

Parametrización B-spline de regiones planas con frontera irregular

B-spline parametrization of planar regions with irregular boundary

Isidro A. Abelló Ugalde^{1,3,*}, Victoria Hernández Mederos², Pablo Barrera Sánchez³, Guilmer F. González Flores³

Resumen El presente trabajo propone un método para parametrizar una región plana con frontera irregular por medio de un mapeo B-spline producto tensorial. El método propuesto asume que la frontera de la región está definida por 4 curvas B-splines, que se consideran la imagen por el mapeo de cada uno de los lados del cuadrado unitario. Para extender el mapeo al interior del dominio, los puntos de control interiores del mapeo se calculan como los vértices de una malla estructurada de cuadriláteros. A su vez, estos últimos se obtienen minimizando un funcional que garantiza que la malla óptima sea convexa. En el trabajo se prueba que la convexidad de la malla garantiza la inyectividad del mapeo bilineal. Además se obtiene una condición suficiente de inyectividad para el mapeo bicuadrático. Finalmente se incluyen resultados experimentales que muestran que es posible parametrizar con éxito dominios con frontera irregular utilizando un mapeo B-spline bicuadrático.

Abstract In this paper we propose a method for parametrizing planar regions with irregular boundary using a tensor product B-spline map. It is assumed that the boundary of the region is defined by 4 B-spline curves, which are the images by the map of the 4 sides of the unitary square. The map is extended to the interior of the domain computing its interior control points as the vertices of a structured quadrilateral mesh. The vertices are obtained by minimizing a functional whose optimum provides a convex mesh. We prove that the convexity of the mesh guarantees the injectivity of the bilinear tensor product B-spline map. Moreover, a sufficient injectivity condition for the biquadratic map is obtained. Numerical experiments show that biquadratic maps can be successfully used to parametrize regions with irregular boundary.

Palabras Clave

mapeo bicuadrático — malla de cuadriláteros — región cerrada con frontera irregular — Isogeométrico

¹ Centro de Estudios para el Perfeccionamiento de la Educación Superior, Universidad de La Habana, Cuba, isidro@cepes.uh.cu

² Departamento de Matemática, Instituto de Cibernética Matemática y Física, La Habana, Cuba, vicky@icimaf.cu

³ Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, pablobarrera@ciencias.unam.mx, guilmerg@yahoo.com

*Autor para Correspondencia

Introducción

El primer paso para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales en derivadas parciales sobre un dominio físico cerrado Ω consiste en representar matemáticamente la frontera $\partial\Omega$ de Ω . Cuando la geometría de Ω es complicada, la frontera se describe usualmente por medio de funciones NURBS (Non Uniform Rational B-splines). Sin embargo, si se aplica el método de elementos finitos (FEM) clásico para resolver el problema, entonces $\partial\Omega$ se aproxima mediante elementos lineales a trozos. Esto puede introducir errores significativos a menos que se utilice un número grande de elementos, lo cual a su vez eleva el costo computacional. El enfoque FEM isoparamétrico, basado en elementos de orden superior, permite obtener una mejor aproximación de $\partial\Omega$, pero no llega a

representarla exactamente.

Para enfrentar estas dificultades, Hughes et al. introducen en [16], [10] el llamado *análisis isogeométrico* (IgA). Este método emplea funciones NURBS, no sólo para representar $\partial\Omega$, sino también como las *funciones de forma* que se usan en FEM para calcular la solución aproximada. Un ingrediente básico del enfoque IgA es la *parametrización* del dominio físico Ω , es decir la construcción de un mapeo biyectivo que transforme un dominio de referencia (usualmente el cuadrado unitario) en Ω . Este mapeo no se obtiene de forma inmediata a partir de la representación CAD de $\partial\Omega$ en términos de una o varias funciones spline. En otras palabras, para aplicar el enfoque IgA es necesario extender la parametrización de $\partial\Omega$ al interior de Ω . La parametrización del dominio en IgA juega

un papel similar a la generación de mallas en FEM. Más precisamente, al igual que la calidad de la malla influye en la precisión de la solución aproximada obtenida mediante FEM, la calidad de la parametrización influye en la precisión de la solución calculada mediante IgA [22], [23], [15].

La parametrización de un dominio plano Ω utilizando funciones B-spline producto tensorial es un tema actual de investigación [22], [23], [18], [13], [15], [19]. En esencia, el problema consiste en determinar los puntos de control interiores del mapeo, tratando de garantizar la inyectividad del mismo. Usualmente los puntos de control se obtienen minimizando algún funcional que mide ciertas propiedades geométricas de la malla de control. Si la región Ω es sencilla y el mapeo es bilineal esta tarea no presenta grandes dificultades. En cambio, si Ω es irregular, la complejidad de los funcionales de optimización y su naturaleza no convexa producen serios retos para la convergencia a los óptimos deseados, especialmente si no contamos con una aproximación inicial adecuada.

Con relación a la inyectividad, se conocen condiciones suficientes que son fáciles de chequear cuando el mapeo es bilineal. En la literatura se reportan también métodos eficientes para la generación de mallas de control que satisfacen estas condiciones suficientes, incluso cuando Ω tiene frontera irregular [21], [7], [5], [6], [3]. Para mapeos bicuadráticos o de mayor orden también se pueden encontrar condiciones suficientes de inyectividad [22], [23], [15]. Estas condiciones se basan en el signo de los coeficientes del Jacobiano del mapeo, escrito como una función B-spline producto tensorial. En la práctica, tales condiciones no se cumplen casi nunca si la región es irregular.

En este trabajo se propone un método para construir un mapeo que parametriza una región plana Ω con frontera irregular. Este método calcula el mapeo como un B-spline producto tensorial, asumiendo que la frontera de Ω está definida por 4 curvas B-splines, que se consideran la imagen de cada uno de los lados del cuadrado unitario. El mapeo se extiende al interior de Ω , calculando sus puntos de control interiores como los vértices de una malla estructurada de cuadriláteros. Los vértices interiores de la malla se obtienen minimizando un funcional que garantiza que la malla óptima sea convexa. La convexidad de la malla garantiza la inyectividad del mapeo bilineal, pero no basta para asegurar que el mapeo bicuadrático sea inyectivo. La condición suficiente de inyectividad para el caso bicuadrático depende adicionalmente de la convexidad de cuadriláteros que no forman parte de la malla de control. Los resultados experimentales muestran que es posible parametrizar con éxito dominios con frontera irregular utilizando un mapeo B-spline bicuadrático.

Trabajos previos

Uno de los problemas más antiguos en CAGD es la construcción de una superficie que tenga como frontera 4 curvas prefijadas, [2], [9]. Farin et al. proponen en [14] un método para resolver este problema, que se basa en los parches de Coons, pero no garantiza la inyectividad del mapeo. El pro-

blema de parametrizar un dominio plano se puede ver como un caso particular del anterior. Nguyen y Jüttler introducen en [18] un método para generar mapeos armónicos que consta de dos partes. En la primera construyen un mapeo de la región Ω al espacio paramétrico $[0, 1]^2$, mientras que en la segunda obtienen una aproximación B-spline del inverso del mapeo anterior. En este caso la inyectividad tampoco está garantizada en la práctica. Xu et al. [23] logran la inyectividad del mapeo B-spline producto tensorial en un proceso de optimización con restricciones costoso, aunque sus regiones no son muy complicadas. En [15] Gravesen et al. proponen varios métodos de parametrización utilizando B-splines producto tensorial. Estos métodos calculan los puntos interiores del mapeo minimizando diferentes funcionales. Algunos de estos funcionales son lineales y sencillos, como el basado en el modelo del muelle, pero no garantizan la inyectividad del mapeo resultante. Otros funcionales son costosos y conducen a problemas de optimización, donde es necesario imponer restricciones para garantizar la inyectividad del mapeo. En [13] Falini et al. proponen una parametrización de la región utilizando THB-splines. Si la región es compleja se descompone como muestran Xu et al. en [24], utilizando un método de esqueletonización. Una limitación de esta técnica es la pérdida de continuidad de la derivada en las zonas de unión de los subdominios. En [19] Nian y Chen proponen un método de parametrización con una función spline producto tensorial, que se comporta aproximadamente como un mapeo de Teichmüller. El cálculo de los puntos de control interiores de este mapeo requiere dos procesos de optimización. El primero utiliza un funcional convexo, pero no garantiza la inyectividad del mapeo. El segundo funcional es no convexo y emplea como condición inicial el resultado del primero. La convergencia de este método no está garantizada, aunque en regiones no muy complicadas los resultados son buenos. En todos los métodos mencionados la obtención de una malla inicial adecuada es importante para alcanzar el óptimo deseado.

Contribución

La contribución principal de este trabajo es un método para parametrizar una región plana con *frontera irregular*. El método propuesto construye un mapeo B-spline producto tensorial y calcula sus puntos de control interiores como los vértices de una malla de cuadriláteros convexos. Esto garantiza la inyectividad del mapeo en el caso bilineal. Los resultados experimentales muestran que el mapeo bicuadrático también es inyectivo, aún cuando no hay garantía teórica.

Notación

Los puntos y vectores se representan en negrita. Denotamos por $[\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \dots | \mathbf{a}_n]$ la matriz con columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ son tres puntos en el plano, entonces $\triangle(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ denota el triángulo con vértices \mathbf{A}, \mathbf{B} y \mathbf{C} .

1. Construcción de un mapeo B-spline producto tensorial

1.1 Descripción del problema

En este trabajo se asume que el dominio Ω a parametrizar es una región del plano simplemente conexa. Se supone además que la frontera de Ω es una curva suave (excepto en 4 puntos) que puede tener cambios frecuentes de convexidad, vea por ejemplo la figura 7. En ese sentido decimos que Ω es una región *con frontera irregular*. Los ejemplos naturales son lagos, embalses, bahías, líneas costeras, demarcaciones políticas, etc.

