Петър Копанов **Снежана Христова**

ЗАПИСКИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА

(ЗА ИНФОРМАТИЦИ)

Пловдив 2018

УНИВЕРСИТЕТСКО ИЗДАТЕЛСТВО
„ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“

Рецензенти: Проф. д-р Станимир Стоянов
Проф. д-р Коста Гъров
Доц. д-р Валентина Пройчева

ISBN ?????

СЪДЪРЖАНИЕ

Предговор

Основната цел на това ръководство е да се даде възможност на студентите – бакалаври, обучавани във Факултета по математика и информатика при ПУ „П. Хилендарски“ в специалността „Информатика“ да се запознаят с основните методи и практическото приложение на тези два основни клона от приложната математика. Книгата може да се използва също така от студентите във ФМИ от другите специалности от направление 4.6 (Информатика), както и от всички, които изучават вероятности и статистика и имат нужда от задълбочаване на знанията си в тези области.

Практическото приложение на вероятностните и статистическите методи е представено в книгата с помощта на алгоритми, описани в началото на съответните глави, което улеснява както възприемането им, така и използването им от програмисти, информатици и специалисти в областта на компютърните и информационните технологии.

Конкретните пресмятания са направени със системата за компютърна алгебра Wolfram Mathematica (Версия 11), която е достъпна за студентите от ФМИ. Тази система и конкретните й приложения тук дава добра представа за връзката между приложните математически методи и съвременните информационни технологии. Отчитането на досегашния опит в преподаването на теорията на вероятностите и математическата статистика конкретно на студентите от специалност „Информатика“ (това става през зимния семестър на 3 курс и се съчетава с техния стаж през последните 4 седмици на семестъра) принуди авторите да се съобразят с особеностите на преподаването на предмета в информатичните специалности и отказ от използването и на други компютърни системи в процеса на обучението, по-специално използването на системата R в статистиката. Основната причина за този избор е острият дефицит от време за преподаване на курса - само 6 седмици, в които е практически невъзможно да се демонстрира и след това да се използва пълноценно повече от една софтуерна система.

С това ръководство от една страна се дава помагало в ръцете на студентите за семинарните упражнения и самостоятелната подготовка, а от друга се отговаря на необходимостта от преподаване на класическите математически дисциплини, разглеждани тук.

Голяма част от задачите в ръководството са давани през последните 28 години на упражнения, семинари, текущи контролни, изпити и домашни работи на студентите от различните специалности на ФМИ. Включени са и задачи с повишена трудност (повечето с решения или указания), които обикновено не се включват в курса, но които могат да помогнат за по-задълбоченото разбиране и усвояване на материала. Групирането на задачите в 16 тематични глави е до голяма степен условно (особено в частта СТАТИСТИКА), тъй като много от задачите са с по няколко подусловия, отнасящи се до теми от различни глави. Авторите са се опитали да поставят задачите в главите, които според тях в най-голяма степен ги покриват тематично.

В началото на всяка глава от книгата са дадени основни дефиниции и формули, необходими за решаването на задачите от нея, както и алгоритми, позволяващи това решаване да стане максимално ясно и във форма, подходяща за информатици.

В края на книгата като приложение са дадени таблици на основни вероятностни разпределения, необходими при конкретни пресмятания и списък от литература за допълнителна подготовка.

Пресмятанията в решенията на задачите от първата част на книгата (ТЕОРИЯ НА ВЕРОЯТНОСТИТЕ) са направени с помощта на пакета Mathematika 11.1. for Students (възможно е и използването на по-нови версии на пакета, както и на други системи за компютърна алгебра), като точността на отговорите в десетичен вид обикновено е ограничена до 20 знака, и е напълно достатъчна за практически пресмятания. С реализирането на тези пресмятания се постига и една от причините за написването на тази книга – да се разкрие по-добре връзката между приложните математически методи и съвременните софтуер и хардуер.

За решаването на задачите от втората част (СТАТИСТИКА) освен пакета Mathematika 11.1. for Students (препоръчван от авторите) могат да бъдат използвани различни други програмни среди (например Microsoft Excel от пакета Microsoft Office, средата за статистически анализ на данни R, статистически пакети като SPSS или Statistika).

Ноември 2018 ***От авторите***

Част първа.
ТЕОРИЯ НА ВЕРОЯТНОСТИТЕ

1. Елементи на комбинаториката. Основни методи за пресмятане

Справочник

Комбинаториката (или комбинаторният анализ) е дял от математиката, изучаващ различни отношения в дискретни множества: размествания, наредби, подмножества и други.

Правило за събиране

Ако елементът ***a*** *може да бъде избран по* ***m*** *различни начина, а елементът* ***b*** *по* ***n*** *различни начина, изборът на „****a или b****" може да се извърши по* ***m + n*** *различни начина.*

Правило за умножение

Ако елементът ***a*** *може да бъде избран по* ***m*** *начина и при всеки избор но а елементът* ***b*** *може да бъде избран по* ***n*** *начина, то изборът на наредената двойка* ***(a, b)*** *може да стане по* ***m.n*** *начина.*

Извадка

Нека M = {1, 2, 3,..., n}. Подмножеството $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$*, съставено от кои да е* ***k*** *елемента на M ще наричаме извадка с обем* ***k****. Можем да образуваме следните 4 различни множества от извадки с обем* ***k****:*

{ненаредени извадки с обем k без повтаряне на елементи}, k = 0, 1, 2,..., n;

{ненаредени извадки с обем k с възможно повтаряне на елементи}, k = 0, 1, 2,..;

{наредени извадки с обем k без повтаряне на елементи}, k = 0, 1, 2,..., n;

{наредени извадки с обем k с възможно повтаряне на елементи}, k = 0,1,2,...

За всяко множество от n елемента можем да образуваме аналогични подмножества, имащи специални имена:

Вариации

Вариации без повторение на ***n*** *елемента от* ***k****-ти клас (k < n) се наричат подмножествата от наредени извадки с обем* ***k*** *без повтаряне на елементи.*

Пермутации

Пермутации без повторение на ***n*** *елемента се наричат подмножествата от наредени извадки с обем* ***n*** *без повтаряне на елементи. Пермутациите могат да бъдат разглеждани като вариации без повторение на n елемента от* ***n****-ти клас (k = n).*

Комбинации

Комбинации без повторение на ***n*** *елемента от* ***k****-ти клас (k ≤ n) се наричат подмножествата от ненаредени извадки с обем k без повтаряне на елементи.*

Вариации с повторение

Вариации с повторение на **n** *елемента от* **k***-ти клас се наричат подмножествата от наредени извадки с обем k с възможно повтаряне на елементи.*

Комбинации с повторение

Комбинации с повторение на **n** *елемента от* **k***-ти клас се наричат подмножествата от ненаредени извадки с обем k с възможно повтаряне на елементи.*

Освен тези извадки често се използва и друг вид извадки, наречени

Пермутации с повторение

Да разгледаме множеството $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k1}, b_1, b_2, \ldots, b_{k2}, \ldots, c_1, c_2, \ldots, c_{km}\}$, *където* $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. *Образуваме всички пермутации на елементите на множеството M, след което разглеждаме елементите* $a_1, a_2, \ldots, a_{k1}$ *като неразличими помежду си и правим същото за елементите* $b_1, b_2, \ldots, b_{k2}, \ldots, c_1, c_2, \ldots, c_{km}$. *Получените извадки се наричат пермутации с повторение.*

Основни формули за пресмятане в комбинаториката:

факториел:

$$n! = 1.2.3....n, \qquad 0! = 1$$

брой на вариациите без повторение:

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

брой на вариациите с повторение:

$$\tilde{V}_n^k = n^k$$

брой на пермутациите без повторение:

$$P_n = n!$$

Команда в пакет Mathematica: *Factorial [n], n!*

брой на пермутациите с повторение:

$$P_n^{k_1, k_2, k_3, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1!\, k_2!\, k_3! \ldots k_m!}, \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$$

Команда в пакет Mathematica: *Multinomial [k1, k2, k3,…, km]*

брой на комбинациите без повторение:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Команда в пакет Mathematica: *Binomial[n,k]*

брой на комбинациите с повторение:

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Команда в пакет Mathematica: *Binomial[n+k-1,k]*

Алгоритъм за решаване на комбинаторни задачи

1)определя се има ли наредба в извадката;

2) определя се има ли повторение на елементи в извадката;

3) ако извадката е наредена се определя дали в извадката участват всички елементи на множеството или част от тях;

4) в зависимост от отговора в 1), 2), 3) се определя видът на комбинаторната извадка (пермутация, комбинация или вариация, с повторение или без повторение);

5) в съответствие с отговора в 4) се избира формула за пресмятане;

6) в избраната формула се заместват числените стойности от условието;

7) извършват се пресмятанията.

Задачи

1.1. Студентски стол предлага само комплексни менюта, съдържащи задължително супа, основно ядене и десерт. Възможният избор е даден в таблицата

Вид	***Избор***
Супа	Пилешка супа или таратор
Основно ядене	Печено пиле или кюфтета
Десерт	Паста или баклава

а) Колко различни комплексни менюта могат да се предложат?

б) Ако студент иска непременно в менюто му да има баклава, то измежду колко възможни менюта той може да избира?

в) Ако студент иска непременно в менюто му да има печено пиле, то измежду колко възможни менюта той може да избира?

г) Ако студент иска непременно в менюто му да има и печено пиле и баклава, то измежду колко възможни менюта той може да избира?

1.2. Аранжьор на витрина разполага с три манекена и с пет различни рокли, от които само една е черна. По колко различни начина може да изложи роклите на витрината (местоположението на роклите на витрината е без значение)? А ако черната рокля трябва задължително да е на витрината?

1.3. За ръководството на Факултетния съвет на ФМИ са предложени трима членове. От тях трябва да се избере декан и заместник декан. По колко различни начина може да стане това?

1.4. Разглеждаме множеството на четирицифрените цели числа, които могат да се запишат с помощта на цифрите от 1 до 9, без цифрите да се повтарят.

а) определете броя на тези числа;

б) определете броя на числата, за които цифрата на хилядите е 1;

в) определете броя на числата, за които цифрата на единиците е 3, а цифрата на хилядите е 7;

г) определете броя на числата, които съдържат в десетичния си запис последователно една до друга цифрите 6 и 7 и то в посочения ред.

1.5.Телефонен номер може да започва с коя да е от цифрите 0, 1, 2, 3, …, 9. Да се пресметне броят на шестцифрените телефонни номера, на които всички цифри са различни.Да се пресметне броят на шестцифрените телефонни номера, на които номерът започва с 26.

1.6. Шест двойки приятели решават да се снимат. Те застават в две редици по 6 човека.

а) По колко различни начина могат да се подредят?

б) По колко различни начина могат да се подредят за снимката, ако отпред са момичетата, а отзад – момчетата?

в) По колко различни начина могат да се подредят за снимката, ако пред всяко момче е неговата приятелка?

1.7. Иванчо има една банкнота по два лева, една банкнота по пет лева, една банкнота по десет лева и една банкнота по 20 лева. Той решава да даде някаква сума на своята по-малка сестричка. По колко различни начина може да го направи?

1.8. В магазин има 5 различни стоки, а пред него чакат за покупка 10 човека. По колко начина 5 от тях могат да купят петте стоки?

1.9. При регистриране за достъп до определена интернет страница, трябва да си изберем парола, която се състои само от буквите А, Б, В, Г, Д, Е, като всяка буква се използва не повече от един път и дължината на паролата е от 2 до 6 символа.

а) Колко са различните възможни пароли?

б) Колко различни пароли, започващи с буквата А могат да се напишат?

в) Колко различни пароли, започващи с буквата А и завършващи с буквата Б могат да се напишат?

1.10. Четирисимволен код се състои от цифрите 1, 2, 3, 4, 5 като всяка от тях се използва не повече от един път?

а) Колко са всички възможни кодове?

б) Колко са всички възможни кодове, формиращи четно число?

1.11. Номерът на кредитна карта представлява 16 цифрено цяло число и дата, състояща се от ден и месец, представени като двуцифрени числа. Да се пресметне броят на възможните номера на кредитни карти.

1.12. В азбуката на Морз всеки символ се представя като редица от точки и тирета (къси и дълги сигнали). Колко сигнала могат да се кодират с азбуката на Морз, ако могат да се използват до 7 точки и тирета?

1.13. По колко начина 5 човека могат да се запишат в списък? А 15 човека? А 100 човека?

1.14. Десет души се нареждат в редица. Колко са подрежданията,при които 3 фиксирани човека се намират един до друг?

1.15. Колко различни изхода има при хвърлянето на 2 зара, ако:

а) заровете са различими (например бял и черен на цвят);

б) заровете са неразличими (еднакви по цвят, размер, тегло);

в) различаваме изходите според сумата от падналите се точки?

1.16. По колко начина могат да бъдат раздадени картите в игра на белот (32 карти се раздават на 4 партньора по 8)? А на бридж (52 карти се раздават на 4 партньора по 13)?

1.17. Дядо купува 9 различни играчки за внучетата си Асен, Борис, Васил и Георги. По колко различни начина той може да даде 3 играчки на едно от внучетата си, а останалите три да получат по две играчки?

1.18. По колко различни начина група от 6 момичета и 3 момчета може да бъде разпределена в 3 групи по трима, така че във всяка тройка да има по едно момче? Редът на групите и подреждането във всяка от тях не е от значение.

