Геометрично моделиране

1.Подход за геометрично моделиране

Термина моделиране-ще обсъдим класическия за информатиката модел на дейността моделиране,който е атрибутивен.Разглеждаме конкретния човек като мисли и всичко останало извън тези мисли наричаме реалност.Части от тази реалност човекът възприема в мислите си като система от свойства.За нашите нужди казваме,че той ги възприема като съвкупност от свойства.Няма да дефинираме понятието свойство,тъй като тази дефиниция е извън областта на информатиката,т.е всеки има интуитивна представа за това що е свойство,но поради различни съображения,човекът знае,че обектът на неговите мисли притежава и други свойства,които не са достъпни непосредствено за него и/или техните стойности не могат да бъдат изчислени/изведени от познатите му свойства.Това означава,че обектът А е непредсказуем за човека от гледна точка на използването му за някаква цел.В тази ситуация човекът открива или създава друг обект от реалността(означаваме с Б),който притежава свойствата на обекта А и освен това недостъпното в обекта А свойство е достъпно в обекта Б.В тази ситуация изчисленото в обекта Б свойство се пренася(в мислите) върху обекта А,т.е. чрез тази дейност обектът А става използваем.При тази дейност обектът А се нарича обект-оригинал,а обектът Б - обект-модел(на А,по отношение на целта на моделиране).Дейността по създаването и използването на модели се нарича моделиране.Тъй като реалният обект А притежава много повече свойства,отколкото тези,които са необходими на човека-моделиер,то атрибут наричаме само онези свойства,които са необходими за конкретното моделиране.Различаваме атрибутна стойност и атрибутен клас.В термините на релационните бази данни(релационна таблица) атрибутна стойност е стойността на конкретно поле от тази таблица.Типът на колона от релационна таблица(множеството от стойности,които могат да приемат полетата от тази колона) наричаме атрибутивен клас.Синоним на термина атрибутен клас е математическия термин измерителна скала.В термините на програмирането-тип величина.Един ред от релационната таблица(запис) всички полета на които са остойностени,се нарича представяне(модел) на единичен реален обект.Отговорът на въпроса защо смятаме,че изчисленото в модела свойство се приближава към оригнала,защото Б е модел на А,това е тълнодизъм -словоформа,която за говорещия може би има смисъл,а за слушащия,който притежава необходимите знания и владее езика на говорещия е неразбираемо,защото това е потвърждавано многократно от дейността на моделиера и теорията ,въз основа на която той извършва своята дейност.

Казаното дотук е извън областта на информатиката.Като модел на казаното би могъл да бъде възприет машинният език на един компютър.В рамките на това съглашение ще обсъдим един език за програмиране от високо ниво,който обозначаваме като подход за атрибутивно геометрично моделиране.Като първа стъпка се създава системен модел на изследваната реалност.Този системен модел като същност е съвкупност от интересуващите ни атрибутни класове и взаимовръзките между тях.2-ра стъпка-система от атрибутивни класове.Езикът,на който се материализира този модел е строг език,но не е необходимо да бъде формален език.Например подмножеството на естествения език ,в което липсват двусмислия.Като част от този подход на системния модел се съпоставя математически модел.Това е моделът,който гарантира изчислимост ,т.е постигане на целта на моделирането.Езика, в който се описва математическия модел е езикът на математиката.

Като 3-та стъпка на математическия модел (който е алгоритъм,чрез който се постига решение на някаква задача)се съпоставя информатически модел.Това е програма(алгоритъм +структура от данни).Данните са представени на атрибутни стойности,а алгоритъмът описва начина за изчисление на интересуващата ни атрибутивна стойност.Езикът,на който се описва информатическия модел е език за програмиране.От гледна точка на геометрично моделиране ни остава да уточним онези атрибутни класове,формиращи системен модел,чиято съвкупност обикновено означаваме като геометрия и реалните триизмерни твърди тела.Във въпрос №2 обсъждаме системния и математическия модел,необходими за геометрично моделиране.Във въпрос № 3 обсъждаме възможностите на математическия модел.Във въпрос №4 обсъждаме прехода от математически към информационен модел като се акцентира върху данните,т.е. като се нарича представяне на геометрична информация за реално триизмерно твърдо тяло,а всички други въпроси касаят конкретни схеми за реализация на този преход.

