

Geometría Discreta y Computación

Ángel Ríos San Nicolás

Hoja 2- h -vectores, politopos regulares
18 de enero de 2020

Ejercicio 1. 4-politopos regulares. Para cada uno de los cinco 3-politopos regulares, considera las siguientes longitudes: su lado l , su radio r (distancia de un vértice al centro) y su diagonal d (distancia AC donde ABC son vértices consecutivos de una faceta; si la faceta es un triángulo, $d = l$). Llamamos “apertura central” de P al cociente l/r y “apertura facial” a d/l .

- (a) Justifica la siguiente afirmación: “Existe un 4-politopo regular con faceta P y figura de vértice Q si, y solo si, la apertura central de Q es estrictamente mayor que la apertura facial de P .”
- (b) Usando ese criterio, demuestra que solo seis de las 11 posibilidades de (p, q, r) producen 4-politopos regulares.

Solución.

- (a) Si partimos de la figura de vértice Q y trazamos segmentos desde el centro hasta los vértices, la razón del lado y su longitud mide la apertura central de Q . Para poder colocar una copia de la faceta P en el interior de Q de manera que no toque ni corte estos segmentos es una condición necesaria y suficiente que la apertura facial de P sea estrictamente menor porque entonces, independientemente del lado, el ángulo sólido de una faceta de Q será más grande y colocando P sobra espacio en \mathbb{R}^3 . Colocando más facetas, el espacio que sobra permite moverse en la cuarta dimensión de manera que la construcción se cierra en \mathbb{R}^4 en un 4-politopo regular con faceta P y figura de vértice Q , análogamente a la construcción de los 3-politopos regulares a partir de polígonos regulares. Debe cerrarse bien porque de lo contrario tendríamos un recubrimiento no trivial de la esfera \mathbb{S}^3 , que es una contradicción con el hecho de que sea simplemente conexa.
- (b) Calculamos las aperturas central y facial de cada 3-politopo regular. Como el radio y la diagonal serán múltiplos del lado, podemos suponer un lado conveniente para calcular los cocientes.

- Tetraedro (3,3)

Se puede realizar el tetraedro como la envolvente convexa de los puntos

$$\left\{ \left(\pm 1, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(0, \pm 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

con lo que tenemos que la longitud y la diagonal son $l = 2 = d$ y el centro es $(0, 0, 0)$ así que

$$\text{el radio es } r = \left(1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Apertura central: } \frac{l}{r} = \frac{2}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{6}}. \text{ Apertura facial: } \frac{d}{l} = 1.$$

- Cubo (4,3)

Se puede realizar el cubo como la envolvente convexa de los puntos

$$\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$$

con lo que tenemos que el lado es $l = 1$, la diagonal es $\sqrt{2}$ y el centro es $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ así que el radio es $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Apertura central: } \frac{l}{r} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}. \text{ Apertura facial: } \frac{d}{l} = \sqrt{2}.$$

- Octaedro (3,4)

Se puede realizar el octaedro como la envolvente convexa de los puntos

$$\{(1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$$

con lo que tenemos que el lado y la diagonal son $l = \sqrt{2} = d$ y el centro es $(0, 0, 0)$ así que el radio es 1, la mitad de la diagonal del cuadrado de lado $\sqrt{2}$.

Apertura central: $\frac{l}{r} = \sqrt{2}$. Apertura facial: $\frac{d}{l} = 1$

- Dodecaedro (5,3)

Se puede realizar el dodecaedro como la envolvente convexa de los puntos

$$\left\{ (\pm 1, \pm 1, \pm 1), \left(0, \pm \varphi, \pm \frac{1}{\varphi}\right), \left(\pm \frac{1}{\varphi}, 0, \pm \varphi\right), \left(\pm \varphi, \pm \frac{1}{\varphi}, 0\right) \right\}$$

con lo que tenemos que el lado es $l = \frac{2}{\varphi}$, la diagonal es $d = \frac{2}{\varphi}\varphi = 2$ y el centro es $(0, 0, 0)$ así que el radio es $r = (1^2 + 1^2 + 1^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Apertura central: $\frac{l}{r} = \frac{2}{3\varphi}\sqrt{3}$. Apertura facial: $\frac{d}{l} = \varphi$.

