

---

# Promediación de un proceso conductivo sobre la estructura de tipo esqueleto bidimensional más simple

*Averaging a conductive process over the simplest two-dimensional framework*

*Juan Manuel Regalado Gómez*

*Julián Bravo Castillero*

*Raúl Guinovart Díaz*

*Reinaldo Rodríguez Ramos*

*Universidad de La Habana, Facultad de Matemática y Computación*

---

## Resumen

Se estudia un problema conductivo sobre la estructura de tipo esqueleto bidimensional más simple, se obtiene el problema homogeneizado, mediante un método basado en la promediación de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que describen tal proceso y el principio de división. La estructura de tipo esqueleto que se debe considerar resulta de la intersección de un dominio con frontera suficientemente suave y una región rectangular que consiste en dos sistemas periódicos de “finas” franjas que se extienden en la dirección de los ejes coordenados. Se enuncia un teorema que garantiza la proximidad entre la solución del problema original y la solución del problema promediado, en la norma adecuada.

## Abstract

In order to study a conductive problem over the simplest two-dimensional framework, a method based on the averaging of the partial differential equations describing such processes and the splitting principle, is considered. The skeletal structure is taken as the intersection of a domain with smooth boundary and the simplest two-dimensional rectangular framework, consisting of two periodic systems of “thin” strips stretched in the coordinate direction. It is also stated a proved a theorem on the closeness of the original problem to the averaged one, in the proper norm.

## 1. Introducción

En numerosas ramas de la ciencia y la ingeniería se han adoptado materiales heterogéneos que consisten en distintos volúmenes de compuestos (homogéneos a un nivel mayor que el molecular) con diferentes propiedades, véase Panasenko (2007) [6]. Estos materiales compuestos están constituidos por al menos dos fases y son fabricados para lograr mejores valores de las propiedades que presentan sus componentes por separado. Se dice además, que poseen estructura periódica, cuando están formados por elementos recurrentes (células o celdas), cuyas dimensiones se asumen mucho menores que las dimensiones espaciales macroscópicas.

Un caso particular de medio heterogéneo con estructura periódica, lo constituyen las estructuras perforadas, donde el vacío es uno de los compuestos. Perforada significa, desde el punto de vista matemático, que las ecuaciones no están definidas en todo el interior del medio y que, por tanto, existen condiciones de contorno en la frontera de los huecos (donde no se define la ecuación).

Los materiales compuestos, en general, pueden presentar un gran número de heterogeneidades y la caracterización de sus propiedades se puede llevar a cabo a escala local, pero resulta, en la práctica, mucho más interesante dar con una caracterización global del compuesto. Digamos un comportamiento general (o efectivo), sin atender a las fluctuaciones ocasionadas por sus heterogeneidades.

En este trabajo se considera un caso particular del problema estacionario de la conducción del calor sobre una estructura perforada bidimensional de tipo esqueleto. Tales estructuras presentan grandes huecos y poca cantidad de material, concentrado en barras (franjitas en el caso bidimensional).

Este tipo de estructura ha sido adoptada fundamentalmente en la ingeniería civil —construcción de puentes, instalaciones industriales, viviendas, soportes para líneas de energía eléctrica—, pero también cuenta con otras aplicaciones. Por ejemplo: para el estudio del movimiento de aguas subterráneas y el escurreimiento de sustancias a través del suelo, se emplea como modelo geométrico un sistema capilar, el cual puede tratarse como una estructura de este tipo, véase Martinsson & Babuška (2007) [5].

Para estudiar el problema conductivo mencionado anteriormente, en la estructura de tipo esqueleto bidimensional más simple, se propone un método basado en la combinación de técnicas de perturbación a escalas múltiples y de promediación de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que describen ese proceso. Este trabajo se basa en un estudio de esos métodos combinados, siguiendo en lo fundamental la exposición del Capítulo 8 de Bakhvalov & Panasenko (1989) [2] y en lo adelante está estructurado de la siguiente manera:

La segunda sección está dedicada a la descripción geométrica de la estructura y la formulación de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que describen el proceso conductivo con sus respectivas condiciones de contorno. En la tercera sección se aplica el método de homogeneización asintótica en la búsqueda de una solución aproximada que dependerá del segundo parámetro pequeño (relacionado con el espesor de las franjas). En la sección cuarta se construye el problema promediado definitivo, basándose en el principio de división para la estructura en consideración. En la quinta sección, para casos límite, como el caso isótropo, se ilustra la importancia de los resultados, comparando la solución original del problema, calculada a través de métodos numéricos, con la solución del problema promediado. La sección final está dedicada a las conclusiones, a comentar posibles trabajos futuros y al conocido resultado sobre la investigación de la solución para el problema en la celda periódica localizado en [2].

