

Modelo para el proceso de desarrollo del pensamiento lógico-matemático avanzado

Model for the process of development of the logical-mathematics advanced thought

Serdaniel Nieves Pupo¹, Rita A. Roldán Inguanzo^{2*}

Resumen El pensamiento lógico-matemático avanzado es el proceso psíquico cognoscitivo que permite al hombre penetrar en la esencia de los objetos matemáticos y descubrir lo lógico y esencial dentro de la complejidad. Enseñar a pensar con lógica constituye un reto para la educación cubana y línea de investigación priorizada en la Didáctica de la Matemática. El objetivo de este artículo es socializar un modelo para el proceso de desarrollo del pensamiento lógico - matemático avanzado a partir de novedosas formas de integrar la descomposición genética de conceptos, la coordinación de registros semióticos y los mapas conceptuales. Se introducen nuevos enfoques de aprendizaje a partir de visualizaciones gráficas que actúan como medios auxiliares de razonamiento al operar con conceptos matemáticos. Un elemento novedoso es la implementación práctica del método genético-constructivo como un conjunto de acciones didácticas para la estimulación de un pensamiento flexible y divergente, este accionar favorece en los estudiantes la visualización generalizada de su estructura cognitiva, la racionalización del trabajo mental y el control de la ejecución. La propuesta establece una relación biunívoca entre el proceso de asimilación y la implementación creativa del sistema de conocimientos a la resolución de ejercicios y problemas de la Matemática.

Abstract Advanced logical-mathematical thinking is the cognitive psychic process that allows man to penetrate into the essence of mathematical objects and discover the logical and essential within complexity. Teaching thinking with logic is a challenge for Cuban education and research line prioritized in the Mathematics Didactics. The objective of this article is to socialize a model for the process of development of advanced logical - mathematical thinking from novel ways of integrating the genetic decomposition of concepts, the coordination of semiotic registers and conceptual maps. New learning approaches are introduced from graphic visualizations that act as auxiliary means of reasoning when operating with mathematical concepts. A novel element is the practical implementation of the genetic-constructive method as a set of didactic actions for the stimulation of a flexible and divergent thinking, this action favors in the students the generalized visualization of their cognitive structure, the rationalization of mental work and the control of the execution. The proposal establishes a one-to-one relationship between the assimilation process and the creative implementation of the knowledge system to the resolution of Mathematics exercises and problems.

Palabras Clave

pensamiento lógico-matemático avanzado — representaciones semióticas — descomposición genética de conceptos — método genético-constructivo

¹ Universidad de Pinar del Río "Hermanos Saíz Montes de Oc", Cuba, serdaniel.nieves@upr.edu.cu

² Universidad de La Habana, Cuba, rrolan@matcom.uh.cu

*Autor para Correspondencia

Introduction

El pensamiento lógico-matemático avanzado es el proceso psíquico cognoscitivo que permite al hombre penetrar en la esencia de los objetos matemáticos y descubrir lo lógico y esencial dentro de la complejidad. Enseñar a pensar constituye un desafío para la educación cubana y un reto para la Didáctica de la Matemática. El proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos matemáticos constituye un me-

dio por excelencia para el desarrollo del pensamiento racional en tanto exige un elevado esfuerzo intelectual para realizar, de forma cíclica, análisis, síntesis, abstracción, comparación, analogías y transferencias durante la asimilación y aplicación de conocimientos a la solución de ejercicios y problemas.

Es reconocida la relación existente entre el pensamiento lógico y el proceso de resolución de problemas; diferentes

investigadores y especialistas (Artigue, 2003) y (Asunción, 2012), consideran que el pensamiento tiene lugar en la actividad de resolución de problemas y son del criterio común que esta es la vía más eficaz para la formación y desarrollo del pensamiento lógico. Por otra parte (Delgado, 1999, p.22) afirma que "...generación tras generación reconocen las dificultades que presentan muchas personas en el aprendizaje de las matemáticas, lo cual parece a primera vista contradictorio debido a su carácter lógico y estructurado...". Dando a entender de esta manera que el problema principal se encuentra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los saberes matemáticos.