1.19. Мария има 4 книги по математика, 5 книги по биология и 6 книги по физика. Тя ги подрежда по случаен начин в библиотеката на един рафт. По колко различни начина може тя да ги подреди? По колко различни начина може тя да ги подреди в библиотеката на един рафт, ако в началото са книгите по математика, след това по биология и накрая по физика? Колко са тези начини, ако подредбата на книгите във всяка от трите групи няма значение.

1.20. В зеленчуков магазин има ябълки, круши и още 5 други вида плодове. Петър решава да купи за децата си по един килограм от два различни вида плода, които избира по случаен начин. По колко различни начина може да го направи?

1.21. По колко начина може да се попълни един фиш от спортния тотализатор в игрите „6 от 49“, „6 от 42“ и „5 от 35“?

1.22. По колко начина могат да се изтеглят 5 карти от пълен комплект от 52 карти за игра при раздаване на играта покер?

1.23. От колода, състояща се от 36 карти произволно се изтеглят 3 карти.

а) По колко начина може да се направи това?

б) По колко начина могат да се изтеглят 3 карти, една от които е „дама“?

в) По колко начина могат да се изтеглят 3 карти с поне една „дама“ между тях?

г) По колко начина могат да се изтеглят 3 карти с най-много една „дама“ между тях?

1.24. Колко диагонала има правилен шестоъгълник? А десетоъгълник?

1.25. Колко най много триъгълника могат да се начертаят с върхове дадени 9 точки?

1.26. Ани, Борис и 6 техни приятели отиват в сладкарница, където масите са кръгли. По колко различни начина могат да седнат, ако Ани сяда срещу Борис?

1.27. Колко са плочките в малък комплект домино? А в голям?

Пояснение: Всяка плочка домино представлява правоъгълна плочка, дължината на която е два пъти по-голяма от ширината. Лицевата страна на всяка плочка е разделена с линия на 2 квадратни части, всяка от които съдържа от 0 до 6 точки за малък комплект и от 0 до 9 точки за голям комплект. В комплекта влизат плочки с всички възможни двойки точки, като всяка двойка плочи се съдържа точно един път.

1.28. По колко начина колода от 32 карти може да се раздели на две равни на брой части? А на четири равни части?

1.29. По колко начина колода от 32 карти може да се раздели на две равни части, като във всяка една от двете части броят на черните карти е равен на броя на червените? А на четири части при същите условия?

1.30. По колко начина 18 топчета с различен цвят могат да се поставят в две кутии с равен брой топчета във всяка? А в три кутии при същите условия?

1.31. а) Нека функцията F(x,y,z) е 10 пъти непрекъснато диференцируема. Колко различни частни производни от осми ред притежава?

б) Нека функцията f е функция на **m** аргумента, която е **n** пъти непрекъснато диференцируема. Колко са различните частни производни на f от ред $\boldsymbol{n}$?

1.32. На танцова забава идват $\boldsymbol{m}$ момичета и $\boldsymbol{n}$ момчета. По колко начина могат да се образуват $\boldsymbol{k}$ танцови двойки? ($\boldsymbol{k \le \min [m, n]}$)

1.33. Разпределят се $\boldsymbol{n}$ червени и $\boldsymbol{k}$ сини топки в $\boldsymbol{m}$ различни кутии, като всяка кутия побира най-много 1 топка и $\boldsymbol{n + k \le m}$. На колко е равен броят на различните разпределения, ако: а) топките са неразличими; б) топките са различими?

Приложение във физиката

Всяко тяло представлява съвкупност или още ансамбъл от голям брой микрочастици.Всички частици принадлежат на един от двата големи класа – фермиони и бозони. Фермионите са частици с полуцял спин – $(\pm 1/2)\hbar, (\pm 3/2)\hbar, (\pm 5/2)\hbar$ и т.н. Такива са електроните, протоните, неутроните, ядрата с нечетен брой нуклони и др. Бозоните пък са частици с цял спин – $0, \hbar, 2\hbar$ и т.н. Такива са фотоните, ядрата с четен брой нуклони и др. Основната разлика между тези частици е в тяхната „общителност“ – фермионите се подчиняват на т. н. „принцип на Паули“ според който в една система не може да има две частици в едно и също енергетично състояние. Бозоните са много по-„общителни“ и съвсем спокойно съществуват по няколко на едно енергетично ниво.

За да изявят индивидуалността си частиците трябва да се срещат, т. е. да се оказват в близки или дори еднакви енергетични нива. Ако имаме N частици и K достъпни за тях нива важно се оказва отношението N/K. Възможни са два случая: $N/K << 1$ и $N/K \approx 1$. В първия случай на една частица се падат толкова много свободни нива, че срещите между частиците са пренебрежимо редки. Такъв ансамбъл се нарича неизроден и се подчинява на класическата статистика на Максуел-Болцман. Такива са всички обекти от класическата физика при които енергията е разпределена практически непрекъснато и $K \to \infty$. Във втория случай ансамблите се наричат изродени. Такива са само квантовите обекти (и то не винаги), тъй като при тях енергията се разпределя дискретно и K е крайно число. Тук вече се проявяват „индивидуалните“ свойства на фермионите и бозоните и съответно се налага употребата на различни статистически модели. Моделът на Ферми-Дирак (от името Ферми – фермиони) предполага най-много по една частица на ниво, а този на Бозе-Айнщайн (Бозе – бозони) – произволен брой частици на всяко енергетично ниво. Ако се намали броят на частиците *N*или се увеличи броя на състоянията *K* (например чрез нагряване) изроденият ансамбъл може да премине в неизроден и така статистиката наМаксуел-Болцман може да се разглежда като обща граница на Ферми-Дираковата и Бозе-Айнщайновата при $N/K \to 0$.

1.34. Да се намери броят на възможните начини за разпределение на ***k*** електрона с еднакви енергии в ***n*** енергетични нива, ако във всяко енергетично ниво може да се намира най-много един електрон.

1.35. Да се намери броят на възможните начини за разпределение на ***k*** електрона с еднакви енергии в ***n*** енергетични нива, ако във всяко енергетично ниво могат да попаднат произволен брой електрони.

1.36. Да се намери броят на възможните начини за разпределение на ***k*** електрона с различни енергии в ***n*** енергетични нива като броят на електроните, които могат да попаднат в едно енергетично ниво е произволен.

Задачи с повишена трудност

1.37. Нека са дадени крайните множества A_1, A_2, $\dots A_n$. Докажете че

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i<j}|A_i.A_j| + \sum_{i<j<k}|A_i.A_j.A_k| - \dots + (-1)^n. |A_1.A_2\dots A_n|$$

Забележка. |A| означава броят на елементите на крайното множество A.

1.38. Нека $\Omega = A \cup B \cup C$. Възможно ли е |A|=520, |B|=490, |C|=428, |AB|=187, |AC|=142, |BC|=84?

1.39. Нека $M = \{a_1, a_2, \dots , a_n, b_1, b_2, \dots, b_m\}$. Колко са подмножествата на M, които съдържат поне един елемент a_i и поне един елемент b_j?

1.40. Колко решения в цели неотрицателни числа има уравнението

$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$?

2. Основни понятия в теорията на вероятностите. Алгебра на събитията

Справочник

Основната математическа структура в Теорията на вероятностите е следното понятие:

***Вероятностно пространство**: наредена тройка ($\boldsymbol{\Omega}, \mathcal{F}, \boldsymbol{P}$), където:*

$\boldsymbol{\Omega}$ е произволно непразно множество; $\mathcal{F}$ е σ-алгебра над $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{P}$ е вероятностна мярка над $\mathcal{F}$.

По подразбиране тази структура е породена от някакъв случаен експеримент (опит), възможните изходи на който образуват $\boldsymbol{\Omega}$.

Други основни понятия:

***Елементарно събитие (елементарен изход)**: Всеки елемент на $\boldsymbol{\Omega}$ (всеки изход на даден вероятностен опит)*

***Пространство от елементарни събития:** така се нарича множеството $\boldsymbol{\Omega}$ {съвкупността от всички елементарни събития}*

***Събитие (случайно събитие):** Всеки елемент на σ-алгебрата $\mathcal{F}$. (В началото може да се приеме че тва е произволно подмножество на $\boldsymbol{\Omega}$, т.е. всяка съвкупност от елементарни събития, но всъщност изискването за принадлежност към σ-алгебрата $\mathcal{F}$ е съществено нетривиално изискване, лежащо в основата на Теорията на вероятностите)*

Един изход $\boldsymbol{a}$ е благоприятен за събитието $\boldsymbol{A}$, ако е елемент на $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$.

***Достоверно събитие**: $\boldsymbol{\Omega}$ = {състои се от всички елементарни събития}*

Невъзможно събитие**: празното множество $\varnothing$ = {няма благоприятни изходи(празното **множество)}

***Равенство на събития:**Събитията A и B се наричат еквивалентни или равни и се означават с $A = B$ ако съдържат едни и същи елементи (всеки елемент на A е елемент на B и обратно).*

Събитието $\boldsymbol{A}^c$ се нарича допълнение на събитието $\boldsymbol{A}$, ако се състои от всички изходи на пространството $\boldsymbol{\Omega}$, които не принадлежат на $\boldsymbol{A}$

Сумата $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{A}$или $\boldsymbol{B}$) е събитие, което се състои от всички изходи, които принадлежат или на $\boldsymbol{A}$,или на $\boldsymbol{B}$,или и на двете

Произведението $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$) е събитие, което се състои от всички изходи, които принадлежа както на $\boldsymbol{A}$, така и на $\boldsymbol{B}$

От събитието $\boldsymbol{A}$ следва събитието $\boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$), ако всички изходи на $\boldsymbol{A}$ принадлежат и на $\boldsymbol{B}$.

Събитията A и B се наричат несъвместими, ако $A.B=\varnothing$.

***Пълна група от събития**: събитията A_1, $A_2, \ldots, A_n$ образуват пълна група от събития (или разбиване на $\boldsymbol{\Omega}$), ако са изпълнени условията: 1) $A_i.A_j = \varnothing\ \forall i \neq j$; 2) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \boldsymbol{\Omega}$; 3) $P(A_k) > 0\ \forall k = 1, 2, \ldots n$.*

Задачи

2.1. Монета се хвърля веднъж. Опишете множеството от елементарни изходи Ω.

Монета се хвърля 3 пъти. Опишете множеството от елементарни събития Ω.

2.2. Монета се хвърля, докато се падне ези. Опишете множеството от елементарни събития Ω.

2.3. Зар се хвърля веднъж. Опишете множеството от елементарни събития Ω.

2.4. Зар се хвърля 3 пъти. Опишете множеството от елементарни събития Ω.

2.5. Зар се хвърля, докато се падне 6. Опишете множеството от елементарни събития Ω.

2.6.Проверете верността на следните тъждества:

$A + A = A$, $A.A = A$, $A + \not{c} = A$, $A.\not{c} = \not{c}$, $A + \Omega = \Omega$, $A.\Omega = A$

$A + A^c = \Omega$, $A.A^c = \not{c}$, $\not{c}^c = \Omega$, $\Omega^c = \not{c}$

($\not{c}$ – невъзможното събитие, Ω – достоверното събитие)

2.7. Докажете, че ако $A \subset B$, то са верни тъждествата $A.B = A$, $A + B = B$. Докажете, че ако е изпълнено кое да е от тези тъждества, то $A \subset B$.

2.8. Докажете,че за всеки 2 случайни събития A и B са в сила законите на де Морган:

$$(A+B)^c = A^c.B^c,\ (A.B)^c = A^c + B^c.$$

2.9. Докажете, че за всеки 3 случайни събития A, B и C са в сила тъждествата

$$A.B + C = (A + C).(B + C),\ A - B = A.B^c,\ (A + B) - B = A - A.B = A.B^c = A - B.$$

2.10. Нека A и B са 2 събития. Покажете че събитието A+B може да се разложи на сума от несъвместими събития по следните начини:

$$A + B = A + (B - A.B),\ A + B = A.B + A.B^c + A^c.B,\ A + B = A + B.A^c.$$

2.11. Покажете, че ако $A \subset B$, то $B^c \subset A^c$.

2.12. Нека A, B и C са три различни събития. Използвайки и трите събития A, B, C и действията между събитията: допълнение (^{c}), обединение (+) и сечение (.), напишете израз за събитието, при което

а) настъпва само A

б) настъпват двете събития A, B, но не настъпва C

в) настъпва поне едно от събитията A, B, C

г) настъпват поне две от събитията A, B, C.

д) настъпват всичките събития A, B, C.

е) никое от събитията A, B, C не настъпват

ж) настъпва най-много едно от събитията A, B, C

з) настъпват най-много две от събитията A, B, C

и) настъпват точно две от събитията A, B, C к) настъпват най-много три от събитията A, B, C.

2.13. Покажете, че събитията A. $\overline{A+B}$, $\overline{A}.B$ са разбиване на Ω (образуват пълна група).

2.14. Вярно ли е че A и B са еквивалентни ако :

а) $\overline{A} = \overline{B}$;

б) A + C = B + C;

в) A.C = B.C.

2.15. Докажете че A и B са еквивалентни, ако

а) A + C = B + C и A.C = B.C ;

а) A + C = B + C и A + $\overline{C}$ = B+ $\overline{C}$.

