

Теория на вероятностите и приложна статистика (спец. Информатика)



Доц. д-р Снежана Христова

каб. 342

E-mail : snehri@uni-plovdiv.bg

http://www.fmi-plovdiv.org/pmm/Informatika_10/index.htm



Вероятност ???
Статистика ???

С. Христова

Проверка на знанията:

Контролни работи: 2 контролни работи. Поправка на контролна работа не се допуска. При отсъствие по уважителна причина (след представяне на официален документ) контролната може да се направи допълнително по споразумение с преподавателя. **Максимум точки на всяка контролна 50**

Малки контролни работи: През семестъра по време на упражненията ще бъдат правени 10-минути контролни (общо 5 на брой с максимален общ брой **точки 30**)

Домашни работи: През семестъра ще бъдат дадени 2 домашни задания, които трябва да се предадат в определен срок. Всяко от тях съдържа 5 задачи, като само една, избрана по случаен начин от студент ще бъде оценявана. Максимален брой точки **на всяка домашна е 10 точки**

Изпит: *първа част* (вероятности) **Максимум 80+50 точки**
и втора част (статистика) **Максимум 70 + 50 точки.**

Всяка част на изпита се състои от теоретична част и една задача.
Максимум 250 точки

Пример 1

Нека оценките на студент са: контролна 1 -25 *точки*, контролна 2 - 28 *точки*, домашна 1 – 10 *точки*, домашна 2 – 10 *точки*, общо точки от 10-минутните тестове (лекции и упр.) – 11 *точки*, изпит ТВ – 15 *точки*, изпит ПС- 30 *точки*, и

$$\text{Оценка} = 2 + \frac{25 + 28 + 10 + 10 + 11 + 15 + 30}{100} = 3,29$$

крайна оценка Среден 3

ПРИМЕР 2

Нека оценките на студент са:

контролна 1 -38 *точки*, контролна 2 - 42 *точки*, домашна 1 – 10 *точки*, домашна 2 – 10 *точки*, общо точки от 10-минутните тестове (лекции и упр.) – 11 *точки*, **Не се явява на изпит**

$$\text{Оценка} = 2 + \frac{38 + 42 + 10 + 10 + 11}{100} = 3,11$$

крайна оценка Среден 3

Времетраене на лекциите

9:15-10:20

10:30- 11:40

С. Христова

Вероятност ???

Всекидневни

Тото 6 от 49

Тото 5 от 35

Технологиите

Конструирането на атомен реактор -
надежност

финанси

Цена на акции

Компютри ???

Мярка за възможността нещо да се случи

С. Христова

ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ В ТВ

Опит

Всеки процес, който може да се повтори и чийто резултати са неизвестни

Елементарно събитие

Всеки изход на даден опит

Пространство от събития, S

Съкупност от всички елементарни изходи, свързани с даден опит

Събитие

Всяка съвкупност от елементарни събития (всяко подмножество на S).

Обикновено събитията се означават с главни латински букви: A, B, C, \dots

Един изход е **благоприятен** за събитие A , ако е елемент на A



Примери



ОПИТ: Хвърляне на монета един път. $S=\{\text{Л}, \text{Г}\}$,
 $A=\{\text{Г}\}$, $B=\{\text{Л}\}$

ОПИТ: хвърляне на зарче един път. $S=\{1,2,3,4,5,6\}$,
 $A=\{\text{нечетен брой точки върху зара}\}=\{1,3,5\}$
 $B=\{\text{поне 5 точки на зара}\}=\{5,6\}$
 $C=\{\text{по-малко от 4 точки на зара}\}=\{1,2,3\}$

ОПИТ: избор на листче измежду 4 листчета с написани числата
от 1 до 4 върху тях. $S=\{1,2,3,4\}$,
 $A=\{\text{нечетно число върху листчето}\}=\{1,3\}$
 $B=\{\text{число по-голямо от 4 върху листчето}\}=\text{празно}$

Опит: избор на семейство измежду всички с две деца.
 $S=\{BB, AA, BA, AB\}$, където А-момиче, В-момче
 $A=\{\text{семейството има едно момче}\}=\{BA, AB\}$
 $B=\{\text{семейството има поне едно момче}\}=\{BA, AB, BB\}$

Опит: стрелба по кръгова мишена.