Denotamos por $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ el mapeo que queremos construir entre el cuadrado unitario $U = \{(\xi, \eta), 0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$ y la región física Ω , o sea, la parametrización de Ω ,

$$\mathbf{x} : U \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Vamos a construir $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ como una función *spline producto tensorial*, que transforma los lados consecutivos de U en segmentos consecutivos de la frontera de Ω , previamente dividida en 4 partes. Un mapeo B-spline $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ producto tensorial de orden $k \times p$ se escribe como [11]:

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{P}_{i,j} B_{i,\xi}^k(\xi) B_{j,\eta}^p(\eta) \quad (2)$$

donde $B_{i,\xi}^k(\xi)$, $i = 1, \dots, n$ son los B-splines de orden k para la sucesión de nodos $t^\xi = \{t_1^\xi, t_2^\xi, \dots, t_{n+k}^\xi\}$ con $t_1^\xi \leq t_2^\xi \leq \dots \leq t_{n+k}^\xi$ y $t_k^\xi = 0, t_{n+1}^\xi = 1$ y similarmente $B_{j,\eta}^p(\eta)$, $j = 1, \dots, m$ son los B-splines de orden p para la sucesión de nodos $t^\eta = \{t_1^\eta, t_2^\eta, \dots, t_{m+p}^\eta\}$ con $t_1^\eta \leq t_2^\eta \leq \dots \leq t_{m+p}^\eta$ y $t_p^\eta = 0, t_{m+1}^\eta = 1$.

En nuestro problema, los $\mathbf{P}_{i,j}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ en (2) son puntos en el plano, llamados *puntos de control*. Una vez escogidos los órdenes k, p y las sucesiones de nodos t^ξ y t^η , los puntos de control $\mathbf{P}_{i,j}$ definen completamente el mapeo $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ y en la práctica se convierten en las incógnitas del problema. La malla \mathbf{P} de cuadriláteros que tiene como vértices los puntos $\mathbf{P}_{i,j}$ y como aristas los segmentos que unen cada $\mathbf{P}_{i,j}$ con los puntos $\mathbf{P}_{i-1,j}$, $\mathbf{P}_{i,j-1}$, $\mathbf{P}_{i+1,j}$, $\mathbf{P}_{i,j+1}$ se llama *malla de control*. Nótese que \mathbf{P} es una malla *estructurada* pues cada vértice interior se une por aristas con la misma cantidad de vértices.

El mapeo $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ está compuesto por $(n - k + 1) \times (m - p + 1)$ parches. Su inyectividad puede fallar globalmente o localmente. El primer caso ocurre cuando existe al menos una pareja de parches diferentes que se intersecan. Debido a la propiedad de la envoltura convexa de los B-splines [11], es fácil ver que si la malla de control no tiene autointersecciones, entonces los parches diferentes no se intersecan. Asumiendo que \mathbf{P} no tiene autointersecciones, aún es posible que falle la inyectividad local, es decir que algún parche del mapeo no sea inyectivo.

Un mapeo $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ es localmente inyectivo si y solo si la

matriz Jacobiana de \mathbf{x} ,

$$J_{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_\xi \mid \mathbf{x}_\eta) = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix}$$

es no singular en U . Esto significa que para construir una parametrización válida de Ω debemos exigir que el Jacobiano¹ de \mathbf{x}

$$\det J_{\mathbf{x}} = |J_{\mathbf{x}}| = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (3)$$

no se anule en ningún punto de U .

En este trabajo vamos a considerar dos mapeos particulares: el mapeo B-spline bilineal, donde $k = p = 2$, y el mapeo bicuadrático, donde $k = p = 3$.

1.2 Mapeo B-spline bilineal

Para construir un mapeo B-spline *bilineal* $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ con nm puntos de control $\mathbf{P}_{i,j}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ debemos escoger previamente las sucesiones de nodos $t^\xi = \{t_1^\xi, t_2^\xi, \dots, t_{n+2}^\xi\}$ y $t^\eta = \{t_1^\eta, t_2^\eta, \dots, t_{m+2}^\eta\}$, que definen las bases $B_{i,\xi}^2(\xi)$, $i = 1, \dots, n$ y $B_{j,\eta}^2(\eta)$, $j = 1, \dots, m$ de B-splines de orden 2 en las direcciones ξ y η respectivamente. En nuestro trabajo asumimos que

$$t^\xi = \{0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 1\} \text{ con } \xi_i = \frac{i-1}{n-1}, \quad (4)$$

$$t^\eta = \{0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, 1\} \text{ con } \eta_j = \frac{j-1}{m-1}, \quad (5)$$

Si $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ pertenece al espacio $S_{2,2} := S_{2,t^\xi} \otimes S_{2,t^\eta}$ de las funciones spline bilineales para las sucesiones de nodos (4) y (5) entonces puede escribirse como,

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{P}_{i,j} B_{i,\xi}^2(\xi) B_{j,\eta}^2(\eta) \quad (6)$$

Nótese que los nodos interiores, también llamados puntos de ruptura, son *equidistantes* y los nodos extremos están repetidos. La figura 1 muestra esta base de B-splines lineales.

Lema 1. *El mapeo bilineal (6) satisface,*

$$\mathbf{x}(\xi_i, \eta_j) = \mathbf{P}_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m \quad (7)$$

Además, para todo $0 \leq \alpha \leq 1$ se cumple que,

$$\mathbf{x}(\alpha \xi_i + (1 - \alpha) \xi_{i+1}, \eta_j) = \alpha \mathbf{P}_{i,j} + (1 - \alpha) \mathbf{P}_{i+1,j}, \quad (8)$$

$$\mathbf{x}(\xi_i, \alpha \eta_j + (1 - \alpha) \eta_{j+1}) = \alpha \mathbf{P}_{i,j} + (1 - \alpha) \mathbf{P}_{i,j+1} \quad (9)$$

Antes de demostrar el Lema es importante señalar que, desde el punto de vista geométrico, las identidades (7), (8) y (9) significan que el mapeo $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ transforma la malla en U con vértices (ξ_i, η_j) $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ en la malla de control \mathbf{P} .

¹Determinante de la matriz Jacobiana

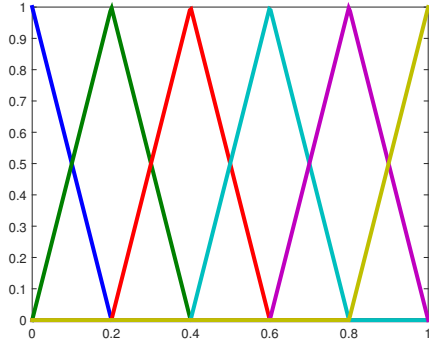


Figura 1. Bases de B-splines lineales con nodos equidistantes.

Demostración. Para simplificar la notación, a partir de ahora y cuando no de lugar a confusión, omitiremos la referencia a los nodos en las bases, es decir, $B_{i,t}^2(\xi)$ será $B_i^2(\xi)$ y similarmente $B_{j,t}^2(\eta)$ se denotará como $B_j^2(\eta)$. Debido al soporte compacto de las funciones B-spline [11], si nos restringimos a $(\xi, \eta) \in [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, m-1$, la expresión (6), se reduce a

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{r=i}^{i+1} \sum_{s=j}^{j+1} \mathbf{P}_{r,s} B_r^2(\xi) B_s^2(\eta) \quad (10)$$

Los nodos equidistantes generan las bases que se observan en la figura 1. Nótese que si nos restringimos al intervalo $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$ entonces

$$B_i^2(\xi) = \frac{\xi - \xi_{i+1}}{\xi_i - \xi_{i+1}}, \quad B_{i+1}^2(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i}, \quad (11)$$

Por lo tanto

$$B_i^2(\xi_i) = 1, \quad B_{i+1}^2(\xi_i) = 0, \quad B_i^2(\xi_{i+1}) = 0, \quad B_{i+1}^2(\xi_{i+1}) = 1 \quad (12)$$

De manera similar se cumple que

$$B_j^2(\eta_j) = 1, \quad B_{j+1}^2(\eta_j) = 0, \quad B_j^2(\eta_{j+1}) = 0, \quad B_{j+1}^2(\eta_{j+1}) = 1 \quad (13)$$

Teniendo en cuenta (12) y (13), de (10) obtenemos (7). Finalmente, obsérvese que si $w := \alpha \xi_i + (1 - \alpha) \xi_{i+1}$, entonces de (10) llegamos a

$$\mathbf{x}(w, \eta_j) = \sum_{r=i}^{i+1} \sum_{s=j}^{j+1} \mathbf{P}_{r,s} B_r^2(w) B_s^2(\eta_j)$$

Pero de (11) resulta que $B_i^2(w) = \alpha$ y $B_{i+1}^2(w) = 1 - \alpha$. Luego,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(w, \eta_j) &= \mathbf{P}_{i,j} \alpha B_j^2(\eta_j) + \mathbf{P}_{i+1,j} (1 - \alpha) B_j^2(\eta_j) + \dots \\ &+ \mathbf{P}_{i,j+1} \alpha B_{j+1}^2(\eta_j) + \mathbf{P}_{i+1,j+1} (1 - \alpha) B_{j+1}^2(\eta_j) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (13) de esta última expresión llegamos (8). La demostración de (9) es similar y se omite por brevedad. \square

Proposición 1. El Jacobiano del mapeo bilineal (6) es una función B-spline bilineal. Más aún para $(\xi, \eta) \in [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, m-1$ se tiene que

$$\det J_{\mathbf{x}}(\xi, \eta) = \frac{\sum_{r=i}^{i+1} \sum_{s=j}^{j+1} \det[\mathbf{h}_{i,s} | \mathbf{v}_{r,j}] B_r^2(\xi) B_s^2(\eta)}{(n-1)(m-1)} \quad (14)$$

donde

$$\mathbf{h}_{i,s} := (h_{i,s}^x, h_{i,s}^y)^t = \mathbf{P}_{i+1,s} - \mathbf{P}_{i,s} \quad (15)$$

$$i = 1, \dots, n-1, \quad s = 1, \dots, m$$

$$\mathbf{v}_{r,j} := (v_{r,j}^x, v_{r,j}^y)^t = \mathbf{P}_{r,j+1} - \mathbf{P}_{r,j} \quad (16)$$

$$r = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m-1$$

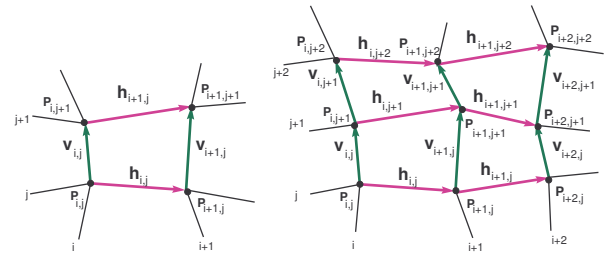


Figura 2. Puntos de control de la imagen de $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$ por el mapeo B-spline $\mathbf{x}(\xi, \eta)$. Izq: 4 puntos para el mapeo bilineal. Derecha: 9 puntos para el mapeo bicuadrático. Vectores “verticales” (verdes) y “horizontales” (magenta) que participan en la expresión del Jacobiano de $\mathbf{x}(\xi, \eta)$.

