§. Trigonometriai fügvények integrálása

Egy $J=\int R(x)dx$ integrál kiszámítása az $R(x)$ racionális függvény típusától függ.

.1. A *sinx* és *cosx racionális függvényeinek integrálásáa*

Helyettesítés (1)	**Integrál**	$J_1=\int R(\sin x,\cos x)dx$
	R	A $\sin x$ és a $\cos x$ racionális függvénye
	Általános helyettesítési képlet	$t=tg\frac{x}{2}$
	A változó és differenciál helyettesítése	$x=2arctgt;\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ $\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Példa. Számítsa ki a következő integrált

$$I_1=\int\frac{dx}{\sin x}.$$

Matematikai megoldás.

$$I_1=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=ln|t|+C=ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$$

Megoldás a Maple-ben.

```
>I1:=Int(1/sin(x),x)=simplify(int(1/sin(x),x));
```

$$I1:=\int\frac{dx}{\sin x}=ln\left(-\frac{-1+\cos(x)}{\sin(x)}\right).$$

Trigonometriai függvények integrálása

A *Maple programban célszerű behívni a "**student** segédprogramcsomagot**"***:

```
>restart: with(student):
>I1:=value(%);
>I1:=simplify(subs(cos(x)=(1-t^2)/(1+t^2),
sin(x)=2*t/(1+t^2),I1));
```

$$I1 := ln\left(-\frac{-1+cos(x)}{sin(x)}\right) = ln(t)$$

Az(1) alapján ez azt jelenti, hogy $ln(t) = ln\left(tg\,\frac{x}{2}\right)$.

```
>I1:=subs(t=tan(x/2),I1);
```

Példa. Számítsa ki a következő integrált

$$I_2 = \int \frac{dx}{5\,sin\,x + 12\,cos\,x + 13}.$$

Matematikai megoldás.

$$I_2 = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5\frac{2t}{1+t^2} + 12\frac{1-t^2}{1+t^2} + 13} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{10t + 12 - 12t^2 + 13 + 13t^2} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t+5)^2} = -\frac{2}{t+5} + C = -\frac{2}{tg\,\frac{x}{2} + 5} + C.$$

Megoldás a Maple-ben.

```
>I2:=Int(1/(5*sin(x)+12*cos(x)+13),x)=
 int(1/(5*sin(x)+12*cos(x)+13),x);
```

$$I_2 := \int \frac{dx}{5\,sin\,x + 12\,cos\,x + 13} = -\frac{2}{tg\left(\frac{1}{2}x\right) + 5}$$

Részletes megoldás a Maple-ben.

```
>restart: with(student):
```

```
>I2:=Int(1/(5*sin(x)+12*cos(x)+13),x);
>changevar(tan(x/2)=t,I2);
>I2:=value(%);
>I2:=subs(t=tan(x/2),I2);
```

Példa. Számítsa ki a következő integrált

$$I_3 = \int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}.$$

Matematikai megoldás.

$$I_3 = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{9+8\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2+2t+17} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t+1)^2+16} = 2.\frac{1}{4}arctg\frac{t+1}{4}+C =$$

$$= \frac{1}{2}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{4}+C.$$

Megoldás a Maple-ben.

```
> restart:  with(student):
>I3:=Int(1/(9+8*cos(x)+sin(x)),x);
>changevar(tan(x/2)=t,I3);
>I3:=value(%);
>I3:=subs(t=tan(x/2),I3);
```

$$I3 := \frac{1}{2}arctan\left(\frac{1}{4}tan\left(\left(\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{4}\right)\right).$$

Gyakorló feladatok. Számítsa ki a következő integrált:

$$I_4 = \int \frac{dx}{7\sin x+24\cos x+25}$$, Eredmény: $$I4 := -\frac{2}{tg\left(\frac{1}{2}x\right)+7}$$

$$I_5 = \int \frac{dx}{9\sin x + 40\cos x + 41}$$, Eredmény: $I5 := -\frac{2}{tg\left(\frac{1}{2}x\right)+9}$

$$I_6 = \int \frac{dx}{1-\sin x}$$, Eredmény: $I_6 := -\frac{2}{\tan\left(\frac{1}{2}x\right)-1}$

.2. A *cosx* vagy *sinx-ben páratlan függvények integrálása*

Helyettesítés (2)		
	Integrál	$J_2 = \int R(\sin x, \cos x)dx$
	R	$\cos x$ -ben páratlan: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$
	Helyettesítés	$\sin x = t$
	Hasznos még tudni	$dt = \cos x dx$ or $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Példa. Számítsa ki a következő integrált

$$I_7 = \int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^4 x}.$$

Matematikai megoldás.