2.Геометрична информация

Обсъждаме проблема за изясняване на множество от атрибутни класове,които в нашите мисли наричаме геометрия на реални твърди тела.В исторически план първо е създаден и използван математическия модел на РТТ и чак след това в по-ново време е формиран в явна форма системния модел.Преди всичко,всеки човек свързва с реалността понятието пространство.От тази гледна точка математическия модел на реалното пространство е евклидово пространство с дясноориентирана декартова координатна система.От тази гледна точка модели на реалните твърди тела са множества от точки.Геометричното място на точки от евклидовото пространство,които се намират на разстояние по-малко от някакво число r от една конкретна точка(център).Тези точкови множества се характеризират от следните атрибутивни класове:

a) Местоположение-от гледна точка на математиката това е местоположение на конкретна точка(която е асоциирана с множеството и не е задължително да бъде от него) и се нарича полюс
b) Ориентация в пространството-в математическия модел обикновено това е локална координатна система,чийто център съвпада с полюса и относно която се извършва описанието на множеството
c) Метрика(размери)в нашата дефиниция размерът е радиуса.Най-общо казано под метрика се разбират разстоянията или ъглите между някакво избрано крайно подмножество от точки на описаното множество
d) Форма- дефиниция на диск наричаме множеството от точки/корените на неравенството $(x-a)^2+(y-b)^2-R^2<=0$

Тук (а,б) е полюсът R-размера.Формулата наричаме форма на множество от точки,които в разговорен език наричаме диск(x,y)-форма.

Съвкупността от 4-те атрибутивни класа<местоположение><ориентация><метрика><форма> наричаме геометрична информация за реалното твърдо тяло диск,което в реалността има някаква пренебрежимо малко дебелина,а в съответния математически модел дискът е двуизмерен.От втората дефиниция за диск следва ,че представянето на геометрична информация на диск удовлетворява целите на моделирането(например визуализацията на диска) само ако формата му разрешава чрез включване в неравенството да се определят корените на това неравенство.От гледна точка на информатическия модел реализацията на такова направление като проверка дали дадена точка принадлежи на съответното множество се нарича предикат за принадлежност на точка към множество.

Извод:За да бъде едно представяне на 4те атрибутивни класа геометрична информация е достатъчно за нашите нужди от това представяне да е възможно да се реализира предикат за принадлежност.В този случай представянето е модел на твърдо тяло .Възниква въпросът кои подмножества на Евклидовото пространство могат да бъдат използвани като модели на реалните тела.За да изясним това е необходимо да определим кои качества на части от реалността формулират в нашето мислене понятието РТТ.Такива качества са:

a) Отделимост
b) Ограничимост - в термина на математиката всяка околност на множество сфера с крайни граници,на чиято вътрешност тялото принадлежи
c) еднозначност на границите-нещо,което разделя пространството на 2 части-вътрешност и допълнение
d) хомогенна триизмерност –за всяка вътрешна точка съществува околност,която няма сечение с границите
e) свързаност-за всеки две вътрешни точки съществува път или крива между тях,която не пресича границите
f) твърдост-неизменност на формата и размерите по отношение на някои въздействия върху множества от точки например по отношение на ротацията и транслацията всяко множество е твърдо
g) крайност на описанието- в геометрията на всяко РТТ е възможно да бъде описано чрез краен брой знаци от някаква азбука по отношение на така формираните от качества математически модели на реалните тела

По дефиниция R множествата са ограничени,затворени (и от практически съображения полуалгебрични) подмножества на евклидовото пространство.Най-простите примери за такива множества са произволни многостени с равнинни лица.

3.Математическо пространство

Класическите задачи на аналитичната геометрия са да се изследват свойствата на R множествата с известна форма.Целта на геометричното моделиране е да се конструират/изграждат множества с нова форма.От тази гледна точка нас ни интересува какво предлага математиката като инструмент за постигане на тази цел.Преди всичко,в математиката представянето на точка е или в декартови или в проективни(хомогенни)координати.Това означава,че точка се представя с наредени числа,където 4-тата координата е различна от 0,а векторите чрез наредена 4-ка числа,където 4-тото е 0.Преобразуванията върху тези числа се описват чрез матрицата T

A b c p

D e f q

G h I r

N u l s

В която чрез подматрицата

A b c

D e f

M n l

Се описват геометричните преобразувания ротация около произволна права, мащабиране, огледално отражение относно равнина.Чрез (2)

p

q

r

се описва транслацията(преместване в права линия).Чрез 3 (m n l се описват проективни преобразувания,след извършването на които може да се получи проекция на точка върху равнина.Чрез (4) s се описва операцията смяна на дължина на единична отсечка на координатната система,което в учебника се нарича обобщено мащабиране,защото декартовата координатна система има една и съща единична отсечка за всички оси и да намалим дължината на тази отсечка означава за КГ да мащабираме с реципрочен> от s коефициент .Изпълнението на компютъра на геометричното преобразуване се реализира като вектор-редът точка или вектор се умножи отдясно с матрицата T.

