European Virtual Laboratory of Mathematics

EVLM	Education and Culture Leonardo da Vinci This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.	Education and Culture Leonardo da Vinci Project No. 2006 - SK/06/B/F/PP - 177436

Európai Virtuális Matematikai Laboratórium

Körtesi Péter

Gazdasági matematika online tankönyv

EVML e-könyvek
Miskolc 2008

ISBN 978-963-661-853-7

Függvény fogalmának áttekintése

A függvény fogalma már a középiskolai oktatásban is jelen van, de a fogalom pontos ismerete helyett az egyetemi, főiskolai tanulmányaik megkezdésekor a hallgatók a függvényt a valós függvény fogalmával azonosítják, sőt sokan annak is csak a grafikus képével, azon belül az első és másodfokú függvényekről és esetleg az alapvető trigonometriai függvényekről tudnak. A függvény fogalmának az áttekintése és az alapvető fogalmak tisztázása az egyetemeken azért is fontos, mert azt a hallgatók nagyon sokféle formában és sokszor eltérő megközelítésben látják viszont későbbi tanulmányaik során.

Alapvető fogalmak

Halmazok, elemek, halmazok megadása

Idézzük fel a halmaz, az elem és a hozzátartozás fogalmakat, amelyek alapfogalmak, nem meghatározással, hanem példákon keresztül, induktív úton ismerhetők meg. Az alapfogalmak a tanulás során intuitív fogalom-képzetek formájában jelennek meg, és nagyon fontos a megfelelő számú példa, amelyek lehetőleg minél szélesebb körben szemléltetik a fogalom terjedelmét.

A halmazok és elemeik közti összefüggést a hozzátartozás reláció fejezi ki, egy adott e elemre és egy adott H halmazra pontosan az egyik igaz a következő két állítás közül:

(a) $e \in H$, ekkor azt mondjuk, hogy az e elem hozzátartozik a H halmazhoz, rövidebben e eleme H-nak

(b) $e \notin H$, ekkor azt mondjuk, hogy az e elem nem tartozik a H halmazhoz, röviden e nem eleme H-nak

A halmazok megadhatók:

- tulajdonságaik leírásával, pl.: Legyen D a tízes számrendszer számjegyeinek halmaza. Ugyanezt szokás még $D = \{x | x \textit{ a tízes számrendszer számjegye}\}$ alakban írni.

- elemeik felsorolásával általában a kevés elemet tartalmazó véges halmazok adhatók meg, pl. $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, de ez utóbbi lehetőséget néhány egyszerű végtelen halmaz megadására is szokás alkalmazni, például.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}, \mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Néhány halmaznak külön neve is van, az előbbi $\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza, $\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza. Külön figyelmet érdemel az üres halmaz, jele $\varnothing$ vagy $\{\ \}$, a számítástudományban a [ ] is ezt jelöli.

A további fogalmak és a legfontosabb halmazműveletek már deduktív úton is megadhatók, az addig kialakított intuitív fogalmakra támaszkodva.

Részhalmaz

Meghatározás. *Azt mondjuk, hogy az A halmaz részhalmaza B halmaznak, ha A minden eleme egyben B-nek is eleme. Jelölése $A \subset B$.*

Érdekes megjegyezni, hogy az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza, és egy halmaz önmagának is részhalmaza, vagyis bármely A halmazra igaz, hogy

$\varnothing \subset A$, valamint $A \subset A$. Ezek a nem valódi részhalmazok, a többi (ha van ilyen) valódi részhalmaz.

Halmazok metszete, egyesítése és különbsége

Az egyszerűség kedvéért ezeket a műveleteket adott A és B halmazok esetén adjuk meg a következők szerint:

- az A és B halmazok metszetét $A \cap B$ jelöli, $A \cap B = \{x | x \in A \text{ és } x \in B\}$,

- az A és B halmazok egyesítését $A \cup B$ jelöli, $A \cup B = \{x | x \in A \text{ vagy } x \in B\}$,

- az A és B halmazok különbségét $A \setminus B$ jelöli, $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ és } x \notin B\}$.

Példa. Adottak az A ésB halmazok

$$A = \{2, 3, 5\}, B = \{1, 3, 7\}.$$

Ekkor $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{2, 3, 5, 7\}$, és $A \setminus B = \{2, 5\}$, .$B \setminus A = \{1, 7\}$

Megjegyzések.

1. Ezeknek a fogalmaknak a rögzítését, elmélyítését szolgálhatják a halmazműveletek tulajdonságainak tanulmányozása:

$$A \cap B = B \cap A, \ A \cup B = B \cup A, \text{ de } A \setminus B \neq B \setminus A;$$

$$A \cap A = A, \ A \cup A = A, \text{ de } A \setminus A = \varnothing;$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing, \ A \cup \varnothing = A, \ A \setminus \varnothing = A, \ \varnothing \setminus A = \varnothing;$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

2. Ez a tanulmányozás új fogalmak bevezetését is megkönnyíti:

- Ha $A \cap B = \varnothing$, akkor A és B idegen (diszjunkt) halmazok.

3. A tulajdonságok viszonyíthatók az előzőekben megadott részhalmaz fogalomhoz:

- Ha $A \subset B$, akkor $A \cap B = A$ és $A \cup B = B$, de ez a három állítás tulajdonképpen egyenértékű egymással, azaz bármelyikből következik a másik kettő.

Descartes szorzat

Fogalmak. Bizonyos esetekben használjuk a *rendezett elempár* fogalmát, az a és b elemek rendezett elempárjának a jele (a, b). Jegyezzük meg, hogy $(a, b) \neq (b, a)$ kivéve ha $a = b$. Hasonlóan vezethető be a *rendezett elem-hármas*, és a *rendezett elem n-es* fogalma, az a, b, c elemek rendezett elem-hármasát (a, b, c), az $a_i (i = 1, 2, ..., n)$ elemek rendezett elem n-esét $(a_1, a_2, ..., a_n)$ jelöli.

Meghatározás. *Az A és B halmazok Descartes szorzata az $A \times B$, ahol*

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Hasonlóan három, vagy több halmaz Descartes szorzata

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) | a \in A,\ b \in B,\ c \in C\},$$

illetve

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) | a_i \in A_i,\ i = 1, 2, ..., n\}.$$

Megjegyzés. Ha az adott halmazok nem különböznek, akkor használatosak a következő jelölések:

$$A \times A = A^2, \quad A \times A \times A = A^3, \text{valamint } \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n} = A^n.$$

Példa. Adottak az A, B és C halmazok

$$A = \{2,3,5\}, B = \{1,7\}, C = \{0,4\},$$

ekkor

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(2,1),(2,7),(3,1),(3,7),(5,1),(5,7)\}, \\ B \times A &= \{(1,2),(7,2),(1,3),(7,3),(1,5),(7,5)\}, \\ B^2 &= \{(1,1),(1,7),(7,1),(7,7)\}, \end{aligned}$$

$$A \times B \times C =$$

$$\{(2,1,0),(2,7,0),(3,1,0),(3,7,0),(5,1,0),(5,7,0), \\ (2,1,4),(2,7,4),(3,1,4),(3,7,4),(5,1,4),(5,7,4)\}$$

Nyilván $A \times B \neq B \times A$

A sík pontjai például az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ Descartes-szorzat elemei

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

és a középiskolában tanult elemi függvények grafikus képe mind az $\mathbb{R}^2$ sík részhalmazai.

Az előbbi példában látott $A \times B$ és $B \times A$ Descartes szorzatok is ábrázolhatók a síkban.

Ha a szóban forgó halmazok mind egy úgynevezett teljes halmaz részei (Pl.: a valós számok $\mathbb{R}$ halmazának részei, vagy az $\mathbb{R}^2$ sík részei), akkor értelmezett a kiegészítõ (komplementer) halmaz.

$$C_T A = T \setminus A = \overline{A}$$

Pl.: $T = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A = \{1,3,5,7,9\}$,

$C_T A = \overline{A} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

Ezekre teljesülnek a de Morgan szabályok:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \text{ és } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

SZÁMHALMAZOK:

A leggyakrabban elõforduló számhalmazok:
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ természetes számok
$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ egész számok
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ törtek (racionális számok)
$\mathbb{R} = \{x \mid x \textit{ ábrázolható számtengelyen}\}$ valós számok
(számegyenes egy irányított egyenes kezdőponttal és egységgel, és részhalmazai pl. a páros számok halmaza, vagy az irracionális számok halmaza).

Nyilván, mint azt a $-2 \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ összefüggések is mutatják, ezek a számhalmazok egyre bõvebbek, azaz:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Használjuk még a következő jelöléseket is:

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}\,,\ \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}\,,\ \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}\,,\ \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

A valós számok rendezése:

A valós számok $\mathbb{R}$ halmaza teljesen rendezett a $\leq$ reláció által, ami a számegyenes irányításával adható meg. Az x$\leq$y azt jelenti, hogy y nem elõzi meg x-et a számtengely növekvõ irányában.

A rendezés tulajdonságai:
$x \leq x$ (reflexív)
ha x$\leq$y és y$\leq$z, akkor x$\leq$z (tranzitív)
ha x$\leq$y és y$\leq$x, akkor x=y (antiszimmetrikus)
bármely x és y valós számra vagy x$\leq$y vagy y$\leq$x (a reláció teljes)
A rendezés nem teljes az x<y esetén (csak elõrendezés a reláció)
x<y azt jelenti, hogy x megelõzi y-t. Ez a reláció csupán tranzitív.

A rendezéssel a valós számok fontos részhalmazai adhatók meg, az intervallumok:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, hasonlóan
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, hasonlóan
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ *és* $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$.

Pl.: $(0, \infty) = \mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok halmaza $R^+ = \{x \mid x > 0\}$
vagy $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$, de szokás használni a $\mathbb{Q}^+$, ill. $\mathbb{Q}^-$ jelöléseket és a pozitív ill. negatív törtek (racionális számok) esetén.

Az intervallumokkal végezhetünk műveleteket, pl.:

$$\begin{aligned}[-2,5)\cap(-4,4) &= [-2,4)\\ (-2,2)\cup[1,3] &= (-2,3]\\ de\ (-2,2)\cap(2,4) &= \varnothing\\ (-\infty,0)\cup[0,\infty) &= \mathbb{R}\end{aligned}$$

Fontosak még az egy pontot tartalmazó, a pontra szimmetrikus intervallumok is. Ezek megadhatók az abszolutérték felhasználásával is. Emlékeztetõül álljon itt az

$$|x| = \begin{cases} x,\ ha \text{ x} \geq 0 \\ -x,\ \text{ha x<0} \end{cases}$$

meghatározása.

Ezek szerint az $|x-a| < \varepsilon$ például azt jelenti, hogy $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ill. $|x-a| \leq \varepsilon$ esetén $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$.

Ezeket az a pont szimmetrikus nyílt, illetve zárt ε-környezetének is nevezik és gyakran használjuk a határértékek, folytonosság vizsgálatánál.

A valós számok részhalmazai ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, intervallumok) szintén teljesen rendezettek a $\leq$ relációra nézve.

A valós számokban az értelmezett mûveletek, az összeadás és szorzás hasonló tulajdonságain keresztül felfedezhetjük az alapvetõ algebrai struktúrákat.

Tekintsük ezeket párhuzamosan:

	+(összeadás)	•(szorzás)
1°	$x, y \in \mathbb{R}, x{+}y \in \mathbb{R}$	$x, y \in \mathbb{R}, x{\bullet}y \in \mathbb{R}$ (jól értelmezett)
2°	$x+y = y+x$	$x \bullet y = y \bullet x$ (kommutatív)
3°	$x{+}(y{+}z) = (x{+}y){+}z$	$x{\bullet}(y{\bullet}z) = (x{\bullet}y){\bullet}z$ (asszociatív)
4°	$x+0 = 0+x = x$	$x \bullet 1 = 1 \bullet x = x$ (van semleges elem)
5°	$x+(-x) = (-x)+x = 0$	$x\frac{1}{x} = \frac{1}{x}x = 1$ (ha x≠0) (minden elemnek van szimmetrikusa)

Vegyük észre, hogy a 4° pontban megadott tulajdonságot a mûvelettõl függõen más-más szóval fejezzük ki. Az összeadás semleges eleme a 0, a szorzás semleges eleme az 1. Hasonlóan az 5° pontban adott tulajdonság az összeadásnál a szám ellentettjét jelenti, a szorzás esetén a szám fordítottját (inverz, reciprok).

Ez a nagyfokú hasonlóság az oka annak, hogy beszélünk a mûveletekre vonatkozó algebrai struktúrákról. Azt mondjuk, hogy a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza az összeadásra ($\mathbb{R}$,+) és a szorzásra ($\mathbb{R}^*, \bullet$) nézve, külön-külön kommutatív (Ábel) csoport. ($\mathbb{R}^*\bullet = \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

A kétmûveletes algebrai struktúrák esetén gyakran kapcsolódik a két struktúra. A valós számok esetén: $x \bullet (y+z) = x \bullet y + x \bullet z$, a disztributív tulajdonság biztosítja azt, hogy ($\mathbb{R}$,+,•) egy kommutatív test.

Hasonló csoport vagy test struktúrákkal másutt is találkozunk, de ezek nem merítik ki a fontos struktúrák összességét.

Figyeljük meg, hogy pl. ($\mathbb{Q}$,+,•) is kommutatív test, de pl. ($\mathbb{Z}$,+,•) nem, mivel ($\mathbb{Z}^*$, •) nem kommutatív csoport, ugyanis nem minden $z \in \mathbb{Z}$ egésznek van fordítottja a $\mathbb{Z}$-ben.(2 fordítottja $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$).

Így ($\mathbb{Z}$, •) csak kommutatív, egységelemes félcsoport, és így ($\mathbb{Z}$, +, •) kommutatív, egységelemes gyûrû.

Ezek a leggyakrabban elõforduló struktúrák.

A valós számok két alapmûveletének hasonlóságát fokozza az ismételt mûveletekre használt jelölés, bár ez eléggé eltérõ:

$$a + a + a + ... + a = n \bullet a \text{ (együttható)}$$
$$a \bullet a \bullet a \bullet ... \bullet a = a^n \text{ (hatványkitevõ)}$$

és végig gondolhatjuk ezek hasonló tulajdonságait, pl.:

$$n \bullet a + m \bullet a = (n + m) \bullet a$$
$$a^n \bullet a^m = a^{n+m}$$
$$n \bullet a - m \bullet a = (n - m) \bullet a$$
$$\tfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

ezeknek az ellenõrzését az olvasó is elvégezheti. Ennek a hasonlóságnak az oka az az izomorfia, ami az ($\mathbb{R}$, +) és ($\mathbb{R}^+$, •) között felfedezhetõ.

Izomorfia áll fenn két algebrai struktúra között, ha olyan nagyfokú a hasonlóság, hogy az egyik struktúra bármilyen mûveletsora "modellezhetõ" a másikkal. Ennek egy nagyon szép régi példája a logarléc: - itt az összeadás mûveleteivel a szorzást modellezzük. A logarléc sok évtizeden keresztül a mérnökök egyik legfontosabb eszköze volt a gyors számítások elvégzésére, ma már a zsebszámológépek helyettesítik és a logarléc csak mint tudománytörténeti eszköz maradt fenn. A logarléc, a logaritmus skála a 10-es alapú ($\log_{10}$x=lgx) hatványkitevõt mutatja és pl 2•4=8 szorzás helyett a 2-nek és 4-nek megfelelõ hatványkitevõk összegénél a 8 hatványkitevõjére mutat, azaz a "leolvasáshoz" 2 és 4-es "összege" helyett 2 és 4 szorzata, 8 áll. Így bátran tekinthetjük a logarlécet az analóg számítógépek õsének. Természetesen a logarléc használata nem csak a szorzás és osztás, hanem a hatványozás, gyökvonás és sok más számítás elvégzését is lehetõvé teszi, ezekre meglehetõsen gyors és a logarléc méretétõl függõen elég pontos közelítõ számításokat tesz lehetõvé (minél nagyobb méretû, annál pontosabb a leolvasás).

Hatványozás, gyökvonás, logaritmus

A középiskolás anyagban fontos helyet foglalnak el a hatványozás és gyökvonás tulajdonságai, és ezeket az elõbb említett izomorfia révén könnyen beláthatjuk. A továbbiakban $a > 0$ valós számot jelöl. m, n, k természetes számok

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \;, \qquad a^{0=1}, \; s\tilde{o}t \; \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

A gyökvonás sem több, mint a tört kitevõ használata:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}\text{-re is érvényes.}$$

Vegyük észre, hogy a kitevõk szintjén eggyel alacsonyabb rendû mûvelet tükrözi a hatványmennyiségek közti mûveletet.

$a^m \bullet a^n = a^{m+n}$, kitevőben: összeadás (szorzat kitevõje a kitevõk összege)
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, kitevőben: kivonás (hányados kitevője a kitevők különbsége)
$(a^m)^n = a^{m \bullet n}$, kitevőben: szorzás (hatvány hatványa a kitevők szorzata)
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, kitevőben: osztás (gyökmennyiség hatványa a kitevők hányadosa)

A törtkitevők használata megkönnyíti az irracionális kifejezések számolását:
Pl.:

$$\begin{aligned}
\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a^3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[6]{a}\sqrt{a}} &= \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{3}} = \\
&= a^{\frac{1}{9}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{18}} \cdot a^{\frac{1}{36}} = a^{\frac{4+9+2+1}{36}} = a^{\frac{16}{36}} = a^{\frac{4}{9}} = \sqrt[9]{a^4}
\end{aligned}$$

Ezt a logaritmus tulajdonságai is kifejezik. Idézzük fel a logaritmus meghatározását:
Ha $a^x = A$ akkor $\log_a A = x$, $a > 0, a \neq 1$. Külön jele van $a = 10$ és $a = e$ esetén $\log_{10} A = \lg A$, $\log_e A = \ln e$, az e számról később.
Azt is mondhatnánk, hogy a $log_a A$ megmutatja azt az x hatványkitevõt, amelyre $a^x = A$.
Az előbb megfogalmazott négy tulajdonság, a logaritmus jelöléssel:

$\log_a A \bullet B = \log_a A + \log_a B$ (szorzat kitevõje a kitevõk összege)
$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$ (hányados kitevõje a kitevõk különbsége)
$\log_a A^n = n \bullet \log_a A$ (hatvány hatványa a kitevõ szorzata)
$\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{\log_a A}{n}$ (gyökmennyiség hatványa a kitevõk hányadosa)

A logaritmus alapvetõ tulajdonságai még: $x = \log_a a^x$ és $x = a^{\log_a x}$ és $\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b$
Használhatjuk ezeket a tulajdonságokat például a logaritmus egyenletek megoldása során:

$$\begin{aligned}
\log_2 x^2 + \log_2 4 &= 6 \text{ vagy } \log_2 x^2 = \log_2 2^6 - \log_2 2^2 \\
\log_2 x^2 + 2 &= 6 \qquad \log_2 x^2 = \log_2 2^4 \\
\log_2 x^2 &= 4 \qquad x^2 = 2^4 \\
x^2 &= 2^4 \qquad x^2 = 16 \\
x^2 &= 16 \\
x &= \pm 4 \qquad x = \pm 4
\end{aligned}$$

de hasznosak lesznek a deriválás (logaritmikus deriválás) vagy határérték számításnál is, ahol

$$f(x)^{g(x)} \text{ helyett } e^{\ln f(x)^{g(x)}} \; e^{\log_e f(x)^{g(x)}}\text{-et veszünk.}$$

Más felhasználásúak pl az alábbi irracionális kifejezés kezelése:

$$\begin{aligned}
\lg\left(\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^2}\sqrt{a^3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[6]{a\sqrt{a}}}\right) &= \lg\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^2}\sqrt{a^3}}+\lg\sqrt[3]{\sqrt[6]{a\sqrt{a}}}= \\
&= \frac{1}{6}\cdot\left(\lg\sqrt[3]{a^2}+\lg\sqrt{a^3}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot(\lg a+\lg\sqrt{a})= \\
&= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{3}\lg a+\frac{3}{2}\lg a\right)+\frac{1}{18}\lg a+\frac{1}{36}\lg a= \\
\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}\right)\lg a &= \frac{4}{9}\lg a=\lg a^{\frac{4}{9}}=\lg\sqrt[9]{a^4}
\end{aligned}$$

Feladatok

1. Adott $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,4,6,8\}$, $C=\{1,3,5,7,9\}$. Számítsa ki:
a.) $A\cup B, A\cup C, A\cap B, A\cap C, B\cup C, B\cap C$
b.) $(A\cup B)\cap C, (A\cap C)\cup(B\cap C), (A\cap B)\cup C, (A\cup C)\cap(B\cup C)$.
Ezek között melyek egyenlõek és miért?
c.) $A\setminus B, B\setminus A, A\setminus C, C\setminus A, B\setminus C, C\setminus B$
d.) $A\times B, B\times A, C\times C$, ezeket ábrázolja a sík ponthalmazaiként.

2. Értelmezzük egy T teljes halmaz A, B, C, ...halmazok karakterisztikus függvényét a következõ módon:

$$f_A : T \to \{0,1\} \qquad f_A(x)=\begin{cases} 0, x\notin A \\ 1, x\in A \end{cases}$$

Ennek a legfontosabb tulajdonsága az, hogy pontosan leírja az A halmaz elemeit.

Ha $A=B$, akkor $f_A(x)=f_B(x)$ minden x-re, tehát alkalmas halmazok egyenlõségének vizsgálatára.

Igazolja, hogy a karaketrisztikus függvények rendelkeznek a következő tulajdonságokkal, amelyek jellemzik a halmazokkal végzett műveleteket:
a. $f_A(x)\bullet f_A(x)=f_A(x)$
b. $f_{\overline{A}}(x)=1-f_A(x)$
c. $f_{A\cap B}(x)=f_A(x)\bullet f_B(x)$
d. $f_{A\cup B}(x)=f_A(x)+f_B(x)-f_A(x)\bullet f_B(x)$
e. $f_{A\setminus B}(x)=f_A(x)-f_A(x)\bullet f_B(x)$

Alkalmazásként bebizonyítjuk a De Morgan azonosságokat:

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \text{ és } \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

$f_{\overline{A\cup B}}(x)=1-f_{A\cup B}(x)=1-[f_A(x)+f_B(x)-f_A(x)\bullet f_B(x)]=$
$=1-f_A(x)-f_B(x)+f_A(x)\bullet f_B(x)=(1-f_A(x))(1-f_B(x))=f_{\overline{A}\cap\overline{B}}(x)$,
tehát: $f_{\overline{A\cup B}}(x)=f_{\overline{A}\cap\overline{B}}(x)$
$f_{\overline{A\cap B}}(x)=1-f_{A\cap B}(x)=1-f_A(x)\bullet f_B(x)$ ugyanakkor
$f_{\overline{A}\cup\overline{B}}(x)=f_{\overline{A}}(x)+f_{\overline{B}}(x)-f_{\overline{A}}(x)\bullet f_{\overline{B}}(x)=$

$= 1 - f_A(x) + 1 - f_B(x) - (1 - f_A(x))(1 - f_B(x)) = 1 - f_A(x) \bullet f_B(x)\,,$
vagyis: $f_{\overline{A \cap B}}(x) = f_{\overline{A} \cup \overline{B}}(x)\,.$

Mindkét esetben azt kaptuk, hogy az adott halmazok karakterisztikus függvényei egyenlők, tehát maguk a halmazok is egyenlők.

3. Igazolja (pl.: a 2. feladatot felhasználva)

$$
\begin{gathered}
(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\
A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C \\
(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \\
A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
A \cap \left(\overline{B \cap C}\right) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = \overline{\left(\overline{A} \cup B\right)} \cup \overline{\left(\overline{A} \cup C\right)} \\
\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A \cup B \cup C}
\end{gathered}
$$

4. Adja meg a következõ intervallumokat:
$[-2,3] \cap [-1,4] =$
$[-2,3] \cup [-1,4] =$
$(-2,3) \cap (-1,4) =$
$(-2,0) \cup (0,1) =$
$(-1,0) \cap [0,2) =$
$(-\infty,1] \cap (-1,8) =$
$\{x \in \mathbb{R} |\, |x-2| \leq 1\} =$
$\{x \in \mathbb{R} |\, |x+4| < 4\} =$
$\{x \in \mathbb{R} |\, |x+1| > 3\} =$
$\{x \in \mathbb{R} |\, |x-3| \geq 1\} =$
$\{x \in \mathbb{R} |\, |x-1| \leq \frac{1}{100}\} =$

5. Írja fel az abszolut érték felhasználásával a következõ intervallumokat!
$(-2,2) = \{x \mid x \in \ \mathbb{R}, ...\}$
$[-1,1] =$
$[5,7] =$
$[-4,0) =$
$(0.99, 1.01) =$

Relációk

Meghatározás. *Legyen A és B két halmaz. Jelölje $a\rho b$ azt, hogy az $a \in A$ és $b \in B$ elemek ρ relációban vannak. Az A és B halmaz elemei között egy ρ reláció akkor ismert, ha pontosan tudjuk, hogy melyek azok az elemek, amelyek ρ relációban vannak, vagyis ha pontosan tudjuk, hogy melyek azok az összetartozó (a,b) elempárok, amelyekre $a\rho b$.*

Ezeknek az elempároknak az S_ρ halmaza, az $A \times B$ egy részhalmaza lesz a reláció tartóhalmaza, az

$$S_\rho = \{(a,b) | a \in A, b \in B, a\rho b\} \subset A \times B.$$

Az A és B halmazok elemei közti, S_ρ tartóhalmaz által leírt, ρ relációt röviden (A,B,S_ρ), vagy (A,B,ρ) jelöli.

Függvények

Meghatározás. *Két halmaz, az értelmezési tartomány (az első halmaz) és az értéktartomány (a második halmaz), valamint az elemeik közti reláció, a megfeleltetés, pontosan akkor függvény, ha az alábbi két feltétel egyidejűleg teljesül:*

(i) Az értelmezési tartomány minden elemének megfelel az értéktartománynak legalább egy eleme.

(ii) Az értelmezési tartomány minden elemének legfeljebb egy elem felel meg az értéktartományból.

Megjegyzés. Az előbbi két pont, (i) és (ii) helyett azt is mondhatnánk röviden, hogy az értelmezési tartomány minden elemének pontosan egy elem felel meg az értéktartományban, de mint látni fogjuk érdemes megkülönböztetni a megfeleltetés két tulajdonságát, mintegy "alulról" és "felülről" is behatárolni azt, mert ez két feltétel a szürjektív és injektív függvények meghatározásának alapja. Ez a két feltétel nem azt a tartalmat fedi le, ami a deduktív fogalomalkotás esetén genus proximum és differentia specifica néven ismert.

A függvények fogalma, pontosabban a megfeleltetés körülírása sokféleképpen közelíthető meg, de ezek közül a legelterjedtebb, és talán a leghasznosabb a relációkon, és a Descartes szorzaton alapszik.

Különböző jelölések, elnevezések

Az alábbiakban felsoroljuk a függvények esetén leggyakrabban használt jelöléseket, elnevezéseket.

Általában az A értelmezési tartomány elemeinek az f megfeleltetéssel a B értéktartomány elemeit hozzárendelő függvényt $f : A \to B$, vagy $A \overset{f}{\mapsto} B$ jelöli. Ha az $x \in A$ független változónak a megfelelője az $y \in B$, akkor ezt $x \overset{f}{\mapsto} y$, vagy $x \mapsto y$, jelöli és azt mondjuk, hogy x-nek a képe y, vagy y az x képe (képeleme). Egyes szerzők az $y = f(x)$ jelöléssel fejezik ki ugyanezt a tényt, és azt mondják, hogy y a függvénynek az x változóban felvett értéke, röviden a függvény értéke x-ben.

Példa. Az

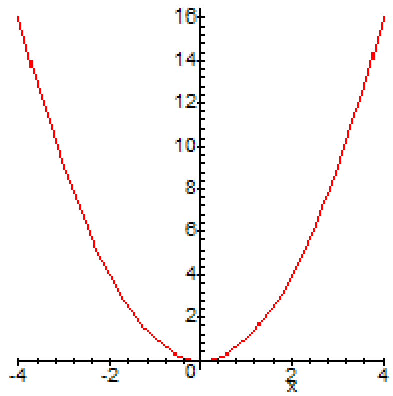
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2,$$

vagy az

$$\mathbb{R} \overset{f}{\mapsto} \mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} x^2$$

ugyanazt a függvényt jelöli, de szokás, az értelmezési tartomány és az értéktartomány megadása után, egyszerűen csak az $f(x) = x^2$, vagy az $x \mapsto x^2$ függvényről beszélni, bár ez utóbbi maga a megfeleltetés.

Gyakori fogalomzavar a függvény gráfja és a függvény grafikus képe, a függvényábra körül, ezt a két fogalmat a hallgatók gyakran felcserélik, nem használják megfelelőképpen. Az itt használt függvény gráfja kifejezés a függvényreláció tartóhalmazának szokásos elnevezése, és nem tévesztendő össze a gráfokkal, mint csúcsokból és irányított, vagy irányítatlan élekből álló alakzatokkal, amelyeknek



a meghatározása a függvények segítségével a szokásosnál pontosabban is megadható, lásd későbbiekben a Függvények néhány további alkalmazása c. fejezetet.

Meghatározás. *A függvény gráfja az értelmezési és értéktartomány Descartes szorzatának az a része, $G_f \subset A \times B$, amely az összes, a függvény megfeleltetés szerint egymáshoz rendelt x független változót és y képelemet rendezett (x, y) elempárként tartalmazza. Az $y = f(x)$ jelöléssel élve:*

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \ \in A\}.$$

Azoknak a függvényeknek az esetében, amelyeknek értelmezési és értéktartománya is a valós számok részhalmaza, ez a függvénygráf sok esetben szemléltethető egy függvényábrával (ez a függvény grafikus képe), rendszerint egy görbével, amely vázlatosan ugyan, de lehetőséget adhat arra, hogy a függvényre jellemző független változó- képelem megfeleltetést vizuálisan is el tudjuk képzelni. Ennek a függvényábrának többféle elnevezése használatos (függvény grafikus képe, függvény képe, rajza, görbéje stb.), és az analízis oktatása során gyakran felmerül a függvény tanulmányozása (függvény menete, függvény-diszkusszió), és a függvényábra vázlatos elkészítésének igénye.

Példák

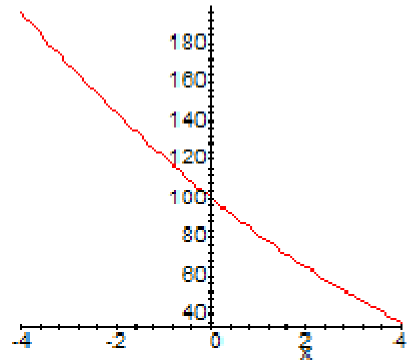
1. Példa. Az előbbiekben megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, röviden $x \mapsto x^2$ gráfja:

$$G_f = \left\{(x, x^2) \mid x \ \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

és ennek a függvénynek az ábrája a csak egy véges részt hivatott "szemléltetni":

$$x \mapsto x^2$$

2. Példa. Ez a szemléltetés, főleg ha számítógépi programot használunk, nem biztos, hogy a függvénynek a "természetét" a legjellegzetesebb pontokban ábrázolja. Például az $x \mapsto (x - 10)^2$ függvényábrát a program a következőnek "látja":



$x \mapsto (x-10)^2$

ami nyilván nem hibás, csak semmitmondó, hiszen ez a második függvény az előzőnek a jobbratolása, és így nyilván az program a függvénynek egy monoton szakaszát ábrázolja, ami nem jellemző a parabola - amúgy ismertnek mondható - alakjára. A hallgató számára viszont, aki esetleg nem ismeri ezt, azzal a veszéllyel járhat egy ilyen "beépített funkció" használata, hogy téves következtetésre juthat.

Ráadásként ez a függvényábra még a valós változójú valós függvények esetében sem mindig készíthető el.

3. Példa. A

$$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha az } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{ha az } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ún. Dirichlet függvény képének csak bizonyos pontjait tudjuk megrajzolni, hiszen a függvényértékek "sűrűn" lefedik az $y = 0$ és $y = 1$ egyeneseket.

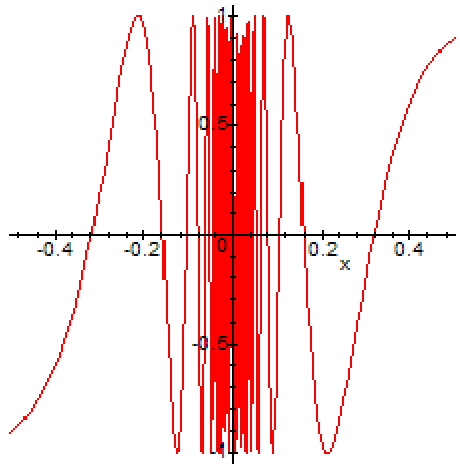
4. Példa. Az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{ha az } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha az } x = 0 \end{cases}$$

képe "csak" az origó környezetében nem rajzolható meg, még a gép "igyekezete" ellenére sem, a számítógép diszkrét aritmetikája miatt:

$\sin \frac{1}{x}$

5. Példa. Az előbbi két példában a függvényábra elkészítésének lehetetlensége abból is adódik, hogy ezek a függvények nem folytonosak (az egyik sehol



sem az, a másik csak az origóban), de ha az előző példának a mintájára az origóban is folytonos

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{ha az } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha az } x = 0 \end{cases}$$

függvényt tekintjük, akkor a számítógép által "megrajzolt" ábrákon az origó környékén az egyre "pontosabb függvényábrán" azt látjuk, hogy minél apróbb részleteket nagyítunk ki, a függvényábra annál "kaotikusabban" viselkedik.

$$x \sin \frac{1}{x}$$

A **Plotting curves c.** MT- projekt alkalmazása során a hallgatók kifejezetten ezeket a kérdéseket tanulmányozhatják a MacInstosh számítógépeken alkalmazható Mathematical MacTutor szoftver segítségével, lásd a CD-mellékletben a MacTutor projects könyvtárat.

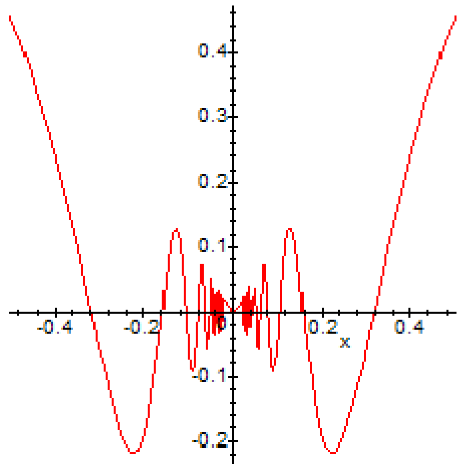
A függvény fogalmának pontosítása

Meghatározás. *Az (A, B, G_f) relációt, az A halmazbeli változójú B halmazbeli értékekkel rendelkező f függvénynek nevezzük, ha egyidőben teljesül a következő két feltétel:*

(i) Bármely $x \in A$ független változó esetén létezik legalább egy $y \in B$, amelyre $(x, y) \in G_f$.

(ii) Bármely $x \in A$ független változó esetén legfeljebb egy olyan $y \in B$ létezik, amelyre $(x, y) \in G_f$.

Megjegyzés. Az (A, B, G_f) jelölés helyett szokás még a következő jelölések egyikét használni:



$$(A, B, f),\ \ f : A \to B,\ \ \text{vagy } A \overset{f}{\mapsto} B.$$

Példa. Vegyük az $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmazokat, valamint az $A \times B$ Descartes szorzatuknak egy részhalmazát, a

$$G_f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\} \subseteq A \times B$$

Az (A, B, G_f) hármas egy függvény, aminek az értelmezési tartománya A, érték-tartománya B. Ugyanez a függvény még megadható az (A, B, f), $f : A \to B$, vagy $A \overset{f}{\mapsto} B$ alakok egyikével, ahol $f(x) = x^2$, $x \overset{f}{\mapsto} x^2$, vagy csak egyszerűen $x \mapsto x^2$.

Megjegyzés. A függvények megadására használt különböző alakok más és más szemléletet hivatottak hangsúlyozni, ezért alkalmazásuk a félreérthetőség és a hibák elkerülése végett fokozott körültekintést igényel, lásd **Kósa András:** *Vírusok a matematikában* c. könyvét.

A függvényfogalom mélyebb megértéséhez célszerű a függvények egyenlőségét, kiterjesztését, és leszűkítését tanulmányozni.

Függvények egyenlősége, kiterjesztése, és leszűkítése

Meghatározás. *Két függvény, az* (A_1, B_1, G_{f_1}) *és* (A_2, B_2, G_{f_2}), *pontosan akkor egyenlők, ha* $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, *és* $G_{f_1} = G_{f_2}$. *Jelölése másképp:* $(A_1, B_1, f_1) = (A_2, B_2, f_2)$.

Példa. Vegyük ismét az $A = \{1, 2, 3\}$ és $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmazokat, és a függvény gráfja legyen

$$G_f = \{(1,1),(2,4),(3,9)\} \subseteq A \times B$$

Vegyük továbbá a $C = \{1,2,3\}$ és $D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ halmazokat. és a $g : C \to D$ függvényt, ahol $g(x) = x^2$. Az (A, B, G_f) függvény egyenlő lesz a (C, D, g) függvénnyel a különbözőképpen alkalmazott jelölések ellenére, hiszen értelmezési tartományaik, értéktartományaik rendre megegyeznek, és a megfeleltetés során az értelmezési tartomány minden x elemének pontosan ugyanazt az y képelemet rendelik hozzá.

Ugyanakkor az (A, E, h), ahol $h(x) = x^2$, $E = \{1,4,9\}$, esetén $(A, B, G_f) \neq (A, E, h)$ annak dacára, hogy $f(x) = h(x)$ minden $x \in A$ esetén, mivel az értéktartományuk különböző, sőt, mint azt később látni fogjuk (A, E, h) bijektív, miközben (A, B, G_f) nem az.

Ugyanakkor az (A, B, G_f) az (A, E, h)-nek egy kiterjesztése, és (A, E, h) az (A, B, G_f) egy leszűkítése. A függvénykiterjesztés, és a függvényleszűkítés érintheti a függvény értelmezésében szereplő bármely elemet, nem csak az értéktartományt.

Meghatározás. *Ha az (A, B, G_f) és (C, D, G_g) függvények esetén $A \subset C$, vagy $B \subset D$ vagy $G_f \subset G_g$, akkor (A, B, G_f) egy leszűkítése a $(C, D, G_g)-$nek, illetve (C, D, G_g) egy kiterjesztése az (A, B, G_f)-nek.*

Függvény inverze, szürjektív, injektív és bijektív függvények

Meghatározás. *Legyen (A, B, G_f) egy függvény, és tekintsük a*

$$G_{f^*} = \{(y,x) \mid (x,y) \in G_f\}$$

halmazt. Ha (B, A, G_{f^*}) szintén függvény, akkor ez az (A, B, G_f) függvény inverze.

