

Mallas adaptativas usando wavelet para diferencias finitas en modelos de pronóstico numérico del tiempo

Adaptive mesh using wavelet for finite differences in weather forecasting models

Maibys Sierra Lorenzo^{1*}, Angela León Mecías², Angel Domingues Chovert³, Evelyn Elisa Martínez Sabarí⁴

Resumen Se propone un algoritmo numérico para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales y dependientes del tiempo, basado en la discretización por diferencias finitas sobre mallas adaptativas. Las mallas se construyen combinando una representación por bloques y la transformada wavelet discreta con bases wavelet obtenidas mediante subdivisión interpolatoria. Como criterio de refinamiento adaptativo y dinámico, se utiliza la magnitud de los coeficientes wavelet en el primer nivel de descomposición de la transformada wavelet discreta. El algoritmo es implementado en FORTRAN 90, lo cual permite un manejo dinámico de memoria, y es acoplado al modelo de pronóstico numérico del tiempo ARPS (Advanced Regional Prediction System). Se demuestra mediante dos casos de estudio que el algoritmo propuesto es computacionalmente menos costoso y más eficiente que el módulo de refinamiento de mallas que viene acoplado originalmente al modelo ARPS.

Abstract We propose a numerical algorithm for the solution of nonlinear and time dependent systems of differential equations, based on finite difference schemes over adaptive meshes. The meshes are constructed by combining a block representation and the discrete wavelet transform with wavelet bases obtained by interpolation subdivision schemes. The magnitude of the wavelet coefficients in the first decomposition level of the discrete wavelet transform is used as an adaptive and dynamic refinement criterion. The algorithm is implemented in FORTRAN 90, which allows a dynamic memory management, and is coupled to the numerical weather forecast model ARPS (Advance Regional Prediction System). It is demonstrated by two study cases that the proposed algorithm is computationally less expensive and more efficient than the mesh refinement module originally coupled to the ARPS model.

Palabras Clave

representación por bloques adaptativa — resolución adaptativa de Ecuaciones Diferenciales Parciales — pronóstico numérico del tiempo

¹ Centro de Física de la Atmósfera, Instituto de Meteorología, Habana, Cuba, maibys.lorenzo@insmet.cu

² Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba, angela@matcom.uh.cu

³ Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos Cachoeira Paulista, São Paulo, Brasil, angel.chovert@cptec.inpe.br

⁴ Programa de Posgrado en Ciencias de la Tierra, Universidad Nacional Autónoma de México, D.F., México, evelyn.elisa@atmosfera.unam.mx

* Autor para Correspondencia

Introducción

La solución numérica con pequeños errores de precisión, y en el tiempo requerido (muchas veces tiempo real) de los modelos matemáticos para el estudio y predicción de fenómenos atmosféricos y climáticos, es una tarea que exige algoritmos rápidos y que brinden soluciones con elevados órdenes de aproximación. Esto se convierte en un reto, teniendo en cuenta que estos modelos están dados por ecuaciones diferenciales

parciales (EDPs) no lineales y dependientes del tiempo. Para resolver estos modelos, utilizando por ejemplo el método de Diferencias Finitas (DF), [31], las regiones geográficas son representadas mediante una malla de puntos tridimensional; donde las coordenadas (x, y, z) de cada punto se clasifican en: coordenadas horizontales (x, y) , longitud y latitud respectivamente y z es llamada la vertical y describe alturas en la capa atmosférica. La distancia horizontal entre puntos adyacentes es conocida como espaciamiento de la malla o resolución.

Mientras más pequeño el espaciamiento (menor escala) mayor resolución. La resolución es un aspecto que diferencia los modelos de pronóstico del tiempo climático ya que, modelos que se usen para estudiar y pronosticar, por ejemplo las turbulencias, que son fenómenos que ocurren en áreas que abarcan un radio de hasta 20 metros con duración de minutos, deben ser resueltos sobre mallas con mayor resolución que aquellos que se utilicen para pronosticar los frentes de huracanes que abarcan áreas entre los 200 y los 2000 Km con días de duración. Sin embargo estos fenómenos que ocurren a diferentes escalas espaciales y temporales no se pueden estudiar de manera aislada ya que interactúan entre ellos. Esta naturaleza multiescalar de los procesos atmosféricos, los cuales además presentan variaciones bruscas en las magnitudes de las variables meteorológicas que los caracterizan, introduce complejidades adicionales en la solución numérica de los modelos matemáticos; particularmente se requieren mallas con pasos de discretización pequeños. El aumento uniforme de la densidad de puntos en las mallas de DF, conduce a un incremento considerable del costo computacional. Para superar esta limitación se han desarrollado alternativas que proponen considerar los esquemas en diferencias finitas sobre mallas adaptativas; refinadas sólo en regiones e intervalos de tiempo requeridos.

Berger y Olinger en [2], introducen por primera vez el refinamiento adaptativo de mallas (RAM), para la integración eficiente de ecuaciones hiperbólicas. El RAM se basa en el uso de una jerarquía de mallas, comenzando con una malla gruesa, e insertando mallas más finas solo en las regiones donde la solución experimenta variaciones bruscas. El criterio utilizado para la detección de las áreas de interés es el error de truncamiento local en la aproximación de la solución basado en la extrapolación de Richardson. En la modelación numérica del tiempo, este método fue aplicado originalmente en [29, 28]. Resultados más recientes pueden ser consultados p.e. en [18, 22, 30]. Sin embargo, con excepción del modelo OMEGA (Operational Multiscale Environment model with Grid Adaptivity) [1], las estrategias adaptativas basadas en RAM no han sido exitosas en este contexto. En la mayoría de los modelos de pronóstico del tiempo, el RAM ha sido aplicado como método de anidamiento de mallas, donde parámetros como: la cantidad de mallas, la dimensión de las mallas, el paso de discretización espacial y temporal, son elegidos fijos a priori, [23, 33].

Con la formalización de la teoría wavelet [3, 5, 21] el concepto multiresolución ha sido estudiado como variante para obtener adaptatividad en la generación de mallas, surgiendo así una categoría de métodos llamados de multiresolución (MR). En este contexto se realiza un nivel de descomposición del algoritmo de la Transformada Wavelet Discreta (TWD), aplicado a los datos representados sobre una malla y mediante un proceso de umbralización de los coeficientes wavelet en la TWD, se define un criterio para el refinamiento de la malla. Las estrategias basadas en multiresolución fueron desarrollados originalmente por Harten en [16] para esquemas conser-

vativos y posteriormente fueron presentadas extensiones en [4, 26]. Dos enfoques de construcción de mallas adaptativas para esquemas en diferencias finitas, que se fundamentan en los métodos MR son: por sus siglas en inglés, el SPR (Sparse Point Representation) [17] y el ABR (Adaptive Block Representation), [11, 10]. En ambos enfoques el modelo de EDPs se resuelve modificando los esquemas en diferencias finitas tradicionales sobre las mallas adaptativas. En el SPR se calcula la TWD a partir de los puntos de la malla y aquellos puntos cuyos coeficientes wavelet en la TWD excedan un umbral prefijado, son retenidos, mientras que el resto se descarta; es decir se transita de una malla con mayor resolución a una con menor resolución. El ABR por su parte, propone la descomposición de la malla en bloques uniformes, cada uno de los cuales puede tener un nivel de refinamiento diferente y se utiliza de igual forma la magnitud de los coeficientes wavelet en la TWD como criterio de refinamiento; en este caso se va de una malla de menor resolución a una de mayor resolución.