Demostración. Para $(\xi, \eta) \in [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, m-1$, el mapeo $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ está dado por (10). Derivando directamente en esta expresión llegamos a,

$$\mathbf{x}_{\xi}(\xi, \eta) = \sum_{r=i}^{i+1} \sum_{s=j}^{j+1} \mathbf{P}_{r,s} B_{s,t}^2(\eta) \frac{d}{d\xi} B_{r,t}^2(\xi) \quad (17)$$

$$\mathbf{x}_{\eta}(\xi, \eta) = \sum_{r=i}^{i+1} \sum_{s=j}^{j+1} \mathbf{P}_{r,s} B_{r,t}^2(\xi) \frac{d}{d\eta} B_{s,t}^2(\eta) \quad (18)$$

Teniendo en cuenta (11) y el hecho de que los nodos son equidistantes, se obtiene

$$\frac{d}{d\xi} B_i^2(\xi) |_{[\xi_i, \xi_{i+1}]} = -\frac{1}{\xi_{i+1} - \xi_i} = -\frac{1}{n-1} \quad (19)$$

$$\frac{d}{d\xi} B_{i+1}^2(\xi) |_{[\xi_i, \xi_{i+1}]} = \frac{1}{\xi_{i+1} - \xi_i} = \frac{1}{n-1} \quad (20)$$

Luego, sustituyendo (19) en (17) y (20) en (18) llegamos a que para $(\xi, \eta) \in [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, m-1$

$$\mathbf{x}_{\xi}(\xi, \eta) = \frac{1}{n-1} [\mathbf{h}_{i,j} B_j^2(\eta) + \mathbf{h}_{i,j+1} B_{j+1}^2(\eta)] \quad (21)$$

$$\mathbf{x}_\eta(\xi, \eta) = \frac{1}{m-1} [\mathbf{v}_{i,j} B_i^2(\xi) + \mathbf{v}_{i+1,j} B_{i+1}^2(\xi)] \quad (22)$$

Finalmente, sustituyendo (21) y (22) en (3) obtenemos (14). \square

En la figura 2 vemos señalados los vectores $\mathbf{h}_{i,j}$ y $\mathbf{h}_{i,j+1}$ (de color magenta) y los vectores $\mathbf{v}_{i,j}$ y $\mathbf{v}_{i+1,j}$ (de color verde), involucrados en las expresiones (21) y (22) de las derivadas parciales del mapeo $\mathbf{x}(\xi, \eta)$.

Observación

- Los coeficientes de los B-splines lineales en la expresión (14) del Jacobiano son determinantes de matrices de orden 2. Las columnas de cada una de estas matrices son diferencias “horizontales” y “verticales” de puntos de control consecutivos (vea (15) y (16) y la figura 2). Por lo tanto, cada determinante en (14) no es más que el doble del área signada del triángulo definido por un vector “horizontal” y uno “vertical”, que tienen un vértice común. Si las áreas de todos los triángulos tienen el mismo signo entonces de (14) resulta inmediato que el Jacobiano no cambia de signo y en consecuencia $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ es inyectivo.

Definición 1. Sea \mathbf{P} una malla de $(n-1)(m-1)$ cuadriláteros c_{ij} , $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, m-1$, donde c_{ij} tiene vértices $\mathbf{P}_{i,j}, \mathbf{P}_{i+1,j}, \mathbf{P}_{i+1,j+1}$ y $\mathbf{P}_{i,j+1}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Decimos que \mathbf{P} es una malla convexa si todos los cuadriláteros c_{ij} son convexos.

Para verificar en la práctica la convexidad de una malla se subdivide cada cuadrilátero c_{ij} en los cuatro triángulos obtenidos al considerar las dos diagonales del cuadrilátero:

$$\begin{aligned} t_{ij}^1 &= \triangle(\mathbf{P}_{i,j}, \mathbf{P}_{i+1,j}, \mathbf{P}_{i+1,j+1}), \\ t_{ij}^2 &= \triangle(\mathbf{P}_{i,j}, \mathbf{P}_{i+1,j+1}, \mathbf{P}_{i,j+1}), \\ t_{ij}^3 &= \triangle(\mathbf{P}_{i,j}, \mathbf{P}_{i+1,j}, \mathbf{P}_{i,j+1}), \\ t_{ij}^4 &= \triangle(\mathbf{P}_{i+1,j}, \mathbf{P}_{i+1,j+1}, \mathbf{P}_{i,j+1}) \end{aligned}$$

En todos los triángulos consideramos como sentido positivo el contrario a las manecillas del reloj, vea la figura 3. Es fácil ver que c_{ij} es un cuadrilátero es convexo si y sólo si todos los triángulos $t_{ij}^1, t_{ij}^2, t_{ij}^3$ y t_{ij}^4 tiene área positiva. A continuación mostramos que la convexidad de la malla de control de un mapeo bilineal garantiza su inyectividad.

Teorema 1. Condición suficiente de inyectividad

Supongamos que la malla de control \mathbf{P} del mapeo bilineal $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ dado por (6) es convexa. Entonces $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ es inyectivo.

Demostración. De (14) resulta que para $(\xi, \eta) \in [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, m-1$ el Jacobiano de $\mathbf{x}(\xi, \eta)$, $\det J_{\mathbf{x}}(\xi, \eta)$ es una función B-spline bilineal con coeficientes

$$\frac{\det[\mathbf{h}_{i,j}|\mathbf{v}_{i,j}]}{(n-1)(m-1)} = \frac{2 \text{área}(t_{ij}^1)}{(n-1)(m-1)}$$

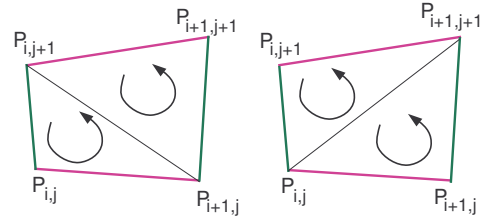


Figura 3. Áreas de los triángulos respetando la orientación.

$$\frac{\det[\mathbf{h}_{i,j+1}|\mathbf{v}_{i,j}]}{(n-1)(m-1)} = \frac{2 \text{área}(t_{ij}^2)}{(n-1)(m-1)}$$

$$\frac{\det[\mathbf{h}_{i,j}|\mathbf{v}_{i+1,j}]}{(n-1)(m-1)} = \frac{2 \text{área}(t_{ij}^3)}{(n-1)(m-1)}$$

$$\frac{\det[\mathbf{h}_{i,j+1}|\mathbf{v}_{i+1,j}]}{(n-1)(m-1)} = \frac{2 \text{área}(t_{ij}^4)}{(n-1)(m-1)}$$

Pero por hipótesis \mathbf{P} es una malla convexa. Por tanto, las áreas de los triángulos $t_{ij}^1, t_{ij}^2, t_{ij}^3$ y t_{ij}^4 son positivas. En consecuencia, teniendo en cuenta que los B-splines son funciones positivas, podemos concluir que $\det J_{\mathbf{x}}(\xi, \eta) > 0$ para todo $(\xi, \eta) \in [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, m-1$, lo cual garantiza la inyectividad de $\mathbf{x}(\xi, \eta)$. \square

1.3 Mapeo B-spline bicuadrático

De manera similar a como procedimos en el caso bilineal, la construcción de un mapeo $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ B-spline bicuadrático con nm puntos de control $\mathbf{P}_{i,j}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, requiere que prefijemos previamente las sucesiones de nodos $t^\xi = \{t_1^\xi, t_2^\xi, \dots, t_{n+3}^\xi\}$ y $t^\eta = \{t_1^\eta, t_2^\eta, \dots, t_{m+3}^\eta\}$, que definen las bases $B_{i,t^\xi}^3(\xi)$, $i = 1, \dots, n$ y $B_{j,t^\eta}^3(\eta)$, $j = 1, \dots, m$ de los B-splines de orden 3 en las direcciones ξ y η respectivamente.

En este trabajo vamos a asumir que

$$t^\xi = \{0, 0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, 1, 1\} \text{ con } \xi_i = \frac{i-1}{n-2}, \quad (23)$$

$$t^\eta = \{0, 0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-1}, 1, 1\} \text{ con } \eta_j = \frac{j-1}{m-2}, \quad (24)$$

Nótese que los puntos de ruptura nuevamente son equidistantes, mientras que los nodos extremos tienen multiplicidad 3. Además

$$\xi_i = t_{i+2}^\xi, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (25)$$

$$\eta_j = t_{j+2}^\eta, \quad j = 1, \dots, m-1 \quad (26)$$

La figura 4 muestra la base de 7 de B-splines cuadráticos con nodos uniformes.