3. Класическа вероятност. Свойства. Основни формули за вероятност. Формули за сума на две и повече събития

Справочник

Най-простият модел на вероятностно пространство Ω е т.нар. ***класическа схема*** *или* ***схема на урните****. При него пространството Ω представлява крайно множество от равновероятни изходи:*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2,..., \omega_n\},\ P(\omega_1) = P(\omega_2) = ...\ P(\omega_n) = \frac{1}{n}.$$

Поради крайността на Ω алгебрата от събития F съвпада с множеството от всички подмножества на Ω. Следователно всяко подмножество $A \subset \Omega$ е наблюдаемо в такъв опит и неговата вероятност се дефинира с формулата на класическата вероятност:

$$P(A)\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n},$$

където к = |A| = {брой на благоприятните изходи за събитието A}, а n = |Ω| = брой на всички възможни изходи}

От дефиницията на класическата вероятност следват следните свойства:

1) $0 \le P(A) \le 1$

2) $P(\Omega) = 1$

3) Ако A влече B ($A \subseteq B$), то $P(A) \le P(B)$;

4) За всяко събитие A е в сила формулата за вероятност на допълнението

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

5) За всеки две събития A и B е в сила формулата за събиране на вероятностите

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

Формулата за събиране на вероятности се обобщава за произволен брой случайни събития $A_1, A_2,..., A_n$, n >1 (формула на А. Поанкаре):

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) =$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{n} P(A_\kappa) - \sum_{\substack{\kappa, j=1 \\ k<j}}^{n} P(A_k A_j) + \sum_{\substack{\kappa, j, i=1 \\ k<j<i}}^{n} P(A_k A_j A_i) - .... + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 ... A_n)$$

Алгоритъм за пресмятане на класическа вероятност

1) определя се видът на комбинаторната схема, определена от опита. Най-често трябва да се определи дали има наредба в изходите или не (вариации или комбинации) и дали има повторение в изходите или не;

2) прилага се ***Алгоритъм за решаване на комбинаторни задачи от параграф 1*** *за пространството* **Ω*;***

3) прилага се ***Алгоритъм за решаване на комбинаторни задачи от параграф 1*** *за зададеното случайно събитие A;*

4) стойността, получена в 3) се дели на стойността получена в 2.

Задачи

3.1. Каква е вероятността при хвърляне на зар да падне четно число? А просто число?

3.2. Монета се хвърля 3 пъти. Каква е вероятността броят на езитата да е повече от броя на турите?

3.3. Зар се хвърля веднъж. Каква е вероятността на следните събития:

A = {паднало е четно число}, B = {паднало е просто число}, C = {паднало е число кратно на 3}, D = {паднала е 6}

3.4. Зар се хвърля два пъти. Каква е вероятността на следните събития:

A = {падат се 2 шестици}, B = {падат се четни числа}, C = {падат се прости числа}, D = {падат се четно и нечетно число}, E = {пада се чифт}, F = {сумата от точките е четно число}.

3.5. Каква е вероятността броят на падналите ези да е равен на половината от общия брой хвърляния на правилна монета, ако броят на хвърлянията е:

а) 10 пъти; б) 100 пъти; в) 1000 пъти; г) 10 000 пъти?

3.6. Каква е вероятността броят на падналите шестици да е точно една шеста от общия брой хвърляния на правилен зар, ако зарът е бил хвърлен:

A) 6 пъти; B) 60 пъти; C) 600 пъти; D) 6000 пъти?

3.7. В кутия има M бели и $N - M$ черни топки. От кутията се вадят без връщане $n < N$ топки. Каква е вероятността точно m от изтеглените топки да са бели?

3.8. В играта „6 от 49“ каква е вероятността за тройка, четворка, петица и шестица?

3.9. В игра на покер каква е вероятността за различните фигури (2, 3, 2 двойки, фул, каре, кента и т.н.)?

3.10. От пълен малък комплект домино (28 плочки) се избират случайно 7 плочки. Намерете вероятността поне върху една от изтеглените плочки да има 6.

3.11. Група от n човека сядат по случаен начин на n стола, наредени в редица. Намерете вероятността двама предварително избрани човека да седнат един до друг.

3.12. Група от n човека сядат по случаен начин на n стола, наредени около кръгла маса. Намерете вероятността двама предварително избрани човека да седнат един до друг.

3.13. Група от 12 души, между които са Иван и Петър, се нареждат случайно на опашка в стола. Каква е вероятността между Иван и Петър да се окажат точно 5 човека?

3.14. 10 души, между които Иван и Петър, се настаняват в хотел в 2 триместни и един четириместен апартамент по случаен начин. Каква е вероятността Иван и Петър да попаднат в четириместния апартамент? А в един и същи апартамент?

3.15. 7 ябълки, 3 портокала и 5 лимона се поставят в 3 пакета, така че във всеки пакет има по 5 плода. Намерете вероятността на събитията:

А = {във всеки пакет има по един портокал}, В = {всички лимони са в един пакет}

3.16. N еднакви молива се чупят на по 2 части – къса и дълга. След това получените $2.N$ части се обединяват в N двойки по случаен начин. Намерете вероятността на събитията:

А = {двойките са обединени по първоначалния начин, т.е. се допълват до молив}, В = {във всяка от двойките има по едно дълго и по едно късо парче}

3.17. Хвърлят се 3 зара. Каква е вероятността сумата от точките да е 11? А 12?

3.18. n топки по случаен начин се поставят в n кутии. Намерете вероятността на събитията А={във всяка кутия има по една топка}, В={всички топки са в една кутия}, С={има точно една празна кутия}

3.19. На автомобилен паркинг има 12 места, разположени в редица. На паркинга има 8 автомобила, а свободните 4 места са едно до друго. Каква е вероятността това да е станало случайно?

3.20. В кутия има 90 изправни и 10 дефектни детайла. От кутията се вземат 10 детайла. Каква е вероятността всичките избрани детайли да са изправни?

3.21. Покажете, че е по-вероятно да се падне поне една единица при 4 хвърляния назар, отколкото да се падне поне един чифт единици при 24 хвърляния на 2 зара.

Забележка. Според някои твърдения задачата е възникнала при игра на зарове в игрална зала и де Мере я е предложил на Паскал. В действителност задачата е поставена от Джеронимо Кардано.

3.22. Дадени са пет отсечки с дължини съответно 1, 3, 5, 7 и 9 единици. Каква е вероятността случайно взети три от тях да могат да бъдат страни на триъгълник?

3.23. Хвърлят се n зара. Да се пресметне вероятността сумата от падналите се точки да бъде не по-малка от $6n - 1$.

3.24. От числата 1, 2, …, n се избират случайно две числа. Каква е вероятността едното от тях да бъде строго по-малко, а другото – по-голямо от дадено число k, където $1 < k < n$?

3.25. Числата 1, 2, 3, 4, 5 са написани на 5 картички. Случайно се избират една след друга 3 картички и изтеглените цифри се разполагат една до друга в реда на изтеглянето. Да се пресметне вероятността полученото трицифрено число да бъде четно.

3.26. Хвърлят се 2 зара. Да се пресметне вероятността произведението от броя на падналите се точки да е четно число.

3.27. Случайно избрана плочка от домино (малък комплект от 28 плочки)съдържа различни числа на двете си половинки. Да се пресметне вероятността при случаен избор на плочка от останалите тя да съдържа поне едно от числата на първата плочка.

3.28. Каква е вероятността в случайно взета пермутация от n елемента 2 дадени елемента да не са един до друг?

3.29. По случаен начин m „нули“ и n „единици“ се подреждат в редица. Каква е вероятността редицата да започва с k „нули“ и да завършва с s „единици“ ($k \leq m$, $s \leq n$)?

3.30. Секретна ключалка съдържа на обща ос S диска, всеки от които е разделен на M сектора с различни букви, нанесени в тях. Ключалката се отваря само когато всеки диск заеме определено положение спрямо тялото на ключалката. Да се пресметне вероятността за отваряне на ключалката при поставяне на произволна комбинация от букви.

3.31. Върху 6 картончета са написани буквите Л, И, Т, Е, Р, А. Избират се 4 картончета и се слагат едно до друго. Каква е вероятността да се получи думата ТИРЕ?

3.32. От урна, която съдържа топки с номера 1, 2,..., N,вадим n пъти по една топка. Да се пресметне вероятността номерата на извадените топки, записани по реда на изваждането, да образуват растяща редица, ако след всяко изваждане извадената топка:

а) се връща в урната преди следващото изваждане;

б) не се връща в урната.

3.33. Десет книги се поставят случайно на един рафт. Да се пресметне вероятността: а) 3 предварително набелязани книги да се окажат една до друга; б) k предварително набелязани книги да се окажат една до друга, $2 \leq k \leq 10$.

3.34. N книги се поставят случайно на един рафт. Да се пресметне вероятността k предварително набелязани книги да се окажат една до друга, $2 \leq k \leq N$.

3.35. Да се пресметне вероятността номерът на случайно избрана банкнота да не съдържа еднакви цифри, ако този номер може да бъде кое да е седемцифрено число, започвайки от 0000001.

3.36. Девет пътника по случаен начин се качват в 3 вагона. Да се пресметне вероятността:

а) във всеки вагон да се качат по 3 пътници;

б) в един вагон да се качат 4, в друг – 3 и в третия – 2 пътници.

3.37. Хвърлят се n зара. Да се пресметне вероятността да се паднат n_1 единици, n_2 двойки,..., n_6 шестици, като $n_1 + n_2 + \ldots + n_6 = n$.

3.38. Вероятността рожденият ден на един човек да е през определен месец на годината ще считаме еднаква за всички 12 месеца. При това условие да се пресметне вероятността: а) в дадена компания от 12 души всички да са родени в различни месеци; б) в дадена компания от 6 души всички да са родени в два месеца, предварително зададени. А ако е без значение кои са двата месеца?

3.39. На колко е равен най-малкият брой хора, избрани по случаен начин, за да може с вероятност, не по-малка от 1/2 да се твърди че рождените дни на поне двама от тях съвпадат. (Годините на раждане могат да са различни. Предполага се, че 29 февруари, не може да бъде рожден ден, а останалите 365 дни се разглеждат като равновероятни рождени дни.)

3.40. Група от n човека се нарежда в редица по случаен начин. Да се пресметне вероятността между две предварително избрани лица А и В, да има точно s души, ($s \leq n - 2$).

3.41. Група от $2n + 1$ човека сядат около кръгла маса по случаен начин. Да се пресметне вероятността между две предварително избрани лица А и В, да има точно s души, ($s \leq n$).

3.42. На всяка от n пейки по случаен начин сядат по m лица. Да се пресметне вероятността 2 дадени лица да седнат едно до друго.

3.43. В зала с $n + k$ места по случаен начин сядат n души. Да се пресметне вероятността да бъдат заети предварително определена m места, $m \leq n$.

3.44. Да се определи вероятността контролният номер напървата срещната лека кола:

а) да не съдържа еднакви цифри;

б) да има една двойка еднакви цифри;

в) да има 3 еднакви цифри;

г) да има 2 двойки еднакви цифри;

д) да има една и съща сума от първите 2 и от последните 2 цифри;

е) да се състои от 4 еднакви цифри.

Приемаме, че номерата са четирицифрени от 0000 до 9999 и не се повтарят

3.45. Множеството $1, 2, \ldots, 4N$ по случаен начин се разделя на две групи с равен брой числа. Да се пресметне вероятността:

а) във всяка група да има по равен брой четни и нечетни числа;

б) всички числа, кратни на N, да попаднат в една група;

в) числата, кратни на N, да се разпределят по равно в двете групи.

3.46. Да се пресметне вероятността последните две цифри на куба на случайно избрано цяло число N да са единици.

3.47. Хвърлят се 10 различими зара. Каква е вероятността да се паднат по равен брой „единици“ и „шестици“?

3.48. Компания се състои от 5 мъже и 10 жени. Да се намери вероятността при случайното им групиране в 5 групи по трима души, във всяка група да има мъж.

3.49. Хвърлят се 3 различими правилни зара. Какви е вероятността на, събитието A={сумата и произведението на падналите се числа са равни помежду си}?

3.50. От урна, съдържаща 10 бели, 7 зелени и 6 червени топки, се изважда 1 топка. Каква е вероятността извадената топка да е: а) бяла; б) зелена; в) червена?

3.51. Урна съдържа 8 бели и 4 черни топки. Изваждат се едновременно 2 топки. Кое е по-вероятно: двете топки да са бели или двете топки да са с различен цвят?

3.52. От урна, съдържаща, 12 бели и 8 черни топки, се изваждат едновременно 2 топки. Да се намери вероятността на събитията: A={и двете да са бели}; B={и двете да са черни}; C={двете топки да са с различен цвят}.

3.53. От урна, съдържаща, M бели и N черни топки, се изваждат едновременно 2 топки. Да се намери вероятността на събитията: A={и двете да са бели}; B={и двете да са черни}; C={ двете топки да са с различен цвят}.

3.54. В една урна има $2.M$ бели и $2.N$ черни топки. Изваждат се едновременно $M+N$ топки. Каква е вероятността в урната да са останали M бели и N черни топки?

3.55. При регистриране за достъп в определена страница в Интернет се избира парола, която задължително се състои от 5 различни символа: първите два – цифри, останалите три – букви, като се използват задължително само цифрите 2, 3, 4 и само буквите B, C, D, K и F.