Es de notable interés para muchos investigadores en Didáctica de la Matemática, comprender dónde radican las causas que provocan las dificultades del aprendizaje en los estudiantes y particularmente de las matemáticas superiores. Mediante investigaciones realizadas en este tema, la experimentación durante la práctica docente y las experiencias del colectivo de profesores se ha podido identificar con regularidad que los estudiantes presentan insuficiencias en la estructuración lógica de sus conocimientos, así como en la coordinación de información conceptual y teórica que poseen, durante la resolución de ejercicios y problemas de la Matemática.

De las insuficiencias anteriores se ha podido determinar que las principales causas son: Insuficientes niveles de abstracción en la representación mental de conceptos, dificultades al hacer analogías y transferencias, razonamiento sobre generalizaciones, así como en la estructuración y organización lógica de los contenidos durante la resolución de ejercicios y problemas. Estas causas tienen una fuerte componente psicológica pues tienen que ver con procesos cognitivos de representación, nivel de abstracción y estructuraciones lógicas a un nivel avanzado por el propio contenido de la Matemática. De este análisis preliminar se puede decir que estas insuficiencias están muy vinculadas con el proceso de desarrollo del pensamiento lógico-matemático avanzado, que integra en sí dichos procesos cognitivos.

Por insuficiencias similares a las antes descritas (Azcárate, 2003, p.135) afirma que [...] es en el seno del congreso del PME (Psychology of Mathematics Education) en 1985, cuando se forma un grupo de trabajo cuyo objetivo era estudiar la naturaleza del llamado "pensamiento matemático avanzado". Este se crea con el objetivo de profundizar en las teorías y modelos cognitivos acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

Existen muchos investigadores en el tema que no definen el término "pensamiento lógico-matemático avanzado", como justificación plantean que el problema radica en establecer los límites entre elemental y avanzado. El calificativo de elemental o avanzado es relativo y no depende de una edad determinada, aunque a medida que el estudiante avance en los niveles de enseñanza se hace más evidente el calificativo de avanzado en tanto que la Matemática se torna más formalizada y generalizada. Luego lo avanzado está determinado por la profundidad de operaciones del intelecto que debe realizar

el estudiante para descubrir lo esencial dentro de lo complejo, y a su vez lo complejo está dado por la cantidad conocimientos entrelazados, por situaciones problemáticas que exigen un alto grado de visualización, por la forma de controlar y dirigir la búsqueda de una solución, etc.

1. Algunas consideraciones teóricas sobre el proceso de desarrollo del pensamiento lógico-matemático avanzado

El pensamiento racional es objeto de estudio de la Psicología y de la Lógica, este se manifiesta como proceso psíquico cognoscitivo y como resultado. En la literatura psicológica especializada, algunos autores como (Rubinstein, 1966); (Petrovski, 1985); (Vigotsky, 1987) y (González, 1995) abordan cuatro tipos de pensamiento: pensamiento figurativo, pensamiento práctico, pensamiento lógico y pensamiento científico. El pensamiento es lógico porque sigue las leyes de la lógica, y según el contenido es matemático, de aquí el termino pensamiento lógico-matemático.

En (Herlina, 2015, p.2) se hace un análisis de varias definiciones dadas por expertos e investigadores en el tema y asume la siguiente definición "[...] pensamiento matemático avanzado es el proceso del pensar matemático que comprende procesos de representación, abstracción, pensamiento matemático creativo, y la prueba matemática"¹. En esta definición se expresa el pensamiento matemático avanzado como un conjunto de procesos cognitivos, que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

Según (Cantoral, 2006) el pensamiento matemático se desarrolla entre los estudiantes en la medida en que ellos estén en condiciones de tomar el control de sus propias actividades matemáticas organizadas por su profesor. Además (Campistrous, 1993) entiende por lógico un pensamiento que es correcto, es decir, un pensamiento que garantiza que el conocimiento mediato que proporciona se ajusta a lo real. Luego el mismo autor citado, en consideración a las investigaciones de Jean Piaget, determina que, el desarrollo del pensamiento está asociado al dominio de los procedimientos lógicos los cuales se clasifican en correspondencia con las formas lógicas del pensamiento en: conceptos, juicios y razonamientos.

