

Случайни величини



Определение

Нека S е множеството от всички елементарни събития.

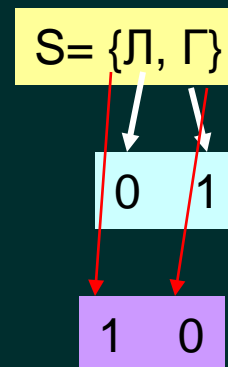
Случайна величина е **числова** функция, дефинирана върху множеството S , т.е. тя съпоставя на всеки елементарен изход реално число

Примери

Опит: Хвърляне на монета един път

$X = \{\text{брой лица}\}$

$Y = \{\text{брой гербове}\}$



Опит: хвърляне на зарче един път



$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1, 2, 3, 4, 5, 6

$X = \{\text{брой на точките на лицевата страна на зара}\}$



$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1 0

$Y = \{\text{брой паднали се лицеви страни с точно една точка върху тях}\}$

Опит: Случайно избрано топче от кутия с 5 червени и 2 сини

$X = \{\text{брой сини топчета измежду избраните}\}$

Стойности :
1, 0

Опит: Време на събуждане точно определена сутрин

Стойности : безброй много

Пример: Определете случайна величина

1. монета се подхвърля два пъти

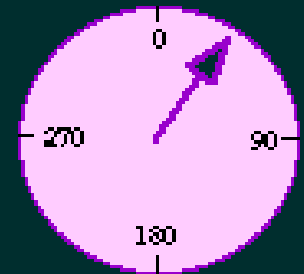
$X = \{\text{брой паднали се лица}\}$

2. Монета се подхвърля, при което тя се завърта.

$X = \{\text{време от момента на подхвърляне до момента на покой}\}$

3. Кръг, разделен на 4 части е завъртян по посока на часовниковата стрелка

$X = \{\text{квадранта, в който показва стрелката, след като кръгът спира}\}$



4. Студент се явява на изпит.

$X = \{\text{оценката}\}$

5. Студент отива на среща с приятелка.

$X = \{\text{времето, когато приятелката пристига}\}$

Теорема . *Линейна комбинация, произведение, минимум, максимум и функция на сл.в. е сл.в.*

Видове случайни величини

Дискретни

Случайна величина, която приема само краен брой или изброимо стойности

Дискретната случайна величина обикновено е случайна величина, чийто стойности са резултат от броене.

Непрекъснати

Случайна величина, чийто стойности са всички числа от даден интервал (или интервали), които могат да са крайни или безкрайни

Непрекъснатата случайна величина обикновено е случайна величина, чийто стойности са резултат от измервания.

Примери

- брой студенти в клас.
- брой деца в семейство.

Дискретни

- Брой жилищни заеми, дадени от банка миналата седмица.



Непрекъснати

- разстоянието, което студентите изминават от дома им до входа на университета .
- Времето, което се пътува с автобус от Панаира до университета.
- Времетраенето на един изпит.
- Дължината на телефонен разговор с приятелка.



пример: Дефинирайте случайна величина, свързана с опита и определете нейния вид и множеството от възможни стойности

1. Зар е подхвърлен и броят на точките е записан.

$X = \{\text{брой точки}\}$

2. Зар е подхвърлен и времето докато застане в покой е засечено.

$X = \{\text{време}\}$

4. Измерена е температурата сутринта в 7 часа.

$X = \{\text{температура}\}$

5. В партида от 1 000 чифта пантофи, произведени в дадена фирма, са отчетени броят на дефектните.

