



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y SOCIALES  
ESCUELA DE ESTADÍSTICA Y CIENCIAS ACTUARIALES

ANÁLISIS COMPARATIVO DE MÉTODOS DE  
PROYECCIÓN DE MORTALIDAD DESDE UNA  
PERSPECTIVA ACTUARIAL: CASO APLICADO A  
CHILE Y JAPÓN

Trabajo Especial de Grado

PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE:  
**Licenciado en Ciencias Actuariales**

AUTOR:

**Eleazar Domínguez**

TUTOR:

Prof. Jorge Dias



Facultad de Ciencias  
Económicas y Sociales

Caracas, Marzo 2025

*Primero, a **Dios**, por guiar cada paso y darme fuerza en este recorrido. Este trabajo es para mi madre, **Carmen Domínguez**, el pilar de mi vida. Cada noche, durante este largo camino, ella estuvo ahí, acompañándome en el sofá, compartiendo mis angustias, preocupaciones y alegrías. Ella es mi mayor tesoro. A mi familia, mi roca inquebrantable, por alentarme siempre a seguir adelante.*

*Eternamente Agradecido  
Eleazar Domínguez*

## Agradecimientos

---

*Mi gratitud infinita hacia mi madre **Carmen Domínguez**, cuya influencia ha sido fundamental en mi desarrollo personal y profesional. Su amor, su cariño y su apoyo incondicional me han dado la confianza para perseguir mis sueños y convertirme en la persona que soy hoy. Ella me ha enseñado el valor del esfuerzo, la perseverancia y la importancia de nunca rendirme. Me siento inmensamente afortunado de ser su hijo, y por ello, le agradezco desde lo más profundo de mi corazón por ser mi amiga, mi maestra, mi consejera y mi mayor fuente de inspiración. Tu amor me ha dado alas para volar alto y alcanzar nuevas alturas.*

*A mi abuela **Flora Mujica** mi gratitud eterna. Aunque tu presencia física nos falte, tu amor y tus enseñanzas viven en mí cada día. Te extraño profundamente. Gracias por el regalo invaluable de la familia y por los recuerdos que atesoro en mi corazón.*

*A mi Familia. Su apoyo incondicional y su constante ánimo me han impulsado a seguir adelante y alcanzar mis metas. Su cariño ha sido mi mayor fortaleza en este camino, y me siento profundamente agradecido por tenerlos como mi refugio y mi mayor fuente de inspiración. Los llevo siempre en mi corazón.*

*A Mariana Sánchez, por encender mi deseo de superación y descubrir una versión más fuerte y decidida de mí mismo. Tu presencia ha sido invaluable, y te estaré eternamente agradecido.*

*A Oliver Triveño, más que un compañero de clase, un amigo invaluable y un mentor excepcional a lo largo de este extenso proceso. Su apoyo incondicional y su constante motivación me impulsaron a seguir adelante, incluso en los momentos más desafiantes. De su dedicación, inteligencia, pasión por el aprendizaje y capacidad para enfrentar los retos, he aprendido mucho. Por todo ello, te estaré eternamente agradecido. Gracias por todo.*

*A Ronaldo Barrios, Jeannette Rodriguez, Ananger Salazar, Katherine Tovar, Adrian Mota, Estefanía Calvo, Abraham Almenar, Enrique Vasquez y Jesús Ferrera, mi más sincero agradecimiento por su invaluable amistad. Su apoyo constante y su aliento me impulsaron a desafiar mis límites y a reimaginar lo posible. Gracias por acompañarme*

---

*en este camino.*

*A mi tutor, Jorge Dias, mi más sincero agradecimiento por su inmensa comprensión y paciencia. Su confianza en mí, su dedicación constante y su invaluable guía fueron fundamentales para la realización de este trabajo.*

*A mis amigos y compañeros de la EECA por darme su amistad y acompañarme en este camino.*

*A todos los profesores de la EECA, mi más profundo agradecimiento por compartir su valioso conocimiento y por su dedicación a la enseñanza. Su labor ha sido fundamental en mi formación académica y personal.*

*A todos aquellos que, de una u otra manera, estuvieron presentes en mi camino a lo largo de estos años. Su apoyo y compañía han sido un regalo invaluable. Los llevaré siempre conmigo.*

# Índice general

---

<b>Índice de figuras</b>	<b>VIII</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>X</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Planteamiento del Problema</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	3
1.1.1. Proyección de la mortalidad por causas de fallecimiento haciendo uso del método Lee Carter y el Análisis de Datos Composicionales (CoDa): . . . . .	3
1.1.2. Estudio sobre las principales causas de fallecimiento de la población masculina venezolana y construcción de Tablas de Decrecimiento Múltiple para el periodo 1996-2019: . . . . .	4
1.1.3. Medición del Riesgo por Longevidad a través de la Proyección de Tablas de Mortalidad en Portugal: . . . . .	4
1.2. Finalidad . . . . .	4
1.3. Limitaciones . . . . .	4
1.4. Objetivos . . . . .	5
1.4.1. Objetivo General . . . . .	5
1.4.2. Objetivos Específicos . . . . .	5
1.5. Cobertura . . . . .	5
1.5.1. Horizontal . . . . .	5
1.5.2. Vertical . . . . .	5
1.6. Periodo de Referencia . . . . .	6
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>7</b>
2.1. Bases Teóricas . . . . .	7
2.1.1. Demografía . . . . .	7
2.1.2. Mortalidad . . . . .	7
2.1.3. Función de Distribución . . . . .	8
2.2. Función de Supervivencia . . . . .	9
2.3. Tablas de Mortalidad . . . . .	9

---

## ÍNDICE GENERAL

2.4.	Tipos de Tablas de Mortalidad . . . . .	11
2.5.	Funciones de las Tablas de Mortalidad . . . . .	12
2.5.1.	Sobrevientes $l_x$ . . . . .	12
2.5.2.	Fallecimientos $d_x$ . . . . .	13
2.5.3.	Probabilidad de Fallecimiento $q_x$ . . . . .	13
2.5.4.	Probabilidad de Sobrevivencia $p_x$ . . . . .	14
2.5.5.	Tiempo vivido entre $x$ y $x + n$ $nL_x$ . . . . .	15
2.5.6.	Tiempo vivido entre $x$ y $w$ $T_x$ . . . . .	16
2.5.7.	Esperanza de vida a la edad $x$ ( $e_x^0$ ) . . . . .	16
2.5.8.	Tasa instantánea de mortalidad ( $\mu_x$ ) . . . . .	17
2.5.9.	Tasa Central de Mortalidad $m_x$ . . . . .	18
2.6.	Población estacionaria . . . . .	18
2.6.1.	Población total . . . . .	19
2.6.2.	Defunciones totales . . . . .	19
2.6.3.	Población estacionaria: Principales características . . . . .	19
2.7.	Clasificación de las Tablas de Mortalidad . . . . .	21
2.7.1.	Tablas Estáticas / Tablas Dinámicas . . . . .	21
2.7.2.	Tablas Completas / Tablas Abreviadas . . . . .	21
2.8.	Tablas Dinámicas de Mortalidad . . . . .	21
2.9.	Algunas leyes de mortalidad importantes . . . . .	23
2.9.1.	Ley de Moivre . . . . .	24
2.9.2.	Ley de Gompertz . . . . .	25
2.9.3.	Ley de Makeham . . . . .	25
2.10.	Método Lee-Carter y otros métodos de proyección relacionados . . . . .	26
2.10.1.	Modelo Lee-Carter (LC) . . . . .	26
2.10.1.1.	Estimación de los parámetros . . . . .	28
2.10.2.	Modelo Lee-Miller (LM) . . . . .	30
2.10.3.	Modelo Booth-Maindonald-Smith (BMS) . . . . .	31
2.10.4.	Modelo Hyndman-Ullah (HU) . . . . .	32
2.10.5.	Modelo Robust Hyndman-Ullah (HUrob) . . . . .	34
2.10.6.	Modelo Weighted Hyndman-Ullah (HUw) . . . . .	35
<b>3.</b>	<b>Marco Metódico</b>	<b>37</b>
3.1.	Fuente de Datos . . . . .	37
3.1.1.	Human Mortality Database (HMD) . . . . .	37
3.1.2.	Banco Mundial . . . . .	39
3.2.	Lenguaje utilizado en el procesamiento de los datos . . . . .	40
3.2.1.	R . . . . .	40
3.2.1.1.	Rstudio . . . . .	41
3.2.2.	Demography . . . . .	41
3.2.3.	Forecast . . . . .	41
3.3.	Procesamiento de los datos . . . . .	42
3.4.	Elaboración de los perfiles demográficos . . . . .	43

---

## ÍNDICE GENERAL

3.4.1.	Caso de estudio 1: Japón . . . . .	43
3.4.1.1.	Evolución Histórica de la Población . . . . .	44
3.4.1.2.	Piramides Poblacionales . . . . .	47
3.4.1.3.	Crecimiento Poblacional . . . . .	51
3.4.1.4.	Evolución del Índice de Envejecimiento . . . . .	52
3.4.1.5.	Esperanza de vida al nacer . . . . .	53
3.4.1.6.	Tasa de mortalidad infantil . . . . .	54
3.4.1.7.	Tasa Global de Fecundidad . . . . .	55
3.4.1.8.	Migración Neta . . . . .	56
3.4.2.	Caso de estudio 2: Chile . . . . .	57
3.4.2.1.	Evolución Histórica de la Población . . . . .	57
3.4.2.2.	Piramides Poblacionales . . . . .	59
3.4.2.3.	Crecimiento Poblacional . . . . .	60
3.4.2.4.	Evolución del Índice de Envejecimiento . . . . .	61
3.4.2.5.	Esperanza de vida al nacer . . . . .	62
3.4.2.6.	Tasa de mortalidad infantil . . . . .	63
3.4.2.7.	Tasa Global de Fecundidad . . . . .	64
3.4.2.8.	Migración Neta . . . . .	65
3.5.	Bases metodicas utilizadas en el trabajo de investigación . . . . .	66
3.5.1.	Modelo Lee-Carter . . . . .	68
3.5.1.1.	Caso Japón . . . . .	68
3.5.1.2.	Caso Chile . . . . .	70
3.5.2.	Modelo Lee-Miller . . . . .	71
3.5.2.1.	Caso Japón . . . . .	71
3.5.2.2.	Caso Chile . . . . .	72
3.5.3.	Modelo Booth-Maindonald-Smith . . . . .	72
3.5.3.1.	Caso Japón . . . . .	73
3.5.3.2.	Caso Chile . . . . .	75
<b>4.</b>	<b>Análisis de Resultados</b>	<b>77</b>
4.1.	Aplicación de los Modelos . . . . .	77
4.1.1.	Modelo Lee-Carter . . . . .	77
4.1.1.1.	Caso Japón . . . . .	78
4.1.1.2.	Caso Chile . . . . .	79
4.1.2.	Modelo Lee-Miller . . . . .	79
4.1.2.1.	Caso Japón . . . . .	80
4.1.2.2.	Caso Chile . . . . .	81
4.1.3.	Modelo Booth-Maindonald-Smith . . . . .	81
4.1.3.1.	Caso Japón . . . . .	82
4.1.3.2.	Caso Chile . . . . .	83
4.1.4.	Modelo Hyndman-Ullah . . . . .	84
4.1.4.1.	Caso Japón . . . . .	85
4.1.4.2.	Caso Chile . . . . .	86

---

## ÍNDICE GENERAL

4.2. Comparación de modelos . . . . .	87
4.2.1. Comparación de modelos - Japón . . . . .	88
4.2.2. Comparación de modelos - Chile . . . . .	88
4.3. Tabla de Mortalidad Proyectadas . . . . .	89
4.3.1. Tabla de Mortalidad Japón 2073 . . . . .	90
4.3.2. Tabla de Mortalidad Chile 2070 . . . . .	94
4.4. Comparación de Tasas Centrales de Mortalidad . . . . .	98
4.4.1. Tasa Central de Mortalidad Japón (2023 vs 2073) . . . . .	98
4.4.2. Tasa Central de Mortalidad Chile (2020 vs 2070) . . . . .	99
4.4.3. Tasa Central de Mortalidad: Chile 2070 vs Japón 2023 . . . . .	100
<b>5. Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>101</b>
<b>Lista de Referencias</b>	<b>103</b>
<b>Anexos</b>	<b>105</b>

# Índice de figuras

---

3.1. Sitio web de la Human Mortality Database . . . . .	38
3.2. Serie Histórica población de Japón 1947 - 2023 . . . . .	44
3.3. Pirámide Poblacional de Japón, Año 1947 . . . . .	48
3.4. Pirámide Poblacional de Japón, Año 1972 . . . . .	48
3.5. Pirámide Poblacional de Japón, Año 2010 . . . . .	49
3.6. Pirámide Poblacional de Japón, Año 2023 . . . . .	49
3.7. Evolución de la Tasa de Crecimiento Poblacional en Japón desde 1961 a 2023 . . . . .	51
3.8. Evolución del índice de envejecimiento en Japón . . . . .	52
3.9. Evolución de la Esperanza de vida al nacer en Japón desde 1960 a 2022 . . . . .	53
3.10. Evolución de la Tasa de Mortalidad Infantil por cada 1000 nacidos en Japón desde 1960 a 2022 . . . . .	54
3.11. Evolución de la Tasa Global de Fecundidad en Japón desde 1960 a 2022 . . . . .	55
3.12. Evolución de la Migración Neta en Japón desde 1960 a 2022 . . . . .	56
3.13. Serie Histórica población de Chile 1992 - 2020 . . . . .	57
3.14. Serie Histórica población de Chile 1960 - 2023 . . . . .	58
3.15. Pirámide Poblacional de Chile, Año 1992 . . . . .	59
3.16. Pirámide Poblacional de Chile, Año 2020 . . . . .	59
3.17. Evolución de la Tasa de Crecimiento Poblacional en Chile desde 1961 a 2023 . . . . .	60
3.18. Evolución del índice de envejecimiento en Chile . . . . .	61
3.19. Evolución de la Esperanza de vida al nacer en Chile desde 1960 a 2022 . . . . .	62
3.20. Evolución de la Tasa de Mortalidad Infantil por cada 1000 nacidos en Chile desde 1960 a 2022 . . . . .	63
3.21. Evolución de la Tasa Global de Fecundidad en Chile desde 1960 a 2022 . . . . .	64
3.22. Evolución de la Migración Neta en Chile desde 1960 a 2022 . . . . .	65
3.23. Japón. Demogdata según la HDM desde el año 1947 a 2023 . . . . .	66
3.24. Japón. Demogdata según la HDM desde el año 1992 a 2020 . . . . .	67
3.25. Tasa Central de Mortalidad de Japón 1947 a 2023 . . . . .	67
3.26. Tasa Central de Mortalidad de Japón 1992 a 2020 . . . . .	68
3.27. Parámetros según LC $\alpha_x$ , $\beta_x$ y $\kappa_t$ para la población japonesa . . . . .	68
3.28. Parámetros según LC $\alpha_x$ , $\beta_x$ y $\kappa_t$ para la población chilena . . . . .	70

---

## ÍNDICE DE FIGURAS

3.29. Parámetros Según LM $\alpha_x$ , $\beta_x$ y $\kappa_t$ para la población japonesa . . . . .	71
3.30. Parámetros Según LM $\alpha_x$ , $\beta_x$ y $\kappa_t$ para la población chilena . . . . .	72
3.31. Desviaciones Medias según BMS población japonesa . . . . .	73
3.32. Variación $\kappa_t$ BMS población japonesa . . . . .	74
3.33. Desviaciones Medias según BMS población chilena . . . . .	75
3.34. Variación $\kappa_t$ BMS población chile . . . . .	76
4.1. Proyección bajo el modelo LC a 50 años de $\kappa_t$ para la población japonesa	78
4.2. Proyección bajo el modelo LC a 50 años de $\kappa_t$ para la población chilena	79
4.3. Proyección bajo el modelo LM a 50 años de $\kappa_t$ para la población japonesa	80
4.4. Proyección bajo el modelo LM a 50 años de $\kappa_t$ para la población chilena	81
4.5. Parámetros $\alpha_x$ , $\beta_x$ y $\kappa_x$ según BMS para la población japonesa . . . . .	82
4.6. Proyección bajo el modelo BMS a 50 años para la población japonesa . .	82
4.7. Parámetros $\alpha_x$ , $\beta_x$ y $\kappa_x$ según BMS para la población chilena . . . . .	83
4.8. Proyección bajo el modelo BMS a 50 años para la población chilena . .	84
4.9. Proyección bajo el modelo HU a 50 años para la población japonesa . .	85
4.10. Proyección bajo el modelo HU a 50 años para la población chilena . .	86
4.11. Tasa Central de Mortalidad Japón (2023 vs 2073) . . . . .	98
4.12. Tasa Central de Mortalidad Chile (2020 vs 2070) . . . . .	99
4.13. Tasa Central de Mortalidad: Chile 2070 vs Japón 2023 . . . . .	100

# Índice de tablas

---

2.1. Extracto de la Tabla CSO 80 de Hombres . . . . .	11
2.2. Probabilidades de muerte a un año en un contexto dinámico . . . . .	22
2.3. Ley de Moivre . . . . .	25
3.1. Crecimiento del PIB (% anual) de Japón. Fuente: Banco Mundial. . . . .	46
4.1. Valores de AIC para Japón . . . . .	88
4.2. Valores de BIC para Japón . . . . .	88
4.3. Valores de AIC para Chile . . . . .	89
4.4. Valores de BIC para Chile . . . . .	89
4.5. Tabla de Mortalidad Japón Proyectada por el Modelo LM para el año 2073 . . . . .	90
4.6. Tabla de Mortalidad Chile Proyectada por el Modelo LM para el año 2070	94
5.1. Tabla de Mortalidad Japón año 2023 . . . . .	105
5.2. Tabla de Mortalidad Chile año 2020 . . . . .	109

# Introducción

---

El envejecimiento poblacional se ha convertido en uno de los desafíos más apremiantes a nivel internacional, como se refleja en el Informe Mundial Social 2023 de la ONU, titulado “Que nadie quede atrás en un mundo que envejece” (“World Social Report 2023: Leaving No One Behind In An Ageing World”). Este informe estima que el número de personas de 65 años o más en todo el mundo se duplicará durante las próximas tres décadas, alcanzando los 1.600 millones en 2050, cuando las personas mayores representarán más del 16 % de la población mundial. Japón, catalogado por la ONU como la población más envejecida del mundo, representa un caso extremo, pero muchas otras naciones muestran tendencias similares. Por ejemplo, se estima que Corea del Sur superará a Japón con cerca del 40 % de personas de 65 años o más para el año 2050.

En América Latina, aunque los países están todavía lejos de alcanzar el nivel de envejecimiento de Japón, deben hacer las previsiones necesarias. La Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL) menciona en su informe “Envejecimiento en América Latina y el Caribe: inclusión y derechos de las personas mayores” del año 2022 que el envejecimiento poblacional es uno de los principales fenómenos demográficos en la región. En 2022, vivían 88,6 millones de personas mayores de 60 años en América Latina y el Caribe, representando el 13,4 % de la población total, proporción que llegará al 16,5 % en 2030. El rápido proceso de envejecimiento llevará a que, en el año 2050, las personas mayores alcancen el 25,1 % (193 millones) de la población total, es decir, habrá 2,1 veces más personas mayores que en 2022. Además, América Latina y el Caribe pasó de ser una sociedad joven a ser una sociedad adulta joven en 2021, y se espera que en 2053 pase a ser una sociedad envejecida.

Chile es un ejemplo de este fenómeno en América Latina. Según el documento “Envejecimiento en Chile, evolución y características de las personas mayores y desafíos demográficos para la población” publicado por el INE (Instituto Nacional de Estadísticas) de Chile en 2022, el envejecimiento de la población en Chile ha sido un proceso acelerado, impulsado por la disminución de las tasas de fecundidad y mortalidad, y el aumento de la esperanza de vida. Desde el año 2000, la tasa global de fecundidad ha estado por debajo del nivel de reemplazo generacional, mientras que la esperanza de vida ha aumentado significativamente, alcanzando los 81 años en 2021. Esto ha llevado a un incremento en la proporción de personas mayores de 60 años, que pasó del 9,5 % en 1992 al 17,6 % en 2021. Además, la población de la cuarta edad (80 años y más) ha crecido, representando el 16,4 % de las personas mayores en 2021. Para el año 2050, se proyecta que las personas mayores representarán casi un tercio de la población total del país. En este contexto, Chile y Japón presentan características demográficas contrastantes: Chile está en un proceso de envejecimiento acelerado, mientras que Japón ya tiene una población envejecida con una de las esperanzas de vida más altas del mundo. La precisión en la proyección de la mortalidad es un aspecto crítico para diversas aplicaciones actuariales, tales como la planifi-

## ÍNDICE DE TABLAS

cación de pensiones, la tarificación de seguros de vida y la gestión de riesgos financieros. A lo largo de las últimas décadas, se han desarrollado múltiples métodos actuariales para abordar este desafío, cada uno con sus propias fortalezas y limitaciones. Entre estos métodos se encuentran los aplicados a la estimación y proyección de la mortalidad de la población, los cuales se han diversificado con el transcurrir de los años, permitiendo su posterior comparación y mejor selección.

El método de Lee-Carter (LC) es uno de los más ampliamente utilizados debido a su simplicidad y eficacia en la captura de tendencias históricas de la mortalidad. Sin embargo, su desempeño puede verse limitado en poblaciones con alta variabilidad o cuando se presentan datos ruidosos. Por otro lado, métodos más recientes como el de Hyndman-Ullah (HU) han demostrado ser más flexibles y precisos, especialmente en contextos donde la variabilidad de los datos es significativa.

A pesar de la disponibilidad de estos diversos métodos, existe una falta de consenso sobre cuál es el más adecuado para diferentes contextos poblacionales. En particular, la capacidad de estos métodos para proyectar la mortalidad en países con distintos perfiles demográficos, como Chile y Japón, no ha sido plenamente explorada.

El problema central que este trabajo busca abordar es la necesidad de realizar un análisis comparativo exhaustivo de varios métodos actuariales de proyección de mortalidad para determinar su precisión y aplicabilidad en diferentes contextos demográficos. Este análisis permitirá identificar las fortalezas y debilidades de cada método y ofrecerá recomendaciones sobre su uso en la práctica actuarial de acuerdo con perfiles demográficos determinados.

---

## Capítulo 1

---

# Planteamiento del Problema

---

El envejecimiento poblacional se ha convertido en uno de los desafíos más apremiantes a nivel internacional, como se refleja en el Informe Mundial Social 2023 de la ONU, titulado “Que nadie quede atrás en un mundo que envejece” (“World Social Report 2023: Leaving No One Behind In An Ageing World”). El informe estima que el número de personas de 65 años o más en todo el mundo se duplicará durante las próximas tres décadas, alcanzando los 1.600 millones en 2050, cuando las personas mayores representarán más del 16 % de la población mundial. La ONU cataloga a Japón como la población más envejecida del mundo; sin embargo, siendo un caso extremo, muchas otras naciones muestran tendencias similares. Por ejemplo, se estima que Corea del Sur superará a Japón con cerca del 40 % de personas de 65 años o más para el año 2050.

Jorge Bravo, uno de los autores del referido reporte “World Social Report 2023: Leaving No One Behind In An Ageing World” y experto de la División de Población del Departamento de Asuntos Económicos y Sociales de Naciones Unidas (DESA), señala que, si bien los países de América Latina están todavía lejos de alcanzar el nivel de envejecimiento de Japón, deben hacer las previsiones del caso.

La Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL) menciona en el informe “Envejecimiento en América Latina y el Caribe: inclusión y derechos de las personas mayores” del año 2022 que el envejecimiento poblacional es uno de los principales fenómenos demográficos en América Latina y el Caribe. En 2022, vivían 88,6 millones de personas mayores de 60 años en la región, quienes representaban el 13,4 % de la población total, proporción que llegará al 16,5 % en 2030. El rápido proceso de envejecimiento que experimenta la región llevará a que, en el año 2050 las personas mayores alcancen el 25,1 % (193 millones) de la población total, es decir, habrá 2,1 veces más personas mayores que en 2022. Además, América Latina y el Caribe pasó de ser una sociedad joven a ser una sociedad adulta joven en 2021, y se espera que en 2053 pase a ser una sociedad envejecida: el grupo de personas de 60 años y más superará en volumen a todos los demás grupos etarios.

---

En el caso latinoamericano, Chile es un ejemplo de este fenómeno. En el documento “Envejecimiento en Chile, evolución y características de las personas mayores y desafíos demográficos para la población” publicado por el INE (Instituto Nacional de Estadísticas) de Chile para el año 2022, se menciona que el envejecimiento de la población en Chile ha sido un proceso acelerado, impulsado por la disminución de las tasas de fecundidad y mortalidad, y el aumento de la esperanza de vida. Desde el año 2000, la tasa global de fecundidad ha estado por debajo del nivel de reemplazo generacional, mientras que la esperanza de vida ha aumentado significativamente, alcanzando los 81 años en 2021. Esto ha llevado a un incremento en la proporción de personas mayores de 60 años, que pasó del 9,5 % en 1992 al 17,6 % en 2021. Además, la población de la cuarta edad (80 años y más) ha crecido, representando el 16,4 % de las personas mayores en 2021. Para el año 2050, se proyecta que las personas mayores representarán casi un tercio de la población total del país.

En este contexto, tanto Japón como Chile presentan características demográficas de elevado interés desde la perspectiva actuarial. Chile está en un proceso de envejecimiento acelerado, mientras que Japón ya tiene una población envejecida con unas de las esperanzas de vida más altas del mundo. La precisión en la proyección de la mortalidad es un aspecto crítico para diversas aplicaciones actuariales, tales como la planificación de pensiones, la tarificación de seguros de vida y la gestión de riesgos financieros. A lo largo de las últimas décadas, se han desarrollado múltiples métodos actuariales para abordar este desafío, cada uno con sus propias fortalezas y limitaciones. Entre estos métodos se encuentran los aplicados a la estimación y proyección de la mortalidad de la población, los cuales se han diversificado con transcurrir de los años, permitiendo su posterior comparación y mejor selección.

El método de Lee-Carter (LC) es uno de los más ampliamente utilizados debido a su simplicidad y eficacia en la captura de tendencias históricas de la mortalidad. Sin embargo, su desempeño puede verse limitado en poblaciones con alta variabilidad o cuando se presentan datos atípicos. Por otro lado, métodos más recientes como el de Hyndman-Ullah (HU) y sus variantes (Robust HU y Weighted HU) han demostrado ser más flexibles y precisos, especialmente en contextos donde la variabilidad de los datos es significativa.

A pesar de la disponibilidad de estos diversos métodos, existe una falta de consenso sobre cuál es el más adecuado para diferentes contextos poblacionales. En particular, la capacidad de estos métodos para proyectar la mortalidad en países con distintos perfiles demográficos, como Chile y Japón, no ha sido plenamente explorada.

El problema central que este trabajo busca abordar la necesidad de realizar un análisis comparativo exhaustivo de varios métodos actuariales de proyección de mortalidad para determinar su precisión y aplicabilidad en diferentes contextos demográficos. Este análisis permitirá identificar las fortalezas y debilidades de cada método y ofrecerá reco-

mendaciones sobre su uso en la práctica actuaria de acuerdo con perfiles demográficos determinados.

Debido a esto, se plantean las siguientes preguntas de investigación:

- 1.** ¿Cuáles son las principales diferencias entre los métodos de proyección de mortalidad seleccionados?
- 2.** ¿Cómo varía la precisión de estos métodos en la proyección de la mortalidad para las poblaciones con características como las de Chile y Japón?
- 3.** ¿Qué método se ajusta mejor a determinados perfiles demográficos?

## 1.1. Antecedentes

A continuación, se describen algunos de los trabajos de referencia que se han considerado para esta investigación, destacando que en su mayoría son TFPG desarrollados en la Escuela de Estadística y Ciencias Actuariales de la Universidad Central de Venezuela:

### 1.1.1. Proyección de la mortalidad por causas de fallecimiento haciendo uso del método Lee Carter y el Análisis de Datos Composicionales (CoDa):

Este trabajo de investigación realizado por Iliria Herrera (2018) consiste en el estudio del comportamiento de la mortalidad en Venezuela por causas de fallecimientos agrupadas por edad y sexo, y su proyección en el tiempo, con base a los fallecimientos observados en los años 1996-2013 y la información censal publicada por el Instituto Nacional de Estadística para los años 1990, 2000 y 2011. Posteriormente realiza una proyección de la mortalidad hasta el año 2018, aplicando los métodos Lee Carter y Datos Compositacionales (CoDa).

**1.1.2. Estudio sobre las principales causas de fallecimiento de la población masculina venezolana y construcción de Tablas de Decrecimiento Múltiple para el periodo 1996-2019:**

Este trabajo de investigación realizado por Kelvin Guedez (2023) estudia el comportamiento de la mortalidad en la población venezolana a través de la construcción de modelos de decrecimientos múltiple según causas de fallecimiento y utilizando como insumo los datos publicados por el Ministerio del Poder Popular para la Salud (MPPS) durante el período 1996-2014 y la Organización Mundial de la Salud (OMS) para el período 2000-2019.

**1.1.3. Medición del Riesgo por Longevidad a través de la Proyección de Tablas de Mortalidad en Portugal:**

Este trabajo de investigación realizado por Oliver Triveño (2024) estudia el riesgo por longevidad y la mitigación de este a través del análisis actuarial de la proyección por distintas metodologías de las tablas de mortalidad portuguesas, considerando a Portugal como un país expuesto a las consecuencias de este riesgo.

## **1.2. Finalidad**

Este trabajo de investigación busca realizar un análisis comparativo de los distintos métodos de proyección de mortalidad. Para ello, se hará uso de los datos demográficos de la población japonesa (país con la mayor proporción de población envejecida en el mundo) y de la población chilena (país latinoamericano que presenta un rápido envejecimiento). Ambos casos de estudio permitirán identificar métodos de proyección de la mortalidad ajustados a determinados perfiles demográficos en situación de envejecimiento.

## **1.3. Limitaciones**

Este trabajo de investigación presenta como limitación el poco acceso a los datos e información pública reciente en nuestro país, Venezuela. Por esta razón, la investigación se basa en los datos de las experiencias poblacionales y demográficas de Japón y Chile.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo General

- Analizar diversos métodos de proyección de Mortalidad de acuerdo con el perfil demográfico de países seleccionados en situación de envejecimiento poblacional

### 1.4.2. Objetivos Específicos

- Describir a través de los datos e información disponible, la situación poblacional de los países objeto de estudio.
- Investigar los métodos de estimación y proyección de mortalidad utilizados en los estudios de índole actuarial.
- Aplicar sobre los países objeto de estudio los métodos de estimación y proyección de mortalidad seleccionados.
- Determinar a través del análisis y comparación de resultados obtenidos los métodos que mejor se ajustan a la realidad de los países en situación de envejecimiento poblacional.

## 1.5. Cobertura

### 1.5.1. Horizontal

Esta investigación será elaborada con los datos de fallecimientos observados en la población de Japón y Chile.

### 1.5.2. Vertical

Los datos e información señalados anteriormente consideran las siguientes variables:

- Población Total
- Composición por sexo y grupos de edad
- Fallecimientos

- Esperanza de vida al nacer
- Tasa de mortalidad infantil
- Tasa de Crecimiento poblacional
- Tasa Global de fecundidad
- Migración Neta

## 1.6. Periodo de Referencia

El análisis comparativo se desarrollará haciendo uso de los datos extraídos de la Human Mortality Database (HMD) para Japón (desde el año 1947 hasta el año 2023) y Chile (desde el año 1992 hasta el año 2020).

---

## Capítulo 2

# Marco Teórico

---

### 2.1. Bases Teóricas

En esta sección se presentaran los desarrollos teóricos necesarios para la proyección de la Mortalidad para el caso aplicado a los países mencionados en el capítulo anterior.

#### 2.1.1. Demografía

Según Jacques Vallin (1994) "La demografía no es, en esencia, otra cosa que el estudio estadístico de las poblaciones humanas. Para describir, analizar y comprender los mecanismos que rigen la composición y la evolución de una población."

Lo antes mencionado incluye el análisis de variables demográficas básicas como el crecimiento poblacional, la mortalidad, la fecundidad y la migración. La CEPAL también indica que esta importante disciplina se enfoca en la transición demográfica, las proyecciones demográficas y las políticas de población.

#### 2.1.2. Mortalidad

Edmund Halley (1695-1742), famoso creador de una de las primeras tablas de vida basadas en datos empíricos, usando registros de mortalidad de la ciudad de Breslau, definió la mortalidad como la medida de la frecuencia de defunciones en una población, lo que permitió calcular las probabilidades de supervivencia y los riesgos asociados con la muerte.

### 2.1.3. Función de Distribución

En los fenómenos biométricos, al igual que en muchos otros, la consideración de modelos que impliquen o supongan continuidad suele ofrecer una mayor riqueza en las prestaciones de las herramientas analíticas, por lo que es muy recomendable su uso. Además, la magnitud fundamental asociada a la biometría actuaria es el tiempo, cuya naturaleza se considera intrínsecamente continua en la mayoría de los contextos científicos. Por lo tanto, la variable biométrica fundamental, la edad de fallecimiento, puede considerarse una variable aleatoria continua que toma valores reales positivos.

Designaremos  $X$  a la variable aleatoria continua a la “edad de fallecimiento” por lo que  $X \in [0, \infty)$ . Cuando se considera que la vida humana no puede sobrepasar una cierta edad máxima  $w$ , se expresa de la siguiente manera  $[0, w)$ .

Asimismo, a partir de  $X$  definiremos la variable  $T_x$  que no es más que la *vida residual* a la edad  $x$  que denota los años que le restan por vivir a una persona que ha cumplido dicha edad. Por lo tanto, si  $X > x$  entonces:

$$T_x = X - x \quad (2.1)$$

En consecuencia  $T_x$  está definida para los valores en el intervalo  $[0, w - x)$ .

La función de distribución  $F$  de la variable aleatoria  $X$  correspondiente a la edad de fallecimiento, para un número real  $x$ , viene dada por:

$$F_x = P(X \leq x) \quad (2.2)$$

que indica la probabilidad de que una persona fallezca antes de alcanzar la edad  $x$ . Por otro lado, como  $F$  es una función de distribución y la edad de fallecimiento es no negativa, esta gozará de las propiedades habituales de toda función de distribución:

1.  $F_0 = 0$
2.  $F_\infty = 1$  o  $F_w = 1$
3.  $F$  es una función no decreciente y continua por la derecha.

Por otra parte, la función de distribución de la variable vida residual a la edad  $x$ ,  $F_T(x)$ , a la que para efectos prácticos denotaremos por  $G_x$ , por su definición, es la misma que  $X - x$  condicionado por  $X > x$ , de modo que:

Si:

$$G_x(t) = P[T_x \leq t]$$

Entonces:

$$G_x(t) = P[X - x \leq t | X > x]$$

Finalmente tenemos:

$$G_x(t) = P[X \leq x + t | X > x] \quad (2.3)$$

y por la definición de probabilidad condicional se deduce que:

$$G_x(t) = \frac{F_{x+t} - F_x}{1 - F_x} \quad (2.4)$$

## 2.2. Función de Supervivencia

Según Wallace, Jordan, “Cuando se observa el desarrollo de la mortalidad a lo largo de la vida humana se ve con normalidad patrones familiares. La eliminación de vidas individuales por muerte es alta en los primeros momentos de nacimiento, luego disminuye en la infancia, para después ir creciendo suavemente desde la adolescencia hasta la edad adulta para luego acelerar la cantidad de eliminaciones en las edades mayores. Si queremos realizar una medición numérica a lo largo de las edades de estos efectos, se debe definir una función de probabilidad.”

Ahora bien, a partir de la función de distribución  $F_x$ , se define la función de supervivencia  $S_x$  como el complemento de esta, es decir, la probabilidad de alcanzar cierta edad  $x$ , y por lo tanto, que la edad de la muerte sea superior a  $x$ :

$$S_x = P(X > x) = 1 - F_x \quad (2.5)$$

Esta función tiene las siguientes propiedades:

1.  $S_0 = 1$
2.  $S_\infty = 0$  o  $S_w = 0$
3.  $S$  es una función no creciente y continua por la derecha.

## 2.3. Tablas de Mortalidad

Según Antonio Ortega (1987) la tabla de mortalidad “Es un instrumento o esquema teórico que permite medir las probabilidades de vida y de muerte de una población, en función de la edad.”

