Artículo de Revisión / Review Paper

Ciencias Matemáticas, Vol. 37, No. 1, 2024, Pag. 85-95
Recibido (*Received*): 19-07-2024, Revisado (*Reviewed*): 14-11-2024
Aceptado (*Accepted*): 22-12-2024, En línea (*Online*): 27-04-2025

Teorema de los ceros de Hilbert: aplicaciones de sus versiones débil y fuerte
Hilbert's zero theorem: applications of its weak and strong versions

Jolbin José Mairena Aráuz[1], Isaura Lisbeth Hudiel Fuentes[2], Cliffor Jerry Herrera-Castrillo[3]*

Resumen El teorema de los ceros de Hilbert (*nullstellensatz*) es un pilar del álgebra conmutativa y la geometría algebraica, con aplicaciones que trascienden su formulación original, lo que incluye las herramientas computacionales. Este artículo revisa las versiones débiles y fuertes del teorema, mediante la consulta de estudios publicados entre 1977 y 2024, seleccionados por relevancia, idioma y actualidad. La metodología, de enfoque cualitativo e interpretativo, resalta la escasez de publicaciones en español, lo que subraya la importancia del teorema en problemas matemáticos. Su aplicación unifica métodos algebraicos y geométricos para resolver sistemas polinomiales y estudiar ideales y variedades. Las versiones débiles y fuertes abordan, respectivamente, la existencia y unicidad de soluciones. Se enfatiza en la relevancia del teorema en la optimización convexa y la complejidad computacional, mientras señala limitaciones relacionadas con demostraciones computacionales. Este trabajo busca apoyar a investigadores, lo que fomenta competencias en el nivel superior y motiva futuras exploraciones del teorema en contextos educativos y tecnológicos.

Palabras Clave: álgebra conmutativa, aplicaciones, competencias, teorema de los ceros de Hilbert, versión débil y fuerte.

Abstract *Hilbert's zeros theorem (nullstellensatz) is a pillar of commutative algebra and algebraic geometry, with applications that transcend its original formulation, including computational tools. This article reviews the weak and strong versions of the theorem by consulting studies published between 1977 and 2024, selected for relevance, language and topicality. The methodology, with a qualitative and interpretative approach, highlights the scarcity of publications in Spanish, which underlines the importance of the theorem in mathematical problems. Its application unifies algebraic and geometric methods to solve polynomial systems and to study ideals and varieties. The weak and strong versions address, respectively, the existence and uniqueness of solutions. The relevance of the theorem in convex optimization and computational complexity is emphasized, while pointing out limitations related to computational proofs. This work seeks to support researchers, which fosters competences at the higher level and motivates future explorations of the theorem in educational and technological contexts.*

Keywords: *commutative algebra, applications, skills, Hilbert's zero theorem, weak and strong version.*

Mathematics Subject Classification: 13, 12Exx, 12E25, 13-XX.

[1]Centro Universitario Regional de Estelí. Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua, Nicaragua. Email: jolbinjosemairena@gmail.com.
[2]Centro Universitario Regional de Estelí. Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua, Nicaragua. Email: hudielisaura6@gmail.com.
[3]Centro Universitario Regional de Estelí. Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua, Nicaragua. Email: cliffor.herrera@unan.edu.ni.
***Autor para Correspondencia (*Corresponding Author*)**

Editado por (*Edited by*): Damian Valdés Santiago, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba.
Maquetado por (*Layout by*): Lázaro Daniel González Martínez, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba.

Citar como: Mairena Aráuz, J.J., Hudiel Fuentes, I.L.,& Herrera-Castrillo, C.J. (2024). Teorema de los ceros de Hilbert: aplicaciones de sus versiones débil y fuerte. *Ciencias Matemáticas*, 37(1), 85–95. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.15292987. Recuperado a partir de https://revistas.uh.cu/rcm/article/view/9954.

Introducción

La búsqueda de soluciones a ecuaciones algebraicas ha sido una de las preocupaciones esenciales en el campo de las matemáticas. Filósofos, matemáticos y científicos, a lo largo de los siglos, han dedicado esfuerzos significativos que van más allá de los límites tradicionales del álgebra, para comprender la naturaleza y las propiedades de estos procedimientos, así como para establecer principios y teoremas que permitan abordar de manera sistemática este desafío.

En el panorama actual, donde la tecnología y la investigación matemática se encuentran cada vez más entrelazadas, uno de los hitos más trascendentales de esta larga y fructífera trayectoria ha sido el desarrollo del teorema de los ceros de Hilbert, también conocido como el *nullstellensatz* [26]. Formulado a finales del siglo XIX por el destacado matemático alemán David Hilbert, este resultado ha tenido un impacto profundo y sólido en el campo del álgebra y la geometría, lo que establece las bases para comprender demostraciones alternativas, el estudio de sus diversas versiones y la exploración de sus aplicaciones en problemas contemporáneos [3].

Con el advenimiento de la computación simbólica y el desarrollo de potentes herramientas de álgebra computacional, el teorema ha adquirido una relevancia aún mayor. Estos avances han permitido explorar y aplicar el teorema de manera más eficiente, tanto en la resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales como en el estudio de la estructura de los ideales y variedades algebraicas.

Según Bigatti y colaboradores [5], los algoritmos y paquetes de software especializados, como los basados en la teoría de Gröbner, han sido fundamentales para implementar de manera práctica las ideas subyacentes al teorema de los ceros de Hilbert. Así, la interacción entre la teoría algebraica y las técnicas computacionales ha abierto nuevas vías de investigación y aplicación de este importante resultado matemático, lo que expande su impacto en múltiples ámbitos de las ciencias y la ingeniería.

Sin embargo, una de las principales interrogantes que aún no se han tratado por completo es la caracterización y clasificación de los tipos de ceros que pueden existir en una función continua [28]. Si bien se conocen las versiones débil y fuerte del teorema de los ceros, aún no se han estudiado exhaustivamente las propiedades y particularidades de cada tipo de cero, como su multiplicidad, estabilidad, comportamiento asintótico, entre otros [12].

Por esta razón, este estudio es de gran conveniencia y utilidad desde múltiples puntos de vista. Al tener consecuencias teóricas importantes, se colabora en la relación del teorema con la teoría de la computabilidad, lo cual es relevante para el diseño de algoritmos y el estudio de la complejidad computacional. Además, las técnicas y métodos desarrollados en la demostración del teorema influyen en el avance de diversas áreas de las matemáticas, como la teoría de conjuntos, el álgebra y la topología algebraica, lo que posibilita posteriores aplicaciones en ciencia y tecnología.