Megjegyzés. Általában (B, A, G_{f^*}) nem függvény, (csak az inverz reláció).

Példa. Vegyük az $A = \{-1,1,2,3\}$, és $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ halmazokat és a

$$G_f = \{(-1,1),(1,1),(2,4),(3,9)\} \subseteq A \times B$$

Nyilvánvalóan (A, B, G_f) függvény, de (B, A, G_{f^*}), ahol

$$G_{f^*} = \{(1,-1),(1,1),(4,2),(9,3)\} \subseteq B \times A$$

már nem függvény, hiszen a függvény meghatározásában szereplő feltételek egyikét sem teljesíti, $3 \in B$ elemnek egyáltalán "nincs visszafele képe", nincs olyan $a \in A$ amire $(3, a) \in G_{f^*}$, ugyanakkor például az $1 \in B$ elemnek egynél több "képe van visszafele" , hiszen $(1,-1) \in G_{f^*}$,mellett $(1,1) \in G_{f^*}$.

Ez az ellenpélda arra is jó, hogy világossá váljon az a két feltétel, ami az inverz függvény létezéséhez szükséges, vagyis az inverz függvény csak akkor létezhet, ha a a függvényben minden értéktartománybeli elemnek "van visszafele is legalább egy képe" és egyik értéktartománybeli elemnek "sincs egynél több képe visszafele". Ezt a két tulajdonságot egy függvény külön-külön is teljesítheti, ez vezethet el a szürjektív és injektív függvények fogalmához.

Meghatározás. *Legyen egy (A, B, G_f) függvény. Ha bármely $y \in B$ elem esetén létezik legalább egy $x \in A$, amelyre $(x, y) \in G_f$, akkor (A, B, G_f) egy szürjektív függvény.*

Meghatározás *Legyen egy (A, B, G_f) függvény. Ha bármely $y \in B$ elem esetén legfeljebb egy olyan $x \in A$ létezik, amelyre $(x, y) \in G_f$, akkor (A, B, G_f) egy injektív függvény.*

Meghatározás. *Az (A, B, G_f) függvény bijektív, ha egyidejűleg szürjektív és injektív.*

Megjegyzés. A bijektív függvényeknek van inverze, hiszen teljesítik az inverz függvény létezésének feltételeit, az (A, B, G_f) függvény inverze a (B, A, G_{f^*}), ahol $G_{f^*} = \{(y, x) \mid (x, y) \in G_f\}$. Az (A, B, G_f) inverz függvényét rendszerint $(B, A, G_{f^{-1}})$ jelöli, ahol f^{-1} az inverz reláció jele. Másként jelölve: Az (A, B, f) bijektív függvény inverze a (B, A, f^{-1}).

1. példa. Az $A = \{-1, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 9\}$, valamint a

$$G_f = \{(-1, 1), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\} \subseteq A \times B$$

esetén (A, B, G_f) szürjektív függvény (de nem injektív).

2. példa. Az $A = \{-1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 4, 7, 9\}$, valamint a

$$G_f = \{(-1, 1), (2, 4), (3, 9)\} \subseteq A \times B$$

esetén (A, B, G_f) injektív függvény (de nem szürjektív).

3. példa. Az $A = \{-1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 9\}$, valamint a

$$G_f = \{(-1, 1), (2, 4), (3, 9)\} \subseteq A \times B$$

esetén (A, B, G_f) bijektív függvény (szürjektív és injektív egyidejűleg).

Ennek a bijektív függvénynek van inverze, és ez az inverz a $(B, A, G_{f^{-1}})$, ahol

$$G_{f^{-1}} = \{(1, -1), (4, 2), (9, 3)\} .$$

Érdekes megjegyezni azt, hogy az (A, B, G_f) függvény egy más jelöléssel az $f(x) = x^2$ alakban is megadható, ugyanakkor ennek a függvénynek az inverze nem írható $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ alakban, mivel ez az 1-hez az 1-et és nem -1-et rendelné.

Értelemszerûen, ha egy függvény injektív és szürjektív, akkor megfordítható (bijektív), azaz van inverze. Az f^{-1}jelû inverz függvényre $f^{-1} : B \to A$

Ennek egyik nagyon szép példája a középiskolában tanult exponenciális és logaritmus függvény.

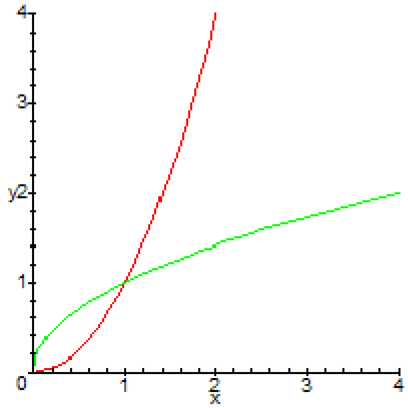
Pl. ha $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = 2^x$ akkor $f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_2 x$

egymás inverzei.

A számhalmazokon értelmezett elemi függvények (Pl.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a valós függvények*) az $\mathbb{R}^2$=$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Descartes koordináta rendszerben ábrázolhatók.

Pl.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ jólismert ábrája a parabola.

Azt, hogy egy függvény injektív, a függvényábra is elárulhatja. Ez esetben ugyanis bármilyen $y = b$ vízszintes legfeljebb egyszer metszi a függvénygörbét.



A függvény szürjektív, ha minden $y = b$ ($b \in B$) metszi (legalább egyszer) a görbét.(Pl.: az adott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ nem injektív, mert ($f(-1) = f(1) = 1$) Az adott példa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nem is szürjektív, hiszen $y = -1$ nem metszi az ábrát. .

Tehát az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nem injektív, sem szürjektív. Ennek a függvénynek lehet olyan leszûkítését venni, ami viszont bijektív.

Lásd például az $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ $\quad f(x) = x^2$-et.

Az inverz függvények ábrája szimmetrikus a koordináta rendszer I. negyedének szögfelezõjére nézve, ezt érdemes megjegyezni az ábrák elkészítésénél.

Függvény és inverzének grafikus képe

Érdekes kapcsolat van a függvény és inverzének grafikus képe között, ha ugyanabban a koordinátarendszerben, egymás mellett ábrázoljuk őket.

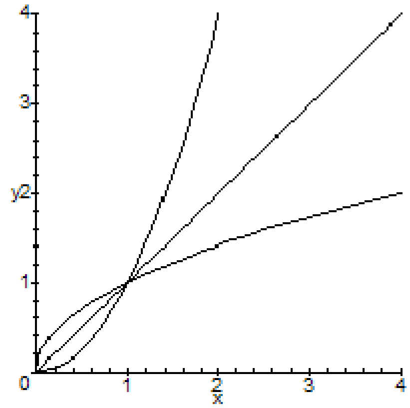
Az előbbi 3. példában említett függvényhez hasonlóan, ha tekintjük az $A = [0, \infty)$, a $B = [0, \infty)$ halmazokat és az (A, B, f) függvényt, amelyre $f(x) = x^2$, valamint a (B, A, f^{-1}) inverz függvényt, amelyre $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ és mindkettőt egyidejűleg ábrázoljuk a koordinátarendszerben, akkor a következő függvényábrákat kapjuk.

Észrevehető, hogy a két függvényábra az első negyed szögfelelzőjére, másképp az $y = x$ egyenesre (vagy $f(x) = x$, elsőfokú függvényre) szimmetrikus:

Az inverz függvény megkeresése

Ismét az előbbi 3. példában említett függvényre hagyatkozunk, ha tekintjük az $A = [0, \infty)$, a $B = [0, \infty)$ halmazokat és az (A, B, f) függvényt, amelyre $f(x) = x^2$, valamint a (B, A, f^{-1}) inverz függvényt, amelyre $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. A kérdés az, hogy miként juthatunk el általában egy függvény inverz függvényének a kifejezéséhez, ha az adott függvényről tudjuk, hogy bijektív, tehát van inverze?

Az említett példában tekinthetjük az adott függvénykapcsolatot kifejező $y = x^2$ kétváltozós egyenletet. Ha ezt "megoldjuk" x-re, vagyis ha most nem az y



függő változót fejezzük ki az x független változóval, hanem fordítva, akkor az $x = \sqrt{y}$, és $x = -\sqrt{y}$ értékek adódnak.

Az inverz függvényhez vezető inverz relációt egyszerű "változócsere" adja, ugyanis az inverz függvényben a független változó az eredeti függvény függvényértéke, illetve, a függvényértéke az eredti függvény független változója lesz.

Valóban ez a két lehetőség, ami közül választhatunk.

Ha az elsőt választjuk, akkor az $x = \sqrt{y}$ relációban az $y = \sqrt{x}$ "változócsere", elvezet a (B, A, f^{-1}) inverz függvényhez, amely a $B = [0, \infty)$ halmazt képezi le az $A = [0, \infty)$ halmazra, amelyre $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Érdemes tudni azt is, hogy egy másik inverzet is értelmezhetünk, ha az eredeti függvény helyett tekintjük az $A = (-\infty, 0]$, a $B = [0, \infty)$ halmazokat és az (A, B, f) függvényt, amelyre $f(x) = x^2$, és a második lehetőséget választjuk az inverz relációban, azaz ha az $x = -\sqrt{y}$ relációban végezzük el a "változócserét, és így $y = -\sqrt{x}$ vezet el a(B, A, f^{-1}) inverz függvényhez, amely a $B = [0, \infty)$ halmazt képezi le az $A = (-\infty, 0]$ halmazra, amelyre $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

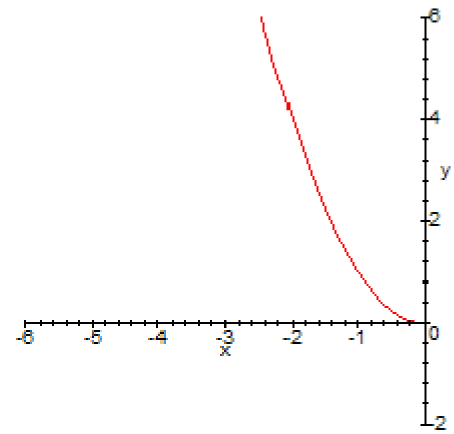
Ekkor az eredeti függvény az $f : (-\infty, 0] \to [0, \infty), f(x) = x^2$ és ábrája:

ugyanakkor az inverz függvény az $f : [0, \infty) \to (-\infty, 0], f(x) = -\sqrt{x}$ és ábrája:

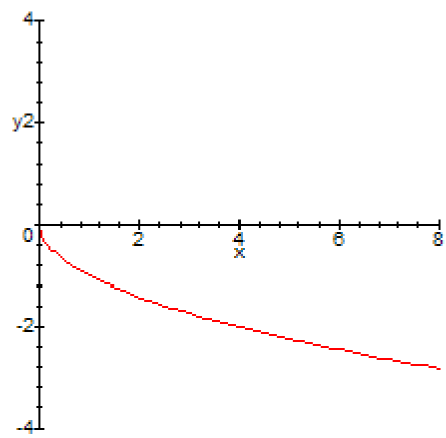
A függvények megnevezése

Az oktatás során gyakran kell megemlíteni bizonyos függvényeket, és gyakran használjuk bizonyos függvények gyűjtőnevét, ezekben is sok tévedési lehetőség rejlik. A valós függvény, a kétváltozós függvény, vagy a vektorfüggvény elnevezések helyett talán az a járható út, ha a függvényeket "hosszú nevükön" nevezzük, egy szövegkörnyezetben legalább az első alkalommal.

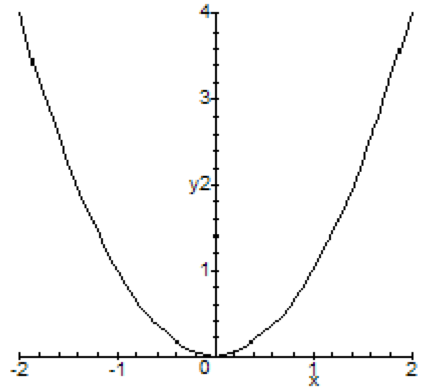
Helyes tehát a valós változójú valós függvény (a valós függvény helyett), továbbá nyugodtan használhatók a két- (valós) változós valós függvény, a komplex változójú valós függvény és a 2 dimenziós vektor változójú valós függvény



6
4
y
2
0
-2
-6
-5
-4
-3
-2
-1
x



4
y2
0
-2
-4
2
4
6
8
x



elnevezések, hiszen ezek dacára a hasonlóságnak, más és más értelmezési tartományra utalnak. Ez a négy - alapjában különböző - eset mind beilleszthető a valós függvény elnevezésbe, de ugyanakkor félreértésre is okot adhat.

Hasonlónak tekinthetők és mégis mást-mást jelentenek a három- (valós) változós valós függvény, és a 3 dimenziós vektor változójú valós függvény elnevezések is.

Bár kínosan precíznek tűnik, talán helyesebb, az előbbi fenntartással élve, a skalár-vektor, vektor-skalár és vektor-vektor függvények helyett, a pontosabb fogalmat használni, például kétdimenziós vektor változójú háromdimenziós vektor értékű függvényről beszélni.

Az elemi függvények áttekintése

Az úgynevezett elemi függvények sok fontos tulajdonsággal rendelkeznek, és a függvénytranszformációk ismeretében a grafikus képük ábrázolása, illetve a függvénygörbe vázlatos megrajzolása is lehetővé válik. Ugyanez az analízis eszközeivel, a határértékek, a deriváltak alkalmazásával még pontosabban elvégezhető.

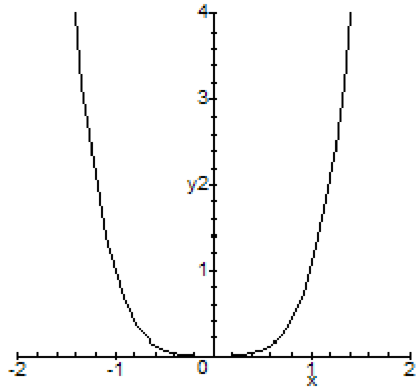
1. Hatványfüggvények

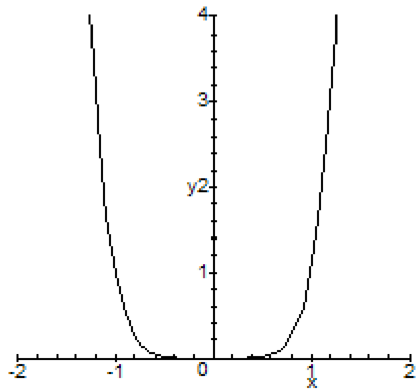
Azt az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós változójú, valós függvényt, amelyre $f(x) = x^n, n \geq 1, .n \in \mathbb{N}$, hatványfüggvénynek nevezzük.

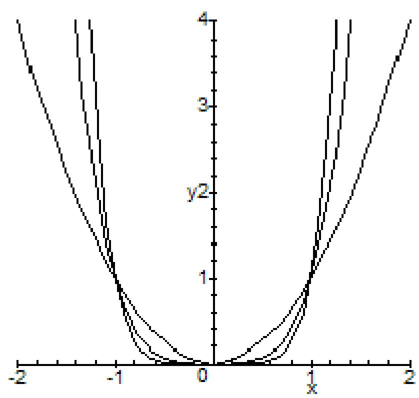
Meg kell különböztetnünk két hatványkitevő típust, a páros és páratlan kitevőket külön-külön tárgyaljuk.

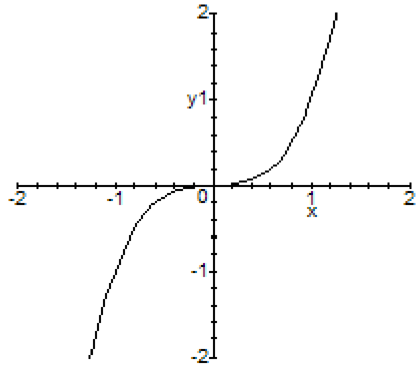
Ha n páros, azaz $n = 2k$, akkor a függvénycsaládnak az y tengely a szimmetriatengelye, és az alapfüggvényhez, az egyszerű (másodrendű) parabolához hasonlít. A következő ábrák az $f(x) = x^n$ függvényt ábrázolják rendre , $f(x) = x^2, f(x) = x^4, f(x) = x^6$, majd egy összehasonlítás végett együtt a három, a "legmeredekebb" természetesen az utóbbi.

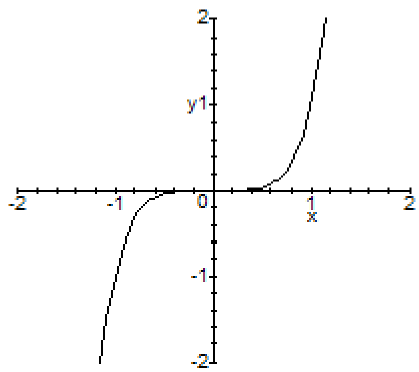
$$, f(x) = x^2$$
$$f(x) = x^4$$
$$f(x) = x^6$$


4
3
y2
1
-2
-1
0
1
x
2


4
3
y2
1
-2
-1
0
1
x
2


4
3
y2
1
-2
-1
0
1
x
2





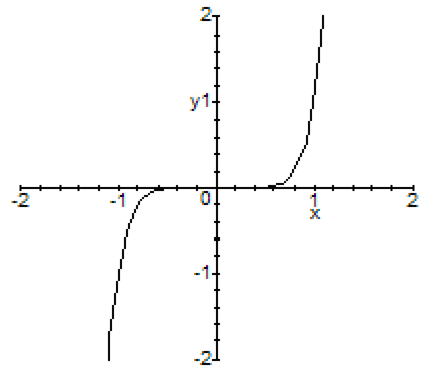
$$f(x) = x^2, f(x) = x^4, f(x) = x^6$$

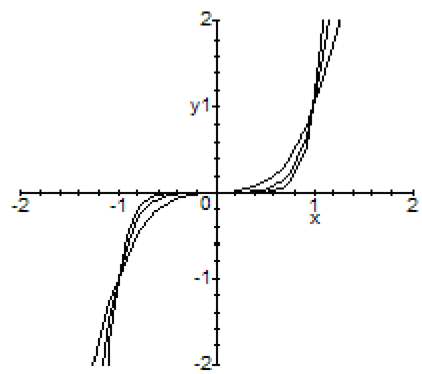
MAPLE: plot([x^2,x^4,x^6],x=-2..2, y=0..4);

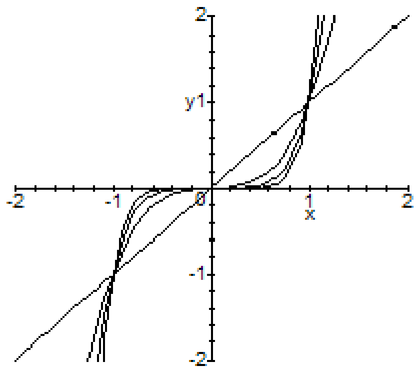
Észrevehető, hogy mindhárom függvényábra áthalad a $(-1, 1), (0, 0)$ és $(1, 1)$ pontokon, ennek a függvénytípusnak ez a három "fixpontja"van.

Ha n páratlan, azaz $n = 2k + 1$, akkor a függvénycsaládnak az origó a szimmetriapontja, és az alapfüggvényhez, az ún. harmadrendű parabolához hasonlít. A következő ábrák az $f(x) = x^n$ függvényt ábrázolják rendre , $f(x) = x^3, f(x) = x^5, f(x) = x^7$, majd egy összehasonlítás végett együtt a három, a "legmeredekebb" természetesen az utóbbi.

$$f(x) = x^3$$
$$f(x) = x^5$$
$$f(x) = x^7$$
$$f(x) = x^3, f(x) = x^5, f(x) = x^7$$


2
y1
-2
-1
0
1
x
2
-1
-2


2
y1
-2
-1
0
1
x
2
-1
-2



Ha az első negyed szögfelezőjét is feltüntetjük, kiderül, hogy ennek a függvénycsaládnak is van három fixpontja, és ezek a $f(x) = x$, az I.-III.-negyed szögfelezője mentén vannak, azaz a $(-1,-1),(0,0)$ és $(1,1)$ pontok.

$$f(x) = x, f(x) = x^3, f(x) = x^5, f(x) = x^7$$

MAPLE: plot([x, x^3,x^5,x^7],x=-2..2, y=-2..2);

2. Hatványfüggvények negatív kitevővel

Azt az $f : \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ valós változójú, valós függvényt, amelyre $f(x) = x^{-n}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, negatív kitevős hatványfüggvényeknek, vagy reciprok függvényeknek nevezzük, mivel általában a fordított arányosságot jellemzik.

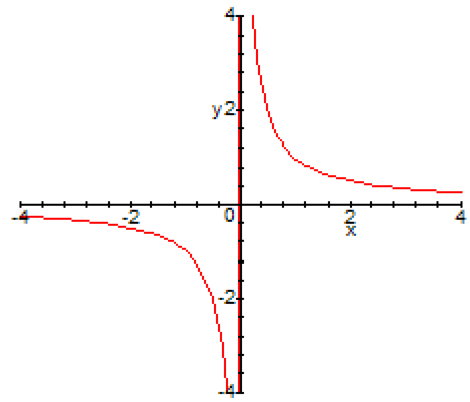
Az alapfüggvény, és egyben a függvénycsalád névadója az $f : \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}$ valós változójú, valós függvény, amelyre $f(x) = x^{-1}$, és amely a fordítottan arányos mennyiségekre jellemző.

$$f(x) = x^{-1}$$

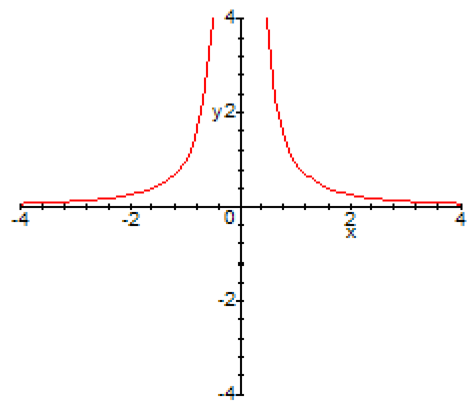
Ennek a függvénycsaládnak az 0 nem tartozik az értelmezési tartományához, viszont a függvényábrát célszerű gondolatban egy "segédegyenessel", az $x = 0$ egyenletű függőleges egyenessel (ez tulajdonképpen maga az y tengely) kiegészíteni, ezt függőleges asszimptótának nevezik, és az a szerepe, hogy a függvénynek egy "kiegyenesedő" szakaszát jellemezze. Ugyanennek a függvénynek van két vízszintes asszimptótája is, az $y = 0$ (az x tengely), mindkét irányban, ezeket az $x \to \infty$, és az $x \to -\infty$ "irányoknak" nevezzük.

Ebben az esetben is a két hatványkitevő típust, a páros és páratlan kitevőket külön-külön tárgyaljuk.

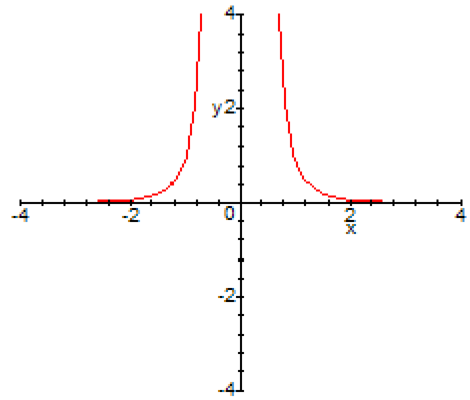
Ha n páros, azaz $n = 2k$, akkor a függvénycsaládnak az y tengely a szimmetriatengelye. A következő ábrák az $f(x) = x^{-n}$ függvényt ábrázolják rendre $f(x) = x^{-2}, f(x) = x^{-4}, f(x) = x^{-6}$, majd egy összehasonlítás végett együtt a három, a "legmeredekebb" természetesen az utóbbi.



4
y2
-4
-2
0
2
x
4
-2
-4



4
y2
-4
-2
0
2
x
4
-2
-4



$$f(x) = x^{-2}$$
$$f(x) = x^{-4}$$
$$f(x) = x^{-6}$$
$$f(x) = x^{-2}, f(x) = x^{-4}, f(x) = x^{-6}$$

MAPLE: plot([1/x^2,1/x^4,1/x^6],x=-4..4, y=-4..4);

Észrevehető, hogy mindhárom függvényábra áthalad a $(-1, 1)$ és $(1, 1)$ pontokon, ennek a függvénytípusnak ez a két "fixpontja"van, az origo most nem tartozik a függvény értelmezési tartományához.

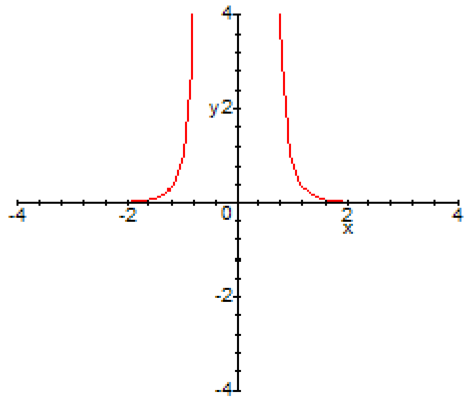
Ha n páratlan, azaz $n = 2k + 1$, akkor a függvénycsaládnak az origó a szimmetriapontja. A következő ábrák az $f(x) = x^{-n}$ függvényt ábrázolják rendre $f(x) = x^{-1}, f(x) = x^{-3}, f(x) = x^{-5}, f(x) = x^{-7}$, majd egy összehasonlítás végett együtt a négy, a "legmeredekebb" természetesen az utóbbi.

$$f(x) = x^{-1}$$
$$f(x) = x^{-3}$$
$$f(x) = x^{-5}$$
$$f(x) = x^{-7}$$
$$f(x) = x^{-1}, f(x) = x^{-3}, f(x) = x^{-5}, f(x) = x^{-7}$$

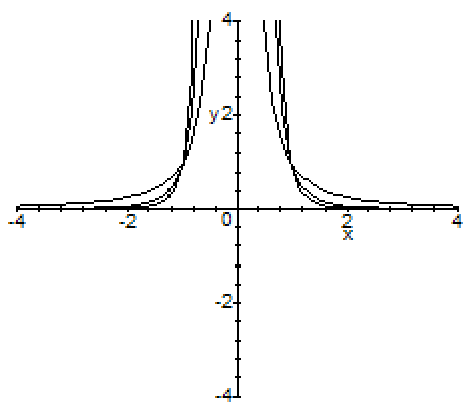
Ha az első negyed szögfelezőjét is feltüntetjük, ismét kiderül, hogy ennek a függvénycsaládnak is van két fixpontja, és ezek a $f(x) = x$, az I.-III.-negyed szögfelezője mentén vannak, azaz a $(-1, -1)$ és $(1, 1)$ pontok.

MAPLE: plot([1/x, 1/x^3,1/x^5,1/x^7],x=-4..4, y=-4..4);

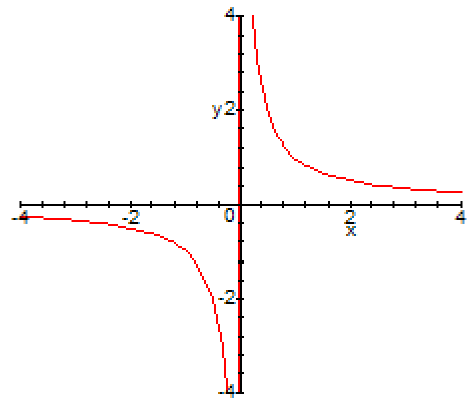
Azt a tényt, hogy a függvénygörbe szimmetriatengelye az y tengely, és ami a páros kitevőkre jellemző a következő egyenlőséggel fejezhetjük ki: $f(-x) = f(x)$, bármely $x \in \mathbb{R}$, ezeket a függvényeket PÁROS FÜGGVÉNYEKNEK nevezzük.

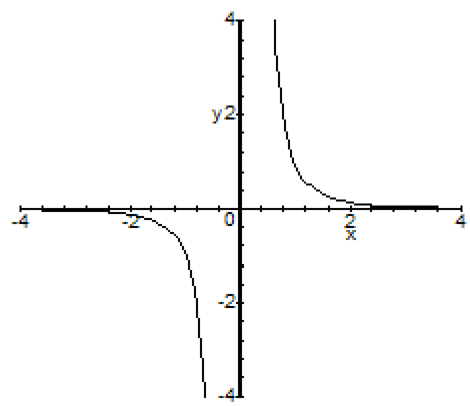


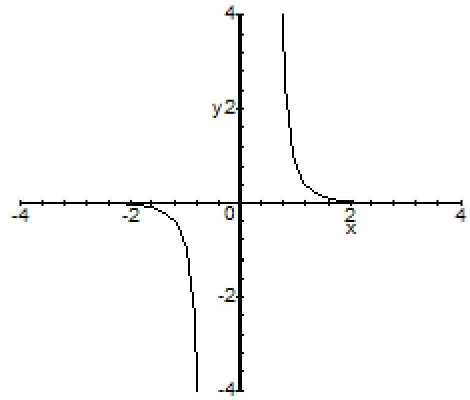
4
y2
-4
-2
0
2
x
4
-2
-4

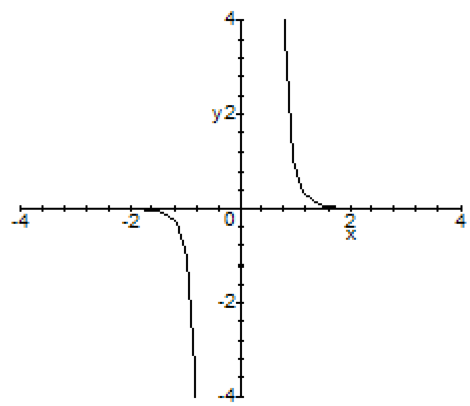


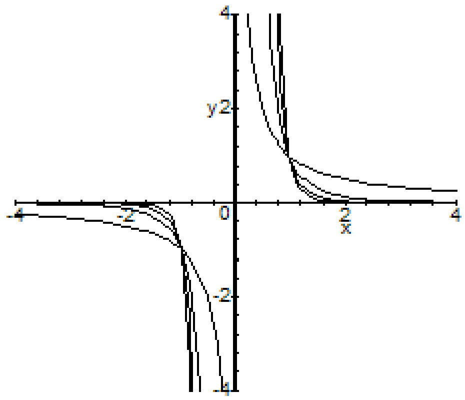
4
y2
-4
-2
0
2
x
4
-2
-4

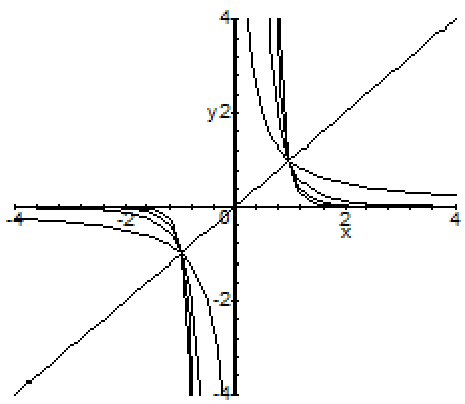

4
y 2
-4
-2
0
2
x
4
-2
-4

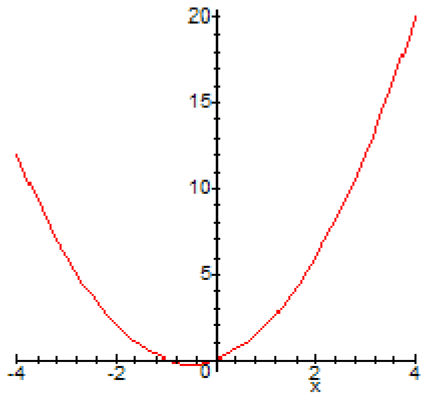

4
y 2
-4
-2
0
2
x
4
-2
-4


4
y2
-4
-2
0
2
x
4
-2
-4


4
y2
-4
-2
0
2
x
4
-2
-4


4
y2
0
-4
-2
2
x
4
-2
-4


4
y2
0
-4
-2
2
x
4
-2
-4



Azt, hogy a függvénygörbe szimmetriapontja az origo, és ami a páratlan kitevőkre jellemző a következő egyenlőséggel fejezhetjük ki: $f(-x) = -f(x)$, bármely $x \in \mathbb{R}$, ezeket a függvényeket PÁRATLAN FÜGGVÉNYEKNEK nevezzük.

Páros függvény lesz pl. az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós változójú, valós függvényt, amelyre $f(x) = \cos x$, de az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós változójú, valós függvényt, amelyre $f(x) = \sin x$ páratlan.

A páros és páratlan függvények fogalma nem meríti ki a függvények összességét, vagyis van olyan függvény is, ami se nem páros, se nem páratlan, pl. $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, amelyre $f(x) = x + x^2$, mivel $f(-x) = -x + x^2$ és ez nem egyezik meg sem az $f(x) = x + x^2$, sem a $-f(x) = -x - x^2$ értékével. A függvénygörbe nem lesz szimmetrikus sem az y tengelyre, sem az origóra.

$$f(x) = x + x^2$$

MAPLE: plot(x+ x^2,x=-4..4);

A függvények szimmetriája általánosabban is megfogalmazható:

Ha egy függvénynek van függőleges szimmetriatengelye, az pl. az $x = a$ egyenes, akkor teljesül az, hogy $f(a - x) = f(a + x)$, bármely $x \in \mathbb{R}$.

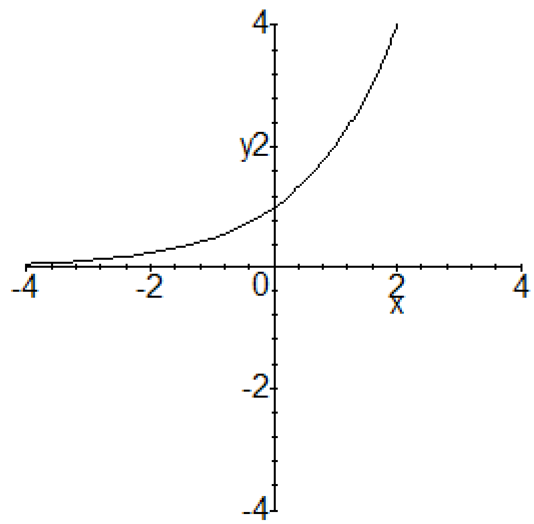
Ha egy függvénynek az (a, b) pont szimmetriapontja ($b = f(a)$), akkor az teljesül, hogy $b - f(a - x) = f(a + x) - b$, bármely $x \in \mathbb{R}$.

Ez utóbbi szemléletesebben azt jelenti, hogy $b = \frac{f(a-x)+f(a+x)}{2}$.

Ilyen szimmetriát mutatnak azok az elemi függvények, amelyek a páros, vagy páratlan függvényekből bizonyos függvénytranszformációval kaphatók.

További elemi függvények

A leggyakrabban előforduló függvények az exponenciális- és logaritmusfüggvények, a trigonometrikus függvények, valamint ezek inverzei. Az e szám



bevezetése lehetővé teszi a hiperbólikus és area függvények tanulmányozását is, és a függvény fogalma kiterjeszthető a polár koordinátás és paraméteres görbékre is. Fontos szerepet kapnak a kúpszeletek, amelyek leginkább Déscartes koordinátás alakjukban ismertek.

1. Az exponenciális- és logaritmus függvények

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós változójú, valós függvényt, amelyre $f(x) = a^x$, ahol $a > 0$, és $a \neq 1$, a alapú exponenciális függvénynek nevezzük.

Pl. $f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = 2^x$:

$$f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = 2^x$$

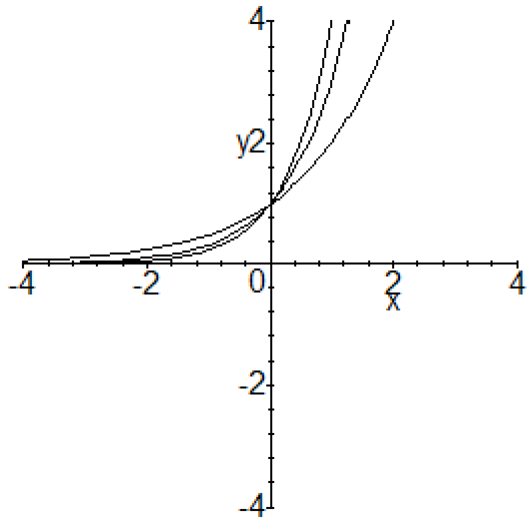
Ha most az a alap szerepére vagyunk kiváncsiak, akkor beláthatjuk, hogy külön-külön eseteknek vehető az $a > 1$, és a $1 > a > 0$.

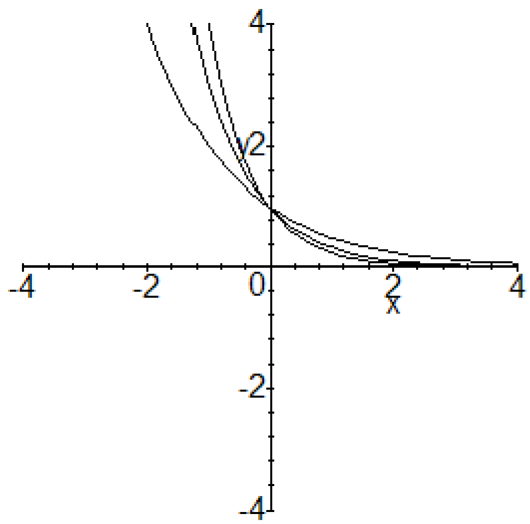
Az első esetben ($a > 1$), az exponenciális függvény nő, és annál meredekebb minél nagyobb az a :

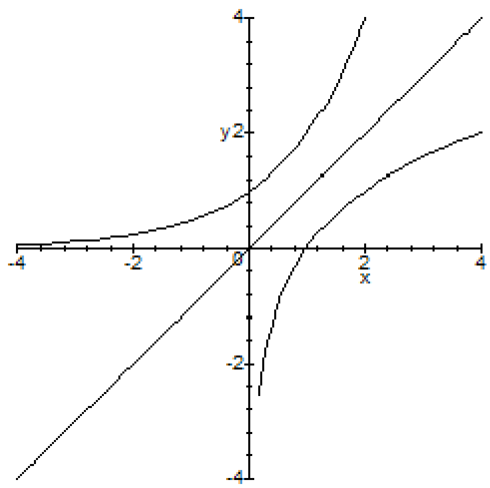
$$f(x) = 2^x, f(x) = 3^x, f(x) = 4^x (\text{ a legmeredekebb az utóbbi})$$

MAPLE: plot([2^x,3^x,4^x],x=-4..4, y=-4..4);

Ha $1 > a > 0$, akkor csökkenő a függvény, és annál "meredekebben", minél közelebb van az a 0-hoz.


