z}.$$

– A *kotangens függvény*

$$\mathrm{ctg}:\{z\in\mathbb{C}|\ \cos z\sin z\neq 0\ \}\to\mathbb{C}\quad z\mapsto\frac{1}{\mathrm{tg}\,z}.$$

– A *szinusz hiperbolikus függvény*

$$\mathrm{sh}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\quad z\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

– A *koszinusz hiperbolikus függvény*

$$\mathrm{ch}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\quad z\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

– A *tangens hiperbolikus függvény*

$$\mathrm{th}:\{z\in\mathbb{C}|\ \mathrm{ch}\,z\neq 0\}\to\mathbb{C}\quad z\mapsto\frac{\mathrm{sh}\,z}{\mathrm{ch}\,z}.$$

– A *kotangens hiperbolikus függvény*

$$\mathrm{cth}:\{z\in\mathbb{C}|\ \mathrm{ch}\,z\,\mathrm{sh}\,z\neq 0\ \}\to\mathbb{C}\quad z\mapsto\frac{1}{\mathrm{th}\,z}.$$

5.10. Definíció. Az $\exp|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *természetes alapú logaritmusfüggvénynek* nevezzük, jele log vagy ln. Tehát $\mathrm{Dom}\log=\mathrm{Ran}(\exp|_{\mathbb{R}})$ és minden $x\in\mathrm{Dom}\log$ számra $\exp(\log x)=x$.

5.11. Definíció. Legyen $x\in\mathrm{Dom}\log$ és $z\in\mathbb{C}$. A

$$x^z\triangleq\exp(z\log(x))$$

számot *az x szám z-edik hatványának* nevezzük.

5.12. Definíció. Az $\exp(1)$ számot a *természetes alapú logaritmus alapszámának* nevezzük és az e betűvel jelöljük, vagyis $\mathrm{e}\triangleq\exp(1)$. (értéke megközelítőleg $\mathrm{e}\approx 2,71828182845904523536$.)

6. Valós függvények elemi vizsgálata

6.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f:\mathbb{R}\twoheadrightarrow\mathbb{R}$ függvény
– *páros*, ha minden $x\in\mathrm{Dom}\,f$ elemre $-x\in\mathrm{Dom}\,f$ és $f(x)=f(-x)$;
– *páratlan*, ha minden $x\in\mathrm{Dom}\,f$ elemre $-x\in\mathrm{Dom}\,f$ és $f(x)=-f(-x)$;
– *monoton növő*, ha minden $x,y\in\mathrm{Dom}\,f$ elemre $x\leq y$ esetén $f(x)\leq f(y)$;
– *monoton fogyó*, ha minden $x,y\in\mathrm{Dom}\,f$ elemre $x\leq y$ esetén $f(x)\geq f(y)$;
– *monoton*, ha monoton növő, vagy monoton fogyó;
– *szigorúan monoton növő*, ha minden $x,y\in\mathrm{Dom}\,f$ elemre $x<y$ esetén $f(x)<f(y)$;
– *szigorúan monoton fogyó*, ha minden $x,y\in\mathrm{Dom}\,f$ elemre $x<y$ esetén $f(x)>f(y)$;
– *szigorúan monoton*, ha szigorúan monoton növő, vagy szigorúan monoton fogyó;
– *konvex az $I\subseteq\mathrm{Dom}\,f$ intervallumon*, ha minden $x,y\in I$ elemre minden $a\in[0,1]$ esetén

$$f(ax+(1-a)y)\leq af(x)+(1-a)f(y)$$

teljesül;

– *konkáv az $I \subseteq \operatorname{Dom} f$ intervallumon*, ha minden $x, y \in I$ elemre minden $a \in [0,1]$ esetén

$$f(ax + (1-a)y) \geq af(x) + (1-a)f(y)$$

teljesül;

– *periodikus*, ha f nem konstans függvény és ha létezik $p \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \operatorname{Dom} f$ esetén $x + p \in \operatorname{Dom} f$ és $f(x) = f(x+p)$, amennyiben a legkisebb ilyen tulajdonságú p szám nagyobb mint nulla, azt az *f függvény periódusának* nevezzük;

– *zérushelye* vagy *gyöke* $x \in \operatorname{Dom} f$, ha $f(x) = 0$.