$S = \{\text{всички точки от кръга}\}$

$A = \{\text{попадение в десетката}\} = \{\text{точките от кръга, които са означени с 10}\}$

Опит: Хвърляне на два различни зара едновременно

Елементарно събитие(изход)= наредени двойки от вида (i, j)

$S = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, \dots, 66\},$

$A = \{\text{еднакви числа върху зарчетата}\} = \{11, 22, 33, 44, 55, 66\}$

$B = \{\text{сумата от точките е 7}\} = \{16, 61, 25, 52, 34, 43\}$

Опит: Хвърляне на един зар два пъти

Опит: Хвърляне на монета до поява на лице.

$S = \{\text{Л, ГЛ, ГГЛ, ГГГЛ, ГГГГЛ, } \dots \},$

$A = \{\text{точно един герб}\} = \{\text{ГЛ}\}$

$B = \{\text{поне един герб}\} = \{\text{ГЛ, ГГЛ, ГГГЛ, ГГГГЛ, } \dots \}$

Видове пространства от елем. изходи S

крайномерни

Изброими безкрайни

неизброими



Практическо приложение

Опит

Всеки процес, който може да се повтори и чийто резултати са неизвестни



Цена на акции

Невъзможно е опитът да се повтори при едни и същи условия много, много пъти => теоретически считаме, че е възможно

$S = \{\text{всички положителни числа}\},$

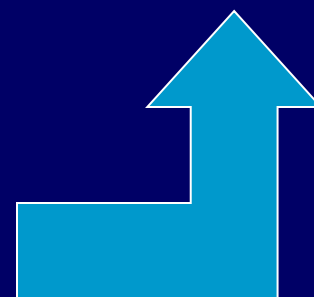
$A = \{\text{цената е по-висока от 10 лв}\} = \{\text{всички числа} > 10\}$



Времето

$S = \{\text{дъжд, сняг, ясно}\}$

Но може и друга интерпретация



Видове събития

Достоверно

Състои се от всички изходи, свързани с даден опит = S

Невъзможно \emptyset

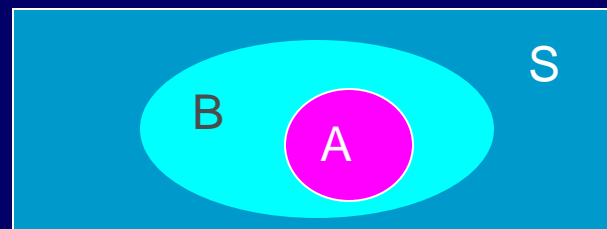
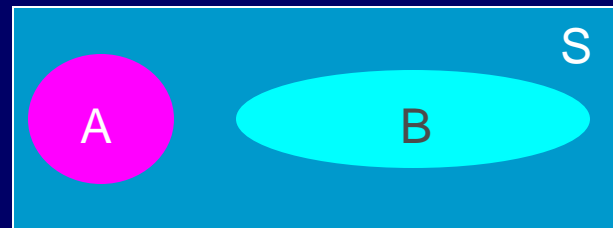
Несъвместими

Събития, които нямат общи благоприятни изходи

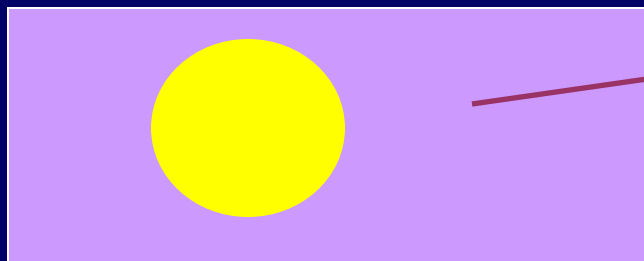
A влече B

Всеки благоприятен изход на A е благоприятен изход и за B

Допълнение



Събитието $\neg A$ се нарича допълнение на събитието A, ако се състои от всички изходи на пространството S, които не принадлежат на A



Допълнение на събитието A

$\neg A$ и A са несъвместими

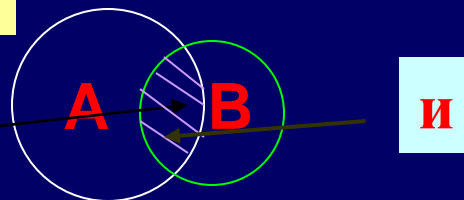
Казваме, че настъпва събитието A, ако след изпълнение на опита се наблюдава изход от A (благоприятен за A)

Действия със събития

Нека A, B са събития

$$A \cap B$$

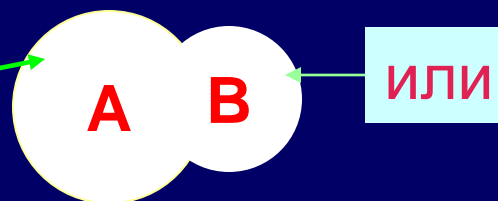
Сечение на две събития:



А и В е събитие, което се състои от всички изходи, които принадлежат **както на А** **така и на В**.