Este artículo fomenta el aprendizaje continuo del teorema de los ceros de Hilbert, puesto que existe poca información en habla hispana, por lo que constituye un aporte para futuras investigaciones, la actualización del conocimiento y la comprensión de conceptos clave para desarrollar habilidades de razonamiento matemático en el nivel superior.

En cuanto a las investigaciones previas, la mayoría se han centrado en aspectos teóricos y abstractos del teorema de los ceros, como su demostración, propiedades y aplicaciones en diversas áreas de las Matemáticas. Sin embargo, se ha prestado menos atención a las problemáticas relacionadas con la implementación y aplicación práctica del teorema, especialmente en el contexto de la modelización matemática y la resolución de problemas en ciencias aplicadas.

En este sentido, se han desarrollado diversos estudios de investigación a nivel internacional que se han enfocado en explorar el teorema de los ceros de Hilbert en la resolución de problemas fundamentales en el campo del álgebra conmutativa y la geometría algebraica [8, 25]. Asimismo, la versión débil del teorema ha sido aplicada en la demostración de propiedades clave de las curvas algebraicas y su relación con la teoría de números algebraicos [14, 30, 24].

En cambio, existen pocos estudios referentes al *nulltellesnsazt* de Hilbert, que solamente ha sido retomado como concepto que sustenta investigaciones como el trabajo de grado de Solórzano y colaboradores [31]. De este modo se observa la necesidad de realizar estudios como este, para familiarizarse con el contexto del álgebra moderna.

Si bien el *nullstellensatz* de Hilbert se enmarca en el ámbito de las ciencias exactas, su trascendencia para la sociedad no debe subestimarse. Las matemáticas, incluyendo derivaciones como esta, son la piedra angular sobre la cual se construyen muchas aplicaciones prácticas en campos como la física, la ingeniería, la informática y las ciencias naturales. Al ampliar el conocimiento teórico sobre las propiedades de los polinomios y los anillos conmutativos se abren nuevas posibilidades de desarrollo tecnológico y científico que, a su vez, pueden beneficiar a amplios sectores de la sociedad.

Mencionado lo anterior, el objetivo de esta revisión es sintetizar el conocimiento actual sobre las aplicaciones del Teorema de los Ceros de Hilbert, tanto en su versión débil como en su versión fuerte, en diversos campos de la matemática y la ciencia. Abordar esta temática en futuras investigaciones podría aportar nuevos conocimientos y herramientas para ampliar la comprensión y aplicabilidad del *nullstellensatz*.

Relevancia del estudio

El estudio aborda una temática esencial en el campo del álgebra conmutativa y la geometría algebraica, al explorar las versiones débil y fuerte del teorema de los ceros de Hilbert. Su revisión sistemática permite identificar vacíos en la producción científica hispanohablante, lo que favorece la democratización del conocimiento matemático avanzado. La investigación contribuye al fortalecimiento de competencias académicas en niveles superiores y promueve la integración de herramientas computacionales en el análisis algebraico, lo que facilita su aplicación en contextos educativos, tecnológicos y científicos. Este enfoque impulsa nuevas perspectivas para la enseñanza y el desarrollo de investigaciones futuras en matemáticas y áreas afines.

1. Materiales y métodos

La metodología empleada en este trabajo se basa en un paradigma interpretativo, con un enfoque cualitativo, puesto que persigue describir y comprender el contenido, bajo procedimientos de revisión bibliográfica. Como estrategia de búsqueda se seleccionó la base de datos de Google académico utilizando las siguientes palabras clave: "teorema de los ceros de Hilbert", "nullstellensatz", "versiones débil y fuerte", "aplicaciones" y combinaciones de estas. Además, no solo se indagaron artículos publicados en español, sino que también en inglés, con restricción de fecha desde 1977 hasta 2024, debido a la escasa información que existe y la necesidad de ampliar el conocimiento básico sobre dicho teorema.

La elección de restringir las fuentes de búsqueda a Google Académico se basa en su amplia accesibilidad y en su habilidad para compilar estudios de diversas disciplinas y fuentes académicas, como revistas indexadas, libros, tesis y actas de conferencias. Esta plataforma fue seleccionada como herramienta inicial debido a su versatilidad y facilidad de uso, especialmente en situaciones donde el acceso a bases de datos especializadas puede verse obstaculizado por restricciones de suscripción o limitaciones financieras.

Es relevante mencionar que este estudio es parte del trabajo académico realizado en el contexto del Curso de Álgebra Computacional, dirigido a estudiantes de cuarto año de la carrera de Matemáticas en la UNAN-Managua/CUR-Estelí. Este entorno académico ha permitido a los estudiantes investigar conceptos clave del álgebra conmutativa y la geometría algebraica, como el *nullstellensatz* de Hilbert, desde una perspectiva tanto teórica como práctica.

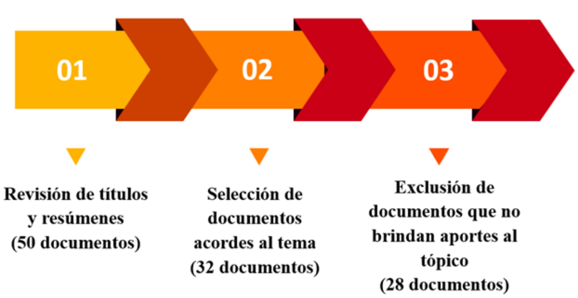

Figura 1. Proceso de selección de la literatura científica relativos al teorema de los ceros de Hilbert [*Scientific literature selection process regarding Hilbert's zeroes theorem*].

Por otra parte, la selección de los estudios discurrió en tres fases (Figura 1). La primera incluyó estudios relevantes que abordaron las aplicaciones del teorema de los ceros de Hilbert en sus versiones débil y fuerte, con las características específicas definidas por el grupo investigador, de acuerdo con los objetivos del estudio. En segunda instancia se excluyeron publicaciones que no estuvieran relacionadas con el teorema o que se centraran en otras variables de estudio. Por último, se eliminaron artículos selectos que presentaban inconsistencias durante el proceso de investigación.

En ese mismo sentido, la información extraída de los estudios analizados se basó en aspectos de relevancia, idioma y año de publicación, donde se consideraron las implicaciones del uso del teorema de los ceros de Hilbert. En cuanto a la exploración de los datos obtenidos, se sintetizaron de manera narrativa, puesto que esta estrategia facilita la comprensión de la temática y permite describir con detalle conceptos y procedimientos.

