

# Un esquema spline cónico de Hermite *fair*. A *fair* Hermite quadratic spline scheme.

D. García Pérez<sup>1</sup>, J. Estrada Sarlabous<sup>1\*</sup>, S. Behar Jequín<sup>2</sup>, W. Morales Lezca<sup>2</sup>

**Resumen** En este trabajo presentamos un nuevo esquema para la interpolación de Hermite de un conjunto de puntos en el plano por medio de una curva spline racional cuadrática. El spline cónico es representado como una curva racional cuadrática de Bézier, el cual depende de un parámetro de tensión local que controla la forma de cada sección. Definimos una familia de funcionales de *fairness* como el conjunto las combinaciones lineales de la longitud de arco y de la energía elástica de la sección cónica. El valor del parámetro de tensión que minimiza el funcional corresponde a la curva *fair*. Aplicando el esquema de subdivisión para splines cónicos propuesto en [5] obtenemos buenas aproximaciones numéricas del funcional y sus derivadas. Se demuestra además que el funcional alcanza su valor mínimo en cada uno de los segmentos del spline y utilizamos un algoritmo numérico para hallarlo. Escogiendo una determinada combinación lineal en el funcional se demuestra que el esquema spline cónico de Hermite propuesto es invariante bajo transformaciones rígidas y homotecias, reproduce arcos de circunferencia y satisface las condiciones presentadas en [7]. El esquema ha sido implementado en MatLab y se presenta una galería de salidas gráficas del código.

**Abstract** In this work we present a new scheme for Hermite interpolation of a given set of planar points with a conic spline curve. The conic spline is represented as a piecewise rational quadratic Bezier curve, which depends on local tension parameters in order to control the shape of each section. We define a *fairness* functional family as the set of linear combinations of the arc length and the bending energy of the conic section. The values of the tension parameters minimizing this energy functional determine the *fairest* curve. Applying a subdivision scheme for conic splines introduced in [5], we obtain good approximations of the functional and its derivative, which are used for an efficient numerical computation of its minimum value. If we choose an specific linear combination of the functional we can show that the proposed Hermite conic spline scheme is invariant to rigid changes of coordinates and uniform scalings, reproduces arcs of circles and satisfies the *fairness* requirements listed in [7]. The *fair* Hermite conic spline scheme has been implemented in MatLab and a gallery of results is shown.

## Palabras Clave

Fairness,  $G^1$ -continuidad, sección cónica, Spline racional de Bézier, Interpolación de Hermite.  
MSC: 41A15, 97N50, 65D05

<sup>1</sup>Departamento de Matemática, Instituto de Cibernética, Matemática y Física, La Habana, Cuba, dayron@icimaf.cu, jestrada@icimaf.cu

<sup>2</sup>Departamento de Matemática, Universidad de la Habana, La Habana, Cuba, sofia@matcom.uh.cu, wilfre@matcom.uh.cu

\*Autor para Correspondencia

## Introducción

Una técnica muy popular para los diseñadores de curvas es construir un spline que interpole una secuencia de puntos sobre el plano. Pero la interpolación no solamente se limita a éstos, sino que también se puede especificar que sea tangente a ciertas direcciones en cada uno de los puntos (interpolación de Hermite). Existen infinitas curvas que satisfacen estas condiciones de interpolación, por lo que es de esperar que el diseñador seleccione la que mejor se ajusta a los datos. En este sentido se introduce la noción de lo que es una curva *fair*.

Según el cálculo variacional [4], considerando a las componentes de la parametrización de la curva  $\mathbf{C}(t) = (x(t), y(t))$  como funciones suaves de  $t$ , si el funcional de *fairness* incluye a las derivadas de orden  $n$  de  $x(t)$  y  $y(t)$  respecto a  $t$ , entonces

la curva  $\mathbf{C}(t)$  que minimiza al funcional es solución de un sistema de ecuaciones diferenciales de Euler de orden  $2n$ . La solución numérica de este sistema de ecuaciones diferenciales puede ser computacionalmente costosa y desde el punto de vista teórico es difícil garantizar que la curva óptima sea acotada, conexa y no singular en la región de interés. Por este motivo nos restringiremos a buscar el mínimo del funcional de *fairness* en un espacio de funciones  $G^1$ -continuas de dimensión finita que satisfagan de forma natural la interpolación de Hermite y cuya graficación sea poco costosa: las curvas spline racionales cuadráticas de Bézier.

Dado un conjunto ordenado de puntos del plano y vectores asociados a éstos, nos proponemos construir un spline racional cuadrático de Bézier tal que los interpole y que la tangente del spline en esos puntos tenga la misma dirección que el vector

que se le asocia. Esta la curva spline debe ser  $G^1$ -continua y *fair*. Se estudia un funcional de *fairness* definido en términos de la energía elástica y longitud de arco de una sección del spline y se demuestran algunas de sus propiedades, como son su invarianza a transformaciones rígidas de coordenadas y homotecias y la reproducción de arcos de circunferencias.

## 1. Algunos Resultados Relativos a las Curvas de Bézier

Un spline de interpolación está constituido por secciones de curvas de bajo grado que interpolan un conjunto de puntos ordenados del plano. El hecho de que las secciones interpolantes no tengan un grado tan elevado garantiza que no presente oscilaciones indeseadas. Se dice que un spline de interpolación es de Hermite si además de interpolar un conjunto de puntos del plano, también lo hace para ciertas direcciones tangentes sobre cada uno de los puntos. En este trabajo cada uno de éstos segmentos es una curva racional cuadrática de Bézier, las cuales por sus propiedades, son adecuadas para la interpolación.

En esta sección introduciremos algunas definiciones y resultados básicos de las curvas de Bézier tomados de [5].

### 1.1 Polinomios de Bernstein

**Definición** Los polinomios de Bernstein de grado  $n$  son de la forma

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Una propiedad de los polinomios de Bernstein es que satisfacen la siguiente fórmula de recursión

$$B_i^n(t) = (1-t)B_{i-1}^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t).$$

Otra propiedad importante es que forman una *partición de la unidad*, dado que

$$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} = [t + (1-t)]^n = 1.$$

### 1.2 Curvas de Bézier

De acuerdo a lo anterior, los polinomios de Bernstein  $B_i^n$  de grado  $n$  forman una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que  $n$ . De este modo, toda curva polinómica  $C(t)$  de grado menor o igual que  $n$  posee una **representación de Bézier** única

$$C(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t), \quad (1)$$

donde los coeficientes  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=0}^n \subset \mathbb{R}^m$ ,  $m = 2, 3, \dots$  son llamados puntos de control (o puntos de Bézier). Si los puntos  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=0}^n$  forman un polígono convexo (uniendo los vértices en el orden dado), entonces la curva polinómica en la forma de

Bernstein-Bézier (1), se obtiene como una combinación convexa (baricéntrica) de los puntos de control para cada  $t \in [0, 1]$  y está contenida en la envoltura convexa del polígono de control.

Las curvas en la forma Bernstein-Bézier ofrecen la ventaja de poder manipular su geometría a través de los puntos de control. Estas curvas tienen una generalización al caso racional ofreciendo más flexibilidad a sus propiedades geométricas y aplicaciones.

