# Számelmélet

1) Egy számtani sorozat második tagja 17, harmadik tagja 21.
   a) Mekkora az első 150 tag összege? (5 pont)

   Kiszámoltuk ebben a sorozatban az első 111 tag összegét: 25 863.
   b) Igaz-e, hogy 25 863 számjegyeit tetszőleges sorrendben felírva mindig hárommal osztható számot kapunk? (Válaszát indokolja!) (3 pont)
   c) Gábor olyan sorrendben írja fel 25 863 számjegyeit, hogy a kapott szám néggyel osztható legyen. Milyen számjegy állhat a tízes helyiértéken? (Válaszát indokolja!) (4 pont)

2) Peti felírt egy hárommal osztható hétjegyű telefonszámot egy cédulára, de az utolsó jegy elmosódott. A barátja úgy emlékszik, hogy az utolsó jegy nulla volt. A kiolvasható szám: $314726\Delta$. Igaza lehetett-e Peti barátjának? Válaszát indokolja! (2 pont)

3) Tekintse a következő állításokat, és a táblázatban mindegyik betűjele mellé írja oda, hogy igaz, vagy hamis állításról van-e szó!
   a) Két pozitív egész közül az a nagyobb, amelyiknek az abszolútértéke nagyobb. (1 pont)
   b) Két egész szám közül az a nagyobb, amelyiknek az abszolútértéke nagyobb. (1 pont)
   c) Negatív szám egész kitevőjű hatványai között pozitívak és negatívak is vannak. (1 pont)

4) Összeadtunk ötvenöt egymást követő pozitív páratlan számot, az összeg értéke 3905.
   a) Melyik volt az összegben az első, illetve az ötvenötödik páratlan szám? (8 pont)
   b) Melyik az összeadottak között a legkisebb olyan szám, amelynek a prímtényezős felbontásában két különböző prímszám szerepel, és a négyzete ötre végződik? (4 pont)

5) A pozitív egészeket növekvő sorrendbe állítjuk. Melyik szám nagyobb: a hetedik 13-mal osztható pozitív egész, vagy a tizenharmadik 7-tel osztható pozitív egész? (2 pont)

6) Háromjegyű számokat írtunk fel a 0; 5 és 7 számjegyekkel. Írja fel ezek közül azokat, amelyek öttel oszthatók, és különböző számjegyekből állnak! (2 pont)

7) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis!
   a) Ha egy természetes szám osztható hattal és tízzel, akkor osztható hatvannal. (1 pont)
   b) A 20-nál kisebb pozitív prímszámok összege páratlan. (1 pont)
   c) A deltoid átlói felezik a belső szögeket. (1 pont)

8) Adja meg a $\left]-\frac{3}{8};-\frac{1}{8}\right[$ nyílt intervallum két különböző elemét! (2 pont)

9) Írja fel két egész szám hányadosaként a $2+\frac{2}{3}$ szám reciprokának értékét! (2 pont)

10) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával ötjegyű számokat készítünk az összes lehetséges módon (egy számjegyet többször is felhasználhatunk). Ezek között hány olyan szám van,
   a) amely öt azonos számjegyből áll; (3 pont)
   b) amelyik páros; (4 pont)
   c) amelyik 4-gyel osztható? (5 pont)

11) Adja meg a 24 egyjegyű pozitív osztóinak halmazát! (2 pont)

12) Írja fel 24 és 80 legkisebb közös többszörösét! Számítását részletezze! (3 pont)

13) Sorolja fel a 2010-nek mindazokat a pozitív osztóit, amelyek prímszámok! (2 pont)

14) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis!
   I. Minden prímszám páratlan. (1 pont)
   II. Létezik páratlan prímszám. (1 pont)
   III. Minden egész szám racionális szám. (1 pont)
   IV. Van olyan irracionális szám, amelyik felírható két egész szám hányadosaként (1 pont)

15) Adottak a következő számok: $a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^4$ és $b = 2 \cdot 5^2 \cdot 11^3 \cdot 13$.
Írja fel $a$ és $b$ legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét! A kért számokat elegendő prímtényezős alakban megadni. (2 pont)

