

Promediación de estructuras regulares

*Alejandro Alonso Fúster¹ / David Guinovart Sanjuán² / Raúl Guinovart Díaz³
/ Reinaldo Rodríguez Ramos⁴ Julián Bravo Castellero⁵*

RESUMEN. En el trabajo se estudia una metodología para la determinación de las propiedades efectivas de medios cuasi periódicos en coordenadas curvilíneas. Para lograr este objetivo se utilizó el método de homogeneización asintótica, desarrollado en [1-2]. Se ejemplifican los resultados alcanzados para un compuesto curvilíneo multi-laminado en coordenadas esféricas.

Palabras claves: Materiales compuestos; coeficientes efectivos; homogeneización asintótica; coordenadas curvilíneas.

INTRODUCCIÓN

Los materiales compuesto laminados han sido ampliamente estudiados debido a las múltiples aplicaciones de los mismos. Estos se diseñan con el objetivo de obtener nuevos materiales que exhiben las propiedades necesarias para dar respuesta a los crecientes problemas que se presentan en la ciencia y la tecnología. Las ciencias biológicas y biomecánicas no han escapado a la influencia de los nuevos materiales, los bio-compuestos son usados como implantes en huesos, dientes y muchas veces para la sustitución de tejidos biológicos. Recientemente se han presentado modelos que describen la córnea del ojo humano como un medio laminado curvilíneo [3-4] y esta ha sido una motivación importante para realizar el presente trabajo.

La utilización de métodos matemáticos para la determinación de las propiedades globales o efectivas de los materiales compuestos permite desarrollar algoritmos con los cuales se pueden predecir las mismas de manera teórica y orientar la realización de experimentos a partir de los resultados alcanzados.

Las ecuaciones diferenciales de los problemas de contorno, que modelan las condiciones

de equilibrio de los medios heterogéneos que estudiamos en el presente trabajo poseen coeficientes cuasi periódicos rápidamente oscilantes. El tratamiento numérico de tales problemas puede ser simplificado si obtenemos algoritmos analíticos a partir de modelos asintóticos. El método de homogeneización asintótica (MHA) ha demostrado ser una herramienta eficaz para este propósito.

El objetivo de nuestro trabajo es explicar un algoritmo analítico para encontrar los coeficientes efectivos de medios laminados cuasi periódicos en coordenadas curvilíneas. Comenzamos planteando un problema general de la teoría de elasticidad, descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables y empleando el MHA se encuentra un problema aproximado con coeficientes constantes. Seguidamente se determinan las expresiones generales para los coeficientes en un cierto sistema de coordenadas curvilíneas y se ejemplifican los mismos para el caso esférico.

DESARROLLO

Metodología para la obtención de la solución del problema

Se estudia el problema de la determinación de las propiedades efectivas de un material compuesto que consiste en una esfera como la que se muestra en la Fig.1 formada por N capas de

¹ Universidad de las Ciencias Informáticas, Carretera San Antonio de los Baños, km 5½, Reparto Lourdes, Boyeros, La Habana, Cuba, alejandroaf@uci.cu

² d.guinovart@lab.matcom.uh.cu

³ guino@matcom.uh.cu

⁴ reinaldo@matcom.uh.cu

⁵ jbravo@matcom.uh.cu

grosor δ y las propiedades del sólido varían según la posición radial. Podemos considerar que el tensor módulo elástico \mathbf{C} solo depende de la componente $x^1 = r$ y posee la propiedad de periodicidad

$$C(r + n\delta) = C(r) \quad (1.1)$$

Donde $n = 1, 2, \dots, N$ y

$$R_n = n\delta. \quad (1.2)$$



Fig. 1 Esfera compuesta por N láminas.

A las estructuras que cumple la condición (1.1)-(1.2) se les denomina estructuras cuasi periódicas.