**Definición** Una curva racional de Bézier de grado  $n$  es una curva paramétrica descrita por los puntos de control  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=0}^n$ , los pesos  $\{\omega_i\}_{i=0}^n$  y el parámetro  $t \in [0, 1]$ , con la forma

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \mathbf{b}_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)}. \quad (2)$$

Algunas de las propiedades de las curvas racionales de Bézier son la *invariancia afín*, la *invariancia bajo transformaciones paramétricas afines*, la *propiedad de la envoltura convexa* y la *interpolación de los puntos extremos y las aristas incidentes del polígono de control*.

### 1.3 Secciones Cónicas

Las secciones cónicas (de forma abreviada: cónicas) han recibido la mayor atención a lo largo de los siglos. A continuación mostraremos algunos de los conceptos básicos relacionados con estas curvas, que serán parte del objeto de estudio de este trabajo. Para las secciones cónicas usaremos la siguiente definición tomada de [6]:

**Definición** Una sección cónica en  $\mathbb{R}^2$  es la proyección de una parábola en  $\mathbb{R}^3$  sobre un plano.

Por esto es natural ver las cónicas como curvas racionales en el plano. En particular, su representación en la forma de Bernstein-Bézier (2) es

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 \omega_i \mathbf{b}_i B_i^2(t)}{\sum_{i=0}^2 \omega_i B_i^2(t)}.$$

Llamamos a los puntos  $\mathbf{b}_i$  *puntos de control* de la cónica  $C$ , al polígono que se construye uniendo dos puntos de control consecutivos *polígono de control* y a los parámetros de tensión  $\omega_i$  se les denominan *pesos* correspondientes a los vértices del polígono de control. Esta curva puede ser parametrizada a la *forma estándar* de manera que  $\omega_0 = \omega_2 = 1$  y  $\omega_1 = \omega$ , por tanto la curva se expresa como

$$C(t) = \frac{\mathbf{b}_0 B_0^2(t) + \omega \mathbf{b}_1 B_1^2(t) + \mathbf{b}_2 B_2^2(t)}{B_0^2(t) + \omega B_1^2(t) + B_2^2(t)}, \quad (3)$$

donde el parámetro  $\omega$  controla la forma de la curva de manera monótona, permitiendo la siguiente clasificación: Si  $0 < \omega < 1$  se tiene una elipse, con el círculo como caso particular. Si  $\omega = 1$  se tiene una parábola. Si  $\omega > 1$  se tiene una hipérbola.

Aunque tiene sentido hablar de  $\omega < 0$ , a partir de ahora se considerará  $\omega \geq 0$  a menos que se indique lo contrario; de este modo se garantiza que se cumpla la propiedad de envoltura convexa, la cual será de especial importancia de ahora en adelante.

Como las cónicas son curvas racionales de grado 2, se necesitan 3 puntos de control. Al triángulo cuyos vértices son tales puntos se le llama *triángulo de control*. La cónica correspondiente a (3), interpola a los vértices  $\mathbf{b}_0$  y  $\mathbf{b}_2$  y es tangente a los lados que unen dichos vértices con  $\mathbf{b}_1$ .

A veces es más útil conocer la ecuación implícita de una curva en vez de la expresión paramétrica, en particular, como un modo de comprobar si un punto se encuentra sobre la curva o no. Toda cónica  $\mathbf{C}(t)$  tiene una representación implícita de la forma:  $f(x, y) = 0$ , donde  $f$  es un polinomio cuadrático de  $x$  y  $y$ . Haciendo uso de las coordenadas baricéntricas podemos plantear el siguiente teorema.

**Teorema** Sean  $(u, v, 1 - u - v)$  las coordenadas baricéntricas de un punto perteneciente a la cónica con parámetro  $\omega$  correspondiente al triángulo de control, se cumple entonces que  $u$  y  $v$  satisfacen la siguiente ecuación implícita

$$v^2 - 4\omega^2 u(1 - u - v) = 0. \quad (4)$$

Tomando la representación de la cónica en la forma de Bernstein-Bézier (3), se denomina *shoulder point* al punto  $\mathbf{S} = \mathbf{C}(\frac{1}{2})$ , cumpliéndose además que es la intersección de la recta que une al vértice  $\mathbf{b}_1$  del triángulo de control con el punto medio de la arista que une  $\mathbf{b}_0$  con  $\mathbf{b}_2$ . Este punto de la cónica juega un papel fundamental en la regla de subdivisión que veremos a continuación.

## 2. Regla de Subdivisión

Dado un conjunto de puntos  $\{\mathbf{Q}_i, i = 1, \dots, m\}$  y vectores asociados a éstos  $\{\tilde{\mathbf{v}}_i, i = 1, \dots, m\}$ , si calculamos los puntos  $\mathbf{M}_i$  de intersección de la recta que pasa por  $\mathbf{Q}_i$  con tangente  $\tilde{\mathbf{v}}_i$  con la recta que pasa por  $\mathbf{Q}_{i+1}$  con tangente  $\tilde{\mathbf{v}}_{i+1}$ , entonces podemos construir un polígono inicial de subdivisión  $\mathbf{P}^0$  con vértices  $\{\mathbf{P}_i^0, i = 1, \dots, 2m - 1\}$  definidos como  $\mathbf{P}_{2i-1}^0 = \mathbf{Q}_i$  y  $\mathbf{P}_{2i}^0 = \mathbf{M}_i$ . A partir de este polígono inicial de control se construyen recursivamente refinamientos  $\mathbf{P}^j$ , que son el resultado de aplicar  $j$ -veces una regla de subdivisión a  $\mathbf{P}^0$ .

Este proceso de refinamiento de  $\mathbf{P}^j$  consiste en lo siguiente. Dados tres puntos consecutivos de  $\mathbf{P}^j$ ,  $\mathbf{P}_k^j$ ,  $\mathbf{P}_{k+1}^j$  y  $\mathbf{P}_{k+2}^j$ , con  $k$  impar, en  $\mathbf{P}^{j+1}$  se conservan el primero y el último ( $\mathbf{P}_k^j$  y  $\mathbf{P}_{k+2}^j$ ) y el punto intermedio,  $\mathbf{P}_{k+1}^j$ , se sustituye por tres nuevos puntos, que son ciertos puntos interiores de los segmentos  $\mathbf{P}_k^j \mathbf{P}_{k+1}^j$  y  $\mathbf{P}_{k+1}^j \mathbf{P}_{k+2}^j$  y el *shoulder point* del arco de cónica con parámetro de tensión  $\omega_i^j$  que interpola a  $\mathbf{P}_{k+1}^j$  y es tangente en  $\mathbf{P}_{k+1}^j$  al segmento  $\mathbf{P}_k^j \mathbf{P}_{k+1}^j$  e interpola a  $\mathbf{P}_{k+2}^j$

y es tangente en  $\mathbf{P}_{k+2}^j$  al segmento  $\mathbf{P}_{k+1}^j \mathbf{P}_{k+2}^j$ . Este arco de cónica queda dividido en 2 subarcos de cónica racional de Bézier, con triángulos de control determinados por los vértices de  $\mathbf{P}^{j+1}$  y sus parámetros de tensión se calculan a partir de  $\omega_i^j$ .