Para garantizar la calidad metodológica y relevancia de los artículos seleccionados se definieron los siguientes criterios:

- Relevancia temática: Se considera relevante cualquier artículo que aborde explícitamente aplicaciones del *nullstellensatz* de Hilbert en álgebra conmutativa, geometría algebraica, o ciencias afines. Se priorizan aquellos estudios que incluyen ejemplos prácticos, aplicaciones computacionales, así como análisis teóricos relacionados con las versiones débiles y fuertes del teorema.
- Calidad metodológica: Se seleccionan únicamente artículos publicados en revistas indexadas, conferencias de alto impacto o repositorios académicos confiables. Cada artículo debe describir detalladamente su metodología, así como las herramientas y los procedimientos empleados para la obtención de resultados.
- Idioma y accesibilidad: Los artículos deben estar escritos en un lenguaje técnico adecuado al público objetivo, ya sea en español o inglés, con prioridad para aquellos que proporcionen explicaciones claras y accesibles.
- Año de publicación: Se incluye preferentemente literatura publicada en los últimos 10 años, a fin de garantizar la actualidad del conocimiento revisado. Se permite la inclusión de artículos históricos solo si representan un aporte seminal o son esenciales para el contexto del tema, a partir de 1977.
- Impacto académico: Se evalúa el impacto mediante el número de citas, la calidad de la publicación y la aplicabilidad de los resultados en contextos académicos y tecnológicos.
- Adecuación temática: La pertinencia temática se determina de acuerdo al título, resumen y palabras clave de cada artículo, donde se verifica que se cumplan los objetivos específicos del estudio. Son descartados los estudios que se desvíen de los tópicos del *nullstellensatz* o enfoques relacionados.

Estos criterios buscan minimizar sesgos, asegurar la representatividad de la muestra y fortalecer la validez de los hallazgos presentados en este artículo.

Tabla 1. Etapas del proceso de investigación, retomado de Crespo [11] [*Stages of the research process from Crespo [11]*].

Problema de investigación	**Revisión de la literatura**	**Diseño del estudio**	**Selección de la muestra**	**Recopilación de datos**	**Análisis de datos**
Se identificaron y delimitaron claramente los objetivos de la investigación, así como las preguntas de investigación que guiaron el estudio.	Se realizó una exhaustiva revisión de la literatura existente sobre el tema de estudio, con el fin de contextualizar el problema, identificar vacíos en el conocimiento y establecer una base teórica sólida.	Se elaboró un diseño de investigación adecuado a los objetivos planteados, seleccionando la metodología más apropiada para abordar las preguntas de investigación y recopilando los recursos necesarios.	Se determinaron los criterios de inclusión y exclusión para la selección aleatoria de la muestra en el estudio.	Se llevaron a cabo las técnicas de recolección de datos establecidas en el diseño del estudio, donde se utilizaron las herramientas pertinentes.	Se aplicaron técnicas cualitativas apropiadas para analizar los datos recopilados, con el objetivo de responder a las preguntas de investigación.

Por otra parte, la muestra en estudio estuvo conformada por 25 artículos en los cuales se definieron las siguientes categorías de análisis: campo de aplicación computacional, contexto matemático y las implicaciones del uso del teorema de los ceros de Hilbert. Las variables fueron medidas a través de las calificaciones entre Varios y Pocos tal como se muestra en la Figura 2.

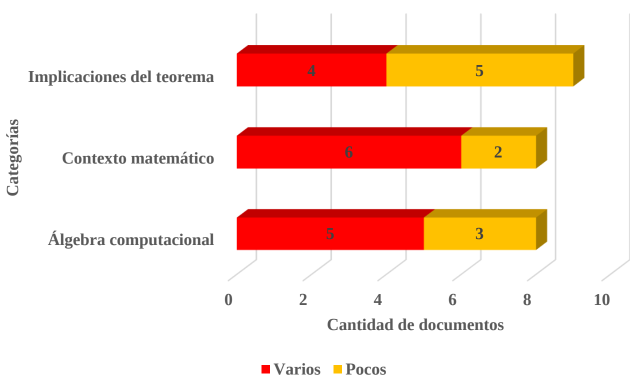

Figura 2. Categorías de análisis [*Analysis categories*].

1.1 Limitantes del estudio

Aunque este estudio se basó principalmente en Google Académico, es fundamental que investigaciones futuras incorporen una mayor diversidad de fuentes, como bases de datos académicas reconocidas (Scopus, JSTOR, IEEE Xplore). Estas plataformas ofrecen estudios con metodologías más sólidas y una representación más completa del conocimiento actual sobre el teorema de *nullstellensatz*. Ampliar las fuentes de información permitiría enriquecer los análisis al incluir enfoques interdisciplinarios y resultados significativos en diversas áreas de aplicación.

La muestra de 25 artículos es relativamente pequeña, y la selección aleatoria, sin criterios adicionales, puede afectar la relevancia de la muestra. En revisiones bibliográficas, el uso de una muestra aleatoria no siempre es apropiado, ya que no garantiza la inclusión de los estudios más significativos o influyentes. Esto podría limitar la profundidad y la representatividad de los hallazgos obtenidos.

La mención superficial de la parte computacional, sin incluir demostraciones prácticas o aplicaciones con software de álgebra computacional como Maple, Mathematica o SageMath, limita la utilidad práctica del artículo. Esta carencia es especialmente significativa, dado que el campo se beneficia enormemente de las herramientas computacionales en la resolución de problemas complejos, lo que podría ser abordado más a fondo en otros estudios.

La traducción de artículos del inglés al español puede generar errores de interpretación, especialmente en temas avanzados de álgebra y geometría algebraica, donde los términos técnicos y matices complejos son fundamentales para una comprensión precisa. Esta situación puede afectar la calidad del análisis y la validez de las conclusiones alcanzadas en el estudio.

2. Resultados y discusión

En el ámbito del algebra computacional y otras disciplinas científicas, el teorema de los ceros de Hilbert ha sido un tema de interés significativo en los últimos años. Esta proposición, en sus versiones débil y fuerte, ha sido objeto de escasas publicaciones científicas, lo que subraya su importancia y complejidad en el campo matemático. Para comprender más sobre este tópico se parte de un preámbulo sobre ideales y variedades afines, por ser éstos los conceptos fundamentales del teorema de los ceros de Hilbert.