## 2. Formulación de problema

Sea  $S_\varepsilon$  una malla definida sobre un plano, cuyos nodos tienen por coordenadas  $(k_1\varepsilon, k_2\varepsilon) = k\varepsilon$ , donde  $k_1, k_2$  son números enteros y  $\varepsilon > 0$  un parámetro pequeño. La malla consiste en líneas rectas  $\Pi_{k_2}^1, \Pi_{k_1}^2$  que pasan por los nodos y son paralelas a los ejes  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente. Denótese por  $B_{k_2}^1, B_{k_1}^2$  las franjas formadas por puntos cuya distancia a  $\Pi_{k_2}^1$  y a  $\Pi_{k_1}^2$  respectivamente, es menor que  $\mu\varepsilon$ , donde  $\mu > 0$  es el segundo parámetro pequeño.

A la unión de todas las franjas  $B_{k_2}^1, B_{k_1}^2$  se le denomina estructura rectangular periódica  $B$ :

$$B = \bigcup_{k=-\infty}^{k=\infty} B_{k_2}^1 \cup B_{k_1}^2$$

$B$  es un sistema de finas franjas que se extienden a lo largo de cada una de las direcciones de los ejes coordenados.

Sea  $G$  un dominio con frontera  $\partial G \in C^\infty$ , la cual es independiente de  $\varepsilon$  y de  $\mu$ .

En el dominio  $B \cap G$ , considérese un campo térmico estacionario con condiciones de aislamiento en la frontera interior y temperatura constante en la frontera de  $G$ .

$$Pu \equiv \frac{\partial}{\partial x_r} \left( A_{rm} \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) + f(x) = 0, \quad x \in B \cap G \quad (0.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial B \cap G \quad (0.2)$$

$$u = 0, \quad x \in \partial G \cap \overline{B} \quad (0.3)$$

En las ecuaciones anteriores  $x = (x_1, x_2)$ , los coeficientes  $A_{rm}$  son constantes y la forma cuadrática  $A_{rm} \eta_r \eta_m$  es simétrica y definida positiva. El símbolo  $\partial/\partial \nu$  representa la derivación a lo largo del vector conormal:  $\frac{\partial}{\partial \nu} \equiv n_r A_{rm} \frac{\partial}{\partial x_m}$  donde  $n_r$  es el coseno del ángulo entre la normal exterior y el eje  $x_r$ .

La resolución de (0.1)-(0.3) por métodos numéricos se dificulta enormemente para  $\varepsilon \ll 1, \mu \ll 1$  debido a que el tamaño del paso de la malla debe ser de un orden mucho menor que  $\varepsilon$ , por lo tanto se propone una investigación asintótica del problema.

## 3. Método de homogeneización asintótica

Para  $\mu$  fijo la estructura puede ser considerada como un medio poroso periódico con período de la celda  $\varepsilon$ , y por tanto tiene

sentido, para cada  $\mu$ , buscar la solución en la forma de una expansión asintótica en términos de  $\varepsilon$  solamente.

Considérese la expansión asintótica de segundo orden ( $u_i(x, y) = 0, \forall i \geq 3$ ), donde los coeficientes son funciones 1-periódicas con respecto a la segunda variable

$$(u_i(x, y+1) = u_i(x, y) \quad \forall i = 1, \dots, s) :$$

$$u^{(2)}(x, y) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y) \quad (0.4)$$

Nótese que, dada las consideraciones anteriores,  $u^{(2)}$  también dependerá de  $\mu$ .

Para toda función  $u(x, y)$ , considerando independencia entre las variables rápidas y lentas y aplicando la regla de la cadena es fácil comprobar que:

$$Pu + f = \frac{\partial}{\partial x_r} \left( A_{rm} \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) + \varepsilon^{-1} \left[ \frac{\partial}{\partial x_r} \left( A_{rm} \frac{\partial u}{\partial y_m} \right) + \frac{\partial}{\partial y_r} \left( A_{rm} \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) \right] + \quad (0.5)$$

$$+ \varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial y_r} \left( A_{rm} \frac{\partial u}{\partial x_m} \right) + f(x)$$

Denotando por  $L_{\alpha\beta} u \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left( A_{rm} \frac{\partial u}{\partial \beta_m} \right)$  al operador lineal involucrado en la expresión anterior es posible escribir:

$$Pu + f = L_{xx} u + \varepsilon^{-1} [L_{xy} u + L_{yx} u] + \varepsilon^{-2} L_{yy} u + f$$

Sustituyendo (0.4) en (0.1) y agrupando según las potencias de  $\varepsilon$  se obtiene:

$$L_{\varepsilon} u^{(2)} + f = \varepsilon^{-2} L_{yy} u_0 + \varepsilon^{-1} [L_{yy} u_1 + L_{xy} u_0 + L_{yx} u_0] + L_{yy} u^2 + L_{xy} u^1 + L_{xx} u^0 + f + \varepsilon [L_{xy} u_2 + L_{yx} u_2 + L_{xx} u_1] + \varepsilon^2 L_{xx} u_2$$

La expansión asintótica debe satisfacer la condición de solución asintótica formal de la ecuación, por tanto, tiene sentido imponer la anulación del miembro derecho de la expresión anterior. Sin embargo, para obtener la ecuación homogeneizada basta exigir que sea  $O(\varepsilon)$ .