Según Bowers, Newton y otros: “*las Tablas de Mortalidad usualmente basan su contenido en tabulaciones individuales por edad, donde se muestran las funciones básicas como lo son  $q_x$ ,  $l_x$ ,  $d_x$  y posiblemente, funciones derivadas adicionales*”

Este instrumento provee la mas completa descripción estadística de la mortalidad, constituye la base del modelo de población estacionaria y su técnica es muy usada por los demógrafos, actuarios y otros investigadores en una gran variedad de problemas.

A continuación se indican cinco características principales de la tabla de mortalidad, en su utilización dentro del campo demográfico.

1. Permite describir el comportamiento de la mortalidad por edades.
2. Permite obtener probabilidades y otras medidas convencionales de la mortalidad.
3. Proporciona una medida resumen de la mortalidad, la esperanza de vida al nacer, que es el mejor indicador del nivel general de mortalidad de una población.
4. Puede ser asimilada a un modelo teórico de población, llamado población estacionaria.
5. Permite efectuar diversas aplicaciones en una gran variedad de problemas, entre los cuales puede mencionarse, la estimación del nivel y la tendencia de la mortalidad, la evaluación de programas de seguridad social, los estudios de fecundidad, migración, estructura y crecimiento poblacional.

En la tabla 2.1 podemos observar un ejemplo de Tabla de Mortalidad, la cual evidentemente es un arreglo rectangular constituido por funciones en forma de columnas.

$x$	$q_x$	$p_x$	$l_x$	$d_x$
0	0,00418	0,99582	100.000	418
1	0,00107	0,99893	99.582	107
2	0,00099	0,99901	99.475	98
3	0,00098	0,99902	99.377	97
4	0,00095	0,99905	99.280	94
5	0,00090	0,99910	99.185	89
6	0,00086	0,99914	99.096	85
7	0,00080	0,99920	99.011	79
8	0,00076	0,99924	98.932	75
9	0,00074	0,99926	98.856	73
10	0,00073	0,99927	98.783	72
11	0,00077	0,99923	98.711	76
12	0,00085	0,99915	98.635	84
13	0,00099	0,99901	98.551	98
14	0,00115	0,99885	98.454	113
15	0,00133	0,99867	98.340	131

**Tabla 2.1:** Extracto de la Tabla CSO 80 de Hombres

## 2.4. Tipos de Tablas de Mortalidad

Entre los diversos tipos de tablas disponibles, se mencionarán aquí dos clasificaciones principales:

- De acuerdo al período de tiempo o de referencia que comprenden
  1. **Tablas por Generaciones:** Son aquellas en las cuales se sigue una generación o cohorte de personas a lo largo del tiempo, determinando a cada grupo de sobrevivientes, hasta que se extingue. Estas tablas casi no se utilizan, ya que para elaborarlas se hace necesario seguir la generación por mucho tiempo, hasta que fallece el último sobreviviente, proporcionando además

una medición referida a condiciones muy diferentes de mortalidad. Son útiles para ciertos propósitos específicos, como por ejemplo, para estudiar las condiciones de mortalidad de personas de más de 60 años.

2. **Tablas de Contemporáneos:** Son las que se basan en la experiencia de mortalidad observada durante un corto periodo de tiempo (usualmente un año o un promedio de dos o tres años), por todas las generaciones de una población real. En este caso, se forma una cohorte hipotética de personas, las cuales se someten a las condiciones de mortalidad de la población, en el periodo de tiempo considerado. En general, cuando se habla de tablas de mortalidad, se está haciendo referencia a este último tipo de tablas.
  - Según la extensión del intervalo de edades en que los datos son presentados.
    1. **Tablas Completas:** Son aquéllas en que las diferentes funciones se elaboran para cada año de edad. Esto es una simple convención, ya que una tabla donde se presenten las funciones por meses sería más completa que la anterior.
    2. **Tablas Abreviadas:** Son aquéllas en que las diferentes funciones se calculan por grupos de edades, corrientemente grupos quinquenales. No obstante, dentro del grupo de 0 a 5 años de edad de la mayoría de las tablas abreviadas, se incluyen las diversas funciones por edades simples, como en las tablas completas, ya que dentro de dicho intervalo la mortalidad varía mucho con la edad y esta información resulta de gran utilidad para el estudio de las condiciones de vida de la población infantil y juvenil, para la planificación de la salud, y otros propósitos.

## 2.5. Funciones de las Tablas de Mortalidad

Las tablas de mortalidad incluyen una variedad de funciones que se utilizan frecuentemente en estudios demográficos y actuariales. A continuación, se presentan algunas funciones principales que conforman una tabla de mortalidad.

### 2.5.1. Sobrevientes $l_x$

Representa el número de sobrevivientes que, de una generación inicial de  $l_0$  nacimientos alcanzan con vida la edad exacta  $x$ , y se representa por  $l_x$ . El valor inicial  $l_0$  se conoce como la raíz de la tabla.

Se acostumbra fijar como raíz de la tabla una constante arbitraria como 100.000 o la unidad (1), se denomina  $w$  (omega) al final de la tabla o edad máxima de la tabla, edad en la cual el número de sobrevivientes es cero, por lo general este toma el valor

de 100 años.

### 2.5.2. Fallecimientos $d_x$

Representa el número de fallecimientos ocurridos a una generación inicial de  $l_0$  nacimientos, entre las edades exactas  $x$  y  $x + 1$ . Se denomina también defunciones de la tabla, y se expresa por:

$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad (2.6)$$

Para calcular las defunciones para cualquier intervalo  $n$  se procede a usar la siguiente expresión:

$$nd_x = l_x - l_{x+n} \quad (2.7)$$

La cual representa el número de fallecimientos ocurridos entre los componentes del grupo  $l_x$  entre las edades exactas  $x$  y  $x + n$ .

De 2.6 y 2.7 se deduce que la suma de todas las defunciones, desde la edad  $x$  hasta la edad  $w$ , da la función  $l_x$ , por lo que se obtiene:

$$l_x = \sum_{y=x}^{w-1} d_y = d_x + d_{x+1} + \cdots + d_{w-1} \quad (2.8)$$

### 2.5.3. Probabilidad de Fallecimiento $q_x$

Representa la probabilidad que tiene una persona de edad exacta  $x$  de fallecer dentro del año que sigue al momento de la muerte:

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} \quad (2.9)$$

Si la probabilidad se calcula para un intervalo de edades de  $n$  años la formula sería:

$$nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{nd_x}{l_x} \quad (2.10)$$

Para el caso particular de  $x = 0$  y  $n = 1$ , que corresponde a la probabilidad de fallecimiento en el primer año de vida.

$$q_0 = \frac{l_0 - l_1}{l_0} = \frac{d_0}{l_0} \quad (2.11)$$

Entonces, si conocemos los valores de  $nq_x$  para cada edad o cada grupo de edad, y la raíz arbitraria de  $l_0$ , es posible obtener los valores  $l_x$  y  $nd_x$ , a través de las siguientes relaciones:

$$l_x *_n q_x = d_x \quad (2.12)$$

$$l_x -_n d_x = l_{x+n} \quad (2.13)$$

De igual manera para el caso de la mortalidad infantil tenemos las siguientes expresiones:

$$l_0 * q_0 = d_0 \quad (2.14)$$

$$l_0 - d_0 = l_1 \quad (2.15)$$

Entonces, dado que  $nq_x$  indica la probabilidad de que una persona de edad  $x$  fallezca antes de cumplir  $x + n$  años, tenemos que:

$$nq_x = P[x < X \leq x + n | X > x] \quad (2.16)$$

Recurriendo al hecho de que  $nq_x$  es igual a la distribución de la vida residual a la edad  $x$  2.3,  $G_x$ , mediante 2.4, tenemos que:

$$nq_x = G_x(n) = \frac{F_{x+n} - F_x}{1 - F_x} \quad (2.17)$$

para  $n \in (0, w - x)$

Notese que cuando  $x = 0$ , se obtiene la probabilidad de muerte de un recién nacido.

$$nq_0 = G_x(n) = F_n = P[X < n] \quad (2.18)$$

#### 2.5.4. Probabilidad de Sobrevivencia $p_x$

Representa la probabilidad que tiene una persona de edad exacta  $x$  de sobrevivir un año:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \quad (2.19)$$

Motivado a que las personas tienen probabilidad de sobrevivir o fallecer podemos representar esta contingencia mediante la siguiente expresión:

$$p_x + q_x = 1 \quad (2.20)$$

Por lo que podemos ahora calcular  $p_x$  y  $q_x$  en función de su complemento, tal como se muestra a continuación:

$$p_x = 1 - q_x \quad (2.21)$$

$$q_x = 1 - p_x \quad (2.22)$$

Para intervalos de  $n$  años tenemos:

$$np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \quad (2.23)$$

De igual forma la anterior expresión puede representarse de la siguiente manera:

$$np_x = 1 - {}_n q_x = \frac{1 - F_{x+n}}{1 - F_x} \quad (2.24)$$

Para  $n \in (0, w - x)$

Para calcular la probabilidad de supervivencia de un recién nacido, asumimos que  $x = 0$ , por lo que tenemos:

$$np_0 = 1 - {}_n q_0 = P[X > n] \quad (2.25)$$

### 2.5.5. Tiempo vivido entre $x$ y $x + n$ ${}_n L_x$

Representa el número de años vividos por la generación  $l_0$  entre las edades  $x$  y  $x + n$ .

$${}_n L_x = \int_x^{x+n} l_y dy \quad (2.26)$$

Este tiempo también puede interpretarse como el “tiempo vivido por las personas que sobreviven al final del intervalo y por aquellas que mueren dentro de él”. Estableciendo la siguiente igualdad:

$${}_n L_x = n \cdot l_{x+n} + {}_n k_x \cdot {}_n d_x \quad (2.27)$$

Donde:

$n$  = Amplitud del intervalo.

$l_{x+n}$  = Supervivientes a la edad  $x + n$ .

$nd_x$  = Fallecidos entre  $x$  y  $x + n$ .

$nk_x$  = Tiempo medio vivido en el intervalo por cada una de las personas que fallecen.

### 2.5.6. Tiempo vivido entre $x$ y $w$ $T_x$

Representa el número total de años vividos por la generación de  $l_0$  nacimientos entre las edades  $x$  y  $w$ .

$$T_x = \int_x^w l_y dy \quad (2.28)$$

Descomponiendo los intervalos de edad en edades individuales, tenemos:

$$T_x = \int_x^{x+1} l_y dy + \int_{x+1}^{x+2} l_y dy + \dots = L_x + L_{x+1} + \dots = \sum_{y=x}^{w-1} L_y \quad (2.29)$$

### 2.5.7. Esperanza de vida a la edad $x$ ( $e_x^0$ )

Representa el número de años que en promedio vive una persona desde la edad  $x$  en adelante, hasta el final de la vida. La esperanza de vida a la edad  $x$  suele denominarse también “vida media a la edad  $x$ ”.

$$e_x^0 = \frac{T_x}{l_x} \quad (2.30)$$

Asimismo, si tenemos que  $x = 0$ , estamos en presencia de la esperanza de vida al nacer, que es una medida resumen de la mortalidad en general que no se ve afectada por la estructura poblacional.

Seguidamente, tenemos también el número total de años que en promedio vive una persona de edad  $x$ , desde el nacimiento hasta el final de la vida, y este viene representado por:

$$x + e_x^0 \quad (2.31)$$

La esperanza de vida al nacer, o vida media, es el mejor indicador del nivel general de mortalidad de una población, ya que no está afectada por la composición de edades, permitiendo comparaciones directas entre diferentes poblaciones. A veces, se utilizan estimaciones de esperanza de vida a las edades de 1 o 5 años para aislar el impacto

de la mortalidad infantil y corregir errores en la información de las primeras edades. También se emplea la esperanza de vida a los 15 años, que marca el inicio de la vida activa y reproductiva, y a los 65 años, que mide la mortalidad en el periodo de retiro, donde se concentra la mayoría de las muertes en poblaciones con mortalidad moderada o baja

### 2.5.8. Tasa instantánea de mortalidad ( $\mu_x$ )

La tasa instantánea de mortalidad o tambien llamada fuerza de mortalidad, es una medida de la fuerza o intensidad de la mortalidad a la edad  $x$ , para los individuos que han alcanzado dicha edad. Esta viene representada por:

$$\mu_x = \lim_{\Delta_t \rightarrow 0} \frac{\Delta_t \cdot q_x}{\Delta_t} \quad (2.32)$$

La Tasa instantánea de mortalidad se puede expresar en función de  $nq_x$ , para ello si en 2.17 se escoge  $t = \Delta_t$ , se tiene que:

$$\Delta_t q_x = \frac{F_{x+\Delta_t} - F_x}{1 - F_x} \quad (2.33)$$

Al dividir entre  $\Delta_t$  tenemos:

$$\frac{\Delta_t q_x}{\Delta_t} = \frac{1}{1 - F_x} \cdot \frac{F_{x+\Delta_t} - F_x}{\Delta_t} \quad (2.34)$$

En esta expresión,  $F'_x = f_x$  es la función de densidad de la variable aleatoria continua de la edad a la muerte. Por lo tanto, la Tasa instantánea de mortalidad puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\mu_x = \frac{f_x}{1 - F_x} \quad (2.35)$$

Haciendo uso de la primera propiedad de la función de distribución  $F_0 = 0$ , tenemos que:

$$\int_0^x \mu_y dy = -\ln[1 - F_x] \quad (2.36)$$

Al efectuar los cálculos necesarios obtenemos:

$$F_x = 1 - \exp\left(-\int_0^x \mu_y dy\right) \quad (2.37)$$

De modo que, al reemplazar la expresión 2.37 en 2.24 se obtiene la probabilidad de supervivencia en función de  $\mu_x$ , la cual está dada por:

$${}_tp_x = \exp \left( - \int_x^{x+t} \mu_y dy \right) \quad (2.38)$$

Por lo que, por complemento la probabilidad de fallecimiento, se expresa de la siguiente manera:

$${}_tq_x = 1 - \exp \left( - \int_x^{x+t} \mu_y dy \right) \quad (2.39)$$

Esta función está relacionada con la probabilidad de fallecimiento, ya que ambas proporcionan una medida anual de la mortalidad. La función  $\mu_x$  es más precisa porque indica la tasa de mortalidad en cada momento específico, mientras que  $q_x$  ofrece un valor promedio de referencia dentro de un intervalo finito determinado.

### 2.5.9. Tasa Central de Mortalidad $m_x$

Para expresar el comportamiento de la Tasa instantánea de mortalidad en el intervalo  $(x, x + 1)$  recurrimos a la tasa central de mortalidad a la edad  $x$ .

Donde está no es más que el cociente del número de los individuos fallecidos a la edad  $x$  ( $d_x$ ), entre el tiempo vivido de individuos con edades comprendidas entre  $x$  y  $x + 1$  ( $L_x$ ). Esta se expresa como:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{d_x}{\int_x^{x+1} l_y dy} \quad (2.40)$$

Analogamente, cuando el intervalo de edades es mayor que la unidad, se tiene que:

$$n m_x = \frac{n d_x}{n L_x} = \frac{n d_x}{\int_x^{x+n} l_y dy} \quad (2.41)$$

## 2.6. Población estacionaria

De acuerdo a Ortega Antonio (1987), “*Una segunda interpretación de la tabla de vida resulta al considerarla como un modelo de población estacionaria. Una población estacionaria es un modelo teórico en el cual la población total así como la distribución por edades no cambia en el tiempo.*”

### 2.6.1. Población total

Designando  $N_t$  como la población total en el momento  $t$ ,  $B_t$  el número de nacimientos anuales en el momento  $t$ , y  $p_x$  la probabilidad de sobrevivir desde el nacimiento hasta la edad  $x$ , por lo que el producto  $B_{(t-x)} \cdot p_x = N(x, t)$  representa el número de personas que tienen edad  $x$  en el momento  $t$ .

La población total en el momento  $t$ ,  $N_t$  está formada por la suma de todas las personas que nacieron en  $t - x$  y han sobrevivido hasta el momento  $t$ , teniendo entonces la edad  $x$ . Esta suma se obtiene integrando la función de la población por edad en el momento  $t$ .

$$N_t = \int_0^w B_{(t-x)} \cdot p_x \, dx \quad (2.42)$$

Haciendo un simple cambio de los límites de la integral, se obtiene el número de personas de un grupo de edades cualquiera; por ejemplo para las edades  $x, x + n$  es

$$N(x, x + n) = \int_x^{x+n} B_{(t-y)} \cdot p_y \, dy \quad (2.43)$$

### 2.6.2. Defunciones totales

Análogamente, las defunciones totales  $D_t$  se obtienen multiplicando las personas que han sobrevivido a la edad  $x$  en el momento  $t$ , o sea  $B_{(t-x)} \cdot p_x$ , por la tasa instantánea de mortalidad por edad  $\mu_x$ , y sumando todas las edades, es decir:

$$D_t = \int_0^w B_{(t-x)} \cdot p_x \cdot \mu_x \, dx \quad (2.44)$$

Finalmente las defunciones de un grupo de edades  $x, x + n$  se obtienen, como en el caso de la población por edades, cambiando los límites de la integral:

$$D(x, x + n) = \int_x^{x+n} B_{(t-y)} \cdot p_y \cdot \mu_y \, dy \quad (2.45)$$

### 2.6.3. Población estacionaria: Principales características

Las cuatro relaciones anteriores se basan en el supuesto de mortalidad por edad constante. Agregando ahora el supuesto de que los nacimientos anuales en  $t$  son iguales a  $l_0$ , se llega entonces a la población estacionaria, cuyas características son las siguientes:

- Haciendo  $B_{(t-x)} = l_0$  y  $p_x = \frac{l_x}{l_0}$  en la relación que representa a la población total, se obtiene:

$$N_t = \int_0^w l_0 \frac{l_x}{l_0} dx = \int_0^w l_x dx = T_0 = \text{Constante} \quad (2.46)$$

Este resultado indica que en la población estacionaria, el número total de personas se mantiene constante en el tiempo, y su valor numérico es igual al valor  $T_0$  de la tabla de mortalidad.

- Realizando el mismo reemplazo para la población por grupos de edades, se obtiene la población estacionaria por edades:

$$N(x, x+n) = \int_x^{x+n} l_y dy = {}_n L_x \quad (2.47)$$

Es decir, el número de personas de un grupo de edad cualquier  $x, x+n$  es constante en el tiempo e igual al valor numérico de la función  ${}_n L_x$  de la tabla de mortalidad.

- Para calcular el número total de defunciones, se realizan los reemplazos de las defunciones y la probabilidad de sobrevivir, de manera que:

$$D_t = \int_0^w l_0 \frac{l_x}{l_0} \frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx} dx = - \int_0^w dl_x = -(l_w - l_0) = l_0 \quad (2.48)$$

Esto significa que en la población estacionaria el número total de defunciones que ocurre cada año es constante e igual al número de nacimientos anuales

- Finalmente, las defunciones por edades, luego de los reemplazos respectivos resulta:

$$D(x, x+n) = \int_x^{x+n} dl_y = -(l_{x+n} - l_x) = {}_n d_x \quad (2.49)$$

Se verifica así, que el número de fallecimiento de cada grupo de edades de la población estacionaria, es igual al número de defunciones de la tabla de mortalidad correspondiente.

## 2.7. Clasificación de las Tablas de Mortalidad

Las tablas de mortalidad pueden variar teniendo en cuenta diferentes aspectos. A continuación se presentan algunas de las clasificaciones que se pueden encontrar:

### 2.7.1. Tablas Estáticas / Tablas Dinámicas

Las tablas de mortalidad estáticas o de período asumen que las probabilidades de muerte dependen exclusivamente de la edad alcanzada. Por su parte, las tablas de mortalidad dinámicas o generacionales asumen que las tasas de mortalidad, además de depender de la edad, depende del año calendario en que se alcanza dicha edad. Más adelante se discuten en mayor detalle las tablas de mortalidad dinámicas.

### 2.7.2. Tablas Completas / Tablas Abreviadas

Una tabla completa proporciona información para cada año desde el nacimiento hasta el último año de vida del grupo en estudio. Es decir, el parámetro de edad  $x$  abarca desde 0 hasta 100 años o más.

Por otro lado, una tabla abreviada presenta la información en intervalos de 5 (quinquenios) o 10 años, lo que facilita su elaboración en comparación con la tabla completa. Bajo este criterio, se asume que la probabilidad de muerte cambia significativamente solo cada 5 años. Este enfoque puede ser poco realista para edades muy tempranas o muy avanzadas.

## 2.8. Tablas Dinámicas de Mortalidad

En un enfoque dinámico, la mortalidad se considera una función tanto de la edad como del año calendario. Para reflejar claramente cómo evoluciona la mortalidad con el tiempo, la notación clásica  $q_x$  se sustituye por  $q_x(t)$ , donde  $q_x(t)$  representa la probabilidad de que una persona de edad  $x$  en el año  $t$  muera en ese año. Las tablas de mortalidad que incorporan esta dependencia temporal se denominan tablas de mortalidad dinámicas.

Asumiendo que la edad  $x$  y el año calendario  $t$  son variables discretas, la mortalidad  $q_x(t)$  se puede representar como una matriz cuyas filas corresponden a la edad y cuyas columnas corresponden al año calendario, como se presenta en la tabla 2.2.

	...	$t - 1$	$t$	$t + 1$	...
0	...	$q_0(t - 1)$	$q_0(t)$	$q_0(t + 1)$	...
1	...	$q_1(t - 1)$	$q_1(t)$	$q_1(t + 1)$	...
...	...	...	...	...	...
$x$	...	$q_x(t - 1)$	$q_x(t)$	$q_x(t + 1)$	...
$x + 1$	...	$q_{x+1}(t - 1)$	$q_{x+1}(t)$	$q_{x+1}(t + 1)$	...
...	...	...	...	...	...
$w - 1$	...	$q_{w-1}(t - 1)$	$q_{w-1}(t)$	$q_{w-1}(t + 1)$	...

**Tabla 2.2:** Probabilidades de muerte a un año en un contexto dinámico

Esta matriz puede ser interpretada de la siguiente forma:

1. **Arreglo por columnas:**  $q_0(t), q_1(t), \dots, q_x(t), \dots$ , que representa una serie de tablas de mortalidad por período. Cada tabla se refiere a un año calendario específico  $t$ .
2. **Arreglo diagonal:**  $q_0(t), q_1(t + 1), \dots, q_x(t + x), \dots$ , que corresponde a una serie de tablas generacionales. Cada tabla se refiere a la generación (o cohorte) nacida en el año  $t$ .
3. **Arreglo por filas:**  $\dots, q_x(t - 1), q_x(t), \dots, q_x(t + 1), \dots$ , que representa los perfiles de mortalidad. Cada perfil se refiere a una edad específica  $x$ .

Las tablas de mortalidad por período (columna) capturan las tasas de mortalidad de una población en un período específico y son útiles para comparar la mortalidad entre diferentes poblaciones (como entre dos países o entre hombres y mujeres) y para estudiar la tendencia de mortalidad dentro de una misma población. Sin embargo, estas tablas no son adecuadas para medir la mortalidad de una generación en particular, ya que las probabilidades de mortalidad cambian con el tiempo debido a factores como avances médicos y mejoras en los sistemas de salud pública. La medición adecuada de la mortalidad de una generación específica se realiza mediante tablas de mortalidad generacional, que consideran los cambios esperados en las tasas de mortalidad en años futuros.

Si asumimos que las tasas de mortalidad seguirán disminuyendo en los próximos años, la esperanza de vida calculada con tablas de mortalidad dinámicas será mayor en comparación con las tablas de mortalidad estáticas. En el ámbito actuarial, los métodos de proyección que se basan en la extrapolación de tendencias pasadas son particularmente relevantes para construir estas tablas dinámicas. A diferencia de las leyes clásicas

de mortalidad, los modelos dinámicos consideran no solo la edad y el sexo de una persona, sino también el año en que alcanzan esa edad. Esto convierte el año calendario en un factor crucial para la estimación en estos modelos, desechando así la hipótesis de estacionariedad presente en las leyes clásicas.

Los modelos dinámicos, que incluyen el factor tiempo, son valiosos para tarificar seguros de vida a largo plazo y planes de pensiones. Estos modelos tienen en cuenta los cambios futuros en los indicadores de mortalidad. La hipótesis central es que el índice de mortalidad  $q_x(t)$  depende de la edad  $x$ , y aunque esta función se mantiene constante con el tiempo, varía según los parámetros  $f(a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t))$ .

Estos parámetros  $a_1(t), a_2(t), a_3(t), \dots, a_n(t)$  corresponden a los años observados y se pueden modelar utilizando la metodología Box-Jenkins (ARIMA), ya que cada parámetro se representa como series temporales.

El método Box-Jenkins se describe en los siguientes pasos:

1. **Identificación:** Análisis del correlograma para identificar los valores de los parámetros.
2. **Estimación:** Estimación de los parámetros de los términos autorregresivos y de promedios móviles.
3. **Examen de diagnóstico:** Evaluación del modelo ARIMA seleccionado y sus parámetros. Si los residuales estimados son ruido blanco, se acepta el modelo; de lo contrario, se reinicia el proceso. La metodología es iterativa.
4. **Pronóstico:** Los pronósticos obtenidos con este método suelen ser más confiables que los de los modelos econométricos tradicionales.

Un enfoque riguroso en los pronósticos de mortalidad debe considerar las características estocásticas de la mortalidad. Los modelos de proyección estocástica deben basarse en estos puntos:

- Las tasas de mortalidad observadas son resultados de variables aleatorias que representan la mortalidad pasada.
- Las tasas de mortalidad pronosticadas son estimaciones de variables aleatorias que representan la mortalidad futura.

## 2.9. Algunas leyes de mortalidad importantes

Desde el siglo XIX, numerosos investigadores han desarrollado modelos teóricos para explicar el comportamiento de las funciones biométricas. Investigadores como Moivre,

Makeham y Gompertz propusieron diversas leyes teóricas para describir la mortalidad en una población.

Estos modelos ofrecen una forma funcional para la supervivencia de una población. La ventaja de desarrollar modelos teóricos se basa en dos aspectos:

- En primer lugar, la metodología, ya que los estudios sobre fenómenos biológicos suelen concluir en una forma funcional específica para las funciones biométricas.
- En segundo lugar, la practicidad, ya que una función que dependa de pocos parámetros es más fácil de manejar.

Los modelos teóricos más importantes son los siguientes:

### 2.9.1. Ley de Moivre

Propuesta por Abraham de Moivre en 1724. Esta ley considera que el número de sobrevivientes  $l_x$  es una función lineal decreciente con la edad, es decir:

$$l_x = a + bx$$

los parámetros a y b son fáciles de determinar, así:

$$l_0 = a + b \cdot 0 = a$$

Y si  $w$  es la edad máxima que puede alcanzar un individuo en esa población, denominado también infinito actuarial,

$$l_w = 0 = l_x = a + bw$$

Donde:  $w = -\frac{b}{a} = -\frac{l_0}{b}$

Por lo que, la función que determina el número de sobrevivientes esperado bajo la ley de Moivre es:

$$l_0 = \left(1 - \frac{x}{w}\right); 0 \leq x \leq w$$

Función	Expresión
$l_x$	$l_0 = (1 - \frac{x}{w}); 0 \leq x \leq w$
$d_x$	$\frac{l_0}{l_w}$
$\mu_x$	$\frac{1}{w-x}$
$n p_x$	$1 - n \mu_x$
$S_x$	$1 - \frac{x}{w}$
$e_x^0$	$\frac{w-x}{2}$

**Tabla 2.3:** Ley de Moivre

Por lo que, se puede deducir que la tasa instantánea de mortalidad es:

$$\mu_x = \frac{1}{(w-x)} \quad (2.50)$$

Al reemplazar 2.50 en 2.38, se obtiene que la probabilidad de supervivencia es igual a:

$$t p_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \frac{1}{(w-y)} dy\right) = 1 - \frac{t}{(w-x)} \quad (2.51)$$

### 2.9.2. Ley de Gompertz

La ley de Gompertz asume que cada individuo presenta una resistencia a las enfermedades (y a fallecer por causas naturales) decreciente en función de la edad, por lo que la tasa instantánea de mortalidad crece exponencialmente en función de la edad, de la siguiente forma:

$$\mu_x = B c^x \quad (2.52)$$

Con  $x \geq 0, B > 0, c > 1$

A partir de 2.50 en 2.38, se obtiene que la probabilidad de supervivencia es igual a:

$$t p_x = \exp\left(-\frac{B c^x}{\ln c}(c^t - 1)\right) \quad (2.53)$$

### 2.9.3. Ley de Makeham

Posteriormente en 1859 William Makeham modificó la ley de Gompertz añadiendo una constante  $A$  que representa el riesgo de muerte ante cualquier eventualidad independiente de la edad. En consecuencia, la tasa instantánea de mortalidad se expresa de la siguiente manera:

$$\mu_x = A + Bc^x \quad (2.54)$$

Con  $x \geq 0, A \geq -B, B > 0, c > 1$

A partir de 2.50 en 2.38, se obtiene que la probabilidad de supervivencia es igual a:

$$tp_x = \exp\left(-A_t - \frac{Bc^x}{\ln c}(c^t - 1)\right) \quad (2.55)$$

## 2.10. Método Lee-Carter y otros métodos de proyección relacionados

El método Lee-Carter (LC), introducido en 1992, utiliza el análisis de componentes principales para descomponer las tasas de mortalidad en una combinación de parámetros de edad y tiempo. Este método ha generado varias variantes y extensiones, como Lee-Miller (LM) y Booth-Maindonald-Smith (BMS), que se agrupan bajo el término “métodos LC”.

Una extensión importante de este enfoque son los modelos de datos funcionales (FDM), propuestos por Hyndman y Ullah en 2007 y desarrollados posteriormente por Hyndman y Booth en 2008, y Hyndman y Shang en 2009. Estas variantes, junto con otras combinaciones de opciones, se denominan colectivamente “métodos HU”.

### 2.10.1. Modelo Lee-Carter (LC)

El modelo dinámico Lee-Carter fue publicado en 1992 por Ronald D. Lee y Lawrence R. Carter, es un modelo demográfico-estadístico utilizado para proyectar tasas de mortalidad. Es un modelo de carácter extrapolativo que no incorpora efectos tecnológicos o sociales, sino que se basa en tendencias históricas observadas. Combina un modelo demográfico con métodos estadísticos de series de tiempo, proporcionando una base probabilística y intervalos de predicción. El cambio en la mortalidad se representa mediante un solo índice, permitiendo que cada tasa específica de mortalidad disminuya exponencialmente sin restricciones.

Para utilizar el modelo, es crucial revisar la calidad de los datos históricos de tasas de mortalidad por grupos de edad. Aunque las tasas no necesitan tener la misma periodicidad, se recomienda que los datos cubran al menos 30 años. Una vez validados los datos, se ajusta el modelo y se evalúa su desempeño histórico.

Al aplicar el modelo de Lee y Carter a tasas de mortalidad, las mismas se descomponen en dos parámetros  $a$  y  $b$  (también llamado base) y un índice  $k_t$  que representa

el nivel general de la mortalidad. La premisa básica del modelo es que existe una relación lineal entre el logaritmo de las tasas centrales de mortalidad  $m_{x,t}$  y dos factores explicativos: el intervalo de edad,  $x$ , y el tiempo,  $t$ . La ecuación que describe esto es:

$$m_{x,t} = \exp(a_x + b_x k_t + \epsilon_{x,t}) \quad (2.56)$$

Donde  $t = 1, \dots, n; x = 1, \dots, w$ ,

Finalmente aplicando el logaritmo:

$$\ln m_{x,t} = a_x + b_x k_t + \epsilon_{x,t} \quad (2.57)$$

Donde  $t = 1, \dots, n; x = 1, \dots, w$ ,

Con:

$$\epsilon_{x,t} \sim N(0, \sigma^2)$$

Donde los errores  $\epsilon_{x,t}$  son independientes.

Los parámetros de este modelo tienen la siguiente interpretación:

- $a_x$ : Describe el patrón general de la mortalidad para cada edad.
- $b_x$ : Determina la fuerza de aumento o disminución de la mortalidad para cierta edad a través del tiempo.
- $k_t$ : Expresa la tendencia de la mortalidad en el periodo  $t$ .
- $\epsilon_{xt}$ : Recoge los cambios en la mortalidad no descritos en el modelo.

La característica principal del modelo es que los parámetros  $a_x$  y  $b_x$  se calculan a partir de datos históricos y permanecen constantes a lo largo del tiempo, ya que dependen exclusivamente de la edad.

El parámetro  $a_x$ , conocido como parámetro de “forma”, describe el patrón general de las tasas específicas de mortalidad para cada grupo etario. Este parámetro se estima promediando los logaritmos de las tasas específicas de cada edad en cada momento.

El parámetro  $b_x$ , también llamado “función base” o de “sensibilidad”, refleja cómo varía la mortalidad en el intervalo de edad  $x$  en respuesta a cambios en el índice  $k_t$ . Este parámetro indica la intensidad del aumento o disminución de la tasa de mortalidad para un grupo de edad a lo largo del tiempo.

En total, el modelo estima  $2(X+1)+T$  parámetros para describir las  $(X+1)T$  tasas centrales de mortalidad. Sin embargo, para determinar estos parámetros, se imponen ciertas restricciones que aseguran la unicidad de la solución. Si  $a, b$  y  $k$  son soluciones

para una edad  $x$  y un periodo  $t$ , se puede demostrar que  $a - b \cdot c, b$  y  $k + c$  para cualquier escalar  $c \neq 0$  también son soluciones, al igual que  $a, b \cdot c$  y  $k/c$ . Por lo tanto, diferentes combinaciones de parámetros pueden generar la misma tasa de mortalidad central, y debido a esto, los autores añaden las siguientes restricciones para obtener una solución única:

$$\sum_{t=1}^T k_t = 0, \quad \sum_{x=0}^X b_x = 1 \quad (2.58)$$

#### 2.10.1.1. Estimación de los parámetros

El parámetro  $a_x$  se estima usando el método de la máxima verosimilitud. Por lo que, dado a que los errores  $\epsilon_{xt}$  del modelo 2.57 siguen una distribución normal y son independientes, se deduce que el logaritmo de las tasas centrales de mortalidad también son independientes y siguen una distribución normal, como se muestra a continuación:

$$\ln m_{xt} \sim N(a_x + b_x k_t, \sigma^2) \quad (2.59)$$

Ahora bien, la función de densidad conjunta de las variables  $m_{xt}$  con  $t \in 1, 2, 3, \dots, T$  para la edad  $x$  es:

$$L = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\ln m_{xt} - a_x - b_x k_t)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.60)$$

Por lo que al aplicar el Logaritmo Natural por propiedad del propio logaritmo, tenemos:

$$l = \sum_{t=1}^T \left( -\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{(\ln m_{xt} - a_x - b_x k_t)^2}{2\sigma^2} \right) \quad (2.61)$$

Al derivar respecto a  $a_x$ , tenemos:

$$\frac{dl}{da_x} = \sum_{t=1}^T \left( \frac{\ln m_{xt} - a_x - b_x k_t}{\sigma^2} \right) = 0 \quad (2.62)$$

Usando las restricciones 2.58 podemos determinar el estimador para el parámetro  $a_x$ , el cual queda expresado de la siguiente manera:

$$\hat{a}_x = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln m_{xt} \quad (2.63)$$

Para las edades  $x = 0, 1, 2, \dots, X$

Mientras que los estimadores de los vectores  $b = (b_0, b_1, \dots, b_X)$  y  $k = (k_1, k_2, \dots, k_T)$ , corresponderán a los vectores singulares izquierdo y derecho normalizados, respectivamente, de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} \ln m_{01} - \hat{a}_0 & \cdots & \ln m_{0T} - \hat{a}_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln m_{X1} - \hat{a}_X & \cdots & \ln m_{XT} - \hat{a}_X \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Por lo que, dada la descomposición en valores singulares (SVD por sus siglas en inglés) de la matriz M:

$$SVD(M) = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{\min(X,T)} \sigma^i u_x^i (v_t^i)^T \quad (2.65)$$

donde  $\sigma^i$  es el i-ésimo valor singular (todos estos ordenados descendenteamente) asociado a  $M$ , y  $u_x^i v_t^i$  son los vectores singulares izquierdo y derecho, respectivamente, asociados a este valor singular. Se tiene que las estimaciones de los vectores normalizados son:

$$\hat{b} = \frac{1}{c} u_x^1 \quad (2.66)$$

$$\hat{k} = c \cdot \sigma^1 u_t^1 \quad (2.67)$$

Donde:

$$c = \sum_{x=0}^X u_t^1$$

Con esta normalización, los parámetros van a cumplir las restricciones establecidas en 2.58.