Los detalles del esquema de subdivisión se dan a continuación. La demostración de los resultados de esta sección pueden verse en la tesis de R. Díaz [5].

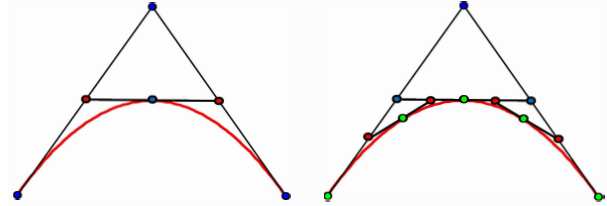


Figura 1. Proceso de Subdivisión.

En efecto, dados 3 puntos consecutivos de  $\mathbf{P}^j$ ,  $\mathbf{P}_i^j$ ,  $\mathbf{P}_{i+1}^j$ ,  $\mathbf{P}_{i+2}^j$ , con  $i$  impar, y el parámetro  $\omega_i^j$  del arco de cónica asociado, se calculan a partir de éstos 5 puntos del polígono refinado  $\mathbf{P}_{2i-1}^{j+1}, \dots, \mathbf{P}_{2i+3}^{j+1}$  como sigue.

$$\mathbf{P}_{2i-1}^{j+1} = \mathbf{P}_i^j, \quad (5)$$

$$\mathbf{P}_{2i+3}^{j+1} = \mathbf{P}_{i+2}^j. \quad (6)$$

Tomamos los puntos  $\mathbf{P}_i^j, \mathbf{P}_{i+1}^j$  de la arista  $i$  y los puntos  $\mathbf{P}_{i+1}^j, \mathbf{P}_{i+2}^j$  de la arista  $i + 1$  para calcular nuevos puntos sobre ellas

$$\mathbf{P}_{2i}^{j+1} = \frac{\mathbf{P}_i^j + \omega_i^j \mathbf{P}_{i+1}^j}{1 + \omega_i^j}, \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_{2i+2}^{j+1} = \frac{\mathbf{P}_{i+2}^j + \omega_i^j \mathbf{P}_{i+1}^j}{1 + \omega_i^j}. \quad (8)$$

Como ya habíamos visto anteriormente, el *shoulder point* puede ser calculado mediante

$$\mathbf{S}_i^j = \mathbf{S}_{2i}^{j+1} = \mathbf{P}_{2i+1}^{j+1} = \frac{\mathbf{P}_{2i}^{j+1} + \mathbf{P}_{2i+2}^{j+1}}{2}. \quad (9)$$

Si sustituimos las ecuaciones (7) y (8) en (9) se tiene finalmente que

$$\mathbf{P}_{2i+1}^{j+1} = \frac{\mathbf{P}_i^j + 2\omega_i^j \mathbf{P}_{i+1}^j + \mathbf{P}_{i+2}^j}{2(1 + \omega_i^j)}. \quad (10)$$

En cada iteración, los puntos de la poligonal de control con subíndice impar pertenecen a la curva. A medida que el algoritmo realiza un mayor número de iteraciones se genera una mayor cantidad de puntos sobre la curva.

**Teorema** Sea  $\omega_i^j$  el parámetro de tensión asociado a la cónica  $i$ -ésima en el paso  $j$ -ésimo y sean  $\omega_{2i-1}^j$  y  $\omega_{2i}^j$  los parámetros asociados a los subarcos de esta cónica, entonces se cumple que

$$\omega_{2i-1}^{j+1} = \omega_{2i}^{j+1} = \sqrt{\frac{1 + \omega_i^j}{2}}. \quad (11)$$

Está claro que los puntos con subíndice impar insertados en cada paso pertenecen a un arco de cónica racional de Bézier que corresponde a una curva spline que interpola los puntos dados como datos y las tangentes asociadas a cada uno de ellos, pero no queda claro que la sucesión de puntos que se va generando cubre todo este arco de cónica y no se acumulan alrededor de un número finito de puntos sobre la cónica. Se puede demostrar que la sucesión del máximo de las normas de las diferencias entre dos puntos consecutivos en cada refinamiento tiende a cero, véase [5].

### 3. Estudio del Fairness

Por *fair* se entiende, de forma intuitiva, una curva cuya gráfica de curvatura es continua, con muy pocas oscilaciones y con valores extremos no muy grandes. Tal *definición*, a pesar de ser subjetiva, es sin embargo muy práctica, pues una curva *fair* es, estéticamente, lo que más desea un diseñador. El pteo de curvatura será usado por un diseñador de experiencia como una herramienta cotidiana e imprescindible pues, en general, de todas las posibles curvas que puedan utilizarse para interpolar un conjunto de datos, suele ser la curva *fair* quien mejor lo hace.

Como requisitos importantes que debe satisfacer una curva *fair* podemos citar los siguientes (que fueron tomados de [7]):

1. **Extensionalidad**, entendida a partir de que si se adicionan como nuevos datos puntos que están sobre el spline original, el nuevo spline no varía significativamente.
2. **Redondez**, entendida como reproducción de arcos de círculo.
3. **Alto orden de continuidad**.
4. **Curvatura monótona**.

#### 3.1 Un cambio de coordenadas adecuado

En esta sección introduciremos un cambio de coordenadas que posibilita una representación más sencilla de la parametrización de una sección cónica en la base de Bernstein-Bézier.

Los segmentos del spline se describen mediante la fórmula paramétrica dada por (3). El segmento de cónica determinado

por los puntos  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  puede ser descrito por la parametrización

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{P_{0,x}B_0^2(t) + \omega P_{1,x}B_1^2(t) + P_{2,x}B_2^2(t)}{B_0^2(t) + \omega B_1^2(t) + B_2^2(t)}, \\ y(t) &= \frac{P_{0,y}B_0^2(t) + \omega P_{1,y}B_1^2(t) + P_{2,y}B_2^2(t)}{B_0^2(t) + \omega B_1^2(t) + B_2^2(t)}. \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{P}_i = (P_{i,x}, P_{i,y}), i = 0, 1, 2$ .

Realizando una adecuada traslación y rotación de los ejes coordenados de modo que el segmento  $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$  esté incluido en el eje de las abscisas (ver Figura 2) se logra una parametrización más sencilla de la sección cónica interior al triángulo de control con vértices  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$ .