Сума на две събития :

$$A \cup B$$



А или В е събитие, което се състои от всички изходи, които принадлежат **или на А**, **или на В**, **или и на двете**

Примери



Карта е избрана по случаен начин от колода от 52 карти

$A = \{\text{избраната карта е черна}\}$

$B = \{\text{избраната карта е пика}\}$

$C = \{\text{избраната карта е поп}\}$

$D = \{\text{избраната карта е спатия}\}$

$B \text{ или } C = \text{Избраната карта е пика или поп} = B \cup C$

$B \text{ и } C = \text{Избраната карта е поп пика} = B \cap C$

$A \text{ или } B = \text{Избраната карта е черна} = A \cup B$

$A \text{ и } B = \text{Избраната карта е пика} = A \cap B$

$B \text{ или } D = A = B \cup D$

$B \text{ и } D = \text{празно} = B \cap D$

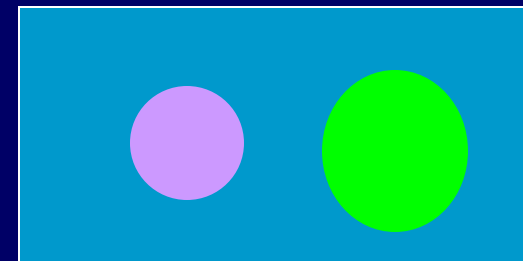


Свойства

Нека A и B са несъвместими събития

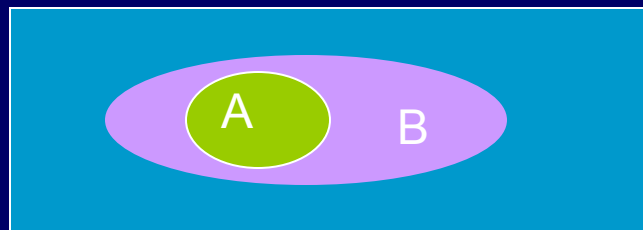
$$A \cap B = A \text{ и } B = \text{невъзможното}$$

$$A \cap \bar{A} = \text{невъзможното}$$



$$A \cup \bar{A} = S$$

Нека A влече B



$$A \cap B = A \text{ и } B = A \longrightarrow A \cap S = A \text{ и } S = A$$

$$A \cup B = A \text{ или } B = B \longrightarrow A \cup S = A \text{ или } S = S$$

Вероятност

Вероятността на едно събитие A , ще означаваме с $P(A)$.
Тя изразява възможността това събитие на настъпи.

Дефиниция

На всяко събитие A се съпоставя число $P(A)$ за което:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(S) = 1$
3. P е (безкрайно) адитивна, т.е. ако A_1, A_2, \dots е крайна или безкрайна редица от несъвместими събития, то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

Свойства на Вероятността

Свойство 1

$$P(\text{невъзможното})=0$$

Доказателство Нека $A=S$, $B=\emptyset \Rightarrow$ те са несъвместими и сумата им дава S
 \Rightarrow от аксиома 3

$$1 = P(S) = P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset) = 1 + P(\emptyset)$$

аксиома 1

$$P(\emptyset) = 0$$

Свойство 2

Ако A влече B



$$P(A) \leq P(B)$$

Свойство 3

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Доказателство

A или

$$\bar{A} = S$$

от аксиома 3

$$P(\bar{A}) + P(A) = 1$$

Свойство 4

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Доказателство

Ако A влече S

$$P(A) \leq 1$$

Частен случай

Класическа вероятност

Само за крайномерни пространства

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

k - брой благоприятни изходи на събитието A
 n – брой на всички възможни изходи

Примери



ОПИТ: Хвърляне на монета един път. $S=\{\Gamma, \text{Л}\}$,
 $A=\{\Gamma\}$, $B=\{\text{Л}\}$

$$P(A)=1/2, \quad P(B)=1/2, \quad P(S)=1$$

Опит: хвърляне на зарче един път. $S=\{1,2,3,4,5,6\}$,
 $A=\{\text{нечетен брой точки върху зара}\}=\{1,3,5\}$
 $B=\{\text{поне 5 точки на зара}\}=\{5,6\}$
 $C=\{\text{по-малко от 4 точки на зара}\}=\{1,2,3\}$