Consideremos un problema de contorno de la teoría de elasticidad no lineal en coordenadas curvilíneas dado de la siguiente forma [1]:

$$\sigma_{,j}^{ij} + 2\Gamma_{jp}^{(i)} \sigma^{j)p} + F^i = 0 \quad (1.3)$$

Con las condiciones de contorno:

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad C^{ijmn}(\vec{\xi}, \vec{x}) (u_{m,n} - \Gamma_{mn}^p u_p) n_j|_{\Sigma_2} = S_i^0. \quad (1.4)$$

La ley de Hooke toma la forma:

$$\sigma^{ij} = C^{ijmn}(\vec{\xi}, \vec{x}) (u_{m,n} - \Gamma_{mn}^p u_p). \quad (1.5)$$

Donde la solución $u(\vec{x})$ está definida en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, con frontera $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ y Γ_{mn}^p son los símbolos de Christoffel.

En general para las estructuras regulares el tensor módulo elástico depende de dos variables espaciales; la variable global \vec{x} y una variable rá-

pida $\vec{\xi}$ que está definida sobre la celda de periodicidad. Estas variables están relacionadas a través de la igualdad $\vec{\xi} = \vec{x}/\varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ representa un parámetro pequeño.

La solución del problema (1.3)-(1.4) se busca en forma de un desarrollo asintótico formal a dos escalas hasta orden 2 de la siguiente forma [2]:

$$u_m(\vec{x}) = v_m(\vec{x}) + \varepsilon \left[N_{(0)m}^l(\vec{\xi}, \vec{x}) v_l(\vec{x}) + N_{(1)m}^{lk}(\vec{\xi}, \vec{x}) v_{l,k}(x) \right] + o(\varepsilon). \quad (1.2)$$

donde $v_m(x)$ son funciones de clase $C^2(\Omega)$; $N_{(0)m}^l(\vec{\xi}, \vec{x})$ y $N_{(1)m}^{lk}(\vec{\xi}, \vec{x})$ son funciones periódicas de clase C^2 respecto a la variable $\vec{\xi}$ y cumplen que

$$N_{(0)m}^l(\vec{\xi}, \vec{x}) = N_{(1)m}^{lk}(\vec{\xi}, \vec{x}) = 0.$$

El paréntesis angular $\langle f(\vec{\xi}, \vec{x}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V f(\vec{\xi}, \vec{x}) dV$ denota el promedio de la función sobre la celda periódica sobre V .

Sustituyendo (1.6) en (1.3)-(1.5). Aplicando las operaciones y agrupando en potencias de ε y por la teoría de la aproximación nula se obtiene el problema homogeneizado de la forma.

$$h^{il} v_l + h^{ikl} v_{l,k} + h^{ikl k_1} v_{l, k_1 k_2} + F^i = 0. \quad (1.7)$$

$$v_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad (h^{ijl} v_l + h^{ijk} v_{l,k}) n_j|_{\Sigma_2} = S_i^0.$$

Para estructuras cuasi periódicas, los coeficientes

$$H^{il} = \langle h^{il} \rangle, \quad H^{ikl} = \langle h^{ikl} \rangle \quad \text{y} \quad H^{ijkl} = \langle h^{ijkl} \rangle$$

se denominan coeficientes efectivos para el problema (1.7), tomando la dirección de la tercera componente x^3 de \vec{x} , setienen las siguientes expresiones:

$$H^{il}(\vec{x}) = \left\langle -\Gamma_{mn,j}^l C^{ijmn} + 2\Gamma_{jr}^{(i)} C^{j)rm3} (N_{(0)m}^l)_{,n} \right\rangle - 2\Gamma_{jr}^{(i)} C^{j)rmn} \Gamma_{mn}^l + C^{ijmn} N_{(0)m}^l n_j, \quad (1.8)$$