Cada función del espacio $S_{3,3} := S_{3,t^\xi} \otimes S_{3,t^\eta}$ de las funciones spline bicuadráticas para las sucesiones de nodos (23) y (24) está compuesta por $(n-2)(m-2)$ parches bicuadráticos. Además, si $\mathbf{x}(\xi, \eta) \in S_{3,3}$ entonces se puede escribir como,

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{P}_{i,j} B_{i,t^\xi}^3(\xi) B_{j,t^\eta}^3(\eta) \quad (27)$$

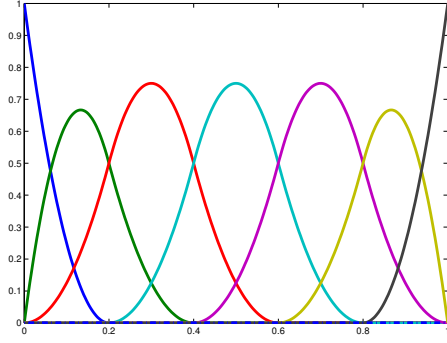


Figura 4. Base de B-splines cuadráticos con nodos equidistantes.

Lema 2. Para el mapeo bicuadrático (27) se cumple que,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\xi_1, \eta_1) &= \mathbf{P}_{1,1} \\ \mathbf{x}(\xi_1, \eta_{m-1}) &= \mathbf{P}_{1,m} \\ \mathbf{x}(\xi_{n-1}, \eta_1) &= \mathbf{P}_{n,1} \\ \mathbf{x}(\xi_{n-1}, \eta_{m-1}) &= \mathbf{P}_{n,m} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\xi_i, \eta_1) &= \frac{1}{2}(\mathbf{P}_{i,1} + \mathbf{P}_{i+1,1}) \\ \mathbf{x}(\xi_i, \eta_{m-1}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{P}_{i,m} + \mathbf{P}_{i+1,m}) \\ i &= 2, \dots, n-2 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\xi_1, \eta_j) &= \frac{1}{2}(\mathbf{P}_{1,j} + \mathbf{P}_{1,j+1}), \\ \mathbf{x}(\xi_{n-1}, \eta_j) &= \frac{1}{2}(\mathbf{P}_{n,j} + \mathbf{P}_{n,j+1}), \\ j &= 2, \dots, m-2 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\mathbf{x}(\xi_i, \eta_j) = \frac{1}{4}(\mathbf{P}_{i,j} + \mathbf{P}_{i+1,j} + \mathbf{P}_{i,j+1} + \mathbf{P}_{i+1,j+1}) \quad i=2, \dots, n-2, j=2, \dots, m-2 \quad (31)$$

Demostración. Sea $(\xi, \eta) \in [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$, $i=2, \dots, n-2$, $j=2, \dots, m-2$. Entonces teniendo en cuenta que los B-splines son funciones de soporte compacto [11], de (27) llegamos a que,

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{r=i}^{i+2} \sum_{s=j}^{j+2} \mathbf{P}_{r,s} B_r^3(\xi) B_s^3(\eta) \quad (32)$$

Por otro lado, a partir de la uniformidad de los puntos de ruptura y teniendo en cuenta (25) y (26), se puede comprobar que $B_i^3(\xi_i) = B_{i+1}^3(\xi_i) = \frac{1}{2}$, $B_{i+2}^3(\xi_i) = 0$ mientras que $B_j^3(\eta_j) = B_{j+1}^3(\eta_j) = \frac{1}{2}$, $B_{j+2}^3(\eta_j) = 0$. De manera similar, es fácil verificar que $B_{i+1}^3(\xi_{i+1}) = B_{i+2}^3(\xi_{i+1}) = \frac{1}{2}$, $B_i^3(\xi_{i+1}) = 0$ y $B_{j+1}^3(\eta_{j+1}) = B_{j+2}^3(\eta_{j+1}) = \frac{1}{2}$, $B_j^3(\eta_{j+1}) = 0$. Finalmente, sustituyendo estas expresiones en (32) se obtiene (31). El resto de las expresiones (28) - (30) se demuestran de manera similar. \square

Las funciones B-spline cuadráticas para la sucesión de nodos (23) no tienen la misma uniformidad que las lineales con nodos (4). En el caso cuadrático las dos primeras y las dos últimas difieren de las restantes, que son iguales salvo traslaciones (ver figura 4). Las derivadas $\frac{dB_i^3(\xi)}{d\xi}$ no son tan

fáciles de deducir como en el caso lineal, sin embargo es conocido [11], que se pueden expresar como combinación lineal de bases lineales con la misma sucesión de nodos (23),

$$\frac{dB_i^3(\xi)}{d\xi} = 2 \left(\frac{B_i^2(\xi)}{t_{i+2}^\xi - t_i^\xi} - \frac{B_{i+1}^2(\xi)}{t_{i+3}^\xi - t_{i+1}^\xi} \right) \quad (33)$$

Para el caso de nodos uniformes (23) esta última expresión toma la forma,

$$\frac{dB_i^3(\xi)}{d\xi} = \begin{cases} -2(n-2)B_2^2(\xi) & i=1 \\ (n-2)(2B_2^2(\xi) - B_3^2(\xi)) & i=2 \\ (n-2)(B_i^2(\xi) - B_{i+1}^2(\xi)) & 3 \leq i \leq n-2 \\ (n-2)(B_{n-1}^2(\xi) - 2B_n^2(\xi)) & i=n-1 \\ 2(n-2)B_n^2(\xi) & i=n \end{cases} \quad (34)$$

Una expresión similar se obtiene para las derivadas de los B-splines $B_j^3(\eta)$, $j=1, \dots, m$ con la sucesión de nodos (24).

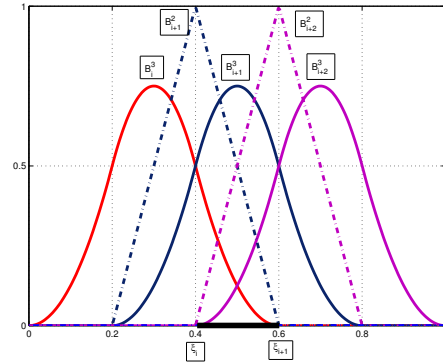


Figura 5. B-splines cuadráticos y lineales con nodos (23) que no se anulan en $[\xi_i, \xi_{i+1}]$.

Lema 3. Sea $U_{ij} := [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$, $i=1, \dots, n-2$, $j=1, \dots, m-2$. Para $\forall (\xi, \eta) \in U_{ij}$, las derivadas parciales del mapeo bicuadrático (27) con nodos (23) y (24) están dadas por,

$$\mathbf{x}_\xi|_{U_{i,j}} = (n-2) \sum_{r=i}^{i+1} \sum_{s=j}^{j+2} \gamma_r \mathbf{h}_{r,s} B_{r+1}^2(\xi) B_s^3(\eta) \quad (35)$$

$$\mathbf{x}_\eta|_{U_{i,j}} = (m-2) \sum_{r=i}^{i+2} \sum_{s=j}^{j+1} \delta_s \mathbf{v}_{r,s} B_{s+1}^2(\eta) B_r^3(\xi) \quad (36)$$

donde

$$\gamma_r = \begin{cases} 2, & r=1 \\ 1, & 2 \leq r \leq n-2 \\ 2, & r=n-1 \end{cases} \quad (37)$$

y

$$\delta_s = \begin{cases} 2, & s=1 \\ 1, & 2 \leq s \leq m-2 \\ 2, & s=m-1 \end{cases} \quad (38)$$

Demostración, vea el anexo.

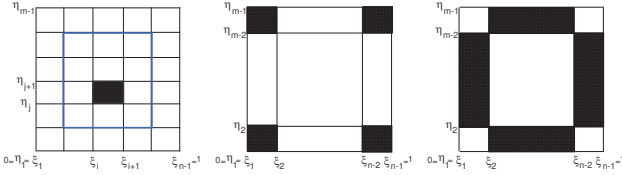


Figura 6. Espacio de parámetros U dividido en los rectángulos $U_{i,j} = [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$. Izquierda $U_{i,j}, i = 2, \dots, n-3, j = 2, \dots, m-3$ es un rectángulo interior. Centro: $U_{i,j}$ es una de las 4 esquinas de U . Derecha: $U_{i,j}$ es un rectángulo de la frontera que no es esquina.

Proposición 2. Para $(\xi, \eta) \in [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$, $i = 1, \dots, n-2, j = 1, \dots, m-2$, el Jacobiano del mapeo bicuadrático (27) está dado por,

$$\frac{\det J_{\mathbf{x}}(\xi, \eta)}{(n-2)(m-2)} = \frac{|J_{\mathbf{x}}(\xi, \eta)|}{(n-2)(m-2)} = \sum_{r=i}^{i+2} \sum_{s=j}^{j+2} \sum_{r'=i}^{i+1} \sum_{s'=j}^{j+1} \alpha_{r',s'} D_{r',s,r,s'} B_r^3(\xi) B_s^3(\eta) B_{r'+1}^2(\xi) B_{s'+1}^2(\eta) \quad (39)$$

donde

$$\alpha_{r',s'} = \begin{cases} r' \setminus s' & \parallel & 1 & 2, \dots, m-2 & m-1 \\ \hline 1 & \parallel & 4 & 2 & 4 \\ 2, \dots, n-2 & \parallel & 2 & 1 & 2 \\ \hline n-1 & \parallel & 4 & 2 & 4 \end{cases} \quad (40)$$

$$y D_{r',s,r,s'} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{r',s} & \mathbf{v}_{r,s'} \end{bmatrix}$$

Demostración. La expresión (39) se obtiene sustituyendo en (3) la fórmula (35) para $\mathbf{x}_{\xi} = (x_{\xi}, y_{\xi})^t$ y la fórmula (36) para $\mathbf{x}_{\eta} = (x_{\eta}, y_{\eta})^t$. Los detalles se omiten por brevedad. \square

Teorema 2 (Condición suficiente de inyectividad). *Supongamos que los puntos $\mathbf{P}_{i,j}$ $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ de la malla de control del mapeo bicuadrático (27) con nodos (23) y (24) satisfacen*

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{r',s} & \mathbf{v}_{r,s'} \end{bmatrix} > 0 \quad (41)$$

para $r = i, i+1, i+2, r' = i, i+1, i = 1, \dots, n-2$ y $s = j, j+1, j+2, s' = j, j+1, j = 1, \dots, m-2$, donde $\mathbf{h}_{i,s}$ y $\mathbf{v}_{r,j}$ están dados por (15) y (16) respectivamente. Entonces $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ es inyectivo.