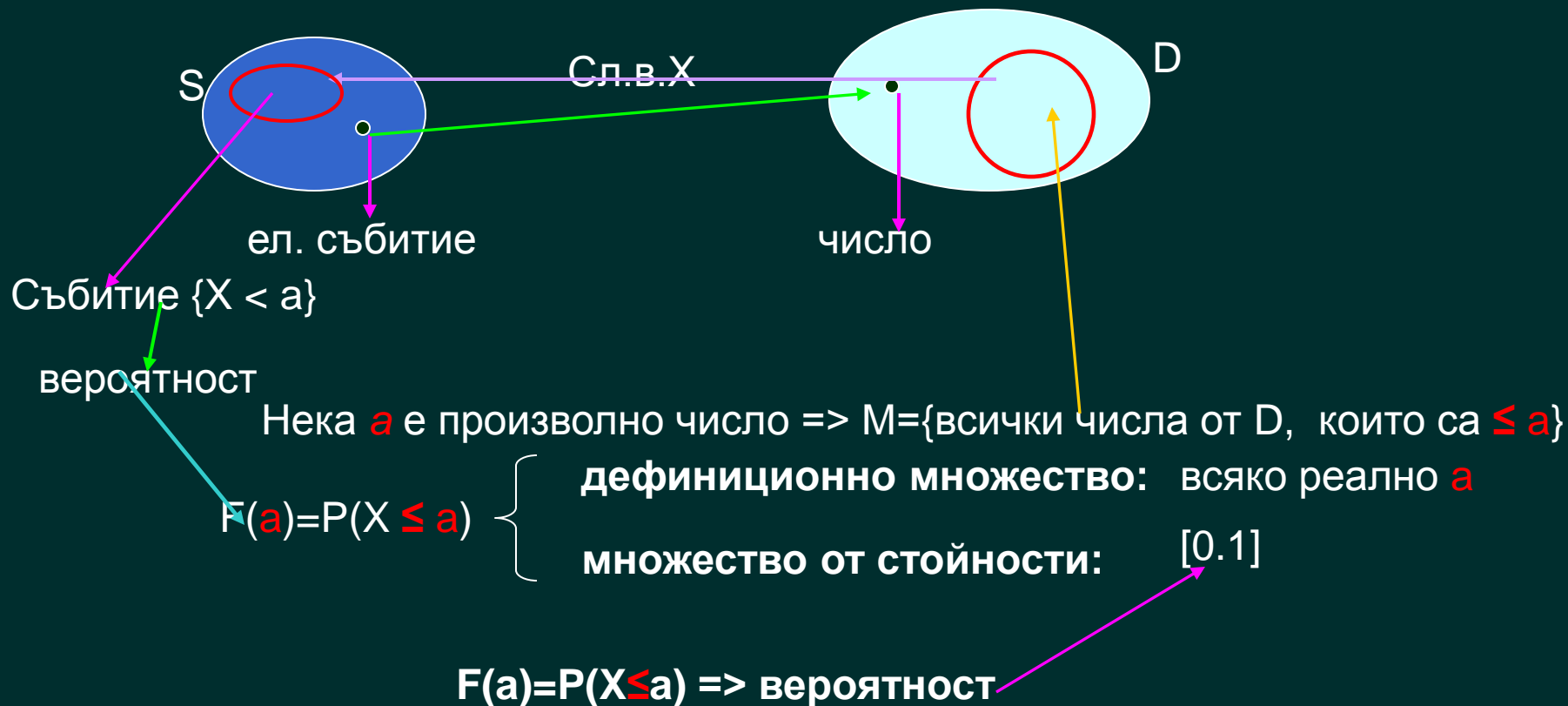
$X = \{\text{брой дефектни}\}$

Непрекъснати

Дискретни

Функция на разпределение

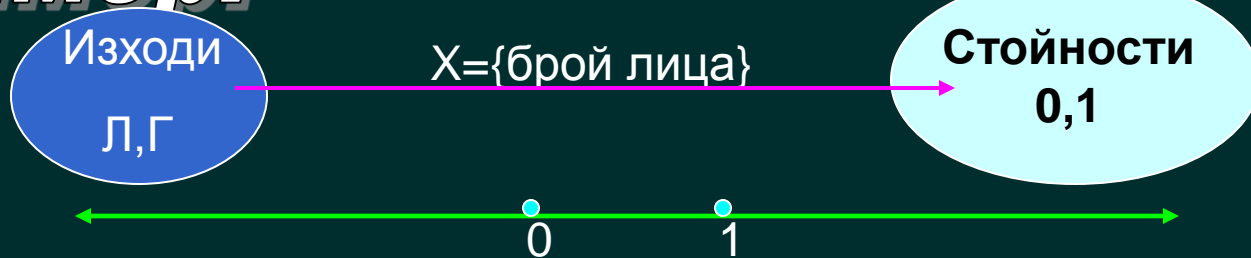
Нека X е сл.в., дефинирана в пространството от ел.изходи S и със стойности в множеството от числа D (крайно, изброимо или неизброимо)



Дефиниция: Ф.р. на една сл. в. X е $F(x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x)$ за всяко реално x

Пример:

Опит: Хвърляне на монета един път



$$F(-1) = P(X \leq -1) = P(\text{невъзможното}) = 0$$

$$F(-3) = P(X \leq -3) = P(\text{невъзможното}) = 0$$

Няма изход на който да се съпоставя число ≤ -1

Ако $x < 0$, то $F(x) = P(X \leq x) = P(\text{невъзможното}) = 0$

$$F(0,3) = P(X \leq 0,3) = P(\Gamma) = 0,5$$

$$F(0,8) = P(X \leq 0,8) = P(\Gamma) = 0,5$$

На Γ се съпоставя числото 0, което е $< 0,3$

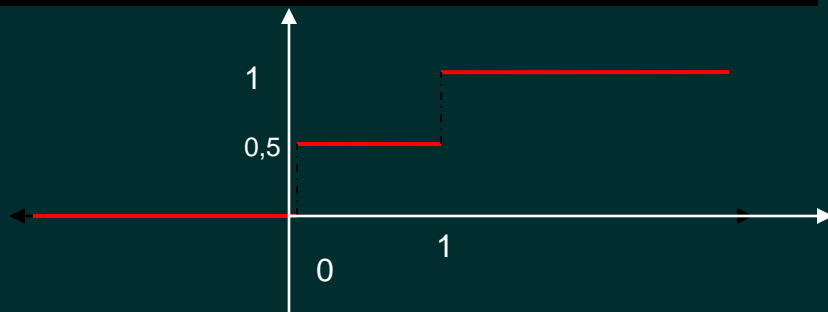
Ако $0 < x < 1$, то $F(x) = P(X \leq x) = P(\Gamma) = 0,5$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(\Gamma, \text{Л}) = 1$$

$$F(7) = P(X \leq 7) = P(\Gamma, \text{Л}) = 1$$

На Γ се съпоставя числото 0, на Л се съпоставя числото 1, и двете са < 2

Ако $x > 1$, то $F(x) = P(X \leq x) = P(\text{Л}, \Gamma) = 1$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Ако } x < 0 \\ 0,5 & \text{Ако } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{Ако } x \geq 1 \end{cases}$$

Пример:

Опит: хвърляне на зарче един път

$X = \{\text{брой на точките на лицевата страна на зара}\}$

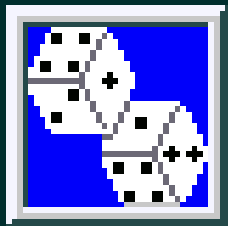
$S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

1; 2; 3; 4; 5; 6

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{Ако } x < 1 \\ 1/6 & \text{Ако } 1 \leq x < 2 \\ 2/6 & \text{Ако } 2 \leq x < 3 \\ 3/6 & \text{Ако } 3 \leq x < 4 \\ 4/6 & \text{Ако } 4 \leq x < 5 \\ 5/6 & \text{Ако } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{Ако } x \geq 6 \end{cases}$$

$$F(2,78) = P(X < 2,78) = P(1,2) = 2/6$$

На 1 се съпоставя числото 1, на 2 се съпоставя числото 2, и двете са $< 2,78$



СВОЙСТВА НА ф.р.

Дефиниция: Ф.р. на една сл. в. X е $F(x) = P(X \leq x)$ за всяко реално x

СВОЙСТВО 1.

Дефиниционно множество : множеството на реалните числа

СВОЙСТВО 2.

Множество от стойности : $[0,1]$

СВОЙСТВО 3. ф. р. е непрекъснатата отлясно, т. е .

$$\lim_{\substack{s \rightarrow x \\ s > x}} F(s) = F(x+0) = F(x)$$

СВОЙСТВО 4.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

Понеже $P(X < -\infty) = 0$ и $P(X < +\infty) = 1$

$$F(-\infty) = 0$$

$$F(+\infty) = 1$$

СВОЙСТВО 5. $P(X > a) = 1 - F(a)$

От дефиницията $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

СВОЙСТВО 6. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

СВОЙСТВО 7. $F(x) = F(x+)$

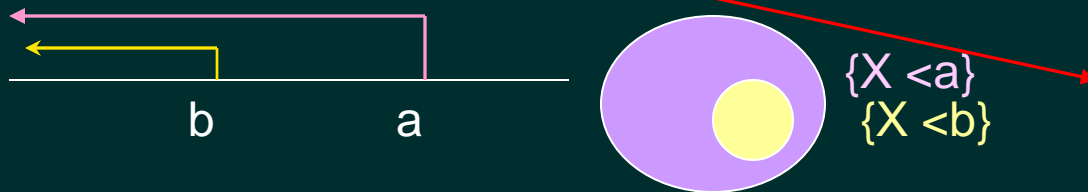
Функцията на разпределение $F(x)$ е непрекъсната **отдясно**

СВОЙСТВО 8.