а) Колко различни пароли съществуват?

б) Каква е вероятността, ако изберем по случаен начин една парола измежду описаните, тя да започва с цифрата 2 и да завършва с буквата C?

в) Каква е вероятността, ако изберем по случаен начин една парола измежду описаните по-горе, тя да не съдържа буквата B?

г) Каква е вероятността, ако изберем по случаен начин една парола измежду описаните, тя да започва с четна цифра?

3.56. При регистриране за достъп в определена страница в Интернет трябва да си изберем парола, която задължително се състои от 4 различни символа и е позволено да се използват само буквите A, B, C, D, F и K.

а) Колко различни пароли съществуват?

б) Каква е вероятността, ако си изберем по случаен начин една парола измежду описаните,тя да започва с буквата А?

в) Каква е вероятността, ако си изберем по случаен начин една парола измежду описаните, тя да започва с буквата А и да завършва с буквата К?

г) Каква е вероятността, ако си изберем по случаен начин една парола измежду описаните, тя да е с различни букви?

д) Каква е вероятността, ако си изберем по случаен начин една парола измежду описаните, тя да не съдържа буквата К?

е) Каква е вероятността, ако си изберем по случаен начин една парола измежду описаните, тя да съдържа буквата А?

3.57. В студентски клуб по Информатика има 5 второкурсника, 6 третокурсника и 7 четвъртокурсника. За участие в предстоящ семинар се избират по случаен начин 5 от тях.

а) По колко различни начина може да се избере групата за семинара?

б) Каква е вероятността да са избрани студенти само от 4 курс?

в) Каква е вероятността да е избран само един второкурсник?

г) Каква е вероятността да са избрани 3 второкурсника и по един от другите курсове?

д) Каква е вероятността да е избран поне един от втори курс?

3.58. В студентския съвет на факултета са избрани 3 първокурсника, 5 второкурсника и 7 третокурсника. От този състав случайно се избират 5 студента за представители на общоуниверстетско събрание.

а) По колко различни начина може да се избере групата за семинара?

б) Каква е вероятността да са избрани студенти само от 3-ти курс?

в) Каква е вероятността сред избраните няма второкурсници?

г) Каква е вероятността да са избрани 1 първокурсник, 1 второкурсник и трима третокурсника?

д) Каква е вероятността да е избран поне един от четвърти курс?

3.59. В кутия има 8 листчета с написани числата 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 на тях. Със затворени очи избираме две листчета едновременно.

а) Каква е вероятността и на двете листчета да има четно число?

б) Каква е вероятността сумата от числата на двете листчета да е по-голяма от 15?

в) Каква е вероятността числата на двете листчета да са равни?

г) Каква е вероятността числото на едното листче да е два пъти по-голямо от числото на другото?

д) Каква е вероятността поне едно от числата на двете листчета да е четно число?

е) Независими ли са двете събития

A = {числата на двете листчета са равни помежду си};

B = {сумата от числата на двете листчета е по-голяма от 18}?

Обосновете отговора си.

3.60. На стените на кубче са написани числата 5, 6, 7, 8, 9, 10. Кубчето се подхвърля последователно два пъти на масата.

а) Каква е вероятността на горната стена и двата пъти да има четно число?

б) Каква е вероятността сумата от числата на горната стена да е по-голяма от 15?

в) Каква е вероятността на при първото подхвърляне на горната стена да има число по-голямо от числото на горната стена при второто подхвърляне?

г) Каква е вероятността на горната стена и двата пъти да има едно и също число?

д) Каква е вероятността поне един път на горната стена да се показва четно число?

4. Геометрична вероятност

Справочник

Да разгледаме случая, когато пространството Ω е безкрайно, т. е. Ω се състои от безброй много елементарни събития, и на Ω може да се съпостави взаимно еднозначно геометричен обект Λ, а на събитието A – геометричен обект Ψ (Ψ ⊆ Ω). В този случай дефинираме вероятност, която се нарича геометрична вероятност на A с равенството

$$P(A)=\frac{\text{мярката на } \Psi}{\text{мярката на } \Lambda}$$

Пояснение: в по-простите случаи ако Λ е подмножество на правата мярката ще бъде дължина, ако е подмножество на равнината мярката ще бъде лице, ако е подмножество на пространството мярката ще бъде обем. Разбира се възможни са и по-сложни примери, например Λ да бъде окръжност и тогава мярката на Λ и Ψ отново ще бъде дължина.

Алгоритъм за пресмятане на геометрична вероятност

1) *определя се броят на независимите параметри и съответно размерността на пространството* **Ω***;*
2) *построява се геометричен модел Λ, съответстващ взаимно еднозначно на* **Ω***;*
3) *намира се геометричният модел Ψ, съответстващ взаимно еднозначно на събитието A като подмножество на* **Ω***;*
4) *намират се мерките (дължини, лица, обеми)на Λ и Ψ;*
5) *пресмята се вероятността P(A) като отношение на тези мерки.*

Важно*: Моделът Λ на пространството* **Ω** *в стъпка 2) на алгоритъма често не е единствен – задача 4.2. показва, че той зависи съществено от начина на параметризиране на* **Ω***, а задача 4.5. показва важността на взаимната еднозначност и точността на формулировките, от които зависи дори броят на независимите параметри в стъпка 1).*

Задачи

4.1. (Задача за срещата) Двама души си уговарят среща пред киното между 19 и 20 часа при следното условие: всеки изчаква другия не повече от 15 минути. Ако другият не дойде до 15-тата минута или стане 20 часа, чакащият влиза в киното сам. Каква е вероятността двамата да се срещнат пред киното?

4.2. Върху отсечка се избират случайно 2 точки, които я разделят на 3 отсечки. Каква е вероятността да може да се построи триъгълник със страни тези 3 отсечки?

4.3. Върху единична отсечка се избират случайно 2 точки, които я разделят на 3 отсечки. Каква е вероятността всяка от трите отсечки да има дължина поне s, където $s \in (1, 1/3)$ е дадено число?

4.4. Върху единична отсечка се избират случайно $n - 1$ точки, които я разделят на n части. Каква е вероятността всяка от тези части да има дължина поне s, където $s \in (1, 1/n)$?

4.5. (Парадокс на хордата, парадокс на Бертран) В кръг с радиус 1 се прекарва по случаен начин хорда. Намерете вероятността дължината на хордата да е поне $\sqrt{3}$?

4.6. Избират се 3 случайни отсечки с дължини в интервала $(0,s)$. Каква е вероятността сумата от дължините им да е по-голяма от s?

4.7. В равнината е прекарана квадратна мрежа с помощта на две множества от успоредни линии. Колко е страната на всеки квадрат от мрежата, ако при многократно хвърляне на монета с диаметър d в 40% от случаите тя не пресича нито една линия от мрежата.

4.8. В интервала $[-1,2]$ се избират случайно 2 числа. Каква е вероятността сумата им да е по-голяма от 1, а произведението им да е по-малко от 1?

4.9. Дадени са 2 концентрични окръжности с радиуси R и r, $R > r$. Върху голямата окръжност случайно се избират 2 точки A и B. Каква е вероятността хордата AB да не пресече малката окръжност?

4.10. (**Задача на Бюфон за иглата**) В равнината са прекарани успоредни прави на разстояние $2.a$. Върху равнината се хвърля случайно игла с дължина $2.s$, $s < a$. Каква е вероятността иглата да пресече някоя от успоредните прави?

4.11. Върху отсечката AB се избират по случаен начин 3 точки. Да се намери вероятността да може да се построи триъгълник със страни, чиито дължини са равни на разстоянията от A до избраните точки?

4.12. Каква е вероятността корените на квадратното уравнение $x^2 + 2ax + b = 0$ да са реални, ако стойностите на коефициентите са равновероятни в правоъгълника $-k \le a \le k$, $-m \le b \le m$?

4.13. В равнината са прекарани два снопа успоредни прави, които я разделят на правоъгълници със страни a и b ($a \le b$). Върху равнината случайно се хвърля монета с диаметър $2r < a$. Да се намери вероятността монетата да не пресича нито една от правите.

4.14. Върху паркет, образуван от еднакви равностранни триъгълници със страна a, се хвърля монета с радиус r ($r < a\frac{\sqrt{3}}{6}$). Да се намери вероятността монетата да не пресича контура на нито един от триъгълниците.

4.15. От отсечка с дължина 1 случайно е избрана точка, която я разделя на 2 части. Каква е вероятността от получените 2 части и отсечка с дължина 1/2 да може да се построи триъгълник?

4.16. От отсечката AB случайно са избрани две точки C и D. Да се намери вероятността C да е по-близо до D, отколкото до A.

4.17. Върху окръжност случайно са избрани 3 точки A, B и C. Каква е вероятността триъгълникът ABC да е остроъгълен?

4.18. (**Задача на Лаплас за иглата**) Равнината е покрита с правоъгълници със страни a и b. Върху нея се хвърля случайно игла с дължина s, $s < min(a,b)$. Да се намери вероятността иглата да не пресече нито една страна на правоъгълник.

4.19. (**Задача на звездната астрономия**) В сфера с радиус R случайно и независимо една от друга са разположени N точки. Да се намери вероятността разстоянието от центъра на сферата до най-близката от тези точки да е не по-малко от a, където $0 < a < R$.

4.20. В кръг е вписан квадрат. Да се намери вероятността на събитията:

A = {случайно хвърлена точка в кръга да се окаже вътре в квадрата};

B = {от 5 точки, случайно хвърлени в кръга, 1 да се окаже в квадрата и по 1 във всеки от четирите сегмента}

4.21. Върху кълбо е нанесена географска координатна мрежа. Кълбото се хвърля върху равнина. Да се намери вероятността на събитията:

A = {точката на първия допир на кълбото с равнината да се намира между 0° и 90° източна дължина};

B = {точката на първия допир на кълбото с равнината да се намира между 45° и 90° северна ширина};

C = {точката на първия допир на кълбото с равнината да се намира в общата част на областите от A и B}

5. Условна вероятност. Формула за умножение на вероятности. Независимост на случайни събития

Справочник

Условна вероятност:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\ P(AB)=P(A|B)P(B),$$

Независимост: *Две събития A и B са независими, ако е изпълнено* $P(A|B)=P(A)$ *или ако* $P(AB)=P(A)P(B)$.

Независимост в съвкупност: *Група от N събития A_1, $A_2, \ldots, A_N$ са независими в съвкупност ако за всяка комбинация от индекси е изпълнено:*

$$P(A_iA_k)=P(A_i)P(A_k)$$

$$P(A_iA_kA_j)=P(A_i)P(A_k)P(A_j)$$

....

$$P(A_1A_2\ldots A_N)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_N)$$

Задачи

5.1. Хвърлят се 2 правилни монети. Разглеждаме събитията

$Г_1$ = {първата монета пада ези}, $Г_2$ = {втората монета пада ези},

A_1 = {на първото хвърляне пада ези}, A_2 = {на второто хвърляне пада ези}.

Намерете вероятността на събитията

$Г_1$, $Г_2$, $Г_1.Г_2$, $Г_1|Г_2$, $Г_2|Г_1$, $Г_1 + Г_2$,A_1, A_2, $A_1.A_2$, $A_1|A_2$, $A_2|A_1$, $A_1 + A_2$,

Независими ли са събитията A_1, A_2, $Г_1$, $Г_2$?

5.2. (**Пример на Бернщайн**) Стените на правилен тетраедър са боядисани по следния начин: една стена е бяла, една е зелена, една е червена, а четвъртата е боядисана в бяло, зелено и червено. Пирамидата се хвърля и пада на едната си стена. Разглеждаме събитията

A = {върху стената, на която е паднала пирамидата, има бял цвят};

B = {върху стената, на която е паднала пирамидата, има зелен цвят};

C = {върху стената, на която е паднала пирамидата, има червен цвят}.

Независими ли са събитията A и B, B и C, A и C? Независими ли са събитията A, B и C в съвкупност?

5.3. Събитията A и B са с положителни вероятности. Докажете че

а) ако A и B са несъвместими, то те не са независими;

б) ако A и Б са независими, то те не са несъвместими.

5.4. В една урна има a бели и b черни топки. От урната се вадят последователно без връщане 2 топки. Какви са възможните изходи и каква е вероятността на всеки от тях? А ако са извадени 3 топки?

5.5. В кутия има 10 бели и 10 черни топчета. Иванчо вади по едно топче и ако то е бяло, го връща в кутията, като добавя и още едно бяло.

а) Каква е вероятността при 2 такива опита, Иванчо да извади две черни топчета?

б) Каква е вероятността при 3 такива опита, Иванчо да извади едва трети път черно топче?

5.6. При определена игра на карти на един играч му се дават 8 карти измежду колода от 52 карти. Ако поне три от тях са купи, то каква е вероятността всички избрани карти да са купи?

5.7. Избираме случайно число измежду всички естествени числа до 100 включително. Разглеждаме събитията

A = {избраното число се дели на 2}; B = {избраното число се дели на 3}; C = {избраното число се дели на 5}.

Коя от следните двойки събития (A,B), (A,C) и (B,C) са независими? А ако изборът на числото е от множеството на естествените числа до 300 включително?