Тези геометрични преобразувания могат да се реализират по аналогичен начин и върху някои прости точкови множества,например равнина.,чрез вектор стълб от коефициенти може да бъде подложено на същите преобразувания,ако представянето му се умножи отляво с обратната на T.

По отношението на генерирането на нови форми в геометричното моделиране най-често се използват следните математически операции:

1. Теоретико-математически операции- обединение,сечение,разлика.Класическите ТМО не са затворени по отношение на 3-мерна хомогенност на резултата.Поради това в геометричното моделиране се използват регуляризирани ТМО,които гарантират 3-мерна хомогенност,но не и свързаност на резултата
2. Слепване-вариант на обединение,за което се изисква слепваните тела да нямат сечение на вътрешните си и сечението на границите им да бъде хомогенно двумерно
3. Запълваща позицията-обикновено на всяка точка от пространствата,които са принадлежали на дадено множество по време на неговото движение.Най-прост пример е векторното параметрично уравнение на отсечка,използвано за тази операция.

4.Схеми за представяне на геометрична информация

Представяне на геометрична информация наричаме всеки низ от знаци,породен от дадена формална граматика.Съвкупността от всички такива низове наричаме език,породен от дадената граматика и за нашите нужди този език наричаме пространствено представяне(геометричен обект в аспект от данни)Езикът е структура на данните,а всяко конкретно представяне конкретна структура от данни.От гледна точка на математиката и математическия модел е съвкупност на всички възможни R множества,които могат да бъдат конструирани чрез някакви правила за използване на математически операции.

Формална граматика в математиката-правилата,по които на R се съпоставя представяне (R множеството се изобразява като представяне)се нарича схема за представяне.

Свойства на схемите за представяне от гледна точка на геометричното моделиране:

1. Мощност на схемата-мощността на множеството от подмножества,които могат да бъдат представени и описани чрез тази схема
2. Валидност на схемата за представяне-ако всички нейни представяния в информатическия модел са действителни едно представяне е действително,ако описвано представяне R множество.Обикновено е много трудно да се създаде език(граматика),чийто представяния да са валидни.От тази гледна точка всички схеми като области от стойности имат някакво подмножество от области от езика на информатическия модел.

   Правота за R множество на всички действителни представяния наричаме още семантика или смисъл на това представяне.Други свойства:

Еднозначност-схемата за представяне е еднозначна,само ако е от тип 1:1

Недвусмисленост 1:Н-ако е от този тип 1 множество може да се представи чрез няколко различни представяния като тези представяния се наричат синоними.

Схемата притежава свойството двусмисленост,ако е от типа М-1,М-Н-тогава за нуждите на ГМ двусмислените схеми не са полезни.Тези свойства се наричат още формални свойства. И подлежат на компютърни изчисления.Неформални свойства са сбитост(касае размера,дебелината, броя знаци) на действителните представяния на схемата.Обикновено много сложните схеми за представяне на състоянието на представяне е трудно,но изчисляването на свойствата на това представяне е бързо.Това свойство касае размера на данните,които използва една програма.

Ефективност в приложенията-касае проблема колко бързо се изчислява желаното свойство от съответното представяне.При неефективните схеми обикновено представянията са сбити,в термините на програмирането ефективността се свързва с броя на елементарните(процесорни) операции,които трябва да се извършат за всички изчисления на дадено свойство.

Лекота на създаване на представянето-най-общо това е доколко лесно от някакво представяне на R множество(дали в мислите на човека или в някакъв документ) може да бъде създадено валидно/действително представяне за нуждите на моделирането.

Съществен е проблема с конвертирането на представяния.Това е проблемът за точен превод от един език на друг.Ясно е ,че преводът е точен,ако прообразите на входното и изходното представяне съвпадат.В противен случай преводът е приближен.Някои приближени преводи наричаме неточни.

5.Схеми с екземпляри на чисти примитиви

Това е основополагаща схема за представяне не само в областта на ГМ.Чист примитив наричаме знанието за изчисляването на конкретно свойство от представяне на R множество.Обикновено тази схема е достъпна като библиотека от подпрограми,всяка от които:

a) Името и по някакъв начин отразява най-малко свойството,което изчислява(върху какво представяне) на какъв тип R множество
b) Като входни параметри фигурират представянията на атрибутните класове на геометричната информация за съответното R множество
c) Като изходен параметър обикновено фигурира само величина за изчисленото свойство,но е възможно списъкът от изходни параметри да бъде разширен в аспект точно описание на ситуацията,невъзможно за изчисляване

Всяко изпълнение на такава подпрограма,респективно резултатът,който се получава се нарича екземпляр на чист примитив .От гледна точка на ГМ под чист примитив ще разбираме представяне на геометрична информация + зададен в явна/неявна форма предикат за принадлежност.