Sobre la importancia de la atención a dichos procesos cognitivos (Parada, 2014) afirma que el profesor necesita tener claridad en su pensamiento matemático escolar con el objetivo de guiar a sus estudiantes a encontrar formas más útiles de representar los contenidos mediante analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones. En este tema también investiga (De Armas, 2016) sobre los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores en la enseñanza de las funciones y resalta la necesidad de conectar diferentes re-

¹ "...thus definition of Advanced Mathematical Thinking (AMT) is mathematical thinking processes which comprise processes of representation, abstraction, mathematical creative thinking, and mathematical proving."

presentaciones de un concepto matemático para su construcción.

En (D'Amore, 2015) se destaca que uno de los mayores obstáculos en el aprendizaje de la Matemática está relacionado con las características específicas del único instrumento posible de su denotación: los sistemas semióticos, y afirma que en la actualidad éste es uno de los temas de mayor difusión en el mundo, en el ámbito investigativo. En muchas investigaciones el desarrollo del pensamiento lógico-matemático avanzado es sustentado teóricamente desde las representaciones semióticas, este se fundamenta en lo que se podría llamar la paradoja cognitiva del pensamiento matemático, “[...] por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos” (Duval, 1998, p.175).

En este sentido (Duval, 2006) afirma que lo importante para la enseñanza de las matemáticas no es la elección del mejor sistema de representación, sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos, porque de esta forma surgirá la comprensión conceptual. Otro sustento teórico lo constituye el modelo cognitivo APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) que surge como un intento de entender el mecanismo de la abstracción reflexiva introducida por Piaget para describir el pensamiento lógico de los niños (Villabona, 2016). Esta teoría posibilita la construcción de conceptos matemáticos siempre que el individuo posea las estructuras previas necesarias. Dicho modelo describe las acciones que se deben realizar para la descomposición genética de conceptos, que según (Angélica, 2014) se define como, el análisis teórico del concepto en función de las construcciones mentales que un estudiante debería realizar para desarrollar la comprensión de éste.

La descomposición genética de conceptos se usa y extiende para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un determinado concepto o noción matemática en niveles más avanzados. Al respecto (Vega, 2014) afirma que para obtener una descripción de la construcción del conocimiento matemático, solo se puede inferir de las observaciones a un individuo al enfrentar problemas o situaciones en las que esté buscando una solución o tratando de comprender un fenómeno, ya que no es posible observar directamente los esquemas del conocimiento o sus objetos y procesos.

De la bibliografía sistematizada se puede decir que las principales características del pensamiento lógico-matemático avanzado son: el nivel de abstracción, la formalización del conocimiento, la representación, la definición de conceptos y la demostración (Azcárate, 2003). Luego no es lo mismo el “pensamiento lógico-matemático avanzado” que el “proceso de desarrollo del pensamiento lógico - matemático avanzado” el primero es un proceso psíquico que también puede entenderse como resultado; el segundo es el mecanismo mediante

el cual se incide sobre el primero.

Por tanto desde la didáctica se entiende el proceso de desarrollo del pensamiento lógico-matemático avanzado como la actividad que desarrolla el profesor de Matemática orientada a lograr el avance progresivo de los estudiantes en la ejecución de acciones mentales que propicien el necesario nivel de abstracción, el proceso de formalización del conocimiento, definición de conceptos, representaciones y demostraciones durante la producción de nuevos conocimientos y la resolución de ejercicios y problemas.

Es de reconocida importancia los modelos elaborados para explicar y apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Algunos de estos intentan describir el proceso de asimilación como el modelo cognitivo APOE, otros como el modelo de Polya describen el accionar procedimental para la resolución de ejercicios y problemas. De hecho, siempre que se adopta un patrón de enseñanza, o se sigue sistemáticamente un procedimiento aplicable a determinadas situaciones, se está haciendo uso de un modelo.