$$H^{ikl}(\vec{x}) = \left\langle (C^{ikm3} N_{(0)m}^l)_{,n} - \Gamma_{mn}^l C^{ikmn} + 2\Gamma_{jr}^{(i)} C^{j)rm3} (N_{(1)m}^{lk})_{,n} + 2\Gamma_{jr}^{(i)} C^{j)rlk} \right\rangle,$$

$$H^{ijkl}(\vec{x}) = \left\langle C^{ijm3} (N_{(1)m}^{lk})_{,n} + C^{ijkl} \right\rangle,$$

$$H_*^{ijl}(\vec{x}) = \left\langle C^{ijm3} (N_{(0)m}^l)_{,n} - \Gamma_{mn}^l C^{ijmn} \right\rangle.$$

Además se tiene que $N_{(1)m}^{lk}(\xi)$ y $N_{(0)m}^l$ son soluciones de los problemas locales:

$$\left[C^{i3m3} \left(N_{(0)m}^l \right)' - \Gamma_{mn}^l C^{i3mn} \right]' = 0, \quad (1.9)$$

$$\left[C^{i3m3} \left(N_{(1)m}^{lk} \right)' + C^{i3lk} \right]' = 0. \quad (1.10)$$

Para obtener la función $N_{(1)m}^{lk}(\xi)$ y los coeficientes efectivos se procede de la forma siguiente: integrando (1.11) y restando en ambos miembros C^{i3lk} se tiene que:

$$C^{i3m3} \left(N_{(1)m}^{lk} \right)' = -C^{i3lk} + A^{i3lk}, \quad (1.11)$$

Donde los A^{i3lk} son constantes de integración, respecto a las derivadas de las funciones locales

$$\left(N_{(1)m}^{lk} \right)' = \left(C^{m3i3} \right)^{-1} \left(-C^{i3lk} + A^{i3lk} \right), \quad (1.12)$$

Tomando promedio de la parte izquierda de la ecuación anterior, por la hipótesis de continuidad sobre la celda se tendrá:

$$\left\langle \left(N_{(1)m}^{lk}(\xi, \bar{x}) \right)' \right\rangle = 0.$$

Se obtiene de (1.12)

$$A^{i3lk} = \left\langle \left(C^{i3p3} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle \left(C^{p3q3} \right)^{-1} C^{q3lk} \right\rangle. \quad (1.13)$$

Sustituyendo en (1.12) se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \left(N_{(1)m}^{lk} \right)' &= \left(C^{m3i3} \right)^{-1} \left\langle \left(C^{i3p3} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle \left(C^{p3q3} \right)^{-1} C^{q3lk} \right\rangle - \\ &- \left(C^{m3i3} \right)^{-1} C^{i3lk}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

La siguiente proposición facilitara el cálculo de los restantes coeficientes:

Proposición 1: se tiene las siguientes relaciones para las funciones locales $N_{(0)m}^l$ y $N_{(1)m}^{lk}$

$$N_{(0)m}^l(\xi, \bar{x}) = -\Gamma_{pq}^l N_{(1)m}^{pq}(\xi, \bar{x}) \quad (1.15)$$

En virtud de que se satisface lo anterior se tiene la siguiente proposición:

Proposición 2: Se satisface la relación siguiente

$$C_{(0)}^{ijk}(\xi) = -\Gamma_{pq}^k C_{(0)}^{ijpq}(\xi). \quad (1.16)$$

donde,

$$\begin{aligned} C_{(0)}^{ijl} &\equiv C^{ijmn} N_{(0)m|n}^l - \Gamma_{mn}^l C^{ijmn}, \\ C_{(0)}^{ijkl} &\equiv C^{ijmn} N_{(1)m|n}^{lk} + C^{ijkl}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Son los tensores módulos elásticos de la aproximación nula. [1] Además cumplen que

$$\begin{aligned} C_{(0)}^{ijkl} &= C^{ijkl}(\xi) + C^{ijm3} \left[\left(C^{m3n3} \right)^{-1} \left\langle \left(C^{n3p3} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \times \right. \\ &\times \left. \left\langle \left(C^{p3q3} \right)^{-1} C^{q3kl} \right\rangle - \left(C^{m3r3} \right)^{-1} C^{r3kl} \right]. \end{aligned}$$