2.1 Ideales y variedades afines: fundamentos del teorema de los ceros de Hilbert

En matemáticas, los ideales, como conjuntos de elementos en álgebras (anillos o grupos), desempeñan un papel crucial en la teoría de anillos, el álgebra abstracta y la geometría algebraica. A través de la relación entre ideales y variedades

Tabla 2. Rúbrica de evaluación de artículos [*Article evaluation rubric*].

Aspecto	**Excelente**	**Aceptable**	**No Aceptable**
Relevancia	El artículo aborda de manera exhaustiva las aplicaciones del teorema de los ceros de Hilbert en diversos campos de la matemática y la ciencia	El artículo trata algunas aplicaciones relevantes del teorema de los ceros de Hilbert, pero de manera superficial	El artículo no aborda las aplicaciones del teorema de los ceros de Hilbert o lo hace de manera tangencial
Idioma	El artículo está en un idioma accesible y comprensible	El artículo está escrito en un idioma que podría requerir un esfuerzo adicional para comprenderlo	El artículo está en un idioma que dificulta significativamente su comprensión
Año de publicación	El artículo fue publicado en los últimos 5 años reflejando el conocimiento actual sobre el tema	El artículo fue publicado hace más de 10 años, pero aun contiene información relevante	El artículo fue publicado hace más de 10 años y podría no reflejar el conocimiento actual del tema

afines se establece la base para comprender el *nullstellensatz* de Hilbert, un concepto central en este contexto.

Sin embargo, Hernández [19] profundiza en estos conceptos desde una perspectiva donde estudia las demostraciones y su relación con los teoremas fundamentales. Mientras que en su definición formal se dice que un subconjunto $I \subseteq k[x_1, \cdots, x_n]$ es un ideal si cumple las siguientes condiciones:

$$0 \in I, \tag{1}$$

$$\text{Si } f, g \in I \text{ entonces } f \pm g \in I, \tag{2}$$

$$\text{Si } f \in I \text{ y } g \in k[x] \text{ entonces } gf \in I. \tag{3}$$

Así mismo, las variedades algebraicas afines representan conjuntos de puntos (finito o infinito) donde los polinomios (de una o más variables) toman el valor cero. Sea $V(X)$ la variedad algebraica afín definida por un conjunto de polinomios $X \subseteq k[x]$. En general, se dice que un subconjunto $U \subseteq k^n$ es una variedad algebraica si existe tal X que satisface $U = V(X)$.

En otras palabras, $V(X) \subset k^n$ es el conjunto de todas las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \cdots = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0,$$

con $f_1, f_2, \cdots, f_n \in X$ [23, 2, 24].

La importancia de estas definiciones radica en la conexión fundamental con el teorema de los ceros de Hilbert. Esto permite abordar problemas de una manera más unificada y potente, ya que se pueden utilizar herramientas tanto algebraicas como geométricas para estudiar y resolver contrariedades en diversas áreas de las matemáticas. Además, son uno de los objetos centrales de estudio de la geometría algebraica clásica y moderna [20].

2.2 Teorema de los ceros de Hilbert

El *nullstellensatz* de Hilbert, traducido como "teorema de los lugares de los ceros", establece una relación fundamental entre variedades algebraicas y los ideales en anillos de polinomios definidos sobre cuerpos algebraicamente cerrados. Dado un cuerpo algebraicamente cerrado, se considera el anillo de polinomios asociados y un ideal en este anillo. La variedad afín vinculada a dicho ideal corresponde al conjunto de todas las $n-$tuplas de elementos en el cuerpo que anulan todos los polinomios pertenecientes al ideal [32].

Cox y colaboradores [10] exponen que una variedad $V \subseteq K^n$ y un ideal I, considera la correspondencia que se observa en la Tabla 3.

Tabla 3. Variedades e ideales corresponden [*Varieties and Ideals Correspond*].

Variedades afines		Ideales
V	$\longmapsto$	$I(V)$

Nota: La correspondencia entre ideales $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ y variedades $V(I) \subseteq k^n$ no es biyectiva. Es posible que distintos ideales generen la misma variedad algebraica, es decir, $V(I_1) = V(I_2)$ aunque $I_1 \neq I_2$.

Recíprocamente, dado un ideal $I \subseteq K[x_1, \cdots, x_n]$, se define el conjunto:

$$V(I) = \{x \in K^n : f(x) = 0 \quad \forall f \in I\}. \tag{4}$$

Lo anterior asegura que $V(I)$ sea una variedad afín porque existe un conjunto finito de polinomios $f_1, \cdots, f_s \in I : I = \langle f_1, \cdots, f_s \rangle$, donde $V(I)$ es el conjunto de raíces comunes de estos polinomios. Por consiguiente, se tiene el mapeo donde se observa una correspondencia entre ideales y variedades, pero no es biyectivo, es decir, ideales diferentes pueden corresponder a la misma variedad como se mostró en la Tabla 3.

El *nullstellensatz* de Hilbert ha sido un resultado trascendental, no solo porque establece una relación fundamental entre las ramas de las matemáticas, sino porque también está involucrado en problemas algorítmicos [29]. Por lo anterior, Solórzano y colaboradores [31] enfatizan que el teorema de los ceros de Hilbert representa el margen de la moneda cuyas caras son el álgebra conmutativa y la geometría algebraica.

Además, es la herramienta fundamental para el traslado del lenguaje en ambas áreas. Así mismo, el teorema establece que si un polinomio tiene coeficientes enteros y tiene raíces en el conjunto de números complejos, entonces también tiene raíces en el conjunto de números enteros [7]. En este sentido, [16] resalta que se puede demostrar mediante las bases de Gröbner.

En cierto sentido, este teorema es una generalización del teorema fundamental del álgebra, que expresa que todo polinomio no constante en $k[x]$ tiene una raíz. El *nullstellensatz* débil refiere que para todo ideal propio a $k[x_1,\cdots,x_n]$ (es decir, que no contiene los polinomios constantes), los polinomios en a tienen un cero común, donde a está definido como un punto en k elevado a n (véase Tabla 4), tienen un cero común [27].

Tabla 4. Glosario de términos [*Glossary of terms*].