Por otro parte, dado a que el número de fallecimientos registrados  $D_{xt}$  y el derivado por el modelo  $\hat{D}_{xt}$  pueden diferir para los períodos de estudio, los autores proponen reestimar el parámetro  $k_t$ . El parámetro reajustado  $\hat{k}_t^{(adj)}$  se selecciona de tal manera que cumpla la siguiente condición:

$$D_t = \sum_{x=0}^X \hat{D}_{xt} = \sum_{i=0}^X E_{xt}^c \exp(\hat{a}_x + \hat{b}_x \hat{k}_t) \quad (2.68)$$

Ahora bien, al obtener los parámetros estimados del modelo se procede a proyectar  $\hat{k}_t^{(adj)}$  mediante la metodología Box-Jenkins. Los autores recomiendan emplear primero un modelo ARIMA(0, 1, 0) con deriva:

$$\hat{t} = \delta + \hat{k}_{t-1}^{(adj)} + \epsilon_t \quad (2.69)$$

Para  $t = (2, 3, \dots, T)$ .

En donde  $\delta$  es la constante del modelo y  $\hat{k}_t^{(adj)}$  es un valor inicial conocido, mientras que los  $\epsilon_t$  son los errores que van a ser independientes e idénticamente distribuidos, cada uno con esperanza cero y varianza constante  $\sigma_{RWD}^2$ , cuyas estimaciones son:

$$\hat{\delta} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T \left( \hat{k}_t^{(adj)} - \hat{k}_{t-1}^{(adj)} \right)$$

$$\sigma_{RWD}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T \left( \hat{k}_t^{(adj)} - \hat{k}_{t-1}^{(adj)} - \hat{\delta} \right)^2$$

De manera que las proyecciones de las tasas centrales de mortalidad se obtienen como sigue:

$$\ln \hat{m}_{x,T+j} = \hat{a}_x + \hat{b}_x \hat{k}_{T+j} \quad (2.70)$$

Para  $x = 0, 1, 2, \dots$

Para Encontrar un modelo que describa la tendencia de la mortalidad  $k_t$ , haciendo uso de la metodología de Box-Jenkins, según los autores llegan a la siguiente ecuación:

$$k_t = c + k_{t-1} + u_t \quad (2.71)$$

Donde:

- $c$  es una constante.
- $u_t$  un ruido blanco.

Con este modelo, la preyección de  $k_t$  varía linealmente y cada índice predicho de muerte varía con índice exponencial constante.

### 2.10.2. Modelo Lee-Miller (LM)

En el año 2001 Ronald Lee y Timothy Miller publicaron el artículo titulado “Evaluating the Performance of the Lee-Carter Method for Forecasting Mortality” en el cual se examina la precisión del método Lee-Carter para pronosticar la mortalidad.

En su evaluación del método Lee-Carter, encontraron que el patrón de cambio en las tasas de mortalidad no era constante a lo largo del tiempo, lo cual es una suposición fuerte del método Lee-Carter. Como resultado, el ajuste de los puntajes de componentes principales históricos produjo un gran error de estimación. Para superar esto, Lee y Miller (2001) adoptaron 1950 como el año de inicio del período de ajuste debido a los

diferentes patrones de cambio por edad entre los períodos 1900-1949 y 1950-1995.

Además, el ajuste de  $k_t$  se realizó ajustándolo a la esperanza de vida observada en el año  $t$ , en lugar de ajustarlo al número total de fallecimientos en el año  $t$ . Esto tiene la ventaja de eliminar la necesidad de datos de población. Además, Lee y Miller (2001) encontraron una discrepancia entre las tasas ajustadas para el último año del período de ajuste y las tasas observadas en ese año. Este error de salto se eliminó utilizando las tasas observadas en el año de salto.

El método Lee-Miller es una variante del método Lee-Carter. Se diferencia del método Lee-Carter en tres aspectos:

- El período de ajuste comienza en 1950.
- El ajuste del parametro  $k_t$  implica el ajuste a la esperanza de vida  $e_x^0$  en el año t.
- Las tasas de “jump-off” son las tasas observadas en el año “jump-off” en lugar de las tasas ajustadas: El término “jump-off” (punto de partida) se refiere al año a partir del cual se inician las proyecciones. En el método LC estándar, se suelen utilizar las tasas de mortalidad ajustadas por el modelo para el año “jump-off” como punto de partida para las proyecciones. El método LM, en cambio, utiliza las tasas de mortalidad observadas en el año “jump-off”. Esto significa que no se suavizan las tasas del último año observado, sino que se utilizan directamente los datos empíricos. Esto podría hacer que las proyecciones a corto plazo sean más sensibles a las fluctuaciones recientes en las tasas de mortalidad. Desde una perspectiva actuaria, esto implica una menor dependencia del modelo en el punto de partida de la proyección. En lugar de confiar en la suavización del modelo, se utilizan los datos reales, lo que podría reflejar mejor las condiciones actuales, pero también introduce mayor volatilidad en las proyecciones a corto plazo.

### 2.10.3. Modelo Booth-Maindonald-Smith (BMS)

Booth, Maindonald y Smith (2002) aplicaron el modelo Lee-Carter a datos australianos del periodo 1907-1999 y encontraron que el "patrón universal"(A Universal Pattern of Mortality Change in the G7 Countries Tuljapurkar año 2000) de descenso constante de la mortalidad, representado por  $k_t$  lineal, no se sostuvo durante ese periodo. Además, surgieron problemas al cumplir con la suposición de  $b_x$  constante en el modelo Lee-Carter subyacente. Tomando como punto de partida la suposición de linealidad en  $k_t$ , la variante Booth-Maindonald-Smith busca maximizar el ajuste del modelo general restringiendo el periodo de ajuste, lo que también resulta en un mejor cumplimiento de la suposición de  $b_x$  constante. La elección del periodo de ajuste se basa en la razón de las desviaciones medias del ajuste del modelo Lee-Carter subyacente y del ajuste lineal general. Esta razón se calcula para todos los periodos de ajuste (es decir,

para todos los años que marcan el inicio de los periodos, los cuales siempre terminan en el año de salto) y se elige el periodo para el cual esta razón es sustancialmente menor que la de los periodos que comienzan en años anteriores.

El procedimiento para el ajuste de  $k_t$  fue modificado. En lugar de ajustar a las muertes totales,  $D_t$ , la variante Booth-Maindonald-Smith ajusta a la distribución por edad de las muertes,  $D_{x,t}$ , utilizando la distribución de Poisson para modelar el proceso de mortalidad y la estadística de desviación para medir la bondad del ajuste (Booth, Maindonald y Smith 2002). Las tasas de salto se toman como las tasas ajustadas bajo este ajuste.

La variante Booth-Maindonald-Smith se diferencia del modelo Lee-Carter en tres maneras:

- El período de ajuste se determina mediante un criterio estadístico de “bondad de ajuste”, bajo el supuesto de que  $k_t$  es lineal;
- El ajuste de  $k_t$  implica ajustarlo a la distribución por edades de las muertes más que al número total de muertes;
- Las tasas de desempate son las tasas de adaptación según el régimen de adaptación.

#### 2.10.4. Modelo Hyndman-Ullah (HU)

El método Lee-Carter (LC) y sus variantes tienen una limitación: intentan capturar los patrones de las tasas de mortalidad por edad utilizando solo el primer componente principal y sus puntuaciones asociadas. Además, no aplican una técnica de suavización para las tasas de mortalidad en edades avanzadas. Para solucionar este problema, Hyndman y Ullah (2007) propusieron un modelo de datos funcionales que emplea componentes principales de orden superior para capturar variaciones adicionales en las tasas de mortalidad. Este método combina la regresión no paramétrica penalizada de Ramsay (1988) con el análisis de componentes principales funcionales de Ramsay y Dalzell (1991) para pronosticar las tasas de mortalidad.

El método HU difiere del método LC en tres aspectos:

1. Las tasas de mortalidad logarítmicas se suavizan primero utilizando una spline de regresión penalizada con una restricción monótona parcial. Se asume que existe una función subyacente continua y suave  $f_t$  que se observa con errores en edades discretas. Expresado matemáticamente:

$$m_t(x_i) = f_t(x_i) + \sigma_t(x_i)\epsilon_{t,i} \quad (2.72)$$

$$i = 1, \dots, p, t = 1, \dots, n,$$

donde  $m_t(x_i)$  representa la transformación logarítmica de la tasa central de mortalidad observada para la edad  $x_i$  en el año  $t$ ,  $\sigma_t(x_i)$  permite que el componente de ruido varíe con  $x_i$  en el año  $t$ , y  $\epsilon_{t,i}$  es una variable aleatoria estándar independiente e idénticamente distribuida.

2. Se utiliza más de un componente principal. Mediante el análisis de componentes principales funcionales, un conjunto de funciones continuas se descompone en componentes principales funcionales y sus puntuaciones asociadas. Es decir:

$$f_t(x) = a(x) + \sum_{j=1}^J b_j(x)k_{t,j} + e_t(x), t = 1, \dots, n, \quad (2.73)$$

Donde:

- $a(x)$  es la función media estimada mediante la media empírica  $\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n f_t(x)$ ;
  - $b_1(x), \dots, b_J(x)$  representa un conjunto de los primeros  $J$  componentes principales funcionales;
  - $\{k_{t,1}, \dots, k_{t,J}\}$  representa un conjunto de puntuaciones de componentes principales no correlacionadas;
  - $e_t(x)$  es la función residual con media cero y varianza  $v(x)$ , estimada promediando  $\{e_1^2(x), \dots, e_n^2(x)\}$ ;
  - $J < n$  es el número óptimo de componentes principales funcionales utilizados. Siguiendo a Hyndman y Booth (2008) y Shang, Booth y Hyndman (2011), elegimos  $J = 6$ , lo cual debería ser mayor que cualquiera de los componentes necesarios.
3. Se puede utilizar una gama más amplia de modelos de series temporales univariantes para pronosticar las puntuaciones de los componentes principales. Condicionando en las curvas suavizadas pasadas  $I = \{m_1(x), \dots, m_n(x)\}$  y el conjunto de componentes principales funcionales  $B = \{b_1(x), \dots, b_J(x)\}$ , se puede obtener el pronóstico puntual de  $h - \text{pasos}$  adelante de  $m_{n+h}(x)$ .

$$\hat{m}_{n+h|n}(x) = E[m_{n+h}(x)|I, B] = \hat{a}(x) \sum_{j=1}^J b_j(x) \hat{k}_{n+h|n,j}, \quad (2.74)$$

donde  $\hat{k}_{n+h|n,j}$  denota el pronóstico de  $h$  pasos adelante de  $k_{n+h,j}$  usando un modelo de series temporales univariantes, como el modelo ARIMA (Box, Jenkins y Reinsel 2008). El orden óptimo de un modelo ARIMA se selecciona automáticamente usando un algoritmo de Hyndman y Khandakar (2008), que minimiza el criterio de información de Akaike (Akaike 1974) por defecto.

La varianza del pronóstico se deriva de [2.72](#) y [2.73](#). Debido a la ortogonalidad (*Dado que el método HU primero suaviza los datos para cada año por separado, el error de suavización en [2.72](#) no se correlaciona con el error de modelado. Debido a que el término de error en [2.73](#) contiene componentes principales funcionales de orden  $J + 1$  y superiores, estos son ortogonales (o varían independientemente) de los primeros  $J$  componentes principales funcionales por construcción.*) entre los componentes principales funcionales y el término de error, la varianza total del pronóstico puede aproximarse mediante la suma de cuatro varianzas individuales. Condicionando en las curvas suavizadas pasadas  $I$  y el conjunto de componentes principales fijos  $B = \{b_1(x), \dots, b_J(x)\}$ , obtuvimos la varianza total del pronóstico de  $m_{n+h}(x)$ .

$$\text{var}[m_{n+h}(x)|I, B] \approx \hat{\sigma}_a^2(x) + \sum_{j=1}^J b_j^2(x)u_{n+h|n,j} + v(x) + v_{n+h}^2(x), \quad (2.75)$$

Donde:

- $\sigma_a^2(x)$  es la varianza de la estimación suavizada  $\hat{a}(x)$  que se puede obtener mediante el método de suavización.
- $b_j^2(x)$  es la varianza del  $j$ -ésimo componente principal;  $u_{n+h|n,j} = \text{var}(k_{n+h,j}|k_{1,j}, \dots, k_{n,j})$  se puede obtener del modelo de series temporales.
- La varianza residual del modelo  $v(x)$  se estima promediando  $\{e_1^2(x), \dots, e_n^2(x)\}$  para cada  $x$ .
- La varianza del error de observación  $\sigma_{n+h}^2(x)$  se estima promediando  $\{\sigma_1^2(x), \dots, \sigma_n^2(x)\}$  para cada  $x$  (Hyndman y Ullah 2007).

Asumiendo que cada una de las cuatro fuentes de incertidumbre tiene una distribución normal y que son no correlacionadas, el intervalo de predicción al  $100(1 - \alpha)\%$  de  $m_{n+h}(x)$  se construye como  $m_{n+h|n}(x) \pm z_\alpha \sqrt{\text{var}[m_{n+h}(x)|I, B]}$ , donde  $z_\alpha$  es el cuantil estándar normal  $(1 - \alpha/2)$ .

### 2.10.5. Modelo Robust Hyndman-Ullah (HUrob)

Dado que la presencia de valores atípicos puede afectar seriamente el rendimiento del modelado y pronóstico, es importante eliminar su efecto cuando sea posible. El método HUrob calcula el error cuadrático integrado para cada año,

$$\int_{x_1}^{x_p} \left( \sum_{j=1}^J (f_t(x) - a(x)) - b_j(x)k_{t,j} \right)^2 dx \quad (2.76)$$

ya que esto proporciona una medida de la precisión de la estimación para la aproximación del componente principal funcional de los datos funcionales. Ten en cuenta

que las curvas funcionales continuas están delimitadas entre  $x_1$  y  $x_p$ . Se consideran valores atípicos aquellos años que tienen un error cuadrático integrado mayor que el valor crítico calculado a partir de una distribución  $\chi^2$ . Al asignar un peso cero a los valores atípicos, podemos aplicar el método HU para modelar y pronosticar las tasas de mortalidad, a partir de las cuales se calculan los pronósticos de la esperanza de vida específica por edad sin la influencia de posibles valores atípicos.

#### 2.10.6. Modelo Weighted Hyndman-Ullah (HUw)

El método HUw utiliza pesos que decaen geométricamente en la estimación de  $a(x)$  y  $b_j(x)$ , lo que permite que la estimación de estas cantidades se base más en datos recientes que en datos del pasado distante (Hyndman y Shang 2009; Shang, Booth y Hyndman 2011).

El método HUw difiere del método HU en tres aspectos:

1. La media funcional ponderada  $a^*(x)$  se estima mediante

$$a^*(x) = \sum_{t=1}^n w_t f_t(x), \quad \text{donde} \quad \sum_{t=1}^n w_t = 1$$

donde  $\{w_t = \kappa(1 - \kappa)^{n-t}, t = 1, \dots, n\}$  denota un conjunto de pesos, y  $0 < \kappa < 1$  denota un parámetro de peso que decae geométricamente. Hyndman y Shang (2009) describen cómo estimar el valor óptimo de  $\kappa$  empíricamente a partir de los datos. En resumen, el valor óptimo de  $\kappa \in (0, 1)$  se elige minimizando una medida de error de pronóstico general dentro del conjunto de datos de validación entre un conjunto de posibles candidatos. En este documento, utilizamos un algoritmo de optimización unidimensional de Nelder y Mead (1965) para minimizar la función objetivo y encontrar su valor óptimo (exacto) correspondiente de  $\kappa$ .

2. Mediante el análisis de componentes principales funcionales, un conjunto de funciones ponderadas  $\{w_t[f_t(x) - \hat{a}^*(x)]; t = 1, \dots, n\}$  se descompone en componentes principales funcionales ponderados y sus puntuaciones de componentes principales no correlacionadas. Es decir,

$$f_t(x) = \hat{a}^*(x) + \sum_{j=1}^J b_j^*(x) k_{t,j} + e_t(x)$$

donde  $\{b_1^*(x), \dots, b_J^*(x)\}$  es un conjunto de componentes principales funcionales ponderados.

3. Condicionando en las curvas suavizadas pasadas  $I = \{m_1(x), \dots, m_n(x)\}$  y el conjunto de componentes principales funcionales ponderados  $B^* = \{b_1^*(x), \dots, b_J^*(x)\}$ , se obtiene el pronóstico de  $h - \text{pasos}$  adelante de  $m_{n+h}(x)$  mediante:

$$\hat{m}_{n+h|n}(x) = E[m_{n+h}(x)|I, B] = \hat{a}^*(x) + \sum_{j=1}^J b_j^*(x) k_{n+h|n,j}$$

A partir de la expresión de la varianza dada por 2.75, el intervalo de predicción al  $100(1 - \alpha)\%$  de las tasas de mortalidad futuras en el año  $n + h$  se construye paramétricamente.

---

## Capítulo 3

# Marco Metódico

---

En esta sección se presentan los métodos y/o test necesarios relacionados con la práctica divulgada en el marco teórico, así como las fuentes de datos y la proyección de la mortalidad desde una perspectiva actuarial aplicado a Chile y Japón.

### 3.1. Fuente de Datos

Los datos utilizados para la proyección de mortalidad correspondiente a los países Chile y Japón son los pertenecientes al proyecto “Human Mortality Database” (HMD) <https://www.mortality.org/Home/Index>, la cual es una base de datos científica líder a nivel mundial que proporciona información detallada y armonizada sobre la mortalidad y las estimaciones de población. Esta es la principal fuente de datos científicos sobre la mortalidad humana. Al momento de realizar este trabajo, la fuente de datos de la HMD consta de 41 países, entre los que se encuentran países como: Chile, Japón, Estados Unidos, Alemania, Francia, Portugal, Italia, Nueva Zelanda, entre otros.

Cabe destacar que tanto para la consulta o descarga de los datos almacenados en la HMD es necesario contar con un usuario registrado en el portal.

A fines de complementar la información de la HMD, se estará haciendo uso de la Base de datos del Banco Mundial.

#### 3.1.1. Human Mortality Database (HMD)

El proyecto de la Base de Datos de Mortalidad Humana (HMD, por sus siglas en inglés) comenzó en otoño del año 2000 por iniciativa de John R. Wilmoth, profesor de la Universidad de California en Berkeley (UCB), y James W. Vaupel, director del Instituto Max Planck de Investigación Demográfica (MPIDR) en Rostock (Alemania). Se estableció como un proyecto científico que sería desarrollado conjuntamente por

### 3.1 Fuente de Datos

investigadores del Departamento de Demografía de la Universidad de California en Berkeley y el Instituto Max-Planck de Investigación Demográfica (MPIDR).

The screenshot shows the homepage of the Human Mortality Database (HMD). At the top, there is a navigation bar with links to HOME, PROJECT, PEOPLE, METHODS, DATA, RESEARCH, and LINKS. To the right of the navigation bar are icons for Twitter, Facebook, and LinkedIn. Below the navigation bar, the title "Human Mortality Database" is displayed, followed by the tagline "Reliability and Accuracy Matter". A brief description of the HMD follows, stating it is the world's leading scientific data resource on mortality in developed countries. To the right of this text is a vertical sidebar with links to "Short-Term Mortality Fluctuations", "Cause-of-Death Data Series", "Subnational Mortality Databases", and "Citing HMD". The main content area features a grid of country names. The grid is organized into five columns and ten rows. The columns are labeled at the top as "Data by country or area". The countries listed are: Australia, Denmark, Ireland, Norway, Switzerland; Austria, Estonia, Israel, Poland, Taiwan; Belarus, Finland, Italy, Portugal, U.K.; Belgium, France, Japan, Republic of Korea, U.S.A.; Bulgaria, Germany, Latvia, Russia, Ukraine; Canada, Greece, Lithuania, Slovakia; Chile, Hong Kong, Luxembourg, Slovenia; Croatia, Hungary, Netherlands, Spain; Czechia, Iceland, New Zealand, Sweden.

**Figura 3.1:** Sitio web de la Human Mortality Database

En un comienzo, se tenía pensado que la HMD fuera una importante fuente de datos para fomentar la investigación sobre los cambios en la longevidad, que estaban impactando en un mayor aumento de la esperanza de vida durante los últimos 100 años con respecto a la vida humana anterior. Era importante asegurarse de que la HMD permitiera a los demógrafos investigar el progreso en la longevidad que comenzó a fines de la década de 1970 con un descenso inesperado y sólido de la mortalidad en edades avanzadas. Esto, a su vez, llevó a cuestionar las especulaciones anteriores sobre los límites de la longevidad humana y el envejecimiento de la población.

El proyecto se benefició de trabajos previos, como los realizados por Väinö Kannisto en la década de 1990, que documentaron la disminución de la mortalidad en edades avanzadas en países desarrollados. La Base de Datos Kannisto-Thatcher sobre Mortalidad en la Vejez (KTD) y la Base de Datos de Mortalidad de Berkeley (BMD) desarrollada por John R. Wilmoth en 1997 que proporcionaba estimaciones de mortalidad por año desde el nacimiento hasta los 110 años de edad para Francia, Japón, Estados Unidos y Suecia, también fueron precursores importantes.

Por lo cual la HMD adoptó formatos de presentación de datos y varios métodos de cálculo de la BMD. Al mismo tiempo, los métodos de HMD para personas de 80 años o más recibieron una fuerte influencia del KTD. De esta manera, HMD combinó lo mejor de estos esfuerzos anteriores en un solo proyecto. Se espero que la base de datos incluiría finalmente entre 40 y 45 países con sistemas de censos y registros vitales fiables.

Durante la fase de preparación la cual abarca desde el año 2000 hasta el año 2002, el equipo de HMD desarrolló un protocolo de métodos detallado que incluía cálculos y verificaciones de datos, estableciendo formatos de datos, procesamiento y procedimientos de verificación. Se establecieron responsabilidades claras para cada miembro del equipo, y se designaron especialistas de país para asegurar la fiabilidad de los datos. Para todas las comprobaciones y cálculos formales, se aplicaron métodos y elementos visuales uniformes, utilizando códigos en MATLAB, SAS y R.

Finalmente en mayo de 2002, la HMD se lanzó en línea con datos de 17 países. Desde entonces, ha habido seis versiones sucesivas del protocolo de métodos y numerosas mejoras en las rutinas de procesamiento de datos. La HMD se ha convertido en un recurso fundamental en demografía, siendo ampliamente utilizada y citada en diversas disciplinas.

#### 3.1.2. Banco Mundial

El Banco Mundial, fundado en 1944, es una organización internacional especializada en finanzas y asistencia, cuyo objetivo principal es la reducción de la pobreza. Se posiciona como una de las fuentes más importantes de financiamiento y conocimiento para los países en desarrollo. Actualmente, está conformado por 189 países miembros y se estructura a través de cinco (5) instituciones clave:

1. El Banco Internacional de Reconstrucción y Fomento (BIRF).
2. La Asociación Internacional de Fomento (AIF).
3. La Corporación Financiera Internacional (IFC).
4. El Organismo Multilateral de Garantía de Inversiones (MIGA).
5. El Centro Internacional de Arreglo de Diferencias Relativas a Inversiones (CIA-DI).

Estas instituciones trabajan de manera coordinada para impulsar el desarrollo económico, mejorar las condiciones sociales y fomentar la sostenibilidad global.

## 3.2. Lenguaje utilizado en el procesamiento de los datos

Para el procesamiento y adecuación de los datos contenidos en el portal web de la HMD y el Banco Mundial se utilizó el software libre **R** y su entorno de desarrollo integrado (IDE) de nombre **Rstudio**.

### 3.2.1. R

R es un lenguaje y entorno para gráficos y computación estadística. Es un proyecto GNU similar al lenguaje y entorno S que fue desarrollado en Bell Laboratories (antes AT&T, ahora Lucent Technologies) por John Chambers y colegas. R puede considerarse como una implementación diferente de S. Existen algunas diferencias importantes, pero gran parte del código escrito para S se ejecuta sin modificaciones en R.

R ofrece una amplia variedad de técnicas estadísticas (modelado lineal y no lineal, pruebas estadísticas clásicas, análisis de series temporales, clasificación, agrupamiento, etc.) y gráficas, y es altamente extensible. El lenguaje S es a menudo el vehículo de elección para la investigación en metodología estadística, y R ofrece una ruta de código abierto para participar en esa actividad.

Una de las fortalezas de R es la facilidad con la que se pueden crear gráficos bien diseñados con calidad de publicación, incluyendo símbolos y fórmulas matemáticas cuando es necesario.

Asimismo, R es un conjunto integrado de herramientas de software para la gestión de datos, el cálculo y la visualización gráfica. Sus principales características son:

1. Instalación eficaz de manejo y almacenamiento de datos.
2. Conjunto de operadores para cálculos sobre matrices, en particular matrices.
3. Una colección grande, coherente e integrada de herramientas intermedias para el análisis de datos.
4. Facilidades gráficas para el análisis y visualización de datos en pantalla o en papel.
5. Posee un lenguaje de programación bien desarrollado, simple y efectivo que incluye condicionales, bucles, funciones recursivas definidas por el usuario y facilidades de entrada y salida.

Disponible a través del siguiente enlace: <https://www.r-project.org/about.html>

### 3.2.1.1. Rstudio

RStudio es un entorno de desarrollo integrado (IDE) para R y Python. Incluye una consola, un editor de resultado de sintaxis que admite la ejecución directa de código y herramientas para trazar gráficos, historial, depuración y gestión del espacio de trabajo. RStudio está disponible en ediciones de código abierto y comercial y se ejecuta en el escritorio (Windows, Mac y Linux). Disponible para su descarga en <https://posit.co/products/open-source/rstudio/>

### 3.2.2. Demography

El paquete Demography versión 2.0 del 8 de febrero de 2023 contiene funciones para el análisis demográfico, incluyendo cálculos de tablas de vida, aplicación del modelo de proyección de tablas de mortalidad Lee-Carter, análisis de datos funcionales de tasas de mortalidad, tasas de fertilidad, migración neta y pronósticos estocásticos de la población. Este paquete, diseñado por Rob Hyndman con contribuciones de Heather Booth, Leonie Tickle, John Maindonald, Simon Wood y el core de R, requiere que los objetos del data frame a trabajar sean de tipo demogdata para poder aplicar las distintas funciones que tiene incorporadas. Es útil para realizar análisis detallados y pronósticos en estudios demográficos.

Para más detalle respecto a todo el contenido de este paquete, ver el siguiente enlace: <https://cran.r-project.org/web/packages/demography/demography.pdf>.

### 3.2.3. Forecast

El paquete Forecast versión 8.23.0 del 20 de junio de 2024 ofrece una variedad de funciones, métodos y herramientas que permiten disponer y analizar series de tiempo univariantes, así como hacer proyecciones considerando modelos ARIMA. En la creación de este paquete están involucrados varios participantes, entre los que destaca Rob Hyndman.

Este paquete proporciona una gran variedad de funciones respecto a la modelación y proyección de series de tiempo, incluyendo una función de mucha utilidad llamada auto.arima, que permite establecer y arrojar el mejor modelo de acuerdo con sus valores de Akaike (AIC) y Bayesiano (BIC).

Para más detalle respecto a todo el contenido de este paquete, ver el siguiente enlace: <https://cran.r-project.org/web/packages/forecast/forecast.pdf>

### 3.3. Procesamiento de los datos

En esta sección comenzaremos a establecer los códigos y resultados del procesamiento de la data.

Se instalan los paquetes

```
install.packages("demography") Instala el paquete demography  
install.packages("readxl") Instala el paquete readxl
```

Llamamos a las librerías para poder cargar en el proyecto el paquete demography y leer archivos excel.

```
library("demography")  
library(readxl)
```

Con el código anterior, únicamente se están descargando de CRAN los paquetes demography y readlx, instalándolos en el proyecto de R y, por último, cargándolos para hacer uso de la gama de funciones que contemplan estos paquetes.

Es importante mencionar que se está instalando el paquete readxl ya que los datos obtenidos en el portal web del Banco Mundial para Japón y Chile se encuentran en este formato y son vitales para la construcción del Perfil Demográfico.

Para extraer los datos publicados para ambos países, se hace uso de la siguiente función del paquete demography:

```
Carga de Datos para Japon  
Japon<-hmd.mx("JPN", "elenridom@gmail.com", "Avion01.", "Japon")  
Mortality data for Japon  
Series: female male total  
Years: 1947 – 2023  
Ages: 0 – 110
```

```
Carga de Datos para Chile  
Chile<-hmd.mx("CHL", "elenridom@gmail.com", "Avion01.", "Chile")  
Mortality data for Chile  
Series: female male total  
Years: 1992 – 2020  
Ages: 0 – 110
```

A partir del código anterior se crea un objeto de tipo demogdata con toda la información de la mortalidad almacenada en la base de datos de la HMD correspondiente al país en estudio. Esta información incluye la serie histórica de 1947 a 2023 Japón y desde 1992 a 2020 para Chile tanto para mujeres, hombres y ambos sexos en conjunto, con edades entre 0 y 110 años.

Como se muestra en la parte izquierda de la función, se asigna un nombre al objeto, en este caso “Japón” y “Chile”, seguido de la fórmula a usar “hmd.mx”, la abreviación

del país, los datos de usuario para acceder a la base de datos y, por último, un nombre de etiqueta (opcional).

### **3.4. Elaboración de los perfiles demográficos**

A continuación se presenta un análisis demográfico comparativo entre Chile y Japón, dos países con contextos socioeconómicos y culturales distintos, pero que enfrentan desafíos similares en términos de envejecimiento poblacional y mortalidad. Utilizando pirámides poblacionales y gráficos de evolución de la población, se examinan las características demográficas clave de ambos países. Este análisis proporciona una base sólida para entender las tendencias de mortalidad y las proyecciones futuras, permitiendo una evaluación más precisa de los métodos de proyección de mortalidad desde una perspectiva actuarial.

Un perfil demográfico no es más que un conjunto de estimadores, tablas y representaciones gráficas que permite, de forma resumida, contextualizar las características más relevantes de una población en estudio. Esta información nos permite establecer acciones y estrategias dirigidas a sectores específicos de la población en función de los posibles riesgos a los que pueda estar expuesta.

Entre el conjunto de estimadores, tablas y representaciones gráficas, tenemos:

1. Población total.
2. Composición por sexo y grupos de edad.
3. Tasa de Crecimiento poblacional.
4. Evolución del Índice de Envejecimiento.
5. Evolución de la esperanza de vida al nacer.
6. Tasa de mortalidad infantil.
7. Tasa global de fecundidad.
8. Evolución de la Migración Neta.

A continuación, se presenta un breve perfil demográfico de Japón y Chile con el objetivo de enmarcar la situación histórica y actual de ambos países.

#### **3.4.1. Caso de estudio 1: Japón**

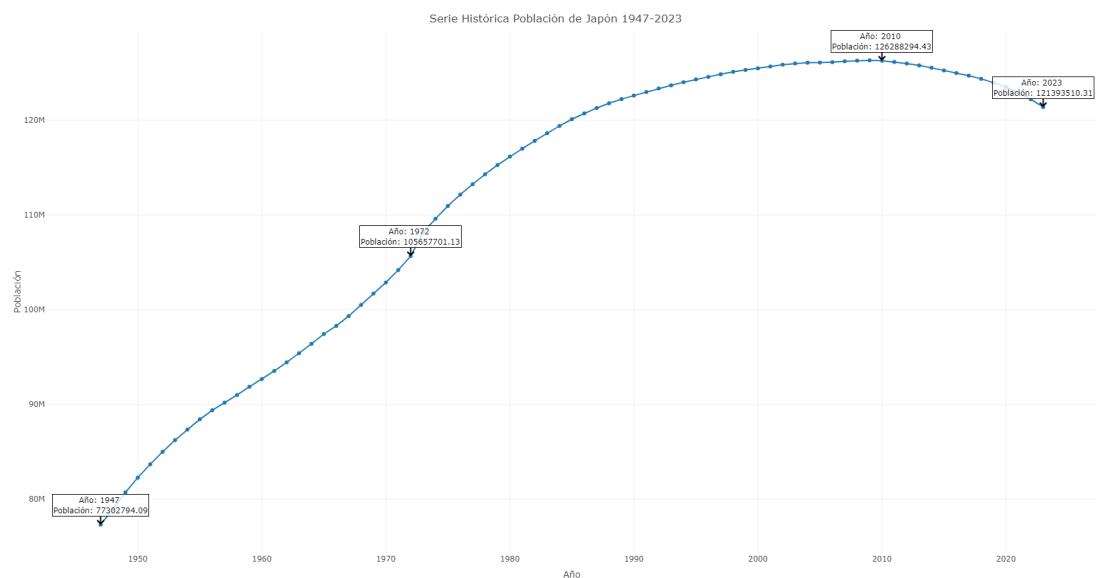
A lo largo de la historia, se observa que, tras los conflictos bélicos, las poblaciones de los países involucrados tienden a crecer como parte de un proceso de recuperación

### 3.4 Elaboración de los perfiles demográficos

integral que abarca diversos ámbitos, como el social, económico, industrial y comercial.

Japón no fue una excepción a esta tendencia luego de su participación en la Guerra del Pacífico a mediados del siglo XX. Tras las enormes pérdidas humanas y materiales ocasionadas por el conflicto, el país, siendo uno de los más afectados, emprendió un profundo proceso de reconstrucción. Este esfuerzo se enfocó en múltiples áreas, como la industrialización, la reforma educativa, el fortalecimiento del marco jurídico y la reconfiguración de sus relaciones internacionales, con el propósito de superar los estragos de la guerra y avanzar hacia el desarrollo y bienestar de la nación.

#### 3.4.1.1. Evolución Histórica de la Población



**Figura 3.2:** Serie Histórica población de Japón 1947 - 2023

En la figura 3.2 podemos observar la evolución histórica de la población de Japón desde el año 1947 hasta 2023. Donde se destacan principalmente cuatro (4) puntos donde la población crece y decae con respecto al comportamiento inicial.

Después de la Segunda Guerra Mundial, Japón inició un arduo proceso de recuperación tras su derrota en 1945. Para 1947, el país vivía una explosión demográfica conocida como el Baby Boom (explosión de natalidad), con altas tasas de natalidad impulsadas por el regreso de soldados y la repatriación de ciudadanos desde territorios ocupados. Este fenómeno incrementó rápidamente la población, alcanzando más de 72 millones de habitantes según el Censo Extraordinario de ese año. Durante el período

### **3.4 Elaboración de los perfiles demográficos**

---

de 1947 a 1949, se registraron más de 8 millones de nacimientos, con un pico en 1949 de casi 2,7 millones de bebés.

A pesar de este crecimiento, las condiciones de vida eran desafiantes, con escasez de alimentos, viviendas inadecuadas y sobrecupo en aulas escolares, lo que llevó a soluciones como aulas prefabricadas. En términos económicos, Japón comenzó su reconstrucción con el apoyo de Estados Unidos, estableciendo las bases para el posterior “milagro económico”. Sin embargo, el Producto Interno Bruto (PIB) aún era fluctuante debido al estado inicial del proceso de recuperación. Este crecimiento demográfico y su impacto en la sociedad sentaron las bases para transformaciones culturales, económicas y educativas que marcarían el futuro de la nación.

En la década de 1970, Japón vivió una transformación demográfica y económica significativa. La tasa de natalidad comenzó a disminuir en comparación con la posguerra, con un promedio de 1,73 hijos por familia en 1975, frente a los 2,67 hijos de la generación anterior. Este cambio reflejaba una transición hacia familias más pequeñas, mientras que la esperanza de vida seguía aumentando y la población se concentraba cada vez más en áreas urbanas.

En términos económicos, Japón experimentó un crecimiento sin precedentes, conocido como el “Izanagi Boom” (1965-1970), con tasas de crecimiento del PIB superiores al 10 % durante la década de 1960 y un promedio del 8 % anual hasta 1973 (para mayor detalle, véase la Tabla 3.1). Este auge fue impulsado por la industria manufacturera, especialmente los sectores automotriz y electrónico, así como por altas tasas de ahorro e inversión. Japón se consolidó como una potencia económica mundial, con un PIB per cápita en constante aumento.

Año	Crecimiento del PIB (% anual) de Japón
1961	12.04 %
1962	8.91 %
1963	8.47 %
1964	11.68 %
1965	5.82 %
1966	10.64 %
1967	11.08 %
1968	12.88 %
1969	12.48 %
1970	0.40 %
1971	4.70 %
1972	8.41 %
1973	8.03 %
1974	-1.23 %
1975	3.09 %

**Tabla 3.1:** Crecimiento del PIB (% anual) de Japón. Fuente: Banco Mundial.

Sin embargo, en 1973, la Primera Crisis del Petróleo y el colapso del sistema de Bretton Woods marcaron el fin de este crecimiento acelerado. Estas crisis llevaron a un aumento en los costos de producción y a la reubicación de filiales japonesas en el sudeste asiático, lo que permitió a Japón mantener su competitividad global mientras fomentaba la inversión extranjera directa en la región.