4
y2
-4
-2
0
2
4
x
-2
-4


4
y2
-4
-2
0
2
4
x
-2
-4



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ (a legmeredekebb az utóbbi)

MAPLE: plot([(1/2)^x,(1/3)^x,(1/4)^x],x=-4..4, y=-4..4);

Látható, hogy az exponenciális függvények fixpontja a $(0, 1)$ pont, az alaptól függetlenül.

Fontos megjegyezni, hogy a hatványmennyiségek tulajdonságai szerint a függvényérték $a^x > 0$, bármely x esetén. Tehát pontosíthatunk:az exponenciális függvény értékhalmaza ugyan általában véve a valós számok halmaza, de ÉRTÉKKÉSZLETE a pozitív számok, a $(0, \infty)$ intervallum, és az exponenciális függvénynek van egy vizszintes aszimtótája, az $y = 0$, az x tengely, pontosabban annak az egyik "vége", az a alaptól függően: ha $a > 1$, akkor a $-\infty$ irányban, ha pedig $0 < a < 1$, akkor a $+\infty$ irányban.

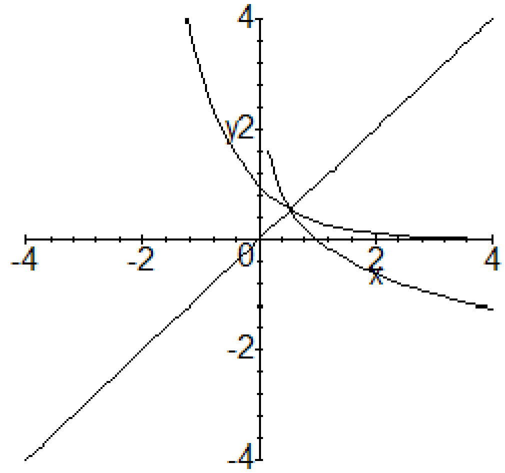
Tehát az exponenciális függvényt célszerű a következőképpen értelmezni: $f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = a^x$, ahol $a > 0$, és $a \neq 1$ (mert ekkor létezik az inverze, a logaritmus függvény). Az inverz függvény, az a alapú logaritmus pontosan a fordított megfeleltetést követi:

$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, ahol $a > 0$, és $a \neq 1$.

Ez abban megnyilvánul, hogy ha ugyanabban a koordinátarendszerben ábrázoljuk az exponenciális függvényt, és a megfelelő logaritmusfüggvényt is, akkor a két görbe egymásnak tükörképe az első negyed szögfelezőjére, hiszen a függvény és inverzének képe szimmetrikus az $y = x$ egyenesre.

A következő ábra az $f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = 2^x$, és az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$ függvénygörbéket ábrázolja:

MAPLE: plot([2^x,log[2](x),x],x=-4..4, y=-4..4);

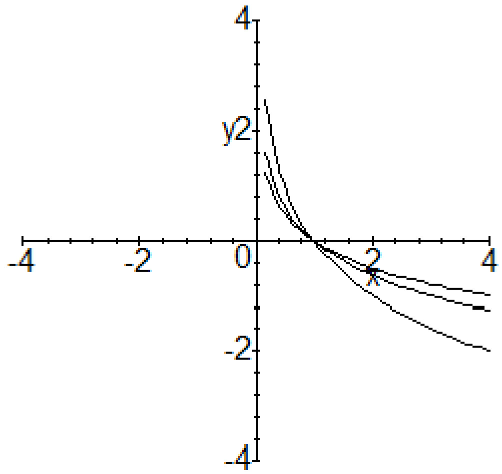


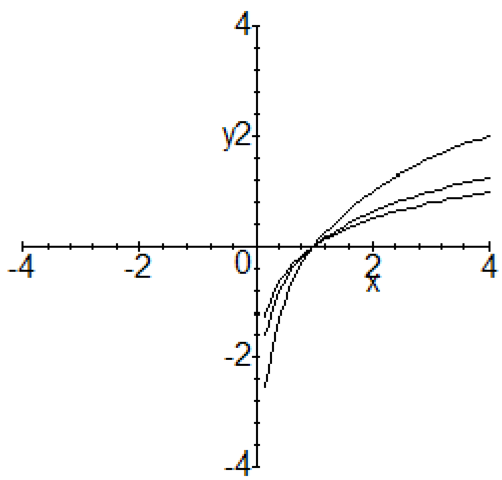
Hasonló a helyzet, ha összehasonlítjuk pl. az $f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = (\frac{1}{3})^x$, és az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ függvénygörbéket.

MAPLE: plot([(1/3)^x,log[1/3](x),x],x=-4..4, y=-4..4);

Az exponenciális függvény elemzéséből következtethetünk a logaritmus függvényre is, az a alap ugyanolyan szerepet játszik itt is, külön-külön eseteknek vehető az $a > 1$, és a $1 > a > 0$, és a logaritmus függvénynek az $x = 0$ (y tengely) függőleges asszimptótája.

Ha $a > 1$, a logaritmus függvény nő, és annál meredekebb minél nagyobb az a :



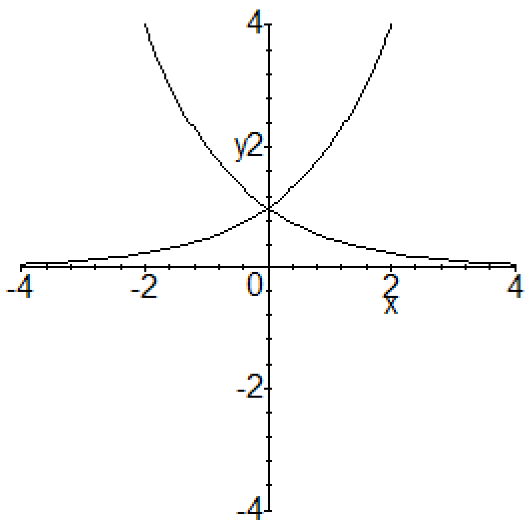


MAPLE: plot([log[2](x),log[3](x),log[4](x)],x=-4..4, y=-4..4);

Ha $1 > a > 0$, akkor csökkenő a függvény, és annál "meredekebben", minél közelebb van az a értéke 0-hoz:

MAPLE: plot([log[1/2](x),log[1/3](x),log[1/4](x)],x=-4..4, y=-4..4);

Látható, hogy a logaritmus függvények fixpontja amint az várható a $(1, 0)$ pont, az alaptól függetlenül.



Az exponenciális- és logaritmus függvények amellett, hogy egymás inverzeiként tükörképei egymásnak az első negyed szögfelezőjére, de további tengelyes szimmetriát is mutatnak.

Az $f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = a^x$, ahol $a > 0$, és $a \neq 1$, és az $f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, ahol $a > 0$, és $a \neq 1$ exponenciális függvények képei az y tengelyre szimmetrikusak, míg a megfelelő logaritmus függvények az x tengelyre, pl. $f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = 2^x$ és az $f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$$f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = 2^x \text{ és az } f : \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^x$$

MAPLE: plot([2^x,(1/2)^x],x=-4..4, y=-4..4);

Ugyanilyen viszonyban vannak a függvények inverzei, csak azok az x tengelyre tükörképei egymásnak.

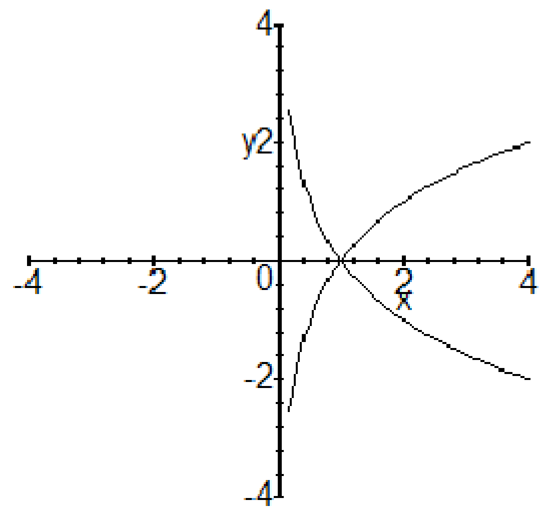
Pl: Az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$, és az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x$ ábrái egymásnak az x tengelyre tükörképei:

MAPLE: plot([log[1/2](x),log[2](x)],x=-4..4, y=-4..4);

Megjegyzések.

1. A negatív kitevők, tizedes törtek használatával az előbbi függvények másképp is írhatók, pl.:$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$, vagy $\log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x = \log_{0.5} x$.

2. Az analízis tanulmányok során szempontjából fontos szerepe van az e alapú exponenciális (e^x) és logaritmus függvényeknek ($\ln x$), (az e számot később



vezetjük be mint az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértékét: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$), az e számról egyelőre elég azt megjegyezni, hogy értéke 2 és 3 közt van, pontosabban $e \approx 2.7182$. Függvényábrájuk:

MAPLE: plot([exp(x),ln(x)], x=-4..4, y=-4..4);

2. A trigonometriai függvények és inverzeik

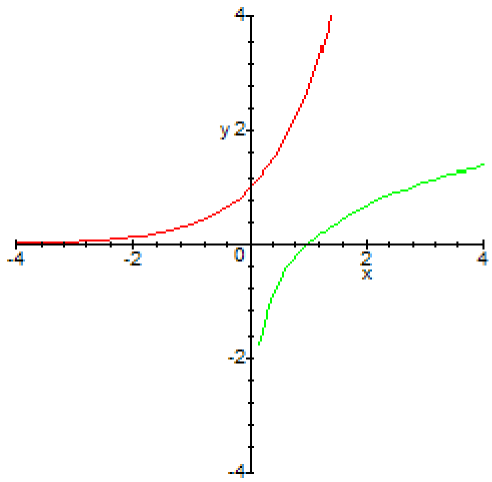
A trigonometriai függvények bevezetésekor megismerkedtünk a szögek mértékével.

Ha a szögeket a derékszög $\frac{1}{90}-$ed részével mérjük, akkor hatvanas váltójú fokokról beszélünk, mivel $\frac{1}{90}derékszög = 1^\circ = 60', 1' = 60"$.

Ha a szögeket a derékszög $\frac{1}{100}-$ed részével mérjük, akkor százas váltójú fokokról beszélünk, mivel $\frac{1}{100}derékszög = 1^g = 60^c, 1^c = 60^{cc}$.

A kétfajta fok mértani mértéke a szögeknek, és szokás a szögek radiánmértékéről is beszélni, ami a középponti szögek szokásos mértékének álatlánosítása. Ha egy szöget egy r sugarú kör középpontjában tekintünk, akkor a kör szárai közé eső körív hosszának és a kör sugarának aránya a szög radiánban vett mértéke és ez a hasonlóság miatt nem függ a kör sugarának nagyságától, csakis a szög nagyságától. Ez utóbbi mérték bevezetése lehetővé teszi azt is, hogy a szögek fogalmát általánosítsuk.

Az egység sugarú kört egy derékszögű koordinátarendszer középpontjába szokás elhelyezni (trigonometriai kör), ekkor a szög radiánban vett mértéke egyenlő a szög szárai közé eső körív hosszával. Ugyanez az elrendezés lehetővé teszi a pozitív és negatív szögek , valamint a teljes fordulatot meghaladó szögek fogalmának bevezetését. Egy szöget akkor mondunk pozitívnak, ha az óramutató járásával ellentétes irányban "vesszük" fel, a negatív szögek az óramutató járásával megegyező irányú "forgást" jelentenek.



Az egység sugarú kör és a koordinátarendszer bevezetése azért is hasznos, mivel ezek segítségével, mint vetületekkel értelmezhetők a trigonometriai alapfüggvények. Ha a trigonometriai körben az ox pozitív féltengely irányát 0 radiánnak vesszük, akkor az x szöget egy, az origó körül forgó vektor által leírt $x$szögnek vehetjük, és a függőleges illetve a vizszintes tengelyekre eső vetületei adják a $sinx$, illetve a $cosx$ értékét.

A szögfüggvények egyik legfontosabb tulajdonsága éppen ebből a "körforgásból" adódik. Mindkét függvény 2π radián után, (egy teljes fordulat mértéke) ismét ugyanazt az értéket veszi fel, azaz $\sin(x+2\pi) = \sin x$, és $\cos(x+2\pi) = \cos x$.

Mindkét függvényre az jellemző, hogy elég a függvényképet megrajzolni az első, ún. főperiódusban, hiszen periódusonként minden ugyanúgy ismétlődik.

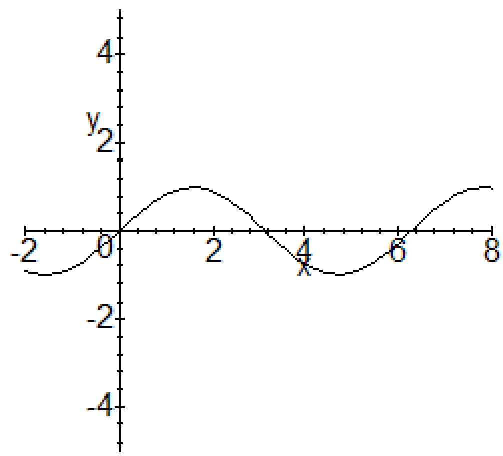
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós változójú, valós függvényt, amelyre $f(x) = \sin x$, sinusfüggvénynek, az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós változójú, valós függvényt, amelyre $f(x) = \cos x$, cosinusfüggvénynek nevezzük.

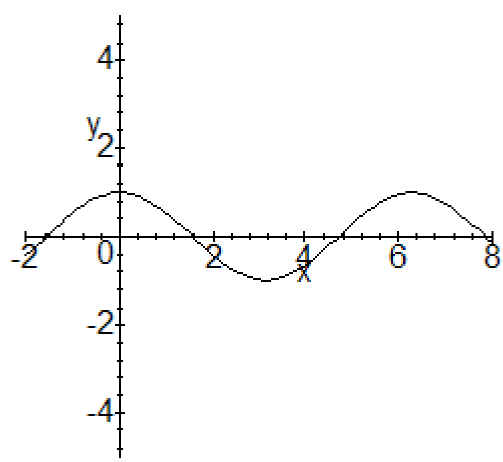
$$f(x) = \sin x$$

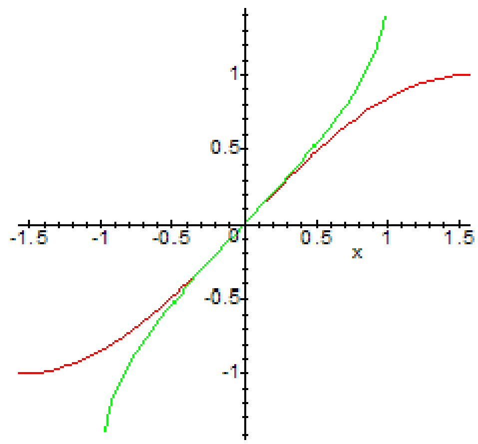
$$f(x) = \cos x$$

Az inverz függvényeket csupán a függvények egy-egy monoton szakaszán értelmezhetjük, hiszen a periodikusság miatt a függvények nyilván nem injektívek.

A két függvénynek a következő leszűkítését szokás venni az inverz trigonometrikus függvények értelmezéséhez:


4
y
2
-2
0
2
4
x
6
8
-2
-4


4
y
2
-2
0
2
4
x
6
8
-2
-4



Az $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ függvénynek, amelyre $f(x) = \sin x$ az inverze az $f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ függvény, amelyre $f(x) = \arcsin x$

MAPLE:>plot([sin(x),arcsin(x)], x=-Pi/2..Pi/2);

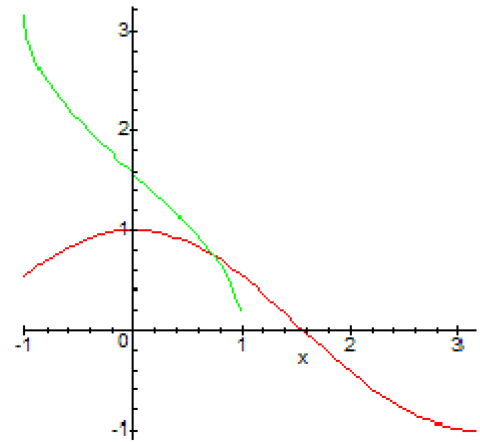
és az $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ függvénynek, amelyre $f(x) = \cos x$ az inverze az $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$ függvény, amelyre $f(x) = \arccos x$.

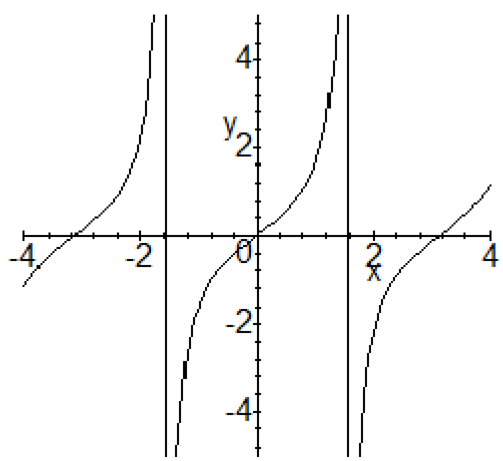
MAPLE:>plot([cos(x),arccos(x)], x=-1..Pi);

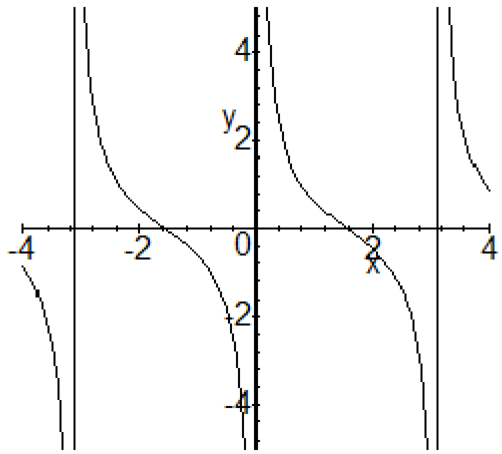
Az alapfüggvényeket kiegészíthetjük az $f(x) = tgx$, és az $f(x) = ctgx$ függvényekre, amelyeket szintén be lehetne vezetni a trigonometriai körben, de szokás őket az alapfüggvények arányaként is megadni, $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}; ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}$.Ezekre a függvényekre a magyar nyelvű szakirodalomban használt tg ill. ctg jelölése helyett az angolszász irodalomban a tan ill. cot jelölést használják, így pl. zsebszámológépeken is.

Az $f : \mathbb{R}-\left\{\frac{2k+1}{2}\pi\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = tgx$, és az $f : \mathbb{R}-\{k\pi\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ctgx$ elegendő lenne csak egy félperióduson ábrázolni, az előbbi egy teljes ívét a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, míg az utóbbi a $(0, \pi)$ nyílt intervallumon veszi fel, és mindkét függvényre jellemző, hogy az adott intervallumok végpontjaiban függőlges asszimptótái vannak:

$f : \mathbb{R}-\left\{\frac{2k+1}{2}\pi\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = tgx$
MAPLE: plot(tan(x),x=-4..4, y=-4..4);
$f : \mathbb{R}-\{k\pi\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ctgx$
MAPLE: plot(cot(x),x=-4..4, y=-4..4);


3
2
1
-1
0
1
2
3
x
-1


4
y
2
-4
-2
0
2
x
4
-2
-4



Látható, hogy az első, a tg szakaszonként növekvő, a második, a ctg szakaszonként csökkenő, tehát egy-egy ilyen szakaszon léteznek az inverzeik, pontosabban: Az $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = tgx$ inverze az $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = arctgx$:

MAPLE:>plot([tan(x),arctan(x)], x=-Pi/2..Pi/2, y=-Pi/2..Pi/2);

és az $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = ctgx$ inverze az $f : \mathbb{R} \to (0, \pi)$, $f(x) = arcctgx$:

MAPLE:>plot([cot(x),arccot(x)], x=-Pi..Pi, y=-Pi..Pi);

A természetes alapú exponenciális függvény, az e^x segítségével megadhatók az ún. hiperbólikus függvények:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

MAPLE:>plot(sinh(x), x=-4..4, y=-4..4);

és az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

MAPLE:>plot(cosh(x), x=-4..4, y=-4..4);

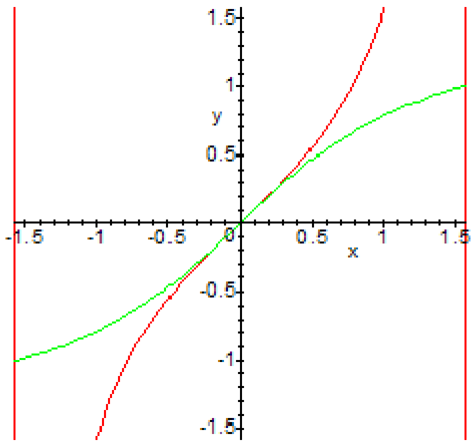
A trigonometriai függvényekhez hasonlóan értelmehetők a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,

MAPLE:>plot(tanh(x), x=-4..4, y=-4..4);

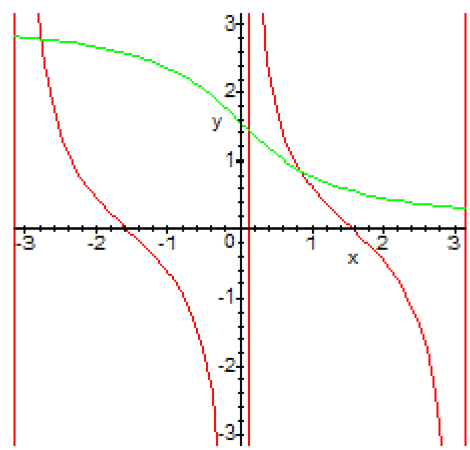
valamint az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

MAPLE:>plot((exp(x)+exp(-x))/(exp(x)-exp(-x)), x=-4..4, y=-4..4);

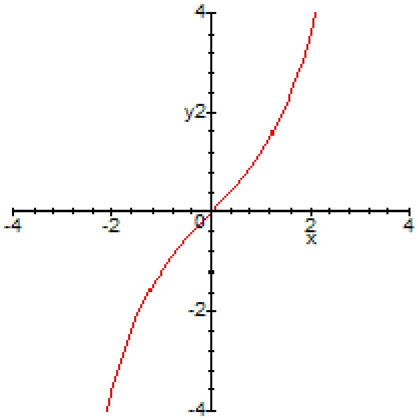
Az inverzeik értelmezése

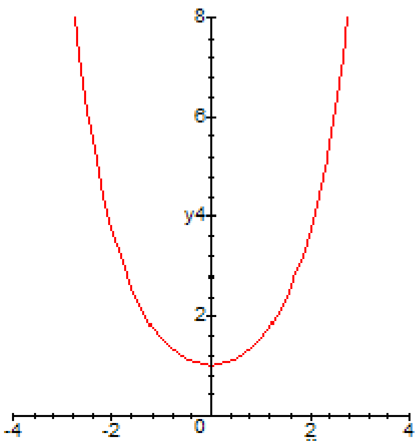


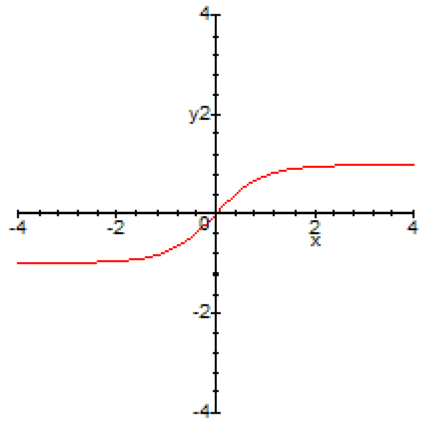
1.5
1
y
0.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
x
-0.5
-1
-1.5

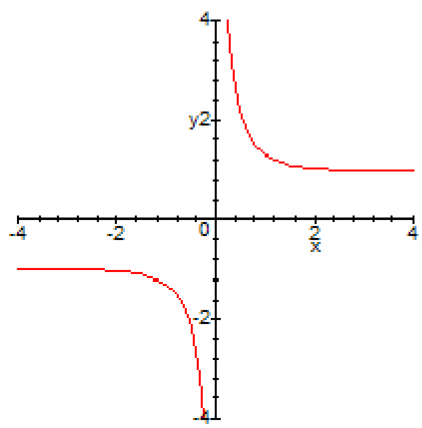


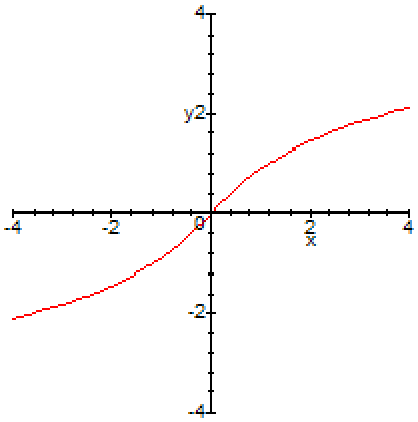
3
2
y
1
-3
-2
-1
0
1
2
3
x
-1
-2
-3


4
y2
-4
-2
0
2
x
4
-2
-4


8
6
y4
2
-4
-2
0
2
x
4


4
y2
-4
-2
0
2
x
4
-2
-4


4
y2
-4
-2
0
2
x
4
-2
-4



Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ inverze az $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = arshx$. ennek az explicit formája (kifejezése) a szokásos módon kapható, ha az $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ direkt relációból kifejezzük az x-et, a számítás lépései: $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$, innen $e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2}$ és mivel $e^x > 0$, az egyetlen megoldás $e^x = \frac{2y + \sqrt{4y^2+4}}{2}$. Az egyszerűsítés után $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$, vagyis $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ amiből a "változók szerepcseréje" után kapjuk az inverz függvény explicit alakját: $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = arshx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) :$

MAPLE:>plot(ln(x+sqrt(x^2+1)), x=-4..4, y=-4..4);

Az $f : [0, \infty) \to [1, \infty), f(x) = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ inverze az $f^{-1} : [1, \infty) \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = archx$. ennek az explicit formája (kifejezése) a szokásos módon kapható, ha az $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ direkt relációból kifejezzük az x-et, a számítás lépései: $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$, innen $e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2-4}}{2}$ és ennek megoldásai $e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2-4}}{2}$. Az egyszerűsítés után $e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}$, vagyis $x = \ln(y \pm \sqrt{y^2-1})$, de most a "változók szerepcseréje" után az inverz függvény explicit alakját kétféleképpen válszthatjuk meg, ezek közül a szokásos az: $f^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty), f^{-1}(x) = archx = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) :$

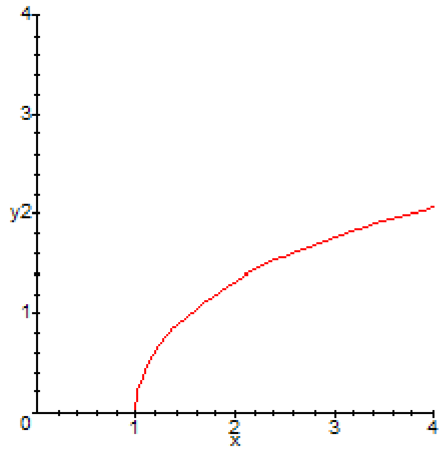
MAPLE:>plot(ln(x+sqrt(x^2-1)), x=0..4, y=0..4);

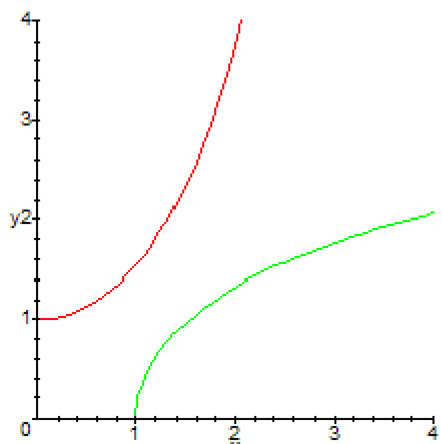
mivel ez felel meg a feltételeknek:

MAPLE:>plot([cosh(x),ln(x+sqrt(x^2-1))], x=0..4, y=0..4);

Az elemi függvények egy másik családja a polinomok és ún. törtfüggvények, vagy racionális függvények.

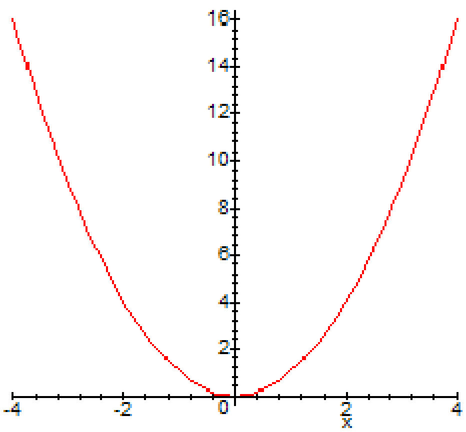
A másodfokú és harmadfokú polinom gyökeiről


4
3
y2
1
0
1
2
x
3
4


4
3
y2
1
0
1
2
x
3
4

Ismert, hogy a másodfokú polinom által értelmezett $f : R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény, röviden másodfokú függvény képe egy parabola és már középiskolás ismeretek alapján a hallgatók többsége ismeri a parabola szimmetria tulajdonságainak következményeit: a parabolának szimmetria tengelye lesz az $x = -\frac{b}{2a}$, azaz például a gyökök is szimmetrikusan helyezkednek el ehhez az értékhez képest: $f(-\frac{b}{2a} - x) = f(-\frac{b}{2a} + x)$, bármely x-re teljesülni fog.

Elsőként megismételjük a már jól ismert $f : R \to R$, $f(x) = x^2$ ábráját:



$f(x) = x^2$

A másodfokú polinom ábrázolása tehát meglehetősen egyszerű.

Biztosan tudható, hogy a parabola csúcsa a $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ pont, ez utóbbi még a $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ alakban is megadható, tehát a fenti $f(x) = x^2$ esetén a $(0, 0)$.

Tudott továbbá, hogy a parabola metszheti az x tengelyt 2 különböző pontban, ha a polinom gyökei valósak és különbözők (ennek feltétele, hogy a diszkrimináns $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ teljesüljön, illetve csak egy pontban érinti azt, ha a Δ diszkrimináns éppen 0, és egyáltalán nincs közös pontja az x tengellyel, ha a diszkrimináns negatív.

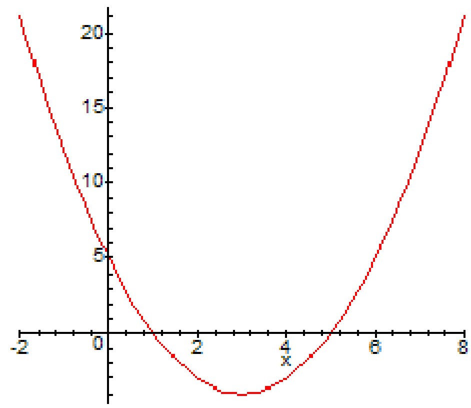
Még az is ismert, hogy az y tengelyt mindig metszi, mégpedig az $y = f(0) = c$ pontban, ez a polinom szabad tagjának a mértani jelentése.

Még csak azt kell megjegyezni, hogy ha a legmagasabb fokú tag együtthatója, az $a > 0$, akkor konvex, felfele nyitott, ha pedig $a < 0$, akkor lefele nyitott, konkáv a parabola képe. Első esetben a csúcspontban minimuma, a második esetben maximuma van.

Vegyük most és elemezzük a függvénygörbéket a fenti szempontok alapján:

1. $f : R \to R$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$,

- csúcsa $(3, -4)$,
- $\Delta = 16$,tehát gyökei valósak, $x_1 = 1, x_2 = 5$ pontban metszi az x tengelyt,



- $y = f(0) = 5-$ben metszi az y tengelyt,
- $a = 1 > 0$, konvex, tehát minimuma van,

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

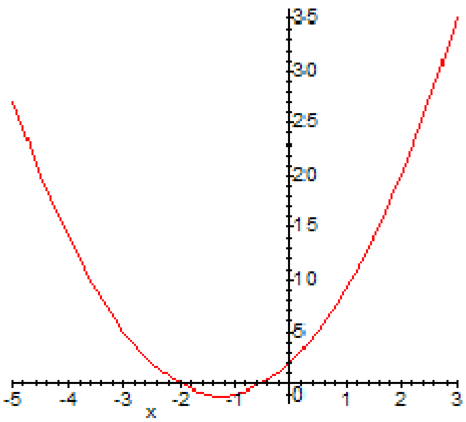
2. $f : R \to R$, $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$
- csúcsa $(-\frac{5}{4}, -\frac{9}{8})$,
- $\Delta = 9$,tehát gyökei valósak, $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -2$ pontban metszi az x tengelyt,
- $y = f(0) = 2-$ben metszi az y tengelyt,
- $a = 2 > 0$, konvex, tehát minimuma van,

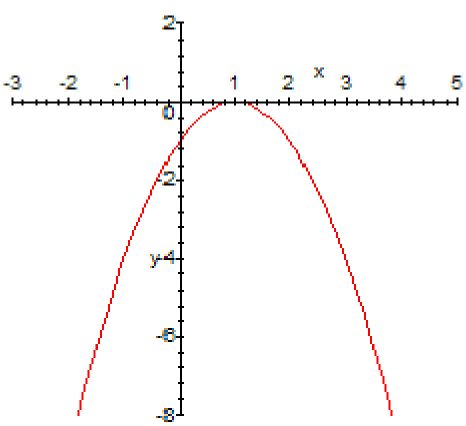
$$f(x) = 2x^2 + 5x + 2$$

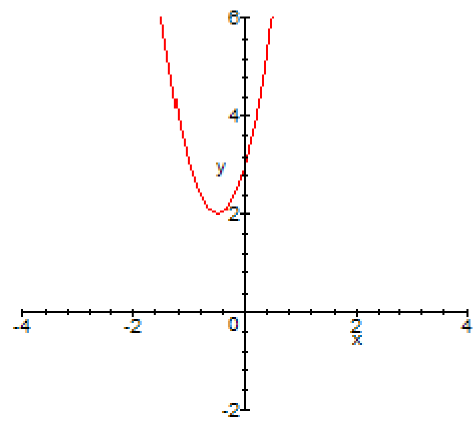
3. $f : R \to R$, $f(x) = -x^2 + 2x - 1$
- csúcsa $(1, 0)$,
- $\Delta = 0$,tehát gyökei valósak, egybeesőek, $x_1 = x_2 = 1$ pontban érinti az x tengelyt,
- $y = f(0) = -1-$ben metszi az y tengelyt,
- $a = -1 < 0$, konvex, tehát maximuma van,

$$f(x) = -x^2 + 2x - 1$$

4. $f : R \to R$, $f(x) = 4x^2 + 4x + 3$
- csúcsa $(-\frac{1}{2}, 2)$,
- $\Delta = -32$,tehát gyökei nem valósak, nem metszi az x tengelyt,
- $y = f(0) = 3-$ben metszi az y tengelyt,
- $a = 4 > 0$, konvex, tehát minimuma van,


35
30
25
20
15
10
5
-5
-4
-3
x
-2
-1
0
1
2
3


2
-3
-2
-1
1
2
x
3
4
5
0
-2
y-4
-6
-8



$$f(x) = 4x^2 + 4x + 3$$

Az a kérdés, hogy a harmadfokú polinom által értelmezett $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, röviden harmadfokú függvény rendelkezik-e valamilyen hasonló szimmetria tulajdonsággal?

A válasz az, hogy valóban létezik egy pontszerinti szimmetria.

Az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ valós együtthatós harmadfokú polinom esetén a gyökök természetének vizsgálata nem ilyen egyszerű. A függvényábrázolás segítségével mégis tárgyalható a gyökök természete.

Az f polinomhoz rendelt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ függvény elsőrendű deriváltja $f\prime(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Jelöljük az elsőrendű derivált gyökeit α-val és β-val. Az f polinom gyökei akkor és csakis akkor valósak és egymástól különbözők, ha $f(\alpha)f(\beta) < 0$ (a függvény szélső értékei ellentétes előjelűek). Ha $f(\alpha)f(\beta) = 0$, akkor kétszeres gyöke, ha pedig $f(\alpha)f(\beta) > 0$, akkor egy valós és két konjugált komplex gyöke van az f polinomnak.

A $H = f(\alpha)f(\beta)$ kifejezés szimmetrikus α-ra és β-ra nézve:

$H = (a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d)(a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d) =$

$= a^2\alpha^3\beta^3 + ab\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) + ac\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) + ad(\alpha^3 + \beta^3) +$

$+ b^2(\alpha^2 + \beta^2) + bc\alpha\beta(\alpha + \beta) + bd(\alpha^2 + \beta^2) + c^2\alpha\beta + cd(\alpha + \beta) + d^2$, tehát kifejezhető az α és β összegének és szorzatának segítségével:

$\alpha + \beta = -\frac{2b}{3a}$ és $\alpha \cdot \beta = \frac{c}{3a}$.

A számítások elvégzése után a :

$H = \frac{4ac^3 - b^2c^2 + 4b^3d - 18abcd + 27a^2d^2}{27a^2}$ kifejezéshez jutunk, ami a következő alakban is felírható:

$H = \frac{3(bc - 3ad)^2 + 4(ac^3 - b^2c^2 + b^3d)}{27a^2}$.

1. Megállapítás: Az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomnak tehát:

(a) H<0 esetén három különböző valós gyöke van;

(b) H=0 esetén van egy kétszeres valós gyöke is;

(c) H>0 esetén egy valós és két komplex gyöke van.

Megjegyzés: A harmadfokú egyenlet megoldására ismert képlet feltételezi az egyenlet $x^2 + px + q = 0$ alakú felírását és akkor a megoldások:
$x_1 = u + v$
$x_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v$
$x_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v$
alakúak, ahol $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
és $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}$, $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}$.
A megfelelő helyettesítéssel a H kifejezés:
$H = \frac{4p^3+27q^2}{27}$ vagy $H = \frac{1}{54^2}\left[(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2\right]$ alakú, és bebizonyított, hogy az egyenlet gyökei csak akkor valósak, ha H<0, csak akkor van egybeeső valós gyöke, ha H=0 és két komplex gyöke csak H>0 esetén van. Ez a bizonyítás csak algebrai úton történik, de a gyökök komplex felírása miatt nagyon hosszadalmas.