Demostración. Para $(\xi, \eta) \in [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$ con $i = 1, \dots, n-2, j = 1, \dots, m-2$, el Jacobiano del mapeo bicuadrático (27) está dado por (39). Teniendo en cuenta que los B-splines son funciones no negativas y que por hipótesis los determinantes (41) son positivos, de (39) podemos concluir que $\det J_{\mathbf{x}}(\xi, \eta) > 0$. Por tanto, $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ es inyectivo. \square

Observaciones

1. La expresión (39) involucra 36 sumandos, cada uno asociado a un determinante en particular. De ese total, solo 16 determinantes corresponden a áreas de triángulos definidos por las dos diagonales de cada uno de los 4 cuadriláteros de la malla de control involucrados, vea la figura 2. Los 20 determinantes restantes no corresponden a ningún cuadrilátero físico de la malla de control. Por eso, en el caso bicuadrático es más difícil dar una interpretación geométrica de la condición suficiente de inyectividad.
2. La condición suficiente (41) es mejor que la propuesta en [22], donde se analizan todos los vectores definidos por las diferencias “horizontales” y las diferencias “verticales” de puntos de control consecutivos. Sin embargo, (41) es aún una condición suficiente muy restrictiva pues muchos mapeos inyectivos no la cumplen.
3. Para obtener una condición suficiente mejor hay que tener en cuenta que el Jacobiano (39) del mapeo bicuadrático es una función spline bicúbica [15], [23]. En consecuencia, puede escribirse como combinación lineal de la base bicúbica, formada por solo 16 funciones. Exigiendo que los coeficientes de esta combinación lineal no cambien de signo se obtiene una condición suficiente de inyectividad menos restrictiva que (41).

2. Cálculo de los puntos de control

En esta sección describimos el procedimiento para calcular los puntos de control del mapeo B-spline bicuadrático que parametriza Ω . Este procedimiento es diferente para los puntos de control de la frontera y para los puntos de control interiores.

2.1 Puntos de control de la frontera

El mapeo B-spline bicuadrático $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ debe transformar la frontera de ∂U en $\partial \Omega$. En este trabajo se asume que Ω es una región acotada del plano cuya frontera está descrita por 4 curvas B-spline cuadráticas. Más precisamente, suponemos que se tienen 4 puntos distinguidos: $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}$ y \mathbf{T} en $\partial \Omega$, de modo que ésta queda dividida en 4 secciones: la “sur” con extremos \mathbf{Q}, \mathbf{R} , la “norte” con extremos \mathbf{T}, \mathbf{S} , la “oeste” con extremos \mathbf{Q}, \mathbf{T} y la “este” con extremos \mathbf{R}, \mathbf{S} , vea la figura 7.

Denotamos por $\mathbf{x}_t(\xi), \mathbf{x}_b(\xi)$ las curvas de la frontera norte y sur respectivamente, dadas por

$$\mathbf{x}_t(\xi) = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i^t B_i^3(\xi), \quad \mathbf{x}_b(\xi) = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i^b B_i^3(\xi) \quad (42)$$

donde $B_i^3(\xi), i = 1, \dots, n$ son los B-splines cuadráticos para la sucesión de nodos (23). De manera similar, denotamos por

$\mathbf{x}_l(\eta)$, $\mathbf{x}_r(\eta)$ las curvas de la frontera oeste y este respectivamente, dadas por

$$\mathbf{x}_l(\eta) = \sum_{j=1}^m \mathbf{V}_j^l B_j^3(\eta), \quad \mathbf{x}_r(\eta) = \sum_{j=1}^m \mathbf{V}_j^r B_j^3(\eta) \quad (43)$$

donde $B_j^3(\eta)$, $j = 1, \dots, m$ son los B-splines cuadráticos para la sucesión de nodos (24).

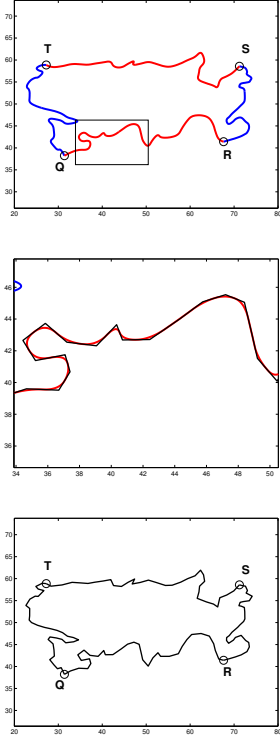


Figura 7. Mapa del Lago Titicaca, región Ω con frontera irregular. Arriba: Spline cuadrático que describe la frontera de Ω , donde se han escogido 4 puntos: \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{S} y \mathbf{T} . Centro: Zoom de un segmento del spline (rojo) y su polígono de control (negro). Abajo: región Ω' definida por el polígono de control de las curvas B-spline de la frontera.

Nótese que debido a la repetición de los nodos extremos en t^ξ , se cumple que

$$B_1^3(0) = 1, \quad B_i^3(0) = 0, \quad i = 2, \dots, n \quad (44)$$

$$B_n^3(1) = 1, \quad B_i^3(1) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (45)$$

Luego, $\mathbf{x}_l(0) = \mathbf{H}_1^l$, $\mathbf{x}_l(1) = \mathbf{H}_n^l$, $\mathbf{x}_b(0) = \mathbf{H}_1^b$ y $\mathbf{x}_b(1) = \mathbf{H}_n^b$. En consecuencia, para garantizar que la curva $\mathbf{x}_l(\xi)$ interpole los puntos \mathbf{T} , \mathbf{S} , y que la curva $\mathbf{x}_b(\xi)$ interpole los puntos \mathbf{Q} , \mathbf{R} , debemos tomar $\mathbf{H}_1^l = \mathbf{T}$, $\mathbf{H}_n^l = \mathbf{S}$, $\mathbf{H}_1^b = \mathbf{Q}$ y $\mathbf{H}_n^b = \mathbf{R}$.

Similarmente, para la sucesión de nodos t^η tenemos que,

$$B_1^3(0) = 1, \quad B_j^3(0) = 0, \quad j = 2, \dots, m \quad (46)$$

$$B_m^3(1) = 1, \quad B_j^3(1) = 0, \quad j = 1, \dots, m-1 \quad (47)$$

Luego, $\mathbf{x}_l(0) = \mathbf{V}_1^l$, $\mathbf{x}_l(1) = \mathbf{V}_m^l$, $\mathbf{x}_r(0) = \mathbf{V}_1^r$ y $\mathbf{x}_r(1) = \mathbf{V}_m^r$. Esto significa que si queremos imponer que la curva $\mathbf{x}_l(\eta)$ interpole los puntos \mathbf{Q} , \mathbf{T} y que la curva $\mathbf{x}_r(\eta)$ interpole los puntos \mathbf{R} , \mathbf{S} entonces debemos tomar $\mathbf{V}_1^l = \mathbf{Q}$, $\mathbf{V}_m^l = \mathbf{T}$, $\mathbf{V}_1^r = \mathbf{R}$ y $\mathbf{V}_m^r = \mathbf{S}$.

Nuestro próximo objetivo es seleccionar los puntos de control de la frontera del mapeo bicuadrático $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ de modo que las curvas $\mathbf{x}_l(\xi)$, $\mathbf{x}_b(\xi)$, $\mathbf{x}_l(\eta)$ y $\mathbf{x}_r(\eta)$ sean las imágenes por $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ de los lados del cuadrado unitario U .

En el siguiente Lema demostramos que si tomamos como puntos de control de la frontera del mapeo B-spline bicuadrático (27) los puntos de control de las 4 curvas B-spline que definen $\partial\Omega$, entonces $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ transforma ∂U en $\partial\Omega$.

Lema 4. Sea $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ el mapeo B-spline bicuadrático (27) con puntos de control,

$$\mathbf{P}_{i,1} = \mathbf{H}_i^b, \quad \mathbf{P}_{i,m} = \mathbf{H}_i^l, \quad i = 1, \dots, n \quad (48)$$

$$\mathbf{P}_{1,j} = \mathbf{V}_j^l, \quad \mathbf{P}_{n,j} = \mathbf{V}_j^r, \quad j = 1, \dots, m \quad (49)$$

donde

$$\mathbf{H}_1^l = \mathbf{T}, \quad \mathbf{H}_n^l = \mathbf{S}, \quad \mathbf{H}_1^b = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{H}_n^b = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{V}_1^l = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{V}_m^l = \mathbf{T}, \quad \mathbf{V}_1^r = \mathbf{R}, \quad \mathbf{V}_m^r = \mathbf{S}$$

Entonces

$$\mathbf{x}(\xi, 0) = \mathbf{x}_b(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (50)$$

$$\mathbf{x}(\xi, 1) = \mathbf{x}_l(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (51)$$

$$\mathbf{x}(0, \eta) = \mathbf{x}_l(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (52)$$

$$\mathbf{x}(1, \eta) = \mathbf{x}_r(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (53)$$

Además,

$$\mathbf{x}(0, 0) = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{x}(1, 0) = \mathbf{R}, \quad \mathbf{x}(0, 1) = \mathbf{T} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}(1, 1) = \mathbf{S}.$$

Demostración. Evaluando (27) en $\eta = 0$ y teniendo en cuenta (46) obtenemos

$$\mathbf{x}(\xi, 0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{P}_{i,j} B_i^3(\xi) B_j^3(0) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_{i,1} B_i^3(\xi)$$

Luego, de (48) y la expresión para \mathbf{x}_b en (42) llegamos a

$$\mathbf{x}(\xi, 0) = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i^b B_i^3(\xi) = \mathbf{x}_b(\xi)$$

En particular, para $\xi = 0$ y $\xi = 1$, de esta última expresión resulta que $\mathbf{x}(0, 0) = \mathbf{x}_b(0) = \mathbf{Q}$, $\mathbf{x}(1, 0) = \mathbf{x}_b(1) = \mathbf{R}$, con lo cual queda probado (50) y la interpolación de los puntos \mathbf{Q} y \mathbf{R} . Por otra parte, si evaluamos (27) en $\eta = 1$, tenemos en cuenta (47) y la expresión para \mathbf{x}_l en (42) llegamos a,

$$\mathbf{x}(\xi, 1) = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i^l B_i^3(\xi) = \mathbf{x}_l(\xi)$$

Luego, para $\xi = 0$ y $\xi = 1$, se cumple que $\mathbf{x}(0, 1) = \mathbf{x}_l(0) = \mathbf{T}$, $\mathbf{x}(1, 1) = \mathbf{x}_l(1) = \mathbf{S}$, con lo cual hemos probado (51) y la interpolación de los puntos \mathbf{S} y \mathbf{T} . La demostración de (52) y (53) es similar y se omite. \square

2.2 Puntos de control interiores

En esta sección describimos muy brevemente el método que se emplea para calcular los puntos de control interiores del mapeo B-spline bicuadrático.