Los modelos se diseñan siguiendo una lógica de pensamiento para describir un proceso y son aplicables a un contexto determinado. Cuando se elabora un modelo de carácter didáctico, por ejemplo para enseñar a resolver ciertos tipos de problemas, se diseña sobre la base de ciertas condiciones iniciales y principios que rigen toda su estructura interna. Sucede muchas veces que el profesor intenta introducir, durante la práctica docente, un modelo sin tener presente su adaptabilidad lógica, o sea, la lógica del accionar que induce la estrategia o el procedimiento, contrasta con la lógica que el estudiante utilizó para asimilar los conocimientos que ahora está intentando poner en práctica por medio de un procedimiento impuesto, que puede ser factible pero no debe provocar contradicciones con las formas de aprendizaje propias del estudiante. Esto atenta contra el proceso de significación y en consecuencia afecta los procesos de razonamiento lógico.

2. Un modelo para el proceso de desarrollo del pensamiento lógico-matemático avanzado

Sobre el concepto de modelo (Valle, 2012, p.138), afirma que desde el punto de vista epistemológico el modelo es “[...] toda construcción teórica que sirve para interpretar o representar la realidad o una parte de la realidad [...] En este caso, el modelo es una manera de explicar la teoría o una parte de la teoría científica, acercando lo abstracto a lo concreto”. Por tanto se concibe el modelo para el tratamiento metodológico al proceso de desarrollo del pensamiento lógico-matemático avanzado como: la concreción teórico-formal de las características esenciales del proceso de desarrollo del pensamiento lógico-matemático avanzado. Sustentado en la teoría de las representaciones semióticas, los mapas conceptuales y la descomposición genética de conceptos, que permita desde la reflexión y la creatividad, una eficiente estructuración lógica del conocimiento matemático durante la resolu-

ción de ejercicios y problemas Matemáticos.

Con la implementación práctica del modelo se aspira a que los estudiantes desarrollen un razonamiento lógico, creativo y coherente que le permita la visualización generalizada del sistema conceptual en la búsqueda eficiente de vías de solución y en el control del proceso de solución de ejercicios y problemas. En la medida en que se haga sistemático este modo de actuación se irá alcanzando paulatinamente un desarrollo adecuado del pensamiento lógico-matemático avanzado. La idea central del modelo es buscar un nivel de equilibrio entre el proceso de asimilación de conocimientos y las formas de razonamiento que el estudiante utiliza durante la utilización de estos conocimientos, tanto a la solución de ejercicios y problemas como a la asimilación de nuevos conocimientos.

Para este modelo se han determinado los siguientes principios:

1. El carácter lógico-comunicativo-interpersonal: caracteriza la actuación del profesor de Matemática y los modos de pensar lógicos generalizados que le propician: organizar la lógica interna del contenido; comunicar y facilitar la comunicación en colectivo, la reflexión y comprensión consciente del conocimiento; la valoración del contenido y de su propio aprendizaje; estimular la búsqueda de causas y argumentos y el desarrollo del pensamiento hipotético. Este principio se manifiesta en la interacción profesor - estudiante y estudiante - estudiante. Expresa la capacidad de entender a los demás e interactuar eficazmente con ellos, la sensibilidad a expresiones faciales, la voz, los gestos y posturas y la habilidad para responder y usar las palabras de manera efectiva.
2. El carácter sistemático de la coordinación entre registros de representaciones semióticas: el pensamiento lógico - matemático avanzado se caracteriza por su naturaleza semióticamente mediatizada. En este sentido la comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos registros de representación, y esa coordinación se manifiesta por la rapidez y espontaneidad de las actividades de conversión. Por tanto las transformaciones semióticas y la coordinación entre los registros de representación son imprescindibles para su desarrollo.
3. La significatividad del contenido como base del aprendizaje: el aprendizaje significativo es un mecanismo humano por excelencia para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático avanzado. El nuevo contenido debe relacionarse de modo intencionado dentro del dominio de la capacidad intelectual de asimilación, o sea, debe tener significatividad lógica respecto a los contenidos. Una manera eficiente de emplear las ideas previamente aprendidas en el procesamiento (internalización) de ideas nuevas consiste en relacionarlas intencionadamente con las primeras. Las ideas nuevas, que se convierten en significativas, expanden también a su vez, la base de la matriz de aprendizaje.