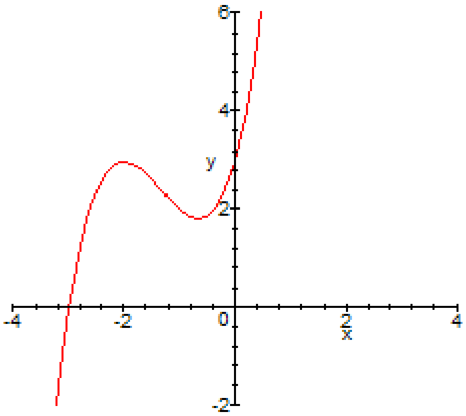
A másodfokú $f = ax^2 + bx + c$ polinom szimmetria tengelye az $x = -\frac{b}{2a}$ egyenes. A harmadfokú $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom nem tengelyesen szimmetrikus, hanem szimmetria középponttal rendelkezik.

2. Megállapítás: Az $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$ valós együtthatós polinomhoz rendelt függvény grafikus képe szimmetrikus az $S = (\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$ pontra nézve.

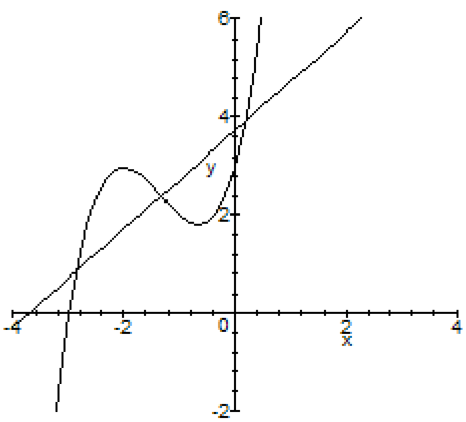
Bizonyítás: Elégséges belátni, hogy bármilyen valós x esetén:
$f(-\frac{b}{3a}) - f(-\frac{b}{3a} - x) = f(-\frac{b}{3a} + x) - f(-\frac{b}{3a})$,
vagyis
$2f(-\frac{b}{3a}) = f(-\frac{b}{3a} + x) + f(-\frac{b}{3a} - x)$
$f(-\frac{b}{3a}) = a(-\frac{b}{3a})^3 + b(-\frac{b}{3a})^2 + c(-\frac{b}{3a}) + d$
$f(-\frac{b}{3a} + x) = a(-\frac{b}{3a} + x)^3 + b(-\frac{b}{3a} + x)^2 + c(-\frac{b}{3a} + x) + d$
$f(-\frac{b}{3a} - x) = a(-\frac{b}{3a} - x)^3 + b(-\frac{b}{3a} - x)^2 + c(-\frac{b}{3a} - x) + d$,
vagyis
$f(-\frac{b}{3a}) = -a\frac{b^3}{27a^3} + b\frac{b^2}{9a^2} - c\frac{b}{3a} + d$
$f(-\frac{b}{3a} + x) = -a\frac{b^3}{27a^3} + 3a\frac{b^2}{9a^2}x - 3a\frac{b}{3a}x^2 + ax^3 + b\frac{b^2}{9a^2} - 2b\frac{b}{3a}x +$
$+ bx^2 - c\frac{b}{3a} + cx + d.$
$f(-\frac{b}{3a} - x) = -a\frac{b^3}{27a^3} - 3a\frac{b^2}{9a^2}x - 3a\frac{b}{3a}x^2 - ax^3 + b\frac{b^2}{9a^2} + 2b\frac{b}{3a}x +$
$+ bx^2 - c\frac{b}{3a} - cx + d$,
tehát
$f(-\frac{b}{3a} + x) + f(-\frac{b}{3a} - x) = -2a\frac{b^3}{27a^3} + 2\frac{b^3}{9a^2} - 2\frac{bc}{3a} + 2d = 2f(-\frac{b}{3a})$.

Ha most az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ harmadfokú parabola ábrázolását tűzzük ki célul, akkor a fenti megjegyzéseket figyelembe véve, felírhatjuk a harmadfokú parabola szimmetria pontját, az $S = (\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$, ahol $f(-\frac{b}{3a}) = -a\frac{b^3}{27a^3} + b\frac{b^2}{9a^2} - c\frac{b}{3a} + d$.

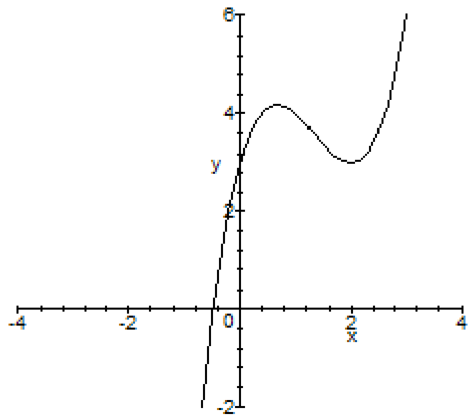
$f : R \to R,\ f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$, szimmetriapontja $S(-\frac{4}{3}, \frac{65}{27})$
A szimmetriapont tulajdonságának szemléltetése
$f : R \to R,\ f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 3$, szimmetriapontja $S(\frac{4}{3}, \frac{97}{27})$
A szimmetriapont tulajdonságának szemléltetése

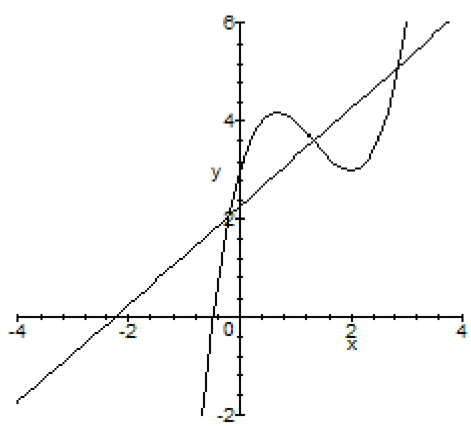


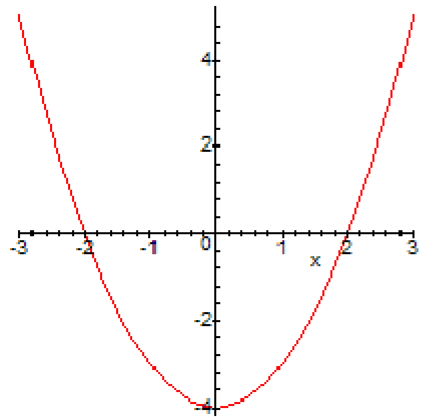
6
4
y
2
-4
-2
0
2
x
4
-2



6
4
y
2
-4
-2
0
2
x
4
-2


6
4
y
2
-4
-2
0
2
x
4
-2


6
4
y
2
-4
-2
0
2
x
4
-2



A törtfüggvények, vagy racionális függvények rövid áttekintéséhez fel kell elevenítenünk a függőleges asszimptóta (pólus), a vízszintes asszimptóta, a tengelyekkel történő metszéspontok és a hézagpontok fogalmát.

A függvénynek van hézagpontja az $x = a$ pontban, ha a nevezője és a számlálója egyaránt tartalmazza az $(x-a)$ szorzót, vagy annak ugyanazt a hatványát. Ekkor a függvényábra egybeesik a leegyszerűsítés után nyert függvényábrával, csak annak az $x = a$ pontban felvett értéke helyett egy hézagpont áll, ezt egy kis "üres" karikával szokás jelezni.

Pl.: az $f : \mathbb{R} \backslash \{-1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{(x^2-4)(x+1)}{(x+1)}$ függvény ábrája egybeesik az $x^2 - 4$ parabolával, csak az $x = -1$ pontban van egy hézagpontja:

Ha a lehetséges egyszerűsítések elvégzése után marad a nevezőben $x-a$, vagy annak hatványa, akkor a hatvány párosságától függően páros, illetve páratlan pólusról beszélünk, azaz a függvény rendelkezik egy függőleges asszimptótával az adott pontban.

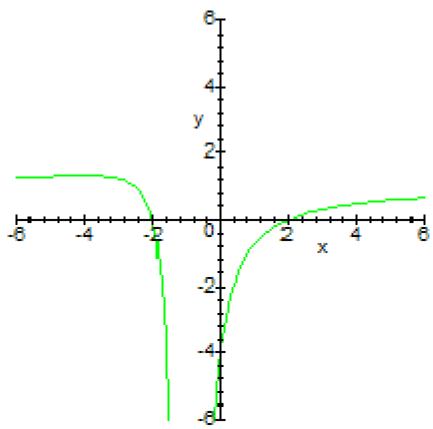
Páros pólus esetén mindkét oldalról egyaránt ugyanolyan ∞, pl. $+\infty$, mint az $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvény esetén az $x = 0$-ban.

Páratlan pólus azt jelenti, hogy a függvény előjelétől függően az asszimptóta két oldalán különböző előjelet kapunk, tehát pl. balról $-\infty$, jobbról pedig $+\infty$, amint az az $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ esetén történik.

Ha a számlálóban marad $x - a$, vagy annak hatványa, akkor a hatvány párosságától függően páros esetben érintési pontról, illetve páratlan esetben metszéspontról beszélünk.

Pl. az $f : \mathbb{R} \backslash \{-1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{(x^2-4)(x+1)}{(x+1)^3}$ függvénynek az $x = -1$ ben páros pólusa, és $x = 2, x = -2$ metszéspontjai az x tengellyel,

de az $f : \mathbb{R} \backslash \{-1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{(x^2-4)(x+1)^5}{(x+1)^3}$ függvénynek nincs pólusa az $x = -1$ ben, csak egy érintőpontja lenne az $x = -1$ ben, ha ez a pont éppen



nem hézagpont lenne.

Függvénytranszformációk

Az elemi függvények görbéjének, és más függvénygörbéknek az ismerete lehetővé teszi bizonyos, függvénytranszformációkkal származtatott újabb függvények görbéjének az ábrázolását. Ezek a függvénytranszformációk a függvény jellegét megtartják, de a görbe helyének megváltoztatását, vagy alakjának arányos átalakítását eredményezik.

A függvénytranszformációk ismerete lehetővé teszi, hogy a legegyszerűbb elemi függvények grafikus ábrázolását alkalmazzuk az ezekből transzformációkkal származtatott, már nem annyira egyszerű függvények ábrázolására.

Lényegében négy alapvető függvénytranszformációt kell megértenünk, ezek a függőleges és a vizszintes irányban történő párhuzamos eltolása a függvénygörbének, valamint a függőleges, illetve vizszinte irányba történő arányos nyújtás, illetve "összenyomás" .

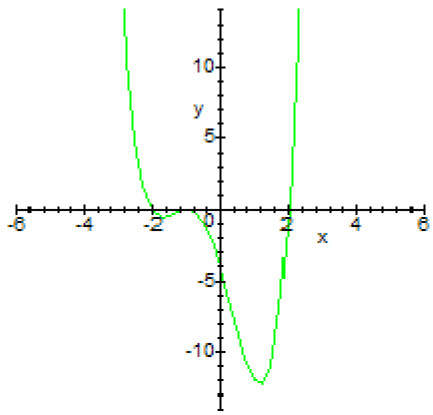
Ezeket a transzformációkat a már ismert függvények, illetve, azoknak a transzformáció utáni képének az ismeretével lehet megérteni.

1. Függőleges eltolás

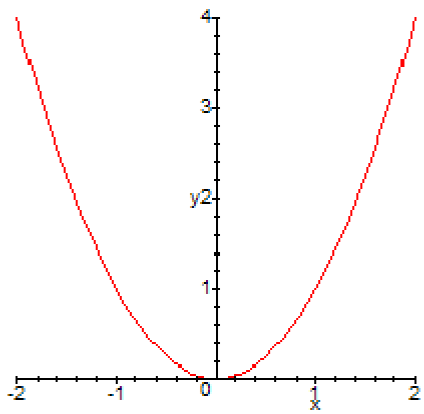
Az $f: A \to B$ függvény, amelynek az $y = f(x)$ görbéje ismert, hozzásegít ahhoz, hogy megértsük mi lesz az $y = f(x) + k$ összefüggéssel értelmezett $f: A \to B$ függvény görbéje.

Az eltolás eredményeként nem változik az értelmezési tartomány, de minden pontjában megváltozik a függvényérték, az eddigi $f(x)$ helyett $f(x) + k$, azaz minden függvényérték függőlegesen eltolódik k-val, (ha $k \geq 0$, akkor "fölfele", ha $k \leq 0$, akkor "lefele).

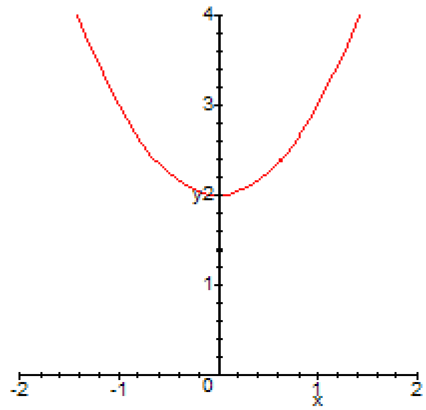
Pl. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós változójú, valós függvényt, amelyre $f(x) = x^2$,ennek a görbéje közismert:

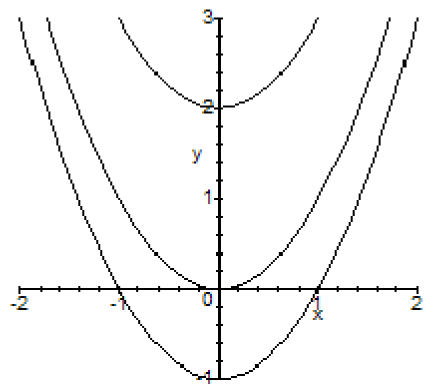


10
y
5
-6
-4
-2
0
2
4
6
x
-5
-10



4
3
y2
1
-2
-1
0
1
x
2





$$f(x) = x^2$$

Ha most egybevetjük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós változójú, valós függvénnyel, amelyre $f(x) = x^2 + 2$ akkor:

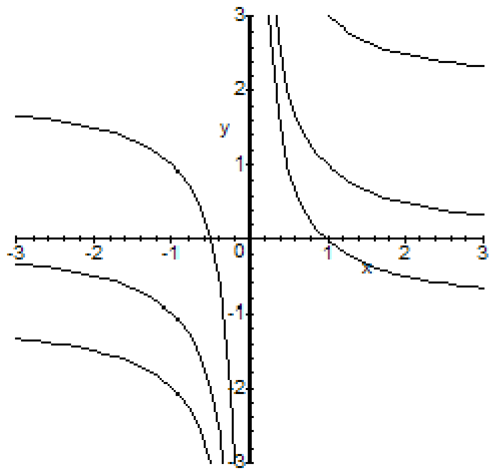
$$f(x) = x^2 + 2$$

Ábrázoljuk most ugyanabban a koordinátarendszerben az $f(x) = x^2, f(x) = x^2 + 2$ és $f(x) = x^2 - 1$ függvényeket:

$$f(x) = x^2, f(x) = x^2 + 2 \text{ és } f(x) = x^2 - 1$$

A "legalsó" nyilván az $f(x) = x^2 - 1$,míg a "legfelső" az $f(x) = x^2 + 2$.

Ugyanez történne, ha pl. az $f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \frac{1}{x} + 2, f(x) = \frac{1}{x} - 1$ függvénygörbéket hasonlítanánk össze:



2. Vízszintes eltolás

Az $f : A \to B$ függvény, amelynek az $y = f(x)$ görbéje ismert, hozzásegít ahhoz, hogy megértsük mi lesz az $y = f(x - c)$ összefüggéssel értelmezett $f : A \to B$ függvény görbéje.

Az eltolás eredményeként nem változik az értelmezési tartomány, de minden pontjában megváltozik a függvényérték, az eddigi $f(x)$ helyett $f(x - c)$, azaz ha $c \geq 0$, akkor "jobbra" tolódik c-vel, ha $c \leq 0$, akkor "balra".

Pl. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós változójú, valós függvényt, amelyre $f(x) = x^2$,ennek a görbéje közismert:

$$f(x) = x^2$$

Ha most egybevetjük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós változójú, valós függvénnyel, amelyre $f(x) = (x - 2)^2$ akkor:

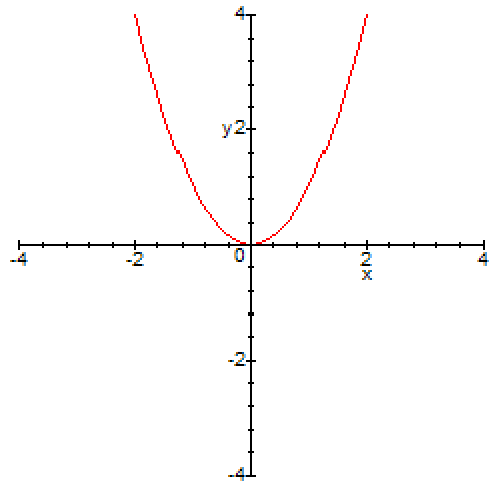
$$f(x) = (x - 2)^2$$

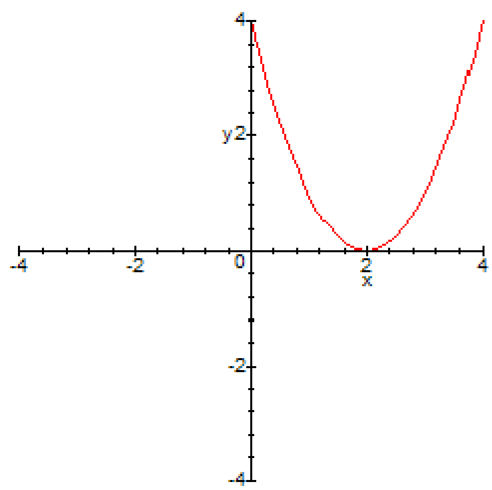
Ábrázoljuk most ugyanabban a koordinátarendszerben az $f(x) = x^2, f(x) = (x - 2)^2$ és $f(x) = (x + 1)^2$ függvényeket:

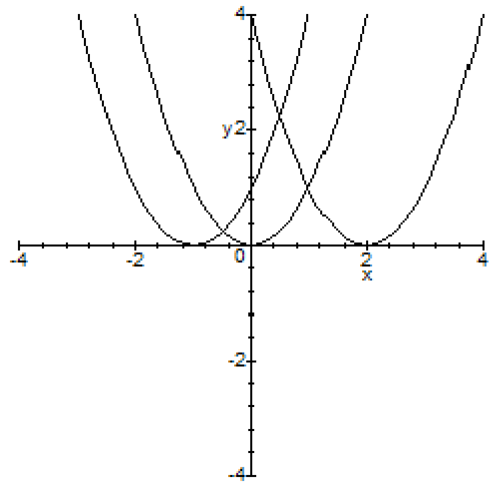
$$f(x) = x^2, f(x) = (x - 2)^2 \text{ és } f(x) = (x + 1)^2$$

A "jobboldali" nyilván az $f(x) = (x - 2)^2$,míg a "baolodali" az $f(x) = (x + 1)^2$.

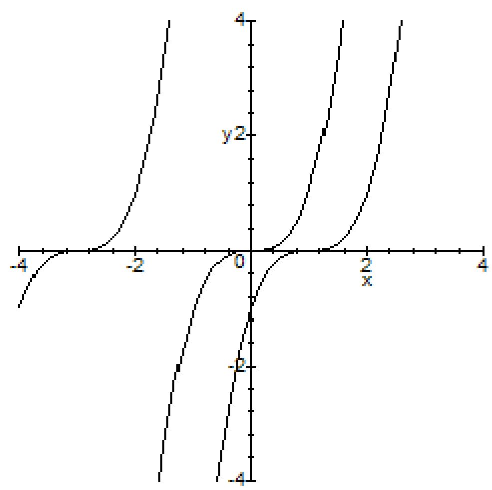
Ugyanez történne, ha pl. az $f(x) = x^3, f(x) = (x - 1)^3$, és $f(x) = (x + 3)^3$ függvénygörbéket hasonlítanánk össze, a baloldali most $f(x) = (x + 3)^3$, a jobboldali pedig $f(x) = (x - 1)^3$:


4
y2
-4
-2
0
2
x
4
-2
-4

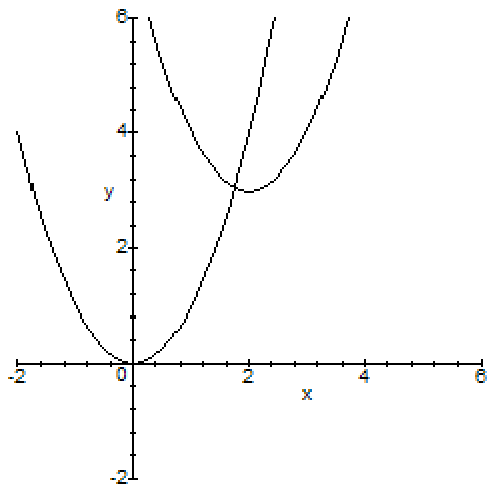

4
y2
-4
-2
0
2
x
4
-2
-4



4
y2
-4
-2
0
2
x
4
-2
-4



4
y2
-4
-2
0
2
x
4
-2
-4



Az összetett transzformáció lehet például egy vizszintes és egy függőleges eltolás, pl. az $f(x) = (x-2)^2+3$ függvényábra az $f(x) = x^2$ ábrája jobbratolva 2 egységnyit, és függőlegesen felfele tolva 3 egységnyit:

3. Függőleges nyújtás

Az $f : A \to B$ függvény, amelynek az $y = f(x)$ görbéje ismert, hozzásegít ahhoz, hogy megértsük mi lesz az $y = af(x)$ összefüggéssel értelmezett $f : A \to B$ függvény görbéje, azaz a függvényábra a-szoros függőleges nyújtása - *Prokrusztész-nyújtás*- (amplitúdó változás, ha $a \geq 1$, akkor amplitúdó növelés, ha $a \leq 1$, akkor amplitúdó csökkenés, ugyanakkor ha pl. $a = -1$, akkor tükrözés az x tengelyre vonatkozólag). A függőleges nyújtást a szögfüggvényeken érdemes megérteni, hasonlítsuk össze tehát:

$$f(x) = sinx$$
$$f(x) = 3\sin x$$

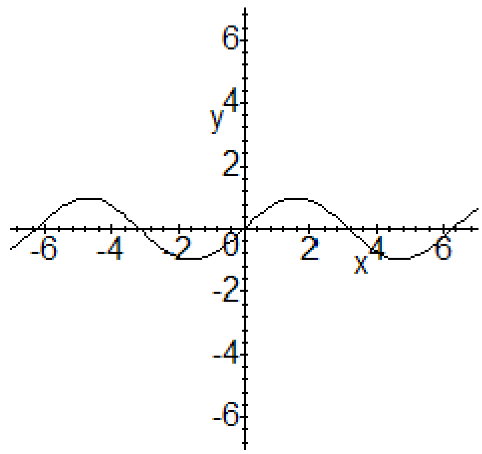
$$f(x) = sinx, f(x) = 3\sin x$$

MAPLE: plot([sin(x),3*sin(x)],x=-7..7, y=-7..7);

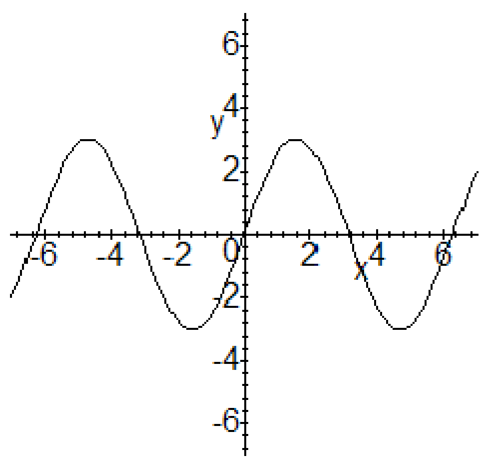
A negatív szorzó szerepe a következő példán látható, tekintsük ismét az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós változójú, valós függvényt, amelyre $f(x) = x^2$,ennek a görbéje közismert:

$$f(x) = x^2$$

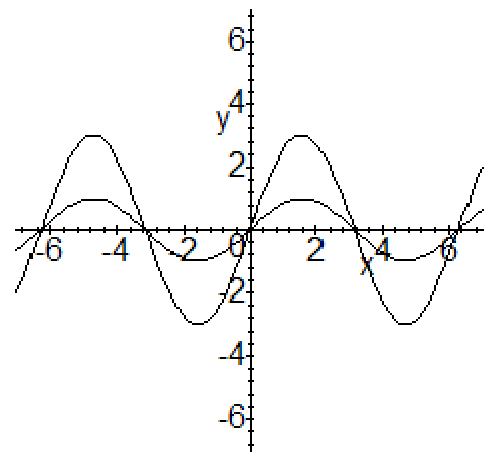
Most hasonlítsuk össze az $f(x) = -x^2$ és az $f(x) = -2x^2$ görbékkel:



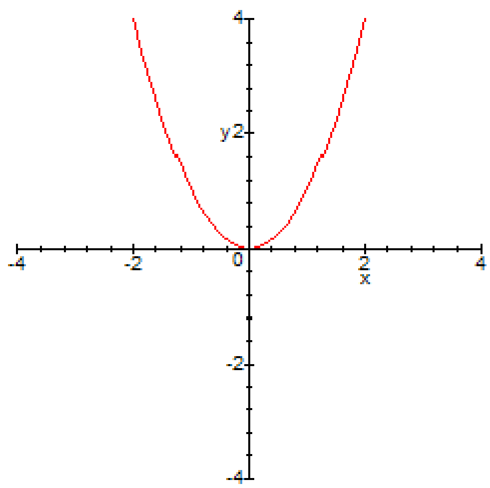
6
y 4
2
-6 -4 -2 0 2 x 4 6
-2
-4
-6



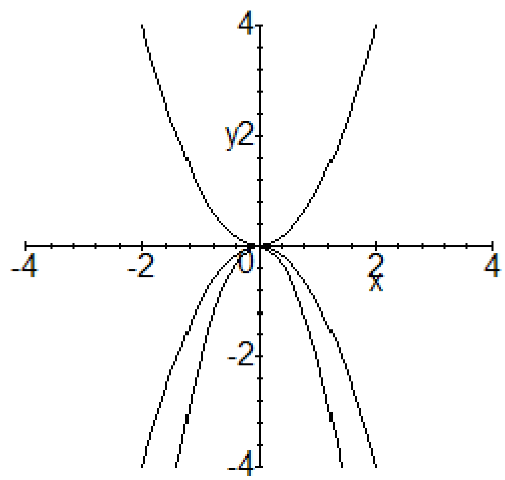
6
y 4
2
-6 -4 -2 0 2 x 4 6
-2
-4
-6



6
y4
2
-6
-4
-2
0
2
x4
6
-2
-4
-6



4
y2
-4
-2
0
2
x
4
-2
-4



A két "lefele" görbülő az $f(x) = -x^2$ és az $f(x) = -2x^2$

MAPLE: plot([x^2,-x^2,-2*x^2],x=-4..4, y=-4..4);

3. Vízszintes nyújtás

Az $f : A \to B$ függvény, amelynek az $y = f(x)$ görbéje ismert, hozzásegít ahhoz, hogy megértsük mi lesz az $y = f(ax)$ összefüggéssel értelmezett $f : A \to B$ függvény görbéje, azaz a függvényábra a-szoros vízszintes összenyomása (elongáció változás, ha $a \geq 1$, akkor elongáció csökkenés, ha $a \leq 1$, akkor elongáció növekedés). A vizszintes nyújtást a szögfüggvényeken érdemes megérteni, mivel ezeknek a periódusa is megváltozik, hasonlítsuk össze tehát az $f(x) = \cos x$, és az $f(x) = \cos(3x)$ ábráit, majd a szokásos módon ábrázoljuk ugyanabban a koordinátarendszerben.

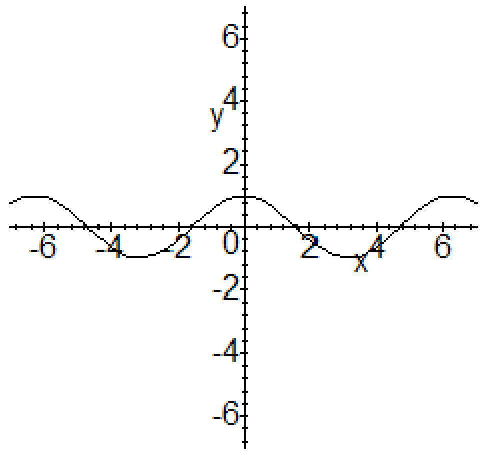
$$f(x) = \cos x f(x) = \cos(3x)$$

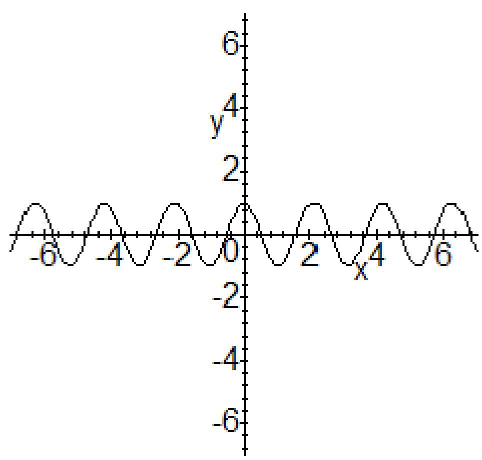
$$f(x) = \cos x,\ f(x) = \cos(3x)$$

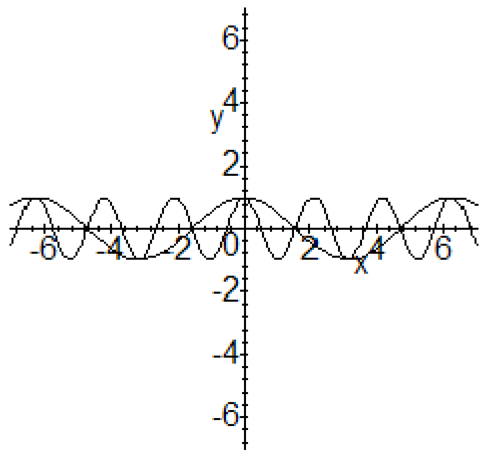
MAPLE: plot([cos(x),cos(3*x)],x=-7..7,y=-7..7);

Elongáció növekedést akkor kapunk, ha a függvényváltozóz "osztjuk" egy számmal, pl. $f(x) = \cos(\frac{x}{2})$:

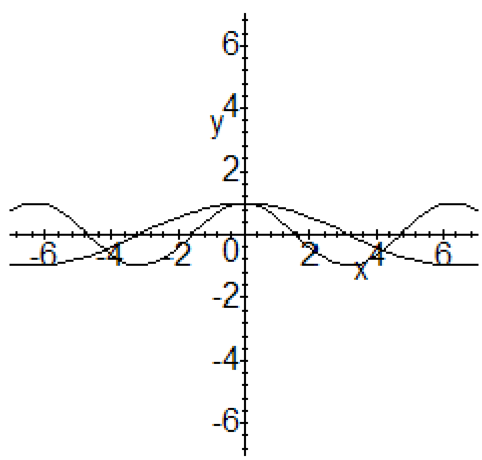
$$f(x) = \cos x, f(x) = \cos(\frac{x}{2})$$


y
x
6
4
2
0
-2
-4
-6

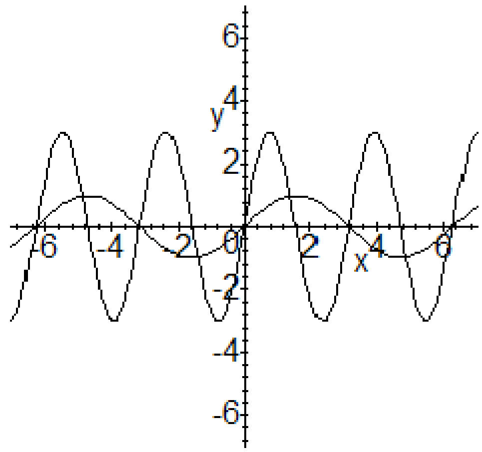

y
x
6
4
2
0
-2
-4
-6



y
x



y
x



MAPLE: plot([cos(x),cos(x/2)],x=-7..7,y=-7..7);

Természetesen ezeket a transzformációkat is összetehetjük:

pl.: $f(x) = 3\sin 2x$ ábrája az $f(x) = \sin x$ ábrájából 3-szoros amplitúdónövekedéssel, és 2-szeres elongáció csökkenéssel kapható meg:

$$f(x) = \sin x, f(x) = 3\sin 2x$$

MAPLE: plot([sin(x),3*sin(2*x)],x=-7..7,y=-7..7);

Sőt, ha most még többféle transzformáció összetételére példa az $f(x) = 3\sin 2(x+2)-4$, ahol az előző összetételehez még 2 egységgel balra és 4 egységgel lefele történő párhuzamos eltolás is társul:

$$f(x) = \sin x, f(x) = 3\sin 2(x+2) - 4$$

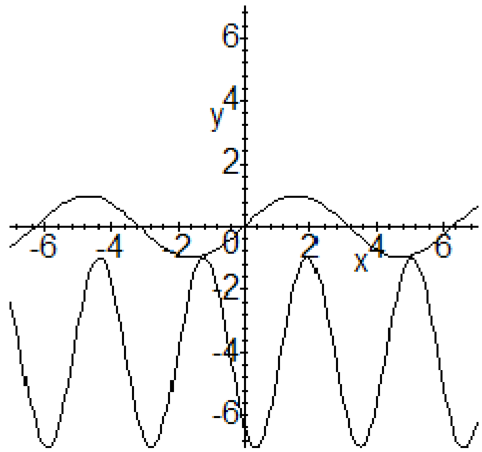
MAPLE: plot([sin(x),3*sin(2*(x+2))-4],x=-7..7,y=-7..7);

A függvények egyre pontosabb ábrázolását, és részletes leírását, tanulmányozását az analízis eszközei az ún. infinitezimális számítás, a határértékszámítás, a deriválás, differenciálszámítás, és az integrálszámítás teszi lehetővé.

A továbbiakban néhány elemi függvény grafikus képét, illetve transzformáltjaik képét ábrázoljuk a MAPLE kompjuter algebra programcsomag függvényábrázoló (plot) alkalmazásának segítségével.

Ismerkedjünk meg előbb az egyszerű függvénytranszformációk ábrázolásával.

Ha az $f : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ függvény megfeleltetését $x \overset{f}{\mapsto} f(x)$ jelöli $(x \in A, y \in B)$, akkor a legegyszerűbb transzformációk a következők:



1. A függvény képe (és így annak minden pontja) függőleges irányban önmagával párhuzamosan eltolódik c magasságba: $x \overset{f_1}{\mapsto} f(x) + c, f_1 : A \to B$, $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$.