Símbolo	**Significado**
k	(generalmente algebraicamente cerrado)
$k[x_1,x_2,\cdots,x_n]$	Anillo de polinomios en n variables sobre el campo k
I	Ideal en el anillo $k[x_1,x_2,\cdots,x_n]$
$V(I)$	Conjunto de soluciones en k^n del sistema de ecuaciones polinomiales definido por el ideal
p	Ideal primo en $k[x_1,x_2,\cdots,x_n]$
$\cap$	Intersección de conjuntos o ideales
$\subseteq$	Inclusión de conjuntos o ideales
$=$	Igualdad de conjuntos o ideales
$\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$	Punto en k^n
$f_1,f_2,\cdots,f_n$	Polinomios en $k[x_1,x_2,\cdots,x_n]$
Ideal generado por los polinomios	$f_1,f_2,\cdots,f_n$
Ideal maximal en $k[x_1,x_2,\cdots,x_n]$	

Una muestra de este teorema en la relación entre la geometría y el álgebra es: las soluciones de un sistema de ecuaciones polinomiales son objetos geométricos y los ideales y radicales son objetos algebraicos [22]. El teorema de los ceros de Hilbert dice que si dos ideales definen la misma variedad, entonces son iguales, salvo potencias; es decir, si un polinomio se anula en todos los puntos de la variedad, entonces existe un número natural m tal que $f^m \in I$. Esto implica que el polinomio pertenece al radical del ideal, denotado como $\sqrt{I}$. Cabe destacar que el teorema garantiza la existencia de tal potencia, pero no establece un valor específico para cada caso.

2.3 Versión débil

Sea K un campo algebraicamente cerrado e I, un ideal con $V(I)=\emptyset$, entonces $I=k[x_1,\cdots,x_n]$. Esto refleja una condición necesaria para que un conjunto algebraico sea no vacío [31].

Demostración. Para probar que $I=k[x_1,\cdots,x_n]$, la estrategia es mostrar que el polinomio constante 1 está en I, porque si $1\in I$, entonces, por la definición de ideal, $f=f\cdot 1\in I$, para todo $f\in k[x_1,\cdots,x_n]$. Por lo tanto, demostrar que $1\in I$ basta para concluir que $I=k\left[x_1,\ldots,x_n\right]$, ya que todo polinomio del anillo puede expresarse como múltiplo de 1 , lo que implica que el ideal contiene a todos los elementos del anillo.

La prueba es por inducción sobre n, el número de variables. Si $n=1$, $I\subset K[x]$ satisface que:

$$V(I)=\emptyset. \tag{5}$$

Supóngase que se cumple para el anillo de polinomios en $n-1$ variables en $k[x_1,\cdots,x_n]$. Sea $I=\langle f_1,\cdots,f_s\rangle$ un ideal en $k[x_1,\cdots,x_n]$ con $V(I)=\emptyset$. Se asume que el polinomio no es constante porque de lo contrario no habría nada que probar. Admítase que el grado total de f_1 es $N\geq 1$; se puede asumir también que f_1 tiene la forma:

$$f_1(x_1,\cdots,x_n)=cx_1^N+\text{términos en } x_1 \text{ con grado } <N, \tag{6}$$

donde $c\neq 0$ es una constante.

Considere el cambio lineal de coordenadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1,\\ x_2 &= \bar{x}_2+a_2\bar{x}_1,\\ &\ \vdots\\ x_n &= \bar{x}_n+a_n, \end{aligned}$$

donde los a_i son constantes en K que deben determinarse. Si se sustituye $x_1,\cdots,x_n$, f_1 adquiere la forma $f_1(x_1,\cdots,x_n)=f_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2+a_2\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n+a_n\bar{x}_1)=c(a_1,a_2,\cdots,a_n)x_1^N+$ términos en x_1 con grado $<N$,

Donde $c(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ es una expresión polinomial no nula en $a_1,\cdots,a_n$. Por definición de polinomios antes de proseguir se prueba que K es un campo algebraicamente cerrado e infinito. ∎

2.4 Versión fuerte

Si k es un campo algebraicamente cerrado y I es un ideal en $k[x_1,\cdots,x_n]$, entonces $I(V(I))=\sqrt{I}$. Lo anterior establece que cualquier ideal radical en un anillo de polinomios en n variables sobre el campo k, el conjunto algebraico de la variedad del ideal I es finito. Esta correspondencia biyectiva

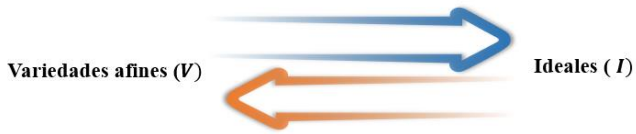

Figura 3. Correspondencia biyectiva entre variedades e ideales [*Bijective correspondence between ideal and varieties*].

es esencial para comprender las estructuras de los ideales y sus conjuntos asociados [16, 21].

Demostración. Para demostrar la versión fuerte implica involucrar la versión débil. La inclusión $\sqrt{I} \subseteq I(V(I))$ es clara. Recíprocamente, sea $f \in I(V(I))$. Se introduce una variable z y se considera el ideal $J = \langle (1 - zf)I \rangle$ de $k[z,x]$. El ideal J no tiene soluciones (si J tuviera una solución, sería solución de I. Si x_0 es una solución de I, entonces $1 - zf(x_0) = 1$, que es una contradicción). Luego, por la versión débil $1 \in k[z,k] = J$. Por lo tanto, se puede escribir:

$$1 = q_0(1 - zf) + \sum_{j=1}^{r} q_j g_j, \tag{7}$$

donde $g_j \in I, q_j \in k[z,x]$.

Se sustituye $z = \frac{1}{f}$ en la ecuación anterior, y después se multiplica por f^s, donde s es la mayor potencia de z en $q_1, \cdots, q_r$, donde se obtiene:

$$f^s = \sum_{j=1}^{r} \tilde{q}_j g_j, \tag{8}$$

donde $g_j \in I, \tilde{g}_j \in k[x]$.

$$f^s \in I \quad \therefore f \in \sqrt{I}. \tag{9}$$

■

Este teorema representa una derivación fundamental en el campo de la geometría algebraica. En su forma más básica, afirma que si un polinomio multidimensional no “desaparece” en un punto determinado, entonces hay una dirección en la que el polinomio nunca “desaparece”. Esta idea, también conocida como principio cero de Hilbert, tiene importantes aplicaciones en diversos campos de las matemáticas, la física y la ingeniería.

3. Aplicaciones del *nullstellensatz*

El *nullstellensatz* de Hilbert tiene numerosas aplicaciones en diversas áreas de la matemática, desde el álgebra conmutativa hasta la geometría algebraica. Atiyah y MacDonald [3] enfatizan la importancia del teorema para demostrar la finitud de la base de ideales en anillos noetherianos. Los autores profundizan en esta aplicación del teorema tal y como se muestra en la Tabla 5.

Tabla 5. Finitud de la base de ideales en anillos noetherianos [*Finiteness of the basis of ideals in noetherian rings*].