- Icosaedro (3,5)

Se puede realizar el icosaedro como la envolvente convexa de los puntos

$$\{(0, 1, \pm \varphi), (\pm \varphi, 0, \pm 1), (\pm 1, \pm \varphi, 0)\}$$

con lo que tenemos que el lado y la diagonal son $l = 2 = d$ y el centro es $(0, 0, 0)$ así que el radio es $r = (1 + \varphi^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\varphi + 2}$.

Apertura central: $\frac{l}{r} = \frac{2}{\sqrt{\varphi + 2}}$. Apertura facial: $\frac{d}{l} = 1$.

La existencia o no del 4-politopo regular correspondiente a cada una de las 11 posibilidades del símbolo de Schläfli viene recogida en la siguiente tabla. La desigualdad $d/l < l/r$ compara, por el criterio anterior, si la apertura facial de la faceta es estrictamente menor que la apertura central de la figura de vértice.

Símbolo de Schläfli	Faceta	Figura de vértice	4-politopo regular	$d/l < l/r$
(3, 3, 3)	Tetraedro	Tetraedro	4-símplice	$1 < 2\sqrt{6}/3$
(3, 3, 4)	Tetraedro	Octaedro	<i>cross-politopo</i>	$1 < \sqrt{2}$
(3, 3, 5)	Tetraedro	Icosaedro	600-celda	$1 < 2/\sqrt{\varphi + 2}$
(4, 3, 3)	Cubo	Tetraedro	4-cubo	$\sqrt{2} < 2\sqrt{6}/3$
(4, 3, 4)	Cubo	Octaedro	\nexists	$\sqrt{2} \nless \sqrt{2}$
(4, 3, 5)	Cubo	Icosaedro	\nexists	$\sqrt{2} \nless 2/\sqrt{\varphi + 2}$
(3, 4, 3)	Octaedro	Cubo	24-celda	$1 < 2\sqrt{3}/3$
(5, 3, 3)	Dodecaedro	Tetraedro	120-celda	$\varphi < 2\sqrt{6}/3$
(5, 3, 4)	Dodecaedro	Octaedro	\nexists	$\varphi \nless \sqrt{2}$
(5, 3, 5)	Dodecaedro	Icosaedro	\nexists	$\varphi \nless 2/\sqrt{\varphi + 2}$
(3, 5, 3)	Icosaedro	Dodecaedro	\nexists	$1 \nless 2\sqrt{3}/(3\varphi)$

Ejercicio 2. El d -cubo. Sea $C_d = [-1, 1]^d$ el cubo regular de dimensión d centrado en el origen.

(a) Calcula el f -vector de C_d de dos maneras:

- Usando la descomposición $C_d = C_{d-1} \times \{-1\} \dot{\cup} C_{d-1} \times (0, 1) \dot{\cup} C_{d-1} \times \{1\}$.
- Encontrando una biyección entre las caras de dimensión k y los vectores de $\{-1, 0, 1\}^d$ con k ceros.

(b) Demuestra que el número de banderas de C_d es $d! \times 2^d$, que coincide con el orden de su grupo de simetrías (permutaciones y/o cambios de signo de coordenadas).

(c) Calcula el h -vector del polar de C_d , el llamado *cross-politopo* de dimensión d .

Nota: C_d y su polar son politopos regulares con símbolo de Schläfli $(4, 3, \dots, 3)$ y $(3, \dots, 3, 4)$. Junto con el d -símplice son los únicos d -politopos regulares para $d \geq 5$.

Solución.