$$\frac{(-\cos x)^5}{\sin^4 x} = -\frac{(\cos x)^5}{\sin^4 x} \Rightarrow \sin x = t$$ **a (2) alapján**

$$I_7 = \int \frac{\cos^5 x.coxdx}{\sin^4 x} = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)^5 .coxdx}{\sin^4 x} =$$

$$= \int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^4}dt = \int \left(\frac{1}{t^4} - \frac{2}{t^2} + 1\right)dt =$$

$$=-\frac{1}{3}\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t}+t+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\frac{1}{sin^3 x}+\frac{2}{sin x}+sin x+C\,.$$

Megoldás a Maple-ben.

```
>restart: with(student):
>I7:=Int(cos(x)^5/sin(x)^4,x);
>changevar(sin(x)=t,I7);
>I7:=value(%);
>I7:=subs(t=sin(x),I7);
```

$$I_7 := sin(x)+\frac{2}{sin(x)}-\frac{1}{3\,sin(x)^3}$$

Példa. Számítsa ki a következő integrált

$$I_8=\int cos^3 x.\sqrt[3]{sin x}dx\,.$$

Matematikai megoldás.

$$I_8=\int\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3\sqrt[3]{t}\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2\sqrt[3]{t}dt=$$

$$=\int\left(1-t^2\right)\sqrt[3]{t}dt=\int t^{\frac{1}{3}}dt-\int t^{\frac{7}{3}}dt=\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{10}t^{\frac{10}{3}}+C=$$

$$=\frac{3}{20}\left(5-2t^2\right)t^{\frac{4}{3}}+C=$$

$$=\frac{3}{20}\left(5-2\,sin^2 x\right).\left(sin x\right)^{\frac{4}{3}}+C\,.$$

Megoldás a Maple-ben.

```
>restart:with(student):
>I8:=Int(cos(x)^3*(sin(x)^(1/3)),x);
>changevar(sin(x)=t,I7);
>I8:=value(%);
>I8:=subs(t=sin(x),I8);
```

$$I8 := -\frac{3}{20}\left(-5+2\,sin(x)^2\right)sin(x)^{(4/3)}$$

Példa. Számítsa ki a következő integrált

$$I_9 = \int \frac{\cos x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x + 1}.$$

Matematikai megoldás.

$$I_9 = \int \frac{\cos x dx}{1 + \sin^4 x + \left(1 - \sin^2 x\right)^2 + 2\sin^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^4 + 1} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{t + \sqrt{2}}{t^2 + \sqrt{2} + 1} dt - \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{t - \sqrt{2}}{t^2 - \sqrt{2} + 1} dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{16} ln \left| \frac{\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x + 1}{\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x + 1} \right| +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{8}\left[arctg\left(\sqrt{2}\sin x + 1\right) + arctg\left(\sqrt{2}\sin x - 1\right)\right] + C.$$

Megoldás a Maple-ben.

```
>restart:with(student):
>I9:=Int(cos(x)/(cos(x)^4+sin(x)^4+2*sin(x)^
2+1),x);
>changevar(sin(x)=t,I9);
>I9:=value(%);
>I9:=subs(t=sin(x),I9);
```

Gyakorló feladatok. Számítsa ki a következő integrálokat:

$$I_{10} = \int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x} dx,$$

Válasz: $I10 := \frac{2}{3\sin(x)^3} - \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{5\sin(x)^5}$

$$I_{11} = \int \cos^9 x . \sqrt{\sin x} dx,$$

Megoldások:

$$I11 := \frac{2}{21945} sin(x)^{(3/2)} \left(7315 - 12540 sin(x)^2\right) +$$
$$+\frac{2}{21945} sin(x)^{(3/2)} \left(11970 sin(x)^4 - 5852 sin(x)^6 + 1155 sin(x)^8\right)$$

$$I_{12} = \int sin^4 x cos^5 x dx,$$

Tehát: $I12 := \frac{1}{9} sin(x)^9 - \frac{2}{7} sin(x)^7 + \frac{1}{5} sin(x)^5$

$$I_{13} = \int sin^6 x cos^3 x dx,$$

Válasz: $I13 := \frac{1}{9} sin(x)^9 + \frac{1}{7} sin(x)^7$.