Igualando a cero los términos de orden  $\varepsilon^{-2}$ ,  $\varepsilon^{-1}$  y  $\varepsilon^0$  se obtienen las siguientes condiciones en el interior del medio:

$$L_{yy} u_0 = 0 \quad (0.6)$$

$$L_{yy} u_1 = -L_{xy} u_0 - L_{yx} u_0 \quad (0.7)$$

$$L_{yy} u_2 = -L_{xy} u_1 - L_{yx} u_0 - f \quad (0.8)$$

Los términos de orden  $\varepsilon^1$  y  $\varepsilon^2$  involucran la discrepancia.

De manera análoga con (0.5), haciendo la misma consideración de independencia entre las variables y aplicando regla de la cadena, se verifica para la condición de frontera interior la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} u(x, y) &= n_r A_{rm} \frac{\partial u}{\partial x_m} + \varepsilon^{-1} n_r A_{rm} \frac{\partial u}{\partial y_m} = \\ &= \frac{\partial}{\partial v_x} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial v_y} \end{aligned} \quad (0.9)$$

Sustituyendo la expansión en la condición de frontera interior y agrupando en potencias de  $\varepsilon$  se obtiene:

$$\left. \frac{\partial u^{(2)}}{\partial v} \right|_{\partial B} = \varepsilon^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial v_y} + \varepsilon^0 \left[ \frac{\partial u_1}{\partial v_y} + \frac{\partial u_0}{\partial v_x} \right] + \left. \varepsilon \left[ \frac{\partial u_2}{\partial v_y} + \frac{\partial u_1}{\partial v_x} \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial u_0}{\partial v_y} \right|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}$$

Luego se requieren las siguientes relaciones para las funciones  $u_0, u_1$  y  $u_2$ :

$$\left. \frac{\partial u_0}{\partial v_y} \right|_{y \in \partial B} = 0 \quad (0.10)$$

$$\left. \left[ \frac{\partial u_1}{\partial v_y} + \frac{\partial u_0}{\partial v_x} \right] \right|_{y \in \partial B} = 0 \quad (0.11)$$

$$\left. \left[ \frac{\partial u_2}{\partial v_y} + \frac{\partial u_1}{\partial v_x} \right] \right|_{y \in \partial B} = 0 \quad (0.12)$$

De esta manera se ha obtenido (bajo el supuesto de independencia entre las variables) una familia de problemas con condiciones de contorno de Neumann que determinan a las funciones  $u_i, i = \overline{0, 2}$ . Para la existencia de solución generalizada en el espacio de funciones apropiado, de estos problemas auxiliares, existe una condición necesaria y suficiente (ver Apéndice 1).

De la aplicación reiterada de tal condición se obtienen la forma de la expansión asintótica de segundo orden (véase Bakhvalov & Panasenko (1989) [2]):

$$u^{(2)}(x, y) = v_0(x) + \varepsilon N_{i_1}(y) \frac{\partial v_0(x)}{\partial x_{i_1}} + \varepsilon^2 N_{i_1 i_2}(y) \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \quad (0.13)$$

así como los llamados problemas locales que determinan las funciones 1-periódicas  $N_{i_1}, N_{i_1 i_2}$ , las cuales dependen solamente de  $\mu$  y de  $y$ :

1. Encontrar  $N_{i_1}$  como solución 1-periódica del problema:

$$L_{yy} N_{i_1} = 0 \quad y \in B_y \cap Q \quad (0.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_y} (N_{i_1} + y_{i_1}) = 0 \quad y \in \partial B_y \quad (0.15)$$

El dominio  $B_y$  es la imagen de  $B$  por la variable  $y = x/\varepsilon$  y  $Q = \left\{ y \in \square^2 \mid -\frac{1}{2} < y_i < \frac{1}{2}, i = 1, 2 \right\}$  es el cuadrado unidad centrado en el origen, donde se puede garantizar la existencia y unicidad salvo una constante arbitraria de la solución en la clase de las funciones 1-periódicas de  $W_1^1(B_r \cap Q)$  (ver Apéndice 1).