4. La formación sistémica de estructuras conceptuales. El aprendizaje y formación sistemática de conceptos relacionados entre sí constituyen estructuras de conocimiento integradas y potencia el desarrollo del pensamiento lógico-matemático avanzado. Estas estructuras cognitivas almacenan e integran el conocimiento semántico del que dispone el sujeto así como formas intrínsecas de razonamientos que se originan durante el proceso de asimilación.
5. La visualización en la formalización del conocimiento. Se manifiesta en el uso de la información visual como un medio para desarrollar el pensamiento matemático, a través del conocimiento y significado de diferentes formas de representación y modelación de objetos matemáticos mediante las representaciones externas o internas. En estas aparecen dos facetas básicas complementarias, una externa a los sujetos (con soporte material) y otra interna a los mismos sujetos (imagen mental). Los estudiantes que han creado por sí mismos un diagrama, dibujos, gráficos, etc., para la formación de un concepto, lo aprenden mejor y lo recuerdan más significativamente que aquellos que sólo conocen su formalización.

2.1 Relaciones y componentes esenciales del modelo

Se puede afirmar que un estudiante ha alcanzado un adecuado desarrollo del pensamiento lógico-matemático avanzado cuando logra visualizar una coherente estructuración sistémico-lógica de sus conocimientos, tiene una visión generalizada de su sistema de conocimientos, tiene control en la dirección de sus razonamientos, racionaliza el trabajo mental y aplica con eficiencia procedimientos lógicos a la resolución de ejercicios y problemas de Matemática. Esto implica que el proceso de enseñanza-aprendizaje debe tender al desarrollo de estructuras cognoscitivas que permitan acceder al conocimiento con menor desgaste y mayor racionalización del trabajo mental posible.

En este sentido el pensamiento lógico-matemático avanzado, juega un papel fundamental durante de asimilación nuevos conocimientos y se manifiesta como el proceso psíquico cognoscitivo responsable de todas las relaciones y configuraciones complejas entre núcleos conceptuales. Es el creador de nuevas conexiones lógicas que emergen de núcleos conceptuales previos, estas constituyen el nuevo conocimiento. Los núcleos conceptuales son el pivote cognitivo que se han ido construyendo y enriqueciéndose durante años, forman una unidad cognoscitiva alrededor de la cual se forma y acumula información, son más consistentes mientras más interrelación sistémica tenga entre sus componentes. Las nuevas formas de razonamiento se originan cuando se realizan nuevas configuraciones lógicas y sistémicas entre los núcleos de conceptuales, cada nueva configuración, origina objetos matemáticos ya sea conceptos, definiciones, operaciones, formas de razonamiento, teoremas y juicios.

Las esencias de todo nuevo conocimiento que se aprenderá están “distribuidas” en los conocimientos precedentes. En este caso se decidió agrupar estos contenidos en núcleos conceptuales, los cuales serían entonces una unidad cognoscitiva que proporciona material genético y alrededor de la cual se crea y acumula información. A diferencia de los nodos cognitivos, la función de los núcleos conceptuales es proporcionar conocimiento y propiedades para la formación de nuevos conocimientos. Estos núcleos están compuestos por varios conceptos. Luego que un nuevo concepto es aprendido, entonces debe formar parte de algún núcleo conceptual.

A continuación se presenta un esquema donde se han representado las relaciones que existen entre los componentes del proceso del desarrollo del pensamiento lógico-matemático avanzado.

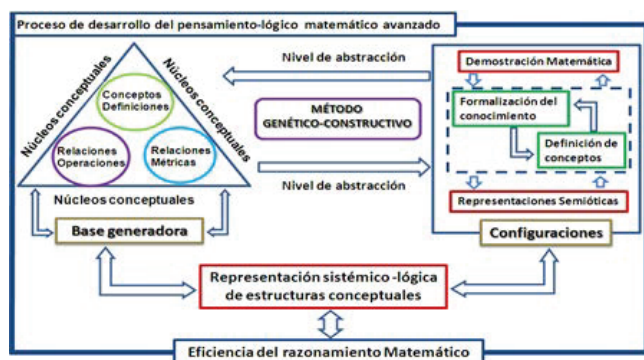


Figura 1. Relaciones esenciales del proceso de desarrollo del pensamiento lógico - matemático avanzado. Fuente: elaboración propia.