Helyettesítés (3)		
	Integrál	$J_3 = \int R(sin x, cos x) dx$
	R	A $sin x$-ben pártalan függvény
	Helyettesítés	$cos x = t$
	Hasznos még tudni	$dt = -sin x dx$ or $dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ $sin^2 x = 1 - cos^2 x$

Példa. Számítsa ki a következő integrált

$$I_{14} = \int \frac{sin^3 x}{1 + cos^2 x} dx.$$

Matematikai megoldás.

$$\frac{(-sin x)^3}{1 + cos^2 x} = -\frac{sin^3 x}{1 + cos^2 x}$$

$$I_{14} = -\int \frac{(1 - cos^2 x).(-sin x) dx}{1 + cos^2 x} = -\int \frac{1 - t^2}{1 + t^2} dt =$$

$$= \int \frac{t^2+1-2}{1+t^2}\,dt = \int 1-\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$
$$= t - 2arctgt + C = cos\,x - 2arctg\left(cos\,x\right) + C\,.$$

Megoldás a Maple-ben.

```
>restart:with(student):
>I14:=Int(sin(x)^3/(1+cos(x)^2),x);
>changevar(cos(x)=t,I14);
>I14:=value(%);
>I14:=subs(t=cos(x),I14);
```

$$I14 := cos\left(x\right) - 2\,arctan\left(cos\left(x\right)\right).$$

Példa. Számítsa ki a következő integrált

$$I_{15} = \int \frac{sin^5 x}{cos^2 x}\,dx\,.$$

Matematikai megoldás.

$$I_{15} = -\int \frac{sin^4 x\left(-sin\,x\right)dx}{cos^2 x} = -\int \frac{\left(1-cos^2 x\right)^2}{cos^2 x}\,d\,cos\,x =$$
$$= -\int \left(\frac{1}{cos^2 x} - 2 + cos^2 x\right) d\,cos\,x =$$
$$= \frac{1}{cos\,x} + 2\,cos\,x - \frac{1}{3}cos^3 x + C\,.$$

Megoldás a Maple-ben.

```
>restart:with(student):
>I15:=Int(sin(x)^5/cos(x)^2,x);
>changevar(cos(x)=t,I15);
>I15:=value(%);
>I15:=subs(t=cos(x),I15);
```

$$= -\frac{1}{3}cos\left(x\right)^3 + 2\,cos\left(x\right) + \frac{1}{cos\left(x\right)}.$$

Példa. Számítsa ki a következő integrált

$$I_{16} = \int \frac{2\,sin\,x\,cos\,x}{cos^2 x + 12}\,dx\,.$$

Matematikai megoldás.

$$I_{16} = -\int \frac{2\cos x(-\sin x)dx}{\cos^2 x + 12} = -2\int \frac{tdt}{t^2+12} =$$
$$= -\int \frac{1}{t^2+12} d\left(t^2+12\right) = -\ln\left|t^2+12\right| + C =$$
$$= -\ln\left|\cos^2 x + 12\right| + C$$

Megoldás a Maple-ben.

```
>restart:with(student):
>I16:=Int(2*sin(x)*cos(x)/(cos(x)^2+12),x);
>changevar(cos(x)=t,I16);
>I16:=value(%);
>I16:=subs(t=cos(x),I16);
```

$$I16 := -\ln\left(\cos(x)^2 + 12\right)$$

Gyakorló feladatok. Számítsa ki a következő integrálts:

$$I_{17} = \int \sin x \cos^2 x dx,$$

Eredmény: $I17 := -\frac{1}{3}\cos(x)^3$

$$I_{18} = \int \frac{2\sin x \cos x}{1+\cos^4 x} dx,$$

Eredmény: $I18 := -\arctan\left(\cos(x)^2\right)$

$$I_{19} = \int \frac{2\sin x \cos x}{1+4\cos^2 x} dx,$$

Eredmény: $I19 := -\frac{1}{4}\ln\left(1+4\cos(x)^2\right)$

Megjegyzés. A következő típusok esetén hasznosak a fenti módszerek

$$\int R\left(\sin^{2k+1} x, \cos^{2l} x\right)dx = \int R\left(\sin^{2k} x, \cos^{2l} x\right).sixdx =$$

$$= -\int R\left[\left(1-\cos^2 x\right)^k, \cos^{2l} x\right] d\cos x;$$

és

$$\int R\left(\sin^{2k} x, \cos^{2l+1} x\right) dx = \int R\left(\sin^{2k} x, \cos^{2l} x\right).\cos x dx =$$

$$= \int R\left(\sin^{2k} x, \left(1-\sin^2 x\right)^l\right) d\sin x,$$

ahol $\left\{k, l \in \mathbb{N}^{+}\right\}$.