Luego el tensor efectivo módulo elástico es

$$\begin{aligned} H^{ijkl} &\equiv \left\langle C_{(0)}^{ijkl} \right\rangle = \left\langle C^{ijkl} \right\rangle + \\ &+ \left\langle C^{ijm3} \left(C^{m3n3} \right)^{-1} \left\langle \left(C^{n3p3} \right)^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle \left(C^{p3q3} \right)^{-1} C^{q3kl} \right\rangle - \right. \\ &- \left. \left\langle C^{ijm3} \left(C^{m3r3} \right)^{-1} C^{r3kl} \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.18)$$

2. DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA OBTENIDA. CASO ESFÉRICO

Como resultado del análisis realizado en la sección anterior se puede establecer una metodología general para determinar los coeficientes de la ecuación de equilibrio homogeneizada y de las condiciones en las fronteras (\mathbf{H}^{il} , \mathbf{H}^{ikl} , \mathbf{H}^{ijkl} , \mathbf{H}_*^{ijl}).

Explicaremos la metodología a través de un ejemplo. Consideremos el caso inicial del trabajo (Figura 1). Una esfera formada por N capas de grosor δ y cumple las condiciones de periodicidad (1.1)-(1.2).

Para ello trabajemos en las coordenadas esféricas dadas por

$$x^1 = \theta; \quad x^2 = \phi; \quad x^3 = r \quad (2.1)$$

Para el caso considerado, el tensor métrico es una matriz cuadrada de orden 3 diagonal y sus componentes no nulas están dadas por las siguientes expresiones:

$$g_{11} = (r \sin(\phi))^2; \quad g_{22} = r^2; \quad g_{33} = 1 \quad (2.2)$$

Los correspondientes símbolos de Christoffel no nulos son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^3 &= -r, \quad \Gamma_{11}^3 = -r \sin^2(\phi), \quad \Gamma_{11}^2 = -\sin(\phi) \cos(\phi) \\ \Gamma_{23}^2 &= \Gamma_{13}^1 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{12}^1 = \cot(\phi) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Supongamos que los materiales que conforman el compuesto son medios isotrópicos y se tiene un medio cuasi-periódico compuesto por n láminas de grosor δ con diferentes propiedades del medio (para el caso tratado en este trabajo son ν y E llamados *Razón de Poisson* y *Módulo de Young* respectivamente). Por tanto el tensor elástico, para cada fase, tendrá la siguiente lista de componentes:

$$\begin{aligned} H^{1111} &= H^{2222} = \left\langle \frac{E_m}{1-\nu_m^2} \right\rangle + \frac{\left\langle \frac{\nu_m}{1-\nu_m} \right\rangle^2}{\left\langle \frac{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)}{E_m(1-\nu_m)} \right\rangle}, \\ H^{3333} &= \frac{1}{\left\langle \frac{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)}{E_m(1-\nu_m)} \right\rangle}, \\ H^{1133} &= H^{3311} = \frac{\left\langle \frac{\nu_m}{1-\nu_m} \right\rangle}{\left\langle \frac{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)}{E_m(1-\nu_m)} \right\rangle}, \\ H^{1212} &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{E_m}{1+\nu_m} \right\rangle, \quad H^{1313} = H^{2323} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left\langle \frac{1+\nu_m}{E_m} \right\rangle}, \\ m &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Estos \mathbf{H}^{ijkl} , que se han obtenido empleando la fórmula (1.18), coinciden con los coeficientes efectivos para un medio laminado rectangular,

donde las láminas son perpendiculares al eje x^3 , reportados en [1].

