Тема 10.

Смяна на бази и координатни системи. Изменение на матрицата на линейно преобразуване при смяна на базите

1. Смяна на база. Изменение на координатите на вектор при смяна на базата

Нека V е n-мерно векторно пространство над $\mathbb{R}$, $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ и $e' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ са две негови бази. Следователно векторите на всяка една от тези бази са линейна комбинация на векторите от другата база. Нека

$$\begin{aligned} e'_1 &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + ... + t_{n1}e_n, \\ e'_2 &= t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + ... + t_{n2}e_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e'_n &= t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + ... + t_{nn}e_n. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Определение 10.1. ***Матрица на прехода от базата*** e ***към*** e' се нарича матрицата T, определена от

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Стълбовете на T са координатите на вектори от e' относно базата e.

Равенствата (10.1) в матричен вид се записват като

$$e' = eT, \tag{10.2}$$

а схематично означаваме

$$e \xrightarrow{T} e'.$$

Обратно, ако S е матрицата на прехода от e' към e, имаме

$$e = e'S.$$

Тогава $e = e'S = (eT)S = e(TS)$.
Лесно се установява, че ако e е база и $eA = eB$, то $A = B$.
Следователно $E = TS$ или с други думи $S^{-1} = T$.

Теорема 10.1. *Всяка матрица на прехода между две бази е неособена. Ако T е матрицата на прехода от база e към база e$'$, то T^{-1} е матрицата на прехода от e$'$ към e.*

Теорема 10.2. *Всяка неособена матрица е матрица на прехода от дадена база на крайномерно векторно пространство към друга негова база.*

Следователно съществуват безброй много бази в крайномерно векторно пространсто.

Ако $\det T > 0$, базите e и e' се наричат *еднакво ориентирани*, а ако $\det T < 0$ - *противоположно ориентирани*.

Нека T е матрицата на прехода от базата e към базата e' на произволно n-мерно реално векторно пространство, а $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ са координатите на произволен вектор a относно тези бази, т. е.

$$\begin{aligned} a &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n, \\ a &= x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + ... + x'_n e'_n. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Нека означим

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Тогава равенствата (10.3) имат съответно следния матричен запис:

$$a = ex, \qquad a = e'x',$$

където базите e и e' са векторите-редове $(e_1, ..., e_n)$ и $(e'_1, ..., e'_n)$.

Като вземем предвид равенствата (10.2) и (10.3), пресмятаме последователно

$$ex = a = e'x' = (eT)x' = e(Tx') \quad \Longrightarrow \quad x = Tx'.$$

Следователно

$$x' = T^{-1}x. \tag{10.4}$$

С формулата (10.4) се дава *връзката между координатите на произволен вектор относно две различни бази.*

Пример 10.1. Нека $e = (e_1, e_2, e_3)$ е база на тримерно векторно пространство V. Дадени са векторите

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1, \\ e_2' &= e_1 + e_2, \\ e_3' &= e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

а) Докажете, че векторите $e' = (e_1', e_2', e_3')$ образуват база на V.

б) Намерете матрицата на прехода от e' към e.

в) Ако векторът $a \in V$ има координати $(1, 2, -3)$ относно базата e, намерете координатите му относно e'.

а) Първо намираме матрицата T на прехода от e към e', като записваме координатите на векторите e'_i, $i = 1, 2, 3$, като съответни стълбове на T:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогава, съгласно Теорема 10.1, системата от вектори e' е база на V, точно когато $\det T \neq 0$. Пресмятаме $\det T = 1 > 0$, следователно e' също е база на V и е еднакво ориентирана с базата e.

б) Щом T е матрицата на прехода от e към e', то T^{-1} е матрицата на прехода от e' към e. Пресмятаме

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

в) Нека означим стълба с координатите на вектора a относно базата e' с x'. За получаване на x' използваме формула (10.4), както следва

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Изменение на матрицата на линейно преобразуване на векторно пространство при смяна на базата

Нека f е линейно преобразуване на n-мерно векторно пространство V, а $A = (a_{ij})$ е матрицата му в дадена база e. В матричен вид това се записва по следния начин

$$f(e) = eA.$$

Нека e' е друга база на V, като означаваме с B матрицата на f в e', т. е.