3. A *sinx* és a *cosx páros függvényeit tartalmazó integrálok*

Helyettesítés (4)		
	Integrál	$J_4 = \int R(\sin x, \cos x) dx$
	R	A $\sin x$ és $\cos x$ páros függvényei
	Helyettesítés	$tgx = t$
	Hasznos még tudni	$dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$

Példa. Számítsa ki a következő integrált

$$I_{20} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx.$$

Első matematikai megoldás.

$$\frac{(-\sin x)^2}{(-\cos x)^4} = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

$$I_{20} = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{tg^3 x}{3} + C.$$

Második matematikai megoldás.

$$I_{20} = \int \frac{sin^2 x}{cos^2 x} . \frac{1}{cos^2 x} dx = \int tg^2 x dtgx = \frac{tg^3 x}{3} + C .$$

Megoldás a Maple-ben.

```
>restart:with(student):
>I20:=Int((sin(x)^2/cos(x)^4),x);
>changevar(tan(x)=t,I20);
>I20:=value(%);
>I20:=subs(t=tan(x),I20);
```

$$I20 := \frac{1}{3} tan(x)^3 .$$

Példa. Számítsa ki a következő integrált

$$I_{21} = \int \frac{dx}{sin^2 x + 6 sin x cos x - 16 cos^2 x} .$$

Matematikai megoldás.

$$I_{21} = \int \frac{1}{tg^2 x + 6tgx - 16} . \frac{1}{cos^2 x} dx = \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{2.5} ln \left| \frac{(t+3) - 5}{(t+3) + 5} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{10} ln \left| \frac{tgx - 2}{tgx + 8} \right| + C .$$

Megoldás a Maple-ben.

```
>restart:with(student):
>I21:=Int(1/(sin(x)^2+6*sin(x)*cos(x)-
16*cos(x)^2),x);
>changevar(tan(x)=t,I21);
>I21:=value(%);
>I21:=subs(t=tan(x),I21);
```

$$I21 := \frac{1}{10} ln(tan(x) - 2) - \frac{1}{10} ln(tan(x) + 8) .$$

Példa. Számítsa ki a következő integrált

$$I_{22}=\int\frac{\sin x dx}{\cos^2 x(\sin x+\cos x)}.$$

Matematikai megoldás.

$$I_{22}=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dtgx=\int\frac{tgx}{tgx+1}dtgx=$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{tgx}\right)dtgx = tgx-ln|tgx|+C.$$

Megoldás a Maple-ben.

```
>restart:with(student):
>I22:=Int(sin(x)/(cos(x)^2*(sin(x)+cos(x))),x);
>changevar(tan(x)=t,I22);
>I22:=value(%);
>I22:=subs(t=tan(x),I22);
```

$$I22:=tan(x)-ln(tan(x)+1).$$

Gyakorló feladatok. Számítsa ki a következő integrálokat:

$$I_{23}=\int\frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx,$$

Eredmény: $I23:=\frac{1}{5}tan(x)^5$

$$I_{24}=\int\frac{\sin^2 x}{\left(1-\sin^2 x\right)^2}dx,$$

Eredmény: $I24:=\frac{1}{3}tan(x)^3$

4. A *sinx* és/vagy *cosx függvények szorzatának integrálása*

(5) $$J_5=\int\cos mx\cos nx dx=\int\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right]dx,$$

(6) $J_6 = \int sin\, mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}\left[sin(m+n)x + sin(m-n)x\right]dx$,

(7) $J_7 = \int sin\, mx\, sin\, nx dx = \int \frac{1}{2}\left[-cos(m+n)x + cos(m-n)x\right]dx$.

Példa. Számítsa ki a következő integrálts:

$$I_{25} = \int cos\, 3x\, cos\, 15x dx,$$

$$I_{26} = \int sin\, 10x\, cos\, 7x\, cos\, 4x dx,$$

$$I_{27} = \int sin\, 7x\, sin\, 3x dx.$$

Matematikai megoldáss.

$$I_{25} = \frac{1}{2}\int \left(cos\, 18x + cos\, 12x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{18} sin\, 18x + \frac{1}{12} sin\, 12x\right) + C,$$

$$I_{26} = \frac{1}{2}\int \left(sin\, 17x + sin\, 3x\right) cos\, 4x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(sin\, 17x\, cos\, 4x + sin\, 3x\, cos\, 4x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(sin\, 21x + sin\, 13x\right) + \left(sin\, 7x - sin\, x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-cos\, 21x - \frac{1}{13} cos\, 13x - \frac{1}{7} cos\, 7x + cos\, x\right) + C,$$

$$I_{27} = \frac{1}{2}\int \left(-cos\, 10x + cos\, 4x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10} sin\, 10x + \frac{1}{4} sin\, 4x\right) + C.$$