6.Схеми”изброяване на заетото пространство”

В исторически план тази схема се използва за нуждите на материалознанието. В този си вид схемата гласи:под представяне на R множество се разбира крайно подмножество от точки на описаното R множество,което притежава желана(хомогенна) гъстота(близост на точките).Предикатът за принадлежност гласи:”Една точка принадлежи на описаното множество,ако съществува точка от представянето,чиято околност(сфера с предварително известен радиус) съдържа класифицираната точка.”Казаното означава,че се използва топологичен подход,който от гледна точка на геометричното моделиране не удовлетворява свойството хомогенна тримерност(гарантирано представяне).Това е причината в литературата по ГМ да се използва изчислително-геометричен подход.Това означава,че понятието околност се замества с понятието „клетка”(примитив),като полюсите на клетките са точките от описания топологичен подход.При тези съглашения схемата гласи:”Представянето е списък от еднородни клетки,чиито полюси принадлежат на описаното R множество,нямат сечение на вътрешностите си,а слепването им гарантира хомогенна тримерност.За конкретност ще обсъдим една такава схема за описание(представяне) на двумерни R множества.Построено е евклидово пространство с дясноориентирана декартова координатна система.Предполагаме,че трябва да опишем R множество,позиционирано в първи квадрант.Само от съображение за изчислимост в термините на естествените числа чрез въвеждане на равномерна мрежа със стъпка единица,първи квадрант е покрит с клетки:

a) Имащи формата на квадрат
b) Имащи размерите 1
c) Имащи местоположение(полюс),дефиниран като точка от клетката,най-близка до началото на координатната система(долния ляв ъгъл)
d) Имащи ориентация еднаква с тази на координатната система(т.е като следствие от б))локалната координатна система е еднакво ориентирана с глобалната.

При съглашението,че клетка принадлежи на описаното R множество само когато нейния полюс принадлежи на това множество,като представяне се получава таблица от две колони,като всеки ред на тази таблица представя полюсната клетка,принадлежаща на описаното множество.При въвеждане на съглашение на понятието съседни клетки информатическото представяне може да бъде тестване за хомогенна тримерност(или в този случай двумерност).Предикат за принадлежност:

-върху действителното представяне точка принадлежи на R множеството ,ако принадлежи на някоя от описаните клетки.Ясно е,че при тази схема представянето е приближено(неточно)Повишаване на точността на представянето се постига чрез сгъстяване на мрежата,например чрез деление на отсечка на 2.Това означава,че дължината на представянето се учетворява.Поради тази причина се казва,че тази схема е сложна,т.е.,че не е сбита.Задачи,които можем да решим при такова представяне са:

a) Лице на описаното подмножество
b) Дължина на периметър

c) Изчисляване на броя на дупките

7.Схеми”Разбиване на клетки”

Като идея чрез тази схема се цели преодоляването на многослойността на схемата (6) чрез използването на повече от една клетка.Това означава описаното множество да бъде (за 2Д покрито,за 3Д уплътнено) с клетки(примитиви) от някакво предварително известно множество от типове клетки,така,че тяхното слепване(те нямат сечение на вътрешностите си) да гарантира хомогенната двумерност(тримерност).Като пример за двумерния случай можем да изберем клетките на играта тетрис.Задачата за покриване не е от лесните математически задачи.Като пример от реалността това е задачата на кроячa,който разполага в парче плат някакво множество от клетки,наречени кройки.Целта му е

a) Да разположи всички клетки върху това парче плат
b) Да ги разположи така,че отпадъкът да бъде минимален(което означава клиентът да купи по-малко плат)
c) Да ги разположи така,че отпадъкът да притежава някакви допълнителни свойства (например размер,форма)

Обикновено този тип задачи се наричат задачи за оптимален разкрой и са предмет на математическото оптимиране.

Ако игнорираме сложността на получаване на представянето,то представянето е списък от клетки,който в термините на програмирането е таблица с 4 колони от следния тип:

a) Форма,където се записва името на клетката
b) Полюс
c) Ориентация-обикновено за нашия случай това е завъртане на 90 градуса
d) Метрика(размери)-на практика много често тази колона не се използва,тъй като „добрите програмисти” неясно защо приписват метриката към формата

Ясно е,че конвертирането(преобразуването) от (7) към (6) е елементарна задача.

Обратната задача е класическата математическа задача за оптимален разкрой.Това означава,че всички задачи ,които могат да бъдат решени върху представяне (6),могат да бъдат решени и върху представяне(7).