Pl. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} x^2$ és $x \overset{f_1}{\mapsto} x^2 + 4$ képe a következő:

MAPLE: plot([x^2,x^2+4],x=-4..4, y=-1..7);

2. A függvény képe (és így annak minden pontja) vizszintes irányban önmagával párhuzamosan eltolódik d távolságra ($d \geq 0$ akkor d értékkel jobbra, ha $d \leq 0$, akkor $-d$ értékkel balra:

$$x \overset{f_2}{\mapsto} f(x - d), f_2 : A \to B, A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}.$$

Pl. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} x^2$ és $x \overset{f_1}{\mapsto} (x - 3)^2$

MAPLE: plot([x^2,(x-3)^2],x=-2..6, y=-1..7);

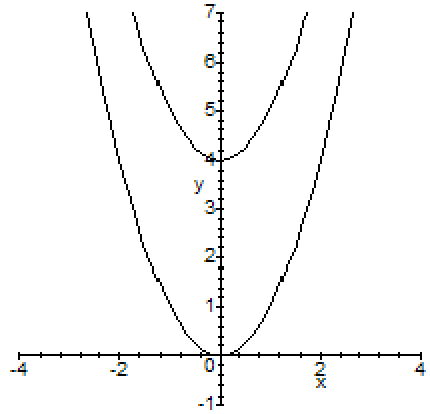
3. A függvény képe (és így annak minden pontja) k-szoros függőlegesen Prokrusztész nyújtást "szenved el" (illetve amplitúdója k- szorosra nő, vagy csökken):

$$x \overset{f_3}{\mapsto} k\ f(x), f_3 : A \to B, A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}.$$

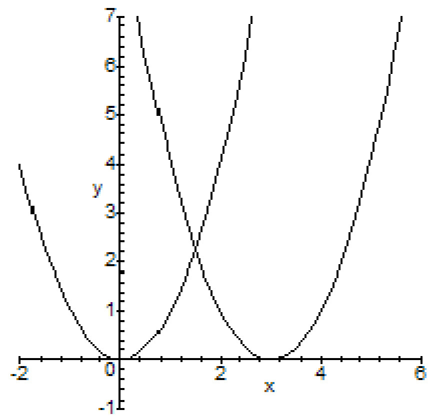
Pl. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} x^2$ és $x \overset{f_1}{\mapsto} 4\ (x)^2$

MAPLE: plot([x^2,4*x^2],x=-4..4, y=-1..7);

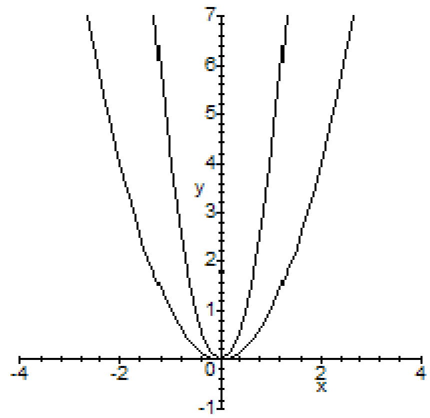
vagy a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} \sin x$ és $x \overset{f_1}{\mapsto} 3(\sin x)$:



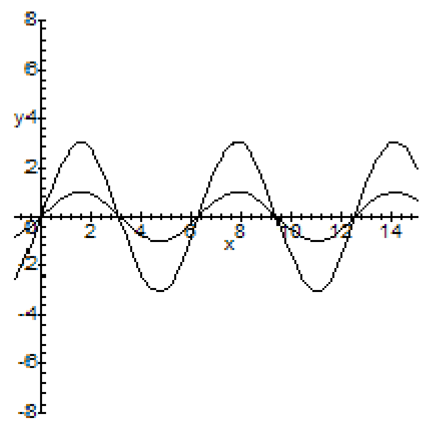
7
6
5
4
y
3
2
1
-4
-2
0
2
x
4
-1



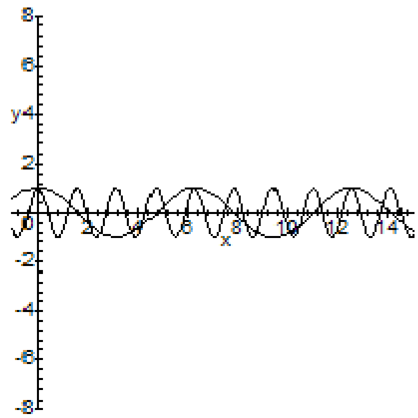
7
6
5
4
y
3
2
1
-2
0
2
4
x
6
-1



7
6
5
4
y
3
2
1
0
-1
-4
-2
2
4
x



8
6
y4
2
-2
-4
-6
-8
2
4
6
8
10
12
14
x



MAPLE: plot([sin(x),3*sin(x)],x=-1..15, y=-8..8);

4. A függvény képe (és így annak minden pontja) 1/k-szoros vizszintes Prokrusztész nyújtást "szenved el" (illetve $k \geq 1$ a változás k-szorosra nő (gyorsabb), vagy $k \leq 1$ csökken):

Pl. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} \cos x$ és $x \mapsto \cos 4x)$:

MAPLE: plot([cos(x),cos(4*x)],x=-1..15, y=-8..8);

Pl. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} \cos x$ és $x \mapsto \cos \frac{x}{2})$:

MAPLE: plot([cos(x),cos(x/2)],x=-1..15, y=-8..8);

Feladatok

1. Állapítsa meg az alábbi függvények értelmezési tartományát!

a) $f(x) = \log_{x+2} \frac{x^2-4x-5}{\sqrt{x-5}}$

b) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 9} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} + \ln(\ln(\cos x + 1)) + \log_{x^2-4x+4} x$

d) $f(x) = \sqrt{x - 3} + \log_3 \frac{1}{\sqrt{4-x}}$

e) $f(x) = \lg tg3x$

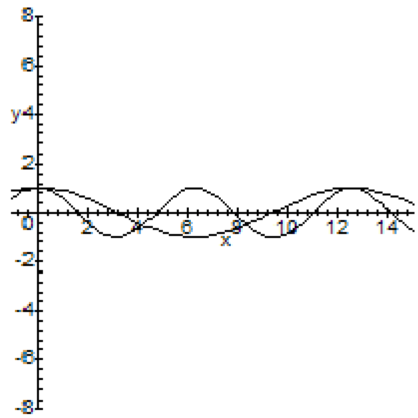
f) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{2}{3}} (2x - 1)}$

g) $f(x) = 2^{\frac{x}{\sin x}}$

2. Ábrázolja a következő függvényeket:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} x^3$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} x^4$



c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto} x^2-x+1$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto} 4x^2-4x+4$

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto} (x-1)(x-2)(x-3)$

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto} (x-1)(x-2)(x-3)+4$

2. Ábrázolja a következő függvényeket:

a) $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{(x^2-1)(x+2)}{(x+2)^3}$

b) $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,3\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{(x^2-4)(x-1)}{(x+1)^2(x-3)}$

c) $f:\mathbb{R}\setminus\{-3\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{(x^2-9)(x-2)}{(x+3)^3}$

d) $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2(x+1)}{(x-3)^3}$

e) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{(x^2+4)(x-1)^2}{(x-1)^3}$

f) $f:\mathbb{R}\to\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{(x^2-4)^2(x+1)}{x(x+1)^2}$

3. Ábrázolja a következő függvényeket:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto}\cos 2x$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto}\sin\frac{x}{4}$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto} 2^x$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto} 3^{-x}$

e) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto}\log_2 x$

f) $f:[-2,2]\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto}\sqrt{4-x^2}$

4. Ábrázolja a következő függvényeket:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto} e^x+e^{-x}=2\sinh x$

b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto} 3-2\ln 2x$

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto} 0.5e^{-2x}$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto} \frac{1}{1+x^2}$

e) $f:\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}\to\mathbb{R}, x\mapsto \frac{4}{4-x^2}$

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto} \frac{1}{1+x+x^2}$

5. Rajzolja fel az alábbi függvények grafikonjait a maximális értelmezési tartományukon!

a) $f(x)=(x+4)^2-1$

b) $f(x)=\left|x^2-5x+6\right|$

c) $f(x)=2^{|x-1|+x}$

d) $f(x)=3^{|\log_3 x|}$

e) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}$

f) $f(x)=3\sin\left(\frac{x}{2}\right)+1$

g) $f(x)=[3\sin 2x+1]$

h) $f(x)=1-\sqrt{x-2}$

i) $f(x)=\left|\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\right|$

j) $f(x)=\log_2\frac{1}{x+1}$

k) $f(x)=\frac{3^{x+2}}{2^{2x-1}}$

l) $f(x)=tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$

m) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x<-2, \\ 2^{-x}, & \text{ha } -2\le x\le 1, \\ 2^{|x-2|-x}, & \text{ha } 1<x. \end{cases}$

6. Határozza meg az $f(-2), f\left(\frac{-1}{2}\right), f(0),\ f\left(\frac{4}{3}\right)$ helyettesítési értékeket, ha

a) $f(x)$ a 5. m) feladatban adott,

b) $f(x)=\begin{cases} \sin(\pi x), & \text{ha } x<-1, \\ |2x-1|-3, & \text{ha } -1\le x<0, \\ 3x^2-6, & \text{ha } 0\le x. \end{cases}$

7. Ábrázolja ugyanabban a koordinátarendszerben a következő két-két függvényt:

a) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto}\sin x$ és $x\mapsto\sin\frac{x}{4}$

b) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto}\sinh x$ és $x\mapsto\sinh\frac{x}{2}$

c) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto}e^{-x}$ és $x\mapsto -e^{-3x}$

d) Az $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto}\ln 2x$ és $x\mapsto 3\ln\frac{x}{2}$

e) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto}\sin x+\cos x$ és $x\mapsto -2\sin(x-\pi)-2\cos(x-\pi)$

f) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\overset{f}{\mapsto}1-x+x^2-x^3$ és $x\mapsto -1+x-x^2+x^3$

7. Ábrázolja ugyanabban a koordinátarendszerben a következő két-két függvényt:

a) Az $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{x}$ és $f:\mathbb{R}\setminus\{-4\}\to\mathbb{R}, x\mapsto \cos\frac{1}{x+4}$

b) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto}$ és $x\mapsto \cos\frac{x}{2}$

c) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{1+x^2}$ és $x\mapsto \frac{-4}{1+4x^2}$

d) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{1+x+x^2}$és $x\mapsto -\frac{1}{10+10x+10x^2}$

e) Az $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} \ln\frac{x+1}{2}$és $x\mapsto \ln\frac{2}{x+1}$

f) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} 0.5e^{-2x}$ és $x\mapsto 5e^{-0.2x}$

8. Ábrázolja ugyanabban a koordinátarendszerben a következő két-két függvényt:

a) Az $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{x^2}$ és $x\mapsto \frac{1}{x^4}$

b) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} \cos x$ és $x\mapsto \cos x^3$

c) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} \cos 3x$ és $x\mapsto -\frac{1}{3}\cos x^3$

d) Az $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} -\ln x$ és $x\mapsto -\ln\sin x$

e) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} \cos e^x$ és az $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R}, x\mapsto \cos\frac{x}{2+x}$

f) Az $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} -\cosh\frac{2}{x}$ és $x\mapsto \cosh\left(-\frac{2}{x}\right)$

9. Keresse meg a következő függvények inverzét és ábrázolja az $\mathbb{R}^2$ síkon!

a.) $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=2x-5$

b.) $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=-x+3$

c.) $f_3:[0,\infty)\to[1,\infty),\ f_3(x)=x^2+1$

d.) $f_4:\mathbb{R}\to(0,\infty),\ f_4(x)=3^{x-1}$

e.) $f_5:\mathbb{R}\to(2,\infty),\ f_5(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+2$

f.) $f_6:(1,\infty)\to\mathbb{R},\ f_6(x)=\log_3(x-1)$.

10. Legyen $f(x)=x^3$, $g(x)=\sqrt{\sin x+\frac{\pi}{2}}$ és $h(x)=\lg\left(x^2+1\right)$.
Képezze az $f\circ g$, $g\circ f$, $h\circ g$, $f\circ g\circ h$ összetett függvényeket!

11. Vizsgálja meg, hogy monotonak-e a következő függvények?

a) $f(x)=4-x^2,\qquad x<2$

b) $f(x)=\frac{2}{x-3},\qquad x\neq 3$

c) $f(x)=\frac{x}{1-x^2},\qquad x\neq\pm1$

d) $f(x)=sgn\left(\ln\left(x^2\right)\right),\qquad x\neq 0$

12. Vizsgálja meg korlátosság szempontjából az alábbi függvényeket!

a) $f(x)=\frac{x+2}{x+1},\qquad x>1$

b) $f(x)=\frac{2}{1+x^2},\qquad -\infty<x<\infty$

c) $f(x)=\frac{\sin x}{x+1},\qquad x>0$

13. Állapítsa meg, hogy az alábbi függvények közül melyik páros és melyik páratlan!

a) $f(x)=\sin^2 2x-3x^4+4$

b) $f(x)=\cos^3 x-x+3$

c) $f(x) = \frac{2^x+1}{2^x-1}$
d) $f(x) = 5x \sin x + \lg |x|$

Sorozatok I.

A sorozat fogalmának intuitív megközelítése

A sorozat számok egy rendezett felsorolása, a számokat sorozat tagjainak nevezzük. Egy példaként magukat a természetes számok említhetjük:

1, 2, 3, 4, ...

Egy másik példa ugyanezeknek a számoknak a négyzete:

1, 4, 9, 16, ...

Mindkét példában a három pont azt jelzi a tagok felsorolása után, hogy így folytatható „akármeddig". Ha a felsorolás „akármeddig" folytatható, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat végtelen, ellenkező esetben végesnek mondjuk.

Azt a tényt, hogy a sorozat egy rendezett felsorolás, pontosabban leírhatjuk, ha a sorozat tagjait az 1, 2, 3, ..., n, ... sorszámokhoz rendeljük. Ebben az értelemben, rendre a sorozat 1., 2., 3., ..., n., ... tagjáról beszélhetünk, azaz minden természetes n számhoz egyértelműen hozzárendeljük a sorozat n. tagját. Ezt az általános n. tagot a_n, és magát a sorozatot röviden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jelöli. Például az előbbi 1, 2, 3, 4, ... sorozat általános tagja az $a_n = n$, míg az 1, 4, 9, 16, ... sorozat esetén $a_n = n^2$.

Tekintsük most azt a sorozatot, amelynek mondjuk $a_n = 2n-1$ az általános tagja. A sorozat első tagjait is felírhatjuk:

1, 3, 5, 7, ...

Gyakran szükség van az adott eljárás megfordítására: Ha adott a sorozat néhány kezdő tagja, lehet, hogy észrevehetünk egy „szabályszerűséget", mintát, ami lehetővé teszi, hogy kitaláljuk a sorozat általános tagját. Ha pontosabban fogalmazunk, akkor a kezdő tagok számától függetlenül, nem elég csupán felírni az általános tag képletét. Ez azért van, mert a megadott tagok esetleg több képletbe is beilleszthetők.

A gyakorlatban ennek ellenére az általános tagot gyakran a hétköznapi logikával, „józan paraszti ésszel" találjuk ki.

Például, ha a sorozat tagjai rendre:

2, 4, 6, 8, 10, ...

akkor "észszerűnek" tűnik, hogy $a_n = 2n$ általános tagot írjuk fel.

Megjegyzésként megadhatunk egy másik képletet az a_n –re, ami ugyanezt az öt első tagot adná:

$a_n = 2n + 1000(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

de mégis sokkal „észszerűbb" $a_n = 2n$ képlet használata.

Az a gondolkodási út amelynek a során egy szabályszerűség megfigyelésével egy képletet „találunk ki", az induktív gondolatmenet. Nem az a célunk, hogy egy ismert tényből, szabályból következtetést fogalmazunk meg (ez a deduktív gondolatmenet), hanem a megfigyelések alapján mintegy megsejtjük, megjósoljuk az eredményt.

1. Feladat. Az alábbi sorozatokat a kezdő tagok felsorolásával adtuk meg. Próbálja meg kitalálni a szabályszerűséget, és írja fel a sorozat következő három tagját

a) 7, 13, 19, 25, _ _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _ _

b) 3, 1, –1, –3, –5, _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _ _

c) 6, , 9, ,12, _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _ _

Meg kell jegyeznünk, hogy nem minden sorozat rejt ilyen szabályszerűséget. Például a következő sorozat

3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, ...

tagjai nem tartalmaznak semmilyen szabályszerűséget, de egyesek felismerhetik a kör kerületének és átmérőjének az arányát kifejező nevezetes ■ = 3, 141592653589... szám számjegyeit, mint a sorozat tagjait.

Haladványok

A haladványok olyan „szabályszerűséget” tartalmazó sorozatok, amelyeket már az ókorban is ismertek, tanulmányoztak. A következő fejezetekben a legismertebb haladványokat, a számtani, mértani és harmonikus haladványokat tanulmányozzuk.

Ezek meghatározását a következő sorokban adjuk meg

Meghatározás szerint egy számtani haladvány bármely tagját úgy kaphatjuk meg, hogy a sorrendben előtte lévőhöz ugyanazt az állandót adjuk hozzá. Ha ennek az állandónak az értéke r, akkor az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számtani haladványban:

$a_2 = a_1 + r, a_3 = a_2 + r, a_4 = a_3 + r, a_5 = a_4 + r, \ldots$

Megjegyzendő, hogy $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = \ldots$, azaz az állandó különbség bármely tag és az őt megelőző tagnak a különbsége.

2. Feladat. A következő számtani haladványokban keresse meg a haladvány állandó különbségét, majd segítségével írja fel a haladványok hiányzó tagjait:

a) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4},$ _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _

b) $-10, -4, 2, 8, 14,$ _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _

c) $-\frac{9}{10}, -\frac{4}{5}, -\frac{7}{10}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{2},$ _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _

Meghatározás szerint egy mértani haladvány bármely tagját úgy kaphatjuk meg, hogy a sorrendben előtte lévőt ugyanazzal az állandóval megszorozzuk. Ha ennek az állandónak az értéke r, akkor az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mértani haladványban

$a_2 = a_1 r, a_3 = a_2 r, a_4 = a_3 r, a_5 = a_4 r, \ldots$

Megjegyzendő, hogy ha minden $a_n$nullától különböző, akkor $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

azaz az állandó hányados bármely tag és az őt megelőző tagnak a hányadosa.

3. Feladat. Keresse meg a következő mértani haladványok állandó hányadosát, majd írja fel a hiányzó tagokat:

a) $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2},$ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _

b) $1, -3, 9, -27, 81,$ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _

c) $4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{4}{81},$ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _

d) 20, 5, $\frac{5}{4}, \frac{5}{16}, \frac{5}{64},$ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _ Meghatározás szerint egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,nullától különböző tagokat tartalmazó, sorozatot harmonikus haladványnak nevezünk, ha az $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, a sorozat tagjainak inverzeiből álló sorozat, egy számtani haladvány.

Például:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$

egy harmonikus haladvány, mivel az inverzek

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

sorozata számtani haladvány.

4. Feladat. Írja fel a következő harmonikus haladványok két hiányzó tagját:

a) $\frac{3}{11}, \frac{3}{12}, \frac{3}{13}, \frac{3}{14}, \frac{3}{15}$, _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _

b) $\frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}, \frac{1}{17}, \frac{1}{20}$, _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _

c) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}$, _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _

d) $3, \frac{3}{7}, \frac{3}{13}, \frac{3}{19}$, _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _

5. Feladat. Tanulmányozza a következő sorozatokat. Először írja fel a hiányzó tagokat, majd döntse el, hogy szabályszerűség számtani, mértani, vagy harmonikus haladványt vagy a felsoroltak egyikét sem jelenti. Ahol lehetséges, írja fel az adott sorozat következő két tagját.

a) 2, 3, 4, 5, 6, ...

b) 2, 4, 8, 16, ...

c) x, 5x, 25x, ...

d) $\frac{2}{3}$, 2, $\frac{10}{3}$, 3, . . .

Elkövetkezett az a pillanat, amikor a haladványok történetéről is érdemes néhány szót ejtenünk.

A számtani és mértani haladványok mintegy négyezer éves matematikai feladatokban gyökereznek. Például az egyiptomi Rhind Papirusz (kb.1850 i.e.) azt a kérdést teszi fel, hogy miként lehet szétosztani 300 szelet kenyeret 5 ember közt a következő feltételekkel: a harmadik ugyanannyi szelettel kap többet a másodiknál, mint amennyivel a második többet kapott az elsőnél, és így tovább mindenki a sorban pontosan annyival kap többet az őt sorban megelőzőnél, mint amennyivel az többet kapott, mint a sorban előtte lévő. Továbbá az utolsó három együtt hétszer annyit kapott, mint az első kettő. Számítsa ki a kenyérszeletek számát, amit az emberek külön- külön kaptak.

A válasz a számtani haladványokhoz vezet. Ugyanabban a papiruszban egy másik feladat a mértani haladványokon alapszik. Az a feladat, hogy határozzuk meg a házak, macskák, egerek és búzaszemek számát, ha tudjuk, hogy a hét házban mindegyikében hét macska van, minden macska hét egeret fogott, és minden egér hét szem búzát evett meg.

A számtani és mértani haladványok egy alapos leírása megtalálható az ókori görög matematikusok munkáiban. A kérdést az ókori Pithagorászi iskola képviselői kezdték tanulmányozni, akik ismerték a számtani sorozat összegének számítását. Hasonlóan Euklidész az Elemekben megadta a mértani haladvány összegképletét. Mindezt sok görög matematikus használta, és fejlesztette, alkalmazta a matematika különböző területein.

Középértékek

Meghatározás. Az a és b számok számtani közepe:

$$m_a = \frac{a+b}{2}$$

Ha a és b azonos előjelű számok (azaz ab ■ 0), akkor a számok mértani közepe:

$$m_g = \sqrt{ab}$$

és ha a és b nullától különbözőek, akkor a számok harmonikus közepe:

$$m_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Például ellenőrizhető, hogy a kocka csúcsainak (v) száma az élek (e) és az oldallapok (f) számának harmonikus közepe:

$$v = \frac{2}{\frac{1}{e} + \frac{1}{f}}$$

azaz

$$\frac{1}{e} + \frac{1}{f} = \frac{2}{v}$$

és a számokkal:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{2}{8}$$

.

Az előbbi három középértéket, és további hetet, már a Pithagoreusok (az ókori Pithagorászi iskola képviselői) is ismerték, de másként (azzal egyenértékű módon) határozták meg azokat. Az eredeti meghatározások a következők:

Meghatározás (Nicomachus, Introduction to Arithmetic alapján) Az (m_a) számtani közép, (m_g) mértani közép, és az (m_h) harmonikus közép rendre eleget tesz a következőknek:

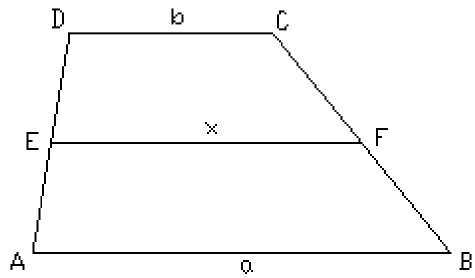
$$\frac{a - m_a}{m_a - b} = \frac{a}{a}; \frac{a - m_g}{m_g - b} = \frac{a}{m_g}; és\ \frac{a - m_h}{m_h - b} = \frac{a}{b}$$

.

6. Feladat. Igazolja, hogy a három középértékre megadott definíció ekvivalens.

Bizonyítás. Ha $\frac{a - m_a}{m_a - b} = 1$, a Pithagoreusok meghatározása szerint, akkor $a - m_a = m_a - b$, és így $2m_a = a + b$. Ez utóbbi nyilván az ma számtani közép meghatározásával egyenértékű. Az állítás fordítottja a bizonyítás lépeseinek fordított sorrendjében következik.

Ha most az $\frac{a - m_g}{m_g - b} = \frac{a}{m_g}$ egyenlőségből indulunk ki, akkor $(a - m_g)\, m_g = (m_g - b)\, a$, így $m_g^2 = ab$, és tehát$m_g = \sqrt{ab}$. A fordított irányban is egyszerűen következik.



Végül, ha $\frac{a-m_h}{m_h-b} = \frac{a}{b}$, akkor $(a-m_h)\,b = (m_h-b)\,a$, tehát $2ab = am_h + bm_h$. Ez utóbbi egyenlőséget ab- vel elosztva $2 = m_h(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$, ami azt jelenti, hogy $m_h = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. A lépéseket fordított sorrendben követve, a bizonyítás teljes egészében befejezhető.

Érdekességként megjegyezhető, hogy a számtani, mértani és harmonikus közép fogalmaknak mértani értelmezései is jól ismertek. Ezek egy részét tartalmazzák a következő feladatok.

7. Feladat. Jelölje az ABCD trapézban az AB és CD párhuzamos oldalakat, és $AB = a, CD = b$. Ha E és F rendre az AD és CD középpontjait jelöli, (és így EF párhuzamos AB és CD-vel) és $EF = x$, igazolja, hogy

$$x = \frac{a+b}{2}$$

(lásd 1. ábra).

1. ábra

8. Feladat. Tekintsünk egy csonka gúlát.

Igazolja, hogy az alapoktól egyenlő távolságra lévő metszet M területének négyzetgyöke számtani közepe a T és t alaplapterületek négyzetgyökének, azaz

$$\sqrt{M} = \frac{\sqrt{T} + \sqrt{t}}{2}$$

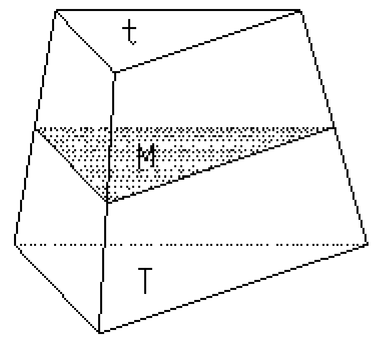
(a 2. ábra az egyszerű szemléltetés kedvéért háromszög alapú csonkagúlát tartalmaz):

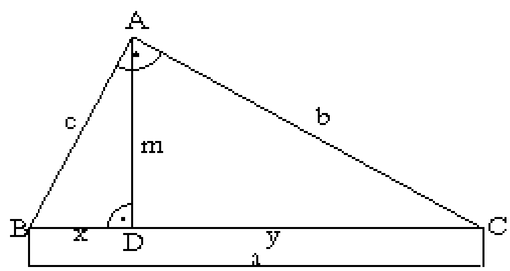
2. ábra

9. Feladat. Bármely derékszögű háromszögben az átfogóra merőleges magasság mértani közepe az átfogón általa meghatározott két szakasznak (3. ábra).

3. ábra

10. Feladat. Bármely derékszögű háromszög akármelyik befogója mértani közepe, az átfogónak és az átfogóra eső vetületének (3. ábra).





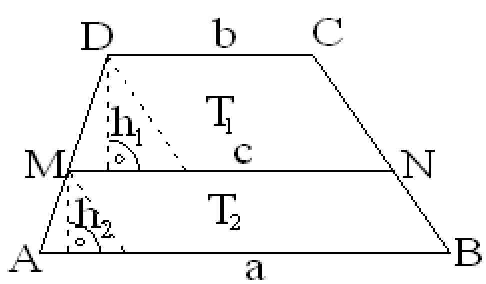
11. Feladat. Jelölje c valamely, az ABCD trapéz a és b hosszúságú alapjaival párhuzamos szakasz hosszát. Ha ez a c hosszúságú szakasz a trapézt két egyenlő T_1, T_2 ($T_1 = T_2$) részre bontja, akkor igazolja, hogy

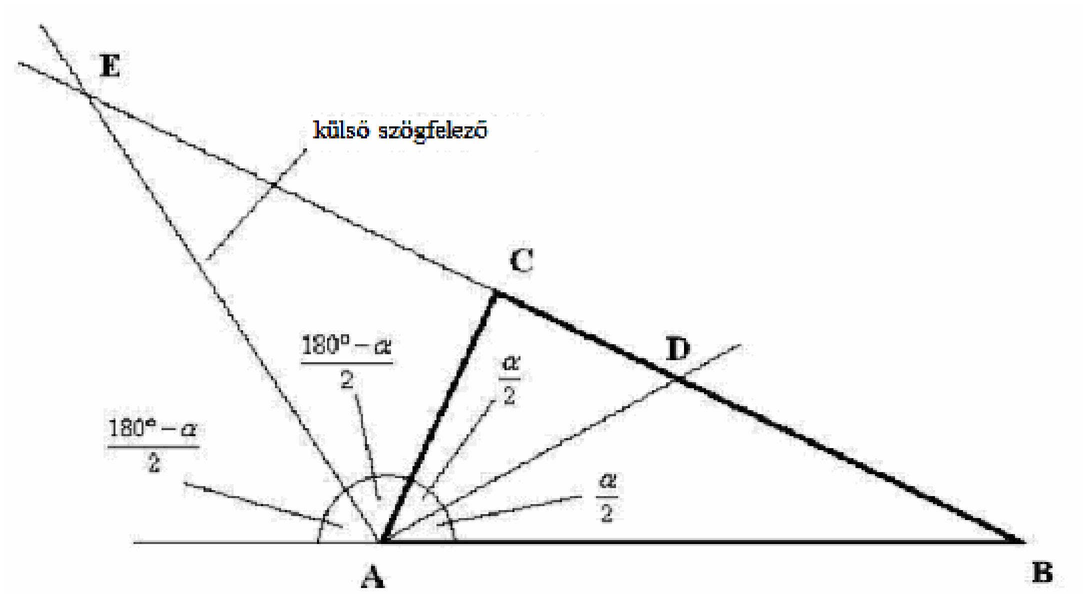
$$c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

(4. ábra).

4. ábra

12. Feladat. Ha ABC háromszög A szögének belső és külső szögfelezője a szemben fekvő BC oldalt rendre a D és E pontokban metszi, akkor igazolja,





hogy ez a négy pont egy ún. harmonikus pontnégyes (5. ábra), azaz teljesül a következő összefüggés:

$$\frac{2}{BC} = \frac{1}{BD} + \frac{1}{BE}$$

5. ábra

.

13. Feladat. Az ABCD trapézban. amelynek párhuzamos alapjai AB és CD, tekintsük azt az alapokkal párhuzamos EF szakaszt (legyen E az AD és F a BC pontja), amely tartalmazza az AC és BD átlók H metszéspontját. Igazolja, hogy EF az AB és CD alapok harmonikus közepe:

$$\frac{2}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$$

Haladványok további tulajdonságai

Könnyen bizonyítható a meghatározás alapján, hogy a számtani haladvány bármely három egymást követő a_{n-1}, a_n, a_{n+1} tagjára teljesül a következő összefüggés:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Fordítva, ha egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat bármely n > 1 esetén teljesíti a fenti összefüggést, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy számtani haladvány. Néha a feladatok megoldáskor szimmetria okokból a haladvány három, egymást követő a_{n-1}, a_n, a_{n+1} tagját érdemes az $a-r, a, a+r$ alakban írni. Hasonlóan, a számtani haladványok szokásos jelölései és $a_1 = a$, $a_2 = a+r$ ekkor nyilván $a_3 = a+2r$, $a_4 = a+3r$, és általában $a_n = a+(n-1)r$. Ebből könnyen belátható, hogy:

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = ...$ (*)

14. Feladat. Igazolja a számtani haladvány bármely három "egyenlő közű" a_{n-k}, a_n, a_{n+k} tagjára a következő összefüggést:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

15. Feladat. Igazolja, hogy a számtani haladvány első n tagjának S_n összege a következőképpen számítható ki:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...a_n = n\frac{a_1 + a_n}{2} = n\frac{2a + (n-1)r}{2}$$

(másképpen $S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}r$).

(Ötlet: Írja fel az összeg alá ugyanazt fordított sorrendben. Ezeket összeadva alkalmazza (*) összefüggést.

16. Feladat. Igazolja, hogy

$$a) \qquad 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$b) \qquad 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$$

Könnyen belátható a meghatározás alapján, hogy a mértani haladvány bármely három egymást követő a_{n-1}, a_n, a_{n+1} tagjára teljesül a következő összefüggés:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$$

Fordítva, ha egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat bármely n > 1 esetén teljesíti a fenti összefüggést, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy mértani haladvány. A feladatok megoldáskor szimmetria okokból a haladvány három, egymást követő a_{n-1}, a_n, a_{n+1} tagját érdemes az $\frac{a}{r}, a, ar$ alakban írni. A mértani haladványok szokásos jelölései $a_1 = a$, $a_2 = ar$ ekkor nyilván $a_3 = ar^2$, $a_4 = ar^3$, és általában $a_n = ar^{n-1}$.

17. Feladat. Igazolja a mértani haladvány bármely három "egyenlő közű" a_{n-k}, a_n, a_{n+k} tagjára a következő összefüggést:

$$a_n = \sqrt{a_{n-k}a_{n+k}}$$

18. Feladat. Igazolja, hogy a mértani haladvány első n tagjának S_n összege a következőképpen számítható ki:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...a_n = a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

(Ötlet: az adott összeg az alakban írható, ezt r-el szorozva: . A kettő különbsége a megoldás kulcsa.)

19. Feladat. Igazolja, hogy a mértani haladvány első n tagjának P_n szorzatára igaz:

$$P_n = a_1 a_2 a_3 ... a_n = a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Könnyen belátható a meghatározás alapján, hogy a harmonikus haladvány bármely három egymást követő, nemnulla a_{n-1}, a_n, a_{n+1} tagjára teljesül a következő összefüggés:

$$\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$$

Fordítva, ha egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nemnulla sorozat bármely n > 1 esetén teljesíti a fenti összefüggést, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy harmonikus haladvány.

Megjegyezzük, hogy a fenti bekezdésben nyilván fontos feltenni, hogy a sorozat tagjai nullától különbözőek. Ugyanakkor néha még további feltételeket is meg kell adni. Vegyük a következő példát: Tegyük fel, hogy az $a_1 = 6, a_2 = 8, a_3 = 12$ egy harmonikus haladvány első három tagja, és számítsuk ki a következő tagjait. Az a_4 értékére a fenti összefüggés alapján számítva, a $\frac{2}{a_3} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4}$ azaz $\frac{2}{12} = \frac{1}{8} + \frac{1}{a_4}, \frac{1}{a_4} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$ tehát $a_4 = 24$ adódik. Tovább számítva, az a_5 értékéhez felhasználjuk a $\frac{2}{a_4} = \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_5}$összefüggést, és azt kapjuk, hogy $\frac{1}{a_5} = \frac{2}{a_4} - \frac{1}{a_3} = \frac{2}{24} - \frac{1}{12} = 0$, ami lehetetlen.

Lássuk, mit tehetnénk az ellentmondásnak a kiküszöbölésére? Jelölje a és a harmonikus sorozat első és második tagját rendre $a_1 = a$, és $a_2 = a + r$. Az előbb is felhasznált $\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$ összefüggés alapján könnyen levezethető, hogy

$$a_1 = a\frac{a+r}{a+r}, a_2 = a\frac{a+r}{a}, a_3 = a\frac{a+r}{a-r}, a_4 = a\frac{a+r}{a-2r}, ...$$

és általánosan

$$a_n = a\frac{a+r}{a-(n-2)r}.$$

Tehát, az ellentmondás kiküszöböléséhez, annak a szükséges feltétele, hogy a nevező nullától különböző legyen, pontosan az, hogy az a ne legyen az r pozitív többszöröse (ellenkező esetben az nevező értéke 0 arra az n-re amelyre $a = (n-2)r$).

Visszatérve most az előző példához, azt kapjuk, hogy ha egy harmonikus haladvány első három tagja 6, 8, 12 akkor $a = 6, r = 2$ így az a pozitív többszöröse az r-nek, tehát ez okozná az ellentmondást. Ha például ugyanezt a három tagot, de a 12, 8, 6 sorrendben vesszük egy sorozat első három tagjának, akkor viszont $a = 12, r = -4$ tehát a nem pozitív többszöröse az r-nek. Ez azt is jelenti, hogy az adott számok ebben a sorrendben már lehetnek egy harmonikus haladvány tagjai, és a haladvány további tagjait is ki lehet számítani.

20. Feladat. Igazolja a harmonikus haladvány bármely három "egyenlő közű", nemnulla a_{n-k}, a_n, a_{n+k} tagjára a következő összefüggést:

$$\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-k}} + \frac{1}{a_{n+k}}$$

21. Feladat. Igazolja, hogy a harmonikus haladvány első n tagjának reciprokának összegére igaz a következő összefüggés:

$$R_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n} = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{n(2a-(n-3)r)}{2a(a+r)}$$

22. Feladat. Keresse meg annak a feltételét, hogy a egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani haladvány tagjai legyenek.

Megoldás. Jelölje a derékszögű háromszög oldalait rendre $b-r, b$, és $b+r$. Pithagorász tétele alapján

$$(b-r)^2 + b^2 = (b+r)^2$$

amiből $b = 4r$ következik. Tehát a háromszög oldalai rendre $3r, 4r, 5r$. (ezt a $3r, 4r, 5r$ alakú ún. Pithagorász-i számhármast már az ókorban is ismerték, sőt már a Mezopotámia-i agyagtáblákon is felfedezhetők).

22. Feladat. Feltéve, hogy egy háromszög oldalai egy számtani haladványt képeznek, igazolja, hogy ez a háromszög akkor, és csakis akkor lehet derékszögű, ha az oldalak állandó különbsége (a haladvány konstansa) éppen a háromszög beírt körének sugara.

Megoldás. Ha a háromszög derékszögű, akkor az oldalai az előző példa alapján $3x, 4x, 5x$ alakban írhatók, és a beírt kör sugara r, a háromszög T területének, és p félkerületének arányaként írható fel :

$$r = \frac{T}{p}, \text{azaz} \;\; r = \frac{\frac{3x.4x}{2}}{\frac{3x+4x+5x}{2}} = x$$

Tehát $r = x = 4x - 3x = 5x - 4x$, így a feltétel szükségességét beláttuk.

Fordított irányban, ha feltesszük, hogy a háromszög oldalai olyan számtani haladványt képeznek, aminek állandó különbsége egyenlő a beírt kör r sugarával, akkor az oldalak $a = b-r, b$, és $c = b+r$, és a háromszög területe $T = p.r$, ahol p a félkerület. Héron képletét ($T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$) alkalmazhatjuk és így tehát $\frac{3br}{2} = \sqrt{\frac{3b}{2}(\frac{b}{2}-r)\frac{b}{2}(\frac{b}{2}+r)}$

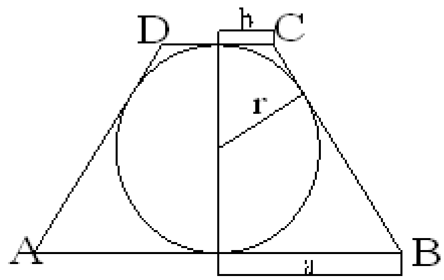
más szavakkal , tehát , és így $b = 4r$. Következik, hogy $a = 3r, b = 4r$ és $c = 5r$, éppen egy derékszögű háromszög oldalai.

23. Feladat. Tegyük fel, hogy egy háromszög oldalainak négyzetei egy számtani haladványt képeznek. Igazolja, hogy ekkor a háromszög súlyvonalainak (egy csúcsot a szemközti oldal középpontjával összekötő szakasz) négyzetei is egy számtani haladvány tagjai. Igaz-e a fordított állítás?

Ötlet: Az A ponthoz tartozó m_a súlyvonal hosszának négyzete

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)+a^2}{4}.$$

24. Feladat. Vegyük a következő sorozatokat:



1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37…
4, 15, 26, 37, 48, 59, …

Keresse meg a két számtani haladvány közös tagjait, és igazolja, hogy azok is számtani haladványt képeznek. Általánosítsa a feladatot!

25. Feladat. Tekintsük egy sorozat $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ tagjait. Igazolja, hogy ez a sorozat akkor, és csakis akkor számtani haladvány, ha:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+....+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}, \textit{bármely } n \in \mathbb{N} \textit{ esetén.}$$

26. Feladat. Két fiatal állásinterjúra jelentkezik. Mindketten a következő kérdést kapják a gondolkodó képességeik ellenőrzésére:

Ha a munkáltató elégedett a munkájával, akkor az alkalmazott maga döntheti el, hogy miként emeljék az 1000 eurót kitevő kezdő fizetését: vagy a) minden négy hét eltelte után 15 euró fizetéssel többet kap, vagy b) minden két hét eltelte után 5 euró fizetésemelést kap. Ha Ön kellene válaszoljon helyettük, melyik lehetőséget választaná?

Magyarázza meg a válaszát!

27. Feladat. Tekintsünk egy olyan egyenlőszárú trapézt, amely kör köré írható. Legyen $2a, 2b$ és r rendre a trapéz alapjai, és a beírt kör sugara. Igazolja, hogy $r^2 = ab$, vagyis a, r, b egy mértani haladványt képez (6. ábra).

6. ábra

28. Feladat. Keresse meg annak a feltételét, hogy egy derékszögű háromszög oldalai mértani haladványt képezzenek.

Megoldás. Ha a derékszögű háromszög oldalai egy mértani haladvány egymás utáni tagjai, akkor hosszúságuk jelölésére alkalmas az a, ar, és ar^2. Pithagorász tétele alapján $a^2 = (ar)^2+(ar^2)^2$, tehát, feltéve, hogy $a \neq 0$, $1 = r^2+r^4$, így $r^2 = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, és a feltételeknek megfelelő egyetlen valós megoldás $r = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$. Arra a következtetésre jutottunk, hogy a derékszögű háromszög oldalai $a, a\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ és $a\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, ahol a pozitív.

29. Feladat. Ha a következő feltételek egyidejűleg teljesülnek:

a, b, c számtani haladványt képeznek,
b, c, d mértani haladványt képeznek,
c, d, e harmonikus haladványt képeznek,

akkor a, c, és e mértani haladványt képeznek.

30. Feladat. A Miskolci Csokoládégyár új csokoládétermékét népszerűsíti, amelynek minden táblája egy szelvényt tartalmaz. Két ilyen szelvény beváltható egy újabb tábla csokoládéra (amelyben szintén van egy újabb szelvény). Mit érhet valójában egy ilyen tábla csokoládé?

(Ötlet: A számítások szerint $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+$ ...tábla csokoládét jelent, amely „végső soron összegeződik”, és ez az, egyre több tagot számláló sorozat "összege" végül „2”).

Rekkurencia képlettel megadott sorozatok

A sorozatok fogalma gyakran megjelenik (számsorozatok és alkalmazásuk a mindennapi élet része, pl. napi hőmérséklet, évi termés, stb), és gyakran előfordul, hogy a sorozat tagjait az őket megelőző egy vagy több tag értékét felhasználó szabályszerűséggel adjuk meg (például a népesség növekedése, vagy egy bankbetét növekedése a pillanatnyi értékkel arányosan). Az ilyen szabályokat „rekurrencia” relációknak nevezzük.