Megoldások Maple-ben.

```
>I25:=int(cos(3*x)*cos(15*x),x);
```

Eredmény: $I_{25} := \frac{1}{24} sin(12x) + \frac{1}{36} sin(18x)$

```
>I26:=int(sin(10*x)*cos(7*x)*cos(4*x),x);
```

Eredmény:

$$I_{26} := -\frac{1}{84} cos(21x) - \frac{1}{52} cos(13x) - \frac{1}{28} cos(7x) + \frac{1}{4} cos(x)$$

```
>I27:=int(sin(9*x)*sin(3*x),x);
```

Eredmény: $I27 := \frac{1}{8} sin(4x) - \frac{1}{20} sin(10x)$

<u>Gyakorló feladatok.</u> Számítsa ki a következő integrálokat:

$$I_{28} = \int sin\, 5x\, sin\, 2dx,$$

Eredmény: $I28 := \frac{1}{6} sin(3x) - \frac{1}{14} sin(7x)$

$$I_{29} = \int sin\, 2x\, cos\, 5xdx,$$

Eredmény: $I29 := -\frac{1}{14} cos(7x) + \frac{1}{6} cos(3x)$

$$I_{30} = \int cos\, 3x\, cos\, 6xdx$$

Eredmény: $I30 := \frac{1}{6} sin(3x) + \frac{1}{18} sin(9x)$

5. A *sinx (cosx) páros hatványait tartalmazó integrálok*

A következő linearizálási képleteket használhatjuk az integrálok számítása során:

$$cos^2 x = \frac{1 + cos\, 2x}{2},$$

$$sin^2 x = \frac{1 - cos\, 2x}{2}$$

$$\int R\left(\sin^{2k} x, \cos^{2l} x\right)dx, \quad k,l \in \mathbb{N}^+ .$$

(8) $$J_8 = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C,$$

(9) $$J_9 = \int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$$

Ekkor a $\cos 2x$-et fogják tartalmazni az integrálok

Példa. Számítsa ki a következő integrálokat:

$$I_{31} = \int \cos^4 x dx .$$

Matematikai megoldáss.

$$I_{31} = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\left(\int 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C$$

Megoldások Maple-ben.

??>

Eredmény:

Gyakorló feladatok. Számítsa ki a következő integrálts:

$$I_{32} = \int \sin^4 x dx .$$

Eredmény:

$$I_{33} = \int \sin^2 x \cos^2 x dx ,$$

Eredmény: $I_{33} = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C$

$$I_{34} = \int sin^4 x cos^4 x dx,$$

Eredmény: $I_{34} = \frac{1}{128}\left(x - sin 4x + \frac{1}{16} sin 8x \right) + C$

$$I_{35} = \int sin^6 x dx$$

Eredmény: $I_{35} = \frac{13}{8}x + \frac{5}{16} sin 2x + \frac{3}{64} sin 4x - \frac{1}{6} sin^3 2x + C$

$$I_{36} = \int cos^4\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

Eredmény: $I_{36} = \frac{3}{8}x + \frac{1}{2} sin x + \frac{1}{16} sin 2x + C$

6. Néhány különleges eset

Adott a következő integrál:

(10) $$J_{10} = \int \frac{R_1(sin x, cos x)}{R_2(sin x, cos x)} dx.$$

A következő lépések követhetők:

1. lépés. A számlálót a nevező és deriváltjának lineáris kombinációjaként fejezzük ki:

$$R_1 = A.R_2 + B.(R_2)';$$

2. lépés. Meghatározzuk az A, B konstansokat;

3. lépés. Kiszámítjuk az eredetivel ekvivalens J_{10} integrált:

$$J_{10} = \int \left(\frac{AR_2}{R_2} + \frac{BR_2{}'}{R_2} \right) dx = A\int dx + B\int \frac{1}{R_2} dR_2$$

1. lépés. Az új intergrál tehát.

$$A\int dx + B\int \frac{1}{R_2} dR_2 = ax + ln|R_2| + C.$$

Példa. Számítsa ki a következő integrálts:

$$I_{37} = \int \frac{7\sin x + 9\cos x}{\sin x + 2\cos x} dx .$$

Matematikai megoldáss.

