Optimización Combinatoria

Ángel Ríos San Nicolás

Hoja 1–Desigualdades lineales, poliedros
27 de octubre de 2020

Ejercicio 1. Demostrar el teorema de la alternativa suponiendo cierto el lema de Farkas.

Teorema de la alternativa. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Uno y solo uno de los siguientes sistemas tiene solución.

$$\text{(i)} \quad Ax \leq b, \qquad\qquad \text{(ii)} \quad yA = 0, y \geq 0, yb < 0$$

Lema de Farkas. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Uno y solo uno de los siguientes sistemas tiene solución.

$$\text{(i)} \quad Ax = b, x \geq 0 \qquad\qquad \text{(ii)} \quad yA \geq 0, yb < 0$$

Solución. Es claro que ambos sistemas no pueden tener solución porque en ese caso se tendría

$$\left\{\begin{array}{ccc} Ax & \leq & b \\ yA & = & 0 \end{array}\right\} \longrightarrow 0 = 0x = yAx \leq yb,$$

que contradice la desigualdad $yb < 0$. Observamos que hemos necesitado que $y \geq 0$ para que no cambie de sentido la desigualdad.

Supongamos que $Ax \leq b$ tiene solución y queremos probar que $yA = 0, y \geq 0, yb < 0$ no tiene solución. Razonaremos de manera análoga a la demostración del recíproco. Podemos introducir variables de holgura de la forma $x = u - v$ donde u, v son, respectivamente, las partes positiva y negativa de x y tomamos $s = b - Ax$. Claramente tenemos que $u, v, s \geq 0$. Sumando $Au, -Av$ y s, tenemos

$$Au - Av + s = A(u - v) + s = A(u - v) + b - A(u - v) = b.$$

Por tanto, el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} Au - Av + s & = & b \\ u, v, s & \geq & 0 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} A & -A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ s \end{pmatrix} & = & b \\ u, v, s & \geq & 0 \end{array}\right.$$

tiene solución. Además si el sistema anterior tiene solución, tomando $x = u - v$ y $s = b - A(u - v)$ y sumando y restando s, se llega a que $Ax = A(u - v) + s - s = b - s \leq b$ porque $s \geq 0$ con lo que $Ax \leq b$ tiene solución. Es decir, se tiene la equivalencia de compatibilidades entre los dos sistemas.

Aplicando el lema de Farkas, lo anterior es también equivalente a que el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} y\begin{pmatrix} A & -A & I \end{pmatrix} & \geq & 0 \\ yb & < & 0 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} yA & \geq & 0 \\ yA & \leq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ yb & < & 0 \end{array}\right. \longleftrightarrow yA = 0, y \geq 0, yb < 0$$

no tenga solución, que es precismante lo que queríamos probar.

Ejercicio 2. Sea Q el poliedro definido por el sistema $Ax \leq b$ y sean $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ las filas de A. Demostrar que la desigualdad $cx \leq d$ es válida en todo Q si y solo si es combinación cónica de las que definen Q y la desigualdad $0x \leq 1$. Es decir, si y solo si

$$(c; d) \in \operatorname{cone}\left((a_1; b_1, \ldots, a_m; b_m), (0, 1)\right) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Solución.

$\Longrightarrow$ (Para este ejercicio suponemos que c es un vector fila. El resto de vectores serán vectores columna salvo transposición). Suponemos que $cx \leq d$ no es combinación cónica de las filas de $Ax \leq b$ y $0x \leq 1$ y queremos probar que existe un $x \in Q$ tal que no se cumple $cx \leq d$. Como $cx \leq d$ no es tal combinación cónica, tenemos que el sistema

$$\begin{cases} 0x_0 + A^T x &= c \\ x_0 + b^T x &= d \\ x_0 &\geq 0 \\ x &\geq 0 \end{cases}$$

no tiene solución. Observamos que las dos primeras ecuaciones las podemos escribir en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T \\ 1 & b^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Por el lema de Farkas, el sistema

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y^T & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A^T \\ 1 & b^T \end{pmatrix} & \geq 0 \\ \begin{pmatrix} y^T & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} & < 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} v & \geq 0 \\ Ay + vb & \geq 0 \\ cy + vd & < 0 \end{cases}$$

sí tiene solución, donde $y \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}$.