- (a) i. Denotamos mediante f_i^d al número de caras de dimensión i de C_d , el cubo regular de dimensión d y f^d al f -vector completo de C_d . Esto es un abuso de notación respecto a la exponenciación, pero no habrá ambigüedad. Sabemos que $f_{-1}^d = 1 = f_d^d$ para todo $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$. Nos centramos en el resto de componentes. Afirmamos que para todos $d, i \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$, $0 \leq i \leq d-1$, se cumple

$$f_i^d = 2^{d-i} \binom{d}{i}$$

y lo probamos para cada i por inducción en la dimensión d . Utilizando la descomposición, vamos a ver que podemos poner f_i^d en función de f_i^{d-1} y f_{i-1}^{d-1} .

Sabemos que dado C_{d-1} , la construcción de C_d es cilíndrica, contiene dos copias de C_{d-1} unidas por caras de dimensión menor. Al multiplicar por $(-1, 1)$, cada punto genera una arista, cada arista una cara de dimensión 2, cada cara de dimensión 2 una cara de dimensión 3... En general, cada cara de dimensión k , genera una cara de dimensión $k+1$. Por lo tanto, se cumple

$$f_i^d = 2f_i^{d-1} + f_{i-1}^{d-1} \text{ para todo } i \in \{0, \dots, d-1\}.$$

El sumando $2f_i^{d-1}$ por las dos copias de C_{d-1} y el sumando f_{i-1}^{d-1} porque hay que añadir tantas caras de dimensión i como caras de dimensión $i-1$ del cubo de dimensión C_{d-1} . En dimensión 1, se cumple $2 = 2^{1-0} \binom{1}{0}$. Suponemos que se cumple para $d-1$, es decir, que

$$f_i^{d-1} = 2^{d-1-i} \binom{d-1}{i} \text{ para todo } i \in \{0, \dots, d-1\}.$$

Aplicando las fórmulas anteriores,

$$f_i^d = 2 \cdot 2^{d-1-i} \binom{d-1}{i} + 2^{d-1-i+1} \binom{d-1}{i-1} = 2^{d-i} \left(\binom{d-1}{i} + \binom{d-1}{i-1} \right) = 2^{d-i} \binom{d}{i}$$

como queríamos probar.

- ii. Buscamos ahora una biyección entre el número de caras de C_d de dimensión k y el número de vectores de $\{-1, 0, 1\}^d$ con k ceros que tiene $2^{d-k} \binom{d}{k}$ elementos porque se corresponde a escoger las k coordenadas de ceros y, para cada elección, dar valor -1 o 1 al resto de coordenadas. Observamos que C_d está realizado como d -cubo unitario centrado en el origen.

En dimensión 1, los vértices son -1 y 1 con lo que $f_0^2 = 2$ es el número de vectores de $\{-1, 1\}$. El punto medio de la arista es 0 y $f_1^1 = 1$ es el número de vectores de $\{0\}$.

En dimensión 2, es el cuadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$ con las cuatro elecciones posibles de signos. Observamos que los puntos medios de las aristas son los elementos de $\{0, 1\}^2$ y $\{-1, 0\}^2$ y tenemos que $f_0^2 = 4$ es el número de vectores sin ceros $(\pm 1, \pm 1)$ y $f_1^2 = 4$ es el número $|\{-1, 0\}^2 \cup \{0, 1\}^2|$ de vectores con un cero.

Esto se puede generalizar en cualquier dimensión d . Por la construcción de C_d . Dado $v \in \{-1, 0, 1\}^d$ con k ceros, podemos considerar los 2^k elementos obtenidos sustituyendo los ceros por -1 o 1 . Claramente son vértices de C_d y, por ser 2^k con $d-k$ coordenadas iguales, definen una única cara de C_d de dimensión k al tomar su envolvente convexa, que contiene a v porque se puede poner como la combinación convexa $v = \frac{1}{2}v_{-1} + \frac{1}{2}v_1$ siendo v_{-1} y v_1 los vectores obtenidos al sustituir los ceros todos por -1 y todos por 1 respectivamente. Se puede ver así v como el centro de la cara. La existencia y unicidad define una biyección entre las caras de C_d de dimensión k y los elementos de C_d con k ceros.