$$I_{37} = \int \frac{A\left(\sin x + 2\cos x\right) + B\left(\sin x + 2\cos x\right)'}{\sin x + 2\cos x} dx$$

$$7\sin x + 9\cos x = A\left(\sin x + 2\cos x\right) + B\left(\sin x + 2\cos x\right)' \Rightarrow$$

$$7\sin x + 9\cos x = A\left(\sin x + 2\cos x\right) + B\left(\cos x - 2\sin x\right) \Rightarrow$$

$$7\sin x + 9\cos x = \left(A - 2B\right)\sin x + \left(2A + B\right)\cos x \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} 7 = A - 2B \\ 9 = 2A + B \end{array}\right. \Rightarrow A = 5, B = 1 \Rightarrow$$

$$I_{37} = \int \left[\frac{5\left(\sin x + 2\cos x\right)}{\sin x + 2\cos x} + \frac{\left(\cos x - 2\sin x\right)}{\sin x + 2\cos x} \right] dx =$$

$$= 5\int dx + \int \frac{1}{\sin x + 2\cos x} d\left(\sin x + 2\cos x\right) =$$

$$= 5x + \ln\left|\sin x + 2\cos x\right| + C .$$

Megoldások Maple-ben.

??>

Eredmény:

Példa. Számítsa ki a következő integrálokat:

$$I_{38} = \int \frac{\sin x - 3\cos x}{4\sin x + 5\cos x} dx .$$

Matematikai megoldáss.

$$I_{38} = \int \frac{A\left(4\sin x + 5\cos x\right) + B\left(4\sin x + 5\cos x\right)'}{4\sin x + 5\cos x} dx$$

$$\sin x - 3\cos x = A\left(4\sin x + 5\cos x\right) + B\left(4\sin x + 5\cos x\right)' \Rightarrow$$

$$\sin x - 3\cos x = A\left(4\sin x + 5\cos x\right) + B\left(4\cos x - 5\sin x\right) \Rightarrow$$

$$\sin x - 3\cos x = \left(4A - 5B\right)\sin x + \left(5A + 4B\right)\cos x \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l}1=4A-5B\\-3=5A+4B\end{array}\right. \Rightarrow A=-\frac{11}{41}, B=-\frac{17}{41}\Rightarrow$$

$$I_{38}=-\frac{11}{41}\int dx-\frac{17}{41}\int\frac{dx\left(4\sin x+5\cos x\right)}{4\sin x+5\cos x}=$$

$$=-\frac{11}{41}x-\frac{17}{41}ln\left|4\sin x+5\cos x\right|+C.$$

<u>Megoldások Maple-ben.</u>

??>

Eredmény:

Tekintsük a következő integrált:

(11) $$J_{11}=\int\frac{R_1\left(\sin x,\cos x,c_1\right)}{R_2\left(\sin x,\cos x,c_2\right)}dx.$$

A megoldás lépései:

<u>1. lépés</u> A számlálót a nevező és deriváltjának valamint egy C konstansnak lineáris kombinációjaként fejezzük ki:

$$R_1=A.R_2+B.\left(R_2\right)'+C;$$

<u>2. lépés</u> meghatározzuk az A,B,C konstansokat;

<u>3. lépés</u> átírjuk a J_{11} integrált:

$$J_{11}=\int\left(\frac{AR_2}{R_2}+\frac{BR_2{}'}{R_2}+C\right)dx=$$

$$=A\int dx+B\int\frac{1}{R_2}dR_2+C\int\frac{1}{R_2}dx$$

<u>1. lépés.</u> Az integral kiszámítása.

<u>Példa.</u> Számítsa ki a következő integrálokat:

$$I_{39}=\int\frac{2\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+2}dx.$$

<u>Matematikai megoldáss.</u>

$$2\sin x+\cos x-1=A\left(\sin x-\cos x+2\right)+B\left(\sin x-\cos x+2\right)'+C\Rightarrow$$

$$2\sin x+\cos x-1=A\left(\sin x-\cos x+2\right)+B\left(\cos x+\sin x\right)+C\Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l}2 = A + B \\ 1 = -A + B \\ -1 = 2A + C\end{array}\right. \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = \frac{3}{2}, C = -2 \Rightarrow$$

$$I_{39} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}ln\left|sin\,x - cos\,x + 2\right| - \int \frac{2dx}{sin\,x - cos\,x + 2} =$$