5.8. Вашият приятел си избира по случаен начин две карти измежду колода от 52 карти. Намерете вероятността да е извадил два попа, ако той отговаря положително на зададения от вас въпрос, който е

а) Вярно ли е, че една от избраните карти е поп или пика?

б) Вярно ли е, че първата избрана карта е поп?

в) Вярно ли е, че втората избрана карта е поп?

5.9. Измежду всички семейства с по три деца е избрано по случаен начин едно и се оказва, че в това семейство има момче. Каква е вероятността това момче да има

а) по-голям брат и по-голяма сестра?

б) по-голям брат?

в) брат и сестра?

Забележка: в тази и следващата задача се приема, че вероятността случайно избрано дете да е момче или момиче е 0.5.

5.10. В детската стая в апартамента на едно семейство живеят заедно две деца.

а) Ако по-голямото е момче, то каква е вероятността по-малкото да е момиче?

б) Ако поне едно от децата е момче, то каква е вероятността да има момиче?

5.11. Кутия съдържа 5 червени и 8 бели топчета.

а) Едно по едно са извадени 4 топчета без връщане. Каква е вероятността всичките извадени топчета да са червени?

б) Без връщане едно по едно се вадят топчета, докато се извадят 4 червени. Намерете вероятността да са извадени общо 4 топчета.

5.12. Две зарчета се подхвърлят едновременно, при което се оказва, че сумата от падналите се точки се дели на 3.

а) Каква е вероятността поне на единия зар да има 3 точки?

б) Каква е вероятността само на един от зар да има 3 точки?

в) Каква е вероятността на двата зара да има различен брой точки?

5.13. В кутия има 5 бели и 5 черни топчета. По случаен начин се вадят едно след друго без връщане две топчета.

а) Каква е вероятността и двете извадени топчета да са бели?

б) Ако първото извадено топче е бяло, то каква е вероятността и второто да е бяло?

Как се променят отговорите на горните въпроси, ако вадим топчетата с връщане?

5.14. При игра на бридж всеки играч има по 13 карти. Ако един играч няма поп, то

а) каква е вероятността неговият партньор да няма поп?

б) каква е вероятността неговият партньор да има поне 2 попа?

5.15. При определена игра на карти на един играч се дават 5 карти измежду колода от 52 карти. Ако поне три от тях са купи, то каква е вероятността всички избрани карти да са купи?

5.16. В кутия има 5 бели и 5 черни топчета. По случаен начин се вадят едно след друго без връщане 4 топчета. Каква е вероятността първите две извадени топчета да са бели, а последните две извадени да са черни?

5.17. Хвърлят се 2 зара. Каква е вероятността да се паднат две „тройки“, ако сумата от падналите се точки е кратна на 3?

5.18. Хвърлят се 3 зара. Каква е вероятността поне на един от тях да се падне числото 3, ако сумата от трите числа е равна на 10?

5.19. Вероятността да се изработи първокачествен детайлна един струг е 0.7. При изработването на същия детайл на друг струг тази вероятност е 0.8. На първия струг са изработени 2 детайла, а на втория 3. Каква е вероятността всички детайли да бъдат първокачествени?

5.20. Вероятността даден стрелец да улучи една мишена е 2/3. Ако улучи мишената при първия изстрел, той получава право на втори, изстрел по втора мишена. Вероятността за улучване и на двете мишени при два изстрела е 0,5. Да се пресметне вероятността за улучване на втората мишена, ако стрелецът е получил право на втори изстрел.

5.21. С помощта на 6 картички, на които е написана по 1 буква, е образувана думата „карета“. Картичките се разбъркват и след това се изваждат случайно една след друга. Каква е вероятността в реда на изваждането на картичките да се получи думата „ракета“?

5.22.Двете страни на единия от 3 жетона са бели, на другия са черни, а третият жетон има една бяла и една черна страна. По случаен начин се избира един жетон и се хвърля върху маса. Ако горната страна на паднали жетон е бяла, каква е вероятността другата му страна, която не се вижда, също да е бяла?

5.23.В урна има 2 топки – бяла и черна. Изваждаме по 1 топка, докато се появи черна топка, като при изваждане на бяла топка тя се връща в урната и се добавят още 2 бели топки. Да се пресметне вероятността при първите 50 опита да не бъде извадена черна топка.

5.24. В урна има N топки с номера от 1 до N. Топките се изваждат случайно една по една без връщане. Каква е вероятността при първите K изваждания номерата на топките да съвпадат с номерата на изважданията?

5.25.Върху N картончета са написани имената на N момчета, а върху други M картончета – имената на M момичета ($N \leq M$). Картончетата се, слагат в кутия и добре се разбъркват, след което N пъти последователно се изваждат по 2 от тях, без да се връщат обратно в кутията. Каква е вероятността всеки път да бъдат изваждани двойки картончета „момиче – момче“?

5.26. Абонат е забравил последната цифра на телефонен номер и я набира случайно:

а) Да се пресметне вероятността, че ще му се наложи да звъни на не повече от 3 места;

б) Как се изменя тази вероятност, ако е известно, че последната цифра е нечетна?

5.27. Вероятността за настъпване на събитието А поне веднъж при извършването на 4 независими опита е ½. Да се пресметне вероятността за сбъдване на А при извършването на 1 опит, ако тя е една и съща във всички опити.

5.28. Вероятността за излизане от строя на k-тия блок на дадена машина за време T е равна на $p_k (k = 1, 2, \dots, n)$. Да се пресметне вероятността за излизане от строя през посочения интервал от време поне на един от n-те блока на машината, ако работата на всички блокове е взаимно независима.

5.29. При всеки опит едно събитие настъпва с вероятност p. Опитите се провеждат последователно до настъпване на събитието. Да се пресметне вероятността събитието да настъпи точно на $(k + 1)$-вия опит, $k = 0, 1, 2, \dots$.

5.30. Прекъсване на електрическа верига може да стане поради излизане от строя на елемента K_1 или и на двата елемента K_2 и K_3. Трите елемента излизат от строя независимо един от друг съответно с вероятности 0.3, 0.2 и 0.15. Да се пресметне вероятността за прекъсване на веригата.

5.31. С какъв минимален брой случайно избрани хора трябва последователно да разговаряте, за да бъде по-голяма от 1/2 вероятността, че рожденият, ден на поне един от тях съвпада с вашия рожден ден? (Предполага, че годината на раждане не е от значение, 29 февруари не е рожден ден, а всичките останали 365 дни са равновероятни рождени дни.)

5.32. Колко пъти трябва да се хвърли зар, зада бъде вероятността за падане на поне една шестица по-голяма от: а) 0,5; б) 0,8; в) 0,9?

5.33. Колко пъти трябва да се хвърлят два зара, за да може с вероятност по-голяма от 1/2, да се очаква поне веднъж сумата от точките да е равна на 12 (задача на дьо Мере)?

5.34. Хвърлят се 2 зара. Дефинираме събитията:

А = {на първия зар се падане четно число},

В = {на втория зар се пада нечетно число},

С = {сумата от падналите се точки е нечетна}.

Независими ли са тези събития две по две? Независими ли са А, В и С в съвкупност?

5.35. От колода, съдържаща 32 карти, случайно се изтегля карта. Разглеждаме събитията А = {изтеглената карта е пика}, В = {изтеглената карта е поп}. Независими ли са тези събития? Какъв е отговорът, ако колодата съдържа 52 карти?

5.36. Върху N картончета са записани N различни реални числа. Картончетата се слагат в кутия, добре се разбъркват и се изваждат едно след друго без да се връщат. Нека A_k = {k-тото извадено число е по-голямо от предишните}. Да се покаже, че $\mathrm{P}(A_k) = \frac{1}{k}$, $k = l,..., N$.

5.37. Правилна монета се хвърля последователно 3 пъти, Дефинираме събитията А = {при първото хвърляне се пада ези}, В = (падат поне 2 езита при трите опита} и С = {един и същ резултат при трите хвърляния}. Разглеждаме двойките А и В, А и С, В и С. Да се провери дали във всеки от тези три случая събитията са независими.

5.38. От колода с 32 карти последователно без връщане са изтеглени 3 карти. Да се определят вероятностите на събитията:

А = {измежду тях да има 2 дами};

В = {всички да са от една боя, например 3 кари, 3 купи и т. н.};

С = {първата изтеглена карта да е била купа, ако е известно, че втората е купа}.

Забележка. *Решаването на условие С може да се отложи за следващия раздел 6.*

5.39. Конспект по „Вероятности и статистика“ съдържа 17 въпроса от раздел „Вероятности“ и 9 въпроса от раздел „Статистика“. Студент се явява на изпита, като е научил само 12 от въпросите от раздел „Вероятности“ и 5 от въпросите от раздел „Статистика“.

а) Ако студентът тегли по един въпрос от двата раздела, да се определи вероятността на събитията:

А = {сред падналите му се въпроси да няма въпрос, който да не е учен};

В = {сред падналите му се въпроси да има поне един въпрос, който да не е учен}.

б) Ако студентът тегли 3 случайни въпроса от конспекта (без да се разделя на „Вероятности“ и „Статистика“), да се определи вероятността на събитията:

C = {сред избраните въпроси няма въпрос, който да не е учен};

D = { сред избраните въпроси има поне 2 научени}.

5.40. На продавач на лотарийни билети са му останали само 10 билета, от които 2 печеливши. Един клиент купува 2 билета и след него друг клиент купува още един билет. Да се определи вероятността на събитията:

A = {билетът, купен от втория клиент, е печелившш};

B = {и двата билета, купени от първия клиент са печеливши, ако е известно, че билетът на втория клиент е непечелившш}.

5.41. В склад има 2 каси с бутилки бира, като касите съдържат съответно:

I каса: общо 9 бутилки, от които 1 с изтекъл срок на годност;

II каса: общо 12 бутилки, от които 3 с изтекъл срок на годност.

а) Ако се вземе по 1 бутилка от всяка каса, да се определи вероятността на събитията:

A = {сред взетите бутилки да няма с изтекъл срок на годност}; и

B = {сред взетите бутилки да има точно 1 с изтекъл срок на годност}.

б) Ако се вземат 5 бутилки от I каса, да се определи вероятността на събитията:

C = {сред взетите бутилки да има точно 1 с изтекъл срок на годност}; и

D = {сред взетите бутилки да има поне 2 с изтекъл срок на годност}.

в) Ако в I каса се добави още една бутилка, за която не се знае дали е с изтекъл срок, и след това се избере по случаен начин една бутилка от тази каса, то да се определи вероятността тази бутилка да не е с изтекъл срок на годност.

Забележка. *Решаването на условие в) може да се отложи за следващия раздел 6.*

5.42. В кутия има 3 ментови бонбона, 2 шоколадови, един дъвчещ и един обикновен бонбон, които са с една и съща форма и в еднотипна опаковка.

Въпросите а) – г) са свързани с опита: Избира се един бонбон, запомня се вида му и се връща обратно в кутията, после се избира още един.

а) Опишете пространството от елементарните изходи. Колко на брой са елементарните събития?

б) Каква е вероятността да са избрани два ментови бонбона?

в) Каква е вероятността вторият избран бонбон да е ментов, ако първият не е ментов?

г) Каква е вероятността да е избран поне един път ментов бонбон?

Въпросите д) – з) са свързани с опита: Избира се един бонбон, изяжда се веднага и после се взема втори.

д) Опишете пространството от елементарните изходи. Колко на брой са елементарните събития?

е) Каква е вероятността да са избрани два ментови бонбона?

ж) Каква е вероятността вторият избран бонбон да е ментов, ако първият не е ментов?

з) Каква е вероятността да е избран поне един път ментов бонбон?

5.43. В трети курс информатика има 3 групи:

• в първа група има 15 момичета и 5 момчета

• във втора група има 5 момичета и 10 момчета

• в трета група има 10 момичета и 15 момчета

Въпросите а) – д) са свързани с опита: По случаен начин е избран един третокурсник.

а) Каква е вероятността избраният студент да е от втора група?

б) Каква е вероятността избраният студент да е момиче от втора група?

в) Каква е вероятността избраният студент да е момиче?

г) Каква е вероятността студентът да е от втора група, ако този студент е момиче?

д) Независими ли са събитията А={избраният студент е момиче}; и Б А={избраният студент е от трета група}? Докажи отговора си.

Въпросите е) – з) са свързани с опита: По случаен начин са избрани двама третокурсника, като на първия се дава награда от 20 лв., а на втория – от 15 лв.

е) Каква е вероятността двамата избрани студенти да са момичета?

ж) Каква е вероятността вторият избран студент да е момиче, ако първият е момче?

з) Каква е вероятността поне един от избраните студенти да е момиче?

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Работа с Wolfram Mathematica.

1. Общи сведения

Mathematica е продукт на фирмата Wolfram Research.

Официалният сайт на фирмата е: www.wolfram.com

На адреса по-долу се намират голямо количество примери, реализирани с пакет **Mathematica**. Техният програмен (сорс) код е достъпен и може да бъде свален оттам:

http://demonstrations.wolfram.com/

2. Основни правила за работа

– Въвеждането на формули може да стане по различни начини, като най-разпространени са:

– използване на палети с математически символи и вградени функции, които се избират от меню File/Palettes, например (за интегриране): $\int_a^b dx$; или

– набиране на текстов оператор, например (за интегриране): Integrate[f, { x, a, b}] .