En los modelos atmosféricos los métodos MR también han sido probados. En trabajos de aplicación recientes [14, 19, 25], se destacan las propiedades de compresión en las mallas obtenidas, así como la ganancia en el tiempo de cómputo.

En [7] se realiza una comparación detallada entre los métodos basados en AMR y los basados en MR, en cuanto a precisión, compresión de la malla (reducción de cantidad de puntos respecto a un refinamiento uniforme), manejo de la memoria y tiempo de ejecución. Los resultados muestran una relativa superioridad del enfoque MR con respecto al AMR.

El ARPS es un modelo de pronóstico numérico del tiempo (MPNT) desarrollado por la Universidad de Oklahoma, [32, 33], utilizado en la modelación de nubes y de tormentas locales severas como los tornados. Como la generalidad de los MPNT, el ARPS tiene un núcleo llamado dinámico que contiene los modelos físico-matemáticos de EDPs y un núcleo donde se realizan las llamadas parametrizaciones (se aproximan efectos de procesos físicos sobre los que no se tiene mucha información, son muy complejos, ó ocurren a escalas muy pequeñas que no pueden ser incluidos en los modelos numéricos), [24]. El ARPS consta de un módulo llamado ARPSAGRI, donde los modelos de EDPs son resueltos mediante la discretización por diferencias finitas, específicamente con el esquema de Lax-Wendroff, [31], sobre mallas con refinamiento uniforme construidas mediante interpolación con funciones spline. Este módulo originalmente presenta una implementación en FORTRAN 77 del refinamiento adaptativo de mallas AMR [6, 28], sin embargo en este contexto las mallas no cambian con el tiempo y el manejo de memoria es estático. En un trabajo previo de los autores, [12], se realizó una modificación en el módulo ARPSAGRI para introducir mallas adaptativas en el tiempo.

En este trabajo se propone acoplar al modelo ARPS un módulo para la solución de EDPs, mediante esquemas en diferencias finitas sobre mallas adaptativas en espacio y tiempo, generadas según la estrategia ABR. Este nuevo módulo presenta por primera vez el esquema Lax-Wendroff sobre mallas

generadas con ABR. La implementación se realiza en FORTRAN 90, lo cual permite un manejo dinámico de memoria, a diferencia del ARPSAGRI y al mismo tiempo permite aprovechar la estructura computacional de este último. Es importante destacar que la estrategia adaptativa de refinamiento por bloques ABR ha sido ampliamente estudiada en aplicaciones meteorológicas desde el punto de vista académico, ver por ejemplo el trabajo previo de los autores [20]. El resultado que aquí se presenta constituye la primera aplicación a una simulación de un caso real en un sistema de pronóstico del tiempo operativo.

La estructura del trabajo es como sigue. En la sección 1 se presenta el método de construcción de mallas adaptativo, basado en la representación por bloques combinada con un criterio de umbralización de los coeficientes wavelet de la transformada wavelet discreta. En la sección 2 se presenta el módulo denominado ARPSABR que incluye la implementación de esquemas en diferencias finitas sobre las mallas adaptativas. Se explican los pasos para la corrida del modelo de pronóstico numérico del tiempo ARPS con este nuevo módulo acoplado. En la sección 3, mediante dos casos de estudio, se evalúa el desempeño del ARPSABR. Las conclusiones del trabajo se resumen en la cuarta y última sección.

1. Generación de mallas adaptativas usando wavelet

En el contexto de los modelos de pronóstico numérico del tiempo vamos a considerar la solución de las EDPs sobre mallas rectangulares (longitud-latitud), [24].

Una malla bidimensional uniforme R se define como

$$R = \{\mu = (k\Delta_x, l\Delta_y), 0 \leq k \leq N, 0 \leq l \leq M\}, \quad (1)$$

donde N es la cantidad de puntos en x (longitud) y M la cantidad de puntos en y (latitud), Δ_x y Δ_y representan el paso de discretización en cada dirección respectivamente; en este caso se consideran constantes fijas. En la Figura 1(izquierda) se muestra un ejemplo de malla uniforme.

Una malla adaptativa A está compuesta por varias mallas uniformes con distinta resolución; los pasos Δ_x y Δ_y varían según el nivel de refinamiento que se denota por j ; $j = 0$ denota la malla con menor resolución (más gruesa), de A , que se denota por A_0 :

$$A_0 = \{\mu = (k\Delta_x^0, l\Delta_y^0), 0 \leq k \leq N, 0 \leq l \leq M\}.$$

Aplicando un refinamiento, es decir tomando Δ_x y Δ_y más pequeños se puede obtener por ejemplo una malla como la que aparece a la derecha en la derecha Figura 1), donde si A_j es la representación más fina de A se tiene

$$A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_j = A; \quad (2)$$

Utilizando este tipo de mallas adaptativas, es posible obtener una malla más fina, pero igualmente uniforme; el número de datos aumenta en igual proporción en toda la malla. Sin

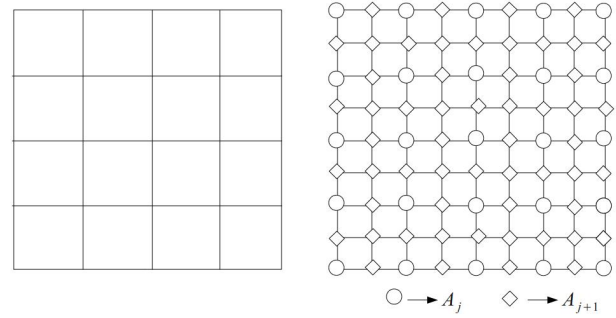


Figura 1. Rejilla uniforme (izquierda) y Rejilla adaptativa (derecha).

embargo si solo se requiere refinar en determinadas subrejillas, esta variante no es eficiente.

Lo más eficiente es establecer alguna condición que permita determinar las áreas dónde es necesario refinar. Una de las variantes más utilizadas es la representación adaptativa por bloques, conocida por sus siglas en inglés ABR (adaptive block representation) [11, 10]. Esta consiste en dividir o particionar la rejilla original en subrejillas o bloques de igual dimensión, lo más usual es dividir en cuatro bloques.

1.1 Representación por bloques de mallas adaptativas.

Sea A_j una malla rectangular con nivel de refinamiento j , se define B_j^λ como bloque de A_j de la siguiente forma

$$B_j^\lambda = \{\mu = \lambda + (k\Delta_x^j, l\Delta_y^j), 0 \leq k \leq N^j, 0 \leq l \leq M^j\}, \quad (3)$$

tal que $B_j^\lambda \subset A_j$, λ es el punto extremo izquierdo superior a partir del cual se inicia el particionamiento. Este proceso se puede repetir nuevamente para el bloque B_j^λ obteniéndose cuatro nuevos bloques, como se observa en la Figura 2, que utilizando el refinamiento diádico estarían en el nivel $j + 1$,

$$B_j^\lambda \rightarrow \{B_{j+1}^{\lambda_{NW}}, B_{j+1}^{\lambda_{NE}}, B_{j+1}^{\lambda_{SW}}, B_{j+1}^{\lambda_{SE}}\}. \quad (4)$$