2. La función  $N_{i_1 i_2}$ , debe buscarse como solución 1-periódica del problema:

$$L_{yy} N_{i_1 i_2} = h_{i_1 i_2} - 2A_{i_1 i_2}(y) \frac{\partial N_{i_1}(y)}{\partial y_m} - A_{i_1 i_2}(y), \quad y \in B_y \cap Q \quad (0.16)$$

$$n_r \left( A_{rm}(y) \frac{\partial N_{i_1 i_2}}{\partial y_m} + A_{ri_1}(y) N_{i_2} \right) = 0, \quad y \in \partial B_y \quad (0.17)$$

donde  $h_{i_1 i_2}$  es una constante determinada por la condición necesaria y suficiente de existencia de la solución en la clase de las funciones 1-periódicas para el problema anterior (ver Apéndice 1):

$$h_{i_1 i_2} = \frac{1}{mes(B_y \cap Q)} \left\langle A_{i_1 m(y)} \frac{\partial N_{i_2}(y)}{\partial y_m} + A_{i_1 i_2}(y) \right\rangle_{B_y \cap Q} \quad (0.18)$$

La función  $v_0(x)$ , que depende solamente de  $x$  y de  $\mu$ , es solución del problema promediado:

$$h_{ii} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} + f(x) = 0, \quad x \in G \quad (0.19)$$

$$v_0|_{\partial G} = 0 \quad (0.20)$$

el cual se obtiene de aplicar la condición necesaria y suficiente antes mencionada, para el problema auxiliar asociado a la ecuación (0.8).

La solución del problema promediado (0.19)-(0.20) satisface formalmente la condición (0.1) y la condición (0.3) con una precisión  $O(\varepsilon)$  y la condición con una precisión de  $O(\varepsilon^2)$ . Véase Bakhvalov & Panasenko (1989) [2], pp. 135-137.

Nótese que, según las consideraciones hechas hasta el momento, el carácter rápidamente oscilante del problema original no ha sido eliminado, pues el problema promediado (0.19)-(0.20) se ha obtenido para  $\mu$  fijo y existe por tanto dependencia respecto al segundo parámetro pequeño.

## 4. Principio de división y problema promediado

Se hace necesario determinar cómo se comporta la solución de (0.19)-(0.20) a medida que  $\mu$  toma valores “muy pequeños”. En esta sección se enuncia un resultado que determina qué ocurre con el operador promediado (operador asociado al problema promediado) cuando  $\mu \downarrow 0$ .

### 4.1.1 Problemas locales

sobre cada una de las franjas y coeficientes efectivos

Primeramente se necesitan definir los problemas locales sobre cada una de las franjas

$$B_y^1 = \{y \in \square^2: |y_2| < \mu\}, B_y^2 = \{y \in \square^2: |y_1| < \mu\}$$

de manera independiente:

$$L_{yy} N_{i_1}^j = 0, \quad y \in B_y^1 \quad (0.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (N_{i_1}^j + y_{i_1}) = 0, \quad y \in \partial B_y^1 \quad (0.22)$$

donde las funciones  $N_{i_1}^j$  son 1-periódicas en  $y_j$  ( $j = 1, 2$ ).

### Observación 4.1

No es difícil comprobar que la solución de (0.21)-(0.22) viene dada por:

$$N_{i_1}^j = \begin{cases} -y_{i_1}, & i_1 \neq j, \\ -A_{i_1 i_1}^{-1} A_{i_1 i_1}, & i_1 = j. \end{cases} \quad (0.23)$$

### 4.1.2 Principio de división

para la estructura bidimensional

Sea  $\Lambda$  el operador definido a continuación:

$$\Lambda v_0 \equiv -\hat{b}_{i_1 i_2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} = mes(B_y \cap Q) f(x)$$

donde

$$\hat{b}_{i_1 i_2} = \int_{B_y \cap Q} \left( A_{i_1 m} \frac{\partial N_{i_2}}{\partial y_m} + A_{i_1 i_2} \right) dy$$

La función  $N_{i_2}$  es la solución del problema sobre la celda periódica (0.14)-(0.15). Denótese por  $L_0$  la parte principal del operador  $\Lambda$  cuando  $\mu \rightarrow 0$ .

El operador promediado a lo largo de la franja  $B_y^i$  es el operador:

$$\Lambda^i \equiv -\hat{b}_{i_1 i_2} \frac{\partial^2}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}, \quad i = 1, 2 \quad (0.24)$$

donde

$$\hat{b}_{i_1 i_2} = \int_{B_y^i \cap Q} \left( A_{i_1 m} \frac{\partial N_{i_2}^j}{\partial y_m} + A_{i_1 i_2} \right) dy, \quad (0.25)$$

$$\hat{b}_{i_1 i_2}^i = \partial_{i_1 i} \partial_{i_2 i} A_{ii} = 2\mu \delta_{i_1 i} \delta_{i_2 i} (A_{ii} - A_{i\bar{i}} - A_{ii}^{-1} - A_{\bar{i}i}), \quad (0.26)$$

La función  $N_{i_2}^i$  es solución de (0.21)-(0.22) (problema local sobre cualquiera de las franjas). Se denota por  $\hat{L}_0^i$  a la parte principal de  $\Lambda^i$  (operador promediado a lo largo de la franja  $B_y^i$ ) cuando  $\mu \rightarrow 0$ .