Предимствата на (7) пред (6) са

a) Представянето е по-компактно
b) Позволява осмислянето и решаването в явен вид на много реални задачи

8.Схеми”Кодиране с осмично дърво”

Тази схема цели преодоляването на общия на (6) и (7) недостатък,а именно многослойността и невъзможността да се работи с клетки с еднаква форма,но с различни размери.При тази схема клетката е една-куб като форма,но този куб може да има различно местоположение и размери.Предполага се,че ориентацията му съвпада с ориентацията на главната координатна система.На идейно ниво представянето е представяне на множество от кубове,чието слепване гарантира хомогенна тримерност на описаното множество.От тази гледна точка представянето би могло да бъде и таблица на схема (7),но теоретично пр. тази в представянето се кодира начина на изчисляване на клетките,формиращи представянето.

Ще обсъдим тази схема в двумерния случай,където схемата се нарича четвъртично дърво.В 3Д имаме 8 октанта,а в 2Д имаме 4 квадранта.Отново предполагаме евклидово пространство и квадрат с дължина $2^{к}$.Пак поради същите съображения така дефинирания квадрат е обвивка на R множеството,което ще описваме.Правим следните съглашения:ако 1 квадрат няма сечение с R множеството,казваме,че е празен.Ако квадратът е подмножество на R множеството,казваме,че е пълен.Ако имат сим. разлика класифицираме като частично запълнен.Първоначално квадратът е запълнен частично и в това състояние Р се съпоставя възел от едно дърво,което има 4 полета,съответстващи на 4-те подквадрата,което се получава чрез делението наполовина на квадрат,класифициран като Р.Поредността на тези полета във възела съответства на избран предварително начин на обхождане на получените 4 квадранта.Ние започваме от долния ляв и се движим обратно на часовниковата стрелка.Класифицираме всички получени подквадранти и записваме резултата в съответното поле на съответния връх от дървото-ниво 0 на дървото.За всеки възел от ниво к и всяко негово поле,съдържащо Р се генерира възел наследник от следващото ниво на дървото и за всеки такъв възел се повтаря обсъдения вече процес.Е и F нямат наследници.Този процес на строене на дървото продължава докато

a) Никое от полетата на възлите от текущо ниво не съдържа Р
b) Когато се генерират и остойностят всички възли от ниво к(полетата НА ВЪЗЛИТЕ ОТ НИВО К ПРЕДСТАВЯТ ИЛИ ОПИСВАТ КВАДРАТИ СЪС СТОЙНОСТ 1)

В четвъртичното дърво не присъстват в явен вид размерът и местоположението на квадрат,описан чрез даден възел на дървото,при което чрез извършване на следните две дейности

a) Деление наполовина на глобална величина,имаща стойност $2^{к}$ при преход от ниво с по-малък номер към ниво с по-голям номер.Респективно умножаване по 2 при възходящ(обратен) преход
b) Използване на свойствата по отношение на полюса на възприетото обхождане на квадрантите при прехода от възел към възел,които са наследници на 1 и същ възел от предходното ниво ,за да изчислим полюса

Казаното ни дава възможност да определим алгоритъма на предиката за принадлежност:

Четвъртичното дърво се обхожда като всеки посетен възел(представяш/описващ) еднозначно квадрат с определено местоположение и размери при посещението на всеки възел се реализират предикат за принадлежност към такава клетка.Ако такъв предикат върне стойност истина,то обхождането се прекратява с тази стойност.Ако резултатът е лъжа,обхождането продължава.Приключването на обхождането на дървото означава,че класифицираната точка не принадлежи на описаното чрез дървото R множество.Конвертирането на четвъртичното дърво към(6) както и обратното не са трудни задачи.Какво означава конвертиране от осмично дърво към (6)-за всеки описан в дървото квадрат(куб),който има размери $2^к$,да се изчислят всички единични квадрати.Ясно е,че ако на ниво к има ,които са класифицирани като P,то това представяне е приближено>Все пак ние не уточнихме алгоритъма,по който един квадрат се класифицира като F,E,P.това вече е въпрос на конкретната схема.Процедура по делене на единичната отсечка на 2 (което влияе само върху увеличаването на дълбочината на дървото с още едно ниво).Или се приема съгласно някакъв критерий,че това приближено представяне е достатъчно за целта на моделирането и класификациите P се заменят е с една от другите.