$$f(e') = e'B,$$

а T е матрицата на прехода от e към e': $e' = eT$. Ще намерим връзката между матриците A и B. От последните три равенства и тъй като f е линейно преобразуване имаме

$$e(TB) = e'B = f(e') = f(eT) = f(e)T = (eA)T = e(AT)$$
$$\Longrightarrow \quad TB = AT.$$

Следователно

$$B = T^{-1}AT. \tag{10.5}$$

Теорема 10.3. *За всяко линейно преобразуване на векторно пространство матриците му A и B относно базите $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ са свързани с равенството (10.5), където T е матрицата на прехода от $\mathbf{e}$ към $\mathbf{e}'$.*

Определение 10.2. Матрица B се нарича *подобна на матрицата A чрез неособената матрица T*, ако $B = T^{-1}AT$.

От определението следва, че A, B и T са квадратни матрици от еднакъв ред.

Освен това ако B е подобна на A чрез T, то A е подобна на B чрез T^{-1}, тъй като

$$B = T^{-1}AT \quad \Longleftrightarrow \quad A = TBT^{-1} = (T^{-1})^{-1}BT^{-1}.$$

Теорема 10.4. *Подобните матрици имат равни детерминанти.*

Следствие 10.1. *Матриците на линейно преобразуване на произволно векторно пространство относно различни бази имат равни детерминанти.*

Пример 10.2. Нека относно базата e от Пример 10.1 е зададено линейно преобразувание f на V чрез

$$f(e_1) = e_1 - e_2,$$
$$f(e_2) = e_2 - e_3,$$
$$f(e_3) = -e_1 + e_3.$$

Намерете матриците A и B на f съответно в базите e и e'.

Първо намираме

$$A = M_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

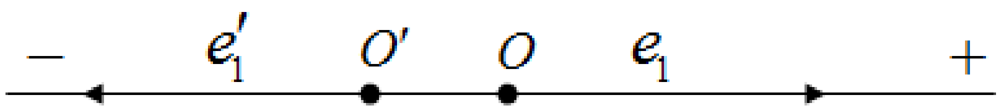
След това съгласно (10.5) пресмятаме

$$
\begin{aligned}
B = M_{e'}(f) &= T^{-1}AT \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

3. Смяна на координатна система

Нека $K = Oe_1e_2e_3$ и $K' = O'e_1'e_2'e_3'$ са координатни системи на тримерното афинно пространство $\mathcal{A}^3$. K' еднозначно се определя от K при условие, че са известни координатите на векторите e' относно базата e (т. е. матрицата T на прехода от e към e') и координатите на точка O' относно K. Координатните системи K и K' са еднакво или противоположно ориентирани в зависимост от това дали базите e и e' са еднакво или противоположно ориентирани ($\det T > 0$ или $\det T < 0$).

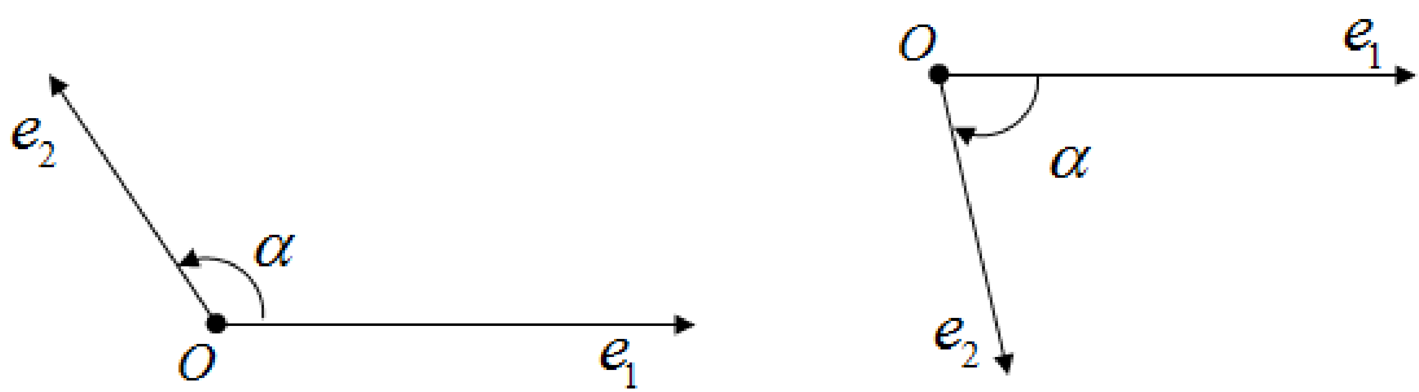
Нека разгледаме $\mathcal{A}^1$, т. е. реалната права.