### Teorema 4.1

*Principio de División para el Operador Promediado*

La parte principal del operador promediado cuando  $\mu \rightarrow 0$  es igual a la suma de los operadores promediados a lo largo de las franjas  $B_y^i$ :

$$\hat{L}_0 = \hat{L}_0^1 + \hat{L}_0^2$$

Las relaciones (0.24), (0.25) y (0.26) implican que (no hay suma por  $i$ ). Por lo tanto:

$$L_0 = \sum_{i=1}^2 A_{ii} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Este principio proporciona una forma de calcular la parte principal del operador promediado cuando el segundo parámetro pequeño tiende a cero y por tanto permite construir un problema promediado sobre todo el dominio  $G$  (independiente de  $\varepsilon$  y de  $\mu$ ).

#### Teorema 4.2

Sea  $u(x)$  una solución de los problemas (0.1)-(0.3) y sea  $v_0(x)$  una solución del problema:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( A_{11} \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( A_{22} \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial x_2} \right) = f(x) = 0, \quad x \in G \quad (0.27)$$

$$\tilde{v}_0|_{\partial G} = 0 \quad (0.28)$$

donde:

$$A_{11} = \frac{(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})}{2}, \quad A_{22} = \frac{(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})}{2} \quad (0.29)$$

Entonces se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{\sqrt{M}} \|u - \tilde{v}_0\|_{L^2(B \cap G)} = O(\sqrt{\varepsilon + \mu}), \quad (0.30)$$

donde  $M = \text{mes}(G \cap B) = O(\mu)$  es el área del dominio  $B \cap G$ .

El resultado anterior, así como su demostración se pueden encontrar Bakhvalov & Panasenko (1989) [2], pp. 262-272 y en Cioranescu & Paulin [3], pp. 37-40.

## 5. Aplicaciones del método para casos límite

Para el caso isótropo  $A_{rm} = \delta_{rm}A$ , ( $A > 0$ ), (0.1)-(0.3) puede ser interpretado como el problema de difusión de una sustancia en una roca con fisuras llenas de agua, donde  $A$  es el coeficiente de difusión de la sustancia en el agua. En este caso la estructura bi-dimensional  $B$ , modela un sistema rectangular de grietas con amplitud  $2\mu\varepsilon$ , llenas de agua.

**Observación 5.1.** Este modelo no es una aproximación muy precisa, pues el sistema de grietas de una roca es una estructura mucho más irregular.

Teniendo en cuenta el teorema 4.2 y multiplicando toda la ecuación por  $\mu$ , los coeficientes efectivos, según este simple

modelo para el problema considerado, tienen el siguiente comportamiento global isótropo:

$$A_{11} = A_{22} = 2\mu\varepsilon$$

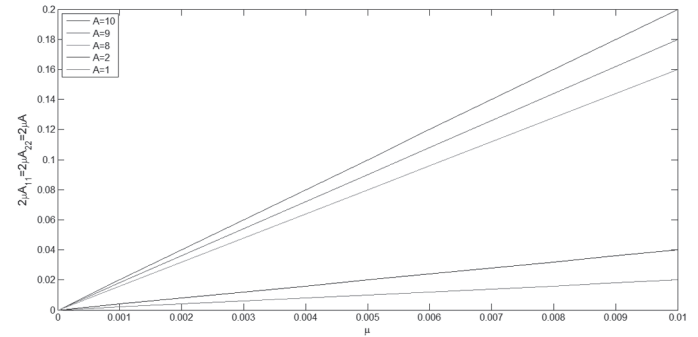


Fig. 1 Dependencia lineal de los coeficientes efectivos respecto a  $\mu$ .

**Observación 5.2.** Este comportamiento lineal, respecto al espesor de las franjas, que predice la fórmula anterior, también ha sido reportado para propiedades elásticas de modelos tridimensionales piezoeléctricos. Ver figuras 9 y 10 de Kalamkarov et al. (2009) [4].

La ecuación promediada para este problema es:

$$-2\mu A \Delta v_0 = 4\mu f$$

El problema de Poisson determinado por la ecuación anterior sobre el disco unidad  $D = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ , con la condición de frontera de Dirichlet:  $v_0 = 0, x \in \partial D$ , es un problema correcto. Ver Antuña (2012) [1], pp. 317-321.

Para  $f \equiv 1$  y  $A = 2$  el problema promediado sobre el disco unidad, tiene la siguiente solución analítica exacta:

$$v_0(x) = \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)}{4}$$

donde  $x = (x_1, x_2)$ .