16) Döntse el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz-e vagy hamis!
   A: Ha két szám négyzete egyenlő, akkor a számok is egyenlők. (1 pont)
   B: A kettes számrendszerben felírt 10100 szám a tízes számrendszerben 20. (1 pont)
   C: Egy hatoldalú konvex sokszögnek 6 átlója van. (1 pont)

17) Írja fel prímszámok szorzataként a 420-at! (2 pont)

18) Bontsa fel a 36000-et két részre úgy, hogy a részek aránya 5:4 legyen! (2 pont)

19) Adja meg a következő állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!
   A) A $\{0;1;2;3;4\}$ adathalmaz szórása 4.
   B) Ha egy sokszög minden oldala egyenlő hosszú, akkor a sokszög szabályos.
   C) A 4 és a 9 mértani közepe 6. (2 pont)

20) Döntse el, melyik állítás igaz, melyik hamis!
   a) A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 4$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja az $x$ tengellyel párhuzamos egyenes. (1 pont)
   b) Nincs két olyan prímszám, amelyek különbsége prímszám. (1 pont)
   c) Az 1 cm sugarú kör kerületének cm-ben mért számértéke kétszer akkora, mint területének $cm^2$-ben mért számértéke. (1 pont)
   d) Ha egy adathalmaz átlaga 0, akkor a szórása is 0. (1 pont)
   (3 pont)

21) Egy érettségiző osztály félévi matematika osztályzatai között elégtelen nem volt, de az összes többi jegy előfordult. Legkevesebb hány tanulót kell kiválasztani közülük, hogy a kiválasztottak között biztosan legyen legalább kettő, akinek azonos volt félévkor a matematika osztályzata? (2 pont)

22)

a) Iktasson be a 6 és az 1623 közé két számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy számtani sorozat szomszédos tagjai legyenek! (5 pont)

b) Számítsa ki a 6 és az 1623 közötti néggyel osztható számok összegét! (7 pont)

23) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

a) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója mindig kisebb mindkét számnál.

b) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója mindig osztója a két szám összegének.

c) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója nem lehet 1.

24) Adja meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy egy szabályos dobókockával egyszer dobva a dobott szám osztója a 60-nak! Válaszát indokolja! (3 pont)

25) Legyen $A$ halmaz a 8-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza, B pedig a 3-mal osztható egyjegyű pozitív egész számok halmaza.
Elemeinek felsorolásával adja meg az $A$, a $B$, az $A \cap B$ és az $A \setminus B$ halmazt! (4 pont)

26) Melyik számjegy állhat a $\overline{2582X}$ ötjegyű számban az $X$ helyén, ha a szám osztható 3-mal? Válaszát indokolja! (3 pont)

27) Jelölje $\mathbb{N}$ a természetes számok halmazát, $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát és $\varnothing$ az üres halmazt! Adja meg az alábbi halmazműveletek eredményét!

a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$

b) $\mathbb{Z} \cup \varnothing$

c) $\varnothing \setminus \mathbb{N}$ (3 pont)

28) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

A: Minden valós szám abszolút értéke pozitív.

B: $16^{\frac{1}{4}} = 2$

C: Ha egy szám osztható 6-tal és 9-cel, akkor biztosan osztható 54-gyel is. (2 pont)

29) Milyen számjegy állhat az $X$ helyén, ha a négyjegyű $\overline{361X}$ szám 6-tal osztható? (2 pont)

30) Két különböző színű szabályos dobókockával egyszerre dobunk. Adja meg annak a valószínűségét, hogy a dobott számok szorzata prímszám lesz! Megoldását részletezze! (4 pont)

31) Az $A$ halmaz elemei a 28 pozitív osztói, a $B$ halmaz elemei a 49 pozitív osztói. Adja meg az $A \cap B$ és a $B \setminus A$ halmazokat elemeik felsorolásával! Megoldását részletezze! (3 pont)

32) Az 50-nél nem nagyobb pozitív páros számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy néggyel osztható számot választunk? Válaszát indokolja! (3 pont)

33) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét! (igaz vagy hamis)

A: Ha egy szám osztható 6-tal és 8-cal, akkor osztható 48-cal is.

B: Ha egy pozitív egész szám minden számjegye osztható 3-mal, akkor a szám is osztható 3-mal.