- (b) Probamos que el número de banderas de C_d es $d!2^d$ por inducción en la dimensión d . Si $d = 1$, el número de banderas es $2 = 1!2^1$ porque tenemos dos vértices. Suponemos que se cumple para $d - 1$, es decir, que el número de banderas de C_{d-1} es $(d - 1)!2^{d-1}$. Recordamos ahora la descomposición

$$C_d = (C_{d-1} \times \{-1\}) \dot{\bigcup} (C_{d-1} \times (-1, 1)) \dot{\bigcup} (C_{d-1} \times \{1\}) = C_{d-1} \times [-1, 1]$$

de la que se deduce que las facetas de C_d son copias de C_{d-1} . Por lo tanto, para construir una bandera de C_d solo hay que escoger una faceta, de las que hay

$$f_{d-1}^d = 2^{d-(d-1)} \binom{d}{d-1} = 2 \frac{d!}{(d-1)!1!} = 2 \frac{d(d-1)!}{(d-1)!} = 2d$$

opciones. La faceta escogida tiene, por hipótesis de inducción, $(d-1)!2^{d-1}$ banderas. Por lo tanto, el número de banderas de C_d es el producto $2d(d-1)!2^{d-1} = d!2^d$ como queríamos probar.

En d coordenadas, el número de cambios de signo es 2^d y el de permutaciones es $d!$, por lo tanto, el número de simetrías de C_d es $d!2^d$, igual que el número de banderas y el d -cubo C_d es un d -politopo regular.

- (c) Sabemos que el f -vector del *cross-politopo* de dimensión d es el reverso del f -vector de C_d . Si el f -vector del d -cubo es $\tilde{f}^d = (1, f_0^d, f_1^d, \dots, f_{d-1}^d, 1)$, entonces el f -vector del *cross-politopo* de dimensión d es $\tilde{f}^d = (1, f_{d-1}^d, \dots, f_2^d, f_1^d, 1)$ con lo que el coeficiente general es

$$\tilde{f}_i^d = f_{d-(i+1)}^d = 2^{d-(d-(i+1))} \binom{d}{d-(i+1)} = 2^{i+1} \binom{d}{i+1}.$$

Calculamos el h -vector \tilde{h}^d del *cross-politopo* mediante polinomios. El polinomio \tilde{F}^d asociado al f -vector \tilde{f}^d es

$$\tilde{F}^d(X) = \sum_{i=0}^d \tilde{f}_{i-1}^d X^{d-i} = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} 2^i X^{d-i} = (2 + X)^d.$$

Por lo tanto, el polinomio \tilde{H}^d asociado al h -vector \tilde{h} está dado por

$$\tilde{H}^d(X) = F(1 - X) = (1 + X)^d = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} X^{d-i}.$$

El h -vector \tilde{h}^d del *cross-politopo* de dimensión d es

$$\tilde{h}_i^d = \binom{d}{i}.$$

Ejercicio 3. La 24-celda. Sea P la envolvente convexa de los siguientes 24 puntos en \mathbb{R}^4 : los 16 vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ del 4-cubo y los 8 vértices $\pm 2e_i$ de un *cross-politopo* (dual del cubo) dilatado a tamaño doble. Obsérvese que los 24 vértices quedan en una esfera de radio 2.

- (a) P tiene la siguiente descripción por facetas, con 24 desigualdades (son 24 porque hay seis maneras de elegir i y j , y para cada una hay cuatro elecciones de signos):

$$P = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \pm x_i \pm x_j \leq 2, \quad 1 \leq i < j \leq 4\}.$$

- (b) Demuestra que P es regular, es decir que el orden de su grupo de simetrías coincide con el número de banderas.
- (c) Calcula el f -vector de P , y el f -vector P' de un politopo simplicial obtenido “dividiendo cada octaedro en cuatro tetraedros con una arista común” (nota: este es el politopo que se obtendría perturbando ligeramente los 24 vértices para que no haya más de cuatro en ningún hiperplano). Como P' es simplicial, calcula su h -vector.