Sin embargo, considerar un sistema coordenado curvilíneo (esférico en particular), implica la determinación de otro grupo de coeficientes efectivos asociados a los tensores de segundo y tercer orden (\mathbf{H}^{il} , \mathbf{H}^{ikl} , \mathbf{H}^{ijl}), que sí dependen de los símbolos de Christoffel y se hallan a partir de la igualdad (1.16). Se muestra a continuación la lista de estos coeficientes:

$$\begin{aligned} H_*^{112} &= -\Gamma_{11}^2 H^{1111} = \sin\phi \cos\phi \left[\left\langle \frac{E_m}{1-\nu_m^2} \right\rangle + \frac{\left\langle \frac{\nu_m}{1-\nu_m} \right\rangle^2}{\left\langle \frac{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)}{E_m(1-\nu_m)} \right\rangle} \right] \\ H_*^{113} &= -\Gamma_{11}^3 H^{1111} = r \sin^2\phi \left[\left\langle \frac{E_m}{1-\nu_m^2} \right\rangle + \frac{\left\langle \frac{\nu_m}{1-\nu_m} \right\rangle^2}{\left\langle \frac{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)}{E_m(1-\nu_m)} \right\rangle} \right] \\ H_*^{222} &= H_*^{332} = -\Gamma_{11}^2 H^{2211} = \sin\phi \cos\phi \frac{\left\langle \frac{\nu_m}{1-\nu_m} \right\rangle}{\left\langle \frac{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)}{E_m(1-\nu_m)} \right\rangle} \\ H_*^{223} &= -\Gamma_{22}^3 H^{2222} - \Gamma_{11}^3 H^{2211} \\ &= r \left[\left\langle \frac{E_m}{1-\nu_m^2} \right\rangle + \frac{\left\langle \frac{\nu_m}{1-\nu_m} \right\rangle^2}{\left\langle \frac{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)}{E_m(1-\nu_m)} \right\rangle} \right] + \\ &\quad + r \sin^2\phi \frac{\left\langle \frac{\nu_m}{1-\nu_m} \right\rangle}{\left\langle \frac{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)}{E_m(1-\nu_m)} \right\rangle} \\ H_*^{333} &= -\Gamma_{11}^3 H^{3311} - \Gamma_{22}^3 H^{3322} = r(\sin^2\phi + 1) \frac{\left\langle \frac{\nu_m}{1-\nu_m} \right\rangle}{\left\langle \frac{(1+\nu_m)(1-2\nu_m)}{E_m(1-\nu_m)} \right\rangle} \\ H_*^{121} &= -\Gamma_{12}^1 H^{1212} = -\frac{\cot\phi}{21} \left\langle \frac{E_m}{1+\nu_m} \right\rangle \\ H_*^{131} &= H_*^{232} = -\Gamma_{13}^1 H^{1313} = -\frac{1}{2r} \frac{1}{\left\langle \frac{1+\nu_m}{E_m} \right\rangle} \end{aligned}$$

Una vez determinado los coeficientes efectivos se sustituyen en el problema homogenei-

zado (1.7 y se obtiene la solución aproximada $v_m(\vec{x})$, que cumple que

$$\|u - v_m\|_{L_2} = o(\varepsilon)$$

donde u es la solución exacta del problema original.

En la figura 2 se muestra un modelo geométrico de una córnea humana donde se ha considerado que se ajusta a la forma de una subregión esférica. El radio medido en la región central oscila entre 495 y 510 μm ; en la figura 3, por otro lado, se pueden observar las tres capas fundamentales que conforman estructuralmente la córnea denominadas Epitelio, Estroma y Endotelio, las cuales están separadas por dos membranas (Bowman y Descemet) de grosor despreciables para los efectos de la formulación de este trabajo.