En este esquema la base generadora del conocimiento contiene tres núcleos conceptuales: conceptos y definiciones, relaciones-operaciones y relaciones métricas. Sobre estos, los procesos lógicos del pensamiento lógico-matemático avanzado erigen toda la estructura de contenidos de la Matemática. Dichos núcleos agrupan las líneas directrices de la matemática, que han sido desarrolladas desde la matemática escolar. Es complejo el estudio de cada núcleo por separado porque están compenetrados e interrelacionados, pero en el acto del proceso de enseñanza - aprendizaje de un nuevo objeto matemático podemos diferenciar los aportes que realiza cada núcleo a la construcción del nuevo objeto. Es importante saber dentro de qué núcleo se incluirá el nuevo objeto, ya que este pasaría a ser un nuevo elemento de alguno de ellos. A veces no se usa completamente el objeto sino la forma de razonamiento que se usó para su creación y asimilación.

1. **Conceptos y definiciones:** Este núcleo agrupa múltiples conceptos y definiciones, proporciona las cualidades esenciales y la formalización del conocimiento matemático. Cuando se usa un concepto para la construcción o adquisición de nuevos conocimientos, necesariamente se debe usar cierta formalización de este, que vendría siendo una definición. Luego este núcleo

aporta las formalizaciones sucesivas acompañadas de las cualidades esenciales que se van aportando a la formación del nuevo ente matemático. Sucede que a veces se usa la definición sin tener presente las cualidades esenciales del concepto (procedimiento mecanicista) y viceversa a veces se tiene la idea esencial o intuitiva y el estudiante no sabe formalizarla (expresar en términos matemáticos).

2. **Operaciones y relaciones:** Este núcleo proporciona las articulaciones, el engranaje lógico que le da cuerpo y estructura al nuevo objeto matemático que se construye. Aquí entran a jugar un papel importante los conceptos de las operaciones aritméticas, algebraicas y trascendentes, igualdades, desigualdades, relaciones funcionales que se usan en la elaboración de la nueva definición, o sea, en la formalización del nuevo conocimiento.
3. **Relaciones métricas:** Este núcleo proporciona las ideas gráficas de cantidad numérica, nociones de distancia, proximidad, optimización. Aporta elementos geométricos que ayudan a comprender el significado de ciertos procesos de límite y convergencia. En muchas ocasiones este núcleo conceptual es el responsable de que exista conversión entre los registros de representación semiótica: algebraico y geométrico, ya que a partir de un modelo intuitivo gráfico o geométrico, se formaliza la idea en términos algebraicos.

Este modelo tiene dos nodos principales: el de la base generadora y el de las configuraciones. Es entre la interacción de estos dos sistemas que ocurre el importante proceso de representación sistémico-lógica de estructuras conceptuales mediatizada por el nivel de abstracción y se define como la visualización generalizada de las cualidades esenciales de un sistema de conceptos ordenados jerárquicamente, mediante la cual el estudiante orienta su razonamiento durante la resolución de ejercicios y problemas. Luego el tratamiento metodológico a la representación sistémico lógica de estructuras conceptuales son las acciones de visualización gráfica que realiza el docente para ilustrar las cualidades y relaciones esenciales de un sistema jerárquico de conceptos o proceso de razonamiento, apoyándose en las funciones de tratamiento y conversión registros de representaciones semióticas.

El modelo transita por tres fases que se describen a continuación.

