Тема 8.

Обратими матрици.
Методи за намиране на обратна матрица

Разглеждаме векторното пространство $M_n(\mathbb{R})$ на квадратните матрици от n-ти ред.

Определение 9.1. Квадратна матрица A от n-ти ред се нарича ***обратима*** (*неособена, неизродена*), ако съществува матрицата A^{-1} също от ред n такава, че

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Матрицата A^{-1} се нарича ***обратна матрица*** на матрицата A. Обратната матрица на всяка матрица е единствена. Изпълнено е

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

Обратната матрица на единичната матрица E е единичната матрица, т. е. $E^{-1} = E$. За произволни квадратни матрици A и B от n-ти ред е изпълнено

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Множеството от всички обратими матрици в $M_n(\mathbb{R})$ означаваме с $GL_n(\mathbb{R})$.

Теорема 9.1. *Една квадратна матрица* A *е обратима, точно когато* $\det A \neq 0$.

Теорема 9.2. *Едно линейно преобразуване* $f : V^n \to W^n$ *е обратимо, точно когато е в сила едно от следните еквивалентни условия:*

1) f *е изоморфизъм;*

2) $\mathrm{im} f = W^n$;

3) $\ker f = \{0\}$;

4) $\mathrm{rg}(f) = n$;

5) $\mathrm{def}(f) = 0$;

6) *матрицата на* f *в произволни бази е обратима.*;

Метод на адюнгираните количества за намиране на обратна матрица

Нека $A = (a_{ij})$ е квадратна матрица от n-ти ред, за която $\det A \neq 0$. Образуваме матрицата (A_{ij}) от адюнгираните количества A_{ij} на елементите a_{ij}. Тогава матрицата

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \frac{A_{21}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \frac{A_{12}}{\det A} & \frac{A_{22}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \frac{A_{2n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}$$

е обратната матрица на A. Този метод е удобен за намиране на обратната матрица на A, ако A е квадратна матрица от втори, трети, най-много четвърти ред.

Пример 9.1. Намерете обратната матрица на

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Първо пресмятаме детерминантата на A, за да се убедим, че е обратима

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0.$$

Следователно съществува A^{-1}. Пресмятаме адюнгираните количества на елементите на A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.3 = 3, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}.4 = -4,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}.1 = -1, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}.2 = 2.$$

Тогава за обратната матрица имаме

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 9.2. Намерете обратната матрица на

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имаме $\det A = -3 \neq 0$. Пресмятаме адюнгираните количества на елементите на матрицата.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3, \; A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогава обратната матрица на A има вида

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Метод на Гаус-Жордан за намиране на обратна матрица

При този метод започваме с матрицата $(A|E)$, където E е единичната матрица от същия ред както A и чрез елементарни преобразувания **само върху редовете на цялата матрица** $(A|E)$ са стремим на мястото на A да получим E. Тогава на мястото на E ще стои обратната матрица A^{-1} на A.

$$(A|E) \sim ... \sim (E|A^{-1}).$$

Елементарните преобразувания върху редовете включват:

разместване на редове;

умножаване на ред с число, различно от нула;

умножаване на ред с число и прибавянето му към друг ред.

Нека да намерим обратната матрица на A от Пример 9.2 чрез метода на Гаус-Жордан.

Започваме с матрицата $(A|E)$. Първото нещо, което ще направим е да да се уверим, че **елементът в първи ред и първи стълб на** $(A|E)$ **е числото 1**. Ако това не е изпълнено, чрез подходяща комбинация от елементарни преобразувания преобразуваме този елемент в 1.

В нашия пример можем да умножим целия първи ред на $(A|E)$ с (-1). Друг начин е да разместим редовете на $(A|E)$ така, че вторият или третият ред да застанат на мястото на първия.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} \color{red}{-1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\color{green}{\text{(-1)}}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Следващата ни задача е на **анулираме всички елементи под главния диагонал на A, а по главния диагонал да получим само единици**. Работим първо с първия ред на $(A|E)$, за да направим нули всички елементи в първия стълб, намиращи се под главния диагонал. След това преминаваме към втория ред. Осигуряваме си единица във втори ред и втори стълб (главния диагонал) и анулираме всички елементи във втория стълб под тази единица и т. н.

В нашия пример умножаваме целия първи ред на $(A|E)$ с (-1) и го прибавяме последователно към целия втори и трети ред на $(A|E)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{(-1)} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Сега забелязваме, че елементът във втори ред и втори стълб не е 1, а 0. Затова разместваме втория и третия ред на $(A|E)$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & {\color{red}0} & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Елементът в трети ред и трети стълб също трябва да бъде единица. Затова умножаваме целия трети ред на $(A|E)$ с $(-\frac{1}{3})$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & {\color{red}-3} & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)_{{\color{green}\left(-\frac{1}{3}\right)}} \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right).$$

Сега всички елементи под главния диагонал на A са нули, а по главния диагонал имаме само единици. За да превърнем A в

E, следва да **анулираме всички елементи над главния диагонал на** A. За тази цел използваме последния ред, в нашия пример това е третият ред. Първо анулираме всички елементи над главния диагонал, които са разположени в последния стълб на A, в нашия пример - единицата във втори ред и трети стълб. Умножаваме третия ред с (-1) и го прибавяме към втория.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \color{red}{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ (-1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right).$$

Сега преминаваме към следващия стълб на A в посока от дясно на ляво и анулираме всички елементи над главния диагонал в този стълб. В нашия пример това е вторият стълб. Над главния диагонал в него има само един елемент, който не е нула. За да го анулираме, използваме единицата под него, като прибавяме втория ред към първия.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right).$$

Сега в ляво получихме единичната матрица E. Тогава матрицата в дясно от вертикалната черта ($|$) е обратната матрица A^{-1}.

Използвана литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. L. Hogben, *Handbook of linear algebra*, CRC, 2007.

3. D. C. Lay, *Linear algebra and its applications*, University of Maryland.

4. C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM.

5. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd ed., MIT, 1988.