La representación por bloques permite la utilización de un árbol cuaternario como estructura de datos. Siendo B_j^λ un bloque padre en el nivel j , los bloques $B_{j+1}^{\lambda_{NW}}, B_{j+1}^{\lambda_{NE}}, B_{j+1}^{\lambda_{SW}}$ y $B_{j+1}^{\lambda_{SE}}$ serían sus hijos y estarían en el nivel $j + 1$ del árbol (Figura 3 arriba). El árbol cuaternario, partiendo de la malla original, se obtiene tomando $B_0^\lambda = A_0$ y luego de ejecutar el proceso de refinamiento diádico y el particionamiento j veces, se obtiene un árbol cuaternario con $j + 1$ niveles, como se muestra en la Figura 3 (abajo) para $j = 2$. Para obtener la malla A_j basta con unir todos los bloques del nivel j ,

$$A_j = \bigcup_\lambda B_j^\lambda.$$

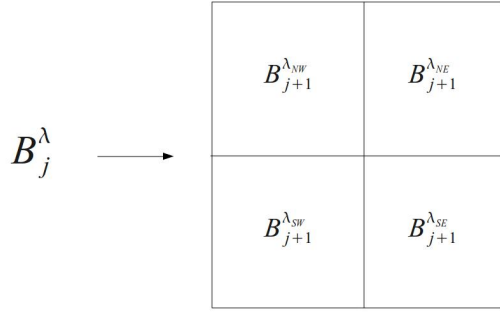


Figura 2. División del bloque B_j^λ en cuatro bloques con $j+1$ niveles de refinamiento.

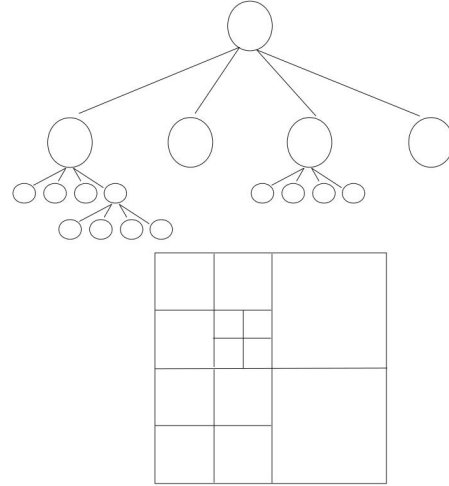


Figura 4. Árbol cuaternario incompleto de 4 niveles (arriba) y rejilla adaptativa correspondiente (abajo).

Esta representación permite que el criterio de refinamiento que se utilice se aplique de forma recursiva para cada bloque, posibilitando el refinamiento solo en las áreas de interés. En ese caso el árbol cuaternario puede tener bloques que no tengan hijos como se muestra en la Figura 4.

Con la unión de los bloques de cada nivel del árbol se obtiene la malla adaptativa A , particionada por bloques y con refinamiento variable en cada nivel,

$$A = \bigcup_j \bigcup_\lambda B_j^\lambda. \quad (5)$$

1.2 Refinamiento adaptativo usando wavelet

En este trabajo se utilizará, la magnitud de los coeficientes wavelet en la transformada wavelet discreta (TWD) [3, 21], como indicadores para determinar cuál bloque B_j^λ de la malla $A_j = \bigcup_\lambda B_j^\lambda$ es necesario subdividir. Las bases wavelet serán generadas por el algoritmo de subdivisión interpolatoria (SI), [8, 13, 15].

Consideremos que sobre la malla rectangular A_j se tiene una matriz de datos que representan los valores numéricos $u^j(t_0, x_k, y_l)$, donde $x_k = k\Delta_x^j$, $y_l = l\Delta_y^j$, $0 < k < N^j$, $0 < l < M^j$, para $t_0 = 0$ correspondientes a las condiciones iniciales y de frontera de un sistema de EDPs en la modelación de un determinado proceso atmosférico.

Para una resolución j y para un valor fijo de la longitud $x_k = \text{const}$ se tiene un vector $u^j(0, \text{const}, y_l)$, $0 < l < M^j$ que denotaremos por $\{s_l^j\}_{l=0}^{M^j}$. El algoritmo de la TWD permite obtener una descomposición en niveles con resolución menor o igual que j . Nosotros estamos interesados en realizar un solo paso de la descomposición,

$$\sum_{l=0}^{2^j-1} s_l^j \phi_l^j(y) = \sum_{l=0}^{2^{j-1}-1} s_l^{j-1} \phi_l^{j-1}(y) + \sum_{l=0}^{2^{j-1}-1} d_l^{j-1} \psi_l^{j-1}(x), \quad (6)$$

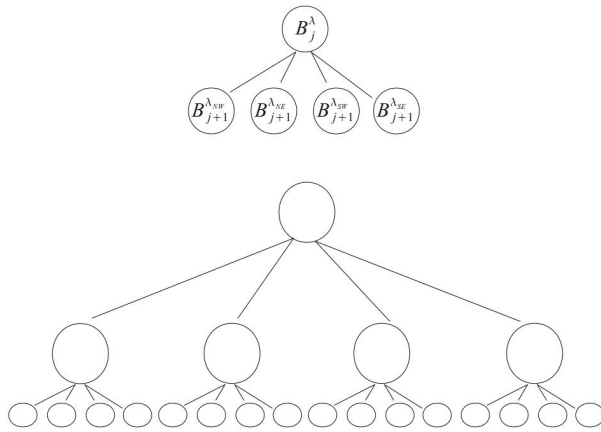


Figura 3. Rama del árbol cuaternario (arriba) y árbol cuaternario completo de 3 niveles (abajo).

donde s_l^j , son los coeficientes de aproximación (contienen la información de los datos en cada nivel j), d_l^j son los coeficientes wavelet ó coeficientes de detalle (contienen la diferencia de información entre los niveles j y $j-1$), $\phi(y)$ es llamada función de escala y $\psi(y)$ es llamada la wavelet madre; ϕ_l^{j-1} y ψ_l^{j-1} son traslaciones enteras y dilataciones diádicas de dichas funciones, respectivamente. La cantidad de datos por filas y por columnas se toma como una potencia entera de 2.

En este trabajo la función de escala y la base wavelet son construidas mediante subdivisión interpolatoria y los coeficientes son calculados según los algoritmos en [8, 13],

$$\begin{aligned} s_l^{j-1} &= \sum_l \hat{h}_{l-2l} s_l^j, \\ d_l^{j-1} &= \sum_l \hat{g}_{l-2l} s_l^j \end{aligned} \quad (7)$$

\hat{h} y \hat{g} se calculan con expresiones que dependen del orden del polinomio de interpolación que se use para la subdivisión.

Aplicando la TWD unidimensional primero por filas, se obtendrá una matriz formada por los coeficientes $s_{k,l}^{j-1}$, $k = 1, \dots, N$, $l = 1, \dots, \frac{M}{2}$, $d_{k,l}^{(1)j-1}$, $k = 1, \dots, N$; $l = \frac{M}{2} + 1, \dots, M$. Aplicando la TWD a las nuevas columnas, se obtiene una matriz de coeficientes

$$\begin{aligned} s_{k,l}^{j-1}, k &= 1, \dots, \frac{N}{2}, l = 1, \dots, \frac{M}{2}, \\ d_{k,l}^{(1)j-1}, k &= 1, \dots, N; l = \frac{M}{2} + 1, \dots, M, \\ d_{k,l}^{(2)j-1}, k &= \frac{N}{2} + 1, \dots, N; l = 1, \dots, \frac{M}{2}, \\ d_{k,l}^{(3)j-1}, k &= \frac{N}{2} + 1, \dots, N; l = \frac{M}{2} + 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (8)$$

Esta nueva matriz, de igual dimensión que la original, es el resultado de aplicar un paso de la TWD bidimensional.

Esta representación tiene como ventajas que no hay un aumento de la información que se almacena pues $s^j = s^{j-1} + d^{j-1}$ y la señal en su más alta resolución puede ser recuperada de forma exacta, ya que el proceso de transformación es inversible.