6.2. Definíció. Legyen az $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény $\operatorname{Dom} f$ értelmezési tartományának a torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban* $A \in \mathbb{R}$, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq B_\varepsilon(A)\big).$$

6.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen a torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak.

– Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban végtelen*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subseteq [\varepsilon, \infty[\big).$$

– Azt mondjuk, hogy az *f függvény határértéke az a pontban mínusz végtelen*, ha $-f$ határértéke az a pontban végtelen.

6.4. Definíció. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a *végtelen torlódási pontja*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in A \ (\varepsilon < x).$$

Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak a *mínusz végtelen torlódási pontja*, ha a $-A$ halmaznak torlódási pontja a végtelen.

6.5. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak a végtelen torlódási pontja. Az *f függvény határértéke a végtelenben*,

– $A \in \mathbb{R}$, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f([\delta, \infty[) \subseteq B_\varepsilon(A)\big).$$

– *végtelen*, ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \big(f([\delta, \infty[) \subseteq [\varepsilon, \infty[\big).$$

– *mínusz végtelen*, ha $-f$ határértéke a végtelenben végtelen.

A mínusz végtelenben vett határértéket, mint az $x \mapsto f(-x)$ függvény végtelenben vett határértékét definiáljuk.

6.6. Definíció. (*A* lim *művelet.*)

– Legyen $f : \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ és legyen $a \in \mathbb{C}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vagy $\lim\limits_{a} f$ jelöli.

– Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ és legyen $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ a $\operatorname{Dom} f$ halmaz torlódási pontja. Az f függvény határértékét az a pontban $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vagy $\lim\limits_{a} f$ jelöli.

6.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ függvény és $a \in \mathbb{R}$.

– Ha a torlódási pontja az $]a, \infty[\cap \operatorname{Dom} f$ halmaznak és az $f|_{]a,\infty[}$ függvénynek létezik

$$\lim_{a} f|_{]a,\infty[} = A$$

határértéke az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy *az f függvény jobb oldali határértéke az a pontban* A és az A határértéket a $\lim\limits_{a+} f$ vagy a $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ szimbólummal jelöljük.

– Ha a torlódási pontja a $]-\infty,a[\,\cap\operatorname{Dom} f$ halmaznak és az $f|_{]-\infty,a[}$ függvénynek létezik

$$\lim_a f|_{]-\infty,a[} = A$$

határértéke az a pontban, akkor azt mondjuk, hogy *az f függvény bal oldali határértéke az a pontban A* és az A határértéket a $\lim\limits_{a-} f$ vagy a $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ szimbólummal jelöljük.

6.8. Definíció. Legyen $f:\mathbb{R}\twoheadrightarrow\mathbb{R}$ és $a\in\operatorname{Dom} f$.

– Az *f függvény folytonos az a pontban*, ha

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+\Big(f(B_\delta(a))\subseteq B_\varepsilon(f(a))\Big).$$

– Az *f függvény folytonos*, ha minden $a\in\operatorname{Dom} f$ pontban folytonos.

Legyen $A\subseteq\mathbb{R}$. Az A halmazon értelmezett folytonos függvények halmazára a

$$C(A,\mathbb{R})\triangleq\{f:A\to\mathbb{R}|\ f \text{ folytonos}\}$$

jelölést használjuk.

6.9. Definíció. Legyen $f:\mathbb{R}\twoheadrightarrow\mathbb{R}$ és $a\in\operatorname{Dom} f$.

– Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek az a pontban szakadása van*, ha a függvény nem folytonos az a pontban.

– Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek az a pontban elsőfajú szakadása van*, ha létezik $\lim\limits_{a\pm} f$, de $\lim\limits_{a-} f\neq f(a)$ vagy $\lim\limits_{a+} f\neq f(a)$.

– Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek az a pontban megszüntethető szakadása van*, ha létezik $\lim\limits_{a\pm} f$ és $\lim\limits_{a-} f=\lim\limits_{a+} f\neq f(a)$.

– Azt mondjuk, hogy az *f függvénynek az a pontban másodfajú szakadása van*, f nem folytonos az a pontban és nincs elsőfajú szakadása az a pontban.

6.10. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f:\mathbb{R}\twoheadrightarrow\mathbb{R}$ függvény *egyenletesen folytonos az A halmazon*, ha $A\subseteq\operatorname{Dom} f$ és

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+\exists\delta\in\mathbb{R}^+\forall x,y\in A:\quad\big(|x-y|<\delta\ \to\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon\big)$$

teljesül. Az f függvény *egyenletesen folytonos*, ha egyenletesen folytonos a $\operatorname{Dom} f$ halmazon.

6.11. Definíció. Legyen $x\in\,]0,\sqrt{3}[$ az a szám, melyre $\cos x=0$ teljesül, ekkor a $\pi\triangleq 2x$ számot *Ludolf-féle számnak* vagy *pi-nek* nevezzük és a görög π (pi) betűvel jelöljük.
(értéke megközelítőleg $\pi\approx 3.1415926535897932385$.)

6.12. Definíció. *Elemi függvények inverzei.*

1. A $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ függvény inverzét *arkusz szinusz függvénynek* nevezzük, jele arcsin, vagyis

$$\arcsin\triangleq\left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}.$$

2. A $\cos|_{[0,\pi]}$ függvény inverzét *arkusz koszinusz függvénynek* nevezzük, jele arccos, vagyis

$$\arccos\triangleq\left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}.$$

3. A $\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ függvény inverzét *arkusz tangens függvénynek* nevezzük, jele arctg, vagyis

$$\operatorname{arctg}\triangleq\left(\operatorname{tg}|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\right)^{-1}.$$

6.13. Definíció. *Hiperbolikus függvények inverzei.*

– Az $\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *area szinusz hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arsh, vagyis

$$\operatorname{arsh} \triangleq (\operatorname{sh}|_{\mathbb{R}})^{-1}.$$

– A $\operatorname{ch}|_{[0,\infty[}$ függvény inverzét *area koszinusz hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arch, vagyis

$$\operatorname{arch} \triangleq \left(\operatorname{ch}|_{[0,\infty[}\right)^{-1}.$$

– A $\operatorname{th}|_{\mathbb{R}}$ függvény inverzét *area tangens hiperbolikus függvénynek* nevezzük, jele arth, vagyis

$$\operatorname{arth} \triangleq (\operatorname{th}|_{\mathbb{R}})^{-1}.$$

7. Differenciálszámítás egy dimenzióban

7.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$.

– Azt mondjuk, hogy az f *függvény differenciálható*, vagy *deriválható az* a *pontban* ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$, melyre
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A$$
teljesül. Ezt az A számot az f *függvény a pontbeli differenciáljának* vagy *deriváltjának* nevezzük.

– Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük a
$$f' : \left\{ a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f \,\middle|\, \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right\} \to \mathbb{R} \qquad a \mapsto \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
függvényt.

– Az f *differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} f'$.

– Az f *folytonosan differenciálható*, ha differenciálható és f' folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett, $\mathbb{R}$ értékű, folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^1(A, \mathbb{R})$ jelöli.

7.2. Definíció. Legyen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : I \to J$ függvény *diffeomorfizmus*, ha bijekció, differenciálható és az inverze is differenciálható.