Sea Ω' la región del plano cuya frontera es la poligonal definida por la unión de los puntos de control de las curvas $\mathbf{x}_l(\xi)$, $\mathbf{x}_b(\xi)$, $\mathbf{x}_l(\eta)$ y $\mathbf{x}_r(\eta)$. Nótese que según el Lema 4 estos son los puntos de control de la frontera del mapeo B-spline bicuadrático (27). En otras palabras, $\partial\Omega'$ está formada por cuatro poligonales: la “sur” con vértices $\mathbf{P}_{i,1}$, $i = 1, \dots, n$, la “norte” con vértices $\mathbf{P}_{i,m}$, $i = 1, \dots, n$, la “oeste” con vértices $\mathbf{P}_{1,j}$, $j = 1, \dots, m$ y la “este” con vértices $\mathbf{P}_{n,j}$, $j = 1, \dots, m$. Además, debido a la propiedad de variación reducida de los B-splines [11], se puede afirmar que si la frontera de Ω es irregular entonces la de Ω' también lo es.

Los puntos de control interiores de $\mathbf{x}(\xi, \eta)$, es decir los puntos \mathbf{P}_{ij} , $i = 2, \dots, n-1$, $j = 2, \dots, m-1$, se calculan como los vértices interiores de una *mallla estructurada de cuadriláteros* sobre Ω' . De este modo, *el problema de cómo calcular los puntos de control interiores de un mapeo B-spline bicuadrático entre U y Ω se reduce al problema de generar una mallla estructurada G sobre Ω' .*

La construcción de malllas estructuradas de cuadriláteros sobre regiones irregulares ha sido tratada con mucho éxito en la literatura [3],[20],[21],[7],[5],[6]. Una parte de la dificultad de este problema radica precisamente en la forma de la frontera. Los métodos más empleados para resolverlo calculan los vértices interiores de la mallla G minimizando una función F que depende de las coordenadas de los vértices. Cuando la dimensión $n \times m$ de la mallla es grande, el problema de optimización es de gran escala, pues F es una función de $2(m-2)(n-2)$ variables. Esto requiere contar con un optimizador eficiente.

Las funciones F a optimizar miden propiedades geométricas de la mallla y se construyen a partir los 4 triángulos que se obtienen al dividir cada celda de la mallla por sus dos diagonales, vea la figura 3. Nótese que si G tiene nm vértices entonces el número de total de triángulos es $N = 4(m-1)(n-1)$, de modo que F se define en general como,

$$F(G) = \sum_{q=1}^N f(\Delta_q) \quad (54)$$

donde $f(\Delta_i)$ en (54) es una medida que solo depende de los vértices del i -ésimo triángulo Δ_i . Para un triángulo con vértices \mathbf{A}, \mathbf{B} y \mathbf{C} , las magnitudes que más se utilizan son:

- una medida de la longitud:

$$\lambda(\Delta(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})) = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2 + \|\mathbf{C} - \mathbf{B}\|^2$$

- una medida del área:

$$\begin{aligned} \alpha(\Delta(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})) &= (\mathbf{B} - \mathbf{A})^t J_2 (\mathbf{B} - \mathbf{C}) \\ &= 2\text{área}(\Delta(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})) \end{aligned}$$

$$\text{con } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- una medida de la proximidad a un triángulo rectángulo:

$$o(\Delta(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})) = (\mathbf{B} - \mathbf{C})^t (\mathbf{A} - \mathbf{C})$$

En términos de estas medidas se definen los funcionales clásicos discretos,

$$F_A(G) = \sum_{q=1}^N \alpha(\Delta_q)^2, \quad \text{funcional de área}$$

$$F_L(G) = \sum_{q=1}^N \lambda(\Delta_q), \quad \text{funcional de longitud}$$

$$F_O(G) = \sum_{q=1}^N o(\Delta_q)^2, \quad \text{funcional de ortogonalidad}$$

Además, mediante una combinación convexa de ellos obtenemos los funcionales,

funcional de área–ortogonalidad:

$$F_{AO}(G) = \sum_{q=1}^N \frac{\alpha(\Delta_q)^2}{2} + \frac{o(\Delta_q)^2}{2},$$

funcional de área–longitud:

$$F_{AL}(G) = \sum_{q=1}^N [\sigma \alpha(\Delta_q)^2 + (1 - \sigma) \lambda(\Delta_q)], \quad 0 < \sigma < 1$$

Todos estos funcionales son funciones positivas de la mallla.

Nuestro objetivo es obtener malllas convexas sobre Ω' , pues como probamos en el Teorema 1 esto nos garantiza al menos la inyectividad del mapeo bilineal. Para que la condición de convexidad sea estable numéricamente debe ser independiente de la escala. Por eso en [12] se introduce el concepto de ε -convexidad.

Definición 2. Sea $\varepsilon > 0$ y G una mallla de $n \times m$ vértices. Decimos que G es ε -convexa si el área de todos los triángulos de las celdas de G es mayor que $\varepsilon \cdot \bar{\alpha}(G)$, donde $\bar{\alpha}(G) = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^N \alpha(\Delta_q)$ es el promedio de las áreas orientadas de todos los triángulos de la mallla.

En [4] se introduce un funcional más sofisticado que garantiza la ε -convexidad de la mallla óptima. Más precisamente, se demuestra que si f es una función convexa C^2 continua, estrictamente decreciente y acotada por debajo, tal que $f(\alpha) \rightarrow 0$ cuando $\alpha \rightarrow \infty$, entonces para todo $0 < \varepsilon \leq 1$ existe $\omega > 0$ suficientemente grande, tal que el mínimo del funcional

$$S_{\omega, \varepsilon}(G) = \sum_{q=1}^N f(\omega \alpha(\Delta_q) - \varepsilon \bar{\alpha}(G)) \quad (55)$$

dentro del conjunto de malllas admisibles es una mallla G ε -convexa. Este resultado se ha empleado con éxito en la práctica tomando f como

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1/\alpha, & \alpha \geq 1 \\ (\alpha - 1)(\alpha - 2) + 1, & \alpha < 1 \end{cases} \quad (56)$$

Las mallas ε -convexas obtenidas al minimizar $S_{\omega,\varepsilon}$ con f dada por (56) se reportan en [3], [7]. En [3] se prueba también que si combinamos el funcional (55) con otro funcional $F_c(G)$ diferenciable y positivo, definiendo para $0 < \sigma \leq 1$ un nuevo funcional

$$F_\sigma(G) = \sigma S_{\omega,\varepsilon}(G) + (1 - \sigma)F_c(G) \quad (57)$$

entonces el mínimo de (57) se alcanza también para una malla ε -convexa. Para una discusión detallada de este funcional y las combinaciones con los funcionales clásicos remitimos al lector a [3].

3. Experimentos numéricos

En esta sección mostramos cómo funciona el método propuesto para parametrizar regiones planas con frontera irregular utilizando un mapeo B-spline bicuadrático. Para calcular los puntos de control interiores del mapeo se utilizó el sistema **UNAMalla**, disponible gratuitamente en [1]. **UNAMalla** genera mallas de cuadriláteros estructuradas sobre regiones con frontera poligonal. Los vértices de la malla se calculan minimizando alguno de los funcionales descritos en [3],[20],[21],[7],[5],[6]. Para obtener el mínimo del funcional se emplea un método de Newton truncado [17], o el método L-BFGS-B [8],[25]. Estos métodos convergen muy rápido a partir de cualquier malla inicial.

En este trabajo **UNAMalla** se utiliza para construir una malla de cuadriláteros ε -convexa sobre la región Ω' . Los $(n-2)(m-2)$ puntos de control interiores del mapeo B-spline bicuadrático (27) son los vértices de la malla óptima generada por **UNAMalla**.

Las figuras 8, 9, 10 y 11 muestran arriba los puntos de control del mapeo bicuadrático y abajo las curvas isoparamétricas. En todos los casos los puntos de control interiores del mapeo se obtuvieron minimizando el funcional (57) con $\sigma = \frac{1}{2}$, donde F_c es el funcional de área-ortogonalidad $F_{AO}(G)$. Como se observa, las mallas de control obtenidas siempre son convexas y las curvas isoparamétricas, que se muestran abajo de cada figura, son suaves.

Con relación a la inyectividad del mapeo, se chequeó la condición suficiente (41) y se observó que en ninguno de los ejemplos se satisface. Sin embargo, al evaluar el Jacobiano en 10^8 puntos equiespaciados en el cuadrado $[0, 1]^2$ (10^4 puntos en cada dirección ξ y η) se obtuvieron los valores mínimos que muestra la tabla 1. Dada la suavidad del Jacobiano, lo anterior nos permite concluir que con alta probabilidad los mapeos bicuadráticos obtenidos son inyectivos.