En este contexto la TWD se calcula para cada bloque B_{j-1}^λ , y se obtienen los coeficientes wavelets $d_{k,l}^{(i)j-1}$ asociados a los puntos

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)j_{k,l}} &= \mu + (2k \triangle_x^j, (2l+1) \triangle_y^j) \\ \lambda^{(2)j_{k,l}} &= \mu + ((2k+1) \triangle_x^j, 2l \triangle_y^j) \\ \lambda^{(3)j_{k,l}} &= \mu + ((2k+1) \triangle_x^j, (2l+1) \triangle_y^j), \end{aligned}$$

que caracterizan la diferencia entre las mallas A_j/A_{j-1} .

Para utilizar los coeficientes wavelets como indicadores de refinamiento se fija un umbral ε , y computacionalmente se define un parámetro que se llamará criterio de refinamiento C_ε . Denotando $D(B_{j+1}^\lambda)$ como el conjunto de los coeficientes wavelets; si para todos los coeficientes $d_{k,l}^{(i)j} \in D(B_{j+1}^\lambda)$, se

cumple $|d_{k,l}^{(i)j}| < \varepsilon$, $C_\varepsilon = 0$ (no se subdivide el bloque). En caso contrario, $C_\varepsilon = 1$ (el bloque es subdividido).

La generación de la rejilla se inicia tomando $B_0^\lambda = A_0$, particionando B_0^{NW} según (4) y calculando C_ε . Los bloques con $C_\varepsilon = 0$ se añaden al árbol como hojas y para aquellos con $C_\varepsilon = 1$ se repite el proceso hasta que todos sean añadidos como hojas. La dimensión y la cantidad de los bloques que componen la malla inicial en la implementación del ABR, varía según el proceso a modelar y el dominio de la solución. Comummente se inicia con mallas de dimensión $N^j = M^j = 16$ and $N^j = M^j = 32$, ver [11]. En [20], trabajo previo de este colectivo de autores, la cantidad de bloques inicial se fijó en 4, con dimensión $N^j = \frac{1}{2}N$ y $M^j = \frac{1}{2}M$, con el objetivo de insertar el ABR en un modelo de pronóstico numérico del tiempo, con un mínimo de cambios en el código fuente, aprovechando la estructura del modelo para el anidamiento de las mallas.

Las mallas se van ajustando espacial y temporalmente y los esquemas en diferencias finitas se van resolviendo desde las mallas más gruesas hasta las más finas, para cada instante de tiempo. Por un problema de espacio y complejidad de los sistemas no se muestran aquí las modificaciones.

2. Módulo de refinamiento adaptativo de mallas para el ARPS

El ARPS [32, 33], es un modelo regional, se usa en un rango espacial que abarca desde pocos metros hasta cientos de kilómetros, de pronóstico numérico del tiempo (MPNT) tridimensional (3D). Como todos los MNTTP está formado por un núcleo dinámico, donde se resuelven los modelos de EDPs, en este caso, las ecuaciones de Navier-Stokes que describen el flujo atmosférico como un fluido compresible y toma en cuenta un gran número de procesos microfísicos que interactúan con la dinámica del sistema. Aunque los modelos son (3D), se resuelven numéricamente mediante el método de diferencias finitas sobre mallas rectangulares; las magnitudes físicas con variaciones en la dirección vertical se parametrizan. El ARPS originalmente tiene acoplado un módulo denominado ARPSA-GRI, que se basa en una implementación en FORTRAN 77 de la estructura de datos de la técnica RAM; desarrollado por Skamarock y Klemp en [28] y que se presenta mediante una interfaz llamada 'refinamiento adaptativo de rejillas generalizado (AGRI)'. En su concepción original, refina en tiempo y espacio y posibilita la creación de varias mallas de diferentes tamaños y orientación en cada nivel. Sin embargo, no es capaz de seleccionar adaptativamente, en tiempo de ejecución, las áreas de interés a refinar y tampoco realiza la reestructuración de los distintos niveles jerárquicos de refinamiento. Presenta además el inconveniente, de que no permite procesar más de dos niveles de refinamiento. Con el objetivo de añadir la funcionalidad de refinamiento adaptativo en tiempo de ejecución, autores de este trabajo, implementaron el proceso de selección adaptativa y la reestructuración de mallas en [12].

Para esta investigación se elaboró un módulo en FOR-

TRAN 90, denominado ARPSABR, que permite el acoplamiento y la ejecución de un algoritmo de refinamiento adaptativo de mallas bidimensionales, mediante la representación por bloques. Este módulo está adaptado para acoplarse a la estructura de integración del modelo ARPS, en particular del módulo ARPSAGRI.

Para correr el ARPS con el ARPSABR, se añadió un bloque de parámetros en el fichero *arps.input*; vinculados a la configuración de integración adaptativa, a saber:

- nwav** Orden del esquema de subdivisión interpolatoria
- thres** Umbral de refinamiento.
- maxlev** Número máximo de niveles de refinamiento.

En este módulo el manejo de las mallas, condiciones de frontera y tratamiento de los niveles verticales se realiza igual que en el ARPSAGRI. Sin embargo para interpolar en lugar de splines se usan las mismas funciones wavelets a través de la Subdivisión Interpolatoria y como criterio de refinamiento, la magnitud los coeficientes wavelet, descrito anteriormente.

Es importante destacar que este módulo, al ser implementado totalmente en FORTRAN 90, supera las limitaciones de la memoria estática a las que está sujeto el ARPSAGRI. Esto conlleva a que el proceso de reestructuración de las mallas se realiza 'en caliente' y no basado en reinicios de corridas. El ARPSABR permite el refinamiento en varios niveles incluyendo más de una rejilla por nivel. A continuación se presenta el proceso de corrida del ARPS con el ARPSABR.

1. **Inicialización:** Se inicializan las variables del sistema de ecuaciones. Se selecciona la variable patrón (variable a la que se le aplicará el criterio de refinamiento para definir la estructura de la malla inicial A_j^λ , con $j = 0$).
2. **Descomposición de la malla en bloques.**
3. **Cálculo de los coeficientes wavelet:** Para cada bloque B_j^λ se aplica un paso de la TWD.
4. **Aplicación del criterio de refinamiento:** Se chequea para cada bloque la condición de refinamiento. Para los nuevos bloques refinados se repite el algoritmo desde el paso 2, hasta que se alcance el nivel máximo de refinamiento o no se requiera refinar.
5. **Integración adaptativa:** La solución de los esquemas en Diferencias Finitas se realiza comenzando en el menor nivel de refinamiento hasta el máximo nivel.
6. **Reajuste de la malla adaptativa:** La malla adaptativa se recorre con el objetivo de retirar o añadir más bloques (paso 3).

3. Resultados y Discusión

Para evaluar el desempeño del módulo ARPSABR (acoplado al ARPS), que combina el método de diferencias finitas con el algoritmo adaptativo de refinamiento de mallas basado

en representación por bloques y umbralización de los coeficientes wavelet de la TWD, se consideran dos casos de estudio. En ambos se demuestra que el algoritmo propuesto es menos costoso computacionalmente (en cuanto a tiempo de corrida, ocupación y manejo dinámico de memoria) cuando se compara con la estrategia de solución del módulo ARPSAGRI que implementa la solución de los esquemas en diferencias finitas sobre una mallas refinadas uniformemente. Para el primer caso de estudio los valores iniciales ($t = 0$) y las condiciones de frontera (de Dirichlet) para los modelos de EDPs que se resuelven con el ARPS, corresponden a un tornado ocurrido en Oklahoma, EU, en 1977; aquí se incluyó forzosamente la presencia de una perturbación llamada burbuja elipsoidal, cuya presencia es detectada a través de las variaciones de la temperatura potencial; en el segundo caso los datos para inicializar el ARPS se obtienen en tiempo real, de la salida numérica del sistema de pronóstico WRF (Weather Research & Forecast) [9], para un día escogido arbitrariamente.