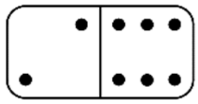
C: A 48 és a 120 legnagyobb közös osztója a 12. (2 pont)

34) Milyen számjegyeket írhatunk a $c$ helyére, hogy a $\overline{64c39c}$ hatjegyű szám osztható legyen 3-mal? Válaszát indokolja! (3 pont)

35) Ma kedd van. A hét melyik napja lesz 100 nap múlva? (2 pont)

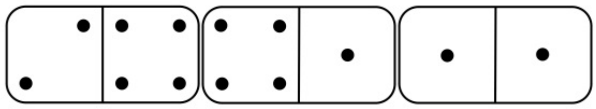
36) Anna dominókészletében a dominókövek egyik oldala egy vonallal két részre van osztva. Az egyes részeken a pöttyök száma 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 lehet. A készletben minden lehetséges pöttyözésű dominóból pontosan egy darab van. Az ábrán a 2-6-os (6-2-es) dominó látható.

a) Hány olyan dominó van a készletben, amelyen a két részen lévő pöttyök számának szorzata prímszám?

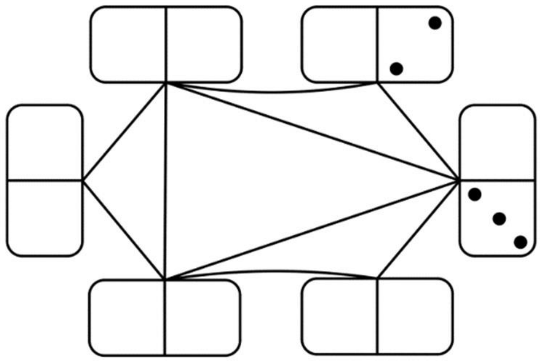


A játékban két dominó akkor csatlakozhat egymáshoz, ha a két érintkező részen ugyanannyi pötty van. (Lásd az ábrát.)

Anna egy lapra elhelyezte dominókészletének azt a hat dominóját, amelyek mindkét részén van legalább 1, de legfeljebb 3 pötty. Ezután összekötötte azokat a dominókat, amelyeket a játékban csatlakoztatni lehetne egymáshoz. Az alábbi ábra a hat dominót és az összekötő vonalakat mutatja, de csak két részen adtuk meg a pöttyöket.



b) Rajzolja be a tíz üres részre a hiányzó pöttyöket az összekötésnek megfelelően! (4 pont)



Anna a teljes 28 darabos készletből kihúzta a 2-6-os dominót. Ezután véletlenszerűen kihúz még egy dominót.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a másodiknak kihúzott dominót csatlakoztatni tudja az elsőhöz!

Egy játékbemutatóra Anna és Balázs 1800 dominót szeretne felállítani a földre úgy, hogy a legelsőt meglökve az összes dominó sorban eldőljön. Anna egyedül 6 óra alatt, Balázs pedig 9 óra alatt építené meg a dominóláncot.

d) Ha Anna és Balázs – tartva a saját tempójukat – együtt dolgozna, akkor hány óra alatt végeznének az 1800 dominó felállításával? (4 pont)

37) Az alábbi hat szám közül válassza ki az összes olyan számot, amely osztható 3-mal, de nem osztható 5-tel!

895; 1222; 1458; 1526; 1848; 1990 (2 pont)

38) Adjon meg egy olyan összetett számot, amely relatív prím a 6-hoz! (2 pont)

39) Egy szerencsejáték a következőképpen zajlik:

A játékos befizet 7 forintot, ezután a játékvezető feldob egy szabályos dobókockát. A dobás eredményének ismeretében a játékos abbahagyhatja a játékot; ez esetben annyi Ft-ot kap, amennyi a dobott szám volt.

Dönthet azonban úgy is, hogy nem kéri a dobott számnak megfelelő pénzt, hanem újabb 7 forintért még egy dobást kér. A játékvezető ekkor újra feldobja a kockát. A két dobás eredményének ismeretében annyi forintot fizet ki a játékosnak, amennyi az első és a második dobás eredményének szorzata. Ezzel a játék véget ér.