Az **(1)** alapján hasznos a következő

$$= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}ln\left|sin\,x - cos\,x + 2\right| - 2\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 2} =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}ln\left|sin\,x - cos\,x + 2\right| - 4\int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 1} =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}ln\left|sin\,x - cos\,x + 2\right| + \frac{4}{3}\int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}} =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}ln\left|sin\,x - cos\,x + 2\right| - \frac{4}{3}\int \frac{d\left(t + \frac{1}{3}\right)}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}ln\left|sin\,x - cos\,x + 2\right| - \frac{4}{3}\frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}arctg\frac{\left(t + \frac{1}{3}\right)}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}ln\left|sin\,x - cos\,x + 2\right| - \sqrt{2}arctg\frac{3t+1}{2\sqrt{2}} + c =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}ln\left|sin\,x - cos\,x + 2\right| - \sqrt{2}arctg\frac{3t+1}{2\sqrt{2}} + c =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}ln\left|sin\,x - cos\,x + 2\right| - \sqrt{2}arctg\frac{3tg\frac{x}{2} + 1}{2\sqrt{2}} + c\,.$$

Megoldások Maple-ben.

??>
Eredmény:

Tekintsük a következő integrált:

(12) $$J_{12}=\int\frac{R_1\left(\sin x,\cos x,\sin^2 x,\cos^2 x\right)}{R_2\left(\sin x,\cos x,\sin^2 x,\cos^2 x\right)}dx.$$

A szükséges lépések:

1.lépés A számlálót a nevező, valamint a $\sin x,\cos x,\sin^2 x,\cos^2 x$ és az A,B,C :konstansok segítségével írjuk fel

$$R_1=\left(A\sin x+B\cos x\right)R_2+C\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right);$$

2.lépés meghatározzuk az A,B,C konstansokat;
3. lépés átírjuk az integrált J_{12} alakban:

$$J_{12}=\int\frac{\left(A\sin x+B\cos x\right)R_2+C\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{R_2}dx$$

1. lépés Kiszámítjuk az integrált.

Példa. Számítsa ki a következő integrált:

$$I_{40}=\int\frac{3\sin x\cos x+2\sin^2 x+5\cos^2 x}{\sin x-2\cos x}dx.$$

Matematikai megoldáss.

$$3\sin x\cos x+2\sin^2 x+5\cos^2 x=$$
$$=\left(A\sin x+B\cos x\right)\left(\sin x-2\cos x\right)+C\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l}2=A+C\\ 3=B-2A\\ 5=-2B+C\end{array}\right. \Rightarrow A=-\frac{9}{5},B=-\frac{3}{5},C=\frac{19}{5}\Rightarrow$$

$$I_{40}=-\frac{9}{5}\int\sin x dx-\frac{3}{5}\int\cos x dx+\frac{19}{5}\int\frac{1}{\sin x-2\cos x}dx=$$

$$=\frac{9}{5}cos-\frac{3}{5}sin\,x+\frac{19}{5}\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}-2\frac{1-t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\frac{9}{5}cos-\frac{3}{5}sin\,x+\frac{19}{5}\int\frac{dt}{t^2+t-1}=$$

$$=\frac{9}{5}cos-\frac{3}{5}sin\,x+\frac{19}{5}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2}=$$

$$=\frac{9}{5}cos-\frac{3}{5}sin\,x+\frac{19}{5\sqrt{5}}ln\left|\frac{t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|+c=$$

$$=\frac{9}{5}cos-\frac{3}{5}sin\,x+\frac{19}{5\sqrt{5}}ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|+c.$$

<u>Megoldások Maple-ben.</u>

??>

Eredmény:

<u>Gyakorló feladatok.</u> Számítsa ki a következő integrálokat:

$$I_{41}=\int\frac{sin\,x+cos\,x}{2sin\,x-3cos\,x}dx,$$

Eredmény: $-\frac{3}{13}x+\frac{5}{13}ln|2sin\,x-3cos\,x|+C$

$$I_{41}=\int\frac{sin\,x+cos\,x+1}{2sin\,x+cos\,x+2}dx,$$

$$\text{Eredmény: } \frac{3}{5}x+\frac{1}{5}ln\left|2\,sin\,x+cos\,x-2\right|-\frac{1}{5}ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+1}{tg\frac{x}{2}+3}\right|+c$$

$$I_{42}=\int\frac{1+3\,sin^2 x+2\,sin\,x\,cos\,x}{sin\,x-2\,cos\,x}dx$$

$$\text{Eredmény: } \frac{1}{5}cos\,x+\frac{8}{5}sin\,x+\frac{21}{5\sqrt{5}}ln\left|\frac{2tg\frac{x}{2}+1-\sqrt{5}}{2tg\frac{x}{2}+1+\sqrt{5}}\right|+c$$