7.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény és tegyük fel, hogy a végtelen torlódási pontja a $\operatorname{Dom} f$ halmaznak és léteznek az alábbi határértékek.

$$a \triangleq \lim_{\infty} f' \qquad b \triangleq \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)$$

Ekkor az $x \mapsto ax + b$ függvényt az f *függvény végtelenben vett aszimptotájának* nevezzük.
Hasonlóan definiálható a mínusz végtelenben vett aszimptota.

7.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és teljes indukcióval értelmezzük a következő függvényeket. Legyen $f^{(0)} \triangleq f$ és minden $i \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $f^{(i)} \triangleq (f^{(i-1)})'$.

– Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \mathbb{R}$. Az f *függvény* n*-szer differenciálható az* a *pontban*, ha $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$.

– Az f *függvény végtelenszer differenciálható az* $a \in \mathbb{R}$ *pontban*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$ teljesül.

– Az f *függvény* n*-szer* $(n \in \mathbb{N}^+)$ *differenciálható*, ha $\operatorname{Dom} f^{(n)} = \operatorname{Dom} f$.

– Az f *függvény végtelenszer differenciálható*, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\operatorname{Dom} f^{(n)} = \operatorname{Dom} f$ teljesül. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű végtelenszer differenciálható függvények halmazát $C^\infty(A, \mathbb{R})$ jelöli.

– Az f *függvény* n*-szer* $(n \in \mathbb{N}^+)$ *folytonosan differenciálható*, ha f n-szer differenciálható és $f^{(n)}$ folytonos. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}$ értékű n-szer $(n \in \mathbb{N}^+)$ folytonosan differenciálható függvények halmazát $C^n(A, \mathbb{R})$ jelöli.

7.5. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $[a,b] \subseteq \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f$. Tegyük fel, hogy az f függvény n-szer folytonosan differenciálható az $[a,b]$ halmazon és $(n+1)$-szer differenciálható az $]a,b[$ intervallumon.

– Ekkor a Taylor-formula alapján létezik olyan $\xi \in]a,b[$, melyre

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

teljesül, amiből a $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$ kifejezést *Lagrange-féle maradéktagnak* nevezzük.

– Ekkor a Taylor-formula alapján létezik olyan $\xi \in]a,b[$, melyre

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n(b-a)$$

teljesül, amiből a $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n(b-a)$ kifejezést *Cauchy-féle maradéktagnak* nevezzük.

7.6. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \operatorname{Dom} f^{(n)}$. Az *$f$ függvény a pontbeli n-ed fokú Taylor-polinomjának* nevezzük a

$$T^f_{n,a}(x) \triangleq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

polinomot. Ha $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ és $a \in \operatorname{Dom} f$, akkor az *$f$ függvény a pontbeli Taylor-sorának* nevezzük a

$$T^f_a(x) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

hatványsort.

7.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{Int}\operatorname{Dom} f'$. Az *$f$ függvény a pontbeli érintőjének* nevezzük a $T^f_{1,a}$ polinomot, vagyis az érintő egyenlete

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

7.8. Definíció. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $a \in \operatorname{Int}(\operatorname{Dom} f^{(n)} \cap \operatorname{Dom} g^{(n)})$. Azt mondjuk, hogy az *$f$ és g függvények az a pontban n-ed rendben érintkeznek*, ha minden $n \geq k \in \mathbb{N}$ esetén $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$ teljesül.

7.9. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathbb{R}$.

– Az *f függvénynek lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \geq f(x)$.
– Az *f függvénynek lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) \leq f(x)$.
– Az *f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha lokális maximuma vagy lokális minimuma van az a pontban.
– Az *f függvénynek szigorú lokális maximuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) > f(x)$.
– Az *f függvénynek szigorú lokális minimuma van az a pontban*, ha létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $a \neq x \in B_r(a) \cap \operatorname{Dom} f$ esetén $f(a) < f(x)$. *f függvénynek szigorú lokális szélsőértéke van az a pontban*, ha szigorú lokális maximuma vagy szigorú lokális minimuma van az a pontban.