3.1 Burbuja elipsoidal

La corrida para la solución de los modelos se inicializa con datos obtenidos durante el evento meteorológico conocido como la tormenta de supercelda tornádica ocurrida el 20 de mayo de 1977 en Oklahoma, Estados Unidos. Este caso de estudio está incorporado por defecto en el modelo ARPS para mostrar sus funcionalidades. Se escogió la temperatura potencial θ como variable meteorológica para realizar el análisis. El experimento consiste en realizar simulaciones numéricas con el ARPS original, donde el refinamiento de las mallas sobre las que se resuelven los esquemas en diferencias finitas se realiza de manera uniforme y compararlas con simulaciones realizadas con el ARPS incorporándole el módulo ARPSABR que se propone en este trabajo, donde el refinamiento de estas mallas se realiza de manera adaptativa. La comparación se realiza en términos de: cantidad de nodos que se incluyen en el proceso de refinamiento, utilización y manejo de la memoria de almacenamiento, tiempo total de ejecución y además se calcula el error en la aproximación de θ .

El dominio sobre el que se toman los valores iniciales y las condiciones de fronteras para el modelo de EDPs, está representado por una malla de $N = 64 \times M = 64 \times 32$ puntos, con resolución de 1 km en la escala horizontal y 500 m en la vertical. Las dimensiones de la malla en este contexto dependen de la dimensión espacial en la mesoescala del fenómeno que se modela. Las simulaciones se realizaron con una configuración tridimensional muy sencilla que no tuvo en cuenta los efectos de la orografía, efectos de la radiación, uso de suelo, fuerza de fricción y fuerza de Coriolis¹. Se incluyó el esquema de parametrización de la microfísica para la fase líquida. Se usó, para la turbulencia, la parametrización 1.5 TKE (Turbulent Kinetic Energy) mezcla turbulenta, con el número de turbulencia de Prandtl igual a 1, [24].

El campo inicial de datos es homogéneo en la escala horizontal, con variaciones solo entre los niveles de la escala

¹Parámetro que tiene en cuenta los efectos de la rotación de la Tierra

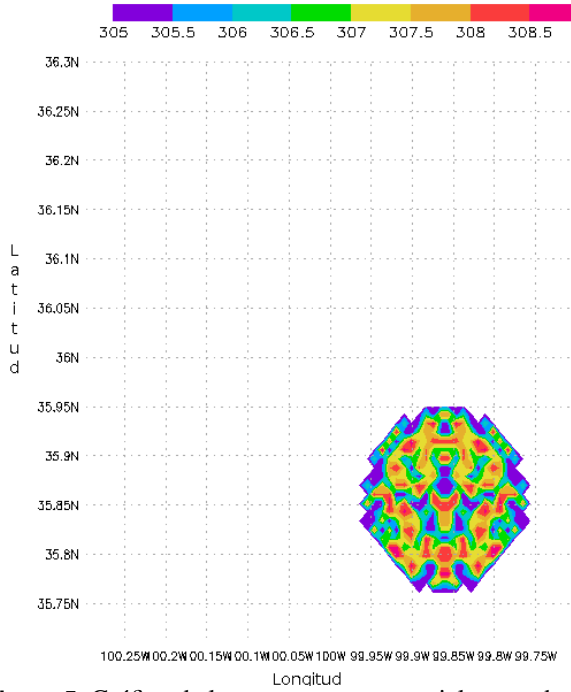


Figura 5. Gráfico de la temperatura potencial en grados Kelvin, que muestra la burbuja elipsoidal insertada en la inicialización del ARPS.

vertical. Por esta homogeneidad en los datos en la escala horizontal que es la que estamos analizando y para destacar la efectividad de construir una malla adaptativa con nuestra propuesta, se introduce una perturbación inicial forzada, dada por una burbuja elipsoidal (de ahí el nombre para el caso de estudio), definida por:

$$\Delta\Theta = \Theta_0 \cos^2\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \quad (\beta \leq 1). \quad (9)$$

Θ_0 es la amplitud de la perturbación en el centro del disturbio, se seleccionó un valor igual a 4 K (grados Kelvin). β es un radio adimensional dado por:

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{x-x_c}{x_r}\right)^2 + \left(\frac{y-y_c}{y_r}\right)^2 + \left(\frac{z-z_c}{z_r}\right)^2}, \quad (10)$$

donde x_c , y_c y z_c son las coordenadas del centro de la burbuja; x_r , y_r y z_r representan el radio en cada dirección. La burbuja fue centrada en $x_c = 48$ km, $y_c = 16$ km y $z_c = 1.5$ km y como radios fueron elegidos los valores $x_r = 10$ km, $y_r = 10$ km, $z_r = 1.5$ km.

En la Figura 5 se grafica la temperatura potencial y se observan los cambios en el área donde se encuentra insertada la burbuja elipsoidal.

3.1.1 Evaluación del ARPSABR

En el cuadro 1 se muestra el comportamiento del error promedio (denotado por err) en la aproximación de θ , para

diferentes pasos temporales, $t = 15, 30, 45, 60$ minutos

$$err = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L |\theta_p^U - \theta_p^A| \quad (11)$$

donde L es la cantidad total de puntos de la malla, θ_p^U y θ_p^A denotan el valor de la temperatura potencial en el punto p , calculado sobre la malla con refinamiento uniforme U con el menor paso espacial (ARPS original) y sobre la malla con refinamiento adaptativo A , (ARPSABR), respectivamente.

Se trabajó con un factor de refinamiento espacial y temporal igual a 2, permitiendo un solo nivel de refinamiento, por lo que en la escala horizontal la resolución máxima permitida es 500m. El paso temporal dt para la rejilla gruesa fue $dt = 6s$ y para la integración de las ondas acústicas, $dt = 1s$. Como umbral de truncamiento para el refinamiento se tomó $thres = 0.5$, lo cual está relacionado con el valor de err para la variable patrón; como se observa tienen el mismo orden de magnitud.

Cuadro 1. Comportamiento del error para diferentes plazos de tiempo.

Plazo de tiempo	1 hora	45 min	30 min	15 min
err	0.81	0.87	0.63	0.21

En relación con la cantidad de nodos utilizados, que influye en el espacio de memoria utilizado, en el cuadro 2, se muestran los valores obtenidos para una hora de simulación, realizando adaptatividad desde la malla inicial ($t = 0$), pero sin reestructuración de rejillas en el tiempo.

Cuadro 2. Datos obtenidos para simulaciones con el ARPSABR y con la malla refinada uniformemente con paso espacial de 500m, para 1 h de pronóstico y $j_{max} = 1$.

	No. nodos	Almacenamiento	
		máximo	ntemp
ARPSABR	7168 x 32	17569585	13559833
Uniforme fina	16384 x 32	57233129	40511123

Se observa que la cantidad de nodos es significativamente más pequeña (9216 nodos menos) con refinamiento adaptativo (ARPSABR) que con refinamiento uniforme con paso espacial 500m. El número de nodos usados por esta última, es un orden de magnitud mayor. En términos de compresión, se alcanza un 56.25 %. El arreglo ntemp indica la dimensión del arreglo principal (ocupación de memoria) en el momento en que finaliza la ejecución del modelo. Se observa que en la variante adaptativa la ocupación de memoria es menor. De hecho, el máximo espacio consumido en memoria por ARPSABR durante la ejecución, es menor que el total de memoria utilizada en la variante con refinamiento uniforme.