Para el año 2010, Japón tenía una población total de aproximadamente 127,6 millones de habitantes, según el censo oficial de ese año. Este fue uno de los puntos más altos en la historia demográfica del país antes de que comenzara un declive poblacional sostenido. La estructura demográfica reflejaba una sociedad envejecida, con un 23,1% de la población mayor de 65 años, mientras que solo el 13,37% correspondía a niños menores de 14 años. Este envejecimiento de la población era una de las principales características de Japón en ese momento.

Finalmente para el año 2023, Japón atraviesa una severa crisis demográfica caracterizada por un descenso poblacional constante que ha llevado a una población total infe-

rior a los 125 millones, marcando 13 años consecutivos de disminución. Este fenómeno es impulsado por una de las tasas de natalidad más bajas del mundo, aproximadamente 1.3 hijos por mujer, mientras que la esperanza de vida, una de las más altas globalmente, alcanza los 84 años en promedio. Además, el 29.3 % de la población tiene 65 años o más, posicionando a Japón como el país con la mayor proporción de adultos mayores a nivel mundial.

El tsunami de 2011 dejó una marca duradera en la demografía japonesa. Las 15.899 muertes y los 2.556 desaparecidos, junto con el éxodo poblacional desde zonas afectadas como Fukushima, acentuaron el despoblamiento en estas regiones. La migración de los jóvenes a las grandes ciudades no solo incrementó el envejecimiento en áreas rurales, sino que también redujo aún más las tasas de natalidad locales, intensificando los desafíos a nivel nacional.

Económicamente, Japón enfrenta retos significativos. La fuerza laboral, cada vez más reducida, dificulta el sostenimiento del PIB, mientras que los costos asociados al cuidado de la población anciana representan un desafío considerable para las finanzas públicas. A pesar de estos obstáculos, el gobierno ha implementado políticas para estimular la economía y fomentar tanto la inmigración como el aumento de la tasa de natalidad. Sin embargo, el envejecimiento de la población y la disminución en el crecimiento demográfico continúan siendo temas críticos para la sostenibilidad económica y social del país.

#### 3.4.1.2. Pirámides Poblacionales

En las figuras 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6 se presentan las pirámides poblacionales, que muestran la evolución histórica de la composición poblacional de Japón durante el período 1947-2023.

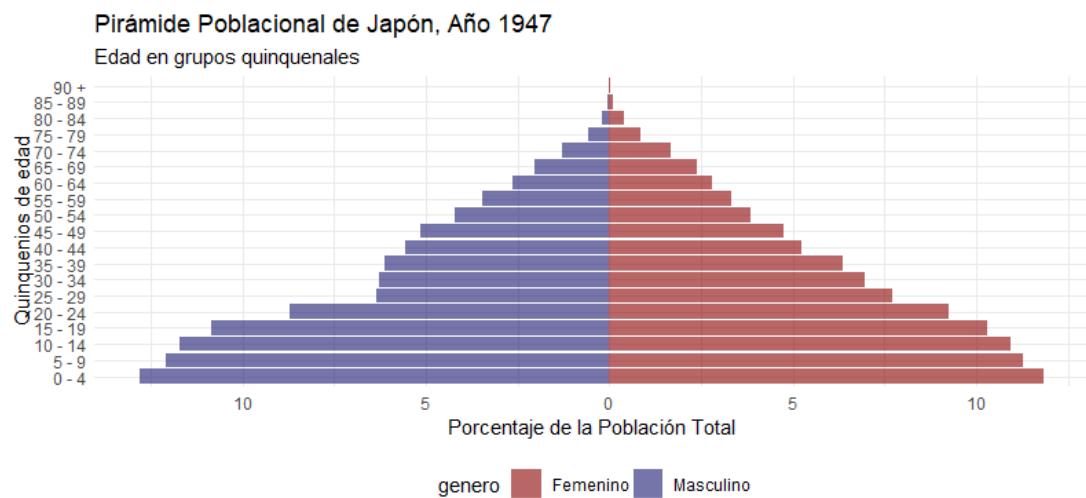
La pirámide poblacional es una representación gráfica que muestra la estructura demográfica de una población según edad y sexo. En el eje horizontal ( $X$ ) se indica el número total de personas, diferenciado por sexo, mientras que en el eje vertical ( $Y$ ) se ordenan los grupos de edades de manera ascendente desde la base.

Dependiendo de sus características, una pirámide poblacional puede adoptar tres formas principales:

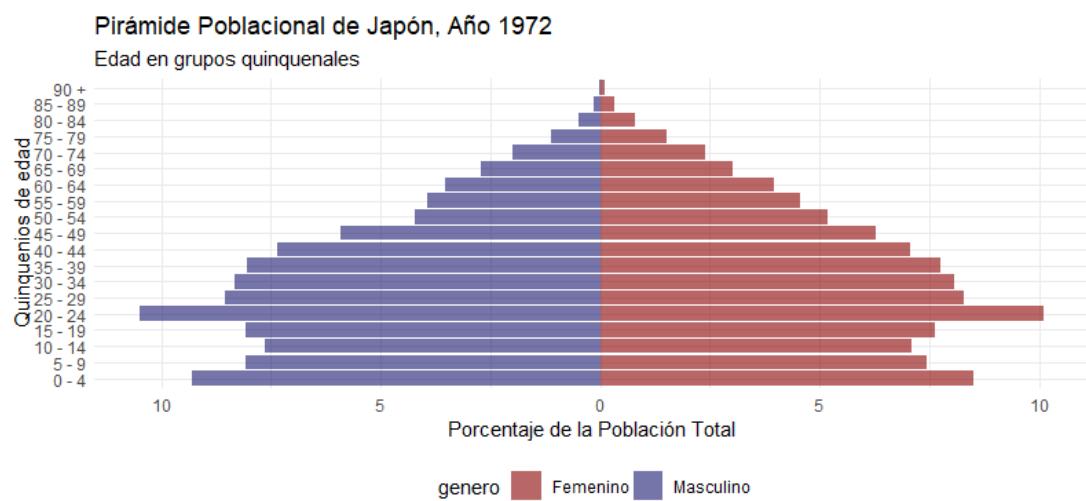
- **Progresiva (Expansiva):** Común en países subdesarrollados, se caracteriza por altas tasas de natalidad y una esperanza de vida corta.
- **Estacionaria (Estable):** Propia de países en vías de desarrollo, refleja una disminución en la mortalidad mientras las tasas de natalidad permanecen elevadas.
- **Regresiva (Constrictiva):** Asociada a países desarrollados, se distingue por bajas tasas de natalidad y un porcentaje elevado de población en edades avanzadas

### 3.4 Elaboración de los perfiles demográficos

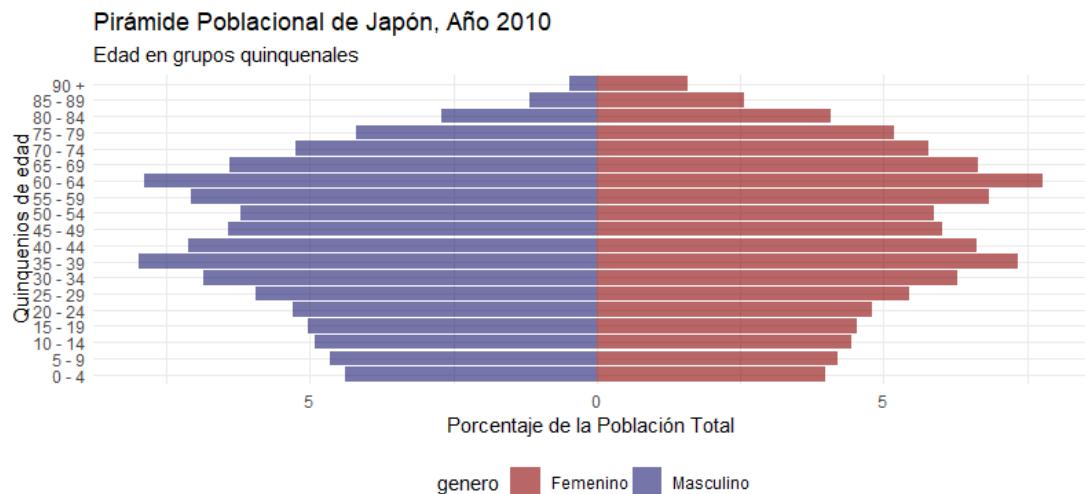
por lo que existe una mayor esperanza de vida y un decreto en la mortalidad. Típica de poblaciones envejecidas.



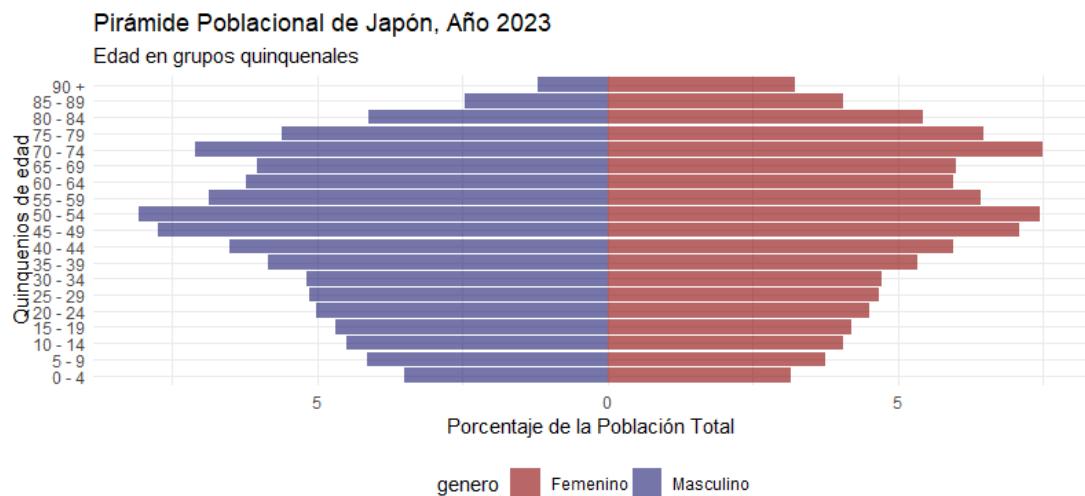
**Figura 3.3:** Pirámide Poblacional de Japón, Año 1947



**Figura 3.4:** Pirámide Poblacional de Japón, Año 1972



**Figura 3.5:** Pirámide Poblacional de Japón, Año 2010



**Figura 3.6:** Pirámide Poblacional de Japón, Año 2023

Podemos apreciar en la figuras antes presentadas, que a lo largo de los años, la población japonesa ha experimentado cambios significativos en su dinámica demográfica, pasando por las tres formas principales de pirámides poblacionales.

Para el año 1947 figura 3.3, Japón presentaba una pirámide poblacional de tipo **Progresiva**, caracterizada por tasas de natalidad extremadamente altas. Este notable incremento en los nacimientos fue consecuencia del conocido “Baby Boom”, posterior a la Segunda Guerra Mundial, que coincidió con un proceso de recuperación demográfica

### 3.4 Elaboración de los perfiles demográficos

---

y social. Factores como el regreso de soldados y la repatriación de ciudadanos desde territorios ocupados contribuyeron significativamente a este crecimiento poblacional, resultando en una pirámide con una base amplia.

Otra característica destacada de esta estructura poblacional era la baja esperanza de vida al nacer, producto de las secuelas de la guerra y las difíciles condiciones de vida. En 1947, la esperanza de vida se estimaba en aproximadamente 50 años para los hombres y 54 años para las mujeres, reflejando los serios desafíos de salud pública y las limitaciones económicas que enfrentaba el país en ese período.

Con el paso de las décadas, la población de Japón experimentó importantes transformaciones, y para los años 70, la pirámide poblacional reflejaba un modelo **Estacionario**. En 1972 figura 3.4, Japón ya mostraba características propias de un país en vías de desarrollo. Según cifras del Banco Mundial, la tasa de natalidad en ese año era de aproximadamente 19,3 nacimientos por cada 1.000 personas, lo que evidenciaba una notable disminución en comparación con décadas anteriores y marcaba el inicio de una transición hacia tasas de natalidad más bajas.

Por otro lado, la esperanza de vida en 1972 alcanzó un promedio de 73,15 años, con 70,5 años para los hombres y 75,9 años para las mujeres. Este incremento se debía a importantes avances en el sistema de salud, la mejora en la nutrición y las condiciones de vida, logrados durante el proceso de recuperación económica tras la Segunda Guerra Mundial. Estas mejoras contribuyeron a transformar la estructura demográfica y social del país durante este período.

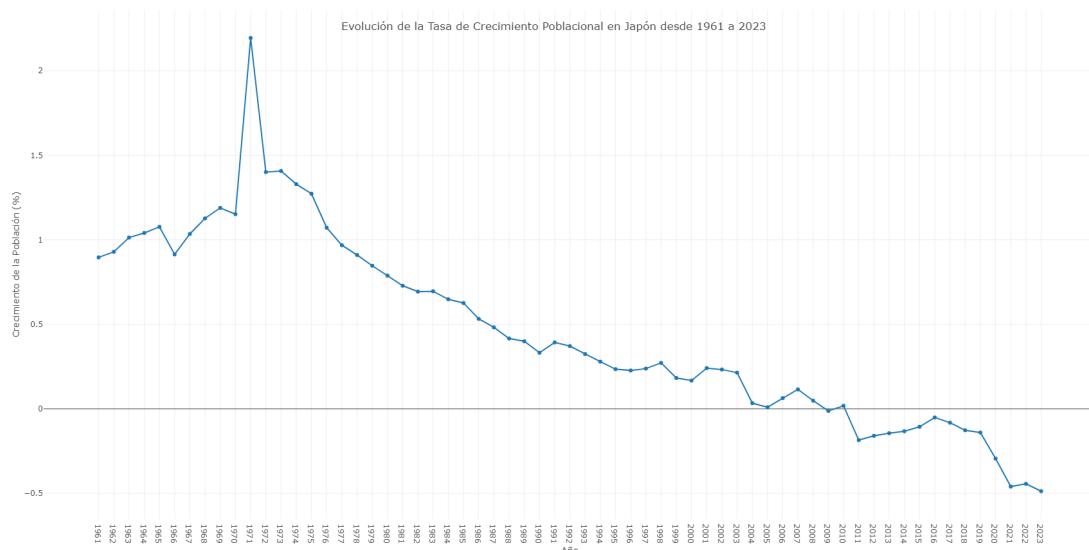
Seguidamente para el año 2010 figura 3.5, la estructura poblacional japonesa adoptó un modelo **Regresivo**, típico de países desarrollados. Esta transición refleja una tasa de natalidad aún más baja, situándose en apenas 8,5 nacimientos por cada 1.000 personas, lo que reflejaba una de las tasas más bajas a nivel mundial, lo que dio lugar a una base mucho más estrecha en la pirámide. En paralelo, la esperanza de vida aumentó, alcanzando un promedio de 82,84 años, con 79,55 años para los hombres y 86,3 años para las mujeres.

Finalmente, para el año 2023 figura 3.6, la estructura poblacional japonesa mantiene el modelo **Regresivo**, caracterizado por una base significativamente más estrecha en su pirámide poblacional en comparación con años anteriores. Esto refleja la baja tasa de natalidad que enfrenta el país, con apenas 6,1 nacimientos por cada 1.000 personas, una de las más bajas a nivel mundial. Este descenso evidencia los desafíos persistentes para fomentar el crecimiento poblacional en Japón. Por otro lado, la esperanza de vida en Japón se mantuvo entre las más altas del mundo, alcanzando un promedio de 84,1 años. Desglosado por género, las mujeres lograron una esperanza de vida de 87,14 años, mientras que los hombres alcanzaron 81,09 años. Esto consolida a Japón como el país más envejecido del mundo.

### 3.4 Elaboración de los perfiles demográficos

Estos cambios demográficos resaltan la evolución de Japón desde un país desbastado por la guerra hacia uno plenamente desarrollado, con dinámicas poblacionales que reflejan avances en salud, economía y calidad de vida, aunque también retos asociados al envejecimiento de su población.

#### 3.4.1.3. Crecimiento Poblacional

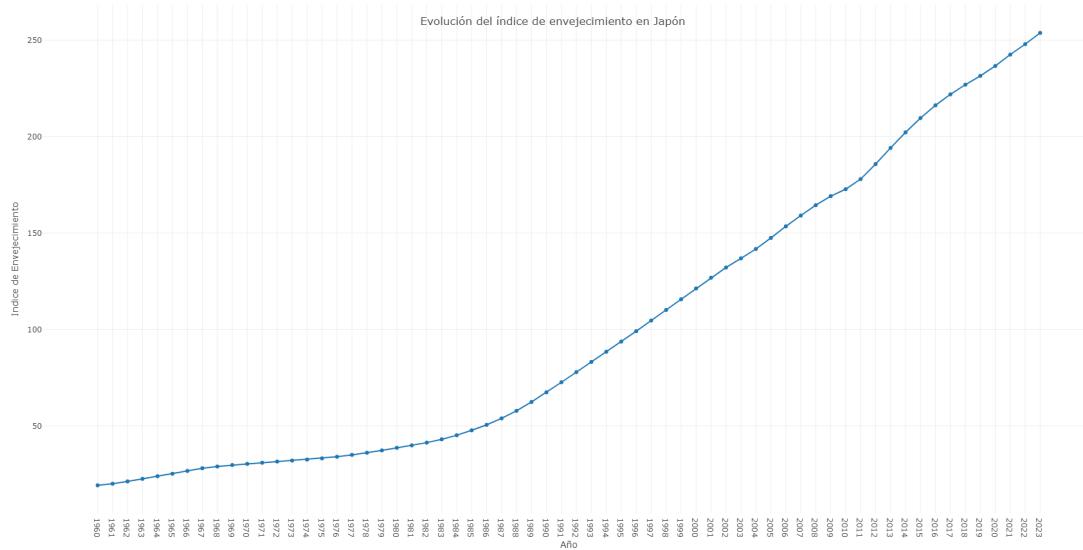


**Figura 3.7:** Evolución de la Tasa de Crecimiento Poblacional en Japón desde 1961 a 2023

La tasa de crecimiento poblacional mide el aumento o disminución de la población durante un año determinado, considerando factores como la natalidad, la mortalidad y la migración. Este indicador permite analizar cómo ha variado, año tras año, la población total de Japón.

En Japón, la tasa de crecimiento poblacional ha experimentado una disminución continua a lo largo de las décadas, reflejando los efectos de la transición demográfica y el envejecimiento acelerado de la sociedad. Tal como se muestra en la figura 3.7, el crecimiento alcanzó su punto más alto en 1971, con un valor aproximado del 2,19 %, durante una etapa de recuperación económica y expansión social. Desde entonces, la tasa ha disminuido de forma sostenida, y en la actualidad, Japón enfrenta tasas negativas, influenciadas por una baja natalidad y un marcado envejecimiento de su población.

#### 3.4.1.4. Evolución del Índice de Envejecimiento



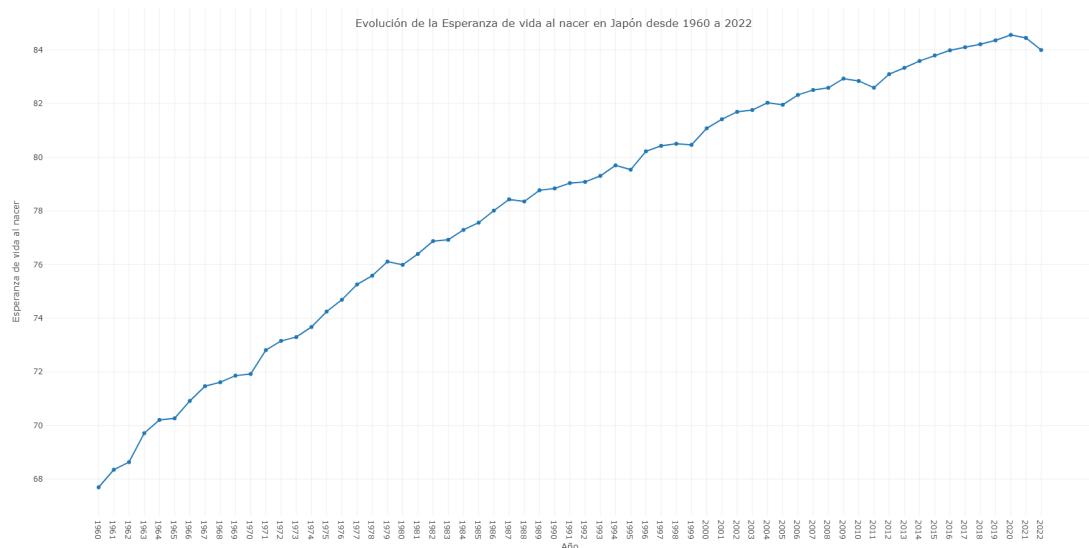
**Figura 3.8:** Evolución del índice de envejecimiento en Japón

El índice de envejecimiento es una medida demográfica que indica la proporción de personas mayores a 65 años de edad en comparación con la población joven de hasta 15 años de edad. Este se calcula dividiendo la población de personas mayores a 65 años entre la población de personas menores a 15 años, multiplicado por 100.

En la figura 3.8 se observa que el índice de envejecimiento en Japón ha mostrado un aumento significativo a partir de la década de 1980 (específicamente a partir del año 1987), creciendo de forma exponencial año tras año y reflejando una tendencia hacia una población cada vez más envejecida.

En Japón, el índice de envejecimiento con las cifras de 2023 es del 253,76%, lo que indica que el número de adultos mayores es muy superior al de la población en edad infantil. Esto significa que hay 253,76 personas mayores de 65 años por cada 100 personas menores de 15 años. Este fenómeno se debe al aumento en la esperanza de vida y a la disminución de la natalidad que se ha venido presentando a lo largo del tiempo, resultando en una población sumamente envejecida.

### 3.4.1.5. Esperanza de vida al nacer

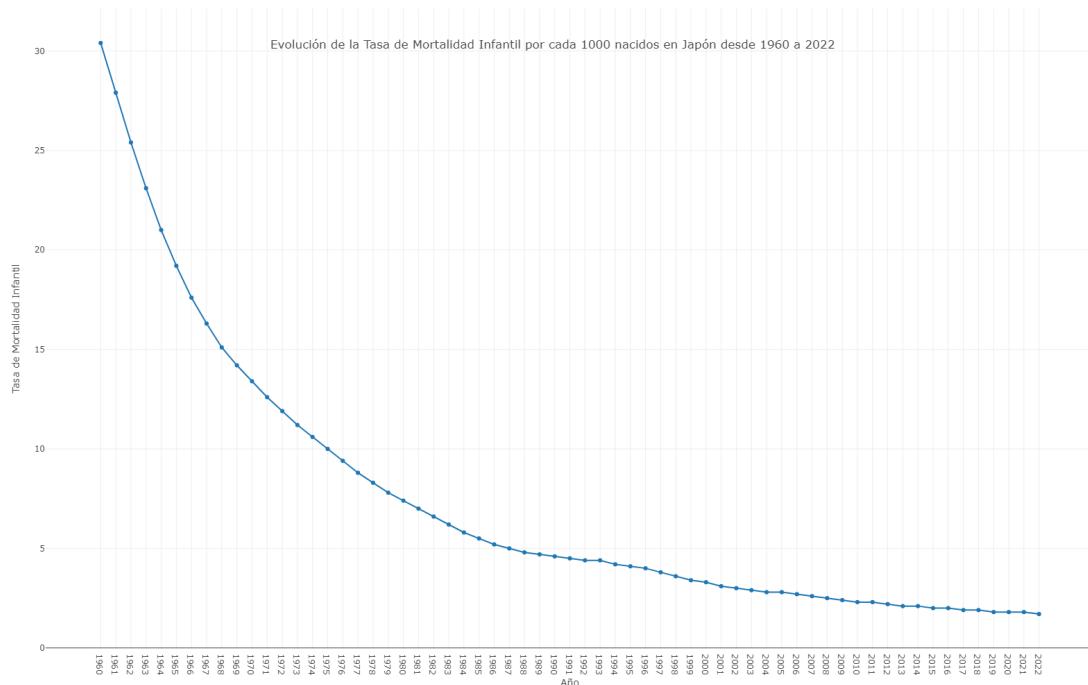


**Figura 3.9:** Evolución de la Esperanza de vida al nacer en Japón desde 1960 a 2022

La esperanza de vida al nacer representa el promedio de años que se espera que viva un recién nacido, asumiendo que los patrones de mortalidad vigentes al momento de su nacimiento se mantengan constantes a lo largo del tiempo.

Como se aprecia en la figura 3.9, la esperanza de vida al nacer en Japón ha registrado un crecimiento significativo a lo largo de las décadas. Según cifras del Banco Mundial, su nivel más bajo se alcanzó en 1960, con un promedio de 67,7 años (65,3 años para hombres y 70,2 años para mujeres), reflejando las difíciles condiciones de vida que persistieron tras la Segunda Guerra Mundial. En contraste, el nivel más alto se registró en 2020, con una esperanza de vida promedio de 84,6 años (81,6 años para hombres y 87,7 años para mujeres), consolidando a Japón como uno de los países con mayor longevidad a nivel mundial.

### 3.4.1.6. Tasa de mortalidad infantil

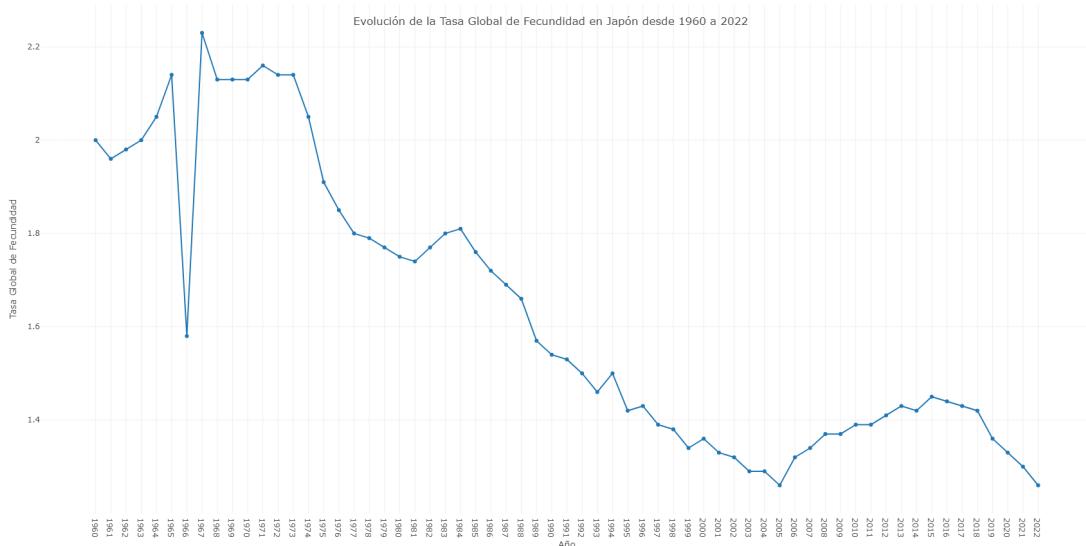


**Figura 3.10:** Evolución de la Tasa de Mortalidad Infantil por cada 1000 nacidos en Japón desde 1960 a 2022

Este indicador proporciona el número de muertes en menores de un año de edad, en un año determinado, por cada 1.000 nacidos vivos.

En la figura 3.10 se muestra cómo la tasa de mortalidad infantil en Japón ha mostrado una notable disminución a lo largo de las décadas, reflejando los avances en salud pública, tecnología médica y condiciones de vida. En 1960, la tasa era de aproximadamente 30 muertes por cada 1.000 nacidos vivos, un valor relativamente alto para los estándares actuales. Sin embargo, gracias a las mejoras en el acceso a servicios de salud y la calidad de vida, esta cifra se redujo drásticamente, alcanzando alrededor de 2 muertes por cada 1.000 nacidos vivos en 2022, posicionando a Japón como uno de los países con las tasas más bajas de mortalidad infantil en el mundo.

### 3.4.1.7. Tasa Global de Fecundidad



**Figura 3.11:** Evolución de la Tasa Global de Fecundidad en Japón desde 1960 a 2022

La tasa global de fecundidad indica el número de hijos que concebiría una mujer, si esta tuviese hijos durante sus años reproductivos.

La tasa global de fecundidad en Japón ha experimentado una disminución significativa a lo largo de las décadas, reflejando cambios sociales, económicos y culturales. En la década de 1960, la tasa era de aproximadamente 2 hijos por mujer. Sin embargo, a medida que el país se desarrollaba y urbanizaba, la tasa de fecundidad comenzó a disminuir.

Valores significativos en la evolución de la tasa global de fecundidad en Japón:

- Década de 1960: La tasa de fecundidad se mantuvo alrededor de 2 hijos por mujer.
- 1971: La tasa alcanzó un máximo de 2,16 hijos por mujer, coincidiendo con un período de recuperación económica y expansión social.
- 1974: Otro máximo se registró en 1974, con una tasa de 2,05 hijos por mujer.
- Decada desde 1980 a 1990: La tasa continuó disminuyendo, alcanzando 1,54 hijos por mujer en 1990.
- 2005: La tasa cayó a 1,26 hijos por mujer, reflejando una tendencia a la baja constante.

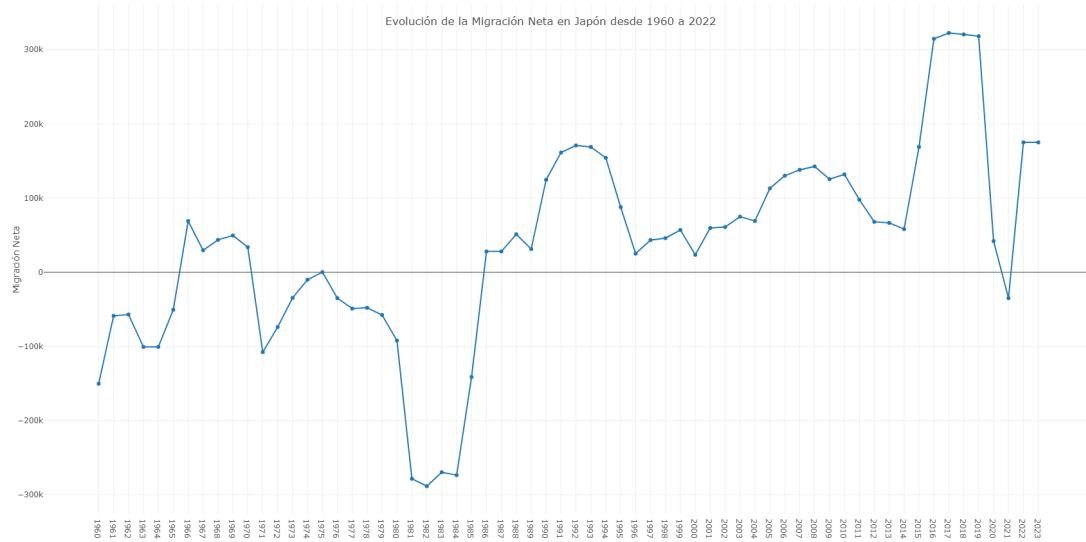
### 3.4 Elaboración de los perfiles demográficos

- 2022: La tasa global de fecundidad alcanzó un mínimo histórico de 1,26 hijos por mujer.

Esta tendencia refleja varios factores, como el aumento de la participación de las mujeres en la fuerza laboral, el retraso en la edad de matrimonio, la postergación de la maternidad y la preferencia por familias más pequeñas.

#### 3.4.1.8. Migración Neta

La tasa de migración muestra el efecto neto de las entradas y salidas de la población en un área determinada.



**Figura 3.12:** Evolución de la Migración Neta en Japón desde 1960 a 2022

En la figura 3.12 se puede observar la evolución de la migración neta en Japón, la cual ha sido bastante dinámica a lo largo de las décadas, reflejando cambios en las políticas migratorias, la economía y las condiciones sociales. En las décadas desde 1960 a 1970 se puede apreciar que Japón experimentó una migración neta negativa, con más personas emigrando del país que inmigrando. Esto se debió en gran parte a las difíciles condiciones económicas y a la búsqueda de mejores oportunidades en el extranjero.

Posteriormente, para la década de 1980 y 1990, la migración neta comenzó a estabilizarse, aunque todavía era negativa. Sin embargo, en los años 90, Japón experimentó un cambio significativo con un aumento en la inmigración, especialmente de países vecinos como China y Corea del Sur. Este cambio se debió a la creciente demanda de

### 3.4 Elaboración de los perfiles demográficos

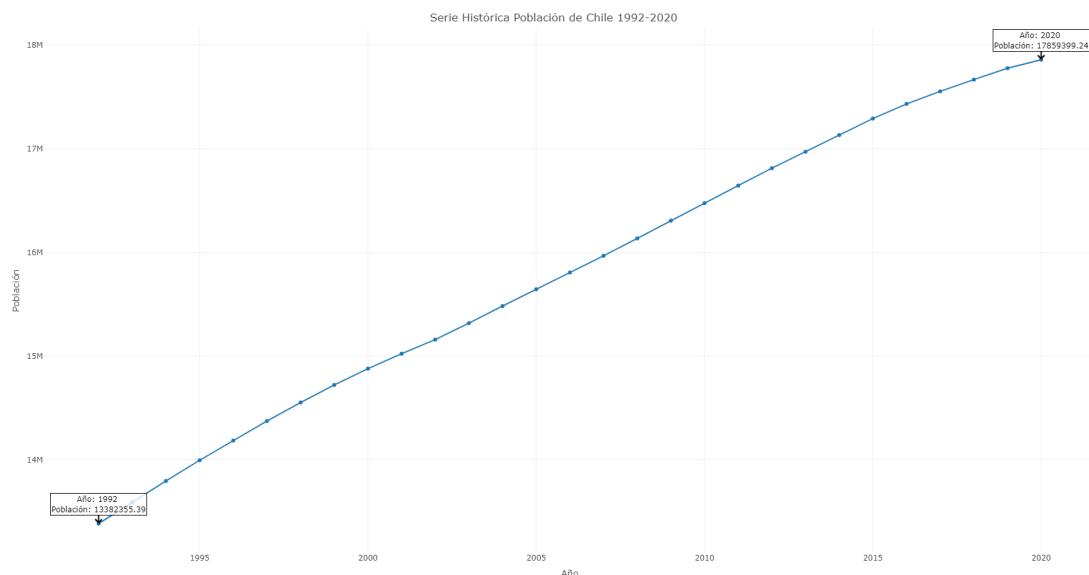
mano de obra en sectores específicos y a la apertura gradual de las políticas migratorias.

Seguidamente para el año 2000, Japón ha visto un aumento constante en la inmigración, aunque la migración neta ha fluctuado. En 2020, la inmigración en Japón creció en 538.807 personas, alcanzando un total de 2.770.996 inmigrantes, lo que representa el 2,2% de la población total. Los principales países de origen de los inmigrantes en Japón son China, Corea del Sur y Vietnam.

A pesar del aumento en la inmigración, Japón sigue enfrentando desafíos demográficos significativos, como el envejecimiento de la población y la baja tasa de natalidad. El gobierno japonés ha implementado diversas políticas para atraer más inmigrantes y abordar estos desafíos, pero la migración neta sigue siendo un tema complejo y en evolución.