7.10. Definíció. Legyen $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$, ekkor

$$\binom{z}{n} \triangleq \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad n = 0, \\ \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-k}{k+1} & \text{ha} \quad n \neq 0. \end{cases}$$

8. Határozatlan integrál

8.1. Definíció. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$. A differenciálható $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt az f *primitív függvényének* nevezzük, ha $F' = f$ teljesül. Az f *függvény határozatlan integráljának* nevezzük az

$$\{F : I \to \mathbb{R} |\ F' = f\}$$

halmazt, melyre az $\int f$ vagy $\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$ szimbólumot használjuk. Az integrál jel után álló függvényt gyakran *integrandusnak* nevezzük.

9. Határozott integrál

9.1. Definíció. Az $\mathbb{R}$ korlátos intervallumainak a halmazát jelölje

$$\mathfrak{I}_0 \triangleq \bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{R}\\ a\leq b}} \{[a,b]\,, [a,b[,]a,b],]a,b[\},$$

és az $\mathfrak{I}_0$ halmazban szereplő intervallumok *hossza* legyen

$$\mu_0 : \mathfrak{I}_0 \to \mathbb{R}^+ \qquad [a,b]\,, [a,b[,]a,b],]a,b[\mapsto b-a.$$

9.2. Definíció. Az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz *Lebesgue nulla mértékű*, vagy rövidebben *nulla mértékű*, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\mathfrak{I}_0$-ban haladó $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer, hogy

$$A \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \mu_0(A_i) < \varepsilon.$$

9.3. Definíció. A

$$C \triangleq [0,1] \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=0}^{3^m-1} \left]\frac{3k+1}{3^{m+1}}, \frac{3k+2}{3^{m+1}}\right[$$

halmazt *Cantor-halmaznak* nevezzük.

9.4. Definíció. Legyen minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $p(x)$ egy-egy igaz vagy hamis formula. Azt mondjuk, hogy *majdnem mindenütt* $p(x)$, ha az $\{x \in \mathbb{R} |\ p(x) \text{ hamis}\}$ halmaz nulla mértékű. Ezt úgy rövidítjük, hogy m.m. p.

9.5. Definíció. Az $[a,b]$ korlátos intervallum *felosztásán* egy olyan $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ szám n-est értünk melyre $x_0 = a$, $x_n = b$ és minden $0 \leq i \leq n-1$ esetén $x_i < x_{i+1}$ teljesül. Az $[a,b]$ intervallum felosztásainak a halmazát $\mathcal{F}^{[a,b]}$ jelöli, azaz

$$\mathcal{F}^{[a,b]} = \left\{ x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{F}(n,[a,b]) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ x_0 = a,\ x_{n-1} = b,\ \forall i \in (n-1):\ x_i < x_{i+1} \right\}.$$

Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás *finomabb*, mint az $y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztás, ha $\operatorname{Ran} y \subseteq \operatorname{Ran} x$, melyet az $y \leq x$ szimbólummal jelölünk.

9.6. Definíció. Legyen $x = (x_i)_{i=0,\ldots,n}$ és $y = (y_i)_{i=0,\ldots,m}$ az $[a,b]$ korlátos intervallum egy-egy felosztása. Legyen

$$L = \{x_i |\ 0 \leq i \leq n\} \cup \{y_i |\ 0 \leq i \leq m\}\,, \qquad k = |L| - 1,$$

és definiáljuk a $(z_i)_{i=0,\ldots,k}$ számokat az alábbi rekurzióval.

– Legyen $z_0 = a$.

– Ha z_i ismert és $i < k$, akkor legyen

$$z_{i+1} = \min\left(L \setminus \{z_0, \ldots, z_i\}\right).$$

Ekkor a $z = (z_i)_{i=0,\ldots,k}$ felosztást az *x és az y felosztás egyesítésének* nevezzük és a $z = x \sqcup y$ szimbólummal jelöljük.