Nota: P es el 4-politopo regular con símbolo de Schläfli $(3, 4, 3)$, y es su propio polar (esto último se sigue de que el símbolo de Schläfli es simétrico, pero también de que la transformación de coordenadas sugerida en el apartado (a) manda los 24 vértices de P sobre los 24 vectores $\pm e_i \pm e_j$ normales a las facetas).

Solución.

- (a) Vamos a ver primero que los vértices de la 24-celda cumplen las desigualdades de P . Si escogemos un vértice $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ del cubo con cualquier elección de signos en cada coordenada, tenemos que las diferentes posibilidades son

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= 2 \\ 1 - 1 &= 0 \\ -1 + 1 &= 0 \\ -1 - 1 &= -2 \end{aligned}$$

con lo que se cumplen $\pm x_i \pm x_j \leq 2$ para $1 \leq i < j \leq 2$.

Si escogemos un vértice $2e_i$ con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ del *cross-politopo* dual del cubo a tamaño doble, se cumple que una coordenada es 2 y el resto cero con lo que en las desigualdades de P tenemos que si o $x_i = 2$ o $x_j = 2$, entonces

$$\begin{aligned} x_i + x_j &= 2 \\ x_i - x_j &= 2 \\ -x_i + x_j &= -2 \\ -x_i - x_j &= -2 \end{aligned}$$

y claramente también $\pm x_i \pm x_j \leq 2$ para $1 \leq i < j \leq 2$. Si $x_i, x_j \neq 2$, todas las sumas son $0 \leq 2$.

Tenemos que ver que no faltan facetas. Escogemos una faceta, por ejemplo, $F : x_1 + x_2 = 2$ y vamos a probar que tanto su descripción por vértices como su descripción por facetas definen el mismo 3-politopo, un octaedro.

- Descripción de F por vértices. Calculamos los vértices de la 24-celda que cumplen la desigualdad de la faceta F . Los vértices cuyas dos primeras coordenadas suman 2 son

$$S = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, 1), (1, 1, 1, -1), (1, 1, -1, -1), (2, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0)\}$$

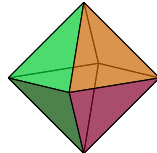
Consideramos el cambio de variable

$$y : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, (x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto y(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{x_3 - x_4}{2} \right).$$

Aplicamos el cambio a los vértices de la faceta y tenemos

$$\begin{aligned} y(1, 1, 1, 1) &= (1, 0, 1, 0) \\ y(1, 1, -1, 1) &= (1, 0, 0, -1) \\ y(1, 1, 1, -1) &= (1, 0, 0, 1) \\ y(1, 1, -1, -1) &= (1, 0, -1, 0) \\ y(2, 0, 0, 0) &= (1, 1, 0, 0) \\ y(0, 2, 0, 0) &= (1, -1, 0, 0) \end{aligned}$$

Observamos que, como y transforma la faceta $x_1 + x_2 = 2$ en el hiperplano $y_1 = 1$, todas los puntos tienen coordenada 1. Proyectando en ese hiperplano, podemos ver los puntos en \mathbb{R}^3 como $\{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)\}$ cuya envolvente convexa es claramente un octaedro porque consiste en dos pirámides de base cuadrada unidas por sus bases.



- Descripción de F por facetas. Tenemos que calcular las desigualdades de P que pasan por al menos tres vértices de la faceta F . Los vértices son los elementos del conjunto S que calculamos antes. Los denotamos como sigue

$$\begin{aligned} P_1 &= (1, 1, 1, 1) \\ P_2 &= (1, 1, -1, 1) \\ P_3 &= (1, 1, 1, -1) \\ P_4 &= (1, 1, -1, -1) \\ P_5 &= (2, 0, 0, 0) \\ P_6 &= (0, 2, 0, 0). \end{aligned}$$

y denotamos $\tilde{P}_i = y(P_i)$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Con esta notación, comprobamos qué vértices cumplen cada desigualdad de P con igualdad.