Fase de activación: Con esta fase comienza el ciclo de desarrollo del pensamiento lógico-matemático avanzado y se caracteriza por dos momentos esenciales:

1. **Activación y excitación de los núcleos conceptuales** a partir de la motivación y necesidad de aprendizaje. Se pone a disposición el material genético del conocimiento para formar nuevos objetos matemáticos. El profesor debe generar una necesidad cognitiva en el estudiante, y este debe reconocer la falta e importancia de los nuevos conocimientos en sus saberes para resol-

ver problemas. El profesor a través de impulsos bien intencionados debe lograr la activación y excitación de los núcleos conceptuales portadores del conocimiento necesarios. Estos elementos deben ser esquematizados en un mapa conceptual de manera que el estudiante visualice las relaciones conceptuales, utilizando distintas representaciones semióticas para un mismo concepto.

2. Primera abstracción reflexiva a partir de la priorización mental de las cualidades esenciales que aportan los núcleos conceptuales, mediatizada por distintas representaciones semióticas.

Este es un proceso que debe ocurrir después que se activen los núcleos y el estudiante visualice una representación esquemática, con el objetivo de lograr aliviar el nivel de abstracción. En este se priorizan las cualidades esenciales que aportan los conceptos precedentes al nuevo objeto, teorema o propiedad matemática. Es una primera abstracción reflexiva porque se realizará con las partes constituyentes previo a integrarlas en un todo para dar origen a nuevos conocimientos.

Fase de configuración: En esta se establecen las nuevas relaciones entre las partes constituyentes del nuevo objeto matemático. Tiene lugar durante el proceso de asimilación del nuevo contenido. Esta fase se desarrolla en tres momentos fundamentales:

1. Configuración entre elementos de los núcleos conceptuales. Emergen relaciones entre los núcleos conceptuales que originan nuevos conceptos y formas de razonamientos. Estas cualidades en su estado inicial se encuentran como ideas intuitivas no formalizadas que al integrarse originan nuevos objetos matemáticos y formas de razonamiento. En este caso se necesita de un alto grado de visualización gráfica para reducir el nivel de abstracción.
2. Formalización, en este caso las nuevas ideas emergentes en su estado inicial son intuitivas no formalizadas, por tanto es necesario que se le asignen nuevos referentes en distintos tipos de representación semiótica y se finaliza con la definición formal. Posteriormente se demuestran las nuevas propiedades inherentes al nuevo objeto matemático.
3. Segunda abstracción reflexiva: se manifiesta en la priorización mental de las características esenciales del nuevo objeto que ya ha sido construido. En este caso el estudiante debe visualizar las propiedades generales del nuevo objeto aprendido, establecer las relaciones con otros conocimientos, comprender los razonamientos que dieron lugar al nuevo conocimiento y conocer los procedimientos asociados a las formas de aplicación.
4. Integración del nuevo objeto matemático a la base generadora del conocimiento a partir de la sistematización de sus propiedades con los núcleos conceptuales. Debe existir consistencia lógica entre las propiedades del nuevo objeto y los mapas conceptuales existentes.

Fase de aplicación: Esta fase se desarrolla durante la aplicación de los nuevos conocimientos a la resolución de ejercicios y problemas, está constituida por dos

1. Desintegración de objetos matemáticos del conocimiento relacionados con la posible solución a ejercicios y problemas. En este momento el estudiante activa sus conocimientos para aplicarlos tanto a la asimilación de nuevos conocimientos como a la resolución de ejercicios y problemas. A partir de esta desintegración cognitiva emergen los razonamientos y procedimientos que dieron origen a dichos conocimientos, estos propician distintos enfoques para la búsqueda de posibles soluciones. En este se manifiestan los procesos de análisis, abstracción, comparación, síntesis cualitativamente superior, analogías y transferencias.
2. Aplicación de estrategias y procedimientos para la solución de ejercicios y problemas. El primer paso es tratar de configurar el espacio cognitivo-caótico generado por el tipo de ejercicio o problema, en este caso el estudiante ensaya posibles organizaciones. Luego el pensamiento se centra en esa zona, tratando de buscar posibles ordenaciones que lo aproximen a una vía de solución.