Фиг. 10.1 - лява и дясна координатна система върху права

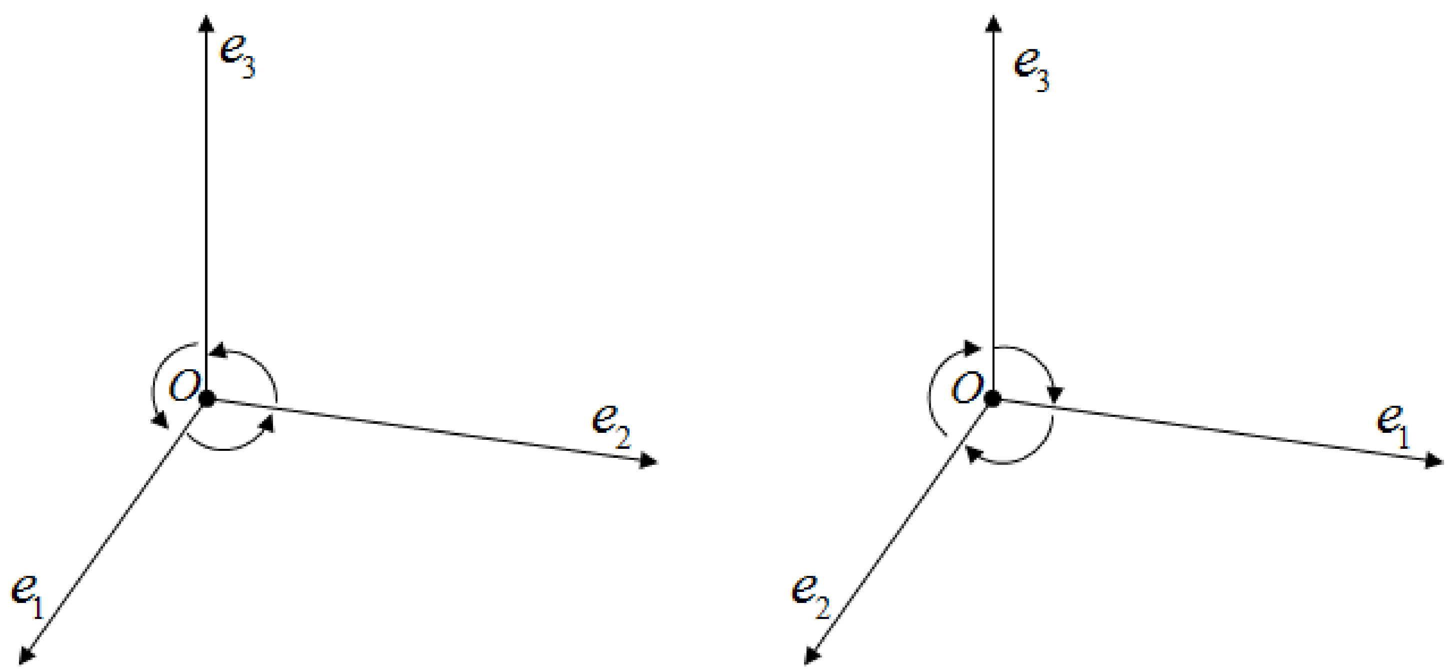
На фиг. 10.1 $K = Oe_1$ е *дясна координатна система*, а $K' = O'e_1'$ е *лява координатна система* върху права.

Нека $K = Oe_1e_2$ е координатна система в $\mathcal{A}^2$, т. е. в равнината и $\alpha \in (0, \pi)$ ъгълът, на който трябва да се завърти векторът e_1 около точката O, за да стане еднопосочно колинеарен с вектора e_2. Когато това завъртане е *въртене обратно на часовниковата стрелка, системата се счита за дясна, а в противен случай - за лява.*



Фиг. 10.2 - дясна и лява координатна система в равнината

В тримерното афинно пространство една координатна система е дясна, ако координатните вектори се завъртат по посока, обратна на часовниковата стрелка, за да станат еднопосочно колинеарни един на друг. В случай, че въртенето е по посока на часовниковата стрелка, координатната система е лява. Това е показано на фиг. 10.3.