A continuación se compara la cercanía de la solución exacta del problema homogeneizado con la solución del problema original, calculada aproximadamente para algunos valores de  $\varepsilon$  y de  $\mu$ , mediante el método de los elementos finitos, dividiendo el dominio en miles de triángulos (de 2 552 hasta 9 182 triángulos).

$\sup  u - v_0  \quad (f \equiv 1, A = 2)$			
	$\varepsilon = 0.5$	$\varepsilon = 0.25$	$\varepsilon = 0.125$
$\mu = 0.25$	0.1049	0.1180	0.1164
$\mu = 0.125$	0.1901	0.1169	0.0895
$\mu = 0.0625$	0.1909	0.1206	0.0664



El hecho de que para  $\varepsilon = 0.5$ , el supremo de la diferencia entre la solución del problema homogeneizado y la solución numérica del problema original crezca a medida que  $\mu$  se hace menor, se debe al hecho de que la frontera circular no llega a ser cubierta de manera perfecta por el medio periódico que se investiga.

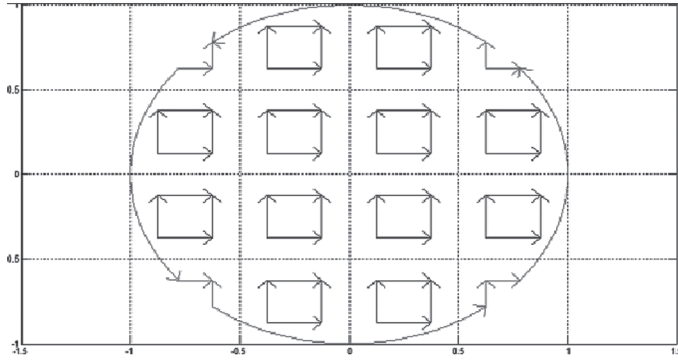


Figura 2 Condiciones de frontera para  $\varepsilon = 0.5$ .

### 5.0.1 Medio anisótropo con $A_{11} = A_{22}$

Para el caso en que los coeficientes  $A_{12}$  y  $A_{21}$  son distintos de cero, pero los coeficientes en la diagonal de la matriz son iguales ( $A_{11} = A_{22} = A$ ), los coeficientes efectivos serán iguales (pues además la matriz se asume simétrica) y se podrán calcular mediante la fórmula:

$$A_{11} = A_{22} = 2\mu A(1 - \sigma^2),$$

donde  $\sigma = A_{12} | A = A_{21} | A$

Debido al carácter definido positivo de la matriz  $A_{rm}$  se tiene que  $0 < \sigma^2 < 1$ . La expresión anterior permite observar que cuando  $A_{rm} |_{r=m} \square A$  los coeficientes efectivos para este problema, tienen un comportamiento muy cercano a los del caso isótropo.

El problema homogeneizado en este caso, considerando a la estructura limitada por el disco unidad como anteriormente, tiene la forma:

$$-2\mu A(1 - \sigma^2) \Delta v_0 = 4\mu f, \quad x \in D \quad (0.31)$$

$$v_0 = 0, \quad x \in \partial D \quad (0.32)$$

La solución exacta del problema anterior viene dada por:

$$v_0(x) = \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)}{4(1 - \sigma^2)}$$

No es difícil verificar que la diferencia entre esta solución y la solución del problema homogeneizado para el caso isótropo está acotada, es  $o(\sigma^2)$ , cuando  $\sigma \rightarrow 0$ .

donde  $v_{10}$  es la solución para el caso isótropo  $v_{A0}$  y la solución de (5.1)-(5.2).

## 6. Conclusiones

El carácter rápidamente oscilante del problema estudiado en este artículo dificulta encontrar tanto su solución exacta como una solución aproximada mediante métodos numéricos. En este sentido se ha obtenido, combinando del MHA, empleado en la construcción de una solución aproximada dependiente del segundo parámetro pequeño, y el principio de división para justificar el operador promediado propuesto cuando  $\mu$  tiende a cero, un problema equivalente definido sobre un medio homogéneo, cuya resolución numérica es mucho más fácil y para el cual se tiene un estimado de la proximidad entre su solución y la solución del problema inicial. En este sentido mediante ejemplos numéricos sencillos y casos límites se ilustró la importancia que tienen los resultados.

Una continuación natural de este trabajo la constituye el estudio de otras estructuras de tipo esqueleto, bidimensionales y tridimensionales. Dígase por ejemplo, estructuras donde alguna de las barras (franjas en el caso bidimensional) se extiende en una dirección no coordenada. Resulta de gran interés extender estos resultados al estudio de otras propiedades (elásticas, eléctricas y piezo-eléctricas).

## Apéndice

En el presente acápite se recoge el conocido resultado sobre la investigación de la solución para el problema en la celda periódica tratado en el trabajo y localizado en [2].