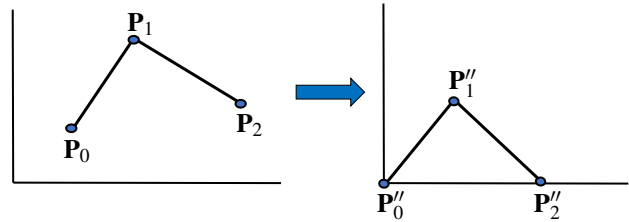


Figura 2. Cambio de coordenadas

La parametrización de la curva con respecto a las nuevas coordenadas queda de la siguiente manera

$$x(t) = \frac{2a(1-t)t\omega + Lt^2}{(1-t)^2 + 2(1-t)t\omega + t^2}, \quad (12)$$

$$y(t) = \frac{2b(1-t)t\omega}{(1-t)^2 + 2(1-t)t\omega + t^2}, \quad (13)$$

donde  $L$  es la longitud del segmento  $\overline{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2}$  y  $(a, b)$  son las nuevas coordenadas del segundo vértice del triángulo,  $\mathbf{P}_1''$ .

Con esta nueva parametrización de las curvas racionales de Bézier debemos dejar claro en qué dominio o espacio de parámetros están ellas definidas. Puesto que la parametrización depende de  $a, b, L, \omega$  y  $t$ , definimos entonces el siguiente espacio de parámetros.

**Definición** Se define como el espacio de parámetros  $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^5$  a los puntos que cumplen las siguientes condiciones

$$\mathbb{E} = \{(a, b, L, \omega, t) \in \mathbb{R}^5 \text{ tales que } a > 0, b > 0, L > 0, \omega \geq 0, 0 \leq t \leq 1\}. \quad (14)$$

El motivo por el que debemos especificar qué valores puede tomar cada parámetro de la parametrización dada por (12) y (13) es que para valores negativos de  $a, b$  y  $L$  el triángulo de control es degenerado, y las cónicas de Bézier están definidas para valores de  $\omega \geq 0$  y  $t \in [0, 1]$  como se mostró en la sección 1.2.

### 3.2 Longitud de arco de una cónica

La longitud de arco de una curva paramétrica  $C(t)$  se puede calcular por

$$S = \int_0^1 \|C'(t)\| dt, \quad (15)$$

donde sabemos que  $\|C'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$  y las expresiones de  $x'(t)$  y  $y'(t)$  se obtienen de derivar (12) y (13) respecto al parámetro  $t$ .

Dados tres puntos del plano  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ , éstos definen tres valores para los parámetros  $a, b$  y  $L$  de la parametrización de la curva dada por las ecuaciones (12) y (13). Si consideramos fijos los parámetros  $a, b$  y  $L$  entonces de (12) y (13) se obtiene la siguiente expresión para la longitud de arco.

$$S(\omega) = \int_0^1 \frac{2\sqrt{b^2\omega^2(2t-1)^2 + (-2at\omega + a\omega + Lt - Lt^2 + Lt^2\omega)^2}}{(-1+2t-2t^2-2t\omega+2t^2\omega)^2} dt \quad (16)$$

donde los parámetros  $a, b$  y  $L$  determinan la geometría del triángulo de control.

El siguiente lema argumenta la continuidad de la función  $S(\omega)$ :

**Lema** Restringiendo los parámetros al espacio  $\mathbb{E}$ , la función  $S(\omega)$  en (16) y su derivada respecto a  $\omega$  son funciones continuas de  $\omega$ .

#### Demostración

Es suficiente hallar los valores de los parámetros que anulan el denominador del integrando de (16) y comprobar que dichos valores no están en  $\mathbb{E}$ .

En efecto, el denominador del integrando en (16) se anula para  $\pm t = \frac{-1+\omega+\sqrt{-1+\omega^2}}{2(-1+\omega)}$ . Es por tanto inmediato verificar que si  $0 \leq \omega < 1$  o  $\omega > 1$ , los ceros del denominador del integrando no pertenecen al intervalo  $[0, 1]$  previsto para  $t \in \mathbb{E}$ . Por otra parte, si  $\omega = 1$ , el denominador es idénticamente igual a 1 y no se anula. ■

Cuando  $\omega \rightarrow 0$ , la cónica que describe este parámetro de tensión se aproxima al segmento de recta que une a los puntos de interpolación  $\mathbf{P}_0$  y  $\mathbf{P}_2$ , es decir

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} S(\omega) = \|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_2\|.$$

Si el parámetro de tensión toma valores muy elevados, el arco de curva (que es convexo e interpola a  $\mathbf{P}_0$  y  $\mathbf{P}_2$ ) tiende a acercarse al segundo vértice del triángulo  $\mathbf{P}_1$ , lo que trae como consecuencia que la longitud de arco se aproxima a la suma de las longitudes de los lados del triángulo  $\overline{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1}$  y  $\overline{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}$ , esto es

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} S(\omega) = \|\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_1\| + \|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2\|.$$

De lo anterior se infiere que la longitud de arco de una cónica es una función acotada del parámetro  $\omega$ .

### 3.3 Energía Elástica de una Cónica

La energía elástica o energía de deformación es un concepto que viene de la Física y se define como el aumento de energía interna acumulada en el interior de un sólido deformable como resultado del trabajo realizado por las fuerzas que provocan la deformación. El valor de la energía elástica de una curva se define como el valor de la siguiente integral:

$$E = \int_0^l k^2(s) ds,$$

donde  $l$  es la longitud de la curva y  $k(s)$  es la curvatura del punto que describe una longitud de arco  $s$ . Si hacemos un cambio de parámetros podemos decir que

$$E = \int_0^l k^2(s) ds = \int_0^1 \left( k^2(t) \frac{ds}{dt}(t) \right) dt.$$

Sabemos que dentro de una misma familia de cónicas de Bézier, cada miembro de la familia está caracterizado por un determinado valor del parámetro  $\omega$ . Si procedemos igual que en la sección 3.2, fijando los valores de  $a, b$  y  $L$ , entonces la energía elástica de una cónica puede representarse por la siguiente función

$$E(\omega) = \int_0^1 \frac{b^2\omega^2 L^2 (-1+2t-2t^2-2t\omega+2t^2\omega)^4}{2(b^2\omega^2(2t-1)^2 + (-2at\omega + a\omega + Lt - Lt^2 + Lt^2\omega)^2)^{5/2}} dt. \quad (17)$$

**Lema** Restringiendo los parámetros al espacio  $\mathbb{E}$ , se cumple que

- a) la función  $E(\omega)$  en (17) y su derivada respecto a  $\omega$  son funciones continuas de  $\omega$ ,
- b) si  $\omega \rightarrow 0$  entonces  $E(\omega) \rightarrow \infty$ ,
- c) si  $\omega \rightarrow \infty$ , entonces  $E(\omega) \rightarrow \infty$ .

#### Demostración

a) El denominador del integrando en (17) es igual a una constante multiplicada por la raíz de una suma de cuadrados, que no se anulan simultáneamente si  $t, \omega, L \in \mathbb{E}$ .

b) Para  $t$  y  $\omega$  muy pequeños, la derivada del integrando de (17) respecto a  $t$  y evaluada en  $t = 0$  es igual a  $-\frac{5b^2L^3a}{2\omega^4} + O(\omega^{-3})$ . Respectivamente, la derivada del integrando de (17) respecto a  $\omega$  y evaluada en  $t = 0$  igual a  $-\frac{3b^2L^2}{2\omega^4(a^2+b^2)^{5/2}}$ . Por lo tanto, ambas derivadas son negativas y existe entonces una vecindad  $V$  de  $(t, \omega) = (0, 0)$  para la que el integrando de (17) es estrictamente decreciente. Si  $\delta > 0$  es suficientemente pequeño, podemos suponer que  $\{(t, \omega) / \max(t, \omega) \leq \delta\} \subset V$  y además se cumple que la evaluación de este integrando en  $(t, \omega) = (\delta, \delta)$  es igual a  $\frac{b^2L^2}{2(2aL+b^2+L^2+a^2)^{5/2}\delta^3} + O(\delta^{-2})$ . Debido a la monotonía del integrando restringido a  $V$  resulta que la integral para el subintervalo  $t \in [0, \delta]$  es mayor que  $O(\delta^{-2})$ .