Como tenemos $v \geq 0$, distinguimos dos casos:

- Si $v > 0$, podemos dividir la segunda desigualdad por $-v$ cambiando su sentido y obtenemos $A\left(\frac{-1}{v}y\right) \leq b$, con lo que tenemos que $\frac{-1}{v}y \in Q$ por definición de Q. Si aplicamos lo mismo en la tercera desigualdad, llegamos a que $c\left(\frac{-1}{v}\right)y > d$, lo que contradice el hecho de que $cx \leq d$ es válida en Q.

- Si $v = 0$, entonces el sistema queda

$$\begin{cases} Ay & \geq 0 \\ cy & < 0 \end{cases}.$$

  Si tomamos $t \in \mathbb{R}$ suficientemente grande, tendremos que $A(-ty) \leq b$ con lo que $-ty \in Q$ y $c(-ty) > d$, lo que contradice el hecho de que $cx \leq d$ es válida en Q.

$\Longleftarrow$ Consideramos $a_i = (a_{1i}, \dots, a_{mi})$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Q se escribe, entonces, de la forma

$$Q : \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{cases}.$$

Suponemos que $(c; d) \in \operatorname{cone}(a_1; b_1, \dots, a_m; b_m, (0; 1)) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, es decir, que existen $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ tales que $c = 0\lambda_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m$ y $d = 1\lambda_0 + \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m$. Por tanto, tenemos que si $c = (c_1, \dots, c_m)$, entonces

$$\begin{cases} c_1 & = & 0\lambda_0 & + & \lambda_1 a_{11} & + & \cdots & + & \lambda_m a_{m1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_n & = & 0\lambda_0 & + & \lambda_1 a_{1n} & + & \cdots & + & \lambda_m a_{mn} \end{cases} \quad \text{y} \quad d = 1\lambda_0 + \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m.$$

Tomamos ahora $x = (x_1, \dots, x_n) \in Q$ y tenemos que probar que $cx \leq d$, es decir

$$\begin{aligned} cx \leq d \quad &\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \cdots c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq d \\ &\longleftrightarrow \quad (\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_m a_{m1})x_1 + \cdots + (\lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_m a_{mn})x_n \leq 1\lambda_0 + \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m \end{aligned}.$$

Pero claramente se cumple porque podemos reordenar los términos y, aplicando la definición del poliedro Q, tenemos que

$$\lambda_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + \cdots + \lambda_m(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) \leq \lambda_0 + \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m \longleftrightarrow cx \leq d.$$

Por tanto, $cx \leq d$ es cierta para todo $x \in Q$ como queríamos probar.

Ejercicio 3. (Dualidad de politopos). Sea $P = \operatorname{conv}\{p_1, \dots, p_N\} \subset \mathbb{R}^n$ un politopo. Consideramos el poliedro Q en $\mathbb{R}^n$ definido tomando como ecuaciones los puntos que definen P. Es decir:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : p_i x \leq 1, \forall i \in \{1, \dots, N\}\}.$$

(a) Q contiene al origen en su interior. Es decir: $\forall v \in \mathbb{R}^n$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon v \in Q$.

Solución.

Sea $v \in \mathbb{R}^n$, queremos encontrar un $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon v \in Q$. Suponemos que $p_i = (p_1^i, \dots, p_n^i)$ para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ con lo que Q se escribe de la forma

$$Q : \left\{ \begin{array}{ccccccc} p_1^1 x_1 & + & \cdots & + & p_n^1 x_n & \leq & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_1^N x_1 & + & \cdots & + & p_n^N x_n & \leq & 1 \end{array} \right. .$$

Si $v = (v_1, \dots, v_n)$, calculando los productos $p_i v$ para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} p_1^1 v_1 & + & \cdots & + & p_n^1 v_n & = & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_1^N v_1 & + & \cdots & + & p_n^N v_n & = & \alpha_N \end{array} \right. .$$