La Figura 6, muestra la estructura de mallas creada para este caso con nivel de refinamiento máximo $j = 1$, superpuesta

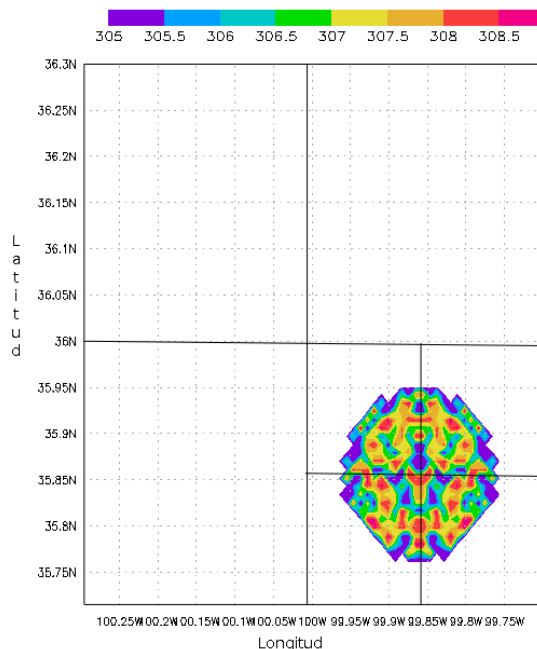


Figura 6. Malla adaptativa correspondiente con el gráfico que muestra la burbuja elipsoidal insertada en la inicialización del ARPS.

al campo de temperatura potencial. El bloque B_1^{ASE} abarca la región donde existe un cambio brusco, como se muestra en el gráfico, en esta área se produce el refinamiento.

Para comparar el tiempo total de ejecución, se realiza un desglose, en el tiempo que demora el refinamiento por las distintas vías y el tiempo que consume el cálculo de la solución por diferencias finitas. En el cuadro 3, se observa que las operaciones relacionadas con el refinamiento adaptativo de las mallas no incrementa significativamente el tiempo total de ejecución. Como promedio, el ABR consume el 4 % del tiempo total de ejecución. Además se observa que, para los cálculos sobre la malla refinada uniformemente, los tiempos de ejecución superan a la variante adaptativa en un orden de magnitud.

3.2 Inicialización con los datos del modelo WRF

El objetivo de este experimento es validar el comportamiento del módulo ARPSABR en cuanto a compresión de los datos, criterio de refinamiento, creación y eliminación de mallas, operaciones de rejillas y compresión.

Se tomaron como condiciones iniciales y de fronteras, para la corrida del ARPSABR, los de la salida numérica del WRF. La salida del WRF se corresponde con el dominio de 3km del Sistema de Pronóstico Inmediato (SisPI). El día escogido para la simulación fue el 9 de enero de 2015, teniendo como duración del pronóstico 6 horas. En la Figura 7, se muestra el área geográfica que abarca el dominio de simulación.

Se escogió como variable patrón la componente horizontal del viento. Se realizó un cambio en las dimensiones de la malla con respecto a las dimensiones originales usadas en

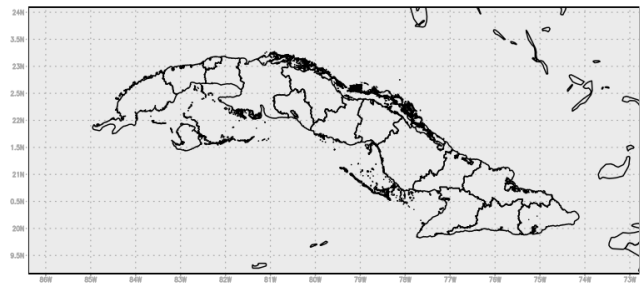


Figura 7. Dominio de 3km de resolución.

SisPI. Las nuevas dimensiones son $N = 512 \times M = 256 \times 32$, de manera que estas son potencias de 2 como requiere el ABR. El resto de los parámetros configurables del WRF fueron dispuestos como en [27]. El paso temporal dt para la malla gruesa es $dt = 12s$. La configuración establecida para el módulo ARPSABR que se propone en este trabajo, contó con 3 niveles de refinamiento y umbral de refinamiento $thres = 0.0001$; lo cual indica que la resolución máxima alcanzable (si fuera necesario), es de 0.75km y el paso temporal dt de acuerdo con esta resolución sería 3s.

Es importante señalar que realizar una corrida con refinamiento de malla uniforme, con paso espacial en la escala horizontal $dx = dy = 0,75km$, tendría un costo computacional muy elevado; el tamaño de la rejilla sería $N = 2048 \times M = 1024 \times 32$, para un total de 67108864 nodos. Es por ello que no se presenta esta simulación. Se muestran los gráficos para las corridas con la rejilla uniforme más gruesa y la adaptativa.

La Figura 8 muestra el patrón de comportamiento de la componente horizontal del viento $u(t, x, y)$, sobre el área geográfica en estudio para $t = 0$. La imagen de la izquierda, muestra el comportamiento de $u(0, x, y)$ sobre la malla inicial para el ARPSABR, (ver Figura 9). Es importante señalar que a diferencia del experimento anterior donde la malla con los valores iniciales no es modificada, en este caso el proceso de refinamiento comienza desde la propia malla inicial. La imagen de la derecha muestra el comportamiento inicial de $u(t, x, y)$ sobre la malla original. Visualmente el comportamiento de u es similar en ambas imágenes; las mayores variaciones (que no son muy abruptas) se observan en las zonas sobre tierra, mientras que en el mar los valores son más suaves. Esta suavidad en los datos iniciales indica que no serán necesarios muchos niveles de refinamiento para una adecuada representación de los procesos en el momento inicial. No obstante, de acuerdo con el patrón de u , se espera mayor cantidad de niveles de refinamiento en los bloques que abarcan las zonas terrestres.

En la Figura 9 se muestra la estructura de la malla inicial y se señalan los niveles de refinamiento de algunos bloques. El bloque etiquetado con nivel 0 ($j = 0$), mantiene la información tal como fue recibida en la inicialización, o sea, en esta área no se realiza refinamiento y por tanto tiene 3km de resolución. En este bloque se encuentra la mayor zona cubierta por mar. Los bloques etiquetados con niveles $j = 1$ y $j = 2$ tienen

Cuadro 3. Tiempos de ejecución para diferentes plazos de pronóstico. La resolución máxima alcanzada en la rejilla fina uniforme y la simulación con refinamiento adaptativa es de 500 m.

Plazo de tiempo	1 hora		45 min		30 min		15 min	
ARPSABR	827 s	23 s	625 s	19 s	337 s	15 s	86 s	7 s
	arpsolver	ABR	arpsolver	ABR	arpsolver	ABR	arpsolver	ABR
	850(~14 min)s		644(~11 min)s		352(~6 min)s		93(~2 min)s	
Uniforme fina	4857(~81 min)s		3633(~61 min)s		2208(~37 min)s		981(~16 min)s	

resolución 1.5 km y 0.75 km respectivamente. De los bloques representados solo 8 alcanzan el nivel de refinamiento 2, lo que se traduce en una resolución de 0.75km. Tres cuartos del dominio necesitaron al menos un nivel más de refinamiento. La cantidad de nodos total es 4751360. Esto representa el 7.1 % del total de nodos de la malla uniforme más fina; o lo que es lo mismo se obtiene un 91.9% de compresión en la inicialización del ARPS utilizando el ARPSABR.