Puesto que el integrando es no negativo, la integral para  $t \in [0, 1]$  en (17) es mayor a la integral para el subintervalo  $t \in [0, \delta]$ , consecuentemente, la integral en (17) es estrictamente mayor que  $O(\delta^{-2})$ . Si  $\delta$  (y consecuentemente  $\omega$ ) tiende a 0, esta última integral tiende a  $\infty$ .

c) Si  $\omega$  es muy grande, el integrando de (17) es igual a  $\frac{8b^2L^2t^4(-1+t)^4\omega}{(b^2(2t-1)^2+(-2at+a+Lt^2)^2)^{5/2}} + O(1)$ , o sea, es  $O(\omega)$ , para  $\delta > 0$  suficientemente pequeño y  $t \in [\delta, 1 - \delta]$ . Por lo tanto, la integral en (17) restringida al subintervalo  $t \in [\delta, 1 - \delta]$  tiende a  $\infty$  si  $\omega$  tiende a  $\infty$ . ■

### 3.4 Funcional de fairness

Existen diferentes funcionales que nos brindan una idea del *fairness* de una curva. Entre los más empleados se encuentran el de minimizar la energía elástica y la longitud de arco de una curva. El funcional de *fairness* más comúnmente empleado en la literatura es una combinación lineal de la energía elástica y de la longitud de arco (véase [2], [9], [10], [11]).

$$\begin{aligned} F_\lambda(\omega) &= E(\omega) + \lambda S(\omega) \\ &= \int_0^1 \left( k^2(\omega, t) \frac{ds}{dt}(\omega, t) \right) dt + \lambda \int_0^1 \frac{ds}{dt}(\omega, t) dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Este funcional describe la energía elástica que almacena una curva racional cuadrática de Bézier más la longitud de arco multiplicada por un cierto  $\lambda \geq 0$ , donde el usuario decide su valor en dependencia a cuál de las dos energías le quiere dar mayor peso.

Como ya se ha demostrado en los **lemas** de las secciones 3.2 y 3.3 tanto el funcional  $F_\lambda(\omega)$  como su derivada respecto al parámetro  $\omega$  son continuos en el espacio de parámetros  $\mathbb{E}$ . Otra propiedad demostrada en la sección 3.3, es que toma valores muy elevados cuando  $\omega \rightarrow 0$  y  $\omega \rightarrow \infty$ .

La derivada de  $F_\lambda(\omega)$  respecto a  $\omega$ ,  $\frac{\partial F_\lambda(\omega)}{\partial \omega}$ , es igual a

$$F'_\lambda(\omega) = \int_0^1 \frac{\partial \left( k^2(\omega, t) \frac{ds}{dt}(\omega, t) \right)}{\partial \omega} dt + \lambda \int_0^1 \frac{\partial \frac{ds}{dt}(\omega, t)}{\partial \omega} dt. \quad (19)$$

Se calcularon expresiones explícitas para los integrandos en la formula anterior, que no se incluyen por su complejidad.

#### 3.4.1 Existencia de mínimo

El valor del parámetro  $\omega$  que describe la curva *fair* como habíamos definido desde el inicio, es el siguiente:

$$\arg\{\min_{\omega} F_\lambda(\omega)\}.$$

El siguiente lema demuestra que el funcional de *fairness* alcanza su valor mínimo en el espacio de parámetros  $\mathbb{E}$ .

**Lema** Si en el espacio de parámetros  $\mathbb{E}$  establecemos valores fijos de  $a$ ,  $b$  y  $L$ , y además fijamos el valor de  $\lambda$  en la

combinación lineal del funcional (18), con  $\lambda \in [0, +\infty)$ ; entonces el funcional  $F_\lambda(\omega)$  alcanza su mínimo en el intervalo  $(0, +\infty)$  para  $\omega$ .

### Demostración

El funcional de *fairness* toma valores tan elevados como uno quiera cuando  $\omega \rightarrow 0$  y  $\omega \rightarrow \infty$ . Lo anterior permite afirmar que, para al menos dos valores diferentes de  $\omega$ , el funcional alcanza un mismo valor. Supongamos que ello ocurre para  $\omega = \varepsilon$  y  $\omega = \xi$ , o sea,  $F_\lambda(\varepsilon) = F_\lambda(\xi)$ .

Asumiendo  $\varepsilon < \xi$  y restringiendo ahora el funcional al intervalo  $[\varepsilon, \xi]$  en el que ya se había demostrado su continuidad entonces, por el teorema de Weierstrass, se puede afirmar que los valores extremos en este intervalo se alcanzan. En nuestro caso en particular, nos interesa su valor mínimo.

Sabemos por el teorema de Fermat (ver [8]) que si un extremo se alcanza en un punto interior de un intervalo donde la función es derivable, la derivada en dicho extremo se anula. Dado que ya se probó que el funcional es derivable en el intervalo  $[\varepsilon, \xi]$  y además  $F_\lambda(\varepsilon) = F_\lambda(\xi)$  entonces por el teorema de Rolle (ver [8]) la derivada de la función se anula al menos una vez en el intervalo y, el mínimo buscado se halla, por tanto, entre los puntos que anulan la derivada del funcional. ■

El lema anterior solo establece la existencia de un mínimo del funcional (18) en el intervalo  $(0, +\infty)$  para  $\omega$ , pero no establece su unicidad. Demostrar la unicidad directamente a partir del análisis de la segunda derivada del funcional resulta ser muy engorroso. Sin embargo, en todos los ejemplos numéricos calculados, este funcional resulta ser convexo. Por lo tanto, declaramos una sección de cónica como *fair*, si su parámetro  $\omega$  es un mínimo local del funcional (18) y por extensión, un spline cónico es *fair*, si todas sus secciones lo son.

### 3.5 Aproximaciones del funcional de fairness

El proceso de subdivisión (sección 2) genera una secuencia de poligonales convergentes a la curva  $\{\mathbf{P}^0, \mathbf{P}^1, \dots, \mathbf{P}^j, \dots\}$ . Tomamos entonces la suma de las longitudes de los segmentos que componen la poligonal  $\mathbf{P}^j$  como aproximaciones de la longitud de arco. Se tiene entonces la aproximación

$$S(\omega) = \int_0^1 \|C'(\omega, t)\| dt \approx \sum_{i=1}^n \|\mathbf{P}_i^j - \mathbf{P}_{i-1}^j\| = \sum_{i=1}^n l_i, \quad (20)$$

donde  $l_i = \|\mathbf{P}_i^j - \mathbf{P}_{i-1}^j\|$  es la distancia entre los puntos  $\mathbf{P}_i^j$  y  $\mathbf{P}_{i-1}^j$ , por tanto, la longitud del segmento  $i$ -ésimo de la poligonal de aproximación  $\mathbf{P}^j$ .