Igualdad	Vértices
$x_1 + x_2 = 2$	$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$
$x_1 - x_2 = 2$	P_5
$-x_1 + x_2 = 2$	P_6
$-x_1 - x_2 = 2$	\emptyset
$x_1 + x_3 = 2$	P_1, P_3, P_5
$x_1 - x_3 = 2$	P_2, P_4, P_5
$-x_1 + x_3 = 2$	\emptyset
$-x_1 - x_3 = 2$	\emptyset
$x_1 + x_4 = 2$	P_1, P_2, P_5
$x_1 - x_4 = 2$	P_3, P_4, P_5
$-x_1 + x_4 = 2$	\emptyset
$-x_1 - x_4 = 2$	\emptyset
$x_2 + x_3 = 2$	P_1, P_3, P_6
$x_2 - x_3 = 2$	P_2, P_4, P_6
$-x_2 + x_3 = 2$	\emptyset
$-x_2 - x_3 = 2$	\emptyset
$x_2 + x_4 = 2$	P_1, P_2, P_5
$x_2 - x_4 = 2$	P_3, P_4, P_6
$-x_2 + x_4 = 2$	\emptyset
$-x_2 - x_4 = 2$	\emptyset
$x_3 + x_4 = 2$	P_1
$x_3 - x_4 = 2$	P_3
$-x_3 + x_4 = 2$	\emptyset
$-x_3 - x_4 = 2$	P_4

Observamos que los vértices P_i, P_j, P_k con i, j, k distintos dos a dos que verifican una misma desigualdad de P con igualdad se corresponden precisamente con los puntos $\tilde{P}_i, \tilde{P}_j, \tilde{P}_k$ que pertenecen a \mathbb{R}^3 salvo proyección y que definen una cara del octaedro. La región que encierra el conjunto de ecuaciones con esa propiedad sobre los puntos es precisamente el octaedro.

- (b) Para probar que es regular, tenemos que ver que el orden de su grupo de simetrías coincide con el número de banderas. Para contar las banderas, multiplicamos el número de facetas, 24, por el número de banderas que inciden en cada faceta, pero estas son las banderas del octaedro.

El octaedro tiene 6 vértices, en cada vértice inciden 4 aristas y en cada arista inciden 2 caras. El número de banderas del octaedro es $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$. Por lo tanto, el número de banderas de la 24-celda es $24 \cdot 48 = 1152$. El grupo de simetrías de la 24-celda contiene el subgrupo de orden $24 \cdot 16$ de las permutaciones y cambios de coordenadas. Buscamos una simetría σ del politopo tal que $\sigma((2, 0, 0, 0)) = (1, 1, 1, 1)$, $\sigma((1, 1, 1, 1)) = (1, 1, 1, -1)$ y $\sigma((1, 1, 1, -1)) = (2, 0, 0, 0)$, es decir, $\sigma(P_5) = P_1$, $\sigma(P_1) = P_3$ y $\sigma(P_3) = P_5$ con la notación anterior para los vértices de la faceta F .

Pero sabemos que estos vértices definen un octaedro que lo podemos ver en \mathbb{R}^3 por el cambio de coordenadas y . La simetría que buscamos es esencialmente una simetría $\tilde{\sigma}$ del octaedro que cumple $\tilde{\sigma}(\tilde{P}_5) = \tilde{P}_1$, $\tilde{\sigma}(\tilde{P}_1) = \tilde{P}_3$ y $\tilde{\sigma}(\tilde{P}_3) = \tilde{P}_5$. Claramente, deja fijo el centro del octaedro, que es el origen $(0, 0, 0)$. Calculamos el punto de \mathbb{R}^4 que se corresponde con el origen por el cambio de coordenadas y la proyección, es decir, $y^{-1}((1, 0, 0, 0)) = (1, 1, 0, 0)$.