En [5] se afirma que para la mayoría de los autores solo la Estromaposee una estructura que permite justificar la resistencia mecánica observada en la córnea en su función primordial de mantener la integridad estructural del ojo. Es por esta razón que se le asignará los valores del *Módulo de Young* ($E_s = 0.622 \text{ N/mm}^2$) numéricamente mayores que se han determinado en [6], mientras que los de menor valor numérico a las dos láminas restantes ($E_{EP} = 0.275 \text{ N/mm}^2$ y $E_{EN} = 0.279 \text{ N/mm}^2$). Por otro lado, la Estroma ocupa el 90 % del grosor de la córnea, lo cual actúa directamente sobre el volumen de fracción que se calcula como $V_f = A_i/A_T$, donde ($A_i = (r_e^2 - r_i^2) \phi_i$), ($A_T = (r_e^2 - r_i^2) \phi$) y $\phi = \arcsen(D/(2r_c)) = 0.82 \text{ Rad}$ (Ver Figura 2). que se empleará para calcular los valores numéricos de los coeficientes efectivos \mathbf{H}^{ijkl} y \mathbf{H}^{*ijl} , asociados al compuesto laminado en coordenadas rectangulares y al compuesto en coordenadas curvilíneas esféricas que contiene aporte geométrico, respectivamente.

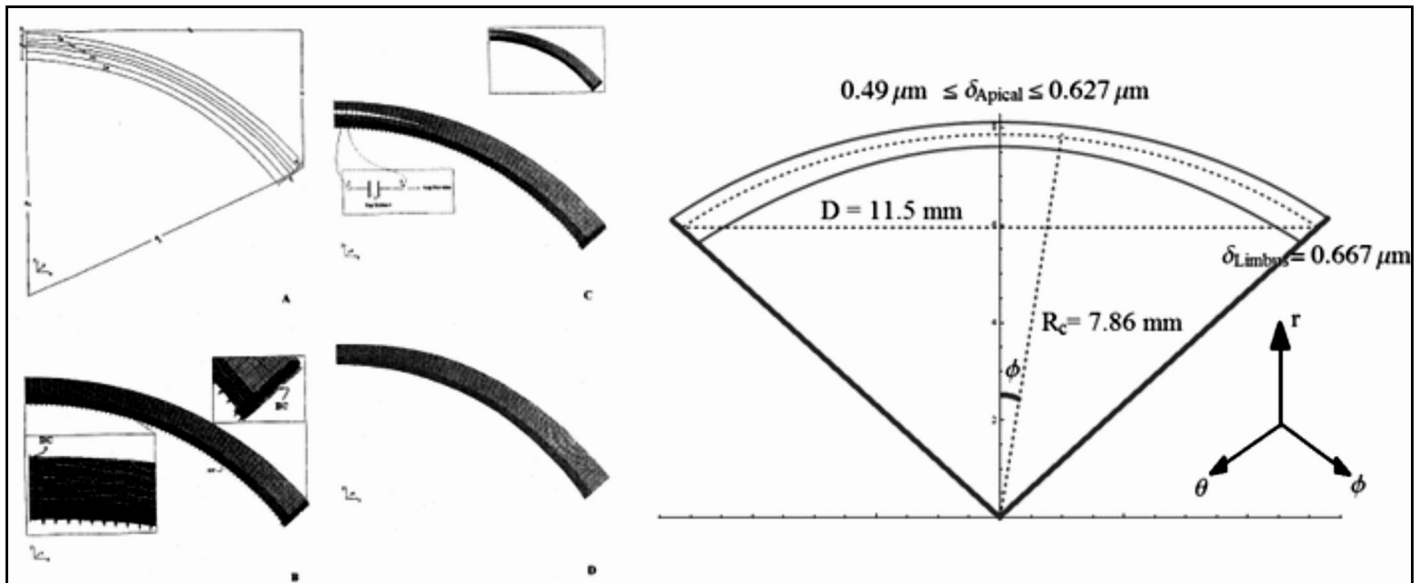


Fig 2 Modelo geométrico de la córnea humana.