La integral que define la energía elástica puede ser reducida a una integral elíptica, pero el proceso de su reducción a la forma normal de Legendre resulta ser complicado e



inestable numéricamente, por lo que utilizamos el hecho de que podemos generar una muestra suficientemente grande de puntos sobre la curva y, con poco costo adicional, aproximar las integrales utilizando un método de integración numérica como el método de los trapecios.

Usando el cambio de coordenadas dado en la sección 3.1 para la  $i$ -ésima sección del spline, si tenemos una muestra de puntos  $\{\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n\}$  sobre la  $i$ -ésima sección del spline con coordenadas  $\mathbf{P}_k = (x_k, y_k), k = 0, \dots, n$ , a cada punto  $\mathbf{P}_k$  se le hace corresponder un único valor del parámetro  $t_k$  en la parametrización de la curva, dado por la fórmula de inversión

$$t_k = \frac{2\omega_i(bx_k - ay_k)}{2\omega_i(bx_k - ay_k) + Ly_k}. \quad (21)$$

Una vez calculado el valor  $t_k$  es posible calcular el valor de curvatura en el punto  $\mathbf{P}_k$  utilizando la parametrización en (12) y (13):

$$k(t_k) = \frac{|x'(t_k)y''(t_k) - y'(t_k)x''(t_k)|}{((x'(t_k))^2 + (y'(t_k))^2)^{3/2}}. \quad (22)$$

Es posible entonces obtener buenas aproximaciones del valor de la función de la energía elástica definida basándonos en la muestra de puntos generada sobre la  $i$ -ésima sección de la curva spline. Como ya habíamos visto en la sección 2, la muestra de puntos sobre la curva que se genera en el proceso de subdivisión no se acumulan alrededor de un número finito de ellos y a mayor cantidad de iteraciones que se realicen, menor será la distancia entre cada par de puntos consecutivos. Esto garantiza que la longitud de los intervalos de la partición del intervalo de integración  $[0, 1]$  sea tan pequeña como se desee, permitiendo que el método de los trapecios aporte una buena aproximación del funcional.

Es posible obtener también aproximaciones para la derivada de  $F_\lambda(\omega)$  respecto a  $\omega$ ,  $\frac{\partial F_\lambda(\omega)}{\partial \omega}$ , calculando aproximadamente las integrales en (19).

### 3.5.1 Hallar el valor mínimo

Ya tenemos entonces tanto aproximaciones del funcional y de su derivada respecto a  $\omega$ , nos resta entonces hallar el valor del parámetro  $\omega$  que minimiza el valor de este funcional. Como ya habíamos planteado en la sección 3.4.1 el funcional alcanza su valor mínimo en el espacio de parámetros en el que está definido. Hasta ahora tenemos aproximaciones tanto del funcional de *fairness* como de su derivada, por lo que resta aplicar un algoritmo numérico para hallarlo. En este trabajo empleamos dos métodos para hallarlo.

El primero de los métodos es el *Método de Newton - Raphson* (véase [3]). En la sección 3.4.1 vimos que la derivada del funcional se anula al menos una vez en el intervalo donde el parámetro de tensión  $\omega$  toma sus valores, por lo que la ecuación  $F'_\lambda(\omega) = 0$  tiene solución donde  $F_\lambda(\omega)$  es el funcional de *fairness*. Sin embargo, chequear las condiciones

de convergencia de éste método es tan complicado como resolver analíticamente la ecuación. Debemos destacar que la expresión analítica de la derivada del funcional de *fairness*  $F'_\lambda(\omega)$  es mucho más complicada que la del propio funcional, no obstante el algoritmo desarrollado evalúa directamente su expresión. La expresión analítica de la segunda derivada del funcional  $F''_\lambda(\omega)$ , resulta tan complicada que es más eficiente obtener aproximaciones de sus valores por medio de la diferenciación numérica de la primera derivada

$$F''_\lambda(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F'_\lambda(x+h) - F'_\lambda(x)}{h}.$$

El segundo método es conocido en la literatura como *Método de la Sección de Oro* o *Método de la Sección Áurea* (Ver [1]). Este método básicamente va reduciendo el intervalo de incertidumbre donde se encuentra el valor mínimo de la función hasta obtener un intervalo donde el error de la aproximación no sea mayor que un cierto valor dado por el usuario. Usualmente el método brinda buenas aproximaciones en el caso de que la función objetivo sea convexa, sin embargo, este resultado no se demostró en el presente trabajo por lo complicado que resulta trabajar con el funcional de *fairness*.

No obstante, ambos métodos brindan igual resultado para los mismos parámetros como se mostrará en la sección 4.

## 4. Resultados numéricos

Debemos destacar además en esta sección que pese a que no se obtuvieron soluciones exactas de las integrales que definen los funcionales de energía elástica y longitud de arco en las secciones 3.2 y 3.3, las aproximaciones numéricas realizadas muestran buenos resultados, los cuales proponemos a continuación.

La experimentación numérica realizada para que el funcional de *fairness* presente las características expuestas en el inicio de la sección 3, motivó a proponer como valor del parámetro  $\lambda$  en la expresión (18) el siguiente

$$\lambda = \frac{\sin^2(\beta)}{\cos^2(\frac{\alpha+\gamma}{2})L^2} \quad (23)$$

donde  $\alpha = \angle \mathbf{M}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_{i+1}$ ,  $\beta = \angle \mathbf{Q}_i \mathbf{M}_i \mathbf{Q}_{i+1}$ ,  $\gamma = \angle \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_{i+1} \mathbf{M}_i$  y  $L = \|\mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{Q}_i\|$  como se muestra en la Figura 3.

Ahora bien, ¿por qué escoger el valor de  $\lambda$  que aparece en (23) y no otro? Como ya habíamos dicho en la sección 3.4, para cada valor de  $\lambda$  en la combinación lineal de la longitud de arco y energía elástica se definía un nuevo funcional de *fairness*. Precisamente al tomar este valor en la combinación lineal del funcional, este último manifiesta buenas propiedades para el diseño geométrico como son las siguientes:

- El valor de

$$\arg\{\min_{\omega} F_\lambda(\omega)\}$$

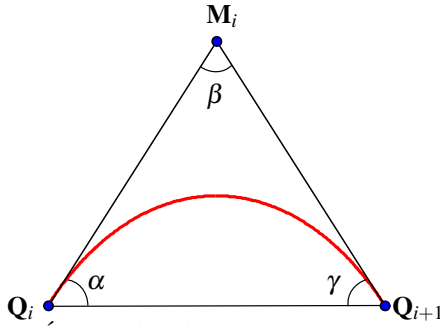


Figura 3. Ángulos interiores del triángulo de control.

es invariante bajo transformaciones rígidas de coordenadas y homotecias.