#### 3.4.2. Caso de estudio 2: Chile

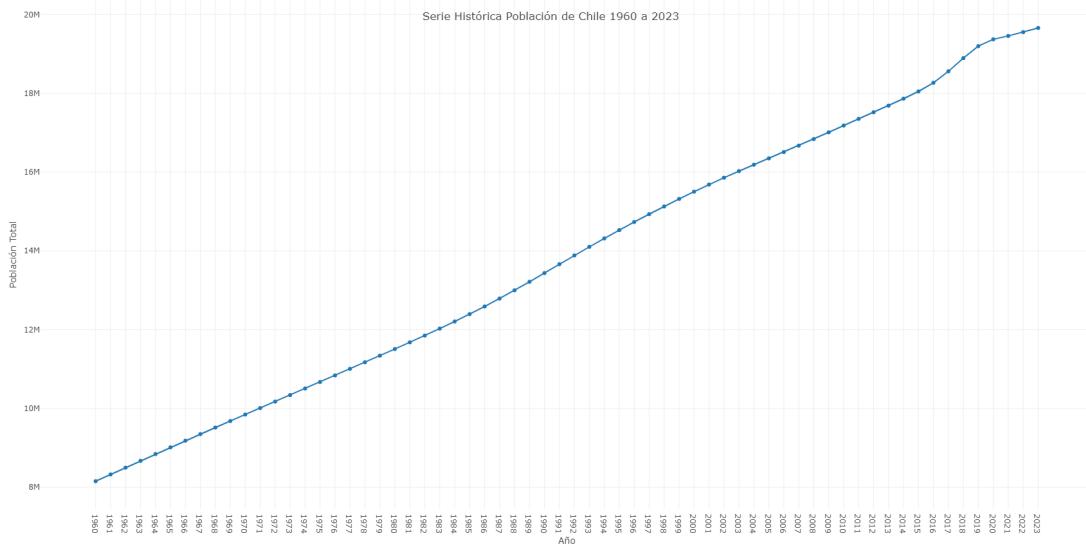
##### 3.4.2.1. Evolución Histórica de la Población



**Figura 3.13:** Serie Histórica población de Chile 1992 - 2020

### 3.4 Elaboración de los perfiles demográficos

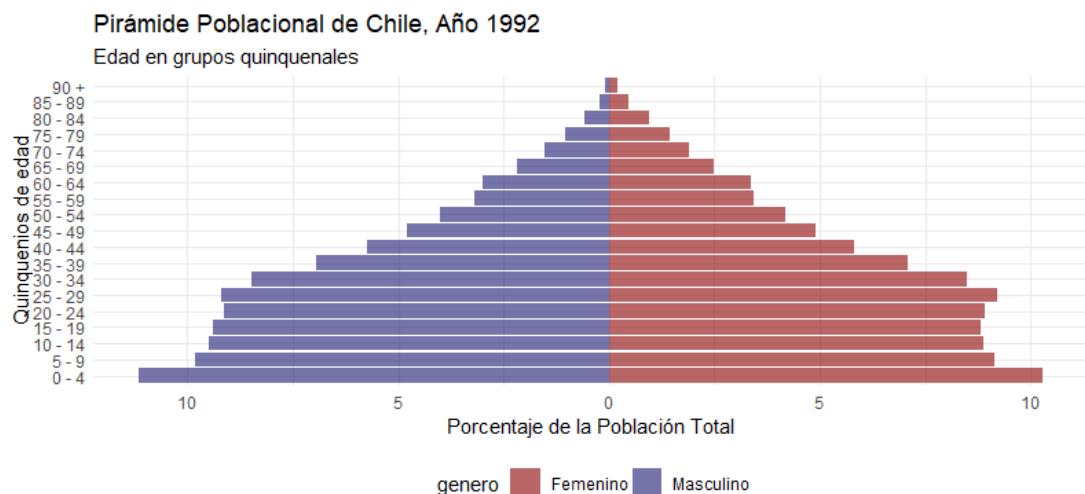
---



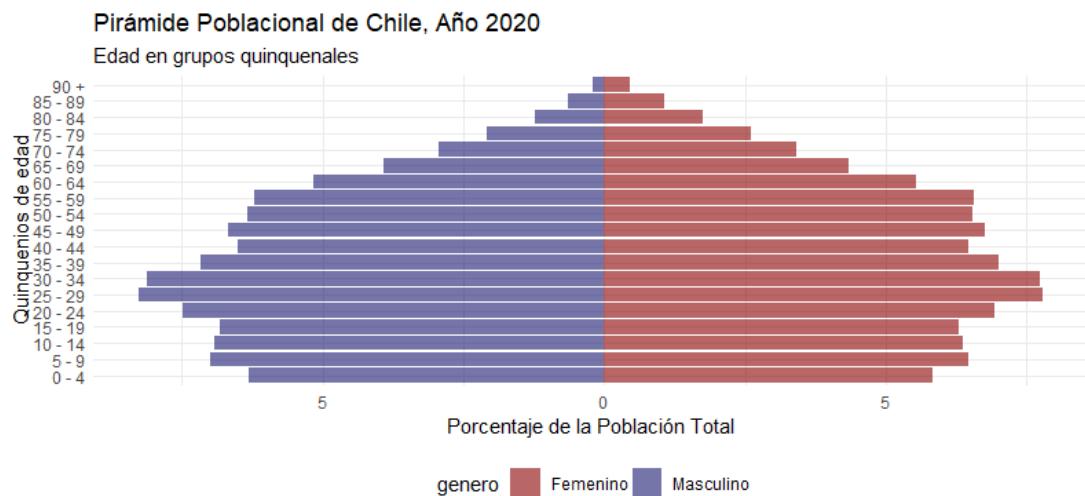
**Figura 3.14:** Serie Histórica población de Chile 1960 - 2023

En la figura 3.13 podemos observar la evolución histórica de la población de Chile desde el año 1992 hasta 2020 según cifras de la HMD, en contraste podemos observar en la figura 3.14 la evolución de la población chilena según cifras del Banco Mundial desde el año 1960 hasta 2023. Donde es evidente que la población ha presentado un crecimiento acelerado desde el año 1960, manteniendo su comportamiento.

### 3.4.2.2. Piramides Poblacionales



**Figura 3.15:** Pirámide Poblacional de Chile, Año 1992



**Figura 3.16:** Pirámide Poblacional de Chile, Año 2020

En las figuras 3.15 y 3.16 tenemos las pirámides poblacionales donde podemos observar la evolución histórica de la composición poblacional de Chile para el período 1992-2020.

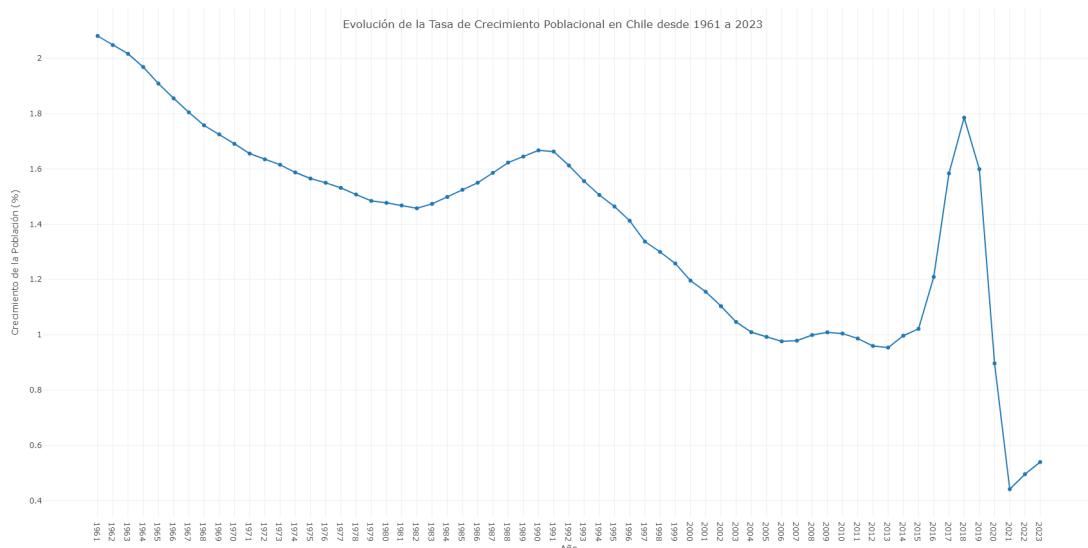
En la figura 3.15 podemos apreciar que para el año 1992, la estructura poblacional

### 3.4 Elaboración de los perfiles demográficos

chilena adoptó un modelo de pirámide poblacional de tipo **Progresiva**. Este tipo de pirámide tiene una base ancha que indica una alta proporción de jóvenes en la población. Una pirámide progresiva es característica de una población en crecimiento, con altas tasas de natalidad y una proporción mayor de personas jóvenes en comparación con las personas mayores. Esto se alinea con la estructura demográfica de Chile en 1992, donde había una mayor cantidad de niños y adolescentes y una menor cantidad de personas mayores.

A continuación, se puede observar en la figura 3.16 la pirámide poblacional de 2020, la cual muestra un país en transición hacia una estructura demográfica más envejecida, adoptando un modelo **Regresivo**. La disminución en la tasa de natalidad en la base de la pirámide y el aumento en la esperanza de vida en la cima han llevado a un envejecimiento de la población. Esto sugiere que, en el futuro, Chile enfrentará desafíos relacionados con el envejecimiento de la población, como la necesidad de servicios de salud y apoyo social para las personas mayores, así como posibles impactos en la fuerza laboral y la economía.

#### 3.4.2.3. Crecimiento Poblacional



**Figura 3.17:** Evolución de la Tasa de Crecimiento Poblacional en Chile desde 1961 a 2023

La evolución de la tasa de crecimiento poblacional en Chile ha mostrado variaciones significativas a lo largo de las décadas, reflejando cambios en la natalidad, mortalidad y migración.

Para las décadas comprendidas entre 1960 y 1970, Chile experimentó un crecimiento poblacional sostenido, con tasas de crecimiento anual que oscilaban entre el 1,6% y el

### 3.4 Elaboración de los perfiles demográficos

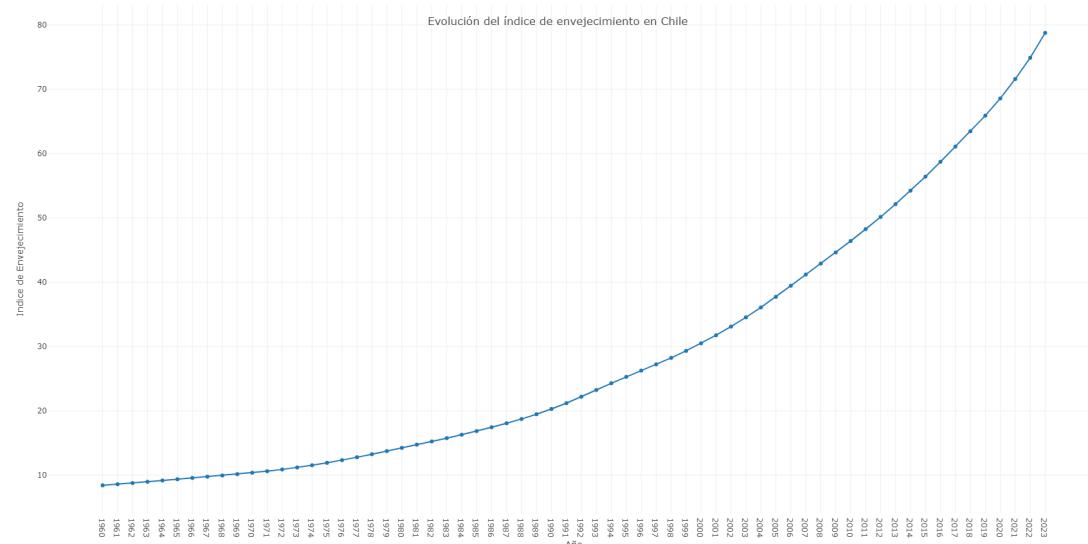
2,1 %. Este período se caracterizó por una alta tasa de natalidad y una disminución gradual de la mortalidad, lo que impulsó el crecimiento demográfico.

Posteriormente, para los años 80 y 90, la tasa de crecimiento poblacional comenzó a disminuir, aunque se mantuvo positiva. En 1990, la tasa de crecimiento anual era de aproximadamente 1,67 %, y para 1999 había disminuido a 1,25 %. Esta reducción se debió a una disminución en la tasa de natalidad y a un aumento en la esperanza de vida.

En la década de 2000, la tasa de crecimiento poblacional continuó disminuyendo. En 2000, la tasa era de 1,20 %, y para 2010 había bajado a 1,04 %. Este período se caracterizó por una estabilización en la tasa de natalidad y un aumento en la inmigración, lo que ayudó a mantener un crecimiento positivo.

Finalmente en la década de 2010, la tasa de crecimiento poblacional siguió disminuyendo. En 2015, la tasa era de 1,02 %, y para 2020 había disminuido a 0,44 %, el valor más bajo registrado en décadas recientes. Esta tendencia refleja una disminución continua en la tasa de natalidad y un envejecimiento de la población.

#### 3.4.2.4. Evolución del Índice de Envejecimiento

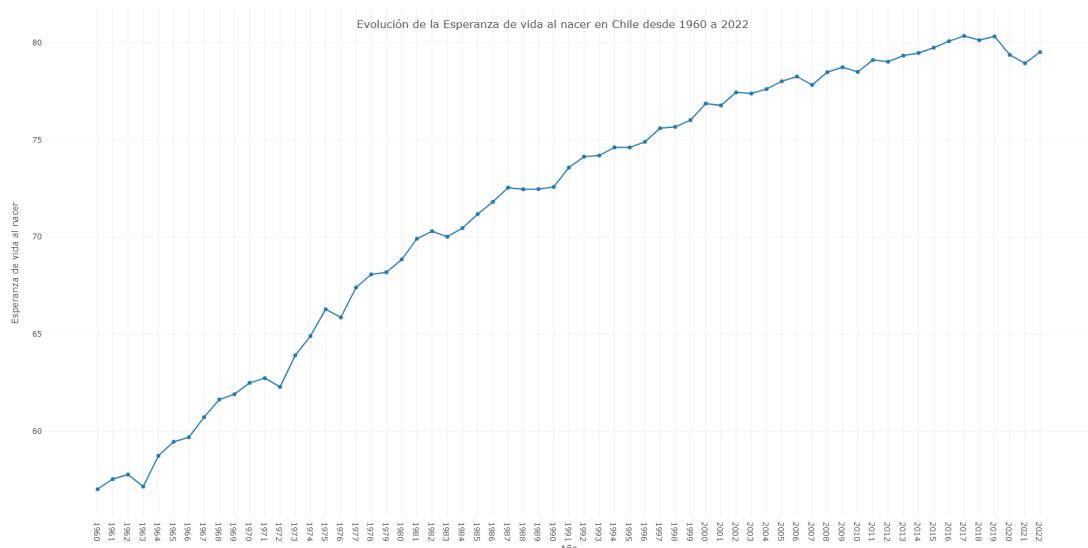


**Figura 3.18:** Evolución del índice de envejecimiento en Chile

En la figura 3.18 se observa que el índice de envejecimiento en Chile ha mostrado un aumento significativo a lo largo de las décadas, creciendo año tras año y reflejando una tendencia hacia una población cada vez más envejecida.

En Chile, el índice de envejecimiento con las cifras de 2023 es del 78,77 %, lo que indica que el número de adultos mayores con respecto a la población infantil ha aumentado. Esto significa que hay 78,77 personas mayores de 65 años por cada 100 personas menores de 15 años. Este fenómeno se debe al aumento en la esperanza de vida y a la disminución de la natalidad que se ha venido presentando a lo largo del tiempo, resultando en una población en fase de envejecimiento.

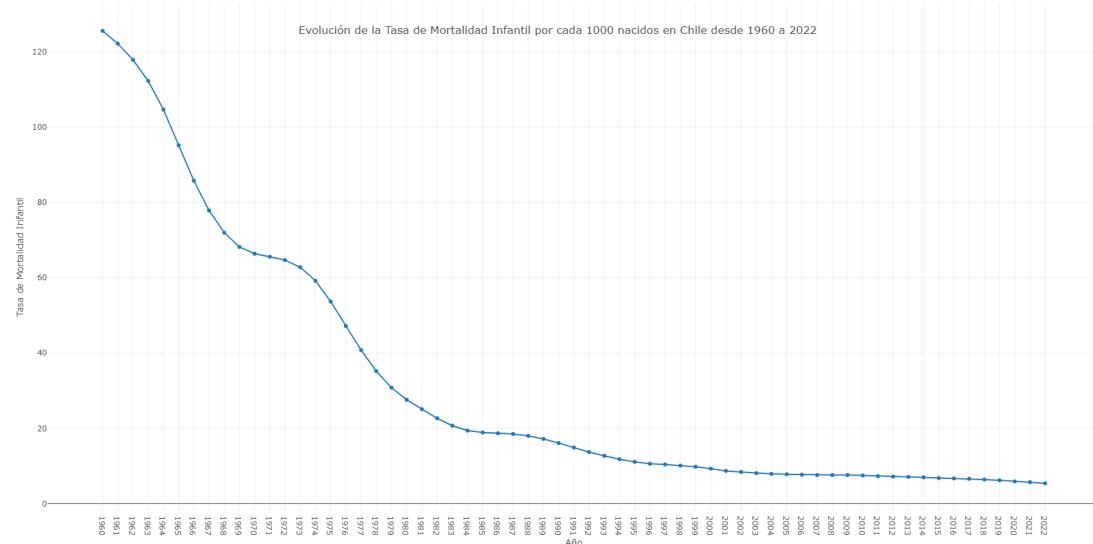
#### 3.4.2.5. Esperanza de vida al nacer



**Figura 3.19:** Evolución de la Esperanza de vida al nacer en Chile desde 1960 a 2022

Como se puede observar en la figura 3.19, la esperanza de vida ha mostrado tanto incrementos como disminuciones a lo largo de los años de estudio. Sin embargo, a pesar de las pequeñas caídas que ha presentado, no ha cambiado su tendencia positiva que se ha observado desde el año 1961, alcanzando su valor máximo en el año 2019, con 80,33 años de edad según cifras del Banco Mundial, reflejando un rápido envejecimiento en la población.

### 3.4.2.6. Tasa de mortalidad infantil

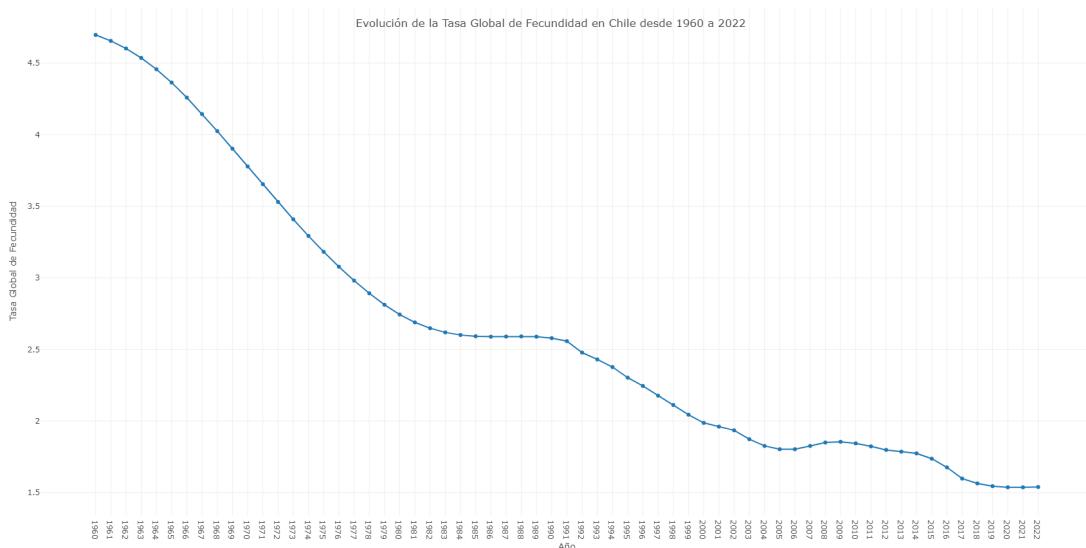


**Figura 3.20:** Evolución de la Tasa de Mortalidad Infantil por cada 1000 nacidos en Chile desde 1960 a 2022

En la figura 3.20 se puede observar que la tasa de mortalidad infantil en Chile ha experimentado una notable disminución a lo largo de las décadas, reflejando mejoras en la salud pública, la atención médica y las condiciones de vida. En 1960, la tasa de mortalidad infantil era de aproximadamente 125,6 muertes por cada 1.000 nacidos vivos. A lo largo de los años, esta cifra ha disminuido significativamente, alcanzando 5,4 muertes por cada 1.000 nacidos vivos en 2022.

Este descenso se debe a una serie de factores, como la implementación de políticas de salud pública, el aumento en la cobertura de servicios de salud y la mejora en las condiciones socioeconómicas.

### 3.4.2.7. Tasa Global de Fecundidad

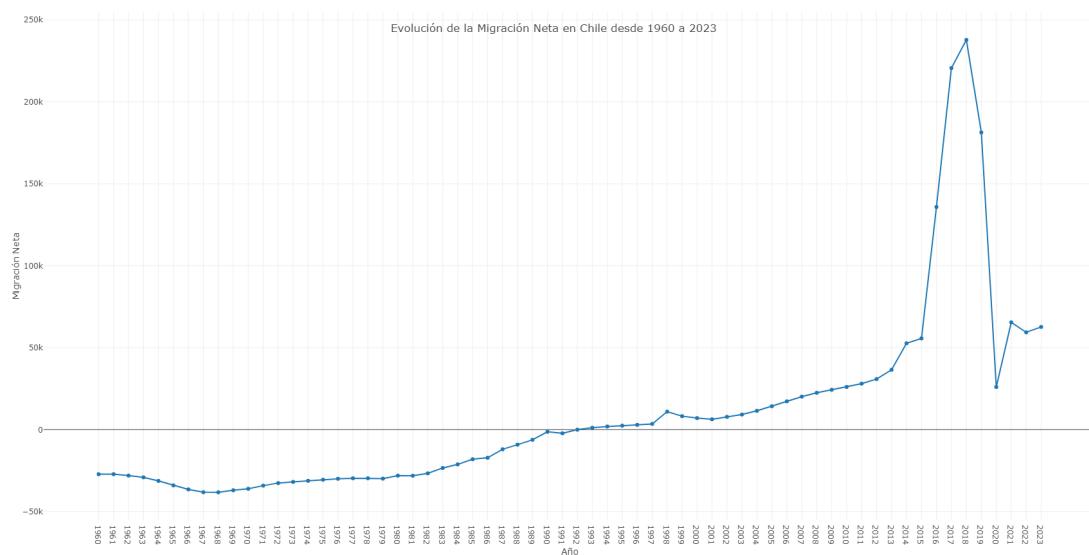


**Figura 3.21:** Evolución de la Tasa Global de Fecundidad en Chile desde 1960 a 2022

Ahora bien, en la figura 3.21 se puede observar el comportamiento histórico que ha venido presentando la tasa global de fecundidad en Chile, la cual ha experimentado una notable disminución a lo largo de las décadas, reflejando cambios sociales, económicos y culturales. En la década de 1960, la tasa de fecundidad era de aproximadamente 4,7 hijos por mujer. Sin embargo, a medida que el país se desarrollaba y urbanizaba, la tasa comenzó a disminuir.

Para el año 2004, la tasa global de fecundidad había descendido a 1,8 hijos por mujer. Esta tendencia continuó en las décadas siguientes, alcanzando 1,5 hijos por mujer en 2020. Los factores que han influido en esta disminución incluyen el aumento de la participación de las mujeres en la fuerza laboral, el acceso a métodos anticonceptivos y el retraso en la edad de matrimonio y maternidad.

### 3.4.2.8. Migración Neta



**Figura 3.22:** Evolución de la Migración Neta en Chile desde 1960 a 2022

En la figura 3.22 se puede observar la evolución histórica de la migración neta en Chile, la cual ha experimentado cambios significativos a lo largo de las décadas, influenciada por factores económicos, sociales y políticos. En las décadas de 1960 y 1970, Chile tuvo una migración neta negativa, con más personas emigrando del país que inmigrando, debido a las difíciles condiciones económicas y políticas.

A partir de la década de 1990, la situación comenzó a cambiar obteniendo valores positivos en este indicador, y Chile empezó a recibir un mayor número de inmigrantes, especialmente de países vecinos como Perú, Bolivia y Colombia. Este aumento en la inmigración se debió a la estabilidad económica y política del país, así como a la demanda de mano de obra en sectores específicos.

En la última década, la migración neta en Chile ha mostrado un aumento constante, destacando un crecimiento significativo en el número de inmigrantes provenientes de Venezuela como consecuencia de la crisis socioeconómica en ese país. Para 2023, se estimaba que la población inmigrante en Chile representaba cerca del 10 % de la población total, con los venezolanos conformando el grupo más numeroso, con un valor aproximado de 1.965.884 inmigrantes.

### 3.5. Bases metódicas utilizadas en el trabajo de investigación

Debido a lo expuesto anteriormente, se procede a evaluar las distintas metodologías expresadas en el capítulo 2, con el motivo de proyectar este comportamiento para los próximos 50 años.

El desarrollo de los métodos de proyección de mortalidad fue realizado con el software estadístico R, haciendo uso principalmente del paquete demography. A través de su función principal, obtenemos los coeficientes requeridos para los métodos mencionados. Es importante mencionar que esta función se aplica a objetos de tipo demogdata, en los que se almacenan las respectivas tasas centrales y cifras poblacionales por edad y año. A continuación, se detallan los métodos mencionados para ambas fuentes de datos e información.

⌚ Japon	list [7] (S3: demogdata)	List of length 7
type	character [1]	'mortality'
label	character [1]	'Japon'
lambda	double [1]	0
year	integer [77]	1947 1948 1949 1950 1951 1952 ...
age	integer [111]	0 1 2 3 4 5 ...
⌚ pop	list [3]	List of length 3
female	double [111 x 77]	1122696 777088 850243 985176 953959 995604 1259202 1075784 762712 841984 ...
male	double [111 x 77]	1170640 800959 869133 1006141 976684 1020043 1317850 1117646 786816 861884 ...
total	double [111 x 77]	2293336 1578046 1719376 1991317 1930643 2015647 2577052 2193430 1549528 1703868 ...
⌚ rate	list [3]	List of length 3
female	double [111 x 77]	0.083659 0.035671 0.017285 0.011235 0.007028 0.004833 0.059343 0.018638 0.010303 ...
male	double [111 x 77]	0.095519 0.037045 0.017216 0.011339 0.007474 0.005114 0.068986 0.019426 0.010408 ...
total	double [111 x 77]	0.089713 0.036368 0.017250 0.011288 0.007253 0.004975 0.064274 0.019039 0.010356 ...

**Figura 3.23:** Japón. Demogdata según la HDM desde el año 1947 a 2023

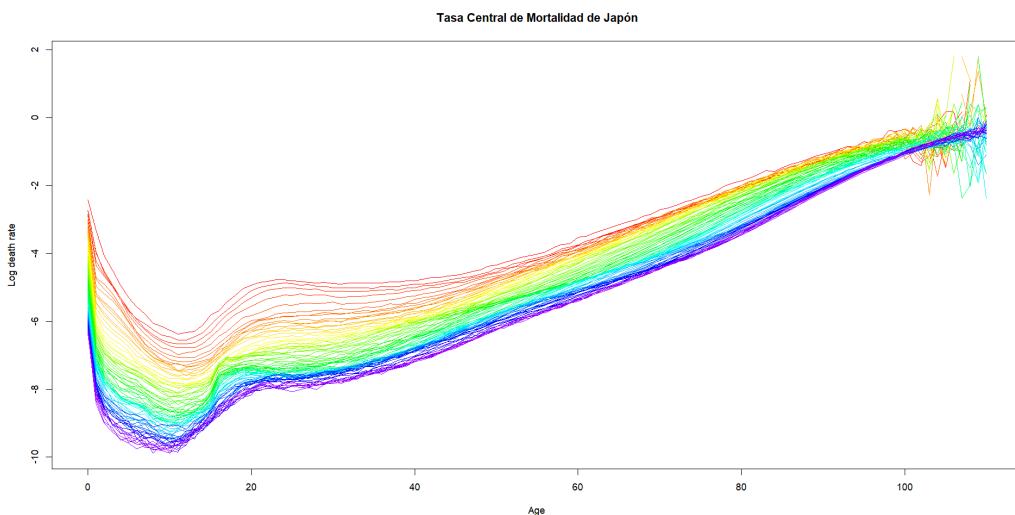
### 3.5 Bases metódicas utilizadas en el trabajo de investigación

Chile	list [7] (S3: demogdata)	List of length 7
type	character [1]	'mortality'
label	character [1]	'Chile'
lambda	double [1]	0
year	integer [29]	1992 1993 1994 1995 1996 1997 ...
age	integer [111]	0 1 2 3 4 5 ...
pop	list [3]	List of length 3
female	double [111 x 29]	136539 135845 138481 144204 146536 137109 134631 136034 135872 138855 144252 146 ...
male	double [111 x 29]	142805 142063 144513 150321 153126 142812 140839 142095 142011 144868 150321 152 ...
total	double [111 x 29]	279344 277909 282994 294525 299661 279921 275470 278128 277883 283723 294574 298 ...
rate	list [3]	List of length 3
female	double [111 x 29]	0.013842 0.001104 0.000672 0.000361 0.000300 0.000219 0.012412 0.001029 0.000714 ...
male	double [111 x 29]	0.016239 0.001563 0.000927 0.000738 0.000313 0.000259 0.015060 0.001372 0.000599 ...
total	double [111 x 29]	0.015067 0.001339 0.000802 0.000553 0.000307 0.000239 0.013766 0.001204 0.000655 ...

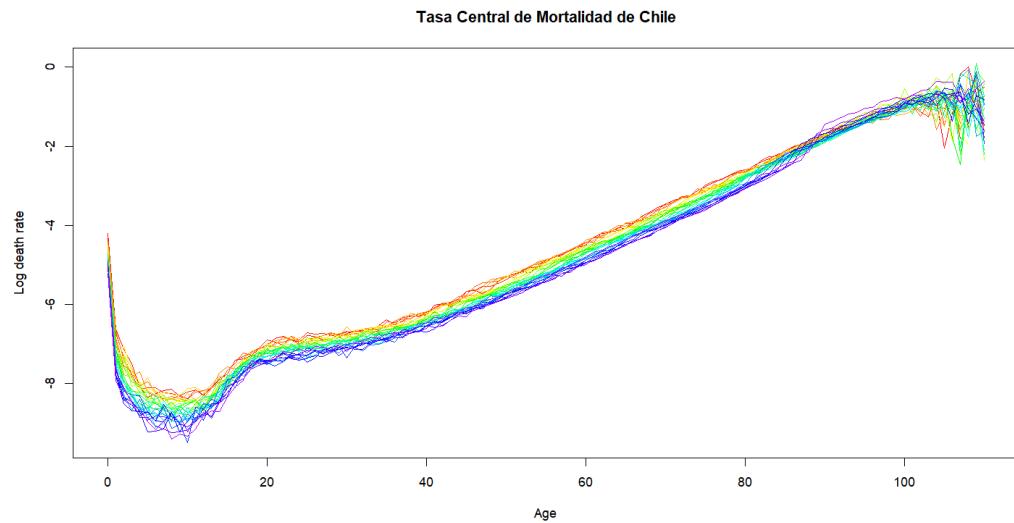
**Figura 3.24:** Japón. Demogdata según la HDM desde el año 1992 a 2020

Antes de desarrollar los modelos, es fundamental evaluar la tasa central de mortalidad en Japón y Chile durante el período de estudio, con una acotación importante. La base de datos de la HMD proporciona información sobre la mortalidad desde los 0 hasta los 110 años.

En el capítulo anterior se establecieron algunos modelos de proyección sobre tablas de mortalidad dinámicas: Lee-Carter (1992), Lee-Miller (2001), Booth-Maindonald-Smith (2002) y, por último, Hyndman-Ullah (2007). Tres de estos modelos son derivados del modelo de Lee-Carter original. Antes de desarrollar los modelos, es necesario evaluar la tasa central de mortalidad en ambos países durante el período de estudio.



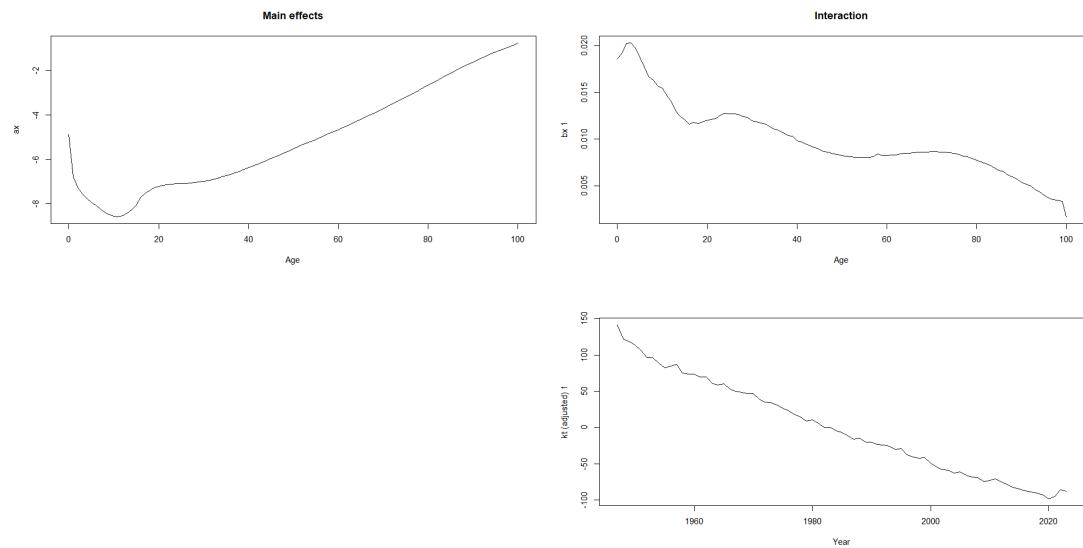
**Figura 3.25:** Tasa Central de Mortalidad de Japón 1947 a 2023



**Figura 3.26:** Tasa Central de Mortalidad de Japón 1992 a 2020

### 3.5.1. Modelo Lee-Carter

#### 3.5.1.1. Caso Japón



**Figura 3.27:** Parámetros seg\xf3n LC  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  y  $\kappa_t$  para la población japonesa

### 3.5 Bases metódicas utilizadas en el trabajo de investigación

---

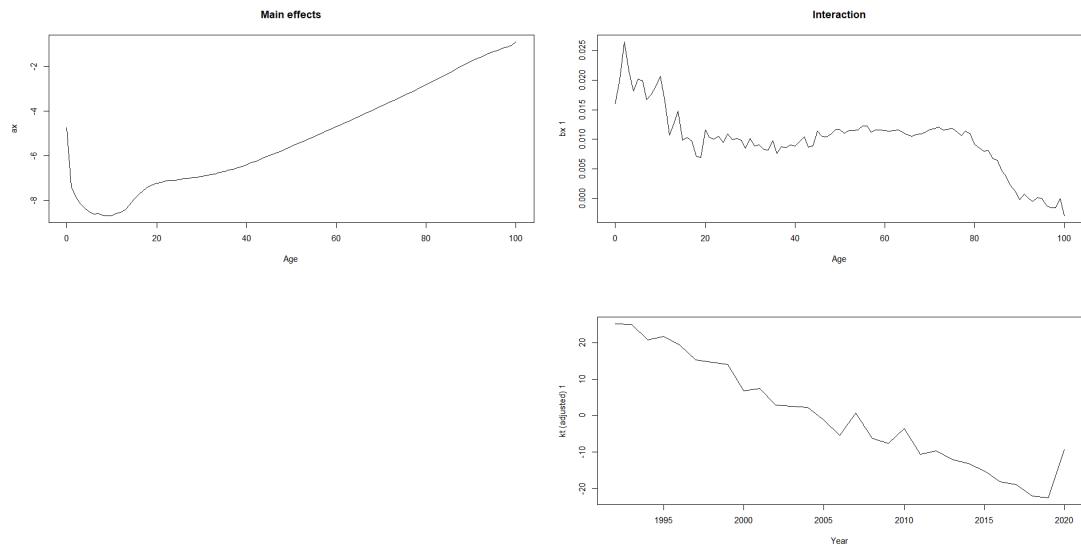
En la figura 3.27 podemos observar el comportamiento de los parámetros  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  y  $k_t$  para la población total de Japón.

En primer lugar, el parámetro  $\alpha_x$  describe el comportamiento general promedio para cualquier año calendario en función de la edad. Estas estimaciones representan cómo se comporta la mortalidad a lo largo de las edades. En el caso de Japón, se observa una mortalidad moderadamente alta al comienzo de la vida, que disminuye hasta su mínimo alrededor de los 12 años de edad. Luego, aumenta rápidamente hasta los 20 años y, a partir de aquí, aumenta lentamente hasta llegar a los 37-40 años de edad, creciendo aceleradamente en adelante.

En segundo lugar, el parámetro  $\beta_x$  describe la velocidad con la que varía la mortalidad en cada edad  $x$ , independientemente del tiempo. En la figura 3.27 observamos que la mortalidad crece ligeramente en el primer año de vida, para luego decrecer moderadamente a partir de los 5 años de edad. Este decrecimiento es moderado hasta aproximadamente los 75 años de edad, a partir de entonces, el decrecimiento de la mortalidad se acelera, indicando una disminución general de la mortalidad a lo largo del tiempo.

Por último, el parámetro  $\kappa_t$  representa la tendencia de la mortalidad. Se observa que, en Japón, la pendiente es descendente, lo que significa una disminución de la mortalidad a lo largo del tiempo.