$$P(A)=3/6=0,5 \quad P(B)=2/6=1/3 \quad P(C)=3/6=0,5$$

Опит: избор на семейство измежду всички с две деца.
 $S=\{BB, AA, BA, AB\}$, където А-момиче, В-момче
 $A=\{\text{семейството има едно момче}\}=\{BA, AB\}$
 $B=\{\text{семейството има поне едно момче}\}=\{BA, AB, BB\}$

$$P(A)=2/4=0,5 \quad P(B)=3/4=0,75$$

Опит: избор на листче измежду 4 листчета с написани числата
от 1 до 4 върху тях. $S=\{1,2,3,4\}$,
 $A=\{\text{нечетно число върху листчето}\}=\{1,3\}$
 $B=\{\text{число по-голямо от 4 върху листчето}\}=\text{празно}$

$$P(A)=2/4$$

$$P(B)=0$$

Опит: стрелба по кръгова мишена.

$S=\{\text{всички точки от кръга}\}$

$A=\{\text{попадение в десятката}\}=\{\text{точките от кръга, които са означени с 10}\}$

$$P(A)=?????$$

**Класическата вероятност е неприложима;
пространството е безкрайно**

Пример

Два различни зара са хвърлени
едновременно един път.



А/ Пространството от събития?

Има **36** възможни изхода:

(1,1), **(2,1)**, **(3,1)**, **(4,1)**, **(5,1)**, **(6,1)**, **(1,2)**, **(2,2)**, . . . , **(5,6)**, **(6,6)**

Б/ каква е вероятността да се паднат еднакъв брой точки и на двата зара?

Има **6** възможни изхода: **(1,1)**, **(2,2)**, **(3,3)**, **(4,4)**, **(5,5)**, **(6,6)**

Вероятността е $6/36 = 1/6$

В/ Каква е вероятността сумата от точките да е 7?

Има **6** възможни изхода

(1,6), **(2,5)**, **(3,4)**, **(4,3)**, **(5,2)**, **(6,1)**

Вероятността е $6/36 = 1/6$



ОПИТ



Карта е избрана случайно от колода (тесте) карти (52 карти)

А/ Каква е вероятността избраната карта да е червена?

$$P(A)=26/52=1/2$$



Б/ Каква е вероятността избраната карта да е купа?

$$P(B)=13/52=1/4$$

В/ Каква е вероятността избраната карта да е поп?

$$P(C)=4/52=1/13$$

Г/ Каква е вероятността избраната карта да е червен поп?

$$P(D)=2/52=1/26$$

Д/Каква е вероятността избраната карта да е поп пика?

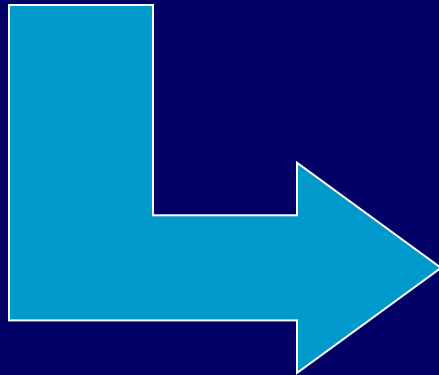
$$P(E)=1/52$$

ОПИТ

Пет карти са избрани случайно от колода карти (52 карти)

А/ Каква е вероятността точно една от избраните карти да е червена?

Колко са всички възможни изходи- начини за избор на 5 карти измежду 52 ?



Как да броим ???



Техники за пресмятане

Принцип на Умножението

• Ръководство на клуб – **председател**, **касиер** и **секретар** се избират по случаен начин измежду 4 човека: Ана, Борис, Васил и Георги. По колко различни начини може да се избере ръководството?

24

• Ръководството – **председател**, **касиер** и **секретар** се избират по случаен начин измежду 4 човека: Ана, Борис, Васил и Георги. **Ана не иска да бъде председател** . По колко различни начини може да се избере ръководството?

18

Примери



За да се отвори един катинар е необходимо да се въведе код от 4 цифри. Колко различни кода са възможни?

10 000



Ако кодът на катинар се състои от 4 различни цифри, то колко кода са възможни?

5 040

А ако кодът се състои от буква (25 латински букви), последвана от 3 различни цифри, то колко кода са възможни?

25(10)(9)(8)

Колко различни пароли, които имат повече от 3 , но не повече от 6 символа са възможни, ако се използват само цифрите 0 и 1?