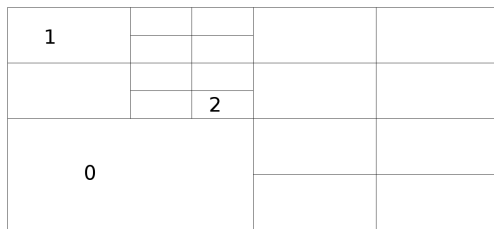


Figura 9. Estructura de la rejilla adaptativa para $t = 0$.

La evolución en el tiempo de u se muestra en la Figura 10: en a) y c) resultante de la corrida del ARPSABR, b) y d) como resultado de la corrida sobre la malla gruesa, para los tiempos $t = 3600s$ y $t = 7200s$ respectivamente. Durante este período, se observa que u sufre fluctuaciones ligeras. La solución numérica empleando adaptatividad es consistente con la solución numérica clásica. En las imágenes a) y c), fundamentalmente para $t = 7200s$, se observa, al sur de la Isla de la Juventud sobre el mar Caribe, la aparición de una circulación con valores pequeños de la variable, que no se capta en la corrida con la rejilla gruesa.

La Figura 11 muestra los cambios ocurridos en la malla adaptativa. En correspondencia con el comportamiento de u , en la primera hora, el número de bloques (16) con resolución de 0.75km se duplica con respecto a la malla inicial. En las áreas donde la resolución inicial ($t = 0$) fue la correspondiente a la salida del WRF ($dx = dy = 3km$), fue necesario aplicar dos niveles de refinamiento. En términos de cantidad de nodos se obtuvo un total de 7340032, representando el 10.9 % del total de nodos que se obtendrían si se hubiera refinado de manera uniforme. En la segunda hora se mantuvo la estructura de la malla con una compresión del 89 % con respecto al tamaño de la malla que resultaría de un refinamiento uniforme. Durante estas horas de simulación se comprueba que las mallas se van reestructurando de acuerdo con el desarrollo de los procesos

atmosféricos simulados. Nótese que sobre la región (al sur de la Isla de la Juventud), se crearon 8 nuevos bloques con nivel de refinamiento $j = 2$. Es precisamente en esta área donde se observan nuevas características meteorológicas, que no están presentes en la simulación con pasos espaciales mayores.

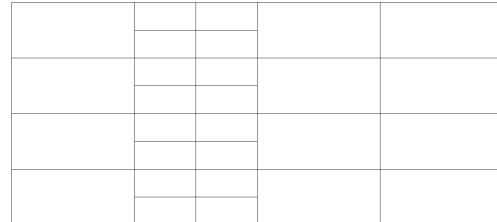
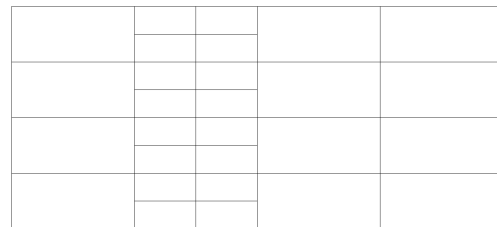


Figura 11. Rejilla adaptativa para $t = 3600s$ (arriba) y $t = 7200s$ (abajo) de simulación.

4. Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un módulo (ARPSABR) para la solución del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes del modelo de pronóstico numérico ARPS, mediante esquemas en diferencias finitas sobre mallas con adaptatividad espacial y temporal; estrategia que puede ser aplicada en otros contextos. Las mallas adaptativas se construyeron utilizando una representación por bloques combinada con una umbralización de los coeficientes wavelet en la transformada wavelet discreta con bases wavelet interpolatorias. La validación de esta propuesta se realizó mediante el análisis de dos casos de estudio resueltos con el ARPS con el nuevo módulo ARPSABR, lo cual hasta donde conocemos, se realiza por primera vez. Se demostró que considerar los esquemas en diferencias finitas sobre mallas regulables en tiempo y espacio permite resolver

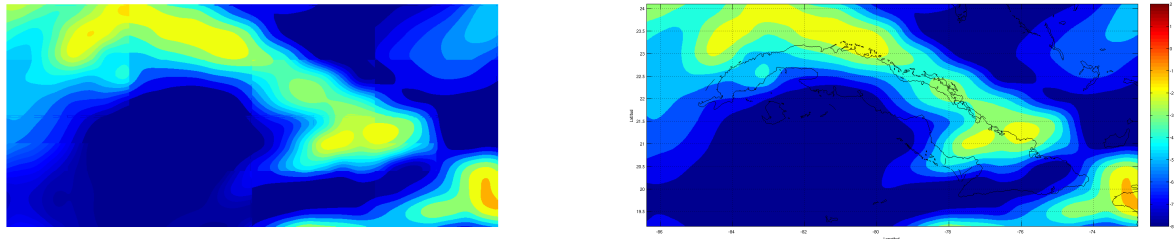


Figura 8. Componente horizontal del viento u para $t = 0$: sobre la malla con refinamiento adaptativo (izquierda) y sobre la malla gruesa con $dx = dy = 3km$ (derecha).

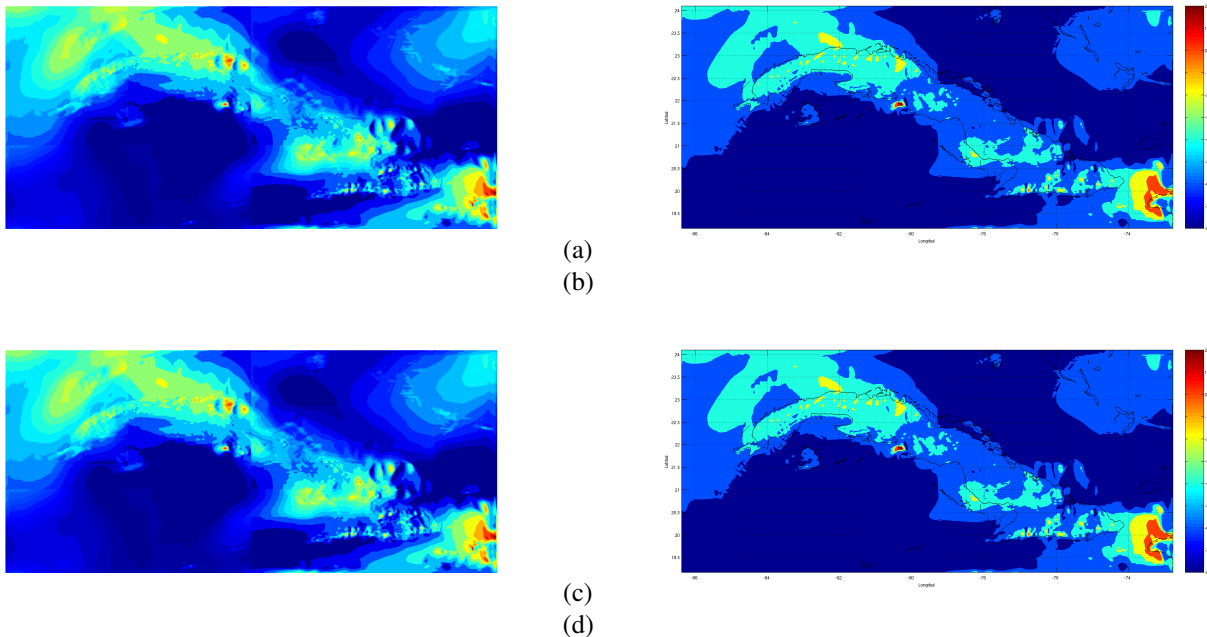


Figura 10. Comportamiento de u para: $t = 3600s$ (a) sobre la rejilla adaptativa y (b) sobre la rejilla gruesa uniforme; $t = 7200s$ (c) sobre la rejilla adaptativa y (d) sobre la rejilla gruesa uniforme