- Reproduce arcos de circunferencia (**Redondez**).

#### 4.1 Reproducción de arcos de circunferencia

Como parte de este trabajo también se encuentra reproducir arcos de circunferencias, pues como habíamos visto al inicio de esta sección, si situamos los puntos de interpolación sobre una circunferencia entonces la curva más *fair* que los interpola es precisamente el arco de circunferencia que contiene a dichos datos. Para que la curva interpolante sea un arco de circunferencia el triángulo de control debe ser isósceles por la simetría del círculo. En dicho caso, debemos demostrar que el círculo de interpolación es único. El parámetro de tensión asociado a dicha cónica debe cumplir la siguiente condición.

**Lema** Denotemos por  $\alpha = \angle M_i Q_i Q_{i+1}$ ,  $\beta = \angle Q_i M_i Q_{i+1}$ ,  $\gamma = \angle Q_i Q_{i+1} M_i$  y  $L = \|Q_{i+1} - Q_i\|$  como se muestra en la Figura 3. Entonces se cumple que:

- Los datos  $Q_i$ ,  $\vec{v}_i$  y  $Q_{i+1}$ ,  $\vec{v}_{i+1}$  provienen de un círculo si y solo si  $\alpha = \gamma$ ; en otras palabras, si el triángulo con vértices  $Q_i$ ,  $Q_{i+1}$  y  $M_i$  es isósceles.
- Si los datos  $Q_i$ ,  $\vec{v}_i$  y  $Q_{i+1}$ ,  $\vec{v}_{i+1}$  provienen de un círculo entonces el círculo descrito en i. puede representarse como una curva cónica de Bézier (Véase la sección 1.2) tomando como triángulo de control al formado por los puntos  $Q_i$ ,  $M_i$  y  $Q_{i+1}$  y parámetro  $\omega = \cos(\alpha) = \cos(\gamma)$ .

La demostración de éste resultado puede verse en [6].

Un círculo completo puede obtenerse uniendo piezas de un spline cerrado, donde cada segmento sea un arco de circunferencia. Por ejemplo, podemos representar un círculo utilizando tres arcos iguales (Figura 4). Con todos los ángulos  $\alpha_j = \gamma_j = 60^\circ$  y los pesos  $\omega_j = \frac{1}{2}$  se obtiene una representación exacta de un círculo.

Partiendo del **Lema** anterior podemos argumentar las consecuencias de tomar el valor que proponemos para el parámetro  $\lambda$  al inicio de esta sección y que se exponen en el siguiente teorema:

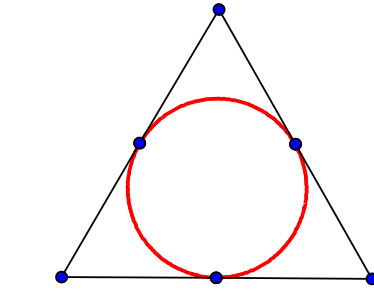


Figura 4. Reproducción de un círculo.

**Teorema** Sean  $Q_i$  y  $Q_{i+1}$  dos puntos con direcciones tangentes asociadas  $\vec{v}_i$  y  $\vec{v}_{i+1}$  respectivamente, denotemos por  $M_i$  el punto de intersección de las rectas que pasan por los puntos  $Q_i$  y  $Q_{i+1}$  con direcciones tangentes dadas por los vectores  $\vec{v}_i$  y  $\vec{v}_{i+1}$ . Se define  $\lambda_C$  como

$$\lambda_C = \frac{\sin^2(\beta)}{\cos^2(\frac{\alpha+\gamma}{2})L^2}$$

donde  $L = \|Q_{i+1} - Q_i\|$ ,  $\alpha = \angle M_i Q_i Q_{i+1}$ ,  $\gamma = \angle Q_i Q_{i+1} M_i$  y  $\beta = \angle Q_i M_i Q_{i+1}$ .

Si  $Q_i$ ,  $\vec{v}_i$ ,  $Q_{i+1}$  y  $\vec{v}_{i+1}$  son datos que provienen de un círculo  $C_i$ , entonces la cónica de Bézier que interpola a  $Q_i$ ,  $\vec{v}_i$ ,  $Q_{i+1}$ ,  $\vec{v}_{i+1}$  y minimiza el funcional

$$F_{\lambda_C}(\omega) = E(\omega) + \lambda_C S(\omega)$$

es el arco  $\widehat{Q_i Q_{i+1}}$  del círculo  $C_i$ .

#### Demostración

Si imponemos a los parámetros  $a, b, L$  que el triángulo sea isósceles (como corresponde a una sección de circunferencia) y que  $\omega = \cos(\alpha) = \cos(\gamma)$ , como se establece en el lema anterior, entonces es posible calcular exactamente las integrales que aparecen en (19) y despejar el valor  $\lambda_C$  de  $\lambda$  que anula a  $\frac{\partial F_{\lambda}(\omega)}{\partial \omega}$ . ■

**Observación.** Si los datos a interpolar provienen de un arco de círculo  $C_i$ , pero el valor de  $\lambda$  en la combinación lineal del funcional no es igual a  $\lambda_C$ , entonces el mínimo del funcional  $F_{\lambda}(\omega)$  no necesariamente reproduce a  $C_i$ .

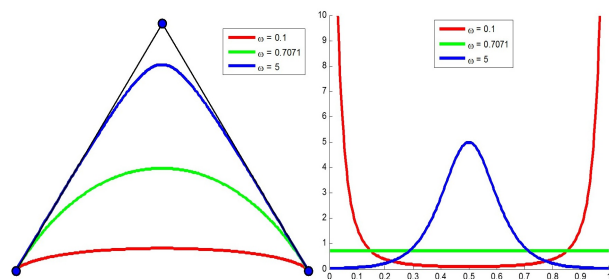
#### 4.2 Implementación Numérica

El algoritmo para generar puntos sobre una curva cónica de Bézier descrito en la sección 2 fue implementado en MatLab. Ya una vez teniendo a mano un algoritmo bastante eficiente para generar puntos sobre las cónicas se implementó también en el mismo software varias funciones que tienen como objetivo calcular, de manera aproximada y como se indica en la sección 3.5, el valor del funcional de *fairness* y de su derivada con respecto al parámetro  $\omega$  para una combinación de datos específica. Además se programaron



ambos métodos para hallar el valor mínimo del funcional. Algunos de los resultados obtenidos por el programa se muestran a continuación.

En lo adelante, expondremos los resultados de nuestro algoritmo para el siguiente conjunto de puntos en el plano  $P_0 = (0,0)$ ,  $P_1 = (1,1)$  y  $P_2 = (2,0)$ , tomados como triángulo de control. En la Figura 5 mostramos una comparación entre diferentes cónicas de Bézier definidas en el mismo triángulo de control en cuanto al gráfico de los valores de curvatura.