9.7. Definíció. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és $x = (x_i)_{i=0,\ldots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ egy felosztás. Ekkor az *f függvény $(x_i)_{i=0,\ldots,n}$ felosztáshoz tartozó alsó közelítő összege*

$$s_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i),$$

és *felső közelítő összege*

$$S_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i).$$

Továbbá definiáljuk az *alsó- és felső közelítő összegek értékeinek a halmazát.*

$$s(f) = \left\{ s_x(f) \in \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{F}^{[a,b]} \right\}$$
$$S(f) = \left\{ S_x(f) \in \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{F}^{[a,b]} \right\}$$

9.8. Definíció. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény

– *alsó integráljának* nevezzük a $\sup s(f)$ mennyiséget, melynek jele $\underline{\int_a^b} f$;

– *felső integráljának* nevezzük a $\inf S(f)$ mennyiséget, melynek jele $\overline{\int_a^b} f$;

– *Riemann-integrálható*, ha $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, ekkor $\int_a^b f$ vagy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ jelöli az $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ értéket.
Továbbá bevezetjük az $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ jelölést a Riemann-integrálható függvényekre, vagyis

$$\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \triangleq \{ f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ korlátos és Riemann-integrálható} \}.$$

– Ha $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, akkor bevezetjük a

$$\int_b^a f \triangleq - \int_a^b f$$

jelölést.

– Továbbá minden $a \in \mathbb{R}$ pontra és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $a \in \operatorname{Dom} f$ esetén legyen

$$\int_a^a f \triangleq 0.$$

– Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$, valamint $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, akkor a $\int_a^b f$ és a $\int_b^a f$ mennyiséget az *f függvény határozott integráljának* nevezzük.

9.9. Definíció. A korlátos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény *oszcillációja*

$$\omega(f, [a, b]) \triangleq \left(\sup_{t \in [a,b]} f(t) \right) - \left(\inf_{t \in [a,b]} f(t) \right).$$

Az f *függvény* $x = (x_i)_{i=0,\dots,n} \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ *felosztáshoz tartozó oszcillációs összege*

$$\Omega_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_i).$$

9.10. Definíció. Az $f \in \mathcal{R}([a,b], \mathbb{R})$ függvény *integrálfüggvénye*

$$I_f : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \int_a^x f.$$

9.11. Definíció. (*Improprius integrál.*)

– Legyen $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a,\infty[$ esetén $f \in \mathcal{R}([a,x],\mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f *függvény improprius integrálja az* $[a,\infty[$ *intervallumon* és erre a

$$\int_a^\infty f \triangleq \lim_{x\to\infty} \int_a^x f$$

jelölést használjuk; ha a határérték nem létezik, vagy nem véges, akkor azt mondjuk, hogy az f *függvény improprius integrálja divergens az* $[a,\infty[$ *intervallumon.*

– Ha $f :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]-\infty, a[$ esetén $f \in \mathcal{R}([x,a],\mathbb{R})$ teljesül és a

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^a f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f *függvény improprius integrálja a* $]-\infty, a]$ *intervallumon*, és erre a

$$\int_{-\infty}^a f \triangleq \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f$$

jelölést használjuk.

– Legyen $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a,b[$ esetén $f \in \mathcal{R}([a,x],\mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x\to b-} \int_a^x f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f *függvény improprius integrálja az* $[a,b[$ *intervallumon*, melyre a

$$\int_a^b f \triangleq \lim_{x\to b-} \int_a^x f$$

jelölést használjuk.

– Legyen $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy minden $x \in]a,b[$ esetén $f \in \mathcal{R}([x,b],\mathbb{R})$ teljesül. Ha a

$$\lim_{x\to a+} \int_x^b f$$

határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy létezik az *f függvény improprius integrálja az* $]a, b]$ *intervallumon*, melyre a

$$\int_a^b f \triangleq \lim_{x \to a+} \int_x^b f$$

jelölést használjuk.