procesos atmosféricos en escalas muy pequeñas, así como analizar la interacción entre fenómenos que tienen lugar a diferentes escalas; aspecto que es y sigue siendo un reto para los modelos climáticos. Se demostró que ARPSABR, consume solo el 4 % del tiempo de ejecución total, logrando una compresión del 89 % del tamaño de la malla si esta fuera refinada uniformemente, lo cual influye sensiblemente en la memoria de almacenamiento. Como trabajo futuro se prevee paralelizar la estrategia, así como estudiar, si con la adaptatividad, existe pérdida de precisión en la solución.

Referencias

- [1] D. P. Bacon, N. N. Ahmad, Z. Boybey, T. J. Dunn, M. S. Hall, P. C. S. Lee, R. A. Sarma, M.D. Turner, K. T. Waight, S. H. Young, and J. W. Zack. A dynamically adapting weather and dispersion model: the operational multiscale environment model with grid adaptivity (omega). *Mon. Wea. Rev.*, 128:2044–2076, 2000.
- [2] M. Berger and J. Olinger. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal Computational Physics*, 53:484–512, 1984.
- [3] Ch. Chui. *Wavelets: A mathematical tool for signal processing*. SIAM, 1997.
- [4] A. Cohen, S. M. Kaber, S. Muller, and M. Postel. Fully adaptive multiresolution finite volume schemes for conservation laws. *Math. Comp.*, 72:183–225, 2003.
- [5] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, 1988.
- [6] L. Debreu, C. Voulard, and E. Blayo. Agrif: Adaptive grid refinement in fortran. *Computer and Geosciences*, 34:8–13, 2008.

- [7] R. Deiterding, M. O. Domingues, S. M. Gomes, and K. Schneider. Comparison of adaptive multiresolution and adaptive mesh refinement applied to simulations of the compressible euler equations. *SIAM J. Math. Anal. J. Sci. Comput.*, 38:173–193, 2016.
- [8] G. Deslauriers and S. Dubuc. Symmetric iterative interpolation processes. *Constr. Approx.*, 5:49–68, 1989.
- [9] Mesoscale & Microscale Meteorology Division. *ARW Version 3 Modeling System User's Guide. Complementary to the ARW Tech Note*. NCAR: Boulder, Colorado, USA.
- [10] M. O. Domingues. *Análise Wavelet na Simulação Numérica de Equações Diferenciais Parciais com Adaptabilidade Espacial*. Universidade Estadual de Campinas-Departamento de Matemática Aplicada. PhD thesis, 2001.
- [11] M. O. Domingues, S. M. Gomes, and L. M. A. Diaz. Adaptive wavelet representation and differentiation on block-structured grids. *Applied Numerical Mathematics*, 47:421–437, 2003.
- [12] A. Domínguez-Chovert, M. Sierra-Lorenzo, and N. Quintana-Rodríguez. Implementación de los procesos de selección adaptativa y reestructuración de rejillas en el modelo de pronóstico del tiempo arps. *Ciencias de la Tierra y el Espacio*, 16:201–215, 2015.
- [13] D. L. Donoho. Interpolating wavelet transform. Technical report, Department of Statistics, Stanford University, 1992.
- [14] T. Dubos and N. K. R. Kevlahan. A conservative adaptive wavelet method for the shallow-water equations on staggered grids. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 2013.
- [15] S. Dubuc. Interpolation through an iterative scheme. *J. Math. Anal. and Appl.*, 114:185–204, 1986.
- [16] A. Harten. Multiresolution algorithms for the numerical solution of hyperbolic conservation laws. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 48:1305–1342, 1995.
- [17] M. Holmström. *Wavelet based methods for time dependent PDEs*. Uppsala University. PhD thesis, 1997.
- [18] C. Jablonowski, R. C. Oehmke, and Q. F. Stout. Block-structured adaptive meshes and reduced grids for atmospheric general circulation models. *Phil. Trans. R. Soc. London A*, 367:4497–4522, 2009.
- [19] N. K. R. Kevlahan, T. Dubos, and M. Aechtner. Adaptive wavelet simulation of global ocean dynamics using a new brinkman volume penalization. *Geosci. Model Dev.*, 8:3891–3909, 2015.
- [20] E. E. Martínez-Sabari and M. Sierra-Lorenzo. Simulación de un vórtice de velocidades barotrópicas mediante una técnica de refinamiento adaptativo. *Revista Cubana Meteorología*, 21:18–30, 2015.
- [21] Y. Nievergelt. *Wavelets Made Easy*. Birkhauser, 1999.
- [22] N. Nikiforakis. Mesh generation and mesh adaptation for large scale earth-system modelling. *Phil. Trans. R. Soc. London A*, 367:4473–4481, 2009.
- [23] P. Penven, G. Cambon, T. Tan, P. Marchesiello, and L. Debreu. *ROMS-AGRIF ROMSTOOLS User's Guide*. Institut de Recherche pour le Developpement (IRD), 2010.
- [24] Sr. Pielke and A. Roger. *Mesoscale meteorological modeling*, volume 98. Academic press, 2013.
- [25] Sh. M. Reckinger and O. V. Vasilyev. Adaptive wavelet collocation method on the shallow water model. *Journal of Computational Physics*, 271:342–359, 2014.
- [26] O. Roussel, K. Schneider, A. Tsigulin, and H. Bockhorn. A conservative fully adaptive multiresolution algorithm for parabolic pdes. *J. Comput. Phys.*, 188:493–523, 2003.
- [27] M. Sierra-Lorenzo, A. L. Ferrer-Hernández, R. Hernández-Valdés, Y. González-Mayor, R. C. Cruz-Rodríguez, I. Borrajero-Montejo, and C. F. Rodríguez-Genó. Sistema automático de predicción a mesoescala de cuatro ciclos diarios. Technical report, Instituto de Meteorología de Cuba, 2015.
- [28] W. Skamarock and J. B. Klemp. Adaptive grid refinement for two-dimensional and three-dimensional nonhydrostatic atmospheric flow. *Monthly Weather Review*, 121:788–804, 1993.
- [29] W. Skamarock, J. Oliger, and R. Street. Adaptive grid refinement for numerical weather prediction. *Journal Computational Physics*, 80:27–60, 1989.
- [30] A. St-Cyr, C. Jablonowski, J. M. Dennis, H. M. Tufo, and S. J. Thomas. A comparison of two shallow-water models with nonconforming adaptive grids. *Mon. Weather Rev.*, 136:1898–1922, 2008.
- [31] J. W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Springer Verlag, 1995.
- [32] M. Xue, K. K. Droegemeier, and V. Wong. The advanced regional prediction system (arps): A multi-scale nonhydrostatic atmospheric simulation and prediction model. part i: Model dynamics and verification. *Meteorol. Atmos. Phys.*, 75:161–193, 2000.
- [33] M. Xue, K. K. Droegemeier, V. Wong, A. Shapiro, and K. Brewster. *ARPS Version 4.0 user's guide.*, 1995.