### 3.5.1.2. Caso Chile



**Figura 3.28:** Parámetros según LC  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  y  $k_t$  para la población chilena

En la figura 3.28 podemos observar el comportamiento de los parámetros  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  y  $k_t$  para la población total de Chile.

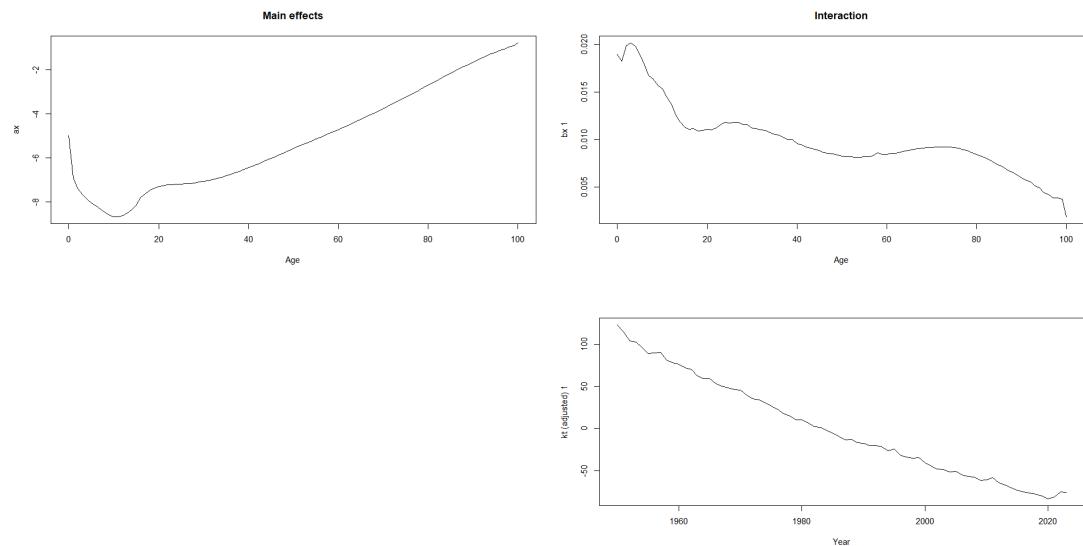
Estas estimaciones representan cómo se comporta la mortalidad a lo largo de las edades. Para el parámetro  $\alpha_x$ , en el caso de Chile, se observa una mortalidad moderadamente alta al comienzo de la vida, que disminuye hasta su mínimo alrededor de los 10 años de edad. Luego, aumenta rápidamente hasta los 20 años y, a partir de aquí, aumenta lentamente hasta llegar a los 37-40 años, creciendo aceleradamente en adelante. Lo cual indica una población en proceso de envejecimiento.

En la figura 3.28 observamos que para el parámetro  $\beta_x$ , la mortalidad crece rápidamente en los primeros 5 años de vida, para luego mostrar una tendencia a disminuir en edades más avanzadas a partir de los 18 años hasta aproximadamente los 45 años. Luego se mantiene constante hasta decrecer nuevamente a partir de los 80 años, indicando una disminución general de la mortalidad a lo largo del tiempo.

Por último, el parámetro  $k_t$ . Se observa que, en Chile, la pendiente es descendente, lo que significa una disminución de la mortalidad a lo largo del tiempo.

### 3.5.2. Modelo Lee-Miller

#### 3.5.2.1. Caso Japón



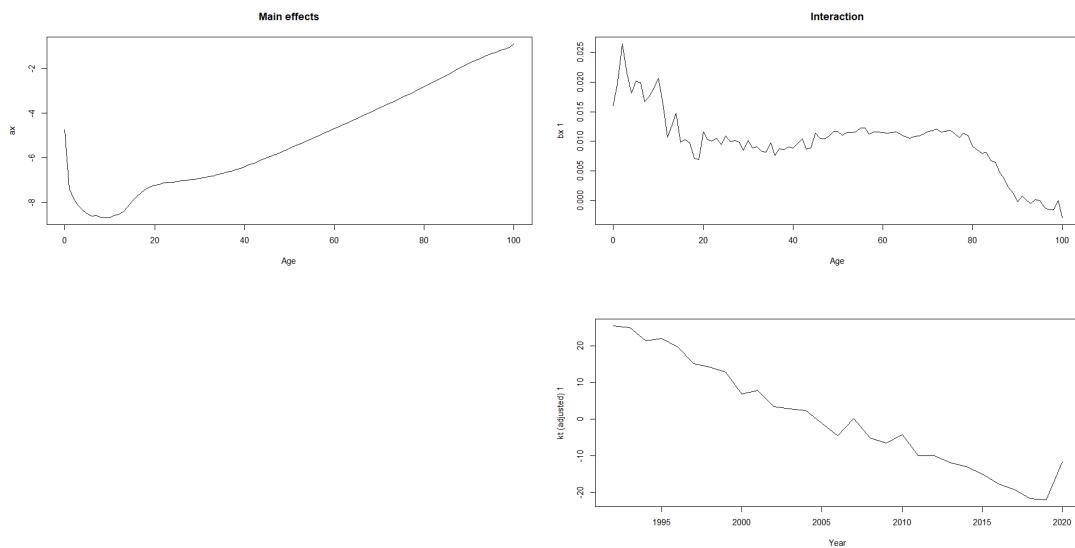
**Figura 3.29:** Parámetros Según LM  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  y  $\kappa_t$  para la población japonesa

Como se menciona en el capítulo anterior, el modelo propuesto por Ronald Lee y Timothy Miller es una variante del modelo de Lee-Carter que incorpora ajustes basados en la esperanza de vida.

Sus componentes son similares al modelo Lee-Carter ( $\alpha_x$ ,  $\beta_x$ ,  $\kappa_t$ ), pero el cálculo del índice de tiempo  $\kappa_t$  se modifica para reflejar mejor las tendencias de la esperanza de vida. En la figura 3.29, observamos patrones similares a los del modelo Lee-Carter en los componentes  $\alpha_x$  y  $\beta_x$ . El índice de tiempo  $\kappa_t$  muestra una tendencia que se ajusta mejor a las tendencias de la esperanza de vida en comparación con el modelo Lee-Carter.

El ajuste de  $\kappa_t$  basado en la esperanza de vida permite capturar mejor los cambios en la mortalidad relacionados con factores como avances médicos y mejoras en el estilo de vida. Esto hace que el modelo Lee-Miller sea más adecuado para poblaciones como la japonesa, donde la esperanza de vida ha experimentado cambios significativos.

### 3.5.2.2. Caso Chile



**Figura 3.30:** Parámetros Según LM  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  y  $\kappa_t$  para la población chilena

Al analizar la figura 3.30 para Chile, se puede observar que las tendencias de la mortalidad son diferentes a las de Japón. Esto es de esperar, ya que cada país tiene su propia dinámica demográfica.

Es importante notar que el periodo de observación para el modelo Lee-Miller en Chile comienza en 1992 debido a la serie de datos disponibles en el portal de la HMD. Sin embargo, por mejores prácticas en este modelo, el periodo de observación debería iniciar en el año 1950.

Al analizar los parámetros, observamos patrones similares a los del modelo Lee-Carter en los componentes  $\alpha_x$  y  $\beta_x$ .

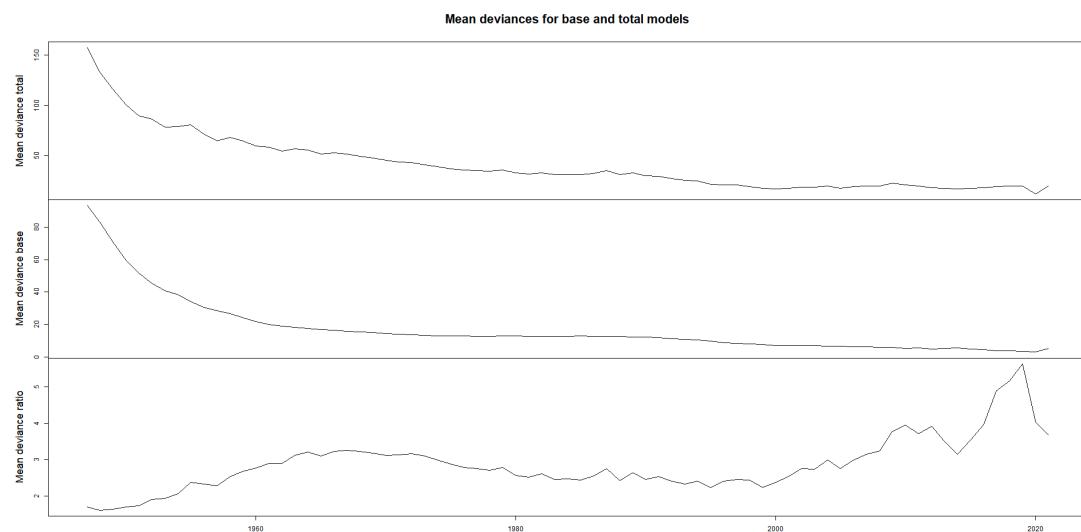
Analizando el parámetro  $\kappa_t$ , el cual es el componente más relevante en el modelo Lee-Miller, ya que representa la tendencia temporal general de la mortalidad ajustada a la esperanza de vida en Chile, observamos que  $\kappa_t$  sigue una trayectoria que se alinea con las tendencias de la esperanza de vida en el país.

### 3.5.3. Modelo Booth-Maindonald-Smith

La gráfica de las desviaciones medias es una herramienta valiosa para evaluar el ajuste del modelo BMS y para identificar puntos de ruptura en las tendencias de la mortalidad. Al comparar las desviaciones medias de los modelos base y total, podemos

determinar si los puntos de ruptura mejoran significativamente el ajuste del modelo y obtener información sobre los cambios en las tendencias de la mortalidad a lo largo del tiempo.

### 3.5.3.1. Caso Japón



**Figura 3.31:** Desviaciones Medias según BMS población japonesa

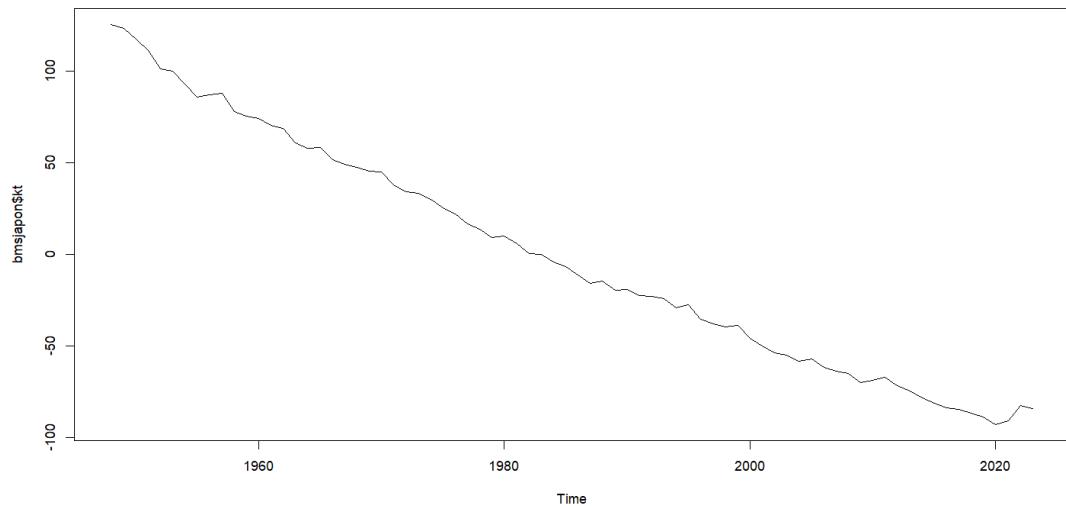
En la figura 3.31 podemos observar lo siguiente:

- **Desviaciones Medias del Modelo Total:** Se observa una curva que decrece presentando fluctuaciones en su decrecimiento indicando que ha habido períodos de cambios en las tendencias de mortalidad, lo que sugiere que el modelo BMS está capturando variaciones que el modelo base no puede.
- **Desviaciones Medias del Modelo Base:** Se observa una curva suave que decrece con el pasar del tiempo, lo que indica una tendencia general a la baja en la mortalidad en Japón a lo largo del tiempo. Esto es consistente con la mejora en la atención médica y las condiciones de vida. La suavidad de la curva sugiere que, en general, ha habido una tendencia constante hacia una menor mortalidad, sin cambios abruptos significativos.
- **Razón de Desviación Media:** El aumento inicial en la razón de desviación media sugiere que, al principio del período estudiado, el modelo total no mejoraba significativamente el ajuste en comparación con el modelo base. La disminución después de los años 60 indica que el modelo total comenzó a ajustarse mejor a

### 3.5 Bases metódicas utilizadas en el trabajo de investigación

---

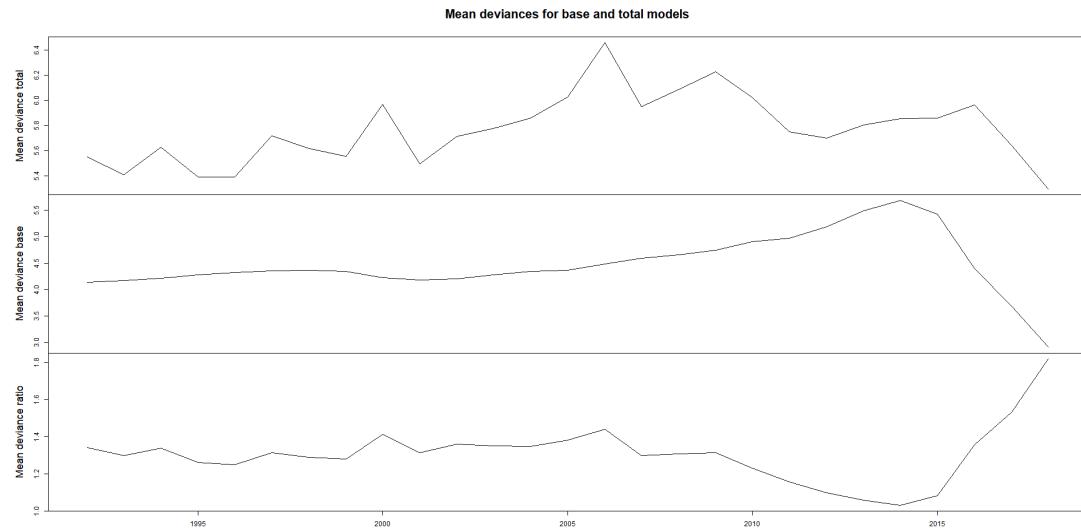
los datos, lo que sugiere la presencia de cambios en las tendencias de mortalidad que el modelo base no podía capturar. El aumento a partir de los años 2000 podría indicar cambios recientes en la tendencia de mortalidad de la población Japonesa. Las fluctuaciones en esta linea pueden ser interpretadas como los puntos de quiebre que el modelo BMS esta detectando. Esto se puede deber a los cambios demográficos en Japón, como el envejecimiento de la población, los cuales pueden estar contribuyendo a las fluctuaciones observadas.



**Figura 3.32:** Variación  $\kappa_t$  BMS población japonesa

En la figura 3.32 observamos la variación que ha tenido el parámetro  $\kappa_t$  a través del tiempo mostrando un decrecimiento pronunciado de la mortalidad en la población japonesa al igual que en los otros modelos estudiados

### 3.5.3.2. Caso Chile



**Figura 3.33:** Desviaciones Medias según BMS población chilena

En la figura 3.33 podemos observar lo siguiente:

- **Desviaciones Medias del Modelo Total:** Se observa una curva que crece presentando ciertas fluctuaciones en su crecimiento indicando que ha habido períodos de cambios en las tendencias de mortalidad, lo que sugiere que el modelo BMS está capturando variaciones que el modelo base no puede.
- **Desviaciones Medias del Modelo Base:** Se observa una curva suave que se mantiene ligeramente constante hasta el año 2000 para luego comenzar a crecer hasta el año 2015 para finalmente presentar un decrecimiento acelerado, lo que indica una tendencia estable en la mortalidad para luego presentar un aumento y posteriormente una caída.
- **Razón de Desviación Media:** Se observa una curva constante presentando ciertas fluctuaciones hasta el año 2010 lo que sugiere que el modelo total no mejoró significativamente el ajuste en comparación al modelo base durante ese período. La rápida disminución indica que el modelo total comenzó a ajustarse mejor a los datos, lo que sugiere la presencia de cambios en las tendencias de mortalidad que el modelo base no podía capturar. El aumento en el año 2015, indica que el modelo base nuevamente está ajustando mejor los datos, o que existen cambios abruptos que no son detectados por el modelo total.

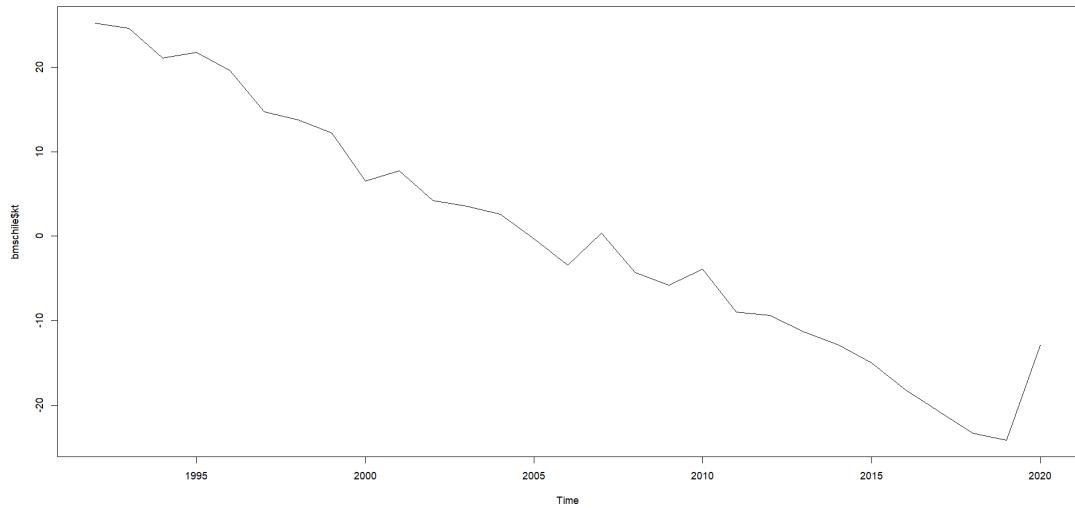
Los cambios demográficos en Chile, como el envejecimiento de la población, pueden

### 3.5 Bases metódicas utilizadas en el trabajo de investigación

---

estar contribuyendo a las fluctuaciones observadas.

Es importante considerar que el periodo de ajuste elegido es de 28 años, pudo haber influido en la detección de los puntos de quiebre, ya que este parametro, limita el tiempo minimo que debe existir entre los puntos de quiebre el cual para mejores practicas debe ser de 30 años.



**Figura 3.34:** Variación  $\kappa_t$  BMS población chile

En la figura 3.34 observamos la variación que ha tenido el parámetro  $\kappa_t$  a través del tiempo mostrando un decrecimiento pronunciado de la mortalidad en la población chilena al igual que en los otros modelos estudiados

---

## Capítulo 4

# Análisis de Resultados

---

Este capítulo presenta los resultados obtenidos al aplicar las metodologías descritas en el capítulo anterior y las ventajas y desventajas al aplicar dichos tests.

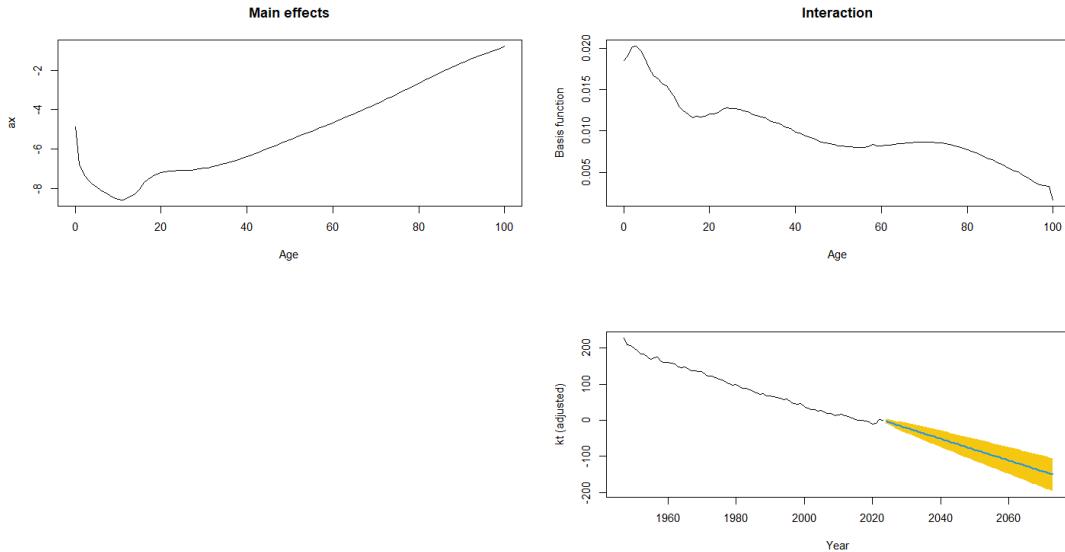
### 4.1. Aplicación de los Modelos

A continuación se aplicaran los métodos descritos en el capítulo anterior sobre los datos de la población japonesa y chilena publicados en la base de datos de la HMD.

#### 4.1.1. Modelo Lee-Carter

En este capítulo se presentan las proyecciones de mortalidad realizadas utilizando el modelo de Lee-Carter, una herramienta ampliamente reconocida en demografía y las ciencias actuariales para analizar y proyectar tendencias de mortalidad. Tras haber abordado la teoría fundamental del modelo en el capítulo 2 y descrito sus parámetros clave en el capítulo 3, en este apartado se interpretarán los resultados obtenidos a partir de su aplicación. En particular, se desarrollarán proyecciones de mortalidad para ambos países estudiados, ofreciendo un análisis detallado de las tendencias esperadas en el futuro y sus posibles implicaciones desde una perspectiva actuarial.

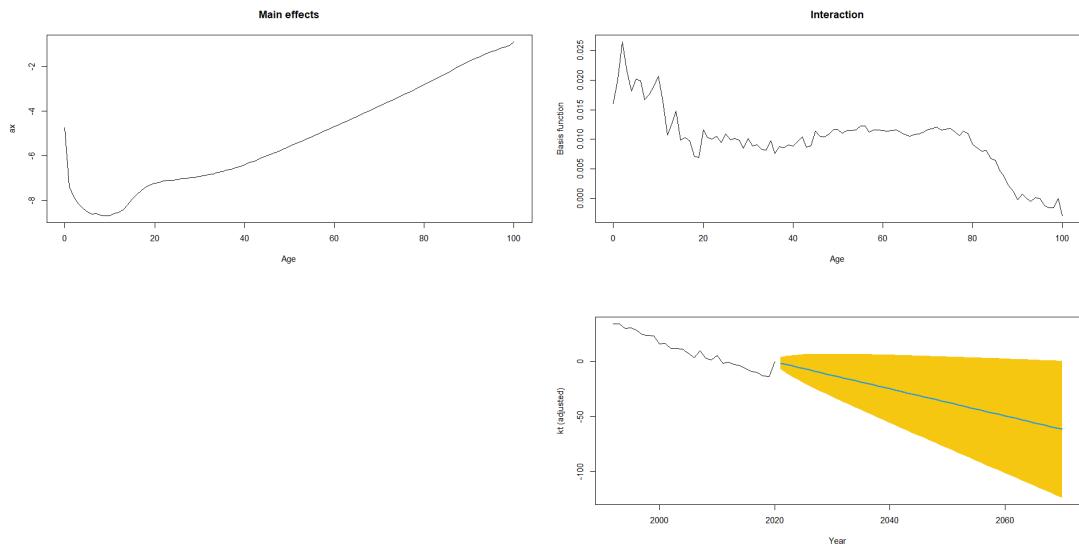
### 4.1.1.1. Caso Japón



**Figura 4.1:** Proyección bajo el modelo LC a 50 años de  $\kappa_t$  para la población japonesa

En la figura 4.1 podemos observar la proyección para el parámetro  $\kappa_t$  para el período 2024-2073, el cual se obtuvo haciendo uso de 2.71 y considerando el modelo ARIMA (0,1,0) establecido originalmente, con un intervalo de confianza del 95 %, haciendo uso del paquete forecast. Como se puede observar, se esperaría que el parámetro  $\kappa_t$ , que representa la tendencia de la mortalidad, continúe disminuyendo progresivamente a lo largo de los años de estudio.

### 4.1.1.2. Caso Chile



**Figura 4.2:** Proyección bajo el modelo LC a 50 años de  $\kappa_t$  para la población chilena

En la figura 4.2 podemos observar la proyección para el parámetro  $\kappa_t$  para el período 2021-2070, el cual se obtuvo haciendo uso de la ecuación 2.71 y considerando el modelo ARIMA (0,1,0) establecido originalmente, con un intervalo de confianza del 95 %, haciendo uso del paquete forecast. Como se puede observar, se esperaría que el parámetro  $\kappa_t$ , que representa la tendencia de la mortalidad, continúe disminuyendo progresivamente a lo largo de los años de estudio.

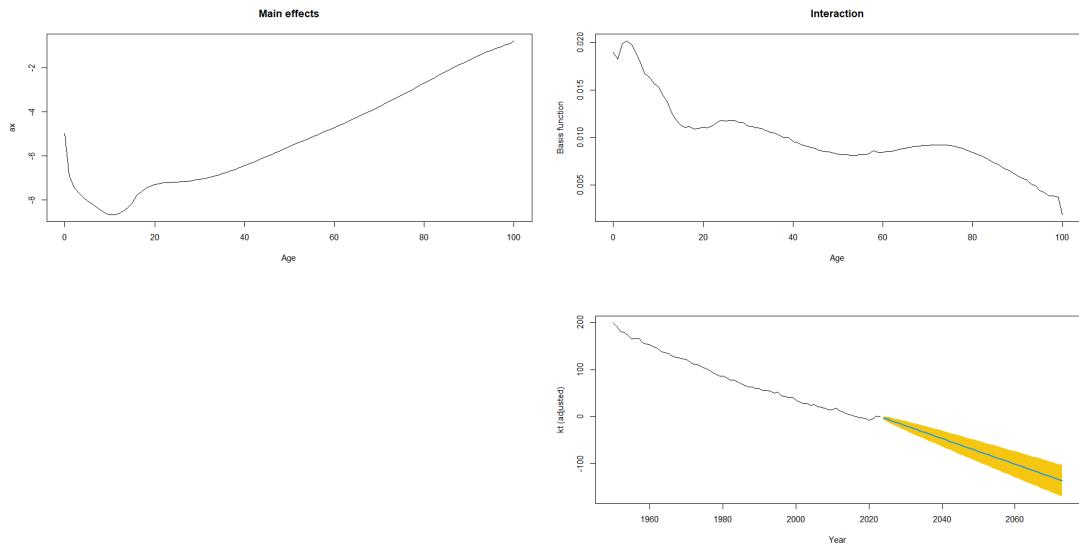
Es importante señalar que, para optimizar las prácticas de este método, se recomienda contar con una serie temporal de al menos 30 años. En este caso, debido a la limitada disponibilidad de información para el país estudiado, se utilizó una serie que abarca desde 1992 hasta 2020.

### 4.1.2. Modelo Lee-Miller

Como fue mencionado en capítulos anteriores el modelo Lee-Miller es una extensión del modelo Lee-Carter, diseñado para mejorar la precisión de las proyecciones de mortalidad, especialmente en poblaciones con tendencias de mortalidad complejas. Este introduce ajustes basados en la esperanza de vida al nacer ( $e^0$ ), lo que permite capturar mejor los cambios en la longevidad.

Evaluando la proyección del parámetro  $\kappa_t$  para el modelo LM en ambos países tenemos:

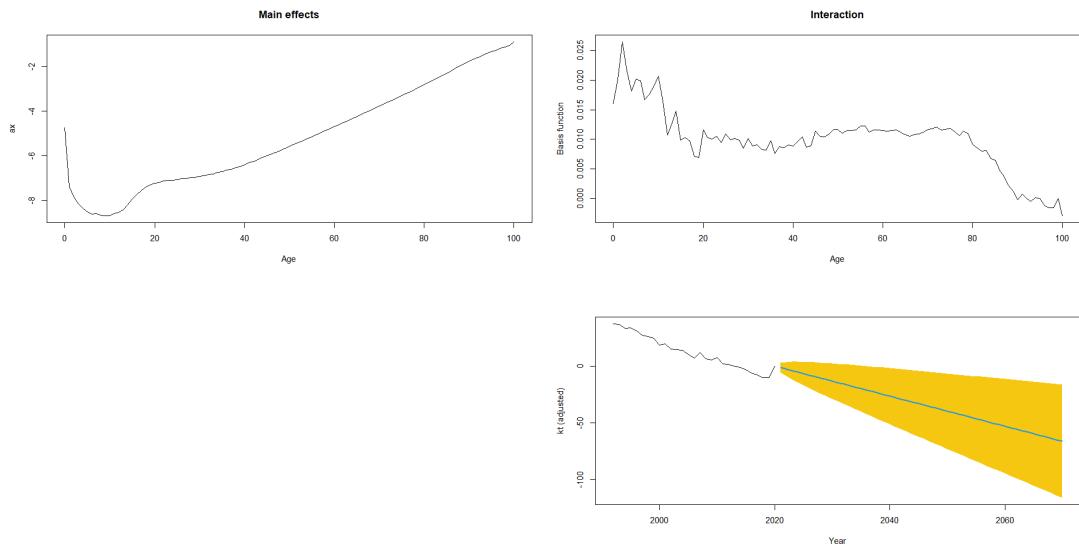
#### 4.1.2.1. Caso Japón



**Figura 4.3:** Proyección bajo el modelo LM a 50 años de  $\kappa_t$  para la población japonesa

En la Figura 4.3, se observa que el parámetro  $\kappa_t$ , al igual que en el método Lee-Carter, presenta una marcada tendencia decreciente. El área sombreada, que representa los intervalos de predicción para  $\kappa_t$ , refuerza la proyección de una continua disminución de la mortalidad en Japón, lo que implica un aumento sostenido de la esperanza de vida.

### 4.1.2.2. Caso Chile



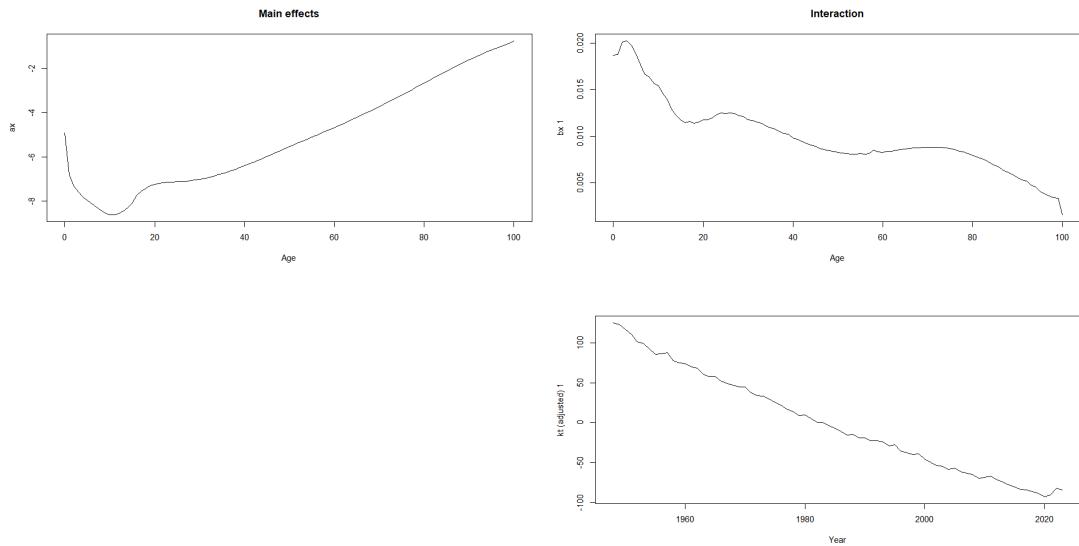
**Figura 4.4:** Proyección bajo el modelo LM a 50 años de  $\kappa_t$  para la población chilena

En la Figura 4.4, se observa que el parámetro  $\kappa_t$ , al igual que en el método Lee-Carter, presenta una tendencia marcadamente decreciente, indicando una proyección de continua disminución de la mortalidad en Chile. El área sombreada, que representa los intervalos de predicción para  $\kappa_t$ , refuerza esta proyección. No obstante, la amplitud de esta zona sombreada sugiere una mayor incertidumbre en la proyección. Esta amplitud podría atribuirse, en parte, a la limitación de la serie histórica utilizada, que abarca 28 años, siendo conocido que estos modelos suelen ofrecer resultados más robustos con series históricas superiores a 30 años de datos. Sin embargo, en comparación con el modelo Lee-Carter, el modelo Lee-Miller, en este escenario, logra minimizar ligeramente la amplitud de la zona sombreada, lo que sugiere una reducción de la incertidumbre en la proyección.

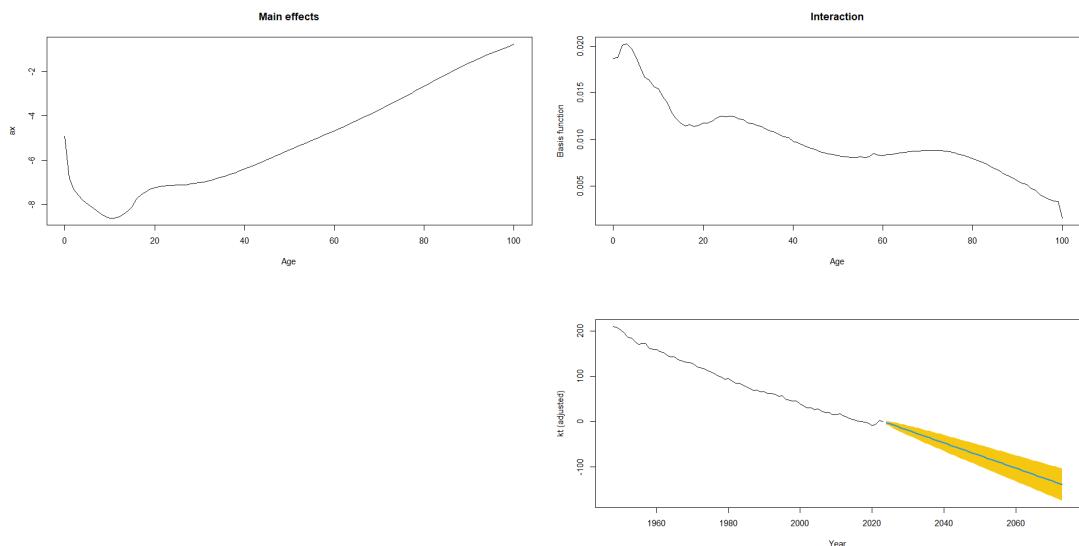
### 4.1.3. Modelo Booth-Maindonald-Smith

A continuación, se presentan las proyecciones de mortalidad realizadas haciendo uso del modelo Booth-Maindonald-Smith, una extensión del modelo de Lee-Carter que incorpora ajustes y mejoras para lograr estimaciones más precisas. Después de haber explorado la teoría y el funcionamiento de este modelo en capítulos anteriores, en este apartado se interpretarán los resultados obtenidos a partir de su aplicación.