Variable	Concepto
Anillos noetherianos	Se establece que un anillo conmutativo R es noetheriano si todo ideal de R es finitamente generado.
Ideales en anillos de polinomios	En el anillo de polinomios $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ sobre un campo k, el teorema de los ceros de Hilbert garantiza que todo ideal propio tiene al menos un cero.
Finitud de la base de un ideal	Utilizando el teorema de los ceros de Hilbert, Atiyah y MacDonald [3] demuestran que todo ideal en un anillo de polinomios $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ es finitamente generado. Es decir, tiene una base finita.
Extensión a anillos noetherianos	Los autores muestran cómo este resultado sobre la finitud de la base de ideales en anillos de polinomios se puede extender a ideales en anillos noetherianos arbitrarios, gracias al teorema de los ceros de Hilbert.

Una de las aplicaciones más famosas del *nullstellensatz* de Hilbert está en el campo de la optimización convexa. En este caso, se utiliza una versión débil del teorema para demostrar la existencia de soluciones óptimas en problemas de programación lineal y cuadrática. Por otro lado, la versión fuerte de este teorema se emplea para establecer la unicidad de dichos resultados.

Así mismo, Basu y colaboradores [4] refieren su importancia en la teoría de la computación, especialmente en el estudio de la complejidad de problemas de decisión en álgebra computacional. Además, Hartshorne [18] destaca que la versión fuerte es crucial en geometría algebraica, pues permite caracterizar los conjuntos algebraicos como los conjuntos de derivaciones de sistemas de ecuaciones polinomiales.

La versión débil del teorema de los ceros de Hilbert es fundamental para la caracterización de los ideales maximales en un anillo conmutativo, lo cual tiene aplicaciones en álgebra abstracta y teoría de módulos [15].

En suma, el *nullstellensatz* de Hilbert es una herramienta esencial en el estudio de la estructura de los anillos de polinomios y sus ideales, con aplicaciones en álgebra conmutativa y álgebra computacional [9].

Consecuentemente, en todas sus variantes, el *nullstellensatz* de Hilbert afirma que todo ideal propio de un anillo de polinomios sobre un campo es finitamente generado. En su versión débil, el teorema afirma que todo ideal propio de un anillo de polinomios sobre un campo es generado por un número finito de elementos. Por otro lado, la versión fuerte del teorema establece que todo ideal propio de un anillo de polinomios sobre un campo admite una base finita.

Además, corresponde mencionar que en este estudio no se logró abordar demostraciones en software de álgebra computacional, lo cual es importante para una mejor comprensión del tópico usando diferentes teorías, de modo que esto representa una limitante en el alcance y extensión de este estudio. Se presentaron deficiencias de la muestra, puesto que se seleccionó aleatoriamente según los criterios propuestos por el grupo investigador. Mas aún, Se tuvieron dificultades en la recolección de datos, así que se recurrió a la traducción de publicaciones en ingles a habla hispana.

4. Herramientas computacionales para aplicar el teorema de los ceros de Hilbert

El *nullstellensatz* de Hilbert ha encontrado aplicaciones prácticas gracias al desarrollo de herramientas computacionales que permiten manejar cálculos algebraicos complejos, especialmente en el estudio de ideales y variedades algebraicas. Algunas de las herramientas y software más utilizados son *Macaulay2*, *singular* y *CoCoA*.

Macaulay2 [9] es un software creado para la investigación en álgebra conmutativa y geometría algebraica. Facilita cálculos sobre ideales, variedades afines y bases de Gröbner, que son esenciales para la aplicación del *nullstellensatz* [6]. Un ejemplo sería si se considera $I = \langle x^2 - y^2 - 1 \rangle \in R[x,y]$. Con *Macaulay2*, se puede determinar $V(I)$ y verificar si es un polinomio $p(x,y)$ pertenece a $\sqrt{I}$ (Figura 4).

```
R = QQ[x, y];
I = ideal(x^2 + y^2 - 1, x - y);
isInRadical = isSubset(radical(I), ideal(x - 1))
```

Figura 4. Ejemplo de aplicación en el software *Macaulay2* [*Example of application on software Macaulay2*].

El software *singular* (figuras 5 y 6) es muy utilizado para llevar a cabo cálculos algebraicos en el ámbito del álgebra conmutativa y la geometría algebraica. Proporciona herramientas para trabajar con ideales y variedades, así como para realizar verificaciones directas del teorema [17].

```
# Anillo de polinomios en cuatro variables con coeficientes
racionales y orden lexicográfico
A = PolynomialRing(QQ, 4, 'abcd', order='lp');

A;
   Multivariate Polynomial Ring in a, b, c, d over Rational Field
# Generadores del anillo A

A.gens();
   (a, b, c, d)
# Introduzcamos un ideal del anillo A
I = (a+b+c+d, a*b+a*d+b*c+c*d, a*b*c+a*b*d+a*c*d+b*c*d, a*b*c*d-
1)*A;

I;
   Ideal (a + b + c + d, a*b + a*d + b*c + c*d, a*b*c + a*b*d + a*c
   b*c*d, a*b*c*d - 1) of Multivariate Polynomial Ring in a, b, c,
   over Rational Field
# Cálculo de la base de Gröbner del ideal I
B = I.groebner_basis();

B;
   [a + b + c + d, b^2 + 2*b*d + d^2, b*c - b*d + c^2*d^4 + c*d -
   2*d^2, b*d^4 - b + d^5 - d, c^3*d^2 + c^2*d^3 - c - d, c^2*d^6 -
   c^2*d^2 - d^4 + 1]
```

Figura 5. Ejemplo de aplicación en el software *singular* [*Example of application on software singular*].

```
syntax
AffHilbertFn(R: (Poly or Quotient)RING): TAGGED("$hp.Hilbert")
AffHilbertFn(R: (Poly or Quotient)RING, N: INT): INT
```

Figura 6. Ejemplo de aplicación de singular obtenido de [1] [*Example of application of singular from [1]*].

Según Duque y colaboradores [13], *CoCoA* es un sistema algebraico computacional creado en la Universidad de Génova, Italia. Está diseñado para realizar cálculos en álgebra conmutativa y utiliza el algoritmo de Buchberger para calcular bases de Gröbner, así como una variante para el cálculo de syzígias. *CoCoA* interacciona con los usuarios a través de un protocolo de bajo nivel, independiente de la arquitectura. Además, ofrece herramientas para manejar vectores y matrices, lo que lo convierte en una herramienta versátil para abordar problemas matemáticos.