A rekurrencia relációkkal megadható sorozatokra fontos példák az előzőekben tanulmányozott számtani, mértani és harmonikus haladványok. Valóban a következő szabályok kötik össze a haladvány egy tagját az őt megelőzővel:

számtani haladvány esetén: $a_{n+1}=a_n+r$, ahol a_1 és r adott,
mértani haladvány esetén: $a_{n+1}=a_n r$, ahol a_1 és r adott, és
harmonikus haladvány esetén: $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+r$, ahol a_1 és r adott.

A két első rekurrencia relációt lineáris rekurrencia relációknak nevezzük, mivel a benne szereplő tagok első hatványát tartalmazzák (a harmadik esetében az a_n-ek -1 hatványa szerepel. Az első kettőt elsőrendű lineáris rekurrenciának nevezzük, mivel a_{n+1} az őt közvetlenül megelőző tagra épül.

Rekurrencia képletek közt talán az a leghíresebb ami Fibonacci Liber Abaci című könyvében jelent meg.

Ez azt jelenti, hogy $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. Megjegyzendő, hogy most mindkét első tagot, az a_1 és a_2-t egyaránt ismerni kell, ahhoz, hogy az egész sorozat felírható legyen.

A Fibonacci rekurrencia képlet szintén lineáris, de már másodrendű.

Fibonacci a Liber Abaci c. munkájában a következő feladatot fogalmazza meg:

„ Egy ember vett egy pár kisnyulat (anyaállat és apaállat), egy hónap alatt ivarérettek lettek és a második hónap után szaporodni kezdtek a következők szerint: minden hónapban egy pár kisnyúl született, ugyanolyan összetételben, mint az eredeti vételkor, és minden új pár ugyanazt a szaporulatláncot követte: egy hónap alatt ivarérettek lettek és a második hónap után szaporodni kezdtek. Mennyi a nyulak száma rendre a következő hónapokban?”

Ellenőrizhető, hogy:

Első hónapban: 1

Második hónapban: 1
Harmadik hónapban: 2
Negyedik hónapban: 3

Ötödik hónapban: 5

Könnyen belátható, hogy ha az n. hónapban a nyulak a_n, akkor teljesül a következő összefüggés $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, és az első két tag $a_1 = 1$ és $a_2 = 1$. Ez az ún. Fibonacci sorozat

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

31. Feladat. Írja fel az előbb ismertetett Fibonacci sorozat három hiányzó tagját:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _

Mit mondhatunk a Fibonacci sorozat általános tagjáról? Ebben az esetben nem olyan egyszerű a válasz, mint az előző kérdésekben.

Sorozatok II.

Ez a fejezet is a sorozatokról szól. Ajánljuk, hogy ezt megelőzően a hallgató a Sorozatok I. c. részt tanulmányozza, amelyben főként a Számtani, Mértani és Harmonikus Haladványokat ismerheti meg. Az alábbiakban röviden összefoglaljuk az említett fejezet néhány eredményét.

A Sorozatok I. a sorozatok egy intuitív leírását tartalmazza. Ha egy pontos definíciót akarunk, akkor az a következőképpen adható meg:

Definíció. Egy (végtelen) sorozat a természetes számok egy leképzése a valós számokra, azaz egy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvény.

A sorozatot meghatározó függvényt rendszerint nem nevezzük meg, és a szokásos $f(1), f(2), f(3), ...$ függvényérték jelölés helyett azokat egyszerűen a sorozat első, második, harmadik, … tagjának nevezzük, és a jelölésük:

$a_1, a_2, a_3, ...$

Magát a sorozatot tömören (a_n), vagy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$jelöli, és a_n –t a sorozat általános tagjának nevezzük.

Néha véges sorozatokról beszélünk, és egy végtelen sorozat kezdő tagjait értjük alatta. Például $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ egy nyolc tagú véges sorozat.

Egy sorozat megadható az általános tagjával, például , vagy egy rekurrencia relációval amely a sorozat egy tagját az őt megelőző tag, vagy tagok segítségével adja meg. Például a Fibonacci sorozat tagjait a következőképpen adhatjuk meg:

$a_1 = 1, a_2 = 1$ és $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (ha $n \geq 1$)

Lineáris rekurrencia relációval adhatók meg a számtani, mértani, és harmonikus haladványok tagjai is például.

Valóban, hogy ha egy (véges, vagy végtelen) sorozat bármely három, egymást követő a_{n-1}, a_n, a_{n+1} tagjára teljesül a következő összefüggés:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

akkor a sorozatot számtani haladványnak nevezzük.

Ha egy sorozat bármely három, egymást követő a_{n-1}, a_n, a_{n+1} tagjára teljesül a következő összefüggés:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$$

akkor a sorozat mértani haladvány.

Végül, ha egy nullától különböző tagokat tartalmazó sorozat bármely három, egymást követő a_{n-1}, a_n, a_{n+1} tagjára teljesül a következő összefüggés:

$$\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$$

akkor a sorozat egy harmonikus haladvány.

Ugyanez a három haladvány megadható rekurrencia relációval (rekurzív úton) a következők szerint:

$a_{n+1} = a_n + r$, ahol a_1 és r adott, egy számtani haladvány,

$a_{n+1} = a_n r$, ahol a_1 és r adott, egy mértani haladvány, és

$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + r$, ahol a_1 és r adott, (és ahol a_1 nem pozitív többszöröse r-nek), egy harmonikus haladvány.

Az előbbi három haladvány általános tagja is megadható, ezek rendre:

$a_n = a+(n-1)r$, $a_n = ar^{n-1}$, és $a_n = a\frac{a+r}{a-(n-2)r}$, ahol $a = a_1$ és r adottak.

1. Feladat. Igazolja, hogy a definícióhoz hasonló tulajdonság mindhárom haladvány esetén igaz bármely három: a_{n-k}, a_n, a_{n+k} "egyenlő távolságra lévő tagra", azaz a megfelelő haladványoknál rendre teljesülnek az:

$a_n = \frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}, a_n = \sqrt{a_{n-k}a_{n+k}}$ és $\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-k}} + \frac{1}{a_{n+k}}$összefüggések.

Számtani haladványok típusfeladatai

2. Feladat. Egy számtani haladvány első három tagja rendre 20, 16.5 és 13. Számítsa ki a tizenötödik tagot!

Megoldás. Az adott számtani haladvány állandó különbsége -3.5 és első tagja 20. Tehát az n. tag képlete $a_n = a + (n-1)r$ szerint $a_{15} = a + 14r = 20 + 14.(-)3.5 = -29$

3. Feladat. Ha a számtani haladvány harmadik tagja, $a_3 = 2$, valamint a kilencedik tagja,$a_9 = 20$, keresse meg a hatodik tagot!

Megoldás. A feladat adatainak és az $a_n = a + (n-1)r$ képletnek a felhasználásával: $a + 2r = 2$,

és $a + 8r = 20$. A kapott egyenletrendszer megoldásai: $a = -4$ és $r = 3$, majd kiszámítható $a_6 = a + 5r = -4 + 15 = 11$.

Észrevehető, hogy a feladat még egyszerűbben is megoldható, ha az egyenlő közű tagokra vonatkozó tulajdonságot alkalmazzuk: $a_6 = \frac{a_3+a_9}{2} = \frac{2+20}{2} = 11$.

Mértani haladványok típusfeladatai

4. Feladat. Ha a mértani haladvány harmadik tagja 5, hatodik tagja -40, keressük meg a nyolcadik tagját!

Megoldás. Alkalmazzuk a mértani haladvány az n. tagjának képletét, így $ar^2 = 5$, és $ar^5 = -40$. A két egyenletből $r^3 = -8$, ennek egyetlen való megoldása $r = -2$, továbbá $a = \frac{5}{4}$, így aztán $a_8 = ar^7 = \frac{5}{4}(-128) = -160$, tehát $a_8 = -160$.

A mértani haladványoknak valószínűleg a leghíresebb feladata **a sakkmester feladat**:

Egy király azt ígérte a sakkmesternek, hogy bármit megad, amit az kíván, ha megnyeri a játékot, és természetesen a sakkmester könnyedén nyert. A sakkmester csak annyit kért, hogy a sakktábla első négyzetére egy szem búzát tegyen a király, majd kétszer annyit tegyen a másodikra, és így folytassa mind a 64 négyzetre, mindig kétszer annyit tegyen a következő négyzetre, mint amennyit az előzőre tett. Mit gondol, örvendett-e a király a „szerény„ kívánságnak? Lehet, hogy első hallásra egyszerűen teljesíthetőnek gondolta, de végiggondolva, már nem. Mi az ön véleménye?

Lineáris rekurrencia relációval adott sorozatok

A haladványok mellett más jól ismert példákat adhatunk a rekurrencia relációkkal megadható sorozatokra. A leghíresebb talán a Fibonacci sorozat, amit az $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ másodrendű lineáris rekurrencia reláció és az $a_1 = 1, a_2 = 1$ kezdeti feltételek határoznak meg. Tagjai rendre:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Mit mondhatunk az általános tagjáról? Létezik-e az a_n-t leíró képlet? Erre a kérdésre nem is olyan egyszerű a válasz, de a következőképpen kereshető meg:

Lényeges megállapítani, hogy az adott rekurrencia reláció és a kezdeti feltételek (első két tag) teljesen meghatározzák a sorozatot. Valóban ha (b_n) is egy olyan sorozat amire és $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, akkor kijelenthetjük, hogy $b_n = a_n$ minden n-re (nem csupán $n = 1$ vagy $n = 2$ esetén). Valóban rendre:

$b_3 = b_2 + b_1 = a_2 + a_1 = a_3$,

így aztán $b_4 = b_3 + b_2 = a_3 + a_2 = a_4$,

és általában, induktív úton belátható, hogy $b_n = a_n$ minden n esetén.

Az általános taghoz a következőképpen juthatunk el: Egy (b_n) sorozatot keresünk, amire és $b_1 = a_1 = 1, b_2 = a_2 = 1$.

Elsőre keressük az adott másodrendű lineáris rekurziónak egy nullától különböző $b_n = r^n$ alakú megoldását.

Helyettesítsük be a $b_n = r^n$ kifejezést az adott relációba, majd a közös tényezővel egyszerűsítve eljutunk az:

$r^2 = r + 1$.

ún. karakterisztikus egyenlethez, amelynek r megoldása kell legyen:

Ennek az egyenletnek két gyöke $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ és $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Tehát, mindkettő, azaz $b_n = r_1^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ és $b_n = r_2^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ kielégíti a rekurrencia relációt. Ezt akár ellenőrizhetjük is.

Ha $b_n = r_1^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, akkor

$b_{n+2} - (b_{n+1} + b_n) = r_1^{n+2} - \left(r_1^{n+1} + r_1^n\right) = r_1^n \left(r_1^2 - (r_1 + 1)\right) = 0$

Hasonló a $b_n = r_2^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ eset is.

Megjegyezzük, hogy a rekurrencia reláció linearitása miatt az adott megoldások egy tetszőleges lineáris kombinációja is megoldás, azaz:

$b_n = Ar_1^n + Br_1^n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (*)$

bármely A, B állandók esetén kielégíti a rekurrencia relációt. Ennek az ellenőrzése egyszerű feladat, és azt az olvasóra bízzuk. Most csupán az marad, hogy az A és B állandókat úgy válasszuk meg, hogy a $b_1 = a_1 = 1, b_2 = a_2 = 1$ kezdeti feltételek is teljesüljenek.

Behelyettesítve az $n = 1$ és $n = 2$ értéket a (*) összefüggésbe:

$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$

és

$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1$

A kapott rendszer megoldásai A és B -re, $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ *és* $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

A fenti megjegyzéseket és számításokat összegezve:$a_n = b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

.

Azaz valóban megtaláltuk a Fibonacci sorozat általános tagjának képletét.

Vegyünk egy másik, hasonló példát:

Keressük meg az általános tag képletét, ha a rekurrencia reláció: $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, valamint a kezdeti feltételek : $a_0 = 3$ és $a_1 = 7$

Az előző esethez hasonlóan a megoldást $a_n = r^n$ alakban keresve, azt a rekurrencia relációba behelyettesítve, az egyszerűsítés után a következő karakterisztikus egyenletet kapjuk:

$r^2 = 3r - 2.$

Ennek gyökei: $r_1 = 1$ és $r_2 = 2$. Tehát a megoldás várható alakja: $a_n = Ar_1^n + Br_2^n = A + B \cdot 2^n$, ahol az A, B állandókat a következő kezdeti feltételek alapján határozzuk meg: $a_0 = 3$ és $a_1 = 7$ és Ez lesz a következő feladat.

5. feladat. Igazolja, hogy $a_n = A + B \cdot 2^n$ (n = 0, 1, 2, ...) egy megoldása az $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ $(n \geq 2)$ rekurrencia relációnak. Határozza meg az A és B állandók értékét, úgy, hogy a következő kezdeti feltételek teljesüljenek: $a_0 = 3$ és $a_1 = 7$

Megoldás. (Direkt úton amennyiben lehetséges, ha nem akkor az előbbiekre támaszkodva). Első lépésként a javasolt megoldást a rekurrencia relációba helyettesítjük. Ekkor annak baloldala, azaz $a_n = A + B \cdot 2^n$ éppen . A jobboldalon álló kifejezés kiszámítására felírjuk az $a_{n-1} = A + B \cdot 2^{n-1}$ és az $a_{n-2} = A + B \cdot 2^{n-2}$ tagokat. Így a jobboldal $3a_{n-1} - 2a_{n-2} = 3\left(A + B \cdot 2^{n-1}\right) - 2\left(A + B \cdot 2^{n-2}\right)$. Tehát ellenőriznünk kell, hogy teljesül-e:

$$a_n = A + B \cdot 2^n = 3\left(A + B \cdot 2^{n-1}\right) - 2\left(A + B \cdot 2^{n-2}\right)$$

bármely $n \geq 2$ esetén. Ez egy egyszerű számítás. A jobboldalból indulva rendre felírható:

$$3\left(A + B \cdot 2^{n-1}\right) - 2\left(A + B \cdot 2^{n-2}\right) = 3A - 2A + 3B \cdot 2^{n-1} - 2B \cdot 2^{n-2} = A + 4B \cdot 2^{n-2}$$

ami pont a baloldal, azaz $A + B \cdot 2^n$.

Most határozzuk meg azt az A és B értékét úgy, hogy az $a_0 = 3$ és $a_1 = 7$ kezdeti feltételek teljesüljenek.

Az $n = 0$ és $a_0 = 3$, a következő egyenletet adja: $3 = A + B \cdot 2^0 = A + B$. Hasonlóan $n = 1$ és $a_1 = 7$, a $7 = A + B \cdot 2^1 = A + 2B$ egyenlethez vezet. Meg kell oldanunk tehát a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} A + B &= 3, \\ A + 2B &= 7 \end{aligned}$$

Egyszerű számítással az $A = -1$és $B = 4$ adódik. Tehát a rekurrencia relációnak és az adott kezdeti feltételeknek egyetlen megoldása $a_n = Ar_1^n + Br_2^n = -1 + 4 \cdot 2^n = 2^{n+2} - 1$. Ugyanez a képlet azt is jelenti, hogy direkt úton kiszámíthatjuk az $a_7 = 2^9 - 1$ értékét, anélkül, hogy egyenként, az összes tagot ki kellene számítani, amíg megjelenik az a_7.

Összegezhetjük tehát: Az előbbi két példa alapján világos, hogy az $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ másodrendű lineáris rekurrencia megoldása során, amelynek első két tagja, a_1, a_2 adott, elsőként az $r^2 + pr + qr = 0$ másodfokú egyenlete kell megoldanunk, majd ha annak két különböző r_1 és r_2 valós gyöke van, a rekurzió általános tagja $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$ alakú. Az A és B meghatározható a_1, a_2 segítségével.

Tulajdonképpen ez az ötlet általánosítható egy

$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + ... + p_k a_n = 0$

alakú k-ad rendű lineáris rekurzióra, ha az ebből származó

$r^k + p_1 r^{k-1} + ... + p_k = 0$

k-ad fokú karakterisztikus egyenletnek k különböző valós gyöke van. Ekkor az általános tag alakja:

$a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + ... + A_k r_k^n$ ahol az $A_1, A_2, ..., A_k$ együtthatók meghatározásához ismerni kell az első k tag értékét.

Monoton sorozatok. Korlátos sorozatok

A következő két fejezetben a sorozatok gyakran előforduló tulajdonságait tanulmányozzuk, mint a monotonitás, korlátosság, vagy konvergencia.A pontos definíciókat a következők tartalmazzák. Ennek a két fejezetnek az ismeretében olyan kérdésekre tudunk majd válaszolni mint például:

Kérdés. Tekintse a következő (a_n) sorozatot:

$\sqrt{2}$, $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ... ,$\sqrt{2 + a_{n-1}}$, ...

Növekvő-e a sorozat? Korlátos-e a sorozat? Van-e határértéke a sorozatnak?

Következzen néhány definíció.

Definíció. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem csökkenő, ha $a_n \le a_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ha az egyenlőtlenség szigorúan teljesül ($a_n < a_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén), akkor a sorozat növekvő. Hasonlóan értelmezzük a nem növekvő sorozatot (ha $a_n \ge a_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén), és a csökkenő sorozatot ($a_n > a_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén). Azokat a sorozatokat, amelyek nem csökkenők, vagy nem növekvők monoton sorozatoknak nevezzük, a növekvő, illetve csökkenő sorozatok szokás szigorúan monoton sorozatoknak nevezni.

Definíció. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat felülről korlátos, ha létezik egy olyan $M \in \mathbb{R}$ szám, amelyre $a_n \le M$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ezt az M-et a sorozat egy felső korlátjának nevezzük. Hasonlóan, az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat alulról korlátos, ha van egy olyan $m \in \mathbb{R}$ szám, amelyre $m \le a_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Egy ilyen m-et a sorozat egy alsó korlátjának nevezzük. Végül az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot akkor nevezzük korlátosnak, ha egy időben alulról is és felülről is korlátos.

Néhány példa.

Az $a_n = n$ sorozat a) növekvő, b) alulról korlátos és c) felülről nem korlátos.

A $b_n = 1$ sorozat a) nem csökkenő, b) nem növekvő és c) korlátos.

A $c_n = \frac{1}{n}$ sorozat a) csökkenő, b) alulról korlátos és c) felülről is korlátos.

Megjegyzendő, hogy ha van felső korlátja egy sorozatnak pl. M, akkor az nem egyértelmű, mivel például $M + \frac{1}{2}$ vagy $M + 1$ is felső korlátai ugyanannak a sorozatnak. Hasonló tulajdonság teljesül az alsó korlátokra is.

6. feladat. Igazolja, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat akkor és csakis akkor korlátos, ha létezik egy olyan $M > 0$ amelyre $|a_n| \le M$

(minden n-re)

7. Feladat. Tanulmányozza a következő sorozatok monotonitását:

a) $x_n = \frac{1}{n}$, b) $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, c) $x_n = \frac{n}{n+1}$, d) $x_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$,

e) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, f) $x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}$, g) $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$, h) $x_n = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

8. feladat. Tanulmányozza a következő sorozatok monotonitását:

a) $x_n = \frac{n^2}{n+1}$, b) $x_n = n - \frac{1}{n}$, c) $x_n = \frac{n^2}{n^2+1}$, d) $x_n = 3\left(\frac{5}{3}\right)^n$

e) $x_n = (-1)^n \sqrt{n^2+1}$, f) $x_n = n + (-1)^n \frac{n}{n+1}$, g) $x_n = (-1)^n \frac{n2^n}{n+1}$, h) $x_n = \frac{n^2}{n^2+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

9. feladat. Vizsgálja meg, hogy a következő sorozatok korlátosak-e?

a) $x_n = \frac{1}{n}$, b) $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, c) $x_n = \frac{n}{n+1}$, d) $x_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$,

e) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, f) $x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}$, g) $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$, h) $x_n = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

10. Feladat. Vizsgálja meg, hogy a következő sorozatok korlátosak-e?

a) $x_n = \frac{n^2}{n+1}$, b) $x_n = n - \frac{1}{n}$, c) $x_n = \frac{n^2}{n^2+1}$, d) $x_n = 3\left(\frac{5}{3}\right)^n$

e) $x_n = (-1)^n \sqrt{n^2+1}$, f) $x_n = n + (-1)^n \frac{n}{n+1}$, g) $x_n = (-1)^n \frac{n2^n}{n+1}$, h) $x_n = \frac{n^2}{n^2+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

11. feladat. Igazolja, hogy az $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, ahol $s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, nem korlátos.

Felhasználható a következő egyenlőtlenség: $x \ge log(1 + x)$ ha $x \ge 0$ (ami analízis segítségével könnyen igazolható).

Megoldás. Az adott egyenlőtlenség alapján rendre:

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} \geq log(1+1)+log(1+\frac{1}{2})+log(1+\frac{1}{3})+...+log(1+\frac{1}{n})$
$= log\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3}...\frac{n+1}{n}\right) = log(n+1)$
tehát az adott összeg nem korlátos felülről.

A rekurrencia relációval adott sorozatokat is tanulmányozhatunk monotonitás vagy korlátosság szempontjából. Lássuk ezt a következő példában.

12. feladat. Igazolja, hogy az $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ rekurrencia relációval értelmezett sorozat, amelyre $a_1 = \sqrt{2}$, egy növekvő, korlátos sorozat.

Megoldás. Pozitív sorozatok esetén elegendő a felső korlátot megtalálni (hiszen pl. 0 egy alsó korlát).

Tudjuk, hogy $a_1 = \sqrt{2} < 2$, tehát $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < 2$.

Indukcióval bizonyítjuk, tehát, tegyük fel, hogy $a_n < 2$, egy $n = k$ -ra. Ekkor $n = k+1$-re azt kapjuk, hogy: $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < 2$,

tehát az indukció teljesül, és így a sorozat felülről korlátos.

A monotonitás vizsgálatakor össze kell hasonlítani az a_{n+1}-t az a_n-el. Mivel tudjuk, hogy $a_1 < a_2$, próbáljuk meg bebizonyítani, hogy minden n-re teljesül $a_n < a_{n+1}$, azaz $a_n < \sqrt{2+a_n}$.

Mindkét oldalt négyzetre emeljük, és az egyenlőtlenséggel ekvivalens $a_n^2 < 2 + a_n$ egyenlőtlenséggel folytatjuk, amit átírva kapjuk az $a_n^2 - a_n - 2 < 0$ egyenlőtlenséget. Most elemezzük az $x^2 - x - 2$ parabola előjelét (hiszen ez a baloldalon álló kifejezés). Gyökei -1 és 2, tehát minden x-re ami teljesíti a $-1 < x < 2$ feltételt, a parabola negatív. Az első részben viszont éppen azt igazoltuk, hogy $0 < a_n < 2$, minden n-re, tehát $a_n^2 - a_n - 2 < 0$. Ebből következik, hogy $a_n < \sqrt{2+a_n}$, azaz $a_n < a_{n+1}$ amint az feltehető volt.

(Megjegyzés: Mivel igazoltuk, hogy a sorozat növekvő, a korlátok helyett a „javított" korlátok vehetők.

Megemlíthető, hogy az előző példában tanulmányozott sorozat pontosan az a sorozat, amely a fejezet elején kérdésként jelenik meg. Feleltünk tehát az ott feltett kérdések közül kettőre. Meg kell válaszolnunk azt a kérdést is, hogy a sorozatnak van-e határértéke, ezt a következő fejezetben tárgyaljuk.

Sorozatok konvergenciája

A következőkben a sorozatok konvergenciáját tárgyaljuk. Első megközelítésben (a pontos definíció alább következik) az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat akkor "közelíti meg" vagy "konvergál" az L határértékhez, miközben az n nő, ha egy tetszőleges "tűréshatár mellett", a sorozat tagjai legfeljebb $\blacksquare$ -nal ($\blacksquare > 0$) térnek el L-től. Pontosítva:

A konvergencia definíciója.

Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens az L valós számhoz, és ezt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ jelöli, ha bármely adott $\blacksquare > 0$ esetén van egy N természetes szám úgy, hogy bármely $n > N$, esetén a_n teljesíti a következőt:

$$|a_n - L| < \epsilon$$

Ha a sorozat nem konvergens, akkor divergensnek nevezzük.

Az L számot az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat határértékének nevezzük.

A $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ jelölés helyett néha a rövidebb $\lim a_n = L$ vagy az $a_n \to L$ jelölést használjuk.

Néha előnyösebb a definícióban szereplő egyenlőtlenséget a következő, azzal ekvivalens alakban írni: $L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$.

Megjegyezhető, hogy ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens, akkor a definícióban szereplő N nem egyértelmű: ha egy tetszőleges N esetén az egyenlőtlenség teljesül bármely $n > N$-re, akkor az N helyett egy nála nagyobb szám, pl. $N+1, N+10$ is vehető. Szintén fontos tudni, hogy általában N értéke függ $\blacksquare$-tól. Ha $\blacksquare$-t megváltoztatjuk, rendszerint N-et is másként kell kiválasztani.

Egy másik tudnivaló, ami a definícióból azonnal következik, az, hogy ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens akkor az $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is az, és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

. Ez a gondolat folytatható: bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k}$

Példák. a) A konstans $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, azaz ha $a_n = c$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, konvergens, és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

Bizonyítás. Nyilván, adott $\blacksquare > 0$ esetén, bármely N-re ($N \in \mathbb{N}$) teljesül, hogy ha $n > N$ akkor:

$c - \blacksquare < c < c + \blacksquare$, azaz $c - \blacksquare < a_n < c + \blacksquare$

b) Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, amelyre $a_n = \frac{1}{n}$ sorozat, röviden az $a_n = \frac{1}{n}$ konvergens a 0-hoz, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bizonyítás. Vegyünk egy adott $\blacksquare > 0$ értéket. esetén, és legyen N egy olyan ($N \in \mathbb{N}$) szám amelyre teljesül teljesül, hogy $N > \frac{1}{\epsilon}$ vagyis $\frac{1}{N} < \epsilon$.Ha most $n > N$ akkor az is igaz, hogy $\frac{1}{n} < \frac{1}{N}$, tehát:

$-\blacksquare < \frac{1}{n} < +\blacksquare$, azaz $-\blacksquare < a_n < +\blacksquare$ és így $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Vagyis a definíció szerint igazoltuk a sorozatok konvergenciáját, a határérték létezését.

A következő két feladatot a későbbiekben leírt tételekkel könnyen meg lehet oldani, de az olvasónak azt javasoljuk, hogy oldja meg őket direkt a definíció alapján.

13. feladat. Igazolja, hogy a $\frac{2}{n}, \frac{1}{n^2}$ és $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sorozatok 0-hoz konvergensek.

14. feladat. Igazolja, hogy: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = 1$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n}{3n+2} = -\frac{2}{3}$.

15. Feladat. Igazolja, hogy az $a_n = (-1)^n$ sorozat nem konvergens 0-hoz. Általánosabban mutassa ki, hogy egyáltalán nem konvergens semmilyen L-hez sem.

(Utasítás az első részhez: Igazolható, hogy $\epsilon > 0$ (pl. $\epsilon = \frac{1}{2}$) esetén **nem lehetséges** egy olyan N-et találni, amelyre ha $n \geq N$ akkor $-\blacksquare < a_n < +\blacksquare$, azaz $-\frac{1}{2} < a_n < +\frac{1}{2}$ hiszen a sorozat tagjai csak az -1 ill. 1 értékeket veszik fel).

16. Feladat. Igazolja, hogy ha egy (a_n) sorozatra teljesül $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |L|$. Igaz-e a fordított állítás?

Megoldás. Azonnal belátható a következő egyenlőtlenség alapján:

$0 \leq ||a_n| - |L|| < |a_n - L|$. A fordított állítás hamis, amint azt az előző példa is igazolja: láthattuk, hogy $a_n = (-1)^n$ nem konvergens, ugyanakkor $|a_n| = |(-1)^n| = 1$, mint konstans sorozat konvergens.

Mielőtt további példákat adunk a sorozatok konvergenciájára, bizonyítsunk be néhány, a továbbiakban felhasználható tételt.

1. Tétel. Minden konvergens sorozat korlátos.

Bizonyítás. Legyen az (a_n) egy konvergens sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Alkalmazzuk a konvergencia definícióját $\blacksquare > 0$-re. Erre az $\blacksquare > 0$ értékre létezik egy N úgy, hogy minden $n > N$ esetén: $L-\epsilon < a_n < L+\epsilon$, tehát Válasszuk ki az $M = max\{|L-\epsilon|, |L+\epsilon|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_N|,\}$ értéket. Most már nyilvánvaló, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $|a_n| < M$, azaz a sorozat korlátos.

Megjegyzés. A tétel fordítottja nem igaz, hiszen például a $(-1)^n$ sorozat korlátos, de nem konvergens.

17. Feladat. Tegyük fel, hogy az (a_n) nullától különböző tagokat tartalmazó sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, ahol $L \neq 0 (L > 0)$. Igazolja, hogy az $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ sorozat is korlátos. (Ezt az eredmény felhasználva igazolni fogjuk, hogy a második sorozat is konvergens).

(Utasítás. Legyen $\epsilon = \frac{L}{2} > 0$. Létezik tehát olyan N, amelyre bármely $n \geq N$ esetén $|a_n - L| < \frac{L}{2}$ és így $|a_n| < \frac{L}{2}$, tehát $\frac{1}{|a_n|} < \frac{2}{L}$).

2. Tétel. Ha az $(a_n), (b_n)$ és (c_n) három olyan sorozat, amelyre $a_n \leq b_n \leq c_n$ minden n-re és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Bizonyítás. Legyen egy adott $\epsilon > 0$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, létezik egy olyan N_1 amelyre minden $n \geq N_1$ esetén:

(1) $\quad L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$

Hasonlóan létezik egy olyan N_2 is, amelyre minden $n \geq N_2$ esetén:

(2) $\quad L - \epsilon < c_n < L + \epsilon$

Legyen $N = max(N_1, N_2)$. Ha tehát $n \geq N$, az (1) és (2) egyidejűleg teljesül, tehát

$L - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \epsilon$.

Ez azt jelenti, hogy bármely n ■ N esetén $L - \epsilon < b_n < L + \epsilon$, tehát (b_n) konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

3. Tétel. Tegyük fel, hogy az $(a_n), (b_n)$ olyan konvergens sorozatok, amelyekre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$ és vegyük a $p, q \in \mathbb{R}$ állandókat.

Ekkor a $(pa_n + qb_n)$ konvergens sorozat és $\lim\limits_{n\to\infty} (pa_n + qb_n) = pL_1 + qL_2$, valamint az $(a_n b_n)$ konvergens sorozat és $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = L_1 L_2$. Ha még a feltételeken felül minden n-re $b_n \neq 0$ és $L_2 \neq 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2}$.

Bizonyítás. Legyen egy adott $\epsilon > 0$ valós szám. Ekkor $\frac{\epsilon}{2|p|+1} > 0$ is igaz. Használjuk fel ezt a definíció értelmében. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$, létezik egy olyan N_1 , hogy minden $n \geq N_1$ esetén:

$|a_n - L_1| < \frac{\epsilon}{2|p|+1}(1)$

Hasonlóan, létezik egy olyan N_2 , hogy minden $n \geq N_2$ esetén:

$|b_n - L_2| < \frac{\epsilon}{2|q|+1}(2)$

Legyen $N = max(N_1, N_2)$. Most minden $n \geq N$ esetén az (1) és (2) egyidejűleg teljesül, és ezek alapján:

$$|pa_n + qb_n - pL_1 - qL_2| = |pa_n - pL_1 + qb_n - qL_2| < p\frac{\epsilon}{2|p|+1} + q\frac{\epsilon}{2|q|+1} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Útmutatás a $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = L_1 L_2$ bizonyítására. Használjuk a következőket:

$|a_n b_n - L_1 L_2| \leq |a_n b_n - L_1 b_n + a_n L_2 - L_1 L_2| \leq |(a_n - L_1)b_n + (a_n - L_1) L_2| \leq |(a_n - L_1| |M| + |a_n - L_1| |L_2|$

ahol M a (b_n) (konvergens) sorozat egy felső korlátja.

Útmutatás a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2}$ bizonyítására. Elsőként megjegyezzük, hogy az előzőek értelmében elegendő azt bizonyítani, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{L_2}$

Használjuk fel, hogy $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2}\right| = \left|\frac{L_2 - b_n}{b_n L_2}\right| \leq M\left|\frac{L_2 - b_n}{L_2}\right|$ ahol M egy felső korlátja az $\left(\frac{1}{b_n}\right)$sorozatnak, ami a 17. feladat szerint létezik)

18. feladat. Igazolja, hogy az $\left(\frac{1}{n}\sin(n^7 - 3n^2 + 17)\right)$ sorozat 0-hoz konvergens.

(Útmutatás. Felhasználható, hogy: $-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\sin(n^7 - 3n^2 + 17) \leq \frac{1}{n}$ és $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.)

19. Feladat. Számítsa ki a következő határértéket: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3-11n^2+5n-3}{4n^3-2n^2-n+21}\right)$.

Megoldás. A törtet n^3 -el egyszerűsítve és a 3. Tételt alkalmazva:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^3-11n^2+5n-3}{4n^3-2n^2-n+21}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5-\frac{11}{n}+\frac{5}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{4-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{21}{n^3}}\right) = \frac{5-0+0-0}{4-0-0+0} = \frac{5}{4}$.

20. Feladat. Legyen $a_1 = \frac{2}{3}$ és $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ ha $n \geq 1$. Keresse meg a_n-et és igazolja, hogy az (a_n) sorozat konvergens.

Megoldás. Számítsuk ki a sorozat néhány további tagját: $a_2 = a_1 + \frac{1}{3\cdot4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$, és $a_3 = a_2 + \frac{1}{4\cdot5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$. "Kitalálhatjuk", hogy a sorozat általános tagja $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ (ezt indukcióval bizonyítani is lehet), így (a_n) konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

21. Feladat. Tegyük fel, hogy (a_n) egy pozitív tagú konvergens sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Igazolja, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{L}$ valamint, általánosabban, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{L}$ bármely rögzített $k \in N$ esetén.

(Útmutatás. Ha $L \neq 0$ felhasználhatjuk a következő azonosságot és egyenlőtlenséget :$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}\right| = \frac{|a_n = L|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}} \leq \frac{|a_n = L|}{\sqrt{L}}$)

Függvények határértéke egy adott pontban, függvény pontbeli folytonossága

A függvények pontbeli határétéke értelmezhető a sorozatok nyelvén is.

Tekintsük az $f : A \to B$ függvényt, ahol $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$, és legyen a egy olyan pont, amire van olyan $(x_n) \subset A$ sorozat, amelyre

$x_n \to a$, azaz $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, vagyis a eleme, vagy határpontja az A értelmezési tartománynak.

Ha minden olyan $(x_n) \subset A$ sorozatra, amelyre $x_n \to a$ a függvényértékek sorozata is konvergens, és $f(x_n) \to l$, azaz $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$, akkor a függvénynek van határértéke az a pontban, ez a határéték l, és erre a következő jelölést használjuk: $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

A függvények pontbeli határétéke értelmezhető a sorozatok nélkül a pont környezetének segítségével. Ez a két definíció egyenértékű, ennek bizonyítására lásd pl. Balázs-Kolumbán, 1978.

Definíció. Tekintsük az $f : A \to B$ függvényt, ahol $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$, és legyen a egy olyan pont, aminek bármely $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ környezetére igaz, hogy van olyan $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap A \neq \varnothing$, azaz a pont minden környezetében vannak az függvény értélmezési tartományának pontjai,vagyis a eleme, vagy határpontja az A értelmezési tartománynak. Ha bármely $\delta > 0$ esetén létezik olyan $\epsilon > 0$, amelyre ha $|x - a| < \epsilon$ akkor $|f(x) - l| < \delta$, akkor $\lim_{x\to a} f(x) = l$, azaz a függvénynek az a pontban l a határértéke.

Definíció. Tekintsük az $f : A \to B$ függvényt ahol, $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$ és legyen $a \in A$. A függvény az a pontban folytonos, ha létezik $\lim_{x\to a} f(x)$, és $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Ha létezik $\lim_{x\to a} f(x)$ de $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, akkor a-ban a függvénynek szakadáspontja van.

Megjegyzések

1. A függvény hatérétéke tehát vizsgálható az értelmezési tartomány pontjaiban, és az értelmezési tartomány ún. határpontjaiban, de folytonosságról beszélni csak az értelmezési tartomány ponjaiban lehet.

2. Ha a függvény határértékének a fogalmát általánosabban vizsgáljuk, akkor külön- külön értelmezhető a függvény baloldali pontbeli határétéke illetve jobboldali pontbeli határértéke, ha a fenti feltételek mellett, csak az $x \leq a$, illetve $x \geq a$ független változókra teszünk kikötést, ezek szokásos jelölései: $\lim_{x\to a, x\leq a} f(x) = l_b = \lim_{x\nearrow a} f(x)$, illetve $\lim_{x\to a, x\geq a} f(x) = l_j = \lim_{x\searrow a} f(x)$.

Ebben az esetben a függvénynek az adott pontban akkor van határértéke, ha $l_b = l_j$ és ezt a közös értéket általában l jelöli.

3. Ha a függvény jobb- illetve baloldali határértéke nem egyezik meg, vagy valamelyik nem létezik, akkor a függvény nyilván nem lehet folytonos, hiszen még a a határértéke sem létezik, de beszélhetünk az adott pontban balról folytonos $(l_b = f(a) \neq l_j)$, illetve jobbról folytonos $(l_b \neq f(a) = l_j)$ függvényről.

4. Ha $l_b \neq f(a) \neq l_j$, de $l_b = l_j$, akkor a függvénynek a-ban ún. első fajú (megszüntethető) szakadáspontja van, mivel ha ebben a pontban a függvény más értéket, az $f(a) = l_b = l_j$ értéket veszi fel, akkor folytonos lesz.

5. Ha $l_b = l_j$, de $a \notin A$, akkor a függvénynek a-ban ún. első fajú (megszüntethető) hézagpontja van, ebben az esetben a függvény folytonosan kiterjeszthető az a pontban, az előbbi módon, de az a ponttal ki kell bővíteni az értélemzési tartományát.

6. Más esetekben ún másodfajú, vagy meg nem szüntethető szakadáspontokról, illetve hézagpontokról beszélünk.

7. A függvény pontbeli folytonossága, illetve a pontbeli határték létezése azt is kifejezi, hogy ha az x változójú függvény egy folyamatot, jelenséget ír le "képletszerűen", akkor ahhoz, hogy az "eredményt" ($f(x)$-et, ill. l-et) egy előre megadott δ -nál kisebb eltéréssel kapjuk meg, elegendő az "bemenő" adat értékét, az x-et az $\pm\epsilon$ pontosságon belül megadni. Pl.: a $T : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $T(x) = \pi x^2$ kifejezi az x sugarú kör területét, és ahhoz, hogy a számítás két tizedes pontosságú legyen, azaz a terület értékét 2 tizedesjegy pontossággal kapjuk, elegendő az x sugár értékét egy tizedessel megadni, hiszen a definíció szerint a $\delta = \frac{1}{100}$ esetén elegendő az $\epsilon = \frac{1}{10}$ értéket választani, mivel a változó négyzete szerepel a "képletben" (természetesen emellett a π értékét két tizedessel kell megadni, hiszen azt nem hatványozzuk).