### A1: Teorema de existencia

y unicidad para el problema sobre la celda

Sea  $Q = \{y \square^s | 0 < y_i < 1, \quad i = 1, \dots, s\}$ . Consideremos un conjunto  $\mathcal{A}$  que consiste en un número finito de dominios dentro de  $Q$  y que se extienden completamente a todo de manera 1-periódica. Denotemos por  $\mathcal{A}$  la unión de todos los conjuntos así obtenidos. Asumiremos que  $\partial\mathcal{A}$  es una variedad infinitamente diferenciable y el dominio  $\frac{\square^s}{\mathcal{A}}$  es conexo. Sea  $T_s$  el

toro que se obtiene a partir de  $Q$  al identificar los hiperplanos  $\{y_i = 0\}$  y  $\{y_i = 0\}$  ( $i = 1, \dots, s$ ). Por  $\mathcal{A}$  entenderemos el conjunto en  $T_s$ , que corresponde al conjunto  $\mathcal{A} \subset Q$ , y  $n_i(y)$  son los cosenos directores del vector de la normal a  $\partial\mathcal{A}$  en  $y$ .

### Teorema

Para cualquier función vectorial  $u(y) \in W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)$  tal que se tenga la siguiente desigualdad:

$$\left\langle \left( A_{ij}(y) \frac{\partial u}{\partial y_j}, \frac{\partial u}{\partial y_i} \right) \right\rangle^{\mathcal{A}} \geq C \left\langle \left( \frac{\partial u}{\partial y_i}, \frac{\partial u}{\partial y_i} \right) \right\rangle^{\mathcal{A}}, C > 0 \quad (0.33)$$

el sistema  $\frac{\partial u}{\partial y_i} \left( A_{ij}(y) \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) = f_0(y) + \frac{\partial}{\partial y_k} f_k(y)$  con las condiciones de frontera  $\frac{\partial u}{\partial v} \equiv A_{ij} \frac{\partial u}{\partial y_j} n_i(y) = f_i(y) n_i(y)$  tiene una solución generalizada si y solo si:

$$\langle f_0(y) \rangle^{\mathcal{A}} = 0 \quad (0.34)$$

Esta solución queda determinada salvo un vector constante arbitrario:

$$u(y) = u_0(y) + c,$$

donde  $u_0(y)$  es una solución del sistema anterior con promedio cero.

### Demostración

**Necesidad.** Tómese  $\varphi(y) = \varphi_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ , donde  $\varphi_r = (\delta_{1r}, \delta_{2r}, \dots, \delta_{nr})^T$ . La solución generalizada

$u(y) \in W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)$  satisface la identidad integral:

$$-\left\langle \left( A_{ij}(y) \frac{\partial u}{\partial y_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right) \right\rangle^{\mathcal{A}} = \langle (f_0(y), \varphi) \rangle^{\mathcal{A}} - \left\langle \left( f_k(y), \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \right) \right\rangle^{\mathcal{A}} \quad (0.35)$$

para toda función  $\varphi(y) \in W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)$ , en particular para  $\varphi(v) = \varphi_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ , de donde se obtiene que la  $r$ -ésima componente de  $\langle f_0(y) \rangle^{\mathcal{A}}$  es cero. De la arbitrariedad de  $r$ , se tiene (0.34).

### Suficiencia

Sea  $H\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right) = \left\{ u \in L_2\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right) : \langle u(y) \rangle^{\mathcal{A}} = 0 \right\}$

Existe un único elemento  $u \in H\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right) \cap W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)$  que satisface la identidad integral para toda función

$$\varphi(y) \in H\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right) \cap W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right).$$

En efecto: la desigualdad de Poincaré, véase Ladyzhenskaya (1973) [7], para una función escalar  $v(y) \in W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)$

$$\langle v^2 \rangle^{\mathcal{A}} \leq \langle \langle v \rangle^{\mathcal{A}} \rangle^2 + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^s \left\langle \left( \frac{\partial v}{\partial y_k} \right)^2 \right\rangle^{\mathcal{A}}$$

implica la siguiente desigualdad para una función vectorial

$$u(y) \in W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right) :$$

$$\langle u^2 \rangle^{\mathcal{A}} \leq \langle \langle v \rangle^{\mathcal{A}} \rangle^2 + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^s \left\langle \left( \frac{\partial u}{\partial y_k}, \frac{\partial u}{\partial y_k} \right) \right\rangle^{\mathcal{A}} \quad (0.36)$$

de (0.36) se tiene, para cualquier función vectorial

$$u(y) \in H\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right) \cap W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right), \text{ el estimado:}$$

$$\|u\|_{L_2\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)}^2 \leq \frac{s}{2} \sum_{k=1}^s \left\| \frac{\partial u}{\partial y_k} \right\|_{L_2\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)}^2 \quad (0.37)$$