Néha nem az általános helyettesítéseket alkalmazzuk.
Példa:

$$J_{13}=\int cos\left(ln\,x\right)dx\left\{\begin{matrix}u=ln\,x;\ du=\frac{1}{x}dx\\ x=e^u;\ dx=e^u du\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int e^u\,cos\,u\,du\left\{\begin{matrix}p=cos\,u;\ dp=-sin\,u\,du\\ t=e^u;\ dt=e^u du\end{matrix}\right\}=$$

$$=e^u\,cos\,u+\int e^u\,sin\,u\,du\left\{\begin{matrix}p=sin\,u;\ dp=cos\,u\,du\\ t=e^u;\ dt=e^u du\end{matrix}\right\}=$$

$$=e^u\,cos\,u+e^u\,sin\,u-\int e^u\,cos\,u\,du\,.$$

Tehát,

$$J_{14}=\int e^u\,cos\,u\,du=e^u\left(cos\,u+sin\,u\right)-\int e^u\,cos\,u\,du\Rightarrow$$

$$J_{14}=\int e^u\,cos\,u\,du=\frac{e^u}{2}\left(cos\,u+sin\,u\right)+C$$

$$J_{15}=\int x\,cos\left(ln\,x\right)\frac{1}{x}dx=\frac{x}{2}\left[cos\left(ln\,x\right)+sin\left(ln\,x\right)\right]+C$$

$$J_{16}=\int cos\left(ln\,x\right)dx=\frac{x}{\sqrt{2}}cos\left(\frac{\pi}{4}-ln\,x\right)+C$$

7. Gyakorló feladatok

Számítsa ki a következő integrálokat:

$$I_{43} = \int \frac{dx}{\cos x},$$

$$I_{44} = \int \frac{dx}{5 + 4\sin x},$$

$$I_{45} = \int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x},$$

$$I_{46} = \int \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x},$$

$$I_{47} = \int tgx dx,$$

$$I_{48} = \int \cos^5 x dx,$$

$$I_{49} = \int \frac{\left(\sin x + \sin^3 x\right)dx}{\cos 2x},$$

$$I_{50} = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x},$$

$$I_{51} = \int \frac{\left(\cos^3 x + \cos^5 x\right)dx}{\sin^2 x + \sin^4 x},$$

$$I_{52} = \int \frac{dx}{7\sin x + 24\cos x + 25}$$, Eredmény: $-\dfrac{2}{tg\left(\dfrac{x}{2}\right) + 7} + C$

$$I_{53} = \int \frac{2dx}{\sin^2 x - \sin 2x},$$

$$I_{54} = \int \frac{\cos x dx}{2 - \cos x},$$

$$I_{55} = \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 3\cos x + 2},$$

$$I_{56} = \int tg^2\left(\frac{x}{2}\right)dx,$$

$$I_{57} = \int \cos x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx,$$

$$I_{58} = \int \frac{3\sin^3 xdx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}},$$

$$I_{59} = \int \sin 5x \cos 8xdx,$$

$$I_{60} = \int \sin 3x \sin 5xdx,$$

$$I_{61} = \int \sin^2 x.6\cos^2 xdx,$$

$$I_{62} = \int \cos 6x \cos 10xdx,$$

$$I_{63} = \int 7tg^7 8xdx,$$

$$I_{64} = \int \sin^2 x \sin 3xdx.$$

$$I_{65} = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 5\cos x}dx,$$

$$I_{66} = \int \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x - 1}dx,$$

$$I_{67} = \int \frac{3 + 3\sin^2 x + 2\sin x \cos x}{\sin x - 2\cos x}dx$$

8. Önellenőrző feladatok

Számítsa ki a következő integrálokat:

$$I_{68} = \int \frac{dx}{5 \sin x + 3 \cos x + 3}$$

$$I_{69} = \int \frac{3 \cos^3 x dx}{4 \sin^4 x},$$

$$I_{70} = \int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx,$$

$$I_{71} = \int \sin^4 x . \cos^5 x dx$$

$$I_{72} = \int \frac{3}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx,$$

$$I_{73} = \int \sin 9x \cos 3x dx,$$

$$I_{74} = \int 3 \sin^4 x . 5 \cos^2 x dx$$

$$I_{75} = \int \frac{9 \sin x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx,$$

$$I_{76} = \int \frac{2 \sin x + \cos x + 2}{\sin x - \cos x + 1} dx.$$