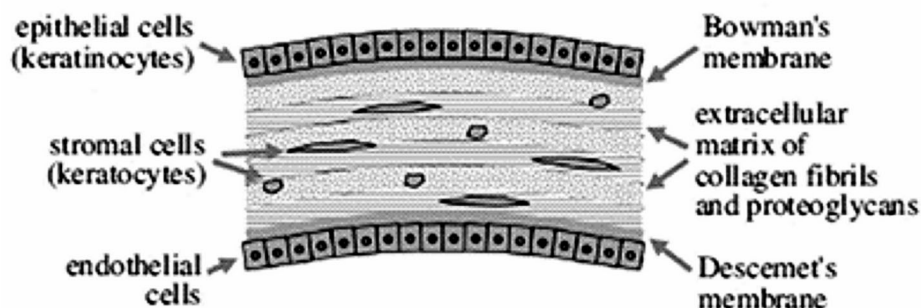


Fig 3 Estructura interna de la córnea humana.

A continuación se muestran los gráficos comparativos para las relaciones entre coeficientes efectivos en coordenadas rectangulares y esféricas que se han obtenido en este trabajo. En la Figura 4, se puede observar que se describe el comportamiento en el ápex (centro) de la córnea de los coeficientes efectivos del caso rectangular H^{1313} y el caso esférico H^{131} , donde se muestra una tendencia a disminuir el valor numérico a medida que el volumen de fracción V_f tiende a 1, además de ser significativamente menor todos los valores numéricos a medida que el grosor de la lámina R_{Max} aumenta.

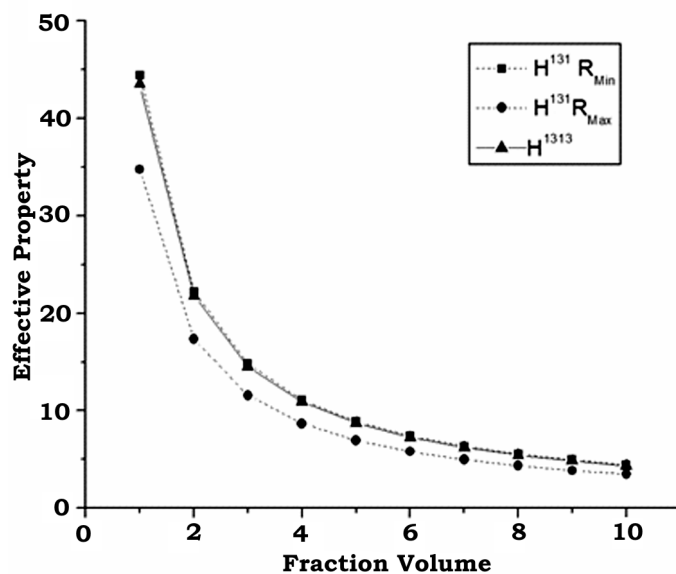


Fig 4 Comparación entre coeficientes efectivos.

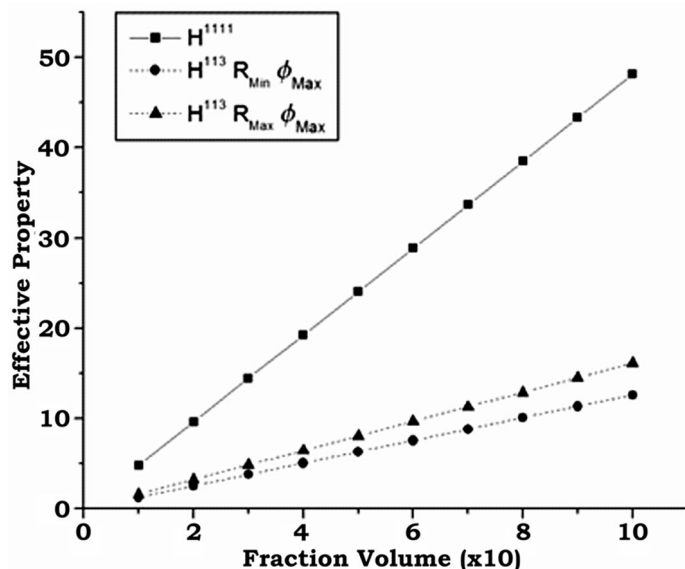


Fig. 5 Comparación entre los coeficientes efectivos.