La combinación de estas herramientas computacionales facilita la exploración de las aplicaciones del teorema de manera más eficiente, ampliando su uso en la resolución de problemas matemáticos y en campos como la física, la ingeniería y las ciencias computacionales.

El *nullstellensatz* de Hilbert tiene aplicaciones prácticas en áreas como la optimización convexa, la teoría de la computación y la resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales. Su impacto en álgebra computacional, a través de herramientas como *Macaulay2*, *singular* y *CoCoA*, permite resolver problemas complejos en geometría algebraica y álgebra conmutativa, lo que sugiere que su utilidad podría extenderse a otros campos, como la física teórica, la ingeniería y la inteligencia artificial, donde los modelos algebraicos tienen un papel crucial.

Conclusiones

Finalmente, este artículo de revisión ha permitido aclarar varios aspectos clave del *nullstellensatz* de Hilbert. En primer lugar, se evidencia la escasez de estudios en idioma español publicados recientemente, lo cual subraya la necesidad de fomentar investigaciones que contribuyan a ampliar la accesibilidad del conocimiento sobre este teorema en las comunidades hispanohablantes. Este vacío en la literatura presenta una oportunidad para el desarrollo de trabajos que abarcan sus aplicaciones y propiedades.

El *nullstellensatz* de Hilbert ha demostrado ser fundamental en campos como la teoría de ideales, la geometría algebraica, las bases de Gröbner y la resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales. Este artículo ha explorado las versiones débiles y fuertes del teorema, analizando sus demostraciones y aplicaciones. Estos resultados consolidan su importancia en el panorama de la investigación matemática, tanto en aspectos teóricos como en aplicaciones prácticas.

Además, herramientas computacionales como *Macaulay2*, *singular* y *CoCoA* desempeñan un papel crucial para facilitar la implementación práctica del teorema. Estas plataformas permiten realizar cálculos complejos, analizar estructuras algebraicas y resolver problemas con mayor eficiencia, lo que fomenta su integración en áreas como la computación simbólica, la modelación matemática y la enseñanza.

Se espera que este trabajo sea una contribución valiosa tanto para investigadores en proceso de formación como para aquellos más avanzados, proporcionando información actualizada que permita fortalecer competencias profesionales en el nivel académico superior. Finalmente, los aspectos aún no tratados del *nullstellensatz* deben ser motivo de próximas investigaciones, con el objetivo de profundizar en su estudio y ampliar su red de conocimiento y proyección. En un contexto donde la tecnología y la inteligencia artificial se entrelazan con la educación, estas herramientas ofrecen un marco para desarrollar modelos didácticos innovadores y estrategias de pensamiento computacional, fomentando el aprendizaje continuo y la investigación interdisciplinaria.

El artículo se centra en un enfoque cualitativo narrativo, lo que limita el análisis. Dado que el teorema de los ceros de Hilbert tiene aplicaciones complejas y técnicas en álgebra computacional, se recomienda para futuros estudios complementarlo con análisis cuantitativos o herramientas de visualización. Estas adiciones podrían ayudar a presentar de manera más clara las relaciones entre conceptos y las aplicaciones del teorema en diversas áreas. Esta relación entre álgebra, variedades e ideales es la base estructural sobre la que se construye el teorema de los ceros de Hilbert (véase Figura 7).

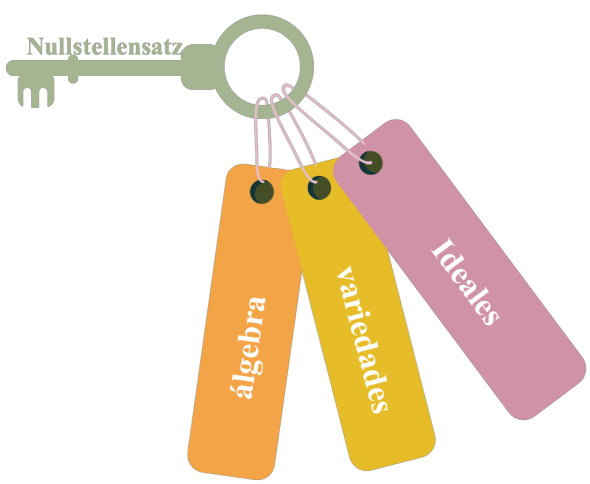

Figura 7. Conexión con el teorema de los ceros de Hilbert con las definiciones [*Connection with Hilbert's zeroes theorem with the definitions*].

Suplementos

Este artículo no contiene información suplementaria.

Conflictos de interés

Se declara que no existen conflictos de interés.

Contribución de autoría

Conceptualización J.J.M.A., I.L.H.F.

Curación de datos C.J.H.C., J.J.M.A.

Análisis formal J.J.M.A., I.L.H.F., C.J.H.C.

Adquisición de Financiamiento C.J.H.C.

Investigación J.J.M.A., I.L.H.F., C.J.H.C.

Metodología J.J.M.A., I.L.H.F.

Administración de proyecto J.J.M.A., I.L.H.F., C.J.H.C.

Recursos J.J.M.A., I.L.H.F.

Software J.J.M.A., I.L.H.F.

Supervisión C.J.H.C.

Validación J.J.M.A., I.L.H.F., C.J.H.C.

Visualización C.J.H.C.

Redacción: preparación del borrador original J.J.M.A., I.L.H.F.

Redacción: revisión y edición C.J.H.C.

Referencias

[1] Abbott, J. and A.M. Bigatti: *What is new in CoCoA?* In *Mathematical Software–ICMS 2014: 4th International Congress, Seoul, South Korea, August 5-9, 2014. Proceedings 4*, pages 352–358. Springer Berlin Heidelberg, 2014. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-662-44199-2_55.pdf.

[2] Arteaga Bastidas, R.H.: *Algunas Relaciones entre Álgebra de Caminos y Variedades Algebraicas Afines*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Colombia, Colombia, 2023. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/85477.

[3] Atiyah, M.F. and I.G. MacDonald: *Introduction to Commutative Algebra*. CRC Press, 2018. https://doi.org/10.1201/9780429493638.

[4] Basu, S., R. Pollack, and M.F. Roy: *Algorithms in Real Algebraic Geometry*, volume 10. Springer, 2006. https://doi.org/10.1007/3-540-33099-2__4.

[5] Bigatti, A.M., M. Caboara, and L. Robbiano: *On the Computation of Hilbert-Poincaré Series*. Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, 2(1):21–33, 1991. https://link.springer.com/article/10.1007/BF01810852.