Особености при работата:

– Mathematica е интерпретатор. Потребителят задава командни редове, групирани в клетка, в която всеки оператор се нарича Input (вход), а системата изпълнява всички отделни редове, наречени Out (изходи), снабдени с номер, напр. Out[123]. Изключение правят циклите.

– В рамките на работния сеанс всички входове и изходи се помнят от системата и могат да се използват чрез съответните им номера според реда на изпълнението им.

– Изпълнението на командите от текущата клетка става с едновременно натискане на клавишите: SHIFT + ENTER. (Натиска се клавишът SHIFT и след това без да се отпуска се натиска клавишът ENTER).

– Изчисленията могат да се извършват с произволен брой аритметични знаци. За целта командата за числено пресмятане се записва например така (има и други възможности): N[команда, брой знаци]. По подразбиране знаците са 6.

– Когато се извършват дълги изчисления системата указва отдясно на работното поле съответната клетка с двойна голяма счупена скоба]].

– Изчисленията се прекъсват от меню Action/Interrupt... или като едновременно се натиснат клавиши Alt и . (точка).

– Може да се изпълняват многократно ред, клетка, група клетки или целият Notebook наведнъж в произволна последователност.

– Системните функции задължително започват с главна буква, а аргументите им са в квадратни скоби, напр. Plot[аргументи,...].

– Имената на променливите, графиките и другите потребителски обекти се препоръчва да започват с малки букви. Името започва с буква, която е последвана от букви и/или цифри, броят им е неограничен.

– Командният ред (оператор) може да съдържа вградени функции, потребителски функции, променливи, константи и др. Променливите и вградените функции няма нужда да се описват предварително от потребителя, системата определя типа им според първоначално присвоените им значения, например: цяло число, комплексно число, символ, списък, графика, матрица и пр.

– За по-бързо и пълно усвояване на Mathematica се препоръчва използване на изключително богатия системен Help и пълната версия на вградения учебник на създателя на Mathematica - Стивън Волфрам.

3. Запознаване с основните възможности на Mathematica с помощта на примери

Примерите по-долу илюстрират накратко основните възможности на системата **Mathematica.**

Напомняне! След въвеждането на всеки от изразите се натискат Shift+Enter (натиска се Shift и след това без да се отпуска се натиска и Enter)и се получава съответният резултат.

В случай че системата "увисне" с много дълги изчисления и работата ѝ трябва да бъде прекъсната, това с тава с едновременнното натискане на клавишите Alt+. (точка), също както Shift+Enter по-горе. След това прекъсване се появява съобщение $Aborted.

Пример 1. (Намиране първите 50 цифри на числото π)

Въведете

N[Pi,50]

резултатът са 50 цифри на числото пи (p):

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751

Пример 2. (Решаване на алгебрично уравнение).

Въведете

$$\text{Solve}\left[x \wedge 3 - 2x + 1 == 0\right]$$

резултатът са трите решения на уравнението $x^3 – 2x + 1 = 0$:

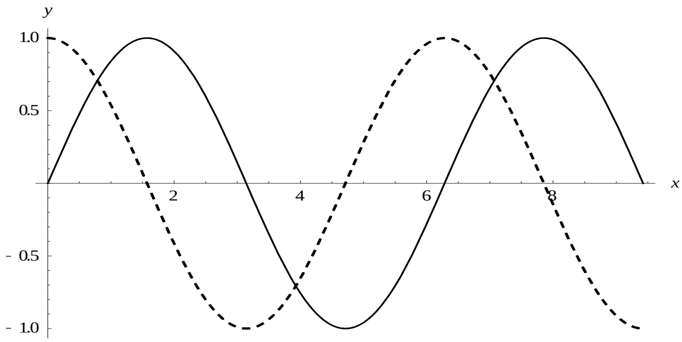
$$\left\{\{x \to 1\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right\}\right\}$$

Пример 3. (графика на функция).

Въведете

$$\mathrm{Plot}[\{\mathrm{Sin}[x], 2\mathrm{Cos}[2x]\}, \{x, 0{,}3\mathrm{Pi}\}, \mathrm{PlotStyle} \to \{\mathrm{Black}, \{\mathrm{Black}, \mathrm{Dashed}\}\}]$$

резултатът е графиката:

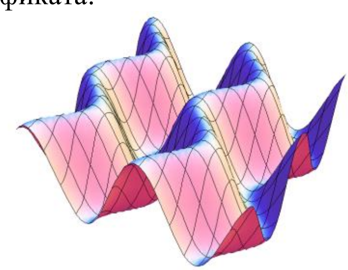


Пример 4. (тримерна графика)

Въведете

$$\mathrm{Plot3D}[\mathrm{Sin}[x + \mathrm{Cos}[y]], \{x, 0{,}4\mathrm{Pi}\}, \{y, 0{,}4\mathrm{Pi}\}, \mathrm{Ticks} \to \mathrm{None}, \mathrm{Boxed} \to \mathrm{False}, \mathrm{Axes} \to \mathrm{None}, \mathrm{PlotPoints} \to 25]$$

резултатът е 3D-графиката:



Използване на меню Help

В пакета има много подробна документация на всички функции и операции в менюто Help.

Използването може да става директно от менюто в командния ред с последователни избори или чрез въвеждане на знака ? с последващо име на функция или операция.

Пример 5. (описание на оператор)

Въведете

?Solve

резултатът е:

Solve[*expr*,*vars*] attempts to solve the system *expr* of equations or inequalities for the variables *vars*.

Solve[*expr*,*vars*,*dom*] solves over the domain *dom*. Common choices of *dom* are Reals, Integers, and Complexes.

Доизясняването на възможностите на сътвената функция или оператор може да стане с помощта на оператора Options. Той дава допълните описания на съответната команда, зададена след този оператор в начупени скоби.

За по-подробна информация може да се използва командата ?? с последваща команда или оператор, за която се иска допълнително доизясняване.

Операции с числа

Основните аритметични действия могат да бъдат извършвани с произволни числа в произволна форма. Примерите по-долу илюстрират възможностите на пакета:

Пример 6. (аритметични действия с многоцифрени числа)

Въведете

$123456789 + 987654321$

резултатът е:

1111111110

Въведете

$123456789 * 987654321$

резултатът е:

121932631112635269

Пример 7. (Задаване на точност на пресмятането):

Въведете

$\mathrm{N}[\%, 10]$

резултатът е:

$9.299674813 \times 10^{792}$

Въведете

$123456789/3$

резултатът е:

41152263

Въведете

$(-4)\hat{}123$

резултатът е:

$-11307821214581659709333104004754678501295896940003$
$961331978279688272766566 4$

Въведете

$5\hat{}(1/5)$

резултатът е:

$5^{1/5}$

Въведете

$N[\%, 10]$

резултатът е:

1.379729661

Пример 8. Закръгляне при задаване на точност на пресмятането:
Въведете

$\text{For}[k = 1, k < 16, k + +, \text{Print}[N[\sqrt{3}, k]]]$

резултатът е:

2.
1.**7**
1.73
1.732
1.7321
1.732**05**
1.732051
1.73205**08**
1.73205081
1.7320508**08**
1.7320508**76**
1.7320508075**7**
1.732050807**569**
1.7320508075**689**
1.7320508075**6888**

Много добре се вижда ефектът от закръгляне на резултата в последната цифра! Поради тази причина винаги, когато се изисква определена точност при пресмятане (от типа: намерете с точност 10 цифри…) пресмятането трябва да бъде извършено с поне 1 цифра повече, за да се получат съответния брой точни цифри в резултата.

4. Списък на основните команди от разделите „вероятности“ и „математическа статистика“

По-долу са изброени основните команди от пакета, които могат да се използват при решаване на задачите от сборника, както и на други задачи свързани с Теория на вероятностите и математическата статистика. По-подробна информация за всяка от тях, както и примери, илюстриращи работата им, могат да се намерят в Help менюто на системата по описания по-горе начин.

Вероятности и статистика

Probability
Expectation
NProbability
NExpectation
Distributed
Conditioned

Симулации и емулации

RandomVariate
EstimatedDistribution
FindDistributionParameters
FindDistribution

Проверка на хипотези

DistributionFitTest
LocationTest
VarianceTest
LocationEquivalenceTest
AndersonDarlingTest
KolmogorovSmirnovTest
MannWhitneyTest

Визуализация на статистически данни

QuantilePlot
ProbabilityScalePlot
ProbabilityPlot
Histogram
SmoothHistogram
DensityHistogram
BoxWhiskerChart
DistributionChart

Дискретни разпределения

BernoulliDistribution[p]
BetaBinomialDistribution[α,β,n]
BetaDistribution[α,β]
BinomialDistribution[n,p]
GeometricDistribution[p]
LogSeriesDistribution[θ]
NegativeBinomialDistribution[n,p]
PoissonDistribution[μ]
ZipfDistribution[ρ]

Непрекъснати разпределения

NormalDistribution[μ,σ]
HalfNormalDistribution[θ]
LogNormalDistribution[μ,σ]
InverseGaussianDistribution[μ,λ]
ChiSquareDistribution[ν]
InverseChiSquareDistribution[ν]
FRatioDistribution[n,m]
StudentTDistribution[ν]
NoncentralChiSquareDistribution[ν,λ]
NoncentralStudentTDistribution[ν,δ]
NoncentralFRatioDistribution[n,m,λ]
TriangularDistribution[{a,b}]
TriangularDistribution[{a,b},c]
UniformDistribution[{min,max}]
BetaDistribution[α,β]
CauchyDistribution[a,b]
ChiDistribution[ν]
ExponentialDistribution[λ]
ExtremeValueDistribution[α,β]
GammaDistribution[α,β]
GumbelDistribution[α,β]
InverseGammaDistribution[α,β]
LaplaceDistribution[μ,β]
LevyDistribution[μ,σ]
LogisticDistribution[μ,β]
MaxwellDistribution[σ]
ParetoDistribution[k,α]
RayleighDistribution[σ]
WeibullDistribution[α,β]

Числови характеристики на разпределенията

PDF[dist,x]
CDF[dist,x]
Quantile[dist,q]
Mean[dist]
Variance[dist]
StandardDeviation[dist]
CharacteristicFunction[dist,t]
Expectation[f[x],xdist]

Median[dist]
Quartiles[dist]
InterquartileRange[dist]
QuartileDeviation[dist]
QuartileSkewness[dist]
RandomVariate[dist]
RandomVariate[dist,dims]

ОТГОВОРИ, РЕШЕНИЯ, УПЪТВАНИЯ:

Част първа. ВЕРОЯТНОСТИ

1. ***Елементи на комбинаториката. Основни методи за пресмятане***

1.1. а) 8, б) 4, в) 4, г) 2;

1.2. $V_5^3 = 5.4.3 = 60,\ 3.\ V_4^2 = 3.4.3 = 24;$

1.3. $V_3^2 = 6;$

1.4. а) $V_9^4 = 3024;$ б) $V_8^3 = 336;$ в) $V_7^2 = 42;$ г) $3V_7^2 = 126;$

1.5. $V_{10}^6, V_8^4;$

1.6. а) 12!, б) (6!)(6!);

1.7. 15;

1.8. $V_{10}^5 = \dfrac{10!}{5!} = 30240;$

1.12. 254;

1.13. $P_5 = 5! = 120,\quad P_{15} = 15! = 1307674368000,\quad P_{100} = 100! = 93326;$ 21544; 39441; 52681; 69923; 88562; 66700; 49071; 59682; 64381; 62146; 85929; 63895; 21759; 99932; 29915; 60894; 14639; 76156; 51828; 62536; 97920; 82722; 37582; 51185; 2109168640; 00000; 0000; 00000; 00000; 0000;

1.14. $P_8 * P_3 = 241\,920;$

1.15. а) $6^2 = 36;$ б) $C_{6+2-1}^2 = 21;$ в) 11;

1.16. За белот $P_{32}^{8,8,8,8} = \dfrac{32!}{8!*8!*8!*8!*} = 99561092450391000,$

за бридж

$P_{52}^{13,13,13,13} = \dfrac{52!}{13!*13!*13!*13!} = 53\,644\,737\,765\,488\,792\,839\,237\,440\,000$

1.17. $P_9^{3,2,2,2}.4 = \dfrac{4*9!}{3!*2!*2!*2!} = 30\ 240;$

1.18. $P_6^{2,2,2} = \dfrac{6!}{2!*2!*2!} = 9;$

1.19. 15!, 4!*5!*6!, $P_{15}^{4,5,6} = \dfrac{15!}{4!*5!*6!} = 630630;$

1.20. $C_7^2 = \dfrac{7!}{2!*5!} = 21;$

1.21. За играта „6 от 49“: $C_{49}^{6} = \dfrac{49!}{6!*43!} = 13983816$, за играта „6 от 42“: $C_{42}^{6} = \dfrac{42!}{6!*36!} = 5245786$, за „5 от 35“: $C_{35}^{5} = \dfrac{35!}{5!*30!} = 324632$;

1.22. $C_{52}^{5} = \dfrac{52!}{5!*47!} = 2598960$;

1.23. а) C_{36}^{3}; б) $C_{4}^{1}C_{32}^{2}$; в) $C_{4}^{1}C_{32}^{2} + C_{4}^{2}C_{32}^{1} + C_{4}^{3}$; г) $C_{32}^{3} + 4.C_{32}^{2}$;

1.24. $C_{6}^{2} - 6,\ C_{10}^{2} - 10$;

1.25. C_{9}^{3};

1.26. $P_6 = 6! = 720$;

1.27. $\tilde{C}_{7}^{2} = 28$ плочки, 55 плочки;

1.28. $C_{32}^{16},\ \dfrac{32!}{(8!)^4}$;

1.29. $(C_{16}^{8})^2,\ (C_{16}^{4}.C_{12}^{4}.C_{8}^{4})^2$;

1.30. $C_{18}^{9},\ C_{18}^{6}.C_{12}^{6}$;

1.31. б) C_{n+m-1}^{n};

1.32. $C_{m}^{k}.C_{n}^{k}.k!$;

1.33. а) $C_{m}^{n}.C_{m-n}^{k}$, б) $V_{m}^{n}.V_{m-n}^{k}$;

1.34. C_{n}^{k} ;*Упътване:* Модел на Ферми-Дирак: Разпределят се ***k*** неразличими частици в ***n*** различими клетки. Намерете броя на възможните начини за разпределяне, ако всяка клетка може да съдържа най-много 1 частица.