- Si el estudiante logra visualizar una posible ordenación, esta sería la solución y entonces está en presencia de un ejercicio para el cual se conoce un procedimiento. Los obstáculos serían entonces, insuficiencia en el sistema de conocimientos o la forma en forma algorítmica o metodológica que utiliza para organizar y solucionar.
 - Si el estudiante no logra ver una posible organización o solución, está en presencia de un problema. En tal caso debe, comenzar a dar pasos, ensayando posibles ordenaciones lógicas de contenidos, procedimientos heurísticos y métodos. Hasta lograr visualizar una posible solución, en tal caso, el problema dejó de ser problema. A partir de un punto inicial en cierta sucesión de pasos, el problema deja de ser problema y se convierte en un ejercicio. Por eso a veces se comienza a resolver cierto problema con la certeza de que en algún momento se convertirá en un ejercicio.
- En el problema no se conoce la vía de solución porque el estudiante aún no es capaz de visualizar una organización cognitiva que lo acerque al objetivo. En tal caso el estudiante en el transcurso de las operaciones irá percibiendo lo próximo que hay que hacer, si mantiene cierto orden de operaciones. La complejidad de la actividad está en la cantidad de interacciones a organizar y en las exigencias. En este caso el pensamiento es avanzado porque tiene que buscar recursos para optimizar una gran cantidad de interacciones. Luego enseñar a pensar es buscar linealidad, organización y precisión en las acciones que realiza el es-

tudiante. Es dotar al estudiante de señalizaciones lógicas que lo orienten durante el proceso de razonamiento.

- El estudiante logra visualizar una posible solución al problema puede ver un universo de conocimientos ordenado o cómo quedaría organizada la respuesta. Este tipo de estudiante, en su pensamiento retorna al principio y comienza a dar pasos de avance, con la ventaja de ir comparando el universo cognitivo-caótico y el ideal, en cada paso procedimental compara si la reorganización le acerca más al universo ideal.

Para la introducción práctica de este modelo en las clases de Matemática se propone la utilización del método genético-constructivo que se define como las acciones secuenciales y sistémicas que realiza el docente para que el estudiante asimile las nuevas configuraciones entre los núcleos conceptuales del conocimiento, apoyado en la descomposición genética de conceptos, los mapas conceptuales y las funciones de tratamiento y conversión entre registros de representaciones semióticas. Las acciones para la implementación de este método se detallan a continuación:

1. Identificar los posibles núcleos conceptuales del conocimiento sobre los cuales se realizarán las nuevas configuraciones que darán paso al nuevo concepto matemático, propiciando de esta forma un aprendizaje significativo.
2. Identificar los componentes y propiedades que aporta cada núcleo conceptual al nuevo objeto matemático. Esto se puede obtener a través de una descomposición genética del nuevo concepto que debe aprender el estudiante.
3. Visualizar aisladamente los componentes y propiedades que aporta cada núcleo conceptual. Esto se puede realizar con la ayuda de las funciones de tratamiento y conversión entre distintos registros de representaciones semióticas.
4. Apoyar las nuevas conexiones lógicas, entre los componentes de los núcleos conceptuales, con representaciones gráficas. Esto potencia el nivel de abstracción para las cualidades esenciales que tendrá el nuevo concepto matemático aprendido. Además propicia una visualización generalizada de la estructura lógica en el edificio teórico conceptual que se construye.
5. Formalizar sucesivamente cada resultado de las nuevas configuraciones entre los núcleos conceptuales. Primero en un lenguaje intuitivo y luego en la terminología convencional. Esto debe realizarse a partir del razonamiento gráfico realizado y la mediación semiótica entre funciones de tratamiento y conversión.
6. Definir formalmente en la terminología convencional las nuevas conexiones lógicas entre los componentes de los núcleos conceptuales. A partir de las propiedades y cualidades de los componentes que integran el

nuevo concepto, se deben proponer definiciones equivalentes.

7. Ejemplificar con representantes del nuevo concepto en distintos registros de representaciones semióticas realizando funciones de tratamiento y conversión entre estos.
8. Visualizar mediante un mapa conceptual la posición, función y relación del nuevo concepto aprendido con los conceptos de los núcleos conceptuales que le dieron origen.
9. Resolver ejercicios y