En la Figura 5, se tiene una comparación entre los coeficientes efectivos plano H^{111} y H^{113} pero ahora tomando los dos valores extremos del grosor de la córnea dados en [5, 6] y analizando su comportamiento en los extremos de la lámina, es decir $\phi_{Max} = 0.82$ Rad. Lo cual no muestra que el efecto de la no linealidad geométrica influye en que los valores numéricos de los H^{113} son siempre menores que los de los H^{111} , lo cual resulta interesante siempre que se pueda explicar coherentemente el significado físico de los coeficientes efectivos analizados.

CONCLUSIONES

El objetivo central de este trabajo ha sido la explicación de una metodología descrita en [1], para hallar las propiedades efectivas de medios cuasi periódicos usando coordenadas curvilíneas. El algoritmo presentado es un método bastante general que está rigurosamente justificado. El mismo puede ser fácilmente implementado computacionalmente. Se muestra la lista de coeficientes efectivos que se determinan en este formalismo y su importancia para determinar aquellos que aportan a la no linealidad geométrica del problema en cuestión. En las gráficas (Figuras 4 y 5) se puede observar cómo afecta este fenómeno en el centro de una estructura con forma esférica y compuesta por varias capas, aunque no resulta posible dar una explicación física inmediata a los valores numéricos calculados del coeficiente efectivo. Sería necesario resolver el problema elástico lineal empleando los coeficientes efectivos calculados y comparar con resultados teóricos y prácticos publicados en el mundo para determinar mejor la adecuación del modelo al interés de los autores de describir el comportamiento de una córnea humana en estado de equilibrio sometida a cargas diversas. El modelo desarrollado ha considerado solamente medios elásticos, pero puede ser generalizado a estructuras cuasi periódicas, donde existan interacciones más complejas entre las propiedades de las fases, por ejemplo acoplamiento de campos mecánicos, eléctricos y magnéticos; lo cual resulta de mucho interés en la ciencia y las aplicaciones de los materiales compuestos. Este trabajo abre así una ventana para la modelación de otras estructuras cuasi periódicas laminadas como la que se estudia en los trabajos [3-6] citados en la literatura.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] B.E. Pobedrya, Mechanics of Composite Materials, Moscow State University Press, Moscow, (1984) in Russian.
- [2] N. Bakhvalov, G. Panasenko. Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media. Mathematics and its Application (Soviet Series). (1989).
- [3] Long-yuan Li, Brian Tighe; Nonlinear analysis of static axisymmetric deformation of the human cornea. Computational Materials Science, 38 (2007) 618-624
- [4] David Huang, Maolong Tang, RajShekhar. Mathematical Model of Corneal Surface Smoothing After Laser Refractive Surgery. American Journal of Ophthalmology, 135 (2003) 267-278.
- [5] Anna Pandolfi, Gerhard A. Holzapfel. Three-dimensional modeling and computational analysis of the human cornea considering distributed collagen fibril orientations. Journal of Biomechanical Engineering. Vol. 130 (2008), pp 061006-1-061006-12.
- [6] D. Cabrera Fernández et Al. Finite element analysis applied to cornea reshaping. Journal of Biomechanical Optics. Vol. 10(6), (2005), pp 1-19.

ABSTRACT. In this work, we show a methodology for the determination of the effective properties of quasi periodic structures in curvilinear coordinates. In order to reach this target, the asymptotic homogenization method developed in [1-2] was used. The results are illustrated for a laminate curvilinear composite in spherical coordinates.