1.35. $\overline{C}_{n}^{k} = C_{n+k-1}^{k}$, *Упътване*: Модел на Бозе-Анщайн: Разпределят се ***k*** неразличими частици в ***n*** различими клетки. Намерете броя на възможните начини за разпределяне, ако няма ограничение за броя на частиците, които могат да попаднат в една клетка.

1.36. $\overline{V}_{n}^{k} = n^k$, *Упътване:* Модел на Максуел-Болцман: Разпределят се ***k*** различими частици в***n*** различни клетки. Намерете броя на възможните начини за разпределяне, ако няма ограничение за броя на частиците, които могат да попаднат в една клетка.

1.37. Доказателството се извършва по метода на математическата индукция.

1.38. Отговор. Не. Пресметнете от предишната задача |A.B.C|.

1.39. Отговор. $2^{m+n} - 2^n - 2^m + 1$.

1.40. Отговор. $\tilde{C}_{m}^{n} = C_{m+n-1}^{n}$.

2. ***Основни понятия в теорията на вероятностите. Алгебра на събитията***

2.1. Отговор: Ω = {EEE, EET, ETE, ETT, TEE, TET, TTE, TTT}
2.2. Отговор: Ω = {E, TE, TTE, TTTE, TTTTE,…}
2.3. Отговор: Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
2.4. Отговор: Ω = {(111), (112), (121), (211), (113),…, (666)}, $|\Omega| = 6^3 = 216$
2.12. а) A; б) $A.B.C^c$; в) A + B + C; г) A.B + A.C + B.C; д) A.B.C; е) $(A + B + C)^c = A^c.B^c.C^c$; ж) $A.B^c.C^c + A^c.B.C^c + A^c.B^c.C + A^c.B^c.C^c$; з) $A.B.C^c + A^c.B.C + A.B^c.C + A.B^c.C^c + A^c.B.C^c + A^c.B^c.C + A^c.B^c.C^c$; и) $A.B.C^c + A^c.B.C + A^c.B.C$, k) 1.
2.14. а) да, б) не винаги, в) не винаги

3. ***Класическа вероятност. Свойства. Основни формули за вероятност. Формули за сума на две и повече събития***

3.1. $P = \dfrac{3}{6} = 0,5;\ P = \dfrac{3}{6} = 0,5;$

3.2. $P = \dfrac{4}{8} = 0,5;$

3.3. $P(A) = \dfrac{3}{6} = 0.5,\ P(B) = \dfrac{3}{6} = 0.5,\ P(C) = \dfrac{2}{6} = 0.3333\ldots,\ P(D) = \dfrac{1}{6}$

3.4. $P(A) = \dfrac{1}{36},\ P(B) = \dfrac{9}{36} = 0,25,\ P(C) = \dfrac{9}{36} = 0,25,\ P(D) = \dfrac{18}{36} = 0,5,$

$P(E) = \dfrac{6}{36},\ P(F) = \dfrac{1+3+5+5+3+1}{36} = 0,5;$

3.5. а) $\dfrac{\frac{10!}{5!*5!}}{2^{10}} = \dfrac{63}{256} = 0,246\,093\,75,$

б) $\dfrac{\frac{100!}{50!*50!}}{2^{100}} = 0.079\ 589\ 237\ 387\ 178\ 761\ 498,$

в) $\dfrac{\frac{1000!}{500!*500!}}{2^{1000}} = 0.025\ 225\ 018\ 178\ 360\ 801\ 907,$

г) $\dfrac{\frac{10000!}{5000!*5000!}}{2^{10000}} = 0.007\ 978\ 646\ 139\ 382\ 153\ 760\ 4;$

3.6. $$P(A)=\frac{\frac{6!}{1!*5!}*5^5}{6^6}=0.401\ 877\ 572\ 016\ 460\ 905\ 35,$$

$$P(B)=\frac{\frac{60!}{10!*50!}*5^{50}}{6^{60}}=0.137\ 013\ 114\ 267\ 470\ 946\ 06,$$

$$P(C)=\frac{\frac{600!}{100!*500!}*5^{500}}{6^{600}}=0.043\ 664\ 321\ 319\ 771\ 074\ 606,$$

$$P(D)=\frac{\frac{6000!}{1000!*5000!}*5^{5000}}{6^{6000}}=0.013\ 818\ 575\ 994\ 724\ 363\ 625;$$

3.7. $$\frac{C_M^m.C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n};$$

3.8. $$P\{3\}=\frac{\frac{6!}{3!*3!}*\frac{43!}{3!*40!}}{\frac{49!}{6!*43!}}=0.017\ 650\ 403\ 866\ 870\ 101\ 838$$

$$P\{4\}=\frac{\frac{6!}{4!*2!}*\frac{43!}{2!*41!}}{\frac{49!}{6!*43!}}=0.000\ 968\ 619\ 724\ 401\ 408\ 027\ 68,$$

$$P\{5\}=\frac{\frac{6!}{5!*1!}*\frac{43!}{1!*42!}}{\frac{49!}{6!*43!}}=0.000\ 018\ 449\ 899\ 512\ 407\ 771\ 956,$$

$$P\{6\}=\frac{\frac{6!}{6!*0!}*\frac{43!}{0!*43!}}{\frac{49!}{6!*43!}}=7.151123842\ 018\ 516\ 2619\ 10^{-8}.$$

Упътване: Използвайте предната задача със стойности M = 6, N = 49, n = 6, m = 3, 4, 5, 6.

3.9. $$P\left\{\textit{кент}-\textit{флош}\right\}=\frac{4*9}{\frac{52!}{5!*47!}}=0.000\ 013\ 851\ 694\ 523\ 963\ 431\ 526,$$

$$P\{\textit{каре}\}\frac{13*48}{\frac{52!}{5!*47!}}=0.000\ 240\ 096\ 038\ 415\ 366\ 146\ 46,$$

$$P\{\text{фул}\} = \frac{13*4*12*6}{\frac{52!}{5!*47!}} = 0.001\ 440\ 576\ 230\ 492\ 196\ 878\ 8,$$

$$P\{\text{флош}\} = \frac{4*\frac{13!}{5!*8!} - 4*9}{\frac{52!}{5!*47!}} = 0.001\ 966\ 940\ 622\ 402\ 807,$$

$$P\{\text{кента}\} = \frac{9*4^5 - 9*4}{\frac{52!}{5!*47!}} = \frac{9}{2548} = 0.003\ 532\ 182\ 103\ 610\ 675\ 039\ 2,$$

$$P\{\text{тройка}\} = \frac{13*4*\frac{12!}{2!*10!}*4*4}{\frac{52!}{5!*47!}} = 0.021\ 128\ 451\ 380\ 552\ 220\ 888,$$

$$P\{\text{два}-\text{чифта}\} = \frac{13*4*\frac{12!}{2!*10!}*6*6}{\frac{52!}{5!*47!}} = \frac{198}{4165} = 0.047\ 539\ 015\ 606\ 242\ 496\ 999,$$

$$P\{\text{чифт}\} = \frac{13*6*\frac{12!}{3!*9!}*4*4*4}{\frac{52!}{5!*47!}} = \frac{352}{833} = 0.422\ 569\ 027\ 611\ 044\ 417\ 77.$$

Упътване: При покера на всеки играч се раздават по 5 карти от пълно тесте от 52 карти. В играта се различават следните фигури, наредени по сила:

{*кент флош*}: петте изтеглени карти са от един цвят и следват по големина;

{*каре*}: 4 от картите са от един вид (например 4 дами), а петата е произволна;

{*фул*}: 3 от картите са от един вид, а 2 са от друг вид (например 3 попа и 2 седмици);

{*флош*}: петте карти са от един цвят, но не са 5 поредни;

{*кента, цветна кента*}: петте карти са поредни, но не са в един цвят;

{*тройка*}: 3 от картите са от един вид, а другите 2 са от два други вида (иначе става фул);

{*два чифта*}: 2 карти от един вид, 2 карти от друг вид и една карта от трети вид;

{*чифт*}: 2 карти от един вид, една карта от втори вид, една от трети вид и една от четвърти вид.

3.10. $\dfrac{C_{28}^{7}-C_{21}^{7}}{C_{28}^{7}}=\dfrac{\dfrac{28!}{7!*21!}-\dfrac{21!}{7!*14!}}{\dfrac{28!}{7!*21!}}=\dfrac{2966}{3289}=0.901\ 793\ 858\ 315\ 597\ 446\ 03;$

3.11. $\dfrac{2}{n};$

3.12. $\dfrac{2}{n-1};$

3.13. $\dfrac{7*P_{10}*P_{2}}{P_{12}}=\dfrac{7}{66}=0.106\ 060\ 606\ 1$

3.14. $P\{\textit{в четериместния}\}=\dfrac{P_{8}^{2,3,3}}{P_{10}^{4,3,3}}=\dfrac{\dfrac{8!}{2!*3!*3!}}{\dfrac{10}{4!*3!*3!}}=\dfrac{2}{15}=0.133\ 333\ 333\ 333$

3.15. $P(A)=\dfrac{3!*P_{12}^{4,4,4}}{P_{15}^{5,5,5}}=\dfrac{25}{91}=0.274\ 725\ 274\ 725\ 274\ 725\ 27,$

$P(B)=\dfrac{3*C_{10}^{5}}{P_{15}^{5,5,5}}=\dfrac{1}{1001}=0.000\ 999\ 000\ 999\ 001;$

3.16. $P(A)=\dfrac{2^{N}.N!}{(2.N)!},\ P(B)=\dfrac{2^{N}}{C_{2.N}^{N}};$

3.17. $P\{11\}=\dfrac{27}{216},\ P\{12\}=\dfrac{25}{216};$

3.18. $P\{A\}=\dfrac{n!}{n^{n}},\ P\{B\}=\dfrac{n}{n^{n}},\ P\{C\}=\dfrac{C_{n}^{2}.n!}{n^{n}};$

3.19. $\dfrac{9}{C_{12}^{8}}=\dfrac{1}{55}=0.018\ 181\ 818;$

3.20. $\dfrac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}}=\dfrac{\dfrac{90!}{10!*80!}}{\dfrac{100!}{10!*90!}}=\dfrac{520058680173}{1573664496040}=0.330\ 476\ 211\ 086\ 725\ 153\ 87;$

3.21. $P\{\textit{поне една единица}\}=1-\dfrac{5^{4}}{6^{4}}=\dfrac{671}{1296}=0.517\ 746\ 913\ 580\ 246\ 913\ 58,$

$P\{\textit{поне един чифт}\}=1-\dfrac{35^{24}}{36^{24}}=$

$=\dfrac{1103312646528397685291212796339228419 1}{2245225770735455724008721112379267481 6}=$

$=0.491\ 403\ 876\ 130\ 903\ 259\ 58;$

3.22. 0.3;

3.23. $\dfrac{n+1}{6^n}$;

3.24. $\dfrac{C_{k-1}^1.C_{n-k}^1}{C_n^2}=\dfrac{2.(k-1).(n-k)}{n.(n-1)}$;

3.25. $\dfrac{2.V_4^2}{V_5^3}=0,4$;

3.26. $\dfrac{3*3+6*3}{6^2}=0,75$;

3.27. $\dfrac{4}{9}$;

3.28. $\dfrac{n-2}{n}$;

3.29. $\dfrac{C_{m+n-k-l-2}^{m-k-1}}{C_{m+n}^m}$;

3.30. $\dfrac{1}{M^S}$;

3.31. $\dfrac{1}{360}$;

3.32. а) $\dfrac{C_N^k}{N^k}$; б) $\dfrac{1}{n!}$;

3.33. а) $\dfrac{1}{15}$, б) $\dfrac{k!*(10-k+1)!}{10!}$;

3.34. $\dfrac{k!*(N-k+1)!}{N!}$;

3.35. $\dfrac{V_{10}^7}{10^7-1}=\dfrac{\frac{10!}{3!}}{10^7-1}=\dfrac{67200}{1111111}=0.060\ 480\ 006\ 048\ 000\ 604\ 800$;

3.36. а) $\dfrac{9!}{3!*3!*3!*3^9}=\dfrac{560}{6561}=0.085\ 352\ 842\ 554\ 488\ 645\ 024$,

б) $\dfrac{9!*3!}{4!*3!*2!*3^9}=\dfrac{280}{729}=0.384\ 087\ 791\ 495\ 198\ 902\ 61$;

3.37. $\dfrac{n!}{n_1!*n_2!*\ldots*n_6!*6^n}$

3.38. а) $\frac{12!}{12^{12}}=\frac{1925}{35831808}=0.000\ 053\ 723\ 217\ 092\ 478\ 280\ 750,$

б) $\frac{\frac{12!}{2!*10!}*2^6}{12^6}=\frac{11}{7776}=0.001\ 414\ 609\ 053\ 497\ 942\ 386\ 8;$

3.39. Нека търсеното число е n. Тогава

$$P_n=1-\frac{V_{365}^n}{365^n},\ P_{22}=1-\frac{\frac{365!}{343!}}{365^{22}}=0.475\ 695\ 307\ 662\ 550\ 068\ 91,$$

$P_{23}=1-\frac{\frac{365!}{342!}}{365^{23}}=0.507\ 297\ 234\ 323\ 985\ 407\ 23.$ Следователно n = 23.