La simetría σ está dada respecto de la base $\{P_5, P_1, P_3, (1, 1, 0, 0)\}$ por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, respecto de la base canónica, tiene como matriz

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esta aplicación transforma entre sí vértices de la faceta del politopo y por lo tanto también caras entre sí, es decir, es una simetría del octaedro correspondiente: $\sigma(P_2) = P_6$, $\sigma(P_6) = P_4$, $\sigma(P_4) = P_2$ y tiene orden tres por la propia definición de M o porque σ^3 es la matriz identidad. Observamos que la simetría σ es la misma que transforma cíclicamente P_2 , P_6 y P_4 por lo que el octaedro solo tiene 4 de tales simetrías, una por cada dos de sus facetas. El resto de simetrías son composición de σ con cada una de las permutaciones o cambios de signo con lo que en total tenemos que el orden del grupo de simetrías de la 24-celda es $24 \cdot 16 \cdot 3 = 1152$ igual que el número de banderas. No puede haber más simetrías que banderas. Si aplicamos una perturbación suficientemente pequeña a los vértices de un politopo, se mantiene el número de banderas, pero se pierden simetrías.

- (c) • f -vector de P . Tenemos que calcular $f = (f_{-1}, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$. Claramente, $f_{-1} = 1 = f_4$ porque todo politopo tiene una única cara de dimensión -1 , el vacío, y una única cara de dimensión 4, el propio politopo. El número de vértices es $f_0 = 24$ por definición ya que no se pierde ningún vértice al tomar la envolvente convexa porque quedan todos en una esfera de radio 2 en \mathbb{R}^4 . El número de facetas es $f_3 = 24$, previamente calculado. Solo falta calcular f_1 y f_2 , el número de caras de dimensión 1 y 2 respectivamente. Como el símbolo de Schläfli de P es $(3, 4, 3)$ significa que sus facetas son octaedros, que tienen 6 vértices, 12 aristas y 8 caras triangulares y que hay 3 alrededor de cada arista. Cada cara es común a 2 octaedros y cada arista a 3 octaedros. Por lo tanto, el número de aristas es $f_1 = \frac{24 \cdot 12}{3} = 96$ porque si multiplicamos el número de facetas por el número de aristas de cada una, estamos contando el número de aristas 3 veces. Análogamente, el número de 2-caras es $f_2 = \frac{24 \cdot 8}{2} = 96$ porque si multiplicamos el número de facetas por el número de caras de cada una, estamos contando cada cara 2 veces. El f -vector de la 24-celda es $f = (1, 24, 96, 96, 24, 1)$.
- f -vector de P' . Tenemos que calcular $f = (f_{-1}, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$. Claramente, como antes, tenemos $f_{-1} = 1 = f_4$. Vamos a utilizar que P' se obtiene dividiendo cada octaedro en cuatro tetraedros con una arista común. Aplicando ese proceso, tenemos por cada octaedro: el mismo número de vértices, una arista más, cuatro caras más y cuatro facetas que son tetraedros. En total: $f_0 = 24$, $f_1 = 96 + 24 = 120$, $f_2 = 96 + 4 \cdot 24 = 192$ y $f_3 = 24 \cdot 4 = 96$. Por lo tanto, el f -vector de P' es $f = (1, 24, 120, 192, 96, 1)$.

Calculamos el h -vector aplicando el truco de Stanley.

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & 24 \\ & & & & & 1 & 23 & 120 \\ & & & 1 & 22 & 97 & 192 \\ & 1 & 21 & 75 & 95 & 96 \\ 1 & 20 & 54 & 20 & 1 \end{array}$$

El h -vector de P' es $h = (1, 20, 54, 20, 1)$.