Фиг. 10.3 - дясна и лява координатна система в пространството

Нека $K = Oe_1e_2e_3$ и $K' = O'e'_1e'_2e'_3$ са координатни системи на $\mathcal{A}^3$, $T = (t_{ij})$ е матрицата на прехода от базата e към базата e' ($e' = eT$) и координатите на O' относно K са (a_1, a_2, a_3), т. е. $\overrightarrow{OO'} = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$. Нека още M е произволна точка с координати (x_1, x_2, x_3) относно K и (x'_1, x'_2, x'_3) относно K':

$$\overrightarrow{OM} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, \qquad \overrightarrow{O'M} = x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + x'_3e'_3.$$

Означаваме

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

Тогава имаме $\overrightarrow{OM} = ex$, $\overrightarrow{O'M} = e'x'$ и $\overrightarrow{OO'} = ea$. В сила е зависимостта

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \qquad \Longrightarrow \qquad ex = e'x' + ea = e(Tx' + a).$$

Следователно получаваме матричното равенство

$$x = Tx' + a,$$

с което се дава *връзката между координатите на произволна точка относно две различни координатни системи*, нарича се още формула за обща смяна на координатната система.

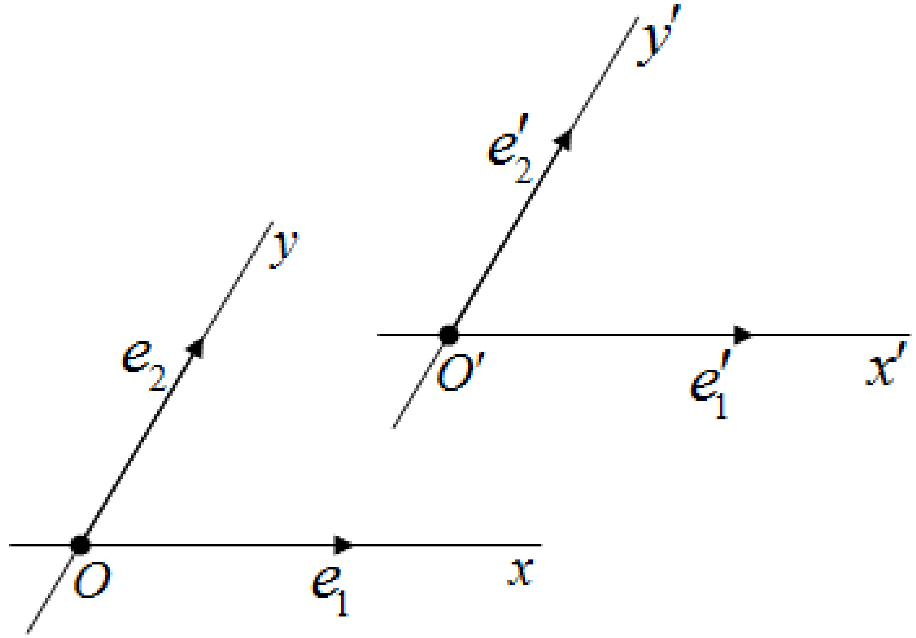
Последното равенство има следния координатен запис

$$x_1 = t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + t_{13}x'_3 + a_1,$$
$$x_2 = t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + t_{23}x'_3 + a_2,$$
$$x_3 = t_{31}x'_1 + t_{32}x'_2 + t_{33}x'_3 + a_3.$$

Транслация на координатна система имаме когато $e_i = e'_i$, $i = 1,2,3$. В този случай T съвпада с единичната матрица и формулите за смяна на координатната система
$K = Oe_1e_2 = Oxy \to K' = O'e'_1e'_2 = O'x'y'$ в равнината имат вида

$$x = x' + a_1,$$
$$y = y' + a_2.$$

Очевидно, транслацията не е линейно преобразуване.