Consideramos $A = \{i \in \{1, \dots, N\} : \alpha_i > 1\}$. Si A es vacío, entonces claramente $v \in Q$ y podemos tomar simplemente $\epsilon = 1 > 0$. Si A es no vacío, tomamos $\epsilon = \frac{1}{\prod\limits_{i \in A} \alpha_i} > 0$. Multiplicando por ϵ, tenemos las siguientes igualdades

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} p_1^1 \epsilon v_1 & + & \cdots & + & p_n^1 \epsilon v_n & = & \frac{\alpha_1}{\prod\limits_{i \in A} \alpha_i} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_1^N \epsilon v_1 & + & \cdots & + & p_n^N \epsilon v_n & = & \frac{\alpha_N}{\prod\limits_{i \in A} \alpha_i} \end{array} \right. .$$

Observamos que $\prod\limits_{i \in A} \alpha_i > 1$ y distinguimos dos casos:

- Si $j \in A$, entonces $\frac{\alpha_j}{\prod\limits_{i \in A} \alpha_i} = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i \in A \\ i \neq j}} \alpha_i} \leq 1$.
- Si $j \notin A$, entonces $\alpha_j \leq 1$ y también $\frac{\alpha_j}{\prod_{i \in A} \alpha_i} \leq 1$.

Por tanto, $\epsilon v \in Q$ y Q contiene al origen en su interior.

(b) Q es acotado si y solo si P contiene al origen en su interior.

Solución.

Equivalentemente, tenemos que ver que para todo $c \in \mathbb{R}^n$, el programa

$$(P) \left\{ \begin{array}{cc} \text{Maximizar} & cx \\ \text{sujeto a} & x \in Q \end{array} \right.$$

es acotado si y solo si para todo $v \in \mathbb{R}^n$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon v \in P$.

$\Longrightarrow$ Si $Q = \emptyset$, es porque $P = \emptyset$, por tanto, P no contiene al origen en su interior.

Suponemos ahora que $Q \neq \emptyset$ es acotado. Para todos $c \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$, el programa

$$(P) \left\{ \begin{array}{cc} \text{Maximizar} & \epsilon cx \\ \text{sujeto a} & x \in Q \end{array} \right.$$

es factible y acotado. Por el teorema de dualidad fuerte, el programa dual

$$(D) \left\{ \begin{array}{lccccccc} \text{Minimizar} & & & y_1 + \cdots + y_n & & & & \\ & y_1 p_1^1 & + & \cdots & + & y_n p_1^N & = & \epsilon c_1 \\ \text{sujeto a} & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & y_1 p_n^1 & + & \cdots & + & y_n P_n^N & = & \epsilon c_n \\ & & & y_1, \dots, y_n \geq 0 & & & & \end{array} \right.$$

es factible. Esto implica que $\epsilon c \in \text{cone}(p_1, \dots, p_n)$. Pero, podemos tomar ϵ suficientemente pequeño de manera que $\epsilon c \in P$ con lo que P contiene al origen en su interior.

$\Longleftarrow$ Suponemos que existe un $c \in \mathbb{R}^n$ de manera que el programa (P) no es acotado. Esto implica que para todo $\epsilon > 0$, el programa

$$(P') \left\{ \begin{array}{cc} \text{Maximizar} & \epsilon cx \\ \text{sujeto a} & x \in Q \end{array} \right.$$

tampoco es acotado porque solo hemos multiplicado la función objetivo por un escalar positivo. Por el teorema de dualidad débil, el programa dual

$$(D)\begin{cases} \text{Minimizar} & y_1 + \cdots + y_n \\ \text{sujeto a} & \begin{array}{ccccccc} y_1p_1^1 & + & \cdots & + & y_np_1^N & = & \epsilon c_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_1p_n^1 & + & \cdots & + & y_nP_n^N & = & \epsilon c_n \end{array} \\ & y_1, \ldots, y_n \geq 0 \end{cases}$$

es no factible. Pero esto implica que para todo $\epsilon > 0$, $\epsilon c \notin \operatorname{cone}(p_1, \ldots, p_N) \supseteq P$ con lo que para todo $\epsilon > 0$, $\epsilon c \notin P$ y P no contiene al origen en su interior.