Región	$\min \det J_x$
Pieza Rompecabezas	2.57
Bahía de La Habana	1.96
Mapa de Inglaterra	42.61
Lago Titicaca	11.38

Valores mínimos del Jacobiano del mapeo bicuadrático en una muestra de 10^8 puntos equiespaciados en $[0, 1]^2$.

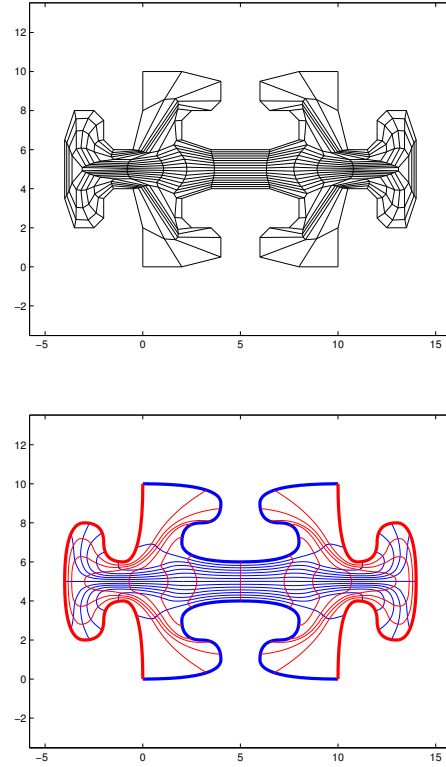


Figura 8. Pieza de rompecabezas. Arriba: Malla de control de orden 18×18 del mapeo B-spline cuadrático. Abajo: Curvas isoparamétricas del mapeo B-spline cuadrático.

4. Conclusiones

La parametrización de una región plana es especialmente difícil cuando su frontera es muy irregular. La solución de este problema es importante en el contexto del análisis isométrico, donde la parametrización se construye usualmente utilizando funciones B-spline producto tensorial. Asumiendo que la frontera ha sido parametrizada mediante 4 curvas B-splines, el reto principal consiste en calcular los puntos de control interiores del mapeo. El método propuesto en este trabajo calcula los puntos de control interiores como los vértices de una malla estructurada de cuadriláteros. A su vez, los vértices de la malla se obtienen minimizando un funcional que garantiza la convexidad de los cuadriláteros de la malla óptima. Gracias a esta propiedad, el mapeo bilineal correspondiente es inyectivo. En el caso bicuadrático los experimentos numéricos muestran que el mapeo también es inyectivo, pero no hay garantía.

Respecto al futuro quedan muchos aspectos teóricos y prácticos por analizar. Entre los teóricos vale la pena destacar la obtención de una condición suficiente de inyectividad para el mapeo bicuadrático, que sea menos restrictiva que (41). En ese sentido también es importante tener una interpretación de la condición de inyectividad en términos de propiedades geométricas de las celdas de la malla de control. Desde el

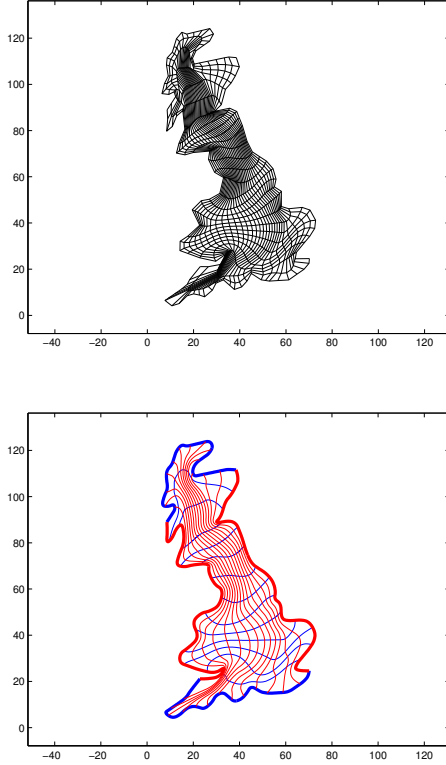


Figura 9. Mapa de Inglaterra. Arriba: Malla de control orden 30×30 del mapeo B-spline cuadrático. Abajo: Curvas isoparamétricas del mapeo B-spline cuadrático.

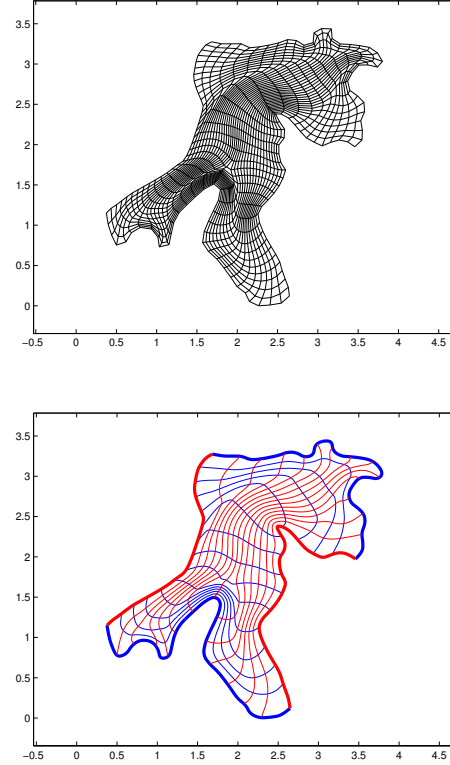


Figura 10. Bahía de La Habana. Arriba: Malla de control orden 35×35 del mapeo B-spline cuadrático. Abajo: Curvas isoparamétricas del mapeo B-spline cuadrático.

punto de vista práctico, debemos probar la parametrización propuesta para resolver algunos problemas diferenciales clásicos en el contexto del análisis isogeométrico. De este modo podríamos valorar el efecto que tiene la parametrización en la precisión de la solución numérica del problema diferencial.

Anexo: Demostración del Lema 3

Demostración. Sea $(\xi, \eta) \in U_{i,j}$ $i = 1, \dots, n-2$, $j = 1, \dots, m-2$, entonces derivando en (32) obtenemos

$$\mathbf{x}_\xi|_{U_{i,j}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \sum_{r=i}^{i+2} \sum_{s=j}^{j+2} P_{r,s} B_s^3(\eta) \frac{d}{d\xi} B_r^3(\xi) \quad (58)$$

$$\mathbf{x}_\eta|_{U_{i,j}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} = \sum_{r=i}^{i+2} \sum_{s=j}^{j+2} P_{r,s} \frac{d}{d\eta} B_s^3(\eta) B_r^3(\xi) \quad (59)$$

donde hemos omitido la referencia a los nodos en la notación de las bases, es decir, $B_i^3(\xi)$ denota a $B_{i,\xi}^3(\xi)$ y $B_j^3(\eta)$ denota a $B_{j,\eta}^3(\eta)$.

Para obtener las expresiones finales de \mathbf{x}_ξ y \mathbf{x}_η debemos tener en cuenta que $\frac{d}{d\xi} B_i^3(\xi)$, dada por (34), está definida por pedazos y que lo mismo ocurre para $\frac{d}{d\eta} B_j^3(\eta)$. Por eso la demostración se divide en 3 casos:

- (ξ, η) está en un rectángulo interior $U_{i,j}$ con $i = 2, \dots, n-3$, $j = 2, \dots, m-3$ del espacio de parámetros U , vea la figura 6, izquierda.
- (ξ, η) pertenece a uno de los 4 rectángulos de las esquinas de U : $U_{1,1}$, $U_{1,m-2}$, $U_{n-2,1}$ o $U_{n-2,m-2}$, vea la figura 6, centro.
- (ξ, η) está en algún rectángulo de la frontera que no es ninguna de las esquinas de U . Aquí tenemos 4 posibilidades (vea la figura 6, derecha): $(\xi, \eta) \in U_{i,1}$, $2 \leq i \leq n-3$, $(\xi, \eta) \in U_{n-2,j}$, $2 \leq j \leq m-3$, $(\xi, \eta) \in U_{i,m-2}$, $2 \leq i \leq n-3$ y $(\xi, \eta) \in U_{1,j}$, $2 \leq j \leq m-3$.

Caso a) $(\xi, \eta) \in U_{i,j}$ $i = 2, \dots, n-3$, $j = 2, \dots, m-3$. Combinando las expresiones (58) y (33) observamos que las bases B-spline de orden 2 involucradas en la derivada parcial en la dirección ξ en el intervalo $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, son $B_i^2(\xi)$, $B_{i+1}^2(\xi)$, $B_{i+2}^2(\xi)$ y $B_{i+3}^2(\xi)$. Sin embargo, en este intervalo las únicas funciones no nulas son $B_{i+1}^2(\xi)$ y $B_{i+2}^2(\xi)$, vea la figura 5. Luego, utilizando (15), la expresión (58) se reduce a,

$$\mathbf{x}_\xi|_{U_{i,j}} = (n-2) \sum_{s=j}^{j+2} [\mathbf{h}_{i,s} B_{i+1}^2(\xi) + \mathbf{h}_{i+1,s} B_{i+2}^2(\xi)] B_s^3(\eta) \quad (60)$$

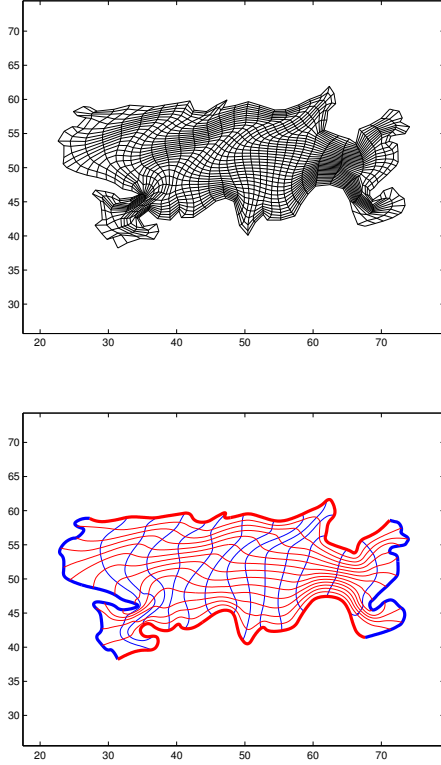


Figura 11. Lago Titicaca. Arriba: Malla de control orden 35×35 del mapeo B-spline cuadrático. Abajo: Curvas isoparamétricas del mapeo B-spline cuadrático.