### 4.1.3.1. Caso Japón



**Figura 4.5:** Parámetros  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  y  $\kappa_x$  según BMS para la población japonesa

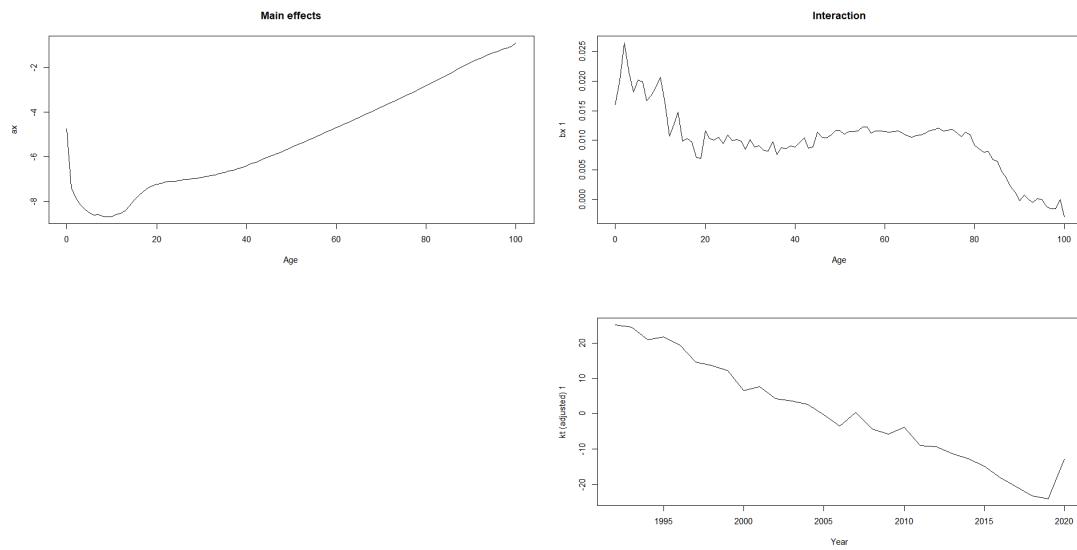


**Figura 4.6:** Proyección bajo el modelo BMS a 50 años para la población japonesa

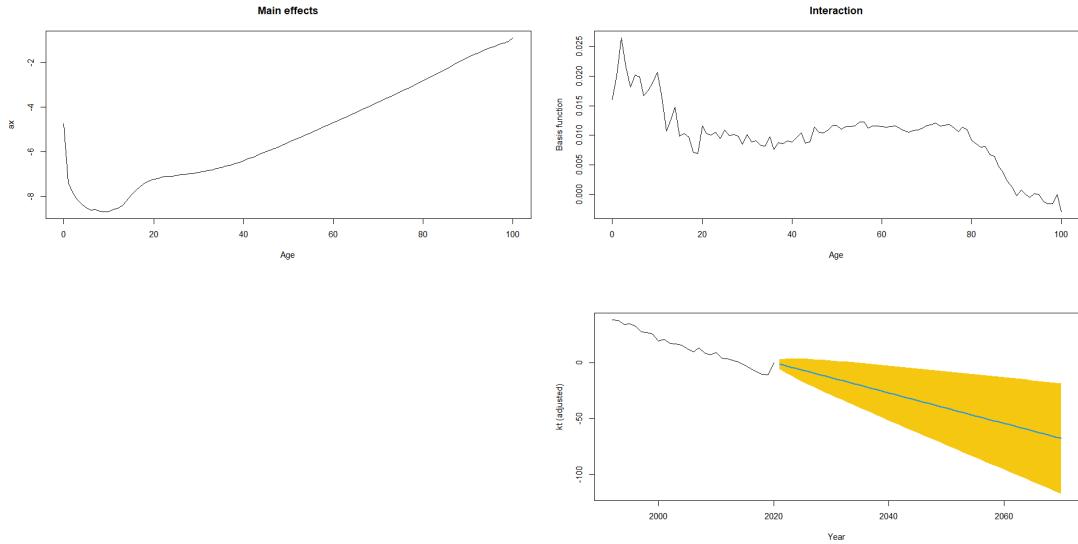
En la Figura 4.6, se observa que el parámetro  $\kappa_t$ , al igual que los métodos anteriores, presenta una marcada tendencia a decrecer. El área sombreada, que representa los intervalos de predicción para  $\kappa_t$ , refuerza la proyección de una continua disminución de

la mortalidad en Japón, lo que implica un aumento sostenido de la esperanza de vida. Asimismo si observamos la función base versus el  $\kappa_t$  ajustado podemos apreciar que para la población Japonesa presenta una cierta bajada en su mortalidad en a partir de los 20 años de edad de igual manera como se observa en la marcada disminución en la mortalidad a traves del tiempo.

#### 4.1.3.2. Caso Chile



**Figura 4.7:** Parámetros  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  y  $\kappa_x$  según BMS para la población chilena



**Figura 4.8:** Proyección bajo el modelo BMS a 50 años para la población chilena

En la Figura 4.8, se observa que el parámetro  $\kappa_t$ , al igual que los métodos anteriores, presenta una marcada tendencia a decrecer. Sin embargo el área sombreada, que representa los intervalos de predicción para  $\kappa_t$  a pesar que refuerza la proyección de una continua disminución de la mortalidad en Chile, esta zona es mucho mas amplia que los anteriores métodos.

Esta tendencia implica un aumento sostenido de la esperanza de vida. Asimismo si observamos la función base versus el  $\kappa_t$  ajustado podemos apreciar que para la población chilena presenta un decrecimiento con fluctuaciones en su mortalidad hasta alcanzar los 20 años de edad a partir de aqui su decrecimiento es mas lento.

#### 4.1.4. Modelo Hyndman-Ullah

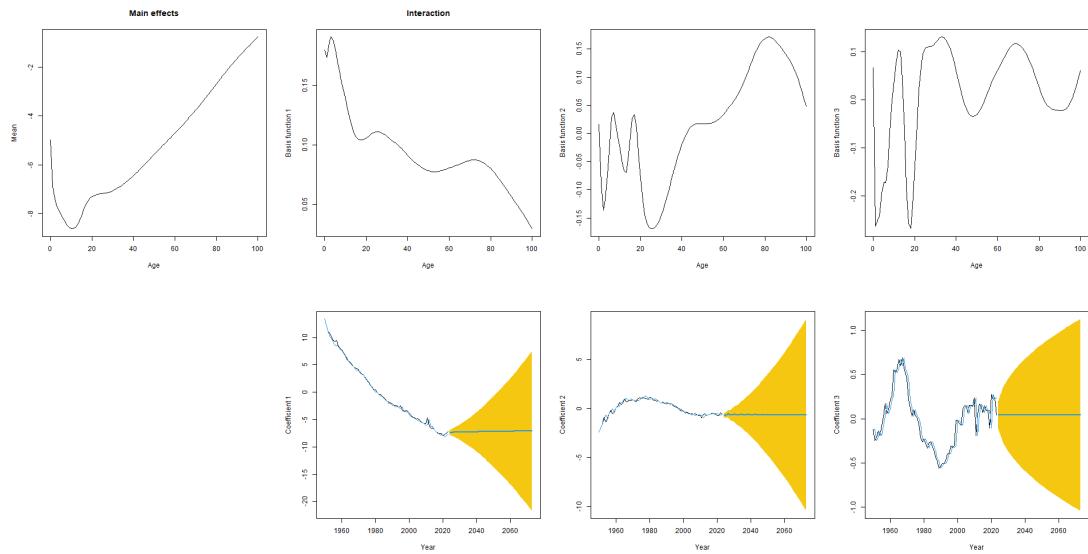
La aplicación del Modelo Hyndman-Ullah a las tasas de mortalidad permite descomponer las tasas mediante coeficientes, bases y una media. Esta descomposición se realiza para el total de la población.

Las Figuras 4.9 y 4.10 presentan la media, las bases (con sus intervalos de pronóstico del 80 %) y los coeficientes funcionales estimados para el total de la población para ambos países. Estas subfiguras se deben interpretar por columnas.

Primero, en la primera columna, se representa el comportamiento promedio de la mortalidad a través de las edades. A partir de la segunda columna, la fila superior contiene las bases, mientras que la fila inferior muestra los coeficientes. Cada columna,

entonces, contiene un par “coeficiente-base” que debe interpretarse de manera conjunta. La base indica en qué edades se manifiesta este descenso y con qué intensidad, de forma similar a cómo se relacionaban  $\beta_x$  y  $\kappa_t$  en el modelo Lee-Carter.

#### 4.1.4.1. Caso Japón



**Figura 4.9:** Proyección bajo el modelo HU a 50 años para la población japonesa

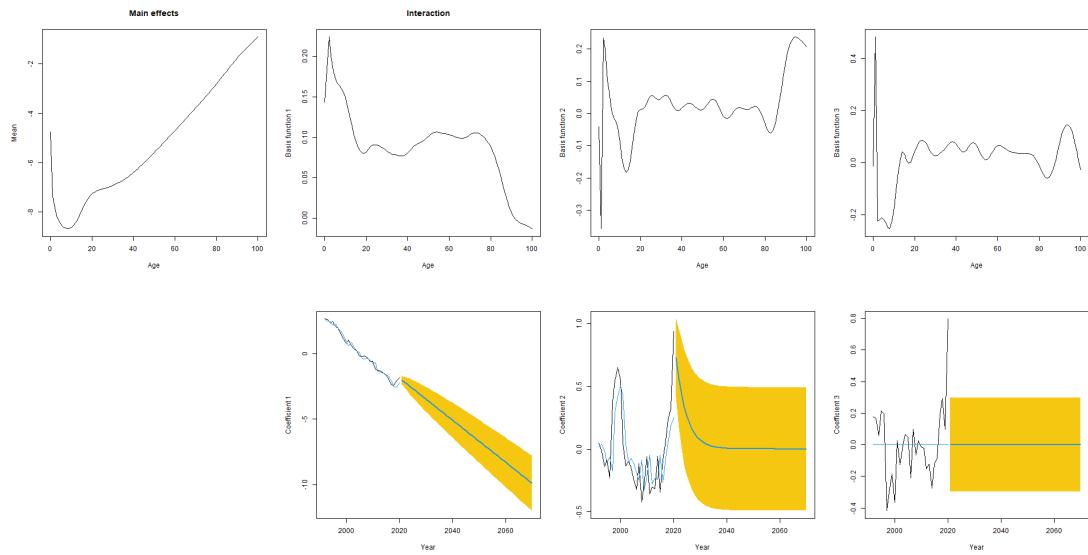
En la Figura 4.9, la media estimada refleja el perfil promedio de la mortalidad a lo largo de la vida, calculado como el promedio de las funciones a lo largo de los años.

Al analizar los pares base-coeficiente, se observa que el descenso con pocas fluctuaciones presente en el primer coeficiente está asociado, según la base correspondiente, principalmente con las edades posteriores a los 4 años, mientras que las edades comprendidas en los primeros años de vida muestran una contribución menor.

Por otro lado, el segundo par base-coeficiente parece representar, según la base, el diferencial en la mortalidad entre las edades iniciales y los 25 años. En este caso, la base indica un valor notablemente alto para el primer grupo y marcadamente bajo para el segundo. El coeficiente correspondiente sugiere que este diferencial tiende a disminuir a lo largo del tiempo, aunque con algunas fluctuaciones.

A partir del tercer par base-coeficiente, resulta más difícil identificar un correlato demográfico claro en los resultados obtenidos.

#### 4.1.4.2. Caso Chile



**Figura 4.10:** Proyección bajo el modelo HU a 50 años para la población chilena

En la Figura 4.10, la media estimada refleja el perfil promedio de la mortalidad a lo largo de la vida, calculado como el promedio de las funciones a lo largo de los años.

Al analizar los pares base-coeficiente, se observa que el descenso con pocas fluctuaciones presente en el primer coeficiente está asociado, según la base correspondiente, principalmente con las edades posteriores a los 5 años, mientras que las edades comprendidas en los primeros años de vida muestran una contribución menor.

Por otro lado, el segundo par base-coeficiente parece representar, según la base, el diferencial en la mortalidad entre las edades iniciales y los 18 años. En este caso, la base indica un valor notablemente alto para el primer grupo y marcadamente bajo para el segundo. El coeficiente correspondiente sugiere que este diferencial tiende a disminuir a lo largo del tiempo, aunque con algunas fluctuaciones.

A partir del tercer par base-coeficiente, resulta más difícil identificar un correlato demográfico claro en los resultados obtenidos.

Es importante destacar que, en el caso de Chile, se está utilizando una serie histórica de 28 años. Esto podría afectar la precisión de los pronósticos, ya que este método, en sus mejores prácticas, requiere una serie histórica mucho más extensa. Esto se debe a que su período de ajuste está centrado en el año 1950 (período posterior a la guerra), cuando la variabilidad de la mortalidad presentaba fluctuaciones significativas.

## 4.2. Comparación de modelos

Para determinar cuál de los tres (3) modelos aplicados previamente se ajusta mejor al comportamiento de la serie histórica de ambos países, se compararon sus estimaciones con los datos observados utilizando las siguientes medidas:

**Criterio de información Akaike (AIC):** Es una medida de bondad de ajuste que permite describir la relación entre el sesgo y la varianza en la construcción del modelo. Este criterio no constituye una prueba de hipótesis, sino que proporciona una herramienta para la comparación entre modelos y su selección. El modelo que tenga el menor valor de AIC será considerado el más adecuado en comparación con los demás. El AIC se define como:

$$AIC = 2k - 2\ln(L) \quad (4.1)$$

Donde:

- $k$  es el número de parámetros
- $\ln(L)$  es la función de log-verosimilitud para el modelo estadístico

**Criterio de información Bayesiano (BIC):** Es una medida de bondad de ajuste que, al igual que el criterio AIC, se utiliza como criterio para la selección de modelos dentro de un conjunto. Se basa en la función de probabilidad logarítmica y se define como:

$$BIC = k\ln(n) - 2\ln(L) \quad (4.2)$$

Donde:

- $k$  es el número de parámetros
- $\ln(L)$  es la función de log-verosimilitud para el modelo estadístico

**Error Cuadrático Medio (ECM):** Mide las diferencias entre los valores observados y los valores estimados, y se define como:

$$EPAM = \sqrt{\frac{(VA_{observados} - VA_{estimados})^2}{T}} \quad (4.3)$$

**Error Porcentual Absoluto Medio (EPAM):** Mide las diferencias relativas entre los valores observados y los valores estimados, se define como:

$$EPAM = \frac{\sum_x \frac{VA_{observados} - VA_{estimados}}{VA_{observados}}}{T} \quad (4.4)$$

#### 4.2.1. Comparación de modelos - Japón

En la tabla 4.1 se reflejan los resultados obtenidos mediante el criterio de información AIC y BIC para la población japonesa. Se observa que el modelo Lee-Miller presenta el menor resultado; sin embargo, el resultado del modelo Booth-Maindonald-Smith no difiere significativamente del mencionado anteriormente.

Modelo	Valor
Lee-Carter	1420,528
Lee-Miller	1363,663
Booth-Maindonald-Smith	1401,261

**Tabla 4.1:** Valores de AIC para Japón

Modelo	Valor
Lee-Carter	2074,449
Lee-Miller	1999,585
Booth-Maindonald-Smith	2049.205

**Tabla 4.2:** Valores de BIC para Japón

#### 4.2.2. Comparación de modelos - Chile

En la tabla 4.3 se presentan los resultados obtenidos mediante los criterios de información AIC y BIC para la población chilena. Se observa que el modelo Lee-Miller arroja el menor valor; sin embargo, el resultado del modelo Lee-Carter no difiere significativamente del anterior. Es importante destacar que el modelo Lee-Miller ajusta la esperanza de vida a partir de 1950 (período postguerra), lo que permite capturar mejor las tendencias de mortalidad a lo largo del tiempo. En el caso de Chile, debido a la limitada disponibilidad de datos, el ajuste se realizó a partir de 1992, que es el punto de partida de los datos disponibles.

### 4.3 Tabla de Mortalidad Proyectadas

---

Modelo	Valor
Lee-Carter	698,7981
Lee-Miller	698,6136
Booth-Maindonald-Smith	699,1291

**Tabla 4.3:** Valores de AIC para Chile

Modelo	Valor
Lee-Carter	1014,643
Lee-Miller	1014,459
Booth-Maindonald-Smith	1014,974

**Tabla 4.4:** Valores de BIC para Chile

### 4.3. Tabla de Mortalidad Proyectadas

En esta sección se presentarán las tablas de mortalidad proyectadas a 50 años para ambos países, basadas en el modelo de proyección de Lee-Miller.

### 4.3.1. Tabla de Mortalidad Japón 2073

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
0	0.00025	0.99975	0.00025	1.00000	0.00025	0.99976	91.05161	91.05161
1	0.00004	0.99996	0.00004	0.99975	0.00004	0.99973	90.05185	90.07458
2	0.00002	0.99998	0.00002	0.99971	0.00002	0.99969	89.05212	89.07835
3	0.00002	0.99998	0.00002	0.99968	0.00002	0.99968	88.05243	88.08025
4	0.00001	0.99999	0.00001	0.99967	0.00001	0.99966	87.05275	87.08174
5	0.00001	0.99999	0.00001	0.99965	0.00001	0.99965	86.05309	86.08301
6	0.00001	0.99999	0.00001	0.99964	0.00001	0.99963	85.05344	85.08401
7	0.00001	0.99999	0.00001	0.99963	0.00001	0.99962	84.05381	84.08506
8	0.00001	0.99999	0.00001	0.99962	0.00001	0.99961	83.05419	83.08604
9	0.00001	0.99999	0.00001	0.99960	0.00001	0.99960	82.05458	82.08717
10	0.00001	0.99999	0.00001	0.99959	0.00001	0.99958	81.05498	81.08815
11	0.00002	0.99998	0.00002	0.99958	0.00002	0.99957	80.05540	80.08914
12	0.00002	0.99998	0.00002	0.99956	0.00002	0.99955	79.05583	79.09052
13	0.00003	0.99997	0.00003	0.99954	0.00003	0.99953	78.05627	78.09185
14	0.00004	0.99996	0.00004	0.99951	0.00004	0.99949	77.05675	77.09446
15	0.00005	0.99995	0.00005	0.99947	0.00005	0.99945	76.05725	76.09732
16	0.00007	0.99993	0.00007	0.99942	0.00007	0.99939	75.05781	75.10117
17	0.00008	0.99992	0.00008	0.99936	0.00008	0.99932	74.05842	74.10603
18	0.00009	0.99991	0.00009	0.99928	0.00009	0.99924	73.05910	73.11158
19	0.00010	0.99990	0.00010	0.99919	0.00010	0.99914	72.05986	72.11817
20	0.00011	0.99989	0.00011	0.99909	0.00011	0.99903	71.06072	71.12567

**Tabla 4.5:** Tabla de Mortalidad Japón Proyectada por el Modelo LM para el año 2073

Continúa en la siguiente página

### 4.3 Tabla de Mortalidad Proyectadas

---

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
21	0.00013	0.99987	0.00013	0.99898	0.00013	0.99891	70.06169	70.13346
22	0.00012	0.99988	0.00012	0.99885	0.00012	0.99879	69.06277	69.14223
23	0.00011	0.99989	0.00011	0.99873	0.00011	0.99867	68.06398	68.15053
24	0.00012	0.99988	0.00012	0.99862	0.00012	0.99856	67.06531	67.15804
25	0.00013	0.99987	0.00013	0.99850	0.00013	0.99844	66.06675	66.16590
26	0.00011	0.99989	0.00011	0.99838	0.00011	0.99832	65.06831	65.17421
27	0.00012	0.99988	0.00012	0.99826	0.00012	0.99821	64.06999	64.18138
28	0.00012	0.99988	0.00012	0.99815	0.00012	0.99809	63.07178	63.18884
29	0.00012	0.99988	0.00012	0.99803	0.00012	0.99797	62.07370	62.19637
30	0.00014	0.99986	0.00014	0.99791	0.00014	0.99784	61.07573	61.20383
31	0.00014	0.99986	0.00014	0.99777	0.00014	0.99770	60.07789	60.21225
32	0.00014	0.99986	0.00014	0.99763	0.00014	0.99756	59.08019	59.22061
33	0.00015	0.99985	0.00015	0.99749	0.00015	0.99742	58.08263	58.22884
34	0.00019	0.99981	0.00019	0.99734	0.00019	0.99724	57.08522	57.23741
35	0.00019	0.99981	0.00019	0.99715	0.00019	0.99705	56.08797	56.24842
36	0.00021	0.99979	0.00021	0.99696	0.00021	0.99685	55.09092	55.25891
37	0.00022	0.99978	0.00022	0.99675	0.00022	0.99664	54.09407	54.27055
38	0.00024	0.99976	0.00024	0.99653	0.00024	0.99641	53.09743	53.28258
39	0.00028	0.99972	0.00028	0.99629	0.00028	0.99615	52.10102	52.29520
40	0.00031	0.99969	0.00031	0.99601	0.00031	0.99586	51.10488	51.30957
41	0.00033	0.99967	0.00033	0.99570	0.00033	0.99554	50.10902	50.32525
42	0.00036	0.99964	0.00036	0.99538	0.00036	0.99520	49.11348	49.34166
43	0.00039	0.99961	0.00039	0.99502	0.00039	0.99483	48.11828	48.35912
44	0.00042	0.99958	0.00042	0.99463	0.00042	0.99442	47.12346	47.37774
45	0.00048	0.99952	0.00048	0.99421	0.00048	0.99398	46.12903	46.39745
46	0.00055	0.99945	0.00055	0.99374	0.00054	0.99347	45.13505	45.41945
47	0.00060	0.99940	0.00060	0.99319	0.00059	0.99290	44.14159	44.44405
48	0.00065	0.99935	0.00065	0.99260	0.00065	0.99228	43.14869	43.47029

Continúa en la siguiente página

### 4.3 Tabla de Mortalidad Proyectadas

---

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
49	0.00075	0.99925	0.00075	0.99195	0.00074	0.99158	42.15641	42.49843
50	0.00085	0.99915	0.00085	0.99121	0.00084	0.99079	41.16483	41.52976
51	0.00095	0.99905	0.00095	0.99037	0.00094	0.98990	40.17404	40.56452
52	0.00101	0.99899	0.00101	0.98943	0.00100	0.98893	39.18414	39.60273
53	0.00113	0.99887	0.00113	0.98843	0.00111	0.98787	38.19521	38.64232
54	0.00125	0.99875	0.00125	0.98732	0.00123	0.98670	37.20733	37.68532
55	0.00135	0.99865	0.00135	0.98608	0.00133	0.98542	36.22063	36.73184
56	0.00138	0.99862	0.00138	0.98475	0.00136	0.98407	35.23522	35.78087
57	0.00153	0.99847	0.00153	0.98339	0.00151	0.98264	34.25115	34.82953
58	0.00167	0.99834	0.00166	0.98189	0.00163	0.98107	33.26850	33.88217
59	0.00183	0.99817	0.00183	0.98025	0.00179	0.97936	32.28743	32.93783
60	0.00196	0.99805	0.00195	0.97846	0.00191	0.97750	31.30808	31.99729
61	0.00213	0.99787	0.00213	0.97655	0.00208	0.97551	30.33057	31.05896
62	0.00236	0.99765	0.00235	0.97447	0.00229	0.97332	29.35506	30.12426
63	0.00254	0.99746	0.00254	0.97217	0.00247	0.97094	28.38175	29.19416
64	0.00278	0.99722	0.00278	0.96971	0.00269	0.96836	27.41081	28.26712
65	0.00299	0.99702	0.00298	0.96701	0.00289	0.96557	26.44245	27.34449
66	0.00322	0.99678	0.00322	0.96413	0.00310	0.96258	25.47688	26.42482
67	0.00351	0.99650	0.00350	0.96103	0.00336	0.95934	24.51430	25.50846
68	0.00385	0.99615	0.00385	0.95766	0.00368	0.95582	23.55496	24.59631
69	0.00428	0.99573	0.00427	0.95398	0.00408	0.95194	22.59914	23.68934
70	0.00471	0.99530	0.00470	0.94990	0.00446	0.94767	21.64719	22.78882
71	0.00515	0.99486	0.00514	0.94544	0.00486	0.94301	20.69952	21.89397
72	0.00568	0.99434	0.00566	0.94058	0.00533	0.93792	19.75651	21.00453
73	0.00643	0.99359	0.00641	0.93526	0.00599	0.93226	18.81859	20.12132
74	0.00709	0.99293	0.00707	0.92926	0.00657	0.92598	17.88633	19.24782
75	0.00788	0.99215	0.00785	0.92270	0.00724	0.91908	16.96035	18.38125
76	0.00867	0.99137	0.00863	0.91546	0.00790	0.91151	16.04127	17.52267

Continúa en la siguiente página

### 4.3 Tabla de Mortalidad Proyectadas

---

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
77	0.00939	0.99065	0.00935	0.90756	0.00848	0.90332	15.12976	16.67086
78	0.01102	0.98904	0.01096	0.89907	0.00986	0.89415	14.22644	15.82345
79	0.01276	0.98732	0.01268	0.88922	0.01127	0.88358	13.33230	14.99330
80	0.01427	0.98584	0.01416	0.87794	0.01244	0.87173	12.44872	14.17942
81	0.01622	0.98391	0.01609	0.86551	0.01393	0.85854	11.57699	13.37596
82	0.01909	0.98109	0.01891	0.85158	0.01610	0.84353	10.71845	12.58658
83	0.02178	0.97846	0.02154	0.83548	0.01800	0.82648	9.87492	11.81948
84	0.02499	0.97532	0.02468	0.81748	0.02018	0.80739	9.04844	11.06868
85	0.03008	0.97036	0.02964	0.79730	0.02363	0.78549	8.24105	10.33617
86	0.03475	0.96585	0.03415	0.77367	0.02642	0.76046	7.45556	9.63658
87	0.04050	0.96030	0.03970	0.74725	0.02966	0.73242	6.69510	8.95965
88	0.04764	0.95347	0.04653	0.71759	0.03339	0.70089	5.96268	8.30934
89	0.05520	0.94628	0.05372	0.68420	0.03676	0.66582	5.26179	7.69048
90	0.06641	0.93573	0.06427	0.64744	0.04161	0.62663	4.59597	7.09869
91	0.07673	0.92611	0.07389	0.60583	0.04477	0.58344	3.96934	6.55193
92	0.08742	0.91624	0.08376	0.56106	0.04699	0.53757	3.38590	6.03480
93	0.10237	0.90261	0.09739	0.51407	0.05006	0.48904	2.84833	5.54075
94	0.11621	0.89017	0.10983	0.46401	0.05096	0.43852	2.35929	5.08462
95	0.13921	0.86985	0.13015	0.41304	0.05376	0.38616	1.92077	4.65027
96	0.15722	0.85424	0.14576	0.35928	0.05237	0.33310	1.53460	4.27127
97	0.18059	0.83437	0.16563	0.30691	0.05083	0.28150	1.20150	3.91478
98	0.19976	0.81838	0.18162	0.25608	0.04651	0.23283	0.92001	3.59265
99	0.22234	0.79990	0.20010	0.20957	0.04193	0.18860	0.68718	3.27900
100	0.33623	0.00000	1.00000	0.16764	0.16764	0.49858	0.49858	2.97417

### 4.3.2. Tabla de Mortalidad Chile 2070

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
0	0.00419	0.99583	0.00417	1.00000	0.00417	0.99608	80.60138	80.60138
1	0.00026	0.99974	0.00026	0.99583	0.00026	0.99570	79.60530	79.93886
2	0.00015	0.99985	0.00015	0.99557	0.00015	0.99549	78.60960	78.95965
3	0.00014	0.99986	0.00014	0.99542	0.00014	0.99535	77.61411	77.97127
4	0.00013	0.99987	0.00013	0.99528	0.00013	0.99522	76.61876	76.98192
5	0.00009	0.99991	0.00009	0.99515	0.00009	0.99510	75.62354	75.99225
6	0.00008	0.99992	0.00008	0.99506	0.00008	0.99502	74.62844	74.99923
7	0.00010	0.99990	0.00010	0.99498	0.00010	0.99493	73.63342	74.00487
8	0.00006	0.99994	0.00006	0.99488	0.00006	0.99485	72.63849	73.01218
9	0.00007	0.99993	0.00007	0.99482	0.00007	0.99479	71.64364	72.01669
10	0.00006	0.99994	0.00006	0.99475	0.00006	0.99472	70.64885	71.02161
11	0.00008	0.99992	0.00008	0.99469	0.00008	0.99465	69.65413	70.02608
12	0.00012	0.99988	0.00012	0.99461	0.00012	0.99455	68.65949	69.03176
13	0.00014	0.99986	0.00014	0.99448	0.00014	0.99442	67.66494	68.04026
14	0.00013	0.99987	0.00013	0.99435	0.00013	0.99428	66.67052	67.04946
15	0.00020	0.99980	0.00020	0.99422	0.00020	0.99412	65.67624	66.05812
16	0.00026	0.99974	0.00026	0.99402	0.00026	0.99389	64.68212	65.07144
17	0.00031	0.99969	0.00031	0.99376	0.00031	0.99360	63.68823	64.08823
18	0.00053	0.99947	0.00053	0.99345	0.00052	0.99319	62.69463	63.10809
19	0.00050	0.99950	0.00050	0.99293	0.00049	0.99268	61.70144	62.14106
20	0.00047	0.99953	0.00047	0.99243	0.00047	0.99220	60.70877	61.17171

**Tabla 4.6:** Tabla de Mortalidad Chile Proyectada por el Modelo LM para el año 2070

Continúa en la siguiente página

### 4.3 Tabla de Mortalidad Proyectadas

---

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
21	0.00053	0.99947	0.00053	0.99196	0.00053	0.99170	59.71657	60.20044
22	0.00064	0.99936	0.00064	0.99144	0.00063	0.99112	58.72487	59.23210
23	0.00061	0.99939	0.00061	0.99080	0.00061	0.99050	57.73375	58.26957
24	0.00070	0.99930	0.00070	0.99020	0.00069	0.98985	56.74325	57.30509
25	0.00061	0.99939	0.00061	0.98951	0.00060	0.98921	55.75340	56.34460
26	0.00073	0.99927	0.00073	0.98891	0.00072	0.98855	54.76419	55.37846
27	0.00072	0.99928	0.00072	0.98818	0.00071	0.98783	53.77564	54.41865
28	0.00065	0.99935	0.00065	0.98748	0.00064	0.98716	52.78781	53.45727
29	0.00073	0.99927	0.00073	0.98683	0.00072	0.98647	51.80066	52.49173
30	0.00076	0.99924	0.00076	0.98611	0.00075	0.98574	50.81418	51.52979
31	0.00081	0.99919	0.00081	0.98536	0.00080	0.98496	49.82845	50.56871
32	0.00086	0.99915	0.00085	0.98456	0.00084	0.98414	48.84348	49.60924
33	0.00094	0.99906	0.00094	0.98372	0.00092	0.98326	47.85934	48.65125
34	0.00093	0.99907	0.00093	0.98280	0.00091	0.98234	46.87608	47.69653
35	0.00101	0.99899	0.00101	0.98189	0.00099	0.98139	45.89374	46.74040
36	0.00108	0.99892	0.00108	0.98090	0.00106	0.98037	44.91234	45.78696
37	0.00106	0.99894	0.00106	0.97983	0.00104	0.97931	43.93198	44.83610
38	0.00109	0.99891	0.00109	0.97879	0.00106	0.97826	42.95266	43.88321
39	0.00131	0.99869	0.00131	0.97773	0.00128	0.97709	41.97440	42.93043
40	0.00132	0.99868	0.00132	0.97645	0.00129	0.97580	40.99731	41.98618
41	0.00154	0.99847	0.00153	0.97516	0.00150	0.97441	40.02151	41.04110
42	0.00148	0.99852	0.00148	0.97366	0.00144	0.97294	39.04710	40.10342
43	0.00166	0.99834	0.00166	0.97222	0.00161	0.97141	38.07416	39.16205
44	0.00180	0.99821	0.00179	0.97061	0.00174	0.96974	37.10275	38.22627
45	0.00188	0.99812	0.00188	0.96887	0.00182	0.96796	36.13301	37.29407
46	0.00198	0.99802	0.00198	0.96704	0.00192	0.96608	35.16505	36.36349
47	0.00230	0.99770	0.00230	0.96513	0.00222	0.96402	34.19897	35.43471
48	0.00234	0.99766	0.00234	0.96291	0.00225	0.96178	33.23495	34.51523

Continúa en la siguiente página

### 4.3 Tabla de Mortalidad Proyectadas

---

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
49	0.00246	0.99755	0.00245	0.96066	0.00236	0.95948	32.27317	33.59492
50	0.00275	0.99725	0.00275	0.95830	0.00263	0.95698	31.31369	32.67631
51	0.00313	0.99688	0.00312	0.95567	0.00298	0.95418	30.35671	31.76494
52	0.00321	0.99679	0.00321	0.95268	0.00305	0.95116	29.40253	30.86287
53	0.00372	0.99629	0.00371	0.94963	0.00353	0.94787	28.45138	29.96051
54	0.00397	0.99604	0.00396	0.94610	0.00375	0.94423	27.50351	29.07036
55	0.00431	0.99570	0.00430	0.94235	0.00405	0.94032	26.55929	28.18409
56	0.00450	0.99551	0.00449	0.93830	0.00421	0.93619	25.61896	27.30371
57	0.00522	0.99479	0.00521	0.93408	0.00487	0.93165	24.68277	26.42461
58	0.00527	0.99474	0.00526	0.92922	0.00489	0.92677	23.75112	25.56037
59	0.00612	0.99390	0.00610	0.92433	0.00564	0.92151	22.82435	24.69290
60	0.00686	0.99316	0.00684	0.91869	0.00628	0.91555	21.90284	23.84141
61	0.00772	0.99231	0.00769	0.91241	0.00701	0.90890	20.98729	23.00209
62	0.00816	0.99187	0.00813	0.90540	0.00736	0.90171	20.07839	22.17638
63	0.00884	0.99119	0.00881	0.89803	0.00791	0.89408	19.17668	21.35409
64	0.00966	0.99039	0.00961	0.89013	0.00856	0.88585	18.28260	20.53935
65	0.01059	0.98946	0.01054	0.88157	0.00929	0.87692	17.39675	19.73387
66	0.01177	0.98830	0.01170	0.87228	0.01020	0.86718	16.51983	18.93873
67	0.01300	0.98708	0.01292	0.86207	0.01113	0.85651	15.65265	18.15697
68	0.01443	0.98567	0.01433	0.85094	0.01219	0.84484	14.79615	17.38800
69	0.01548	0.98464	0.01536	0.83875	0.01288	0.83231	13.95130	16.63347
70	0.01716	0.98299	0.01701	0.82587	0.01405	0.81884	13.11899	15.88508
71	0.01837	0.98179	0.01821	0.81182	0.01478	0.80443	12.30015	15.15136
72	0.01970	0.98049	0.01951	0.79704	0.01555	0.78927	11.49572	14.42303
73	0.02178	0.97846	0.02154	0.78149	0.01683	0.77307	10.70645	13.70002
74	0.02365	0.97663	0.02337	0.76466	0.01787	0.75572	9.93338	12.99063
75	0.02621	0.97413	0.02587	0.74679	0.01932	0.73713	9.17766	12.28951
76	0.02922	0.97120	0.02880	0.72747	0.02095	0.71699	8.44053	11.60265

Continúa en la siguiente página

### 4.3 Tabla de Mortalidad Proyectadas

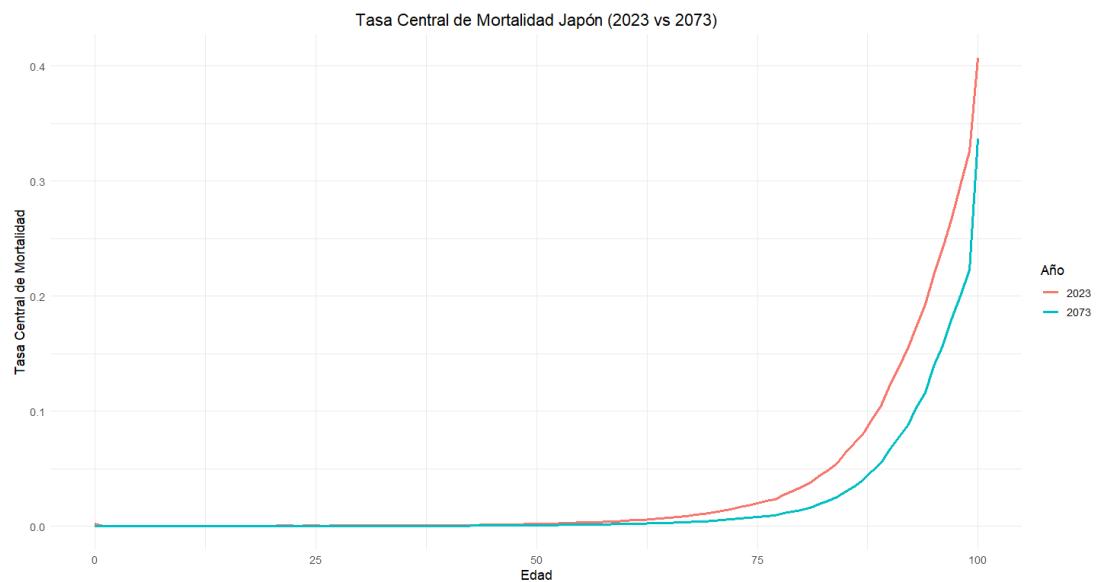
---

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
77	0.03197	0.96853	0.03147	0.70652	0.02223	0.69540	7.72354	10.93188
78	0.03449	0.96610	0.03390	0.68428	0.02320	0.67268	7.02814	10.27083
79	0.03704	0.96363	0.03637	0.66108	0.02404	0.64906	6.35546	9.61369
80	0.04545	0.95556	0.04444	0.63704	0.02831	0.62289	5.70640	8.95764
81	0.04966	0.95154	0.04846	0.60873	0.02950	0.59399	5.08351	8.35094
82	0.05841	0.94325	0.05675	0.57924	0.03287	0.56280	4.48952	7.75078
83	0.06004	0.94171	0.05829	0.54636	0.03185	0.53044	3.92672	7.18705
84	0.06944	0.93289	0.06711	0.51451	0.03453	0.49725	3.39629	6.60096
85	0.07765	0.92525	0.07475	0.47998	0.03588	0.46204	2.89904	6.03987
86	0.08467	0.91877	0.08123	0.44411	0.03608	0.42607	2.43699	5.48742
87	0.09871	0.90593	0.09407	0.40803	0.03838	0.38884	2.01093	4.92838
88	0.11460	0.89161	0.10839	0.36965	0.04007	0.34962	1.62209	4.38819
89	0.15722	0.85424	0.14576	0.32958	0.04804	0.30556	1.27247	3.86086
90	0.23819	0.78716	0.21284	0.28154	0.05992	0.25158	0.96691	3.43433
91	0.24973	0.77799	0.22201	0.22162	0.04920	0.19702	0.71533	3.22775
92	0.27984	0.75451	0.24549	0.17242	0.04233	0.15125	0.51831	3.00615
93	0.30774	0.73329	0.26671	0.13009	0.03470	0.11274	0.36706	2.82157
94	0.31617	0.72699	0.27301	0.09539	0.02604	0.08237	0.25432	2.66595
95	0.35638	0.69752	0.30248	0.06935	0.02098	0.05886	0.17194	2.47934
96	0.36556	0.69093	0.30907	0.04837	0.01495	0.04090	0.11308	2.33769
97	0.42935	0.64653	0.35347	0.03342	0.01181	0.02752	0.07218	2.15974
98	0.44098	0.63868	0.36132	0.02161	0.00781	0.01770	0.04467	2.06713
99	0.46666	0.62163	0.37837	0.01380	0.00522	0.01119	0.02696	1.95369
100	0.54392	0.00000	1.00000	0.00858	0.00858	0.01577	0.01577	1.83852

## 4.4. Comparación de Tasas Centrales de Mortalidad

A continuación, se llevará a cabo una comparación de las tasas centrales de mortalidad de ambos países junto con sus respectivas proyecciones. Además, se analizará el comportamiento de la tasa central de mortalidad proyectada para Chile en un horizonte de 50 años, en contraste con la tasa central de mortalidad de Japón correspondiente al año 2023.