Функцията на разпределение $F(x)$ е **НЕНАМАЛЯВАЩА**

$$\Rightarrow F(a) = P(X \leq a) \geq P(X \leq b) = F(b)$$

Нека $a > b$



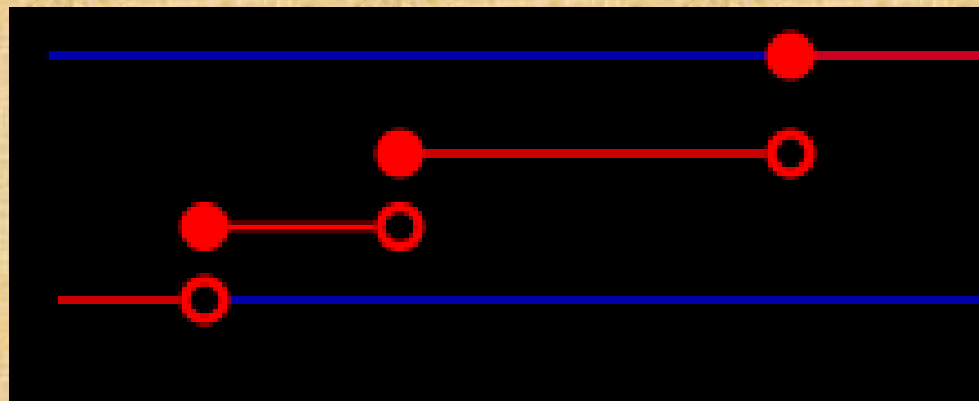
ВАЖНО!!!

Нека функцията на разпределение $F(x)$ е константа в даден интервал (a, b)

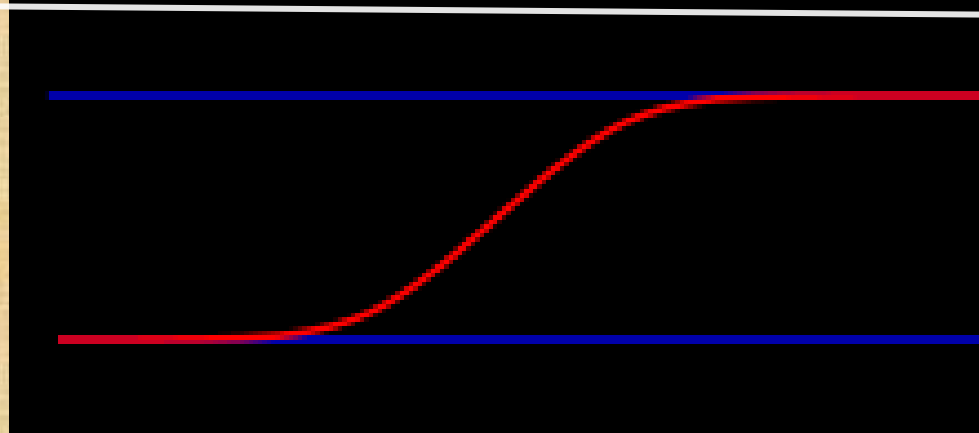
$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = 0$$

Случайната величина X не приема стойности в интервала (a, b)

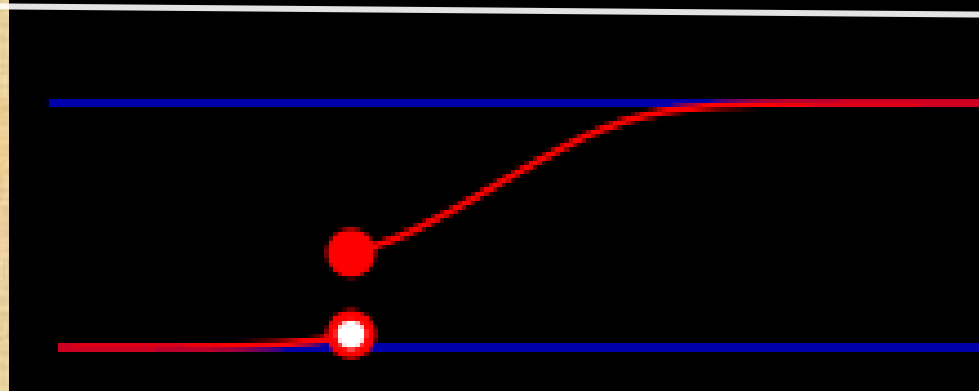
Графика на функция на разпределение случайна величина