En la dirección η obtenemos un resultado similar a partir de (59) y (16),

$$\mathbf{x}_\eta|_{U_{i,j}} = (m-2) \sum_{r=i}^{i+2} [\mathbf{v}_{r,j} B_{j+1}^2(\eta) + \mathbf{v}_{r,j+1} B_{j+2}^2(\eta)] B_r^3(\xi) \quad (61)$$

Nótese que las expresiones (60) y (61) coinciden con (35) y (36) respectivamente teniendo en cuenta que todos los γ_r y δ_s involucrados en estas últimas expresiones valen 1.

Caso b) Vamos a probarlo únicamente para la esquina inferior izquierda que corresponde al rectángulo $U_{1,1} = [\xi_1, \xi_2] \times [\eta_1, \eta_2]$. Para las otras esquinas la demostración es similar.

Tomando $i = j = 1$ en (58) llegamos a,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\xi|_{U_{1,1}} &= \sum_{s=1}^3 P_{1,s} B_s^3(\eta) \frac{d}{d\xi} B_1^3(\xi) + \\ &+ \sum_{s=1}^3 P_{2,s} B_s^3(\eta) \frac{d}{d\xi} B_2^3(\xi) + \\ &+ \sum_{s=1}^3 P_{3,s} B_s^3(\eta) \frac{d}{d\xi} B_3^3(\xi) \end{aligned} \quad (62)$$

Sustituyendo en esta última expresión $\frac{d}{d\xi} B_r^3(\xi)$; $r = 1, 2, 3$ por la fórmula (34) y teniendo en cuenta que los únicos B-splines lineales no nulos en $[\xi_1, \xi_2]$ son $B_2^2(\xi)$ y $B_3^2(\xi)$, de

(62) obtenemos finalmente,

$$\mathbf{x}_\xi|_{U_{1,1}} = (n-2) \sum_{s=1}^3 [2\mathbf{h}_{1,s} B_2^2(\xi) + \mathbf{h}_{2,s} B_3^2(\xi)] B_s^3(\eta) \quad (63)$$

De manera similar podemos calcular \mathbf{x}_η y llegamos a,

$$\mathbf{x}_\eta|_{U_{1,1}} = (m-2) \sum_{r=1}^3 [2\mathbf{v}_{r,1} B_2^2(\eta) + \mathbf{v}_{r,2} B_3^2(\eta)] B_r^3(\xi) \quad (64)$$

Las expresiones (63) y (64) coinciden con (35) y (36) respectivamente, pues $\gamma_1 = \delta_1 = 2$ mientras que $\gamma_2 = \delta_2 = 1$.

Caso c) Se demuestra exclusivamente para la frontera inferior, correspondiente a los rectángulos $U_{i,1}$ con $2 \leq i \leq n-3$. Para el resto de las fronteras la demostración es similar. Si en (58) hacemos $j = 1$ con $2 \leq i \leq n-3$ obtenemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\xi|_{U_{i,1}} &= \sum_{s=1}^3 \mathbf{P}_{i,s} B_s^3(\eta) \frac{d}{d\xi} B_i^3(\xi) + \\ &+ \sum_{s=1}^3 \mathbf{P}_{i+1,s} B_s^3(\eta) \frac{d}{d\xi} B_{i+1}^3(\xi) + \\ &+ \sum_{s=1}^3 \mathbf{P}_{i+2,s} B_s^3(\eta) \frac{d}{d\xi} B_{i+2}^3(\xi) \end{aligned} \quad (65)$$

Sustituyendo en (65) las expresiones para $\frac{d}{d\xi} B_r^3(\xi)$, $r = i, i+1, i+2$ dadas por (34) y teniendo en cuenta que los únicos B-splines lineales no nulos en $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ son $B_{i+1}^2(\xi)$ y $B_{i+2}^2(\xi)$ obtenemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\xi|_{U_{i,1}} &= (n-2) \sum_{s=1}^3 B_s^3(\eta) [B_{i+1}^2(\xi)(\mathbf{P}_{i+1,s} - \mathbf{P}_{i,s}) + \\ &+ B_{i+2}^2(\xi)(\mathbf{P}_{i+2,s} - \mathbf{P}_{i+1,s})] = \\ &= (n-2) \sum_{s=1}^3 [\mathbf{h}_{i,s} B_{i+1}^2(\xi) + \mathbf{h}_{i+1,s} B_{i+2}^2(\xi)] B_s^3(\eta) \end{aligned} \quad (66)$$

Procediendo de manera similar para la derivada respecto a η llegamos a,

$$\mathbf{x}_\eta|_{U_{i,1}} = (m-2) \sum_{r=i}^{i+2} [2\mathbf{v}_{r,1} B_2^2(\eta) + \mathbf{v}_{r,2} B_3^2(\eta)] B_r^3(\xi) \quad (67)$$

Obsérvese que (66) y (67) se pueden reescribir como (35) y (36) respectivamente, pues $\gamma_i = 1$, $2 \leq i \leq n-2$ mientras que $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 1$. \square

Agradecimientos

Los autores agradecen la cortesía de J. Gravensen, quien proporcionó la poligonal de la frontera de la figura 8.

Referencias

- [1] Unamalla: An automatic package for numerical grid generation: Disponible en <http://www.matematicas.unam.mx/unamalla>.

- [2] R. Barnhill. Coons patches. *Computers in Industry*, 3:37–43, 1982.
- [3] P. Barrera, J. Cortés, F. Domínguez, G. F. González, and Tinoco G. Smoothness and convex area functionals-revisited. *SIAM J. Sci. Comput*, 32(4):1913–1928, 2010.
- [4] P. Barrera, F. Domínguez, and G. F. González. Area functionals for high quality grid generation. In *Proceedings of the 4th. International Congress on Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*, 2007.
- [5] P. Barrera, F. Domínguez, G. F. González, and Tinoco G. Generating quality structured convex grids on irregular regions. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 34:76–89, 2009.
- [6] P. Barrera, G. F. González, and F. Domínguez. A new functional for improving cell area distribution. In *Proceeding of V International Conference on Computational Methods for Coupled problems in Science and Engineering*, Barcelona, España, junio 2013. Electrónica.
- [7] P. Barrera, G. F. González, and F. J. Domínguez. Robust discrete grid generation on plane irregular regions. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 43:884–892, 2003.
- [8] R. H. Byrd, P. Lu, and J. Nocedal. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 16(5):1190–1208, 1995.
- [9] S Coons. Surfaces for computer aided design. Technical report, MIT, Springfield, 1964. Available as AD 663 504 from the National Technical Information service, VA 22161.
- [10] J. A. Cottrell, T. J. Hughes, and Y. Bazilevs. *Isogeometric analysis:toward integration of CAD and FEA*. John Wiley & Sons, Ltd, 2009.
- [11] Carl de Boor. *A practical guide to splines*. Springer, New York, 2001.
- [12] F. J. Domínguez. *Sobre la generación variacional discreta de mallas casiortogonales en el plano*. PhD thesis, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.
- [13] A. Falini, J. Speh, and B. Jüttler. Planar domain parameterization with thb-splines. *Comput. Aided Geom. Design*, 35:95–108, 2015.
- [14] G. Farin and D. Hansford. Discrete coons patches. *Comput. Aided Geom. Design*, 16(7):691–700, 1999.
- [15] A. Gravesen, J. and Evgrafov, D. M. Nguyen, and P. Noroft. Planar parametrization in isogeometric analysis. In M. Floater et al, editor, *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, pages 189–212. Springer, 2014.
- [16] T. Hughes, J. Cottrell, and Y. Bazilevs. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 194:4135–4195, 2005.
- [17] J. Lin, C. and J. Moré. Newton’s method for large bound-constrained optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, 9(4):1100–1127, 1999.
- [18] T. Nguyen and B. Jüttler. Parameterization of contractible domains using sequences of harmonic maps. In Heidelberg, editor, *Curves and Surfaces*, pages 501–514, Berlin, 2012. Springer.
- [19] X. Nian and F. Chen. Planar domain parameterization for isogeometric analysis based on teichmüller mapping. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 311:41–55, 2016.
- [20] J. G. Tinoco and P. Barrera. Smooth and convex grid generation over general plane regions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 46(2):87–102, 1998.
- [21] J. G. Tinoco and P. Barrera. Area control in generating smooth and convex grids over general plane regions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 103(1):19–32, 1999.
- [22] G. Xu, B. Mourrain, R. Duval, and Galligo A. Optimal analysis-aware parameterization of computational domain in isogeometric analysis. In *Advances in Geometric Modeling and Processing*, Lecture Notes in Computer Science, pages 236–254, Berlin, 2010. Springer.
- [23] G. Xu, B. Mourrain, R. Duval, and Galligo A. Parameterization of computational domain in isogeometric analysis: methods and comparison. *Comp Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200:2021–2031, 2011.
- [24] J. Xu, F. Chen, and J. Deng. Two-dimensional domain decomposition based on skeleton computation for parameterization and isogeometric analysis. *Comp Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 284:541–555, 2015.
- [25] C. Zhu, R. H. Byrd, and J. Nocedal. L-bfgs-b: Algorithm 778: L-bfgs-b, fortran routines for large scale bound constrained optimization. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 23(4):550–560, 1997.