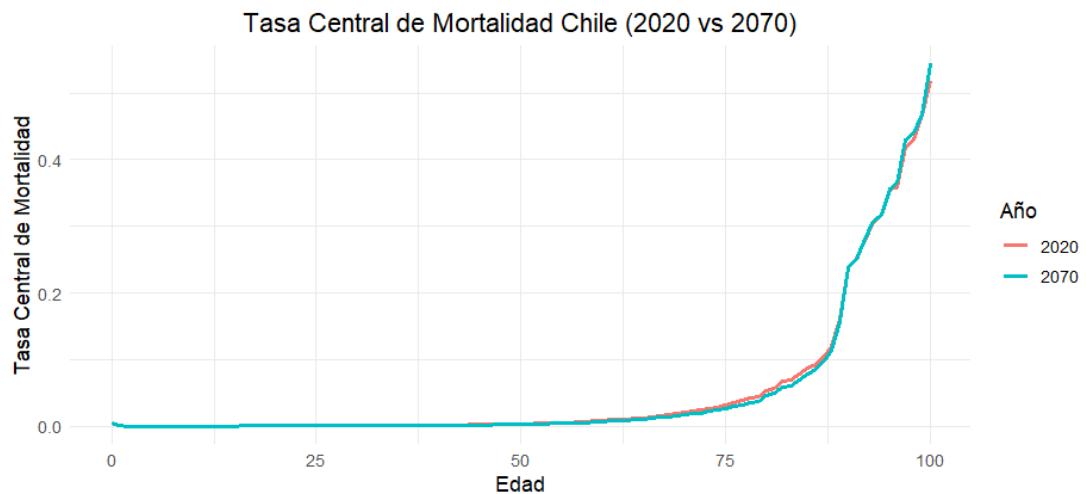
### 4.4.1. Tasa Central de Mortalidad Japón (2023 vs 2073)



**Figura 4.11:** Tasa Central de Mortalidad Japón (2023 vs 2073)

En la figura 4.11 se aprecia una disminución en la tasa central de mortalidad japonesa proyectada para el año 2073 en comparación con el año 2023, lo que sugiere una reducción en la esperanza de vida. Esto confirma que, en los próximos 50 años, Japón será un país aún más envejecido.

##### 4.4.2. Tasa Central de Mortalidad Chile (2020 vs 2070)



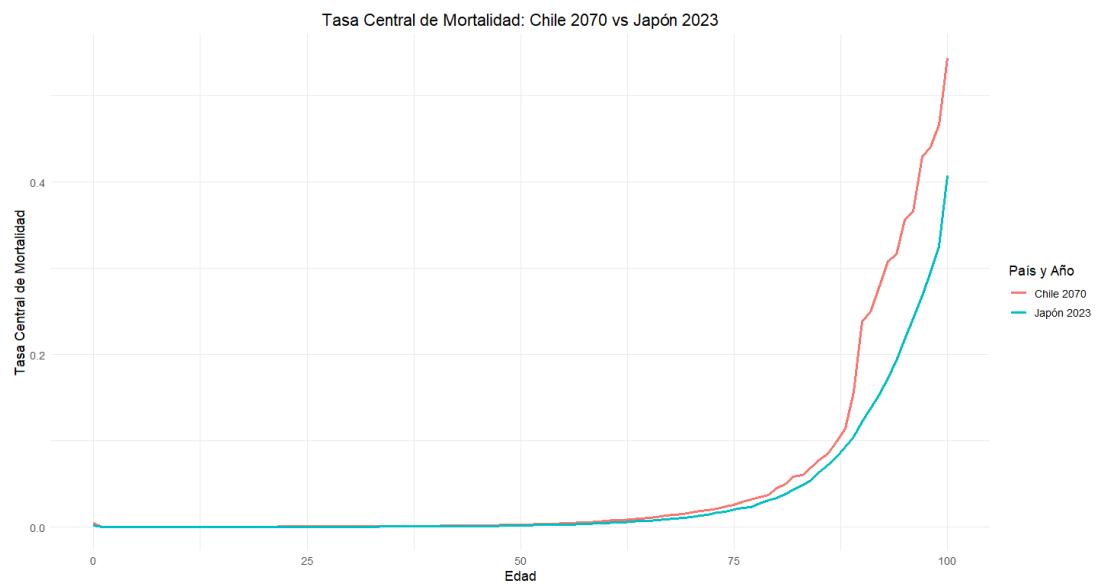
**Figura 4.12:** Tasa Central de Mortalidad Chile (2020 vs 2070)

En la figura 4.12 se observa que la tasa central de mortalidad chilena proyectada para el año 2070 presentará pocas variaciones, con algunas fluctuaciones a partir de los 65 años y más, en comparación con el año 2023. Esto sugiere que, en los próximos 50 años, Chile experimentará un envejecimiento constante a lo largo del tiempo.

## 4.4 Comparación de Tasas Centrales de Mortalidad

---

### 4.4.3. Tasa Central de Mortalidad: Chile 2070 vs Japón 2023



**Figura 4.13:** Tasa Central de Mortalidad: Chile 2070 vs Japón 2023

En la figura 4.13 se presenta una comparación entre la proyección de la tasa central de mortalidad chilena para el año 2070 y la tasa central de mortalidad japonesa del año 2023. Esto demuestra que, dentro de 50 años, el envejecimiento de Chile podría asemejarse al de Japón en el año 2023. Este fenómeno puede observarse en las tablas de mortalidad expuestas en la sección anterior.

## Conclusiones y Recomendaciones

---

En primer lugar, al estudiar las distintas variantes del modelo de proyección de mortalidad Lee-Carter, se observó que para mejores prácticas es necesario trabajar con una serie histórica de al menos 30 años. Asimismo, los modelos Lee-Miller y Booth-Maindonald-Smith requieren adicionalmente un periodo de ajuste a partir de 1950 (periodo postguerra) para mayor precisión en sus pronósticos.

**Recomendación** Dado que para Chile se utilizó una base de datos con una serie histórica de 28 años, se recomienda hacer uso de una serie histórica mucho mas extensa para obtener mayor precisión en los pronósticos.

En segundo lugar, al analizar las proyecciones de mortalidad de las poblaciones japonesa y chilena, se observa que en un horizonte de 50 años se espera que ambas poblaciones continúen envejeciendo. Este envejecimiento sostenido implica un aumento en la proporción de personas mayores en relación con la población total, lo que puede tener importantes implicaciones sociales y económicas, como la necesidad de adaptar los sistemas de salud y pensiones para atender a una población mayor.

**Recomendación** Para mejorar la precisión de las proyecciones y la planificación de políticas públicas, se recomienda utilizar bases de datos más robustas y extensas. En el caso de Chile, donde se ha utilizado una serie histórica de 28 años, sería beneficioso ampliar esta base de datos para incluir al menos 30 años de datos históricos. Esto permitirá obtener pronósticos más precisos y confiables, facilitando la toma de decisiones informadas para enfrentar los desafíos del envejecimiento poblacional.

En tercer lugar, de acuerdo con los criterios de información AIC y BIC, entre los tres modelos de proyección de tablas de mortalidad dinámicas, el modelo Lee-Miller fue el que mejor se ajustó al comportamiento observado. Por lo tanto, se espera que, en el futuro, las proyecciones realizadas con este modelo sean más precisas en casos en los que la población se encuentre en situación de envejecimiento.

---

**Recomendación** Se recomienda explorar y utilizar una gama más amplia de modelos en busca de uno que se adapte mejor a las características de una población en situación de envejecimiento.

En cuarto lugar, el análisis de las tablas de mortalidad actuales y proyectadas revela tendencias significativas en la evolución demográfica de Chile y Japón. En Chile, se proyecta un notable avance en la esperanza de vida al nacer, alcanzando aproximadamente 80 años en los próximos 50 años. Este incremento acerca a Chile a los niveles actuales de Japón, cuya esperanza de vida se sitúa en 84 años. No obstante, las proyecciones para Japón indican un futuro con una población marcadamente envejecida para el año 2073, lo que plantea desafíos sustanciales en términos de sostenibilidad de sistemas de pensiones y atención sanitaria. La divergencia en las trayectorias demográficas subraya la importancia de políticas públicas adaptadas a las necesidades específicas de cada país

**Recomendación** Para fortalecer la precisión y utilidad de las proyecciones de mortalidad, se recomienda la implementación de modelos que incorporen factores socio-económicos y de salud pública específicos de cada país. La inclusión de variables como el acceso a servicios de salud, niveles de educación, y hábitos de vida, puede mejorar significativamente la capacidad predictiva de los modelos. La adopción de estas prácticas permitirá a los responsables de la toma de decisiones anticipar mejor los desafíos demográficos y diseñar políticas más efectivas.

## Lista de Referencias

---

ONU., “*Que nadie quede atrás en un mundo que envejece*” (“*World Social Report 2023: Leaving No One Behind In An Ageing World*”) 2023.

COMISIÓN ECONÓMICA PARA AMÉRICA LATINA Y EL CARIBE (CEPAL)., *Informe “Envejecimiento en América Latina y el Caribe: inclusión y derechos de las personas mayores”* 2022.

ARTÍCULO BBC MUNDO “*¿PUEDE JAPÓN ESCAPAR DE SU BOMBA DEMOGRÁFICA? (Y CUÁLES SON LAS LECCIONES PARA AMÉRICA LATINA Y EL RESTO DEL MUNDO)*”, Disponible en <https://www.bbc.com/mundo/articles/c4n54z3zgjlo>

ENVEJECIMIENTO EN CHILE, EVOLUCIÓN Y CARACTERÍSTICAS DE LAS PERSONAS MAYORES Y DESAFÍOS DEMOGRÁFICOS PARA LA POBLACIÓN, Disponible en [https://www.ine.gob.cl/docs/default-source/documentos-de-trabajo/envejecimiento-en-chile-evolucion-y-caracteristicas-de-las-personas-mayores.pdf?sfvrsn=fa394551\\_2](https://www.ine.gob.cl/docs/default-source/documentos-de-trabajo/envejecimiento-en-chile-evolucion-y-caracteristicas-de-las-personas-mayores.pdf?sfvrsn=fa394551_2)

ORTEGA, ANTONIO., *Tablas de Mortalidad*. 1987.

SANDOYA, FERNANDO., *Matemáticas Actuariales y Operaciones de seguros*. 2007.

BOWERS, N.L., *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries. 1997.

JORDAN, W., *Life Contingencies* 1967.

CHARPENTIER. ARTHUR, *Computational actuarial science with R* 2015.

PITACCO. ERMANNO. DENUIT. MICHEL. HABERMAN. STEVEN Y OLIVIERI. ANNAMARIA, *Modelling longevity dynamics for pensions and annuity business* 2019.

EL PROBLEMA DEMOGRÁFICO EN JAPÓN, Y LA INCIDENCIA EN LAS POLÍTICAS

---

## LISTA DE REFERENCIAS

CONCERNIENTES A LA SEGURIDAD SOCIAL DEL GOBIERNO JAPONÉS. (PERÍODO 2007 A 2012), *Disponible en <https://repository.urosario.edu.co/server/api/core/bitstreams/069e2cd3-2036-4b93-8fb6-9cbdd12741b3/content>*

ARTÍCULO HAN LIN SHANG “POINT AND INTERVAL FORECASTS OF AGE-SPECIFIC LIFE EXPECTANCIES: A MODEL AVERAGING APPROACH”, *Disponible en <https://www.demographic-research.org/volumes/vol27/21/27-21.pdf>*

MÉTODOS PROBABILÍSTICOS DE PRONÓSTICO DE LA MORTALIDAD Y SU APLICACIÓN A TRES DEPARTAMENTOS DE LA PROVINCIA DE CÓRDOBA, *Disponible en [https://ri.conicet.gov.ar/bitstream/handle/11336/79724/CONICET\\_Digital\\_Nro. 1f806bbb-71b3-4202-8f2e-10d9c1dec8eb\\_A.pdf?sequence=2&isAllowed=y](https://ri.conicet.gov.ar/bitstream/handle/11336/79724/CONICET_Digital_Nro. 1f806bbb-71b3-4202-8f2e-10d9c1dec8eb_A.pdf?sequence=2&isAllowed=y)*

FORECASTING MORTALITY, DIFFERENT APPROACHES FOR DIFFERENT CAUSE OF DEATHS? THE CASES OF LUNG CANCER; INFLUENZA, PNEUMONIA, AND BRONCHITIS; AND MOTOR VEHICLE ACCIDENTS, *Disponible en <https://www.actuaries.org.uk/system/files/documents/pdf/pp185211.pdf>*

PRONÓSTICOS PROBABILÍSTICOS DE LA ESPERANZA DE VIDA PARA LA CIUDAD DE ROSARIO, ARGENTINA, *Disponible en <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/6116925.pdf>*

# Anexos

---

## Anexo A: Tablas de Mortalidad - Japón

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
0	0.0018	0.9982	0.0018	1.0000	0.0018	0.9983	84.1655	84.1655
1	0.0003	0.9997	0.0003	0.9982	0.0003	0.9981	83.1672	83.3142
2	0.0002	0.9998	0.0002	0.9980	0.0002	0.9979	82.1691	82.3367
3	0.0001	0.9999	0.0001	0.9978	0.0001	0.9977	81.1712	81.3501
4	0.0001	0.9999	0.0001	0.9977	0.0001	0.9976	80.1735	80.3610
5	0.0001	0.9999	0.0001	0.9976	0.0001	0.9975	79.1759	79.3699
6	0.0001	0.9999	0.0001	0.9975	0.0001	0.9974	78.1784	78.3763
7	0.0001	0.9999	0.0001	0.9974	0.0001	0.9974	77.1809	77.3823
8	0.0001	0.9999	0.0001	0.9973	0.0001	0.9973	76.1836	76.3873
9	0.0001	0.9999	0.0001	0.9973	0.0001	0.9972	75.1863	75.3928
10	0.0001	0.9999	0.0001	0.9972	0.0001	0.9972	74.1890	74.3973
11	0.0001	0.9999	0.0001	0.9971	0.0001	0.9971	73.1919	73.4017
12	0.0001	0.9999	0.0001	0.9971	0.0001	0.9970	72.1948	72.4072

**Tabla 5.1:** Tabla de Mortalidad Japón año 2023

Continúa en la siguiente página

LISTA DE REFERENCIAS

---

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
13	0.0001	0.9999	0.0001	0.9970	0.0001	0.9969	71.1977	71.4122
14	0.0001	0.9999	0.0001	0.9969	0.0001	0.9968	70.2008	70.4208
15	0.0002	0.9998	0.0002	0.9968	0.0002	0.9967	69.2040	69.4296
16	0.0002	0.9998	0.0002	0.9966	0.0002	0.9965	68.2073	68.4407
17	0.0002	0.9998	0.0002	0.9964	0.0002	0.9963	67.2108	67.4545
18	0.0003	0.9997	0.0003	0.9962	0.0003	0.9960	66.2146	66.4703
19	0.0003	0.9997	0.0003	0.9959	0.0003	0.9957	65.2185	65.4886
20	0.0003	0.9997	0.0003	0.9956	0.0003	0.9954	64.2228	64.5095
21	0.0004	0.9996	0.0004	0.9952	0.0004	0.9950	63.2274	63.5314
22	0.0004	0.9996	0.0004	0.9948	0.0004	0.9946	62.2324	62.5560
23	0.0004	0.9996	0.0004	0.9944	0.0004	0.9943	61.2378	61.5796
24	0.0004	0.9996	0.0004	0.9941	0.0004	0.9939	60.2435	60.6019
25	0.0004	0.9996	0.0004	0.9937	0.0004	0.9935	59.2496	59.6256
26	0.0004	0.9996	0.0004	0.9933	0.0004	0.9931	58.2561	58.6506
27	0.0004	0.9996	0.0004	0.9929	0.0004	0.9927	57.2630	57.6722
28	0.0004	0.9996	0.0004	0.9925	0.0004	0.9923	56.2703	56.6946
29	0.0004	0.9996	0.0004	0.9921	0.0004	0.9919	55.2780	55.7167
30	0.0004	0.9996	0.0004	0.9917	0.0004	0.9915	54.2861	54.7385
31	0.0004	0.9996	0.0004	0.9913	0.0004	0.9911	53.2946	53.7623
32	0.0004	0.9996	0.0004	0.9909	0.0004	0.9907	52.3035	52.7857
33	0.0005	0.9995	0.0005	0.9904	0.0005	0.9902	51.3128	51.8084
34	0.0006	0.9994	0.0006	0.9900	0.0006	0.9897	50.3226	50.8318
35	0.0006	0.9994	0.0006	0.9894	0.0005	0.9891	49.3329	49.8611
36	0.0006	0.9994	0.0006	0.9889	0.0006	0.9886	48.3438	48.8884
37	0.0006	0.9994	0.0006	0.9882	0.0006	0.9879	47.3552	47.9184
38	0.0007	0.9993	0.0007	0.9876	0.0007	0.9873	46.3673	46.9487
39	0.0008	0.9992	0.0008	0.9870	0.0008	0.9866	45.3800	45.9797
40	0.0008	0.9992	0.0008	0.9862	0.0008	0.9858	44.3934	45.0148

Continúa en la siguiente página

LISTA DE REFERENCIAS

---

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
41	0.0009	0.9991	0.0009	0.9854	0.0009	0.9850	43.4076	44.0513
42	0.0009	0.9991	0.0009	0.9845	0.0009	0.9841	42.4227	43.0891
43	0.0010	0.9990	0.0010	0.9836	0.0010	0.9831	41.4386	42.1282
44	0.0011	0.9989	0.0011	0.9827	0.0010	0.9821	40.4555	41.1693
45	0.0012	0.9988	0.0012	0.9816	0.0012	0.9810	39.4733	40.2121
46	0.0013	0.9987	0.0013	0.9805	0.0013	0.9798	38.4923	39.2591
47	0.0014	0.9986	0.0014	0.9792	0.0014	0.9785	37.5124	38.3103
48	0.0016	0.9984	0.0016	0.9778	0.0015	0.9770	36.5340	37.3645
49	0.0018	0.9982	0.0018	0.9763	0.0017	0.9754	35.5570	36.4219
50	0.0020	0.9980	0.0020	0.9745	0.0019	0.9736	34.5816	35.4851
51	0.0022	0.9978	0.0022	0.9726	0.0021	0.9716	33.6080	34.5540
52	0.0023	0.9977	0.0023	0.9705	0.0023	0.9693	32.6364	33.6291
53	0.0026	0.9974	0.0026	0.9682	0.0025	0.9670	31.6671	32.7068
54	0.0029	0.9971	0.0029	0.9657	0.0028	0.9643	30.7001	31.7903
55	0.0031	0.9969	0.0031	0.9629	0.0030	0.9614	29.7358	30.8806
56	0.0032	0.9968	0.0032	0.9599	0.0031	0.9584	28.7744	29.9758
57	0.0036	0.9964	0.0036	0.9569	0.0034	0.9552	27.8160	29.0700
58	0.0040	0.9960	0.0040	0.9534	0.0038	0.9515	26.8608	28.1725
59	0.0043	0.9957	0.0043	0.9496	0.0041	0.9475	25.9093	27.2842
60	0.0046	0.9954	0.0046	0.9455	0.0044	0.9433	24.9618	26.4010
61	0.0051	0.9949	0.0051	0.9411	0.0048	0.9387	24.0185	25.5215
62	0.0057	0.9944	0.0056	0.9363	0.0053	0.9337	23.0798	24.6498
63	0.0062	0.9938	0.0062	0.9310	0.0057	0.9282	22.1461	23.7869
64	0.0069	0.9932	0.0068	0.9253	0.0063	0.9221	21.2179	22.9311
65	0.0074	0.9926	0.0074	0.9190	0.0068	0.9156	20.2958	22.0853
66	0.0081	0.9920	0.0080	0.9122	0.0073	0.9085	19.3802	21.2460
67	0.0088	0.9912	0.0088	0.9049	0.0080	0.9009	18.4717	20.4137

Continúa en la siguiente página

LISTA DE REFERENCIAS

---

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
68	0.0098	0.9903	0.0097	0.8969	0.0087	0.8925	17.5708	19.5906
69	0.0109	0.9891	0.0109	0.8882	0.0096	0.8834	16.6783	18.7781
70	0.0120	0.9880	0.0120	0.8785	0.0105	0.8733	15.7949	17.9788
71	0.0133	0.9868	0.0132	0.8680	0.0114	0.8623	14.9217	17.1905
72	0.0146	0.9855	0.0145	0.8566	0.0124	0.8504	14.0594	16.4134
73	0.0165	0.9836	0.0164	0.8442	0.0138	0.8373	13.2090	15.6474
74	0.0182	0.9820	0.0180	0.8303	0.0150	0.8229	12.3717	14.8996
75	0.0201	0.9801	0.0199	0.8154	0.0162	0.8073	11.5489	14.1640
76	0.0220	0.9783	0.0217	0.7991	0.0174	0.7905	10.7416	13.4416
77	0.0234	0.9769	0.0231	0.7818	0.0181	0.7727	9.9512	12.7288
78	0.0272	0.9732	0.0268	0.7637	0.0205	0.7535	9.1784	12.0183
79	0.0308	0.9697	0.0303	0.7432	0.0225	0.7319	8.4250	11.3360
80	0.0339	0.9667	0.0333	0.7207	0.0240	0.7087	7.6930	10.6745
81	0.0378	0.9629	0.0371	0.6967	0.0258	0.6837	6.9843	10.0255
82	0.0435	0.9574	0.0426	0.6708	0.0286	0.6565	6.3006	9.3924
83	0.0486	0.9525	0.0475	0.6423	0.0305	0.6270	5.6441	8.7877
84	0.0542	0.9473	0.0527	0.6118	0.0323	0.5957	5.0170	8.2007
85	0.0634	0.9385	0.0615	0.5795	0.0356	0.5617	4.4214	7.6293
86	0.0720	0.9305	0.0695	0.5439	0.0378	0.5250	3.8597	7.0963
87	0.0809	0.9222	0.0778	0.5061	0.0394	0.4864	3.3347	6.5891
88	0.0930	0.9111	0.0889	0.4667	0.0415	0.4460	2.8483	6.1027
89	0.1047	0.9005	0.0995	0.4252	0.0423	0.4041	2.4023	5.6492
90	0.1219	0.8851	0.1149	0.3830	0.0440	0.3609	1.9982	5.2179
91	0.1375	0.8713	0.1287	0.3389	0.0436	0.3171	1.6372	4.8305
92	0.1542	0.8568	0.1432	0.2953	0.0423	0.2742	1.3201	4.4700
93	0.1729	0.8408	0.1592	0.2530	0.0403	0.2329	1.0459	4.1334
94	0.1930	0.8240	0.1760	0.2128	0.0375	0.1940	0.8130	3.8211
95	0.2182	0.8033	0.1967	0.1753	0.0345	0.1581	0.6190	3.5306

Continúa en la siguiente página

LISTA DE REFERENCIAS

---

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
96	0.2421	0.7841	0.2159	0.1408	0.0304	0.1256	0.4609	3.2729
97	0.2681	0.7636	0.2364	0.1104	0.0261	0.0974	0.3353	3.0365
98	0.2961	0.7421	0.2579	0.0843	0.0217	0.0734	0.2379	2.8219
99	0.3259	0.7198	0.2802	0.0626	0.0175	0.0538	0.1645	2.6288
100	0.4069	0.0000	1.0000	0.0450	0.0450	0.1107	0.1107	2.4576

**Anexo B: Tablas de Mortalidad - Chile**

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
0	0.0055	0.9946	0.0054	1.0000	0.0054	0.9949	78.9644	78.9644
1	0.0004	0.9996	0.0004	0.9946	0.0004	0.9944	77.9695	78.3949
2	0.0002	0.9998	0.0002	0.9942	0.0002	0.9941	76.9751	77.4233
3	0.0002	0.9998	0.0002	0.9940	0.0002	0.9939	75.9810	76.4409
4	0.0002	0.9998	0.0002	0.9938	0.0002	0.9937	74.9871	75.4558
5	0.0001	0.9999	0.0001	0.9936	0.0001	0.9935	73.9934	74.4694
6	0.0001	0.9999	0.0001	0.9935	0.0001	0.9934	72.9998	73.4790
7	0.0001	0.9999	0.0001	0.9934	0.0001	0.9933	72.0064	72.4866
8	0.0001	0.9999	0.0001	0.9932	0.0001	0.9932	71.0131	71.4961
9	0.0001	0.9999	0.0001	0.9932	0.0001	0.9931	70.0199	70.5020
10	0.0001	0.9999	0.0001	0.9931	0.0001	0.9930	69.0268	69.5085
11	0.0001	0.9999	0.0001	0.9930	0.0001	0.9929	68.0338	68.5147
12	0.0001	0.9999	0.0001	0.9929	0.0001	0.9928	67.0408	67.5220

**Tabla 5.2:** Tabla de Mortalidad Chile año 2020

Continúa en la siguiente página

LISTA DE REFERENCIAS

---

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
13	0.0002	0.9998	0.0002	0.9927	0.0002	0.9926	66.0480	66.5319
14	0.0002	0.9998	0.0002	0.9926	0.0002	0.9925	65.0554	65.5430
15	0.0002	0.9998	0.0002	0.9924	0.0002	0.9923	64.0629	64.5538
16	0.0003	0.9997	0.0003	0.9922	0.0003	0.9920	63.0706	63.5691
17	0.0004	0.9996	0.0004	0.9919	0.0004	0.9917	62.0786	62.5885
18	0.0006	0.9994	0.0006	0.9915	0.0006	0.9912	61.0870	61.6113
19	0.0006	0.9994	0.0006	0.9909	0.0006	0.9906	60.0958	60.6475
20	0.0006	0.9994	0.0006	0.9904	0.0006	0.9901	59.1051	59.6810
21	0.0006	0.9994	0.0006	0.9898	0.0006	0.9895	58.1151	58.7149
22	0.0008	0.9992	0.0008	0.9892	0.0007	0.9888	57.1256	57.7515
23	0.0007	0.9993	0.0007	0.9884	0.0007	0.9881	56.1368	56.7946
24	0.0008	0.9992	0.0008	0.9877	0.0008	0.9873	55.1487	55.8358
25	0.0007	0.9993	0.0007	0.9869	0.0007	0.9865	54.1615	54.8808
26	0.0009	0.9991	0.0009	0.9862	0.0008	0.9858	53.1749	53.9203
27	0.0008	0.9992	0.0008	0.9853	0.0008	0.9849	52.1892	52.9664
28	0.0008	0.9992	0.0008	0.9845	0.0008	0.9841	51.2043	52.0108
29	0.0008	0.9992	0.0008	0.9837	0.0008	0.9833	50.2201	51.0502
30	0.0009	0.9991	0.0009	0.9829	0.0009	0.9825	49.2368	50.0927
31	0.0009	0.9991	0.0009	0.9820	0.0009	0.9816	48.2543	49.1374
32	0.0010	0.9990	0.0010	0.9811	0.0010	0.9806	47.2728	48.1830
33	0.0011	0.9989	0.0011	0.9801	0.0011	0.9796	46.2922	47.2303
34	0.0011	0.9989	0.0011	0.9791	0.0010	0.9786	45.3125	46.2807
35	0.0012	0.9988	0.0012	0.9780	0.0012	0.9775	44.3340	45.3294
36	0.0012	0.9988	0.0012	0.9769	0.0012	0.9763	43.3565	44.3825
37	0.0012	0.9988	0.0012	0.9757	0.0012	0.9751	42.3802	43.4364
38	0.0013	0.9987	0.0013	0.9745	0.0012	0.9739	41.4052	42.4891
39	0.0015	0.9985	0.0015	0.9733	0.0015	0.9725	40.4313	41.5418
40	0.0015	0.9985	0.0015	0.9718	0.0015	0.9710	39.4587	40.6044

Continúa en la siguiente página

LISTA DE REFERENCIAS

---

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
41	0.0018	0.9982	0.0018	0.9703	0.0017	0.9694	38.4877	39.6659
42	0.0018	0.9982	0.0018	0.9686	0.0017	0.9677	37.5183	38.7364
43	0.0019	0.9981	0.0019	0.9669	0.0018	0.9659	36.5506	37.8037
44	0.0021	0.9979	0.0021	0.9650	0.0020	0.9640	35.5847	36.8752
45	0.0023	0.9977	0.0023	0.9630	0.0022	0.9619	34.6207	35.9509
46	0.0024	0.9976	0.0024	0.9608	0.0023	0.9597	33.6587	35.0316
47	0.0027	0.9973	0.0027	0.9585	0.0026	0.9572	32.6991	34.1131
48	0.0028	0.9972	0.0028	0.9559	0.0027	0.9546	31.7418	33.2051
49	0.0030	0.9970	0.0030	0.9533	0.0028	0.9518	30.7872	32.2969
50	0.0033	0.9967	0.0033	0.9504	0.0032	0.9488	29.8354	31.3917
51	0.0037	0.9963	0.0037	0.9473	0.0035	0.9455	28.8866	30.4950
52	0.0039	0.9961	0.0039	0.9437	0.0037	0.9419	27.9411	29.6076
53	0.0045	0.9955	0.0045	0.9401	0.0042	0.9380	26.9992	28.7207
54	0.0048	0.9952	0.0048	0.9358	0.0045	0.9336	26.0612	27.8479
55	0.0053	0.9947	0.0053	0.9314	0.0049	0.9289	25.1276	26.9798
56	0.0055	0.9945	0.0055	0.9264	0.0051	0.9239	24.1987	26.1199
57	0.0063	0.9937	0.0063	0.9214	0.0058	0.9185	23.2748	25.2614
58	0.0064	0.9936	0.0064	0.9156	0.0058	0.9127	22.3564	24.4174
59	0.0074	0.9926	0.0074	0.9098	0.0067	0.9064	21.4437	23.5704
60	0.0083	0.9917	0.0083	0.9031	0.0075	0.8993	20.5373	22.7420
61	0.0093	0.9907	0.0093	0.8956	0.0083	0.8914	19.6379	21.9272
62	0.0099	0.9902	0.0098	0.8873	0.0087	0.8829	18.7465	21.1277
63	0.0107	0.9894	0.0106	0.8786	0.0093	0.8739	17.8635	20.3320
64	0.0116	0.9884	0.0116	0.8692	0.0100	0.8642	16.9896	19.5453
65	0.0127	0.9874	0.0126	0.8592	0.0108	0.8538	16.1254	18.7679
66	0.0140	0.9861	0.0139	0.8484	0.0118	0.8425	15.2716	18.0008
67	0.0155	0.9846	0.0154	0.8366	0.0129	0.8301	14.4291	17.2475

Continúa en la siguiente página

LISTA DE REFERENCIAS

---

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
68	0.0173	0.9829	0.0171	0.8237	0.0141	0.8166	13.5990	16.5097
69	0.0186	0.9816	0.0184	0.8096	0.0149	0.8021	12.7823	15.7886
70	0.0208	0.9794	0.0206	0.7947	0.0164	0.7865	11.9802	15.0757
71	0.0223	0.9779	0.0221	0.7783	0.0172	0.7697	11.1937	14.3819
72	0.0240	0.9763	0.0237	0.7611	0.0181	0.7521	10.4240	13.6953
73	0.0264	0.9740	0.0260	0.7431	0.0193	0.7334	9.6719	13.0162
74	0.0286	0.9718	0.0282	0.7237	0.0204	0.7135	8.9385	12.3505
75	0.0319	0.9686	0.0314	0.7033	0.0221	0.6923	8.2250	11.6949
76	0.0352	0.9654	0.0346	0.6812	0.0236	0.6695	7.5327	11.0574
77	0.0381	0.9626	0.0374	0.6577	0.0246	0.6454	6.8632	10.4358
78	0.0416	0.9592	0.0408	0.6331	0.0258	0.6202	6.2179	9.8214
79	0.0444	0.9566	0.0434	0.6073	0.0264	0.5941	5.5977	9.2174
80	0.0528	0.9485	0.0515	0.5809	0.0299	0.5660	5.0036	8.6134
81	0.0572	0.9444	0.0556	0.5510	0.0306	0.5357	4.4376	8.0538
82	0.0666	0.9355	0.0645	0.5204	0.0336	0.5036	3.9019	7.4985
83	0.0686	0.9337	0.0663	0.4868	0.0323	0.4707	3.3984	6.9809
84	0.0776	0.9253	0.0747	0.4545	0.0339	0.4376	2.9277	6.4411
85	0.0864	0.9172	0.0828	0.4206	0.0348	0.4032	2.4901	5.9205
86	0.0917	0.9123	0.0877	0.3858	0.0338	0.3688	2.0869	5.4099
87	0.1050	0.9002	0.0998	0.3519	0.0351	0.3344	1.7181	4.8819
88	0.1189	0.8878	0.1122	0.3168	0.0355	0.2990	1.3837	4.3676
89	0.1604	0.8515	0.1485	0.2813	0.0418	0.2604	1.0847	3.8564
90	0.2373	0.7879	0.2121	0.2395	0.0508	0.2141	0.8243	3.4417
91	0.2528	0.7756	0.2244	0.1887	0.0423	0.1675	0.6102	3.2338
92	0.2798	0.7546	0.2454	0.1463	0.0359	0.1284	0.4427	3.0249
93	0.3051	0.7353	0.2647	0.1104	0.0292	0.0958	0.3143	2.8461
94	0.3169	0.7264	0.2736	0.0812	0.0222	0.0701	0.2185	2.6906
95	0.3564	0.6975	0.3025	0.0590	0.0178	0.0501	0.1484	2.5155

Continúa en la siguiente página

---

LISTA DE REFERENCIAS

---

Edad	$m_x$	$p_x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
96	0.3586	0.6959	0.3041	0.0411	0.0125	0.0349	0.0983	2.3896
97	0.4182	0.6541	0.3459	0.0286	0.0099	0.0237	0.0634	2.2152
98	0.4297	0.6463	0.3537	0.0187	0.0066	0.0154	0.0397	2.1221
99	0.4665	0.6217	0.3783	0.0121	0.0046	0.0098	0.0243	2.0099
100	0.5185	0.0000	1.0000	0.0075	0.0075	0.0145	0.0145	1.9287