Folytonos függvények

Egy $f : A \to B$ függvény, ahol $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$, folytonos, ha az értelmezési tartomány összes pontjában folytonos, azaz bármely $a \in A$ esetén, $\lim_{x \to a} f(x)$, és $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

FONTOS tudnivaló az, hogy az elemi függvények az értelmezési tartományukon folytonosak. Ez ellentmondani látszik a szemléletnek, hiszen például a trigonometriai függvények közül a tg és ctg folytonos ugyan de csak szakaszonként, viszont azok a "kényes" pontok, ahol a függvények a függőleges asszimptóta mentén "ugrani látszanak" $+\infty$ és $-\infty$ között, nincsenek a függvény értelmezési tartományába. Értelemszerűen ezekben a pontokban nem beszélhetünk folytonosságról. Az elemi függvények transzformáltjai és azok az összetett függvények, amelyeket elemi függvények összetételével kapunk, szintén folytonosak, de az összetétel során ügyelnünk kell az értelmezési tartományok változására.

A függvények határértékének számítása a kritikus pontokban lehetővé teszi a függvények pontosabb megismerését, illetve a függvényábra pontosabb elkészítését. A függvények menetének tanulmányozása a határértékek vizsgálata mellett a függvények deriváljainak a vizsgálatát is feltételezik.

Az intervallumon folytonos függvények egyik lényeges tulajdonsága, hogy csak úgy válthatnak előjelet, ha közben felveszik a 0 értéket is.

Tehát egy intervallumon folytonos függvény két egymást követő 0 helye közt nem válthat előjelet, és ennek a következményeként meg tudjuk oldani az egyenlőtlenségeket.

Pl. $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \geq 0$, a baloldali polinom felbontható a következőképpen:

$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = \left(2\sin^2 x - \sin x\right) - (2\sin x - 1) =$
$= \sin x\,(2\sin x - 1) - (2\sin x - 1) = (2\sin x - 1)(\sin x - 1)\,.$

Tehát a $2\sin^2 x - 3\sin x + 1$ kifejezés csak a $2\sin x = 1$ és a $\sin x = 1$ egyenletek gyökeinek megfelelő pontokban válthat előjelet.

Mivel a függvény periódikus, és periódusa 2π, elegendő a $[0, 2\pi]$ intervallumot ún főperiódust vizsgálni, az ezen kivül eső pontokra már a periódikusság miatt is "ismétlődik" függvény változása.

Tehát a példában szereplő függvény esetén a függvény előjelet csak az $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ illetve az x$_3$ $= \frac{5\pi}{6}$ pontokban válthat.

Függvények határértékszámítása

A függvények pontbeli határtértékére, illetve a folytonos függvényekre teljesülnek a következő, ún. linearitási tulajdonságok:

1. Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ és $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$, akkor $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$, illetve

ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$és $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$, akkor $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = f(a) + g(a)$

2. Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = cl$, illetve

ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = cf(a)$

3. Az előző két tulajdonság sokkal általánosabban is felírható:

Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$, és $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, akkor $\lim\limits_{x\to a} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 l_1 + c_2 l_2$, illetve

ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$, és $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, akkor $\lim\limits_{x\to a} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 f(a) + c_2 g(a)$

4. A függvényekkel végzett alapműveletek esetén még a szorzás és osztás is hasonló tulajdonságokkal rendelkezik:

Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ és $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$, akkor $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$, illetve

ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$és $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$, akkor $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = f(a) \cdot g(a)$, továbbá

ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ és $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2 \neq 0$, akkor $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{l_1}{l_2}$, illetve

ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$és $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a) \neq 0$, akkor $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f(a)}{g(a)}$.

A függvények határértékszámítása sok esetben hasonló eljárásokat ígényel, mint a sorozatok határérték számítása.

Pl. : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+2}{2x^2-3x+1} = \frac{1}{2}$ lesz, a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+2}{2n^2-3n+1} = \frac{1}{2}$ mintájára.

MAPLE:>Limit((x^2+3*x+2)/(2*x^2-3*x+1),x=infinity)=limit((x^2+3*x+2)/(2*x^2-3*x+1),x=infinity);

Ugyanakkor újabb, eddig nem tanulmányozott eseteket is meg kell oldanunk, pl. : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+3x+2}{2x^2-3x+1}$.

MAPLE:>Limit((x^2+3*x+2)/(2*x^2-3*x+1),x=1)=limit((x^2+3*x+2)/(2*x^2-3*x+1),x=1);

Ebben az esetben a gondot az jelenti, hogy az $x = 1$ nincs az $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{2x^2-3x+1}$ függvény értelmezési tartományában ($f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 1\right\} \to \mathbb{R}$), csupán annak határpontja.

A határérték számítás egyik alapvető módszere az, hogy megpróbáljuk közvetlen behelyettesítéssel a függvény értékét kiszámítani, azza, "feltesszük", hogy a függvény folytonos. Ez az előbbi példában az ún. $\frac{3}{0}$ "típusú" határozatlanságra vezet, tehát meg kell közelebbről vizsgálni, hogy "felodható-e" ez a határozatlanság? Ugyanis bizonyos esetekben (ha ez a pont első fajú hézagpont), akkor a függvénynek lesz határértéke az adott pontban.

Sajnos nem ez a helyzet a példánkban, és ezt a racionális függvények ábrázolása felől érthetjük meg leghamarabb.

Ha a függvény számlálóját és nevezőjét egyaránt szorzatra bontjuk, akkor $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{2x^2-3x+1} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(2x-1)}$. Most már "belátható", hogy az x=1 "közvetlen közelében" rendre az $x+1$ szorzótényező értéke $2-$höz, az $x+2$ szorzótényező értéke $3-$hoz,a $2x-1$ osztótényező értéke $1-$hez közelít, de a nevezőben lévő $x-1$ tényező a 0 értéket, ami a "galibát" okozza, "balról", tehát 1-nél kisebb értékekre, negatív számokon keresztül közelíti, míg "jobbról", azaz 1-nél nagyobb értékekre, pozitív számokon keresztül közelíti meg. Tehát a függvénynek azért nem lesz határértéke x=1-ben, mivel ez a 0-hoz tartozó tényező hol negatív, hol pedig pozitív számokat eredményez. Ha tüzetesebben megvizsgáljuk, akkor tulajdonképpen $\lim\limits_{x\nearrow 1} \frac{x^2+3x+2}{2x^2-3x+1} = -\infty$ és $\lim\limits_{x\searrow 1} \frac{x^2+3x+2}{2x^2-3x+1} = +\infty$, és ez a magyarázata annak, hogy nem létezik a $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+3x+2}{2x^2-3x+1}$ határérték.

MAPLE:>Limit((x^2+3*x+2)/(2*x^2-3*x+1),x=1, left)=limit((x^2+3*x+2)/(2*x^2-3*x+1),x=1, left);

MAPLE:>Limit((x^2+3*x+2)/(2*x^2-3*x+1),x=1,right)=limit((x^2+3*x+2)/(2*x^2-3*x+1),x=1,right);

Megjegyzés. Ha az előbbi példát egy "kicsit" megváltoztatjuk, pl. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+3x+2}{2x^2-3x+1} \cdot \frac{1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)^2(2x-1)} = \infty$.

MAPLE:>Limit((x^2+3*x+2)/(2*x^2-3*x+1/(x-1)),x=1)=limit((x^2+3*x+2)/(2*x^2-3*x+1)/(x-1),x=1);

Egy más változtatás azt eredményezheti, hogy az x=1 megszüntethető hézagpont lesz:

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+1)(x+2)(x-1)}{(x-1)(2x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+1)(x+2)}{(2x-1)} = 6 \quad (\frac{2\cdot 3}{1})$.

MAPLE:>Limit(((x+1)*(x+2)*(x-1))/((2*x-1)*(x-1)),x=1)=limit(((x+1)*(x+2)*(x-1))/((2*x-1)*(x-1)),x=1);

MAPLE:>Limit(((x+1)*(x+2))/(2*x-1),x=1)=limit(((x+1)*(x+2))/(2*x-1),x=1);

Ismét más esetben, pl.: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+1)(x+2)(x-1)^3}{(x-1)^2(2x-1)} = 0$.

MAPLE:>Limit(((x+1)*(x+2)*(x-1)^3)/((2*x-1)*(x-1)^2),x=1)=limit(((x+1)*(x+2)*(x-1)^3)/((2*x-1)*(x-1)^2),x=1);

Feladatok

1. Határozza meg a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{2x^2-4x}$ b) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-2x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{a^2-x^2}{x^3-a^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{2x^2-5x-12}$ e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)$
f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-2}{\sqrt{3x^4+2x+3x-1}}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+23x}-2x\right)$
h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{3x}\right)^{2x-3}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-4}\right)^{\frac{x+2}{3}}$
j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{7x}$ k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2\frac{x}{3}}$ l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{3\sin 5x}$
m) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2\frac{2x}{5}}{\sin 3x}$ n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x}-1}{\sin 3x}$

2. Vizsgálja meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából! (Hol és milyen szakadása van a függvényeknek?) Számítsa ki a szakadási helyeken a jobb- illetve baloldali határértékeket!

a) $f(x)=\frac{1}{x-3}$ b) $f(x)=\left|\frac{x-2}{x^2-x-2}\right|$
c) $f(x)=\left|\frac{1}{2^x}-2\right|$ d) $f(x)=sgn\left(\log_5\frac{1}{x}\right)$
e) $f(x)=\begin{cases}(2-x)^2, & \text{ha } x<1,\\ x^2, & \text{ha } 1\le x<2,\\ -3x, & \text{ha } 2\le x.\end{cases}$
f) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x<-2,\\ 2^{-x}, & \text{ha } -2\le x\le 1,\\ 2^{|x-2|-x}, & \text{ha } 1<x.\end{cases}$

3. Megadható-e az a paraméter értéke úgy, hogy az alábbi $f(x)$ függvénynek ne legyen szakadási helye? Ha igen, adja is meg az a paramétert! (Válaszát indokolja!) (4 pont)

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{\sin^2 5x}{x^2} & \text{ha } x\neq 0\\ a & \text{ha } x=0\end{array}\right\}$$

4. Vázolja az alábbi racionális egész függvények grafikonját!

a) $f(x)=x^3-2x^2+x$ b) $f(x)=\left(4x^2-4x+1\right)\left(x^2-4x+3\right)$
c) $f(x)=x^5-4x^3+x^2-4$

5. Határozza meg, hogy hol és milyen szakadása van az

a) $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}$,
b) $f(x)=\frac{x-3}{x^2-x-6}$ függvénynek!
Vázolja is a függvényeket!

6. Ábrázolja az alábbi racionális törtfüggvényeket! Vizsgálja meg, hogyan viselkednek a függvények a szakadási helyek környezetében és a végtelenben!

a) $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^3-1}$ b) $f(x)=\frac{\left(x^2+4x+4\right)(x-1)}{(x^2-2x+1)(x+3)^2}$ c) $f(x)=\frac{4x^2-4x+1}{2x-1}$

d) $f(x) = \frac{x^2-3x+4}{x^2+6x+9}$ e) $f(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$ f) $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-4x+4}$
g) $f(x) = \left|\frac{x+2}{x^2-1}\right|$ h) $f(x) = \left|\frac{x^2}{x-1}\right| + 2$

7. Vizsgálja meg, hogy a következő függvényeknek van-e inverzük. Ha van, adja meg az inverz függvényt és ábrázolja is!

a) $f(x) = x^2 - 9$ b) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, ha $x \geq 2$
c) $f(x) = 2\log_9(x+1)$ d) $f(x) = \frac{1}{2^{x-3}}$
e) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)^2$ f) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)^2$, ha $x < -2$
g) $f(x) = 2\sin x + 1$, ha $\frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ h) $f(x) = -\sqrt{x^2-2x+1}$

8. Ábrázolja az alábbi arkuszfüggvényeket! Adja meg a függvények értelmezési tartományát és értékkészletét is!

a) $f(x) = \arcsin(x-1) + \frac{\pi}{2}$ b) $f(x) = 2\arccos(x+2) - \pi$
c) $f(x) = \left|arctg(x+2) - \frac{\pi}{2}\right|$ d) $f(x) = \frac{1}{2}arcctgx + \frac{\pi}{3}$
e) $f(x) = \left|\arccos(2-x) - \frac{\pi}{2}\right|$

A függvények pontbeli deriváltja (differenciálhányados)

Előbb egy ehhez közelálló fogalommal, a differenciahányadossal ismerkedünk.
Ennek a fontos fogalomnak a megértéséhez vegyünk egy hétköznapi kérdést, az átlagsebesség fogalmát, és elemezzük azt.

A fizikából ismert az átlagsebesség fogalma, ha a mozgó pont $t \longmapsto S(t)$ megfeleltés szerint mozog, ahol t az időt, $S(t)$ a t időpontig megtett útat jelöli (egy kezdeti t_0 időpontban történt indulást feltéve), akkor két adott, t_1 és t_2 időpont között a mozgó pont átlagsebessége:

$$v_k = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Ezt az $S(t)$ függvény differenciahányadosaként is szokás említeni (itt $S : (t_0, \infty) \to \mathbb{R}$)
Ha a mozgás egyenletes sebességgel történik, akkor az előbbi v_k átlagsebesség egyben a mozgó pontnak a pillanatnyi sebességét is kifejezi, egy t időpontban a pont $v(t)$ sebességére igaz, hogy $v(t) = v_k$. A gyakorlatból viszont a legtöbb tárgy, pont nem állandó sebességgel mozog, hanem létezik egy $t \longmapsto v(t)$, megfeleltetés, sőt a változó sebességgel mozgó pont mozgására egy másik mennyiség, a gyorsulás is jellemző, tehát létezik egy $t \longmapsto a(t)$ megfeleltetés is.
A pillanatnyi sebesség jól közelíthető az átlagsebességgel, amennyiben a vizsgált időtartam elég rövid ahhoz, hogy azon belül a sebesség "lényegesen" ne

változzon. Tehát szokás mondani, hogy ha t_0 időponthoz "elég közel van" t_1 és t_2 akkor

$$v(t_0) \approx \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Ezt még pontosabban megfogalmazhat az út $t \mapsto S(t)$ függvényből képezett differenciahányados határértékeként a t_0 pontban következőképpen:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

Ezt, a differenicahányados határértéket nevezzük differenciálhányadosnak, másként a függvény adott pontbeli deriváltjának.

Hasonlóképpen átlaggyorsulás (a t_1 és t_2 időpontok között)

$$a_k = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

és a pillanatnyi gyorsulás viszonya, a t_0 időponthoz "elég közeli" t_1 és t_2 esetén:

$$a(t_0) \approx \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Ez a pillanatnyi gyorsulás pontosabb megfogalmazásához vezet, ha azt a $t \mapsto v(t)$ sebességfüggvényből képezett differenciahányados t_0 pontbeli határértékével értelmezzük, azaz a sebességfüggvény differenciálhányadosa, vagy deriváltja a gyorsulás:

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

Természetesen ennek a fogalomnak szoros köze van a függvényábrához is, és érdekes a mértani jelentése a függvény adott pontbeli differenciálhányadosának, deriváltjának. Mielőtt ebbe belevágnánk, adjunk magyarázatot a kettős elnevezésre. A differenciálhányadost a diffferenciahányados elnevezésből is származtathatjuk, de a differenciálról önmagában is érdemes beszélni.

A derrivált elnevezés azt érzékelteti, hogy a függvényből származó, újabb függvényről van szó, a függvény deriváltjáról, vagy deriváltfüggvényről, ami a pontonként értelmezett derivált segítségével adható meg.

Definíció. Tekintsünk egy $f : A \to B$ függvényt, ahol $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$, továbbá az értelmezési tartománynak egy $x_0 \in A$ belső pontját, azaz egy olyan pontot amely egy nyílt $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset A, (\epsilon > 0)$ környezettel együtt az A része, tehát $x_0 \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset A$ teljesül.

Ha $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ létezik és véges, akkor azt az adott függvény x_0 pontbeli deriváltjának, vagy differenciálhányadosának nevezzük, és az

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, vagy $\frac{df}{dx}|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ jelöléseket használjuk.

Az adott függvény deriváltja (deriválfüggvénye, differenciálhányados-függvénye) az az $f' : A' \to R$ függvény (ahol az A' az A belső pontjainak halmaza), amelyre $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Ezekből együtt származtatható (a kérdés leegyszerűsítésével) a $df(x) = f'(x)dx$ jelölés, amit a függvény differenciáljának nevezünk.

Példa: Számítsuk ki az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény deriváltját egy tetszőleges x_0 pontban.

A definíció szerint:

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} (x+x_0) = 2x_0$.

Ez azt jelenti, hogy a függvényhez tartozó deriváltfüggvény (derivált) az adott x_0 pontban $2x_0$. Tehát általában $f'(x_0) = 2x_0$, azaz $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$ lesz. Ennek rövid jelölése $(x^2)' = 2x$.

Vegyünk még egy példát, számítsuk ki az $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x$ deriváltját.

Definíció szerint:

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \ln \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{1}{x-x_0}} = \lim_{x \to x_0} \ln \left(\frac{x_0+x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{x-x_0}} =$

$= \lim_{x \to x_0} \ln \left(1 + \frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{x-x_0}} = \lim_{x \to x_0} \ln \left\{ \left[\left(1 + \frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} \right]^{\frac{x-x_0}{x_0}} \right\}^{\frac{1}{x-x_0}} = \lim_{x \to x_0} \ln \left(e^{\frac{x-x_0}{x_0}}\right)^{\frac{1}{x-x_0}} =$

$\ln e^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0}$,

tehát $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Hasonlóan számíthatók ki az elemi függvények deriváltjai (illetve egyes függvények deriváltjának számítása az inverz függvényekre vonatkozó szabályokból következik):

1. $k \in \mathbb{R}, (k)' = 0$,
2. $(x)' = 1$,
3. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, pl. : (x^2)' = 2x, (x^3)' = 3x^2$,
4. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, pl. : (\frac{1}{x})' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, (x^{-3})' = -3x^{-4}$
5. $(e^x)' = e^x, (a^x)' = a^x \ln a, pl. : (2^x)' = 2^x \ln 2, ((\frac{1}{3})^x)' = \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln\left(\frac{1}{3}\right)$,
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}, (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, pl. : (\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$.
7. $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x, (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - ctg^2 x$
8. $(shx)' = chx, (chx)' = shx, (thx)' = \frac{1}{ch^2 x}, (cthx)' = \frac{1}{sh^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}, (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
10. $(arshx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, (archx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

A deriválási szabályok és az elemi függvények deriváltjának ismerete lehetővé teszi a többi összetettebb függvény deriváltjának kiszámítását, és előkészíti az integrálást. A deriválási szabályok a függvényekel végzett műveletekre, az összetett függvényre és az inverz függvényre vonakoznak:

1. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$,
2. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$,
3. $(c_1 f(x) + c_2 g(x))' = c_1 f'(x) + c_2 g'(x)$,
4. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,
5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$,
6. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$,
7. $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' = e^{g(x)\ln f(x)} \cdot (g(x)\ln f(x))' =$
$= e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} \left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right) = f(x)^{g(x)} \left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$.

8. Az inverz függvény deriváltjáról tudható, hogy ha egy (x_0, y_0) pontban a függvény deriváltja $m_1 = tg\alpha$, akkor az inverz függvény deriváltja a megfelelő

(y_0, x_0) pontban $m_2 = tg(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ mivel a függvény és inverze egymás tükörképei az első negyed szögfelezőjére, tehát $m_2 = tg(\frac{\pi}{2} - \alpha) = ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$, vagyis $m_2 = \frac{1}{m_1}$

Példa: Láttuk, hogy a $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, ahol $y = \ln x$, és így $x = e^y$, tehát az inverz, az $(e^y)' = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = e^y$.

De tudjuk, hogy az inverz függvényben a szokásos a "változócsere, tehát $(e^y)' = e^y$ helyett $(e^x)' = e^x$ írható.

Ezt az eredményt előlegeztük meg tulajdonképpen az elemi függvények deriváltjainak fenti felsorolásában is (lásd 5.).

Hasonlóan számítható ki az $\arcsin x, \arccos x, arctgx, arcctgx$ stb. derváltja is.

A derivált mértani jelentése

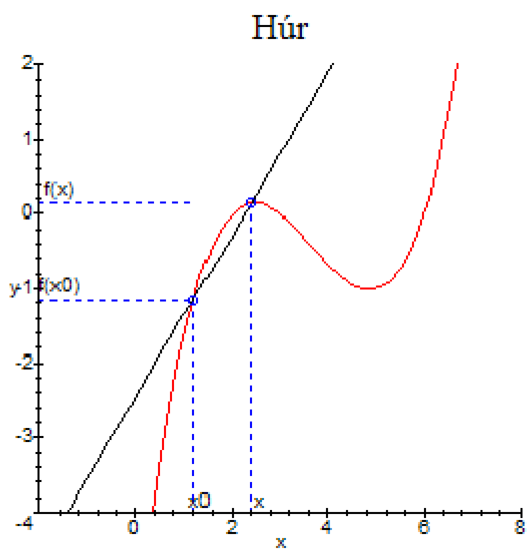
A pontbeli derivált mértani jelentésének megértésére vizsgáljuk meg, mit is jelent az $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ differenciahányados.

Ha egy egyszerű esetet vizsgálunk (pl. $x_0 < x$), akkor észrevehető, hogy az $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ differenciahányados az adott függvény $(x_0, f(x_0))$ és $(x, f(x))$ pontjait összekötő húr és az Ox tengely által bezárt α szög ún. iránytangense, azaz $tg\alpha = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. A szokásásos módon tekintsük most a differenciahányadosnak a határértékét, ennek a mértani jelentése az adott pontban a görbéhez húzott érintő íránytangense, azaz az érintő és az Ox tengely által bezárt α_0 szögre:

$tg\alpha_0 = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\ x_0)$.

Következmények.

1. Egy adott deriválható függvény görbéjének $(x_0, f(x_0))$ pontjában húzott érintő egyenlete felírható, ha az (x_0, y_0) ponton áthaladó és m iránytényezővel



rendelkező egyenes egyenletébe: $y-y_0 = m(x-x_0)$ helyettesítjük az $y_0 = f(x_0)$ függvényértéket és az $m = f'(x_0)$ iránytényezőt, azaz $y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$.

Példa: Tekintsük az az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvényt és grafikus képét. Írjuk fel a görbe $(2,4)$ pontjában az érintő egyenletét.

Az előbbi számítás szerint $f'(x) = (x^2)' = 2x$, tehát az $x = 2$ pontban az érintő irénytényezője $m = f'(2) = 2 \cdot 2$, tehát a keresett érintő egyenlete:

$y - 4 = 4(x - 4)$.

Feladatok

1. Deriválja az alábbi függvényeket! Hozza egyszerűbb alakra a deriváltakat!

a) $f(x) = \frac{x^3}{2} + e^x - \pi$

b) $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 3\sqrt{x^3} + \frac{5}{x^4}$

c) $f(x) = \sqrt[5]{\sqrt[3]{\frac{4}{x}}}$

d) $f(x) = (tgx + \ln x)\left(x^3 + 1\right)$

e) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{\cos^2 2x}$

g) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$

h) $f(x) = \sqrt[4]{\lg\left(\sin^3 x \cos^2 x\right)}$

i) $f(x) = 2^{\sin^2(4x-1)}$

j) $f(x) = \arccos(1-x)^2$

k) $f(x) = arctg \ln \frac{\cos 2x}{x}$

l) $f(x) = \arcsin\left(\sin\sqrt{1-x^2}\right)$

2. Deriválja az alábbi függvényeket!

a) $f(x) = x^{2x}$

b) $f(x) = x^{ctgx}$

c) $f(x) = \sqrt[x]{\cos x}$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{2^x}$

3. Hány fokos szög alatt metszik az X tengelyt a következő függvények görbéi?

a) $f(x) = \frac{x-1}{1+x^2}$

b) $f(x) = \ln(3-x)$

c) $f(x) = (x-2)^5$

4. Határozza meg az $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ függvény görbéjének a $(-1,0)$ pontjába húzott érintő egyenletét.

A deriváltak alkalmazásai

A l'Hospital szabály

Bizonyos határértékek számítása során azt találjuk, hogy azok $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ típusúhatározatlanságot tartalmaznak.

Tétel. Tekintsük a fenti határozatlansághoz vezető $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ határértéket, ahol tehát vagy az teljesül, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ és egyidejűleg $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, vagy éppen az, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ és egyidejűleg $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

Ha tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, akkor létezik a $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ is, és $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Példák.

1. Számítsa ki a $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-2x-3}$ határértéket. Észrevehető, hogy az adott határérték a $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ típusba sorolható, tehát alkalmazható a l'Hospital szabály. Írjuk fel tehát a nevező és számláló deriváltjait, $(f(x))' = \left(x^3+1\right)' = 3x^2$, $(g(x))' = \left(x^2-2x-3\right)' = 2x-2$ és számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2}{2x-2} = -\frac{3}{4}$, tehát az eredeti határérték is létezik és $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-2x-3} = -\frac{3}{4}$.

2. Számítsa ki a $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{e^x+x-1}{x^2-2x-3}$ határértéket. Észrevehető, hogy az adott határérték a $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ típusba sorolható, tehát alkalmazható a l'Hospital szabály. Írjuk fel tehát a nevező és számláló deriváltjait, $(f(x))' = (e^x+x-1)' = e^x+1$, $(g(x))' = \left(x^2-2x-3\right)' = 2x-2$ és számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to \infty}\frac{e^x+1}{2x-2} = \frac{\infty}{\infty}$, tehát ismételten alkalmazható a l'Hospital szabály, $(e^x+1)' = e^x$, $(2x-2)' = 2$,és $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{e^x}{2} = \infty$ így az eredeti határérték is létezik és $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{e^x+x-1}{x^2-2x-3} = \infty$.

3. Nem alkalmazható a l'Hospital szabály a $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3+1}{x^2-2x-3}$ határérték kiszámítására, hiszen ez a határérték egyszerű behelyettesítéssel $-\frac{1}{2}$, de ha az első példa alapján, a szabály helytelen alkalmazásával számolnánk, akkor éppen a $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} \lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2}{2x-2}$ határérték jelentené a gondot, mivel az nem is létezik.

Deriválható függvények helyi szélsőértékei

Definíció. Tekintsünk egy $f : A \to B$ deriválható függvényt, ahol $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$, továbbá az értelmezési tartománynak egy $x_0 \in A$ belső pontját, azaz egy olyan pontot, amely egy nyílt $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset A, (\epsilon > 0)$ környezettel együtt az A része, tehát $x_0 \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset A$ teljesül.

Az $x_0 \in A$ pontban a függvénynek **helyi** (lokális) **maximuma** van, ha van olyan $\epsilon > 0$, amelyre bármely $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ elemre

$f(x) < f(x_0)$, ha $x \neq x_0$.

Az $x_0 \in A$ pontban a függvénynek **helyi** (lokális) **minimuma** van, ha van olyan $\epsilon > 0$, amelyre bármely $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ elemre

$f(x) > f(x_0)$, ha $x \neq x_0$.

Tétel.

Tekintsünk egy $f : A \to B$ **deriválható** függvényt, ahol $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$, továbbá az értelmezési tartománynak egy $x_0 \in A$ belső pontját, azaz egy olyan pontot, amely egy nyílt $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset A, (\epsilon > 0)$ környezettel együtt az A része, tehát $x_0 \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset A$ teljesül.

Ha az $(x_0, f(x_0))$ pont a függvénynek egy heyli szélsőértékpontja, akkor $f'(x_0) = 0$, azaz a függvény deriváltja 0 ebben a pontban.

Deriválható függvények monotonitása

Definíció. Tekintsünk egy $f : A \to B$ deriválható függvényt, ahol $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$, továbbá az értelmezési tartománynak egy $x_0 \in A$ belső pontját, azaz egy olyan pontot, amely egy nyílt $(x_0 - a, x_0 + b) \subset A, (\epsilon > 0)$ környezettel együtt az A része, tehát $x_0 \in (x_0 - a, x_0 + b) \subset A$ teljesül. Ha ezen felül bármely $x_1, x_2 \in (x_0 - a, x_0 + b)$ amelyre $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$ (ill. $f(x_1) > f(x_2)$) is teljesül, akkor a függvény az (a, b) intervallumon **növekvő** (ill. **csökkenő**).

Tétel.

Tekintsünk egy $f : A \to B$ **monoton deriválható** függvényt, ahol $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$, továbbá az értelmezési tartománynak egy $x_0 \in A$ belső pontját, azaz egy olyan pontot, amely egy nyílt $(x_0 - a, x_0 + b) \subset A, (\epsilon > 0)$ környezettel együtt az A része, tehát $x_0 \in (x_0 - a, x_0 + b) \subset A$ teljesül.

Ha a függvény **növekvő** az (a, b) intervallumon, akkor $f'(x) > 0$, bármely $x \in (x_0 - a, x_0 + b)$ esetén.

Ha a függvény **csökkenő** az (a, b) intervallumon, akkor $f'(x) < 0$, bármely $x \in (x_0 - a, x_0 + b)$ esetén.

Következmények, tulajdonságok

A fenti tétel fordítottja is igaz, ha $f : A \to B$ **egy deriválható** függvényt, ahol $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$, továbbá az értelmezési tartománynak egy $x_0 \in A$ belső pontját, azaz egy olyan pontot, amely egy nyílt $(x_0 - a, x_0 + b) \subset A, (\varepsilon > 0)$ környezettel együtt az A része, tehát $x_0 \in (x_0 - a, x_0 + b) \subset A$ teljesül, és minden $x \in (x_0 - a, x_0 + b)$ esetén $f'(x) > 0$, akkor a függvény **növekvő** az (a, b) intervallumon, illetve ha minden $x \in (x_0 - a, x_0 + b)$ esetén $f'(x) < 0$, akkor a függvény **csökkenő** az (a, b) intervallumon.

Vagyis, ha egy deriválható függvény esetén a derivált zérushelyeit tekintjük, akkor a derivált előjele alapján megállapítható, hogy az adott pont maximum-e, minimum-e, vagy esetleg csak egy ún. inflexiós, áthajlási pontja a görbének, ahol a görbület megváltozik, és az görbe érintője vizszintes.

Az ilyen pontokat együttesen **stacionárius pontoknak** nevezzük ($f'(x_0) = 0$).

A függvénygörbületre vonatkozó információt az x_0 pontban ún. másodrendű derivált előjele szolgáltatja, jelölése $f''(x_0)$, ha $f''(x_0) > 0$ a függvény konvex az x_0 pont egy adott környezetén, és ha $f''(x_0) < 0$ a függvény konkáv az x_0 pont adott környezetén. Az inflexiós pontra jellemző, hogy ott $f''(x_0) = 0$.

A fenti tétel fordítottja is igaz, ha $f : A \to B$ **egy legalább kétszeresen deriválható** függvényt, ahol $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$, továbbá az értelmezési tartománynak egy $x_0 \in A$ belső pontját, azaz egy olyan pontot, amely egy nyílt $(x_0 - a, x_0 + b) \subset A, (\epsilon > 0)$ környezettel együtt az A része, tehát $x_0 \in (x_0 - a, x_0 + b) \subset A$ teljesül, és minden $x \in (x_0 - a, x_0 + b)$ esetén $f''(x) > 0$, akkor a függvény **konvex** az (a, b) intervallumon, illetve ha minden $x \in (x_0 - a, x_0 + b)$ esetén $f''(x) < 0$, akkor a függvény **konkáv** az (a, b) intervallumon. A függvény konvex és konkáv szakaszai közti ún. inflexiós, vagy áthajlási pontban $f''(x_0) = 0$, de szükséges az is, hogy ennek a pontnak a két "oldalán" különböző legyen a második derivált előjele.

A második deriválttal a függvény helyi (lokális) szélsőértékei is jellemezhetők, a minimum pontban $f''(x) > 0$, illetve a maximum pontban $f''(x_0) < 0$ teljesül.

Ezeket a tulajdonságokat a szélsőértékek számításánál és a függvények teljes vizsgálatánál is hasznosíthatjuk!

Az $f : A \to B$, ahol $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$ esetén teljes függvényvizsgálat lépései a következők:

1. A függvény értelmezési tartományának a pontosítása, a kritikus pontok, az értelmezési tartomány határpontjainak megállapítása.
2. A függvény értékkészletének a vizsgálata, amely a függvény lokális (a kritikus pontokban) és globális határértékeinek kiszámítását jelenti, valamint a függvény előjele, ha van rá mód.
3. A függvényábra és a koordinátatengelyek metszéspontjainak vizsgálata $(\{x \in A | f(x) = 0\}, y_0 = f(0)$.
4. A függvény deriváltja és annak gyökei, előjelének változása.
5. A függvény második deriváltja és annak gyökei, előjelének változása.
6. A előző pontok eredméynét összesítő táblázat.
7. A függvényábra elkészítése.

Feladatok

1. Számítsa ki a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{5x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin 2x}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-tgx}{\cos 2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{arctg(\ln x)}{x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \frac{tgx}{tg5x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$

g) $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{tg\frac{\pi x}{2}}{\ln(x-x^2)}$

h) $\lim\limits_{x\to 1-0} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to 0+0} \left(\frac{1}{\sin x} - ctgx\right)$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

k) $\lim\limits_{x\to 0+0} (1-e^{2x})ctgx$

l) $\lim\limits_{x\to 1} (\ln(2-x))\, tg\frac{\pi x}{2}$

m) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$

n) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - arctgx\right)^{\frac{1}{x}}$

o) $\lim\limits_{x\to 0+0} (ctgx)^{\sin x}$

p) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$

r) $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$

2. Határozza meg az alábbi függvények szélsőértékeit!

a) $f(x) = x^4 + x^3$

b) $f(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2}$

c) $f(x) = x - arctg2x$

d) $f(x) = x\ln^2 x$

e) $f(x) = x^3e^{-x}$

f) $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$

3. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvények esetén! Készítse el a függvény grafikonját is!

a) $f(x) = 3x - x^3$

b) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$

c) $f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}$

d) $f(x) = x\ln^2 x$

e) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

f) $f(x) = e^{2x-x^2}$

g) $f(x) = xarctgx$

h) $f(x) = x + arctgx$

i) $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$

4. Egyenes fal mellett elhelyezkedő, $200m^2$ nagyságú téglalap alakú területet kell kijelölni úgy, hogy a három oldalához szükséges kerítés hossza a lehető legkisebb legyen. Mekkorák a téglalap oldalai?

5. Az R sugarú gömbbe írjunk maximális térfogatú hengert!

6. Egy adott hajóúton a hajózás napi költsége két részből tevődik össze: az egyik állandó, naponta a forint, a másik pedig a hajó sebességének köbével arányosan növekedik. Milyen sebesség esetén lesz a hajózás a lehető leggazdaságosabb?

A határozatlan integrál fogalma

Primitív függvény fogalma

Definíció. Ha az $f : A \to B$ (**egy derivált**) függvény esetén, ahol $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$, létezik egy olyan $F : A' \to B$ ($A \subset A'$) **deriválható függvény,** amelyre $F'(x) = f(x)$, bármely $x \in A$, akkor az $F : A' \to B$ függvény az $f : A \to B$ **primitív függvénye**.

Azonnal belátható, hogy ha $F_1 : A' \to B$ és $F_2 : A' \to B$, akkor $F_1(x) = F_2(x)+c$, ahol $c \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges, de rögzített állandó, hiszen csak a konstans függvények deriváltja 0 (lásd ott).

A határozatlan integrál fogalma

Definíció. Ha az $f : A \to B$ (**derivált**) függvény esetén, ahol $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$, létezik egy olyan $F : A' \to B$ ($A \subset A'$) **deriválható függvény,** amelyre $F'(x) = f(x)$, bármely $x \in A$, akkor az $F : A' \to B$ függvény az $f : A \to B$ **primitív függvénye** és az $F(x)+c$ függvénycsaládot az $f : A \to B$ határozatlan integráljának nevezzük és jelölése: $\int f(x)dx = F(x) + c$.

Szokás még a határozatlan integrál elnevezés mellett a **primitív függvények családja**,és néha az **antiderivált** fogalmát használni.

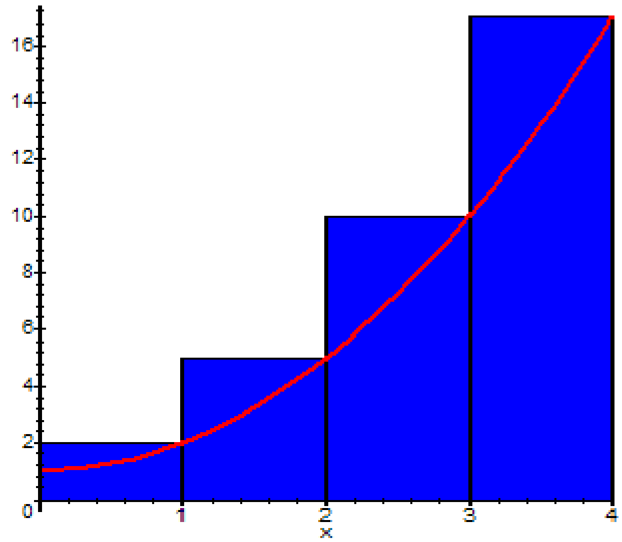
A határozatlan integrál tulajdonságai

A deriváltak megfelelő tulajdonságai (linearitás) alapján beláthatók a határozatlan integráltak linearitási tulajdonságai.