Debido a las desigualdades (0.33) y (0.37) y a la acotación de  $A_{ij}(y)$ , la expresión

$$[u, \varphi]_1 = \left\langle \left( A_{ij}(y) \frac{\partial u}{\partial y_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right) \right\rangle^{\mathcal{A}},$$

determina un producto escalar sobre  $H\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right) \cap W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)$ , siendo la norma  $\|\varphi\|_1 = \sqrt{[u, \varphi]_1}$  equivalente a la norma de  $W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)$ :

$$\|\varphi\|_{W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)} = \left( \|\varphi\|_{L_2\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)}^2 + \sum_{k=1}^s \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \right\|_{L_2\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Entonces la identidad integral puede describirse de la siguiente forma:

$$[u, \varphi]_1 = -\langle (f_0, \varphi) \rangle^{\mathcal{A}} + \sum_{k=1}^s \left\langle \left( f_k, \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \right) \right\rangle^{\mathcal{A}} \quad (0.38)$$

Dado  $f_k \in L_2\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)$ , el miembro derecho en determina un funcional lineal acotado sobre  $H\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right) \cap W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)$  en  $\varphi$ . Por el teorema de Representación de Riesz, existe un único elemento  $u \in H\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right) \cap W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)$  que satisface y consecuentemente la identidad integral para toda función  $\varphi(y) \in H\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right) \cap W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)$ .

Sea ahora  $\langle f_0(y) \rangle^{\mathcal{A}} = 0$ . La identidad (0.35) es válida para toda función  $\varphi(y) \in W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)$ . Representando  $\varphi$  como  $\varphi = \Psi + \langle \varphi \rangle^{\mathcal{A}}$ , donde por tanto  $\langle \Psi \rangle^{\mathcal{A}} = 0$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle (f_0, \varphi) \rangle^{\mathcal{A}} - \left\langle \left( f_i, \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right) \right\rangle^{\mathcal{A}} &= \langle (f_0, \Psi) \rangle^{\mathcal{A}} + \langle (f_0, \langle \varphi \rangle^{\mathcal{A}}) \rangle^{\mathcal{A}} + \\ &+ \left\langle \left( f_i, \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \right) \right\rangle^{\mathcal{A}} = \langle (f_0, \Psi) \rangle^{\mathcal{A}} - \left\langle \left( f_i, \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \right) \right\rangle^{\mathcal{A}} = \\ &= -\left\langle \left( A_{ij}(y) \frac{\partial u}{\partial y_j}, \frac{\partial \Psi}{\partial y_i} \right) \right\rangle^{\mathcal{A}} = -\left\langle \left( A_{ij}(y) \frac{\partial u}{\partial y_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right) \right\rangle^{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

Por tanto  $u$  satisface (0.35) cualquiera sea  $\varphi(y) \in W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)$ .

De suponer que existen  $u_1, u_2 \in W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)$ , cuya diferencia  $u_1 - u_2$  no es un vector constante, el vector

$v = u_1 - u_2 - \langle u_1 - u_2 \rangle^{\mathcal{A}} \neq 0$  satisface (0.38) para  $f_0 = f_k = 0$  y cualquier función  $\varphi(y) \in H\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right) \cap W_2^1\left(\frac{T_s}{\mathcal{A}}\right)$ . Luego  $[v, v]_I = 0$ ,  $v \equiv 0$  lo cual es una contradicción y por tanto queda probado el teorema.

#### Observación

En particular la desigualdad se satisface para los coeficientes de una ecuación elíptica, dado que en este caso la forma cuadrática  $A_{r_m}(y)\eta_r\eta_m$  es definida positiva.

## Referencias bibliográficas

- [1] ANTUÑA, J. M., *Métodos Matemáticos de la Física*, La Habana, Cuba, 2012.
- [2] BAKHVALOV N. S., PANASENKO G. P. *Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media*. Mechanics and Mathematics Faculty, Moscow, 1989.
- [3] CIORANESCU D., PAULIN J. *Homogenization of Reticulated Structures*. Applied Mathematical Science Vol. 136, Springer, Barcelona.
- [4] KALAMKAROV, A. L., HASSAN, E. M., GEORGIADES, A. V., SAVI, M. A. *Asymptotic Homogenization Model for 3D Grid-Reinforced Composite Structures With Generally Orthotropic Reinforcements*. *Composites Structures*, 89, pp. 186-196, 2009.
- [5] MARTINSSON, P. G., BABUŠKA, IVO. *Homogenization of materials with periodic truss or frame micro-structure*. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, pp. 805-832, Vol. 17, No.05, 2007 (doi: 10.1142/S021820250700211X).
- [6] PANASENKO, G. P., *Homogenization for Periodic Media: From Microscale to Macroscale*. *Physics of Atomic Nuclei*, ISSN 1063-7788, Vol. 71, No. 4, pp. 681-694, 2007.