9.Схеми”Конструктивна геометрия с твърди тела”

Това е схемата,при която се използват (регуляризираните) теоретико-множествени операции.За нашите нужди ще говорим само за обикновените ТМО-сечение,обединение и разлика.Те не гарантират 3Д хомогенност на резултата,но целта ни е да постигнем идеята за представяне.Класически идеята за представяне в тази схема е геометричен израз.Това е израз,изграден от представяне на примитиви(клетки) и ТМО.Резултатът от изчисляването на такъв израз би трябвало да бъде R множество.Но всеки израз може да бъде преобразуван във вид на дърво.От тази гледна точка в теорията на ГМ се казва,че представянето на тази схема са двоични дървета,които се наричат конструктивни дървета.Има различни варианти на тази схема.Например ако клетките са затворени множества, не са ограничени(например полупространства/равнини),то тази схема се използва за дисциплините линейно оптимиране и линейна алгебра.

За нуждите на ГМ най-вече в областта на машиностроенето т.нар CAM/CAD примитивите на R множеството с някаква обикновена проста форма,най-често наложена от гледна точка на възможността за автоматизирано производство.
Пример:сфера,цилиндър,паралелепипед,пирамида

Всеки такъв примитив е описан като форма относно своя полюс,но полюсът,както и местоположението и размера най-често не фигурират в представянето.Идеята е,че примитивът с единични размери е разположен по някакъв начин относно главната координатна система и върху този начален примитив се извършват геометрични преобразувания, ротация, транслация, мащабиране спрямо глобалната координатна система на местоположение,ориентация и метрика.По този начин в конструктивното дърво се оформят няколко типа възли

a) Възли,описващи името на примитив
b) Възли,описващи пар. На геометричния примитив
c) Възли,описващи вида на геометричното преобразувание

d) Възли,описващи вида на ТМО

Възлите от а и б да листа на дървото,а В) и г) са всички останали възли.Този начин на фиксиране на R множествата позволява в конструктивното дърво да бъде отразен и закодиран начинът(логиката),по който се изгражда желания модел.Това е причината тази схема да се нарича още интерфейсна и да бъде предпочитана в системите за геометрично моделиране.В конструктивното дърво всеки възел за геометрично преобразуване или ТМО е корен от конструктивното дърво,описващо някакъв геометричен обект..Алгоритъмът за принадлежност на точка към множество конструктивно дърво е

a) Обхождане на ляв наследник
b) Ако е необходимо обхождане на десен наследник
c) Комбиниране на получените клас. резултати в следствие от изчисленията на клас. резултати в зависимост от типа и вида на посочения възел
d) Представяне на получения резултат към предходника на посетения възел

Казаното означава при посещение на възел,описващ примитив се изпълнява предиката за принадлежност на този примитив по отношение на класифицирана точка и този резултат се предава към предходника.При посещение на възел,описващ геометрично преобразуване-ако посещението е низходящо класифицируемата точка се подлага на геометрично преобразуване,което е обратно на описаното от възела и тази нова точка се предава към новия наследник.При възходящо посещение класифицираната точка се подлага на преобразуване ,описано във възела и получената точка заедно с класифицирания резултат се предава към предходника.При посещение на възел за ТМО съгласно правилото за обхождане се обхожда първо левия наследник,ако е необходимо след това десния,изчислява се резултатът от двете посещения,които заедно с резултат с е предават към предходника

Върху това представяне от практическа гледна точка е необходимо да бъдат решени още 2 задачи:

Опит за минимализиране на дървото,което означава,че от гледна точка на интерфейса конструкторът не е действал по най-оптималния начин

Откриване и отстраняване на поддървета,описващи празното множество.

10.Схеми"Запълваща продукция"

При схемите,обсъдени досега(без чистите примитиви)резултатът се получава мигновено-в смисъл,че някакво множество от примитиви мигновено се включва в някаква система и в този момент се получава и резултатът .От тази гледна точка тази схеми са статични.Запълваща продукция е динамична схема,защото резултатът се получава в резултата на действие(операция),протичащо за някакъв определен интервал от време.Най-простата дефиниция за тази схема е следата,която оставя движещо се в пространството тяло.От математическа гледна точка под следа се разбира множество от точки,които в някой момент от времето,през което се извършва движението са принадлежали на движещото се тяло.Идеята на запълващата продукция най-явно се характеризира чрез т.нар векторно параметрично уравнение на отсечка.