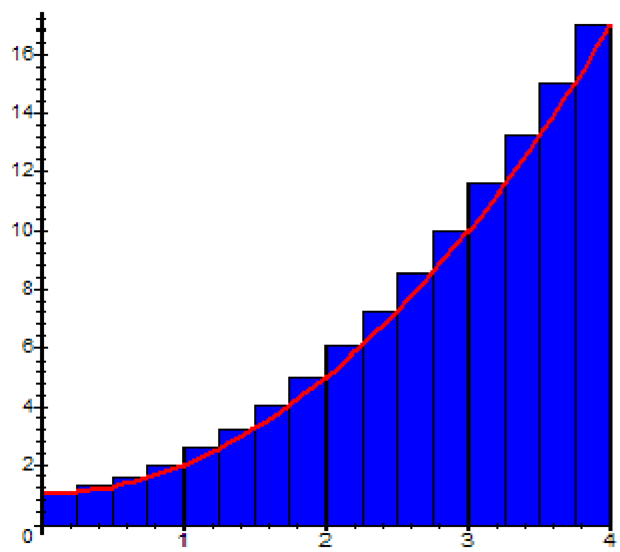
A határozott integrál fogalma

A függvénygörbe alatti terület egyre pontosabb megközelítése, "felülről", többlettel, a szemléltő ábrákon az $f : [0,4] \to [1,17]$, ahol $f(x) = x^2 + 1$ függvénygörbéhez a $[0,4]$ intervallumnak rendre 4, 16, ill. 64 egyenlőközű részintervallumához tartozó téglalapokkal:

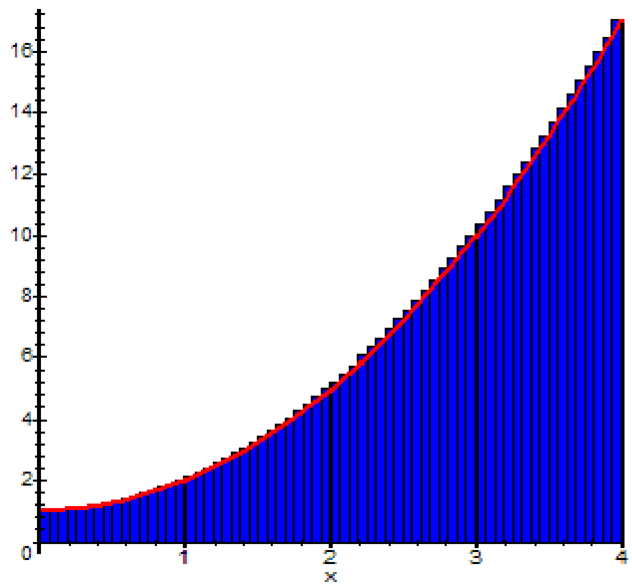
A függvénygörbe alatti terület egyre pontosabb megközelítése, "alulról", hiánnyal, a szemléltő ábrákon az $f : [0,4] \to [1,17]$, ahol $f(x) = x^2 + 1$



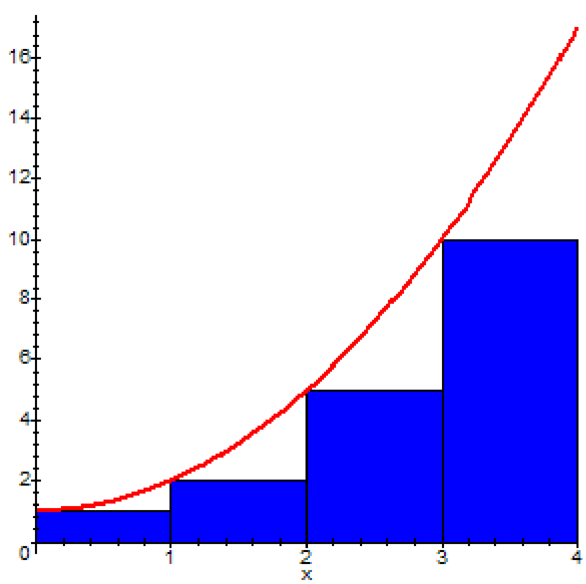
16
14
12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
x



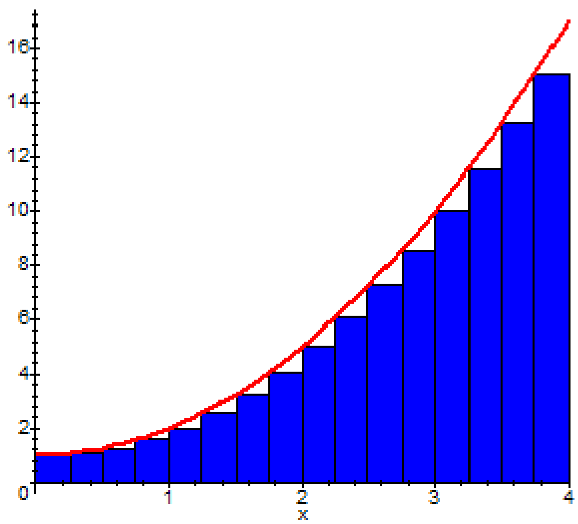
16
14
12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
x



16
14
12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
x



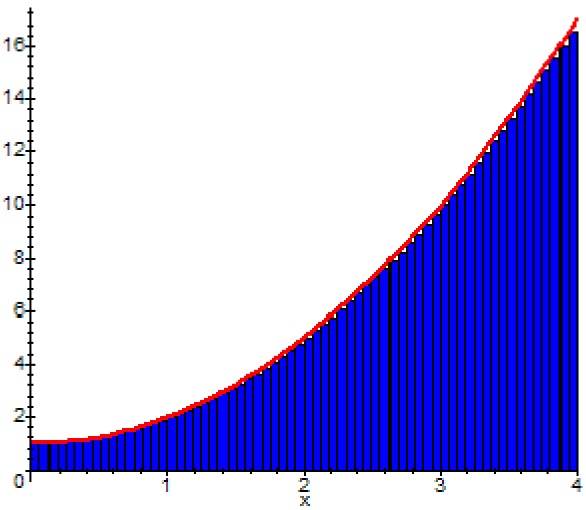
16
14
12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
x



függvénygörbéhez a $[0,4]$ intervallumnak rendre 4, 16, ill. 64 egyenlőközű részintervallumához tartozó téglalapokkal::

A határozott integrál tulajdonságai

1. Számítsa ki a következő integrálokat!
a) $\int e^{2x+1}dx$
b) $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{2}}dx$
c) $\int \frac{1}{x\ln 3x}dx$
d) $\int \frac{x^2}{x^3-\pi}dx$
e) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[4]{\cos^3 x}}dx$
f) $\int x\sqrt[3]{4-x^2}dx$
g) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\arccos x}dx$
h) $\int \frac{e^x+1}{e^x+e^{-x}+2}dx$
i) $\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1-tg^2 x}}dx$
j) $\int \frac{4^x}{1+16^x}dx$
k) $\int x^2e^{x^3}dx$



l) $\int \frac{1}{9+x^2} dx$
m) $\int \frac{1}{x^2+8x+20} dx$

2. Számítsa ki a következő integrálokat a parciális integrálás módszerével!
a) $\int xe^{2x} dx$
b) $\int x^2 2^{x-1} dx$
c) $\int x \sin(3x-1) dx$
d) $\int \left(x^2+1\right) \cos \frac{x}{2} dx$
e) $\int arctgx dx$
f) $\int xarctgx dx$
g) $\int \ln(x-1) dx$
h) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
i) $\int \arcsin 2x dx$

3. Alkalmas helyettesítéssel számítsa ki a következő integrálokat!
a) $\int e^{\sqrt{x-1}} dx$
b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}^3\right)}$
c) $\int \sqrt{2^x - 1} dx$
d) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
e) $\int \sqrt{1-4x^2} dx$
f) $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$

4. Határozza meg az alábbi trigonometrikus függvények integrálját!
a) $\int \sin^3 x \cos^7 x dx$

b) $\int \sin^6 x \cos^5 x dx$
c) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$
d) $\int \sin^3(2x+1)\cos^2(2x+1)dx$

5. Számítsa ki a következő függvények integrálját!
a) $\int \frac{dx}{1-4x^2}$
b) $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx$
c) $\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2+4x}dx$
d) $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$
e) $\int \frac{x^2+4x+1}{x^4+x^2}dx$
f) $\int \frac{x^4+4}{x^3-1}dx$
g) $\int \frac{dx}{4^x-2\cdot 2^x+1}$
h) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}+2}$

6. Alkalmazza a megfelelő módszereket az alábbi határozott integrálok kiszámítására!
a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(\frac{\pi}{4}-x)dx$

b) $\int\limits_0^2 (x+2)\, e^x dx$
c) $\int\limits_1^3 \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+3^{2x-1}\right)dx$
d) $\int\limits_{-2}^5 |3-2x|\, dx$
e) $\int\limits_3^5 \frac{x}{\sqrt{x-2}}dx$
f) $\int\limits_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}dx$

Balázs M.; Kolumbán J.: Matematikai Analízis, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1978, 195-198.;324-331.

INTEGRÁLÁS HELYETTESÍTÉSSEL (Változócsere)

1. Integrálás helyettesítéssel – az alapötlet

Az integrálszámitás egyik leghatékonyabb módszere a helyettesítéses módszer. Több hasznos helyettesítés létezik, amit integrálok kiszámitására használhatunk. A legfontosabbak közül néhányat bemutatunk a következő fejezetekben. A helyettesitők használatának legfőbb célja az, hogy találjunk egy másik integrált, ami könnyebben megoldható.

Az alapötlet, hogy kicseréljük az x független változót az $\int f(x)dx$ integrálban egy új t változóra a következő egyszerű formula segitségével $x=\varphi(t)$. Ebből következik:

$$(x)'_x = [\varphi(t)]'_t \Rightarrow 1.dx = \varphi'(t)dt \text{ és } f[\varphi(t)].$$

Következésképpen $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt$ amit remélhetőleg könnyebben tudunk megoldani.

Bizonyos esetekben hasznosabb a $t=\psi(x)$ helyettesítést használni.

Algoritmus a $\int f(x)dx$ ***helyettesítéssel történő megoldására.***

1. lépés A problémától függően legalkalmasabb helyettesítő formula meghatározása.

Step 2. Helyettesitsük t-re az x-et az integrálandó függvényben, számoljuk ki dx-et a helyettesítő formula segitségével és határozzuk meg az új integrált $\int f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt$.

Step 3. Számoljuk ki az integrált.

Step 4. Az $F(t)$ eredményt alakitsuk át az x változónak megfelelően.

Maple parancsok.

```
>I:=int(f,x);
>Int(f,x);
```

Az **f** függvény integráljának meghatározása, ahol **x** egy változó;

```
>with(student):changevar(x=t^2,I);
```

A **t** változó helyettesítése **x** –el a képletben (jelen esetben $x = t^2$) az **I** integrálban.

```
>I1:=value(%);
```

A végeredmény kiszámitása ahogy a *Maple* program használja.

Példa. Számoljuk ki a következő integrált

$$I_0 = \int \frac{dx}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

Matematikai megoldás.

A helyettesítés $\sqrt{x} = t > 0 \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$. Ebből

$$I_0 = \int \frac{2tdt}{2\left(t^2+1\right)t} = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C = arctg\sqrt{x} + C.$$

Megoldás a Maple segitségével.

```
>I0:=int(1/(2*(x+1)*sqrt(x)),x);
```

$$I0 := arctg\left(\sqrt{x}\right)$$

Részletes megoldás a Maple-ben.

1) az integrál definiálása a ***STUDENT*** programba:

```
>with(student):
>I0:=Int(1/(2*(x+1)*sqrt(x)),x);
```

$$I0 := \int \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}dx$$

2) helyettesítsük t^2 -el x-et:

```
>changevar(x=t^2,I0);
```

$$\int \frac{2t}{2\left(t^2+1\right)\sqrt{t^2}}dt$$

3) számoljuk ki az uj integrált:

```
>I0:=value(%);
```

$$I_0 = \frac{t.arc\tan(t)}{\sqrt{t^2}}$$

4) alakitsuk vissza x-re:

```
>I0:=subs(t=sqrt(x),I0);
```

$$I_0 = arctan\left(\sqrt{x}\right)$$

Példa. Számoljuk ki a következő integrált

$$I_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

Matematikai megoldás.

A helyettesítés $\left\{ x = \frac{2}{t} \Rightarrow dx = -\frac{2}{t^2}dt \right\}$. Ebből

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{\frac{2}{t}\sqrt{\frac{4}{t^2}-4}} = \frac{t^2}{4\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow$$

$$I_1 = \int \frac{t^2}{4\sqrt{1-t^2}}\left(-\frac{2}{t^2}\right)dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}arcsin\,t + C = -\frac{1}{2}arcsin\frac{2}{x} + C.$$

Részletes megoldás a Maple-ben.

```
>restart: with(student):
>I1:=Int(1/(x*sqrt(x^2-4)),x):
>changevar(x=2/t,I1); I1:=value(%);
>I1:=subs(t=2/x,I1);
```

$$I1 := -\frac{1}{2}arcsin\left(\frac{2}{x}\right).$$

Példa. Számoljuk ki a következő integrált

$$I_2 = \int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{1-e^x}}.$$

Matematikai megoldás.

A helyettesítés $\left\{ \sqrt{1-e^x} = t > 0 \right\}$ annak érdekében, hogy szabad integral legyen.

Ebből $x = ln\left(1-t^2\right) \Rightarrow dx = \dfrac{-2t}{1-t^2}dt \Rightarrow$.

$$I_2 = \int \frac{e^{3ln\left(1-t^2\right)}}{t}.\frac{-2t}{1-t^2}dt = -2\int \frac{\left(1-t^2\right)^3}{1-t^2}dt =$$
$$= -2\int \left(1-t^2\right)^2 dt = -2\left(t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right) + C =$$
$$= -2\left(\sqrt{1-e^x} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-e^x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\sqrt{1-e^x}\right)^5\right) + C.$$

<u>Részletes megoldás a Maple-ben.</u>

```
>restart:with(student):
>I2:=Int(exp(3*x)/sqrt(1-exp(x)),x);
>changevar(sqrt(1-exp(x))=t,I2);
>I2:=value(%);
>I2:=subs(t=sqrt(1-exp(x)),I2);
```

$$I2 := -2\sqrt{1-e^x} - \frac{2}{5}\left(1-e^x\right)^{(5/2)} + \frac{4}{3}\left(1-e^x\right)^{(3/2)}.$$

<u>Példa.</u> Számoljuk ki a következő integrált

$$I_3 = \int \frac{2\,sin\,x.cos\,x}{cos^4 x - 1}dx.$$

<u>Matematikai megoldás.</u>

A helyettesítés $\left\{cos^2 x = t\right\}$. Ebből $dt = 2\,cos\,x.\left(-sin\,x\right)dx$.

$$I_3 = -\int \frac{dt}{t^2-1} = -arc\,t\,gt + C = arctg\left(cos^2 x\right) + C$$

<u>Részletes megoldás a Maple-ben.</u>

```
>restart:with(student):
>I3:=Int(2*sin(x)*cos(x)/(cos(x)^4-1),x);
>changevar(cos(x)^2=t,I3);
>I3:=value(%);
>I3:=subs(t=cos(x)^2,I3);
```

$$I3 := arctan\,h\left(cos(x)^2\right).$$

Példa. Számoljuk ki a következő integrált

$$I_4 = \int \frac{\sin\sqrt[4]{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

Matematikai megoldás.

A helyettesítés $\left\{\sqrt[4]{x} = t\right\}$. Ebből $x = t^4, dx = 4t^3dt \Rightarrow$

$$I_4 = \int \frac{\sin t.4t^3dt}{t^3} = 4\int \sin t dt = -4\cos t + C =$$

$$= -4\cos\sqrt[4]{x} + C.$$

Részletes megoldás a Maple-ben.

```
>restart:with(student):
>I4:=Int(sin(x^(1/4))/(x)^(3/4),x);
>changevar(x^(1/4)=t,I4); I4:=value(%);
>I4:=subs(t=x^(1/4),I4);
```

$$I4 := -4\cos\left(x^{(1/4)}\right).$$

2. A $f(x) = \left(ax^2 + bx + x\right)$ függvény integrálása helyettesítéssel

A következő tipusú integral megoldását mutatjuk be helyettesítéssel:

$$J_1 = \int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx,$$

$$J_2 = \int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Ebből

$$ax^2+bx+c = \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

a helyettesítés $x + \dfrac{b}{2a} = t$ vagy $x = t - \dfrac{b}{2a}$ és $dx = dt$.

Példa. Számoljuk ki a következő integrált

$$I_5 = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx .$$

Matematikai megoldás.

A helyettesítés $\{x-1=t\}$. Ebből $x^2-2x+2=t^2+1$ és

$$I_5 = \int \frac{2(t+1)-2}{t^2+1} dt = \int \frac{2t}{t^2+1} dt = \int \frac{1}{t^2+1} d\left(t^2+1\right) =$$
$$= ln\left|t^2+1\right| + C = ln\left|x^2-2x+2\right| + C .$$

Részletes megoldás a Maple-ben.

```
>restart:with(student):
>I5:=Int((2*x-2)/(x^2-2*x+2),x);
>changevar(x-1=t,I5); I5:=value(%);
>I5:=subs(t=x-1,I5);
```

$$I5 := ln\left((x-1)^2+1\right)$$

```
>simplify(I5);
```

$$I5 := ln\left(x^2-2x+2\right).$$

Példa. Számoljuk ki a következő integrált

$$I_6 = \int \frac{dx}{x^2+4x+8} .$$

Matematikai megoldás.

A helyettesítés $\{x+2=t\}$. Ebből $x^2+4x+8=t^2+4$ és

$$I_6 = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{x+2}{2}\right) + C .$$

Részletes megoldás a Maple-ben.

```
>restart:with(student):
>I6:=Int(1/(x^2+4*x+8),x);
>changevar(x+2=t,I6); I6:=value(%);
>I6:=subs(t=x+2,I6);
```

$$I6 := \frac{1}{2} arctan\left(\frac{1}{2}x+1\right).$$

Példa. Számoljuk ki a következő integrált

$$I_7 = \int \frac{3x-1}{x^2+4x+5}dx.$$

Matematikai megoldás.

A helyettesítés $\{x+2=t\}$. Ebből $x^2+4x+5=t^2+1$ és

$$I_7 = \int \frac{3t-7}{t^2+1}dt = 3\int \frac{t}{t^2+1}dt - 7\int \frac{dt}{t^2+1} =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+1}d\left(t^2+1\right) - 7arctgt =$$
$$= \frac{3}{2}ln\left|t^2+1\right| - 7arctgt + C =$$
$$= \frac{3}{2}ln\left|x^2+4x+5\right| - 7arctg\left(x+2\right) + C.$$

Részletes megoldás a Maple-ben.

```
>restart:with(student):
>I7:=Int((3*x-1)/(x^2+4*x+5),x);
>simplify(changevar(x+2=t,I7));
>I7:=value(%);
>I7:=simplify(subs(t=x+2,I7));
```

$$I7 := \frac{3}{2}ln\left(x^2+4x+5\right) - 7arctg\left(x+2\right).$$

Példa. Számoljuk ki a következő integrált

$$I_8 = \int \frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx.$$

Matematikai megoldás.

A helyettesítés $\left\{x-\frac{3}{4}=t\right\}$. Ebből $2x^2-3x+1=2\left(t^2-\frac{1}{16}\right)$.

$$I_8 = \frac{1}{2}\int \frac{1-8t}{t^2 - \frac{1}{16}}\,dt = -8\int \frac{8t-1}{16t^2-1}\,dt =$$

$$= 8\int \frac{1}{(4t)^2-1}\,dt - 8.4\int \frac{2t}{(4t)^2-1}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{(4t)^2-1}\,d(4t) - 32\int \frac{1}{16t^2-1}\,dt^2 =$$

$$= ln\left|\frac{4t-1}{4t+1}\right| - 2\,ln\left|16t^2-1\right| + C =$$

$$= ln|4t-1| - ln|4t+1| - 2\,ln|4t-1| - 2\,ln|4t+1| + C =$$

$$= -ln|4t-1| - 3\,ln|4t+1| + C =$$

$$= -ln|4x-4| - 3\,ln|4x-2| + C =$$

$$= -ln4 - ln|x-1| - 3\,ln2 - 3\,ln|2x-1| + C =$$

$$= -5\,ln2 - ln|x-1| - 3\,ln|2x-1| + C =.$$

Részletes megoldás a Maple-ben.

```
>restart:with(student):
>I8:=Int((7-8*x)/(2*x^2-3*x+1),x);
>I8:=simplify(changevar(x-3/4=t,I8));
>I8:=value(%);
>I8:=simplify(subs(t=x-3/4,I8));
```

$$I8 := -5\,ln(2) - 3\,ln(2x-1) - ln(x-1).$$

Példa. Számoljuk ki a következő integrált

$$I_9 = \int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,dx.$$

Matematikai megoldás.

A helyettesítés $\{x-1=t\}$. Ebből $x^2-2x+2=t^2+1$ és

$$I_9 = \int \frac{2(t+1)-2}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,d\left(t^2+1\right) =$$

$$= 2\sqrt{t^2+1} + C = 2\sqrt{x^2-2x+2} + C.$$

Részletes megoldás a Maple-ben.

```
>restart:with(student):
>I9:=Int((2*x-2)/sqrt(x^2-2*x+2),x);
>I9:=simplify(changevar(x-1=t,I9));
>I9:=value(%);
>I9:=simplify(subs(t=x-1,I9));
```

$$I9 := 2\sqrt{x^2-2x+2}$$

Példa. Számoljuk ki a következő integrált

$$I_{10} = \int \frac{3x-5}{\sqrt{9+6x-3x^2}}dx.$$

Matematikai megoldás.

A helyettesítés $\{x-1=t\}$. Ebből $9+6x-3x^2 = 3\left(4-t^2\right)$ és

$$I_{10} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{3t-2}{\sqrt{4-t^2}}dt = \frac{3}{\sqrt{3}}\int \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}dt - \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}dt =$$

$$= -\sqrt{3}\int \frac{1}{2\sqrt{4-t^2}}d\left(4-t^2\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}arcsin\frac{t}{2} + C =$$

$$= -\sqrt{3\left(4-t^2\right)} - \frac{2}{\sqrt{3}}arcsin\frac{t}{2} + C =$$

$$= -\sqrt{9+6x-3x^2} - \frac{2}{\sqrt{3}}arcsin\frac{x-1}{2} + C.$$

Részletes megoldás a Maple-ben.

```
>restart:with(student):
>I10:=Int((3*x-5)/sqrt(9+6*x-3*x^2),x);
>I10:=simplify(changevar(x-1=t,I10));
>I10:=value(%);
>I10:=simplify(subs(t=x-1,I10));
```

$$I10 := -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,arcsin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) - \sqrt{9+6x-3x^2}.$$

3. Gyakorlás

Oldja meg a következő integrálokat helyettesítéssel:

$$I_{11} = \int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+9}dx \text{ ,}$$

Megoldás. $I_{11} = \frac{1}{6} arctg\left(\frac{e^{2x}}{3}\right) + C$,

$$I_{12} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)},$$

Megoldás. $I_{12} = \frac{3}{2} ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right| + C$

$I_{13} = \int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, helyettesítés $x = a(1-t)$,

Megoldás. $I_{13} = \pm arccos\frac{a-x}{a} + C$

$$I_{14} = \int \frac{e^x+1}{e^x-1}dx,$$

Megoldás. $I_{14} = ln\left(e^x-1\right)^2 - x + C$.

$$I_{15} = \int \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}dx,$$

Megoldás. $I_{15} = ln\left|x^2+x+\frac{1}{2}\right| + arctg\left(2x+1\right) + C$

$$I_{16} = \int \frac{2x-5}{x^2+4x+5}dx,$$

Megoldás. $I_{16} = ln\left|x^2+4x+5\right| - 9arctg\left(x+2\right) + C$

$$I_{17} = \int \frac{x+1}{3x^2+6x+2}dx,$$

Megoldás. $I_{17} = \frac{1}{6} ln\left|x^2+2x+\frac{2}{3}\right| + C$,

$$I_{18} = \int \frac{x+2}{3x^2+6x+2}dx$$

Megoldás.

$$I_{18} = \frac{1}{6}ln\left|x^2+2x+\frac{2}{3}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\sqrt{3}x+\sqrt{3}\right)+C$$

$$I_{19} = \int \frac{x-1}{2x-3x^2}dx$$

Megoldás. $I_{19} = -\frac{1}{3}ln\left|x-\frac{2}{3}\right| + \frac{1}{2}ln\left|\frac{x-\frac{2}{3}}{x}\right| + C$

$$I_{20} = \int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2+3x+5}}dx,$$

Megoldás. $I_{20} = 2\sqrt{x^2+3x+5} - 7\,ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+5}\right| + C$

$$I_{21} = \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}dx,$$

Megoldás. $I_{21} = \sqrt{x^2+3x+5} + C$

$$I_{22} = \int \frac{4x+2}{\sqrt{2x^2-x+1}}dx,$$

Megoldás. $I_{22} = 2\sqrt{2x^2-x+1} + \frac{3}{2}ln\left|\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{4}+\sqrt{2x^2-x+1}\right| + C$

$$I_{23} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}},$$

Megoldás. $I_{23} = ln\left|x+2+\sqrt{x^2-4x-3}\right| + C$

4. Gyakorló teszt

Oldja meg a következő integrálokat:

$$I_{24} = \int \frac{\cos\sqrt[5]{x}dx}{\sqrt[5]{x^4}},$$

$$I_{25} = \int \frac{\sin 4x dx}{\cos^4 2x + 4},$$

$$I_{26} = \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\cos^4 x + 1}},$$

$$I_{27} = \int \frac{e^{\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{2x-3}} dx,$$

$$I_{28} = \int \frac{dx}{\sqrt{10x - x^2}},$$

$$I_{29} = \int \frac{3x+3}{2x^2 - x - 1} dx,$$

$$I_{30} = \int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} dx.$$

5. Gyakorló kérdések

1) Magyarázza el a helyettesítéssel történő integrálás módját.

2) Mutasson példát a helyettesítéssel történő integrálásra.

3) Magyarázza meg a következő *Maple* parancsok jelentését:

```
with(student), changevar(x=t^2,I1),
simplify(changevar(x=t^2,I1)),
I11:=value(%),I1:=subs(t=sqrt(x),I1),
I1:=simplify(subs(t=sqrt(x),I1)).
```

PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

1. Parciális integrálás. Példák

Legyenek a $f(x), g(x), f'(x), g'(x)$ függvények folyamatosak az $[a,b]$ intervallumban. Ebből

$$\int f(x)g'(x)dx = \int f(x)dg(x) =$$
$$= f(x)g(x) - \int g(x) f'(x)dx$$

vagy

(1) $$\int udv = uv - \int vdu,$$

ahol $u = f(x)$, $dv = g'(x)dx$ az integrálandó függvény részei.

Az (1) képlet ilyen integrálokra vonatkozik:

1) $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$, $\int P_n(x)\cos kxdx$,

ahol $P_n(x)$ az x n alapú polinom-ja, és k állandó. Az ilyen tipusú integrálok megoldása magába foglalja:

a) az **u** változónak polinom-nak kell lennie, pl. $u = P_n(x)$;

b) az (1) képlet n alkalommal való felhasználását.

2) $\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$,

$\int P_n(x)\mathrm{arctg}\,xdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arcctg}\,xdx$,

ahol $P_n(x)$ az x n alapú polinom-ja. A megoldás magába foglalja:

a) $u = f(x) \neq P_n(x)$;

b) az (1) képlet felhasználását.

3) $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$

ahol a,b bármely állandó. A megoldás magába foglalja:

a) $u = \cos bx$ vagy $u = \sin bx$;

b) az (1) képlet 2 alkalommal való felhasználását.

Maple parancsok.

Az alábbi alprogram használatával könnyű megérteni az integrálok megoldásának folyamatát

```
>with(student):
```

a parancs

```
>intparts(A,u));
```

ahol **A** az integrál

```
>A:=Int(f,x);
```

és az **u** függvényt az 1) ÷ 3) szabályok határozzák meg.

Szintén hasznos lehet a **simplify** parancs használata az egyszerűbb végeredmény érdekében.

Példa. Számoljuk ki a következő integrált

$$I_1 = \int (6x-3) sin 2x dx.$$

Matematikai megoldás.

$$\left| \begin{array}{l} 6x-3 = u \Rightarrow du = 6dx \\ \int sin 2x dx = \int dv \Rightarrow v = -\frac{1}{2} cos 2x \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$I_1 = \int \underbrace{(6x-3)}_{u} d \underbrace{\left(-\frac{1}{2} cos 2x\right)}_{v} =$$

$$= \underbrace{(6x-3)}_{u} \underbrace{\left(-\frac{1}{2} cos 2x\right)}_{v} - \int \underbrace{\left(-\frac{1}{2} cos 2x\right)}_{v} d \underbrace{(6x-3)}_{u} =$$

$$= (6x-3)\left(-\frac{1}{2} cos 2x\right) - \int -\frac{1}{2} cos 2x.6dx =$$

$$= -\frac{6x-3}{2} cos 2x + \frac{3}{2} sin 2x + C.$$

Megoldás a Maple segitségével.

```
>I[1]:=int((6*x-3)*sin(2*x),x);
```

$$I_1 := \frac{3}{2} sin(2x) - 3x cos(2x) + \frac{3}{2} cos(2x)$$

Részletes megoldás a Maple-ben.

```
>with(student):
```

```
>A:=Int((6*x-3)*sin(2*x),x);
```

$$A := \int (6x-3)\sin(2x)\,dx$$

```
>J:=simplify(intparts(A,6*x-3));
```

$$J := -\frac{6x-3}{2}\cos(2x) + 3\int \cos(2x)\,dx =$$

A $J_1 = 3\int \cos(2x)\,dx$ integral megoldása, mint általában:

```
>J[1]:=int(3*cos(2*x),x);
```

$$J_1 := \frac{3}{2}\sin(2x)$$

A megoldás:

$$I_1 = -\frac{6x-3}{2}\cos(2x) + J_1 =$$

$$= -\frac{6x-3}{2}\cos(2x) + \frac{3}{2}\sin(2x) + C\,.$$

Példa. Számoljuk ki a következő integrált

$$I_2 = \int (x+2)\cos x\,dx\,.$$

Matematikai megoldás.

$$I_2 = \int (x+2)\,d(\sin x) = (x+2)\sin x - \int \sin x\,d(x+2) =$$

$$= (x+2)\sin x - \int \sin x\,dx = (x+2)\sin x + \cos x + C\,.$$

Részletes megoldás a Maple-ben.

```
>with(student):
>A:=Int((x+2)*cos(x),x);
```

$$A := \int (x+2)\cos(x)\,dx$$

```
>J:=simplify(intparts(A,x+2));
```

$$J := (x+2)\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$$

```
>J[1]:=int(sin(x),x);
```

$$J_1 := -\cos(x)$$

A megoldás:

$$I_2 = (x+2)\sin x - J_1 = (x+2)\sin x + \cos x + C\,.$$

Megoldás a Maple segitségével (ellenőrzés).

```
>A:=int((x+2)*cos(x),x);
```

Példa. Számoljuk ki a következő integrált

$$I_3 = \int x^2 \sin x dx$$

Matematikai megoldás.

$$\left.\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ \int dv = \int \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$I_3 = \int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\sin x dx}_{dv} = \int \underbrace{x^2}_{u} d\underbrace{\left(-\cos x\right)}_{v} =$$

$$= -x^2 \cos x + \int \cos x d\left(x^2\right) = -x^2 \cos x + \int \cos x.2xdx =$$

$$\left.\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ \int dv = \int \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$I_3 = -x^2 \cos x + 2\int \underbrace{x}_{u} d\underbrace{\left(\sin x\right)}_{v} =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx\right] =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C .$$

Részletes megoldás a Maple-ben.

```
>with(student):
>A:=Int(x^2*sin(x),x):
>J:=simplify(intparts(A,x^2));
```

$$J := -x^2 \cos(x) + \int \cos(x) 2xdx$$

```
>B:=2*Int(cos(x)*x,x):
>J[1]:=simplify(intparts(B,x));
```

$$J_1 : 2x \sin x - 2\int \sin x dx$$

```
>J[2]:=int(2*sin(x),x):
```

$$J_2 := -2\cos(x)$$

A megoldás:

$$I_2 = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

Példa. Számoljuk ki a következő integrált

$$I_4 = \int e^{-2x} \cos x dx .$$

Matematikai megoldás.

$$\left.\begin{cases} u = e^{-2x} \Rightarrow du = -2e^{-2x}dx \\ \int dv = \int \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$I_4 = \int \underbrace{e^{-2x}}_{u} \underbrace{\cos x dx}_{dv} = \int \underbrace{e^{-2x}}_{u} d \underbrace{(\sin x)}_{v} =$$

$$= e^{-2x} \sin x - \int \sin x d\left(e^{-2x}\right) = e^{-2x} \sin x + 2\int \underbrace{\sin x}_{v} \underbrace{e^{-2x}}_{u} dx =$$

$$\left.\begin{cases} u = e^{-2x} \Rightarrow du = -2e^{-2x}dx \\ \int dv = \int \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$I_4 = e^{-2x} \sin x + 2\int \underbrace{e^{-2x}}_{u} d \underbrace{(-\cos x)}_{v} =$$

$$= e^{-2x} \sin x - 2e^{-2x} \cos x + 2\int \cos x d e^{-2x} =\backslash$$

$$= e^{-2x} \sin x - 2e^{-2x} \cos x - 4\int e^{-2x} \sin x dx \Rightarrow$$

$$I_4 = e^{-2x} \sin x - 2e^{-2x} \cos x - 4I_4 \Rightarrow$$

$$I_4 = \frac{1}{5} e^{-2x} (\sin x - 2\cos x) + C .$$

Részletes megoldás a Maple-ben.

```
>with(student):
>A:=Int(exp(-2*x)*cos(x),x):
>J:=simplify(intparts(A,exp(-2*x)));
```

$$J := e^{(-2x)} \sin(x) + 2\int e^{(-2x)} \sin(x) dx$$

Ebből

$$J := e^{(-2x)} \sin(x) + J_1 .$$

J_1 számitása:

```
>B:=2*Int(exp(-2*x)*sin(x),x):
>J[1]:=simplify(intparts(B,exp(-2*x)));
```

$$J_1 := -2e^{(-2x)}\cos(x) - 4\int e^{(-2x)}\sin(x)dx$$

Eképpen,

$$J := e^{(-2x)}\sin(x) - 2e^{(-2x)}\cos(x) - 4J.$$

Ebből következik, hogy

$$J := \frac{1}{5}e^{(-2x)}\left(\sin x - 2\cos x\right) + C.$$

Megoldás a Maple segitségével (ellenőrzés).

```
>J:=int(exp(-2*x)*cos(x),x);
```

Példa. Számoljuk ki a következő integrált

$$I_5 = \int \frac{x^2}{x^2 + a^2} dx.$$

Megjegyzés. Ennek ez integrálnak a neve “100 000”, mivel 100 000 diák bukott meg a matematika vizsgáján emiatt az integral miatt.

Matematikai megoldás.

$$\left\{\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ \displaystyle\int dv = \int \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}d\left(x^2+a^2\right) \\ \displaystyle\Rightarrow v = -\frac{1}{2\left(x^2+a^2\right)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$I_5 = \int \underbrace{x}_{u} d\underbrace{\left(-\frac{1}{2\left(x^2+a^2\right)}\right)}_{v} =$$

$$= -\frac{x}{2\left(x^2+a^2\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)}dx =$$

$$= -\frac{x}{2\left(x^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a} arctg\frac{x}{a} + C.$$

Részletes megoldás a Maple-ben.

```
>with(student):
>A:=Int(exp(-2*x)*cos(x),x):
>J:=simplify(intparts(A,exp(-2*x)));
```

???

2. Gyakorlás

1) Számoljuk ki a következő integrálokat

$$I_6 = \int arctg\sqrt{2x-1}dx,$$
$$I_7 = \int ln(4x^2+1)dx,$$
$$I_8 = \int x^2 e^x dx,$$
$$I_9 = \int e^{3x} sin2xdx,$$
$$I_{10} = \int sin\,ln\,xdx.$$

I_6 matematikai megoldása.

$$\left| \begin{array}{l} arctg\sqrt{2x-1} = u \Rightarrow \\ du = \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{2x-1}\right)^2} \cdot \dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}}dx = \dfrac{1}{2x\sqrt{2x-1}}dx \\ \int dx = \int dv \Rightarrow v = x \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$I_6 = x.arctg\sqrt{2x-1} - \int x \cdot \frac{1}{2x\sqrt{2x-1}}dx =$$

$$= xarctg\sqrt{2x-1} - \int \frac{dx}{2\sqrt{2x-1}} =$$

$$= xarctg\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$$

***I_6* <u>megoldása Maple segitségével.</u>**

```
>I[6]:=int(arctan(sqrt(2*x-1)),x);
```

$$I_6 := \frac{1}{2}(2x-1)arctg\left(\sqrt{2x-1}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + \frac{1}{2}arctg\left(\sqrt{2x-1}\right)$$

<u>Megoldás a Maple segitségével.</u>

```
>I[7]:=int(ln(4*x^2+1),x);
```

$$I_7 := x\,ln\left(4x^2+1\right) - 2x + arctan(2x)$$

```
>I[8]:=int(x^2*exp(x),x);
```

$$I_8 := x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$$

```
>I[9]:=int(exp(3*x)*sin(2*x),x);
```

$$I_9 := -\frac{2}{13}e^{(3x)}cos(2x) + \frac{3}{13}e^{(3x)}sin(2x)$$

```
>I[10]:=int(sin(ln(x)),x);
```

$$I_{10} := -\frac{1}{2}cos(ln(x))x + \frac{1}{2}sin(ln(x))x$$

2) Számoljuk ki a következő integrálokat

$$I_{11} = \int x^2\,sin\,xdx,$$

$$I_{12} = \int x\,ln\,xdx,$$

$$I_{13} = \int x^2e^{5x}dx,$$

$$I_{14} = \int x^5e^{x^2}dx,$$

$$I_{15} = \int e^{3x}\left(sin\,2x - cos\,2x\right)dx,$$

$$I_{16} = \int x\left(arctgx\right)^2dx,$$

$$I_{17} = \int \frac{x.arctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx,$$

$$I_{18} = \int \frac{x^2arctgx}{1+x^2}dx,$$

$$I_{19} = \int \frac{arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx,$$

$$I_{20} = \int x^4 e^{3x} \sin x dx,$$

$$I_{21} = \int ln\left(x^2+2\right)dx,$$

$$I_{22} = \int x^2\, ln\left(1+x\right)dx.$$

3. Gyakorló teszt

Számoljuk ki a következő integrálokat

$$I_{23} = \int arctg\sqrt{x}dx,$$

$$I_{24} = \int e^{2x}\cos xdx,$$

$$I_{25} = \int ln^2 xdx,$$

$$I_{26} = \int \frac{ln\, x}{x^3}dx.$$

4. Gyakorló kérdések

4) Magyarázza el a ***Parciális integrálás*** lényegét.

5) Hogyan tudná meghatározni az **`u`** függvényt a ***Parciális integrálás***hoz?

6) Magyarázza meg a következő *Maple* parancsok jelentését:

```
with(student):
A:=Int(f,x);
intparts(A,u));
simplify
```