Дискретна
случайна
величина

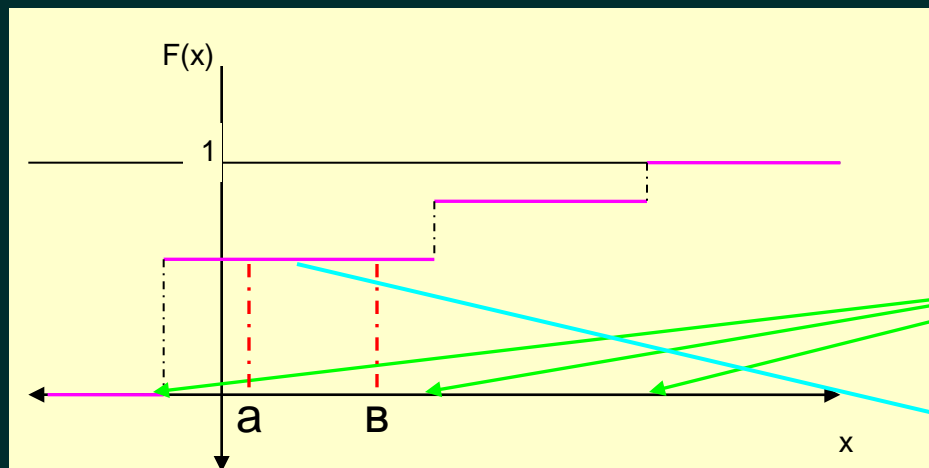


непрекъсната
случайна
величина



случайна
величина
Смесен тип

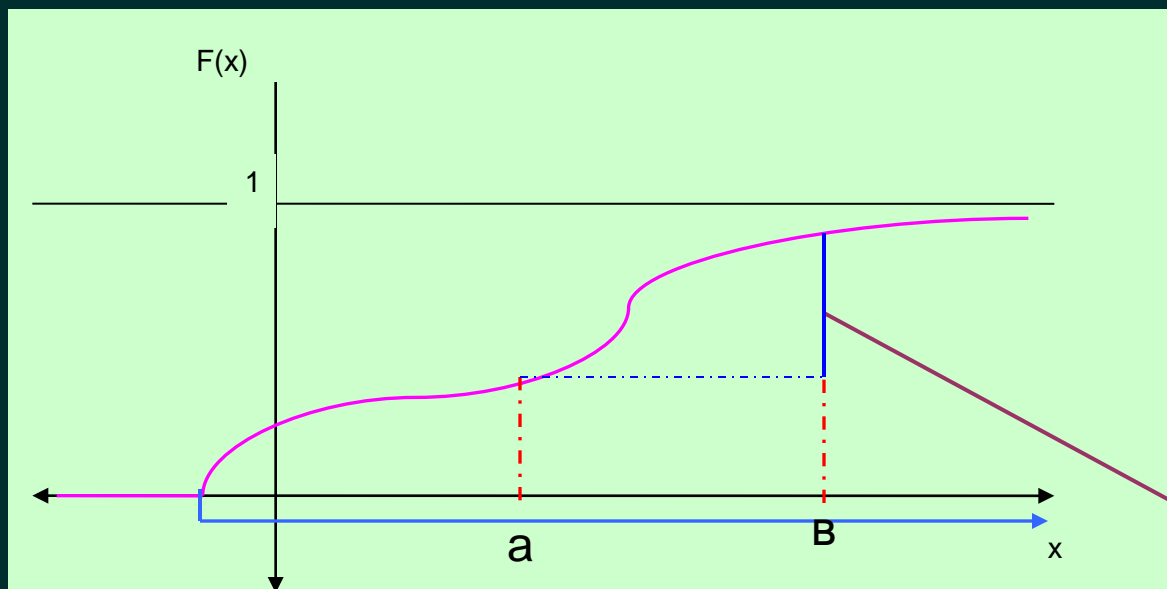
Графика на ф.р.



Дискретна сл.в.

Стойности на сл.в.

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = 0$$



непрекъснатa сл.в.

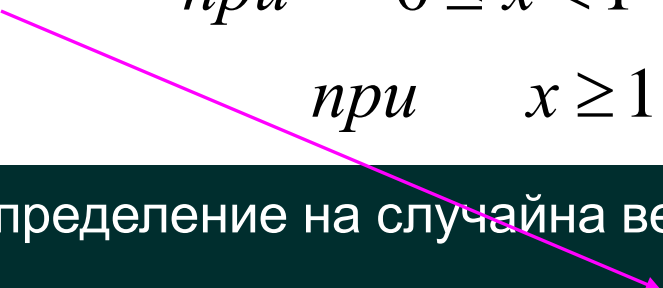
Стойности на сл.в.

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Една функция може да е ф.р. на случайна величина,
ако ПРИТЕЖАВА свойства 1-8

Задача

Може ли функцията

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ e^{-2x} & \text{при } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$


да бъде функция на разпределение на случайна величина?

НЕ може да е ф.р, не е изпълнено свойство 8, не е НЕНАМАЛЯВАЩА