Теоретично се казва,че в тази схема представянето е съвкупност от

a) Представяне на тялото,което се движи
b) Закона за движение на тялото

Проблем е предикатът за принадлежност,защото той е свързан със съществуването и изчислимостта на закон,обратен на закона за движение.Поради това за практически нужди най-често се използва равномерно движение.В геометрията и аналитичната механика равномерното движение се нарича механично движение.Когато по време на движение тялото не променя своята форма или размери схемата се обозначава като Simple Sweeping.Но ако е възможно размерите(метриката) и/или формата на движещото се тяло да бъдат функция на времето,то схемата се нарича General Sweeping/обобщена запълваща продукция

В този случай се казва,че движението най-общо на тялото е суперпозиция от две движения

Деформиращо движение,което променя формата и/или размерите(резултат от което се подлага на механично движение)

Тази схема е много удобна/полезна за добрите математици,но е много неефективна в приложенията.

11.Схеми”Описание на границите”

Обсъдените дотук схеми(без схемата”чисти примитиви”) се наричат още обемни.Причината е,че ако точка принадлежи на тяло,то са необходими допълнителни изчисления,за да се определи дали тя принадлежи на граница на тялото и ако да,как принадлежи.Например какъв е нормалния вектор към границата в тази точка.Тази схема се нарича повърхнина,защото целта е да се опише границата на тялото,която е повърхнина в E3.Това означава,че ако точка не принадлежи на границата на тялото,са необходими допълнителни изчисления,базирани върху някакво съглашение,за да се определи дали точката е вътрешна или не.Оттук нататък в лекциите ще използваме свободно термина тяло като синоним на R^3 множество и термина повърхност на тяло,респективно като повърхнина в E3.Налага се да обясним математическата причинност на тази схема.Границата на едно тяло може да бъде от един от следните два типа повърхнини

a) Сферичен тип-например повърхността на сфера или паралелепипед,т.е. тялото няма дупки
b) Тороидален - геврек или безкрайно дълъг цилиндър.Тези тела с к-свързани,като к е броят на дупките

Третият единствено възможен тип повърхнина,която разделя E3 на две части е планарния тип повърхнина,например равнина,но двете части са неограничени множества,следователно не могат да бъдат използвани като модели на тялото,за да бъде една повърхнина от един от тези 3 типа,означава,че тя чрез непрекъсната деформация(мачкане на глина) може да бъде съвместена с някой еталонен представител на тези три типа.Например ,вземаме глинен паралелепипед или куб и чрез мачкане го привеждаме до сфера.Това означава,че повърхността на паралелепипеда е в сферичен тип.В математиката непрекъснатата деформация е изображение с определени качества,дефинирано върху плътно множество.Съглашението за вътрешност на тяло,на което познаваме само границата е следното:за всяка точка и за всяко тяло съществува равнина,инцидентна с точката,която разделя тялото на две непразни множества.Тогава всеки лъч,който е компланарен пресича границата на обекта четен или нечетен брой пъти(0 е четно).Под сечение се разбира интервал или точка(или списък от такива).Ако броят на сеченията с границата на обекта е нечетен,точката принадлежи на вътрешността,респективно ако е нечетен,точката е външна за обекта.Изричното условие е точката да не принадлежи на границата.Ние няма да обсъждаме тела,които имат кухини поради два факта

a) Границата на такива тела разделя Е3 на повече от две части
b) Границата на такива тела е несв. Множество
c) За такива тела може да се използва конструктивна геометрия

Трябва да обсъдим начин за представяне на повърхнини от сферичен и тороидален тип.От гледна точка на сложността на формите се е избрал подход за описание,базиран върху понятието лице.

Границата на някакво тяло е множество от лица(в информатиката списък от лица).Всяко такова множество,както и неговите елементи лицата трябва да удовлетворяват следните условия

a) Всяко лице е подмножество на границата,респективно повърхнината на описания обект
b) Обединението на всички лица трябва да съвпада с границите на обекта
c) Всяко лице е подмножество на примитивна повърхнина.Една повърхнина е примитивна,ако познаваме нейната форма.Обикновено като примитиви се избират онези повърхнини,за които формата и размерите на лицето и не зависят от местоположението и ориентацията му в повърхнината.Например лице върху сфера от технически съображения като примитив се използват равнината,сферата и цилиндъра(линейчати повърхнини)
d) Всяко лице е топологично еквивалентно на диск.