Zsófi úgy dönt, hogy ha 3-nál kisebb az első dobás eredménye, akkor abbahagyja, különben pedig folytatja a játékot.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Zsófi tovább játszik? (4 pont)

b) Zsófi játékának megkezdése előtt számítsuk ki, mekkora valószínűséggel fizet majd neki a játékvezető pontosan 12 forintot? (6 pont)

Barnabás úgy dönt, hogy mindenképpen két dobást kér majd. Áttekinti a két dobás utáni lehetséges egyenlegeket: a neki kifizetett és az általa befizetett pénz különbségét.

c) Írja be a táblázat üres mezőibe a két dobás utáni egyenlegeket! (4 pont)

| | | második dobás eredménye | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| első dobás eredménye | 1 | -13 | | | | | |
| | 2 | | | | | | |
| | 3 | | | | | | |
| | 4 | | | | | | 10 |
| | 5 | | | | | | |
| | 6 | | | | | | |

d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Barnabás egy (két dobásból álló) játszmában nyer? (3 pont)

40) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

A: Ha egy pozitív egész szám osztója 24-nek, akkor osztója 12-nek is.

B: Ha egy pozitív egész szám osztható 12-vel akkor osztható 6-tal is.

C: Ha egy pozitív egész szám osztható 2-vel és 4-gyel, akkor osztható 8-cal is. (2 pont)

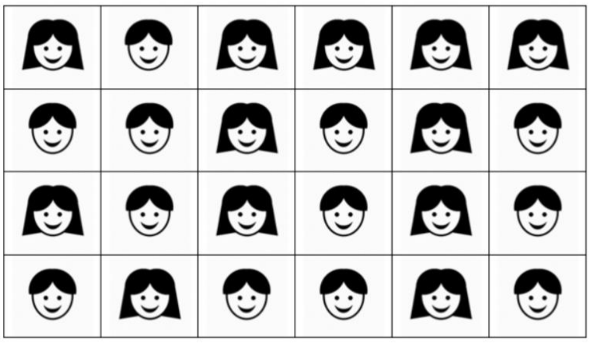
41) Tudjuk, hogy az $\frac{5}{7} = 0,714285$ végtelen szakaszos tizedes tört.

Adja meg a tizedesvessző utáni századik számjegyet! Válaszát indokolja! (3 pont)

42) Milyen számjegyet írjunk $x$ helyére, hogy a $\overline{202x}$ négyjegyű szám osztható legyen 12-vel? (2 pont)

43) Egy osztályban kétszer annyian járnak matematikafakultációra, mint fizikafakultációra. Összesen 15 olyan diák van az osztályban, aki a két fakultáció közül valamelyikre jár. A 15 diák közül 6-an mindkét fakultációra járnak.

a) Hány olyan diák van az osztályban, aki matematikafakultációra jár, de fizikára nem?



A távoktatás időszakában ennek az osztálynak a tagjai a tanárral együtt 24-en vesznek részt az alap-matematikaórákon. Az órákon használt online alkalmazás 4 sorban és 6 oszlopban rendezi el a résztvevőket megjelenítő egybevágó kis téglalapokat úgy, hogy ezek kitöltik a teljes képernyőt. Stefi számítógépén a képernyő vízszintes és függőleges oldalának aránya 16: 9.

b) Adja meg egy kis téglalap vízszintes és függőleges oldalának arányát két egész szám hányadosaként! (5 pont)

Az alkalmazás a bejelentkező személyekhez tartozó 24 téglalapot véletlenszerűen rendezi el a képernyőn.

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a következő órán Stefit és barátnőjét, Cilit megjelenítő téglalap is a képernyő első sorába fog kerülni! (A 24 kis téglalapot az alkalmazás mindig 4 sorban és 6 oszlopban rendezi el.) (5 pont)

A 24 bejelentkező személyt a képernyőn 24!-féleképpen lehet elrendezni.

d) Mutassa meg, hogy a 24! osztható 10 000-rel! (3 pont)

44) Egy biztonsági őr először 4 egymás utáni napon dolgozik, utána 2 napot pihen, majd újra 4 nap munka és 2 pihenőnap következik, és így tovább. Ha az őr január 1-jén kezdett dolgozni, akkor az év 100. napján dolgozik vagy pihen? Válaszát indokolja! (3 pont)