с 4 символа – 2^4

с 5 символа – 2^5

с 6 символа – 2^6

Общо: $2^4 + 2^5 + 2^6 = 2^4(1 + 2 + 4) = 112$

Колко различни пароли, които имат повече от 3 , но не повече от 6 символа са възможни, ако се използват само цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5?

с 4 символа – 6^4

с 5 символа – 6^5

с 6 символа – 6^6

Общо:

$6^4 + 6^5 + 6^6 = 6^4(1 + 6 + 36) = 55728$

Комбинации

не- наредено множество от елементи

без повторение

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Пример

По колко различни начина могат да се изберат трима плувци от 10-членен отбор?

$$C_3^{10} = \frac{10(9)(8)}{3!} = \frac{720}{6} = 120$$

Пример (избор на тим)

Измежду 5 мъже и 7 жени трябва да се изберат петима, за да работят върху проект.

Колко различни 5-членни групи могат да се изберат?

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12(11)(10)(9)(8)}{1(2)(3)(4)(5)} = 792$$

Колко различни 5-членни групи могат да се изберат, ако трима са мъже, а останалите две са жени?

$$C_5^3 = \frac{5(4)(3)}{3!} = 10$$

$$C_7^2 = \frac{7(6)}{2!} = 21$$

210

мъже

жени

Ако двама души настояват или да работят заедно или да не са в групата, то колко различни 5-членни групи могат да се изберат?

1 начин
за
двамата

$$\frac{10(9)(8)}{3!} = 120$$

+

$$C_{12-2}^5 = \frac{10(9)(8)(7)(6)}{5!} = 252$$

■ Колко различни множества от n елемента съществуват (множествата могат да се състоят от по един, два, или повече елемента)?

От един елемент – 1 множество

От два елемента – $n(n-1)/2$ множества

От три елемента – $n(n-1)(n-2)/(1*2*3)$ множества и т.н.

Общо:

$$C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

ОПИТ

Пет карти са избрани случайно от колода карти (52 карти)

А/ Каква е вероятността точно една от избраните карти да е червена?

Колко са всички възможни изходи- начини за избор на 5 карти измежду 52 ?

$$C_5^{52} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52(51)(50)(49)(48)}{1(2)(3)(4)(5)} = 2598960$$

Колко са всички възможни изходи, при които една от картите е червена, а другите 4 са черни?

$$26(C_4^{26}) = 26 \frac{26(25)(24)(23)}{1(2)(3)(4)} = 388700$$

$$P = \frac{388700}{2598960} \approx 0,15$$



Б/ Каква е вероятността точно една от избраните карти да е купа?

Колко са всички възможни изходи, при които една от картите е купа, а другите 4 не са купи?

$$13(C_4^{39}) = 13 \frac{39(38)(37)(36)}{1(2)(3)(4)} = 1069263$$

$$P = \frac{1069263}{2598960} \approx 0,41$$

В/ Каква е вероятността точно една от избраните карти да е поп?

Колко са всички възможни изходи, при които една от картите е поп, а другите 4 не са поп?

$$4(C_4^{48}) = 4 \frac{48(47)(46)(45)}{1(2)(3)(4)} = 778320$$

$$P = \frac{778320}{2598960} \approx 0,3$$

В/ Каква е вероятността точно три от избраните карти да са поп?

Колко са всички възможни изходи, при които три от картите са поп, а другите 2 не са поп?

$$P = \frac{4512}{2598960} \approx 0,0017$$

$$(C_3^4)(C_2^{48}) = \frac{4(3)(2)}{1(2)(3)} \frac{48(47)}{1(2)} = 4512$$

Предизвикателни задачи



3
а
д
а
ч
а
1

Студентка има 5 вилници, от които само 3 харесва, 4 ножа и 6 лъжици. Каква е вероятността, ако избира комплект по случаен начин, да избере вилница, която ѝ харесва? $n = 5 \cdot 4 \cdot 6 = 120$ $k = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$ $P = 72/120 = 3/5$

3
а
д
а
ч
а
2

Асансьор със 7 пътника тръгва от партера и спира на всеки от 9-те етажа на сграда. Каква е вероятността поне двама от пътниците да слязат на един и същ етаж? Има 9 възможности за всеки пътник: $n = 9^7$

$A =$ поне двама слизат на един и същ етаж

$\bar{A} =$ всички слизат на различни етажи

За 1-вия пътник има 9 възм. ,
за 2-рия има 8 възм. и т.н

$$k = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 3$$

$$P(\bar{A}) = k / n = 0,038$$

$$P(A) = 1 - 0,038 = 0,962$$

Благодаря за вниманието!