[6] Burr, M., O. Clarke, T. Duff, J. Leaman, N. Nichols, and E. Walker: *Subalgebra Bases in Macaulay2*. arXiv preprint, 2023. https://arxiv.org/abs/2302.12473.

[7] Chuquillanqui, T.V.: *Propiedades algebraicas en la demostración del teorema de los ceros de Hilbert*. Pro-Matemática, 2(3):49–83, 1988. https://revistas.pucp.edu.pe/index.php/promathematica/article/view/6054.

[8] Córdoba Molina, D.D. y S.T. Vega Agredo: *Algunas aplicaciones del teorema de los ceros de Hilbert*, 2009. http://repositorio.unicauca.edu.co:8080/handle/123456789/7957.

[9] Cox, D., J. Little, and D. O'Shea: *The Algebra-Geometry Dictionary*. In *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Graduate Texts in Mathematics, pages 175–232. Springer, 2015. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-16721-3_4.

[10] Cox, D.A., J. Little, and D. O'Shea: *Geometry, Algebra, and Algorithms*. In *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Undergraduate Texts in Mathematics, page 5. Springer, fourth edition edition, 2008. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-0-387-35651-8_4.

[11] Crespo-Montero, R.: *Etapas del proceso de la investigación*, 2006. https://www.revistaseden.org/files/2-CAP%202.pdf.

[12] Deimling, K.: *Implicit Functions and Problems at Resonance*. En Springer, Berlin, Heidelberg (editor): *Nonlinear Functional Analysis*, páginas 146–185. Springer, 1985. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-662-00547-7_4.

[13] Duque, Á., P. Rodríguez y F. Novoa: *Un programa para calcular las representaciones irreducibles de S_n en la forma seminormal de Young, matemática computacional como apoyo a la docencia*. Universitas Scientiarum, 7(1):5–16, 2002. https://www.redalyc.org/pdf/499/49925477003.pdf.

[14] Echegoyen Ruiz, P.: *Una Prueba Autocontenida del Nullstellenstaz Efectivo de Z. Jelonek*, 2020. https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/20493.

[15] Eisenbud, D.: *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. 1995. https://www.math.ens.psl.eu/~benoist/refs/Eisenbud.pdf.

[16] Gimenez, P.: *Una introducción a las bases de Gröbner y algunas aplicaciones*. En *VI Escuela Doctoral Intercontinental de Matemáticas PUPC-UVA 2013*. Universidad de Valladolid, Perú, 2014. https://doi.org/10.18800/9786123170561.004.

[17] Gómez González, E., A. C. López Martín, D. Sánchez Gómez y T. C. Tejero Prieto: *Proyecto de innovación docente singalcon-Desarrollo de programas en singular para el aprendizaje del Álgebra Conmutativa*. 2013. https://gredos.usal.es/bitstream/handle/10366/124643/MID2013-044.pdf?sequence=1.

[18] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*, volumen 52 de *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag, 1977. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-1-4419-1596-2.pdf.

[19] Hernández López, L.C.: *Una Introducción a la Geometría Algebraica*. Universidad de Córdoba, Facultad de Ciencias Básicas, 2023. https://repositorio.unicordoba.edu.co/bitstreams/e2135666-6662-4ff1-b2ee-b010762c7db4/download.

[20] Laplagne, S.J.: *Algoritmos de álgebra conmutativa en anillos de polinomios*. Tesis de Doctorado, Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 2012. https://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis_n5119_Laplagne.

[21] Lev, G. y C.J. Rubio-Barrios: *Notas sobre las bases de Gröbner (en español). Bases de Gröbner y el Teorema de los Ceros de Hilbert*, 2013. https://www.researchgate.net/publication/236877368.

[22] Luque Duque, D.F.: *Commutative algebra and some results in algebraic geometry*. Master's thesis, Pontificia Universidad Javeriana, Colombia, 2016. https://hdl.handle.net/10554/43015.

[23] Portillo Rivas, Z. y Á. Campos Chiquillo: *Aplicación de los Anillos Noetherianos Conmutativos y las Variedades Algebraicas Afines en la Demostración del Teorema de los Ceros de Hilbert*, 2011. https://oldri.ues.edu.sv/id/eprint/10357/.

[24] Ramos Ramos, J.A.: *Nullstellensatz*. Tesis de Doctorado, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, Puebla, 2022. http://sidim.org/proc2023.pdf.

[25] Reyes, A. y J. Hernández-Mogollón: *A Survey on Some Algebraic Characterizations of Hilbert's Nullstellensatz for Non-commutative Rings of Polynomial Type*. Ingeniería y Ciencia, 16(31):27–52, enero-junio 2020. https://doi.org/10.17230/ingciencia.16.31.2.

[26] Reynoso, C.: *Geometría de Curvas Algebraicas*. Journal of Basic Sciences, 4(1):16–33, 2005. https://revi

stas.ujat.mx/index.php/jobs/article/download/872/731.

[27] Riddick, M. y P. Vizzarri: *Introducción a la geometría algebraica*, 2008. https://www.mate.unlp.edu.ar/~demetrio/Monografias/Materias/EA/20.%20Introduccion%20a%20la%20Geometria%20Algebraica.pdf.

[28] Rudin, W., M.I. Alcerreca Sánchez y L. Briseño Aguirre: *Principios de Análisis Matemático*. McGraw-Hill, 1980. https://asoimatepn.wordpress.com/wp-content/uploads/2015/04/rudin-walter-principios-de-anc3a1lisis-matemc3a1ticoc2b4c2b4-tercera-edicic3b3n-mcgraw-hill-mc3a9xico-1980-ocr.pdf.

[29] Sabia, J.R.: *Un Algoritmo efectivo para el Teorema de los Ceros de Hilbert*. Tesis de Doctorado, Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 1992. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2524_Sabia.pdf.

[30] Sánchez Ceballos, C. C.: *Comparación entre el teorema clásico de los ceros de Hilbert y el teorema de los ceros Hilbert sobre MV-álgebras*. Tesis de Licenciatura, Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia, 2022. https://hdl.handle.net/11059/14191.

[31] Solórzano Rojas, K.D., Y.R. Lanzas Arechavala y Y.A. Ramírez Bonilla: *Resolución de Sistemas de Ecuaciones Polinomiales utilizando las Bases de Gröbner y el Método de Autovalores*, 2015. https://core.ac.uk/download/pdf/53103557.pdf.

[32] Sombra, M.: *Estimaciones para el Teorema de Ceros de Hilbert*. Tesis de Doctorado, Universidad de Buenos Aires, 1998. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3035_Sombra.pdf.