(c) Sea $a \in \mathbb{R}^n$. La ecuación lineal $ax \leq 1$ es válida en P si y solo si $a \in Q$.

$\Longrightarrow$ Si $ax \leq 1$ es válida en todo P, en particular es válida con $x = P_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$ y entonces claramente $a \in Q$ por construcción de Q.

$\Longleftarrow$ Sea $a \in Q$. Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$, entonces a cumple

$$\begin{cases} \begin{array}{ccccccc} a_1p_1^1 & + & \cdots & + & a_np_n^1 & \leq & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1p_1^N & + & \cdots & + & a_np_n^N & \leq & 1 \end{array} \end{cases}$$

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in P$, por definición, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \geq 0$ tales que $\sum\limits_{i=0}^{N} \lambda_i = 1$ y

$$\begin{cases} \begin{array}{ccccccc} x_1 & = & \lambda_1p_1^1 & + & \cdots & + & \lambda_Np_1^N \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n & = & \lambda_1p_n^1 & + & \cdots & + & \lambda_Np_n^N \end{array} \end{cases}$$

Tenemos que probar que $ax \leq 1$, es decir

$$\begin{aligned} ax \leq 1 \quad &\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \cdots a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq 1 \\ &\longleftrightarrow \quad a_1(\lambda_1p_1^1 + \cdots + \lambda_Np_1^N) + \cdots + a_n(\lambda_1p_n^1 + \cdots + \lambda_Np_n^N) \leq 1 \end{aligned}$$

Pero claramente se cumple porque podemos reordenar los términos y, aplicando la definición del poliedro Q, tenemos que

$$\lambda_1(a_1p_1^1 + a_2p_2^1 + \cdots + a_np_n^1) + \cdots + \lambda_N(a_1p_1^N + \cdots + p_n^Na_n) \leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$$

(d) Suponer que $0 \in \operatorname{interior}(P)$ (o sea, Q acotado) y sea $a \in \mathbb{R}^n$. Entonces, la ecuación lineal $ax \leq 1$ es válida en Q si y solo si $a \in P$.

Solución.

$\Longrightarrow$ Suponemos que $ax \leq 1$ es válida en todo el poliedro Q. Por el Ejercicio 2,

$$(a; 1) \in \operatorname{cone}((p_1; 1, p_N; 1), (0; 1)),$$

es decir, existen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N \geq 0$ tales que

$$\begin{cases} \begin{array}{ccccccc} a_1 & = & \lambda_1p_1^1 & + & \cdots & + & \lambda_Np_1^N \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_n & = & \lambda_1p_n^1 & + & \cdots & + & \lambda_Np_n^N \end{array} \end{cases}$$

$$1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_N$$

Como 0 está en el interior de P, tenemos expresado a como combinación convexa de elementos de P, en particular, de sus generadores como politopo y de $0 \in P$, por tanto, $a \in P$ por definición de politopo.

$\Longleftarrow$ Sea $a \in P$. Por definición, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \geq 0$ con $\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$ tales que

$$\begin{cases} \begin{array}{ccccccc} a_1 & = & \lambda_1p_1^1 & + & \cdots & + & \lambda_Np_1^N \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_n & = & \lambda_1p_n^1 & + & \cdots & + & \lambda_Np_n^N \end{array} \end{cases}$$

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in Q$. Tenemos que probar que $ax \leq 1$, es decir

$$\begin{aligned} ax \leq 1 \quad &\longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \cdots a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq 1 \\ &\longleftrightarrow \quad (\lambda_1 p_1^1 + \cdots + \lambda_N p_1^N) x_1 + \cdots + (\lambda_1 p_n^1 + \cdots + \lambda_N p_n^N) x_n \leq 1 \end{aligned}$$

Pero claramente se cumple porque podemos reordenar los términos y, aplicando la definición del poliedro Q, tenemos que

$$\lambda_1 (p_1^1 x_1 + p_2^1 x_2 + \cdots + p_n^1 x_n) + \cdots + \lambda_N (p_1^N x_1 + \cdots + p_n^N x_n) \leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$$

Por tanto, $ax \leq 1$ es válida en Q.