При тези условия б) не ограничава възможността лицата да имат сечение на вътрешностите си.Това означава,че имаме два различни типа гранично представяне:

a) Когато лицата нямат сечение на вътрешностите си се използва математическата операция обединение и обикновено такива схеми(но не само по тази причина) се наричат скулпторни,а лицата кръпки.ние няма да обсъждаме тези схеми.

b) Когато никои две лица нямат сечение на вътрешностите си.Това означава,че се използва частен случай на обединение,което ние нарекохме слепване.Тези схеми са предмет на нашето обсъждане

Освен това от съображения за яснота и краткост на изображението избираме примитивните повърхнини да бъдат равнини,а лицата-многоъгълници.Най-простият многоъгълник е триъгълник.От този момент ще обсъждаме представянето на многостени с равнинни лица.Прилагаме същите разсъждения по отношение на представянето на R множество-лица на многоъгълници.това означава,че границата на всеки многоъгълник е списък от отсечки.В термина на тази схема отсечките наричаме ребра.Всяко лице се явява списък от ребра.Прилагаме същия подход към R множествата списъка с ребра,които са отсечки,че границите на отсечките са точки,които в тази схема наричаме върхове.списъкът от точки наричаме геом. на границата на описано тяло,а останалите списъци и взаимовръзки между тях наричаме структура(топология) на границите на описваното тяло.От съображения за скорост на предиката за принадлежност към вътрешността на тяло обикновено чрез списъка на ребрата на едно лице на многоъгълник се постига някаква еднородна наредба на върховете на всички многоъгълници,т.е в това представяне се”скрива” наредбата на върховете на всяко лице.Ако съществува наредба и за n-мноогоъгълник имаме такава наредба,то лесно чрез съглашението може да бъде изчислен нормален вектор към примитивната повърхнина на това лице по такъв начин,че тези нормални вектори за всички лица да сочат вътрешността(респективно външността) на тялото.Това представяне е „теоретично” и може да бъде реализирано по много различни начини.Едно такова BR представяне е валидно,ако удовлетворява формулите

a) За сферичен тип [E]+2=[F]+[V]
b) За тороиден тип [e]+2=[F]+[V]+2[H]

Възможно разширение на тази схема е свързано с използването на специфични лица,наричани ципи(хралупи,бърлоги и др.).Границата за всяка точка от границата на такова лице всяка нейна околност съдържа точки от вътрешността на тялото,а за всяка от вътрешността на ципата съществува околност,която не съдържа точки от вътрешността на тялото.Ципите са технически реализационен инструмент,чрез който е възможно да се опишат(представят) тела с кухини,а границите им да бъдат свързано множество.

Схемата позволява всеки многоъгълник да бъде покрит с триъгълни клетки,като допълнителни ребра се наричат още фалшиви,защото по отношение на визуализацията на такъв обект,те не би трябвало да се визуализират.От тази гледна точка в представянето не може да има 2 съседни ципи и една и съща носеща примитивна повърхнина.

12. Хибридни(смесени схеми)

Дефиниция:Геометрично моделиране наричаме съвкупност от теории,методи и системи,фокусирани върху създаването на „информационно пълнене” представяния(модели) на реалните твърди тела,като тези модели позволяват да бъде изчислено(по възможност автоматично) всяко добре дефинирано геометрично свойство на реалните им праобрази на обекта-оринигнал(изображението на един обект също е негово свойство),като свойствата обем и лице на границата.От обсъдените от нас теми само схемата „чисти примитиви" е „чиста" схема,защото всички останали я използват в явен или неявен вид.Въпреки това всички тези схеми в теорията на геометричното моделиране се наричат чисти схеми.Може би причината е,че при обособяването им като схеми са се имали предвид предимно общите понятия математическа операция и вътрешност и граница на R множество.Но в практиката тези схеми твърде рядко се използват сами например CSE+Sweeping+BR.Казаното означава,че в практиката много често се конструират/създават нови схеми за представяне,в които се използват и други математически операции от гледна точка на дефиницията за ГМ,чрез тези схеми се цели

1. По-добро дефиниране на геометрично свойство
2. По-лесно изчисляване на добре дефинирано геометрично свойство
3. Това е причината-създаването на нови схеми във въпрос 4 да обсъдим формалните и неформални свойства на схемите за представяне

13.Системи за геометрично моделиране

Система за геометрично моделиране наричаме програма,притежаваща следната функционалност

a) Наличие(поддържане) на достатъчно количество интерфейси(схеми на представяне)
b) Наличие(поддържане) на достатъчно количество изчислителни схеми
c) Наличие на конвертори,чрез които е възможно конвертиране между всеки две от поддържаните схеми
d) Отвореност на системата в аспект,че множеството от схеми и конвертори между тях могат лесно и бързо да се променят

Това ни позволява оттук нататък да предполагаме,че съществува схема за ГМ,от която потребителите(човек или програма) могат да получат достатъчно бърз и точен отговор на всеки свой въпрос относно свойство на обект,независимо какво е представянето на обекта в термините(мислите) на потребителя.Това съглашение ни освобождава в трета част на конспекта да си мислим за визуализация на множества от многостени да обсъждаме алгоритмите за визуализация в термините на познати за студентите от курса по АГ операции с подмножества на E3.