Фиг. 10.4 - транслация на Oxy

Ортогонална трансформация на координатна система имаме, когато ортонормирана координатна система заменяме с ортонормирана координатна система и двете системи имат общо координатно начало. В този случай a е нулев стълб и трансформацията има вида

$$x = Tx'.$$

Тъй като базите e и e' са ортонормирани за елементите на матрицата T е изпълнено

$$t_{i1}t_{j1} + t_{i2}t_{j2} + t_{i3}t_{j3} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

където δ_{ij} е *символът на Кронекер*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Квадратна матрица с последното свойство се нарича *ортогонална*, т. е. редовете ѝ (а следователно и стълбовете ѝ) образуват ортонормирана база.

Една реална квадратна матрица A се нарича *ортогонална*, точно когато

$$AA^T = A^T A = E,$$

което е еквивалентно на $A^{-1} = A^T$.

В равнината ортогоналната трансформация $K = Oe_1e_2 = Oxy \to K' = O'e_1'e_2' = O'x'y'$ се задава чрез формулите

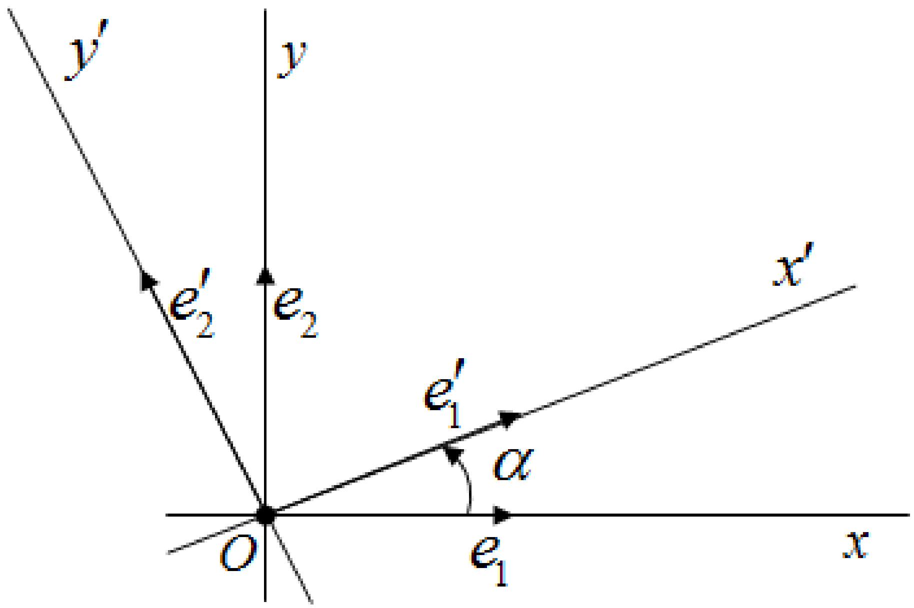
$$x = t_{11}x' + t_{12}y',$$
$$y = t_{21}x' + t_{22}y',$$

където $T = (t_{ij})$ е ортогонална матрица.

Ако $e_1'(t_{11}, t_{21})$ сключва с e_1 ъгъл α, то $t_{11} = \cos\alpha$, $t_{21} = \sin\alpha$. В случай, че K е дясна система, получаваме $e_2'(t_{12}, t_{22})$, $t_{12} = -\sin\alpha$, $t_{22} = \cos\alpha$. В този случай ортогоналната трансформация е *ротация* на координатната система около точката O на ъгъл α (Фиг. 10.5) и се задава с формулите

$$x = \cos\alpha . x' - \sin\alpha . y',$$
$$y = \sin\alpha . x' + \cos\alpha . y'.$$

Ротацията е линейно преобразуване.



Фиг. 10.5 - ротация на Oxy

Примери за ротация на ортонормирана координатна система в равнината:

1. Ротация на ъгъл $\frac{\pi}{2}$ по посока на часовниковата стрелка се определя от матрицата

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

2. Ротация на ъгъл $\frac{\pi}{2}$ по посока обратна на часовниковата стрелка се определя от матрицата

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Използвана литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. L. Hogben, *Handbook of linear algebra*, CRC, 2007.

3. D. C. Lay, *Linear algebra and its applications*, University of Maryland.

4. C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM.

5. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd ed., MIT, 1988.