3.40. $\frac{2*(n-k-1)*(n-2)!}{n!}=\frac{2*(n-k-1)}{n*(n-1)};$

3.41. $\frac{1}{n};$

3.42. $\frac{2*(m-1)*n*(m*n-2)!}{(m*n)!}=\frac{2*(m-1)}{m*(m*n-1)};$

3.43. $\frac{C_n^m.C_{n+k-m}^{n-m}}{C_{n+k}^n};$

3.44. а) $\frac{V_{10}^4}{10^4}=0.504,$ б) $\frac{10.C_4^2.V_9^2}{10^4}=0.432,$ в) $\frac{10.C_4^3.V_9^1}{10^4}=0.036,$

г) $\frac{C_4^2.C_{10}^2}{10^4}=0.027$ д) $\frac{2.(1^2+2^2+...+9^2)+10^2}{10^4}=0.067,$ е) $\frac{V_{10}^1}{10^4}=0.001;$

3.45. а) $\frac{C_{2N}^N.C_{2N}^N}{C_{4N}^{2N}}$ б) $\frac{C_{4N-4}^{2N-4}}{C_{4N}^{2N}}$ в) $\frac{C_4^2.C_{4N-4}^{2N-2}}{C_{4N}^{2N}}$

3.46. 0,01 (изходите са 100, а единственият благоприятен е да завършва на 11)

3.47. $P=\sum_{i=0}^{5}\frac{4^{10-2*i}*10!*(10-i)!}{i!*(10-i)!*i!*(10-2*i)!*6^{10}}=\frac{3308407}{15116544}=$

$=0.218\ 860\ 011\ 918\ 068\ 045\ 18;$

3.48. $P=\frac{P_{10}^{2,2,2,2,2}.P_5}{P_{15}^{3,3,3,3,3}}=\frac{81}{1001}=0.080\ 919\ 080\ 919\ 080\ 919\ 081;$

3.49. $P=\frac{3!}{6^3}=\frac{1}{36};$

3.50. $P_{бяла}=\frac{10}{23},\ P_{зелена}=\frac{7}{23},\ P_{червена}=\frac{6}{23};$

3.51. $P_{2бели} = \frac{C_8^2}{C_{12}^2} = \frac{14}{33} = 0.424\,242\,42$, $P_{с\ различен\ цвят} = \frac{C_8^1 C_4^1}{C_{12}^2} = \frac{16}{33} = 0.484\,848$;

3.52. P(A)= $P(A) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{33}{95} = 0.347\ 368\ 421\ 052\ 631\ 578\ 95$,

$P(B) = \frac{C_8^2}{C_{20}^2} = \frac{14}{95} = 0.147\ 368\ 421\ 052\ 631\ 578\ 95$,

$P(C) = \frac{C_{12}^1 . C_8^1}{C_{20}^2} = \frac{48}{95} = 0.505\ 263\ 157\ 894\ 736\ 842\ 11$;

3.53. $P(A) = \frac{C_M^2}{C_{M+N}^2}$, $P(B) = \frac{C_N^2}{C_{M+N}^2}$, $P(C) = \frac{C_M^1 . C_N^1}{C_{M+N}^2}$;

3.54. P= $\frac{C_{2M}^M . C_{2N}^N}{C_{2M+2N}^{M+N}}$

3.56. а) 6.5.4.3. = 360; б) (5.4.3)/360 = 1/6; в) (4.3)/360 = 1/30; г) 1; д) (5.4.3.2)/360 = 1/3; е) 4(5.4.3)/360 = 2/3

3.57. а)8568; б) (7.6.5.4.3)/5!/ 8568 = 1/408; в) 5(13.12.11.10)/4!/ 8568 = 3575/8568; г) 6.7. (5.4.3)/3!/ 8568 = 5/102; д) Допълнението на {поне един} е {нито един}, т. е. всички са от 3-ти или 4-ти с P=(13.12.11.10.9)/5!/ 8568 = 1287/8568=143/952 P(поне един) = 1 – 287/8568 = 7281/8568=809/952

3.59. а) 4*3/(8*7) = 3/14; б) 10 + 6, 10 + 7, 10 + 8, 10 + 9, 9 + 8, 9 + 7 6/(8*7) = 3/28; в) 0; г) {8,3 + 6, 5 + 10}, 3/56; д) P{Поне едно} = 1 – P{нито едно} = 1 – (4*3)/56 = 1 – 3/14 = 11/14; е) P(A) = 0, P(B) = 1/56, P(AB) = 0,P(A) P(B) = P(AB) => двете събития са независими;

3.60. а) ¼; б) 15/36 = 5/12; в) 15/36 = 5/12; г) 1/6; д) Допълнението на {поне един}= {нито един}, т.е. всички са нечетни с P=3.3/36=1/4, P(поне едно четно)=1 – ¼ = 3/4.

4. ***<u>Геометрична вероятност</u>***

4.1. $\frac{7}{16}$;

4.2. $\frac{1}{4}$;

4.3. $(1 - 3.s)^2$;

4.4. $P=(1 - n.s)^{n-1}$

4.5. Не е уточнено как е прекарана хордата. Ето три възможни начина с три различни отговора:а) Върху окръжността случайно се избират 2 точки, които са краищата на хордата, тогава P=⅓; б) В равнината се прекарват успоредни прави на разстояние 2 между съседните. Избира се случайна точка от равнината и се прекарва окръжност с център из-браната точка. Хордата е сечение между тази окръжност и най-близката права, тогава P=½; в) В единичния кръг се избира по случаен начин точка, която е център на хордата, тогава P=¼. Трите различни отговора следват от трите различни случайни начина на прекарване на хордата.

4.6. $\frac{5}{6}$;

4.7. $s=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}.d$;

4.8. $\frac{2}{9}\ln(2)+\frac{1}{12}=0.237\ 366\ 040\ 124\ 432\ 290\ 98$

4.9. $\frac{2}{\pi}.\arccos\frac{r}{R}$;

4.10. $\frac{2.s}{\pi.a}$;

4.11. 0.5;

4.12. При $m\le k^2$ $P=1-\frac{\sqrt{m}}{3.k}$, при $m\le k^2$ $P=0.5+\frac{k^2}{6.m}$;

4.13. $\frac{(a-r).(b-r)}{a.b}$;

4.14. $\left(1-\frac{r.\sqrt{3}}{a}\right)^2$;

4.15. 0.5;

4.16. 0.75;

4.17. 0.25;

4.18. $\left(1-\frac{2.s}{\pi.a}\right).\left(1-\frac{2.s}{\pi.b}\right)$;

4.19. $P=\left(1-\frac{a^3}{R^3}\right)^N$,;

4.20. $P(A)=\frac{2}{\pi}=0.636\ 619\ 772\ 367\ 581\ 343\ 08$,

$$P(B)=\frac{5!.2.\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}\right)^4}{\pi}=0.005\ 203\ 152\ 732\ 029\ 701\ 801\ 9;$$

4.21. $P(A)=0.25$, $P(B)=0.5-\frac{1}{2.\sqrt{2}}=0.146\ 446\ 609\ 406\ 726\ 27$,

$$P(C)=0.125-\frac{1}{8.\sqrt{2}}=0.036\ 611\ 652\ 351\ 681\ 57;$$

5. ***Условна вероятност. Формула за умножение на вероятности. Независимост на случайни събития***

5.10. а) $P=\frac{1}{2}$, б) $P=\frac{2}{3}$;

5.17. $\frac{1}{12}$;

5.18. $\frac{15}{27}=\frac{5}{9}$;

5.19. $0.7*0.7*0.8*0.8*0.8=0.25088$;

5.20. 0.75;

5.21. $\frac{1}{6}*\frac{2}{5}*\frac{1}{4}*\frac{1}{3}*\frac{1}{2}=\frac{1}{360}$;

5.22. $\frac{2}{3}$

5.23. $\frac{1}{2}*\frac{3}{4}*\frac{5}{6}*...*\frac{99}{100}=\frac{1261141806819552416685156215 7}{158456325028528675187087900672}=$

$=0.079\ 589\ 237\ 387\ 178\ 761\ 498$

5.24. $\frac{1}{N}*\frac{1}{N-1}*\frac{1}{N-2}*....*\frac{1}{N-K+1}=\frac{(N-K)!}{N!}$,

5.25. $\frac{M*N}{C_{M+N}^2}*\frac{(M-1)*(N-1)}{C_{M+N-2}^2}*\frac{(M-2)*(N-2)}{C_{M+N-4}^2}*\ldots*$

$\frac{(M-N+1)*(N-N+1)}{C_{M-N+2}^2}=\frac{2^N*M!*N!}{(M+N)!}$

5.26. а) $1-\frac{9}{10}*\frac{8}{9}*\frac{7}{8}=0.3$, б) $1-\frac{4}{5}*\frac{3}{2}*\frac{2}{3}=0.6$;

5.27. $1-(1-p)^4=0.5,\ p=0.159104...$; **5.28.** $1-\prod_{k=1}^{n}\left(1-p_k\right)$

5.29. $(1-p)^k.p$;

5.30. $1-(1-0.3)*(1-0.2*0.15)=0.321$;

5.31. Трябва $\left(\frac{364}{365}\right)^N<0.5$. $\left(\frac{364}{365}\right)^{252}=0.500\ 895\ 161\ 474\ 306\ 496\ 52$,

$\left(\frac{364}{365}\right)^{253}=0.499\ 522\ 845\ 963\ 417\ 985\ 57$ следователно търсеният брой е 253.

5.32. Трябва $\left(\frac{5}{6}\right)^N<1-p$, където p = 0.5, 0.8, 0.9 в съответните случаи.

Получаваме съответно а) 4 ≤ N, б) 9 ≤ N, в) 13 ≤ N;

5.33. Трябва $\left(\dfrac{35}{36}\right)^N < 0.5 \left(\dfrac{35}{36}\right)^{24} = 0.50859612386909674042,$

$\left(\dfrac{35}{36}\right)^{25} = 0.49446845376162183096,$ следователно заровете трябва да се хвърлят поне 25 пъти.

5.34. P(A) = P(B) = P(C) = 0.5, P(AB) = P(AC) = P(BC) = P(ABC) = 0.25, следователно събитията са независими по двойки, но не са независими в съвкупност (виж и задачата на Бернщайн)

5.35. И в двата случая събитията са независими: за 32 карти имаме P(A) = $\dfrac{1}{4}$, P(B) = $\dfrac{1}{8}$, P(AB) = $\dfrac{1}{32}$ = P(A).P(B). Аналогично за 52 карти имаме P(A) = $\dfrac{1}{4}$, P(B) = $\dfrac{1}{13}$, P(AB) = $\dfrac{1}{52}$ = P(A).P(B);

5.36. Решение: След като са извадени kкартончета, възможните изходи от тях са $P_k = k!$. Благоприятните са $P_{k-1} = (k-1)!$, тъй като най-голямото число трябва да бъде последно. Интересното в задачата е, че отговорът не зависи от N;

5.37. P(A) = P(B) = 0.5, P(C) = 0.25, P(AB) = $\dfrac{3}{8}$, P(AC) = P(BC) = $\dfrac{1}{8}$, следователно A и C са независими, B и C са независими, но A и B не са независими;

5.38. P(A) = $\dfrac{21}{620}$, P(B) = $\dfrac{7}{155}$, P(C) = $\dfrac{7}{31}$;

5.42. а) 7.7=49, б) (3.3)/49 = 9/49, в) 3/7, г) Допълнението на {поне един} е {нито един}, т.е. всички не са ментови с P = 4.4/49 = 16/49, P(поне един) = 1 – 16/49 = 33/49, д) 7.6 = 42, е) (3.2)/42 = 1/7, ж) 3/6 = 1/2, з) Допълнението на {поне един} е{нито един}, т.е. всички не са ментови с P = 4.3/42 = 2/7, P{поне един} = 1–2/7 = 5/7;

5.43. а) 15/60 = 1/4, б) P(Mи2) = P(M ако 2) P(2) = (5/15)(15/60) = 1/12, в) 30/60 = 1/2, г) 5/30 = 1/6, д) P(A) = 1/2 P(A ако B) = 10/25 = 2/3 зависими са, е) (30.29)(60.59) = 29/118, ж) (30)/59, з) Допълнението на {поне един} е {нито един}, т.е. всички са момчета с P = (30(29)/(60)(59) = 29/118, P(поне един) = 1 – 29/118 = 89/118;