**Figura 5.** Izquierda: Gráfico de las cónicas de Bézier. Derecha: Gráfico de los valores de curvatura.

En el Cuadro 1 se muestran valores aproximados de la longitud de arco para distintos valores del parámetro de tensión. Con 4 iteraciones del algoritmo de subdivisión se obtienen buenas aproximaciones para  $S(\omega)$ . Debemos observar que cuando  $\omega \rightarrow 0$  se tiene que  $S(\omega) \rightarrow 2$  y cuando  $\omega \rightarrow \infty$  entonces  $S(\omega) \rightarrow 2\sqrt{2}$  como se ya se planteó en las secciones 3.2 y 3.3.

	$S(\omega)$		
$\omega$	2 iteraciones	4 iteraciones	8 iteraciones
0.01	2.0002	2.0003	2.0004
0.3	2.0767	2.0875	2.0884
0.5	2.1445	2.1571	2.1580
0.7071	2.2125	2.2259	2.2268
1	2.2808	2.2947	2.2956
10	2.7119	2.7206	2.7213
50	2.8020	2.8047	2.8050
100	2.8149	2.8164	2.8166

**Cuadro 1.** Aproximaciones de la longitud de arco.

En el Cuadro 2 muestra que para obtener buenas aproximaciones de la energía elástica es necesario realizar una mayor cantidad de iteraciones del proceso de subdivisión. La razón por la que hay que realizar más subdivisiones está en el hecho de que como utilizamos el método de los trapecios para obtener las aproximaciones, mientras mayor sea el número de puntos generados sobre la curva, menor será el paso de la integral (ver sección 3.5) con lo que se obtienen mejores resultados.

	$E(\omega)$		
$\omega$	4 iteraciones	8 iteraciones	12 iteraciones
0.01	3.7908	1132.3	1547.0
0.3	2.6969	2.7709	2.7712
0.5	1.8095	1.8134	1.8134
0.7071	1.6658	1.6654	1.6654
1	1.7528	1.7524	1.7524
10	9.4707	9.4450	9.4449
50	44.3944	44.4090	44.4071
100	86.9953	88.1138	88.1085

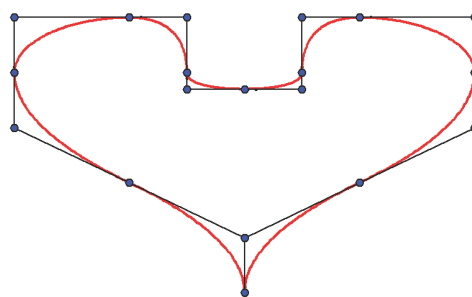
**Cuadro 2.** Aproximaciones de la energía elástica.

Otra observación importante que podemos realizar de los datos obtenidos es que para valores muy pequeños del parámetro de tensión  $\omega$  y pocas iteraciones no se obtienen buenas aproximaciones del funcional, sin embargo, mientras mayor sea la cantidad de iteraciones en el proceso de subdivisión, mejores serán los resultados en la aproximación.

### 4.3 Aplicaciones

Las curvas spline actualmente en el diseño geométrico asistido por computadora juegan un papel fundamental. En esta sección se mostrarán algunos de sus usos en la vida diaria. Como motivo de visualizar una curva *fair* en el diseño geométrico se ha desarrollado una aplicación con interfaz gráfica de MatLab donde el diseñador puede introducir los puntos y tangentes de interpolación en un área destinada para el diseño.

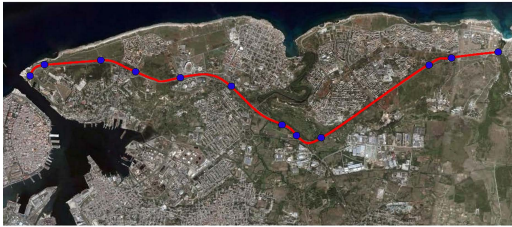
Una aplicación inmediata de las curvas spline es el diseño de figuras planas y de carreteras. En la figura 8 se presenta un ejemplo de objeto real que fue modelado utilizando la interfaz gráfica desarrollada.



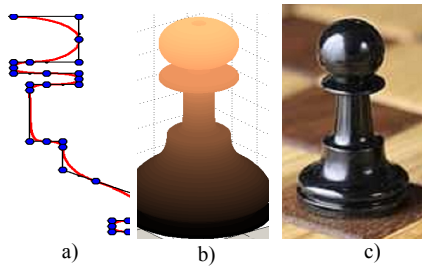
**Figura 6.** Diseño de un corazón.

## 5. Conclusiones

Se da solución al problema de encontrar un spline  $G^1$ -continuo racional cuadrático de Bézier que interpole un conjunto de puntos del plano con vectores tangentes asociados a cada uno de ellos y también cumple la propiedad de ser *fair*, ya que cada segmento que lo compone es la curva que minimiza el funcional de *fairness* que se propone.



**Figura 7.** Diseño de una carretera.



**Figura 8.** Modelo de una pieza de ajedrez. (a) Curva generatriz. (b) Diseño tridimensional. (c) Objeto real.

Para la minimización del funcional de *fairness* se utilizaron aproximaciones numéricas. En la experimentación numérica se muestra que se obtuvieron buenos valores de aproximación con pocas iteraciones.

Desde el punto de vista teórico se demuestra que el funcional de *fairness* tiene buenas propiedades como son su invarianza a transformaciones rígidas de coordenadas y homotecias y la reproducción de arcos de circunferencias.

## Referencias

- [1] Alikhani, J., Hosseini, S., M., M., Maalek, F., M., A new optimization algorithm based on chaotic maps and golden section search method. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 50, 201–214, 2016.
- [2] Bajaj, Chandrajit L., *Energy formulations for A-splines*. *Computer Aided Geometric Design*, 16, 39–59, 1999.
- [3] Boor C., Conte S. D., *Elementary Numerical Analysis An Algorithmic Approach*. Editorial Félix Varela, La Habana, 2004.
- [4] Courant, R.; Hilbert, D., *Methods of mathematical physics*, I, New York, N.Y.: Interscience Publishers, Inc., ISBN 0-471-50447-5, 1953.
- [5] Díaz, R., *Esquema de subdivisión interpolatorio con parámetros de tensión local basado en spline cónico*. Tesis presentada en opción del grado de Licenciado en Ciencias Matemáticas, Universidad de la Habana, 2010.
- [6] Farin, G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: a practical guide*. Academic Press Inc, 1997.
- [7] Levien, R., Séquin C., *Interpolating Splines: Which is the fairest of them all?*. *Computer-Aided Design & Applications*, 6(1), 91–102, 2009.
- [8] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis* (3rd ed.) New York: McGraw-Hill. ISBN 978-0-07-054235-8. 1976.
- [9] Yang, Xunnian., *Curve fitting and fairing using conic splines*. *Computer-Aided Design* 36, 461–472, 2004.
- [10] Yong, J-H., Cheng F., *Geometric Hermite curves with minimum strain energy*. *Computer-Aided Design* 21, 281-301, 2004.
- [11] Y.J. Ahn, C. Hoffmann, P. Rosen, *Geometric constraints on quadratic Bézier curves using minimal length and energy*, *Journal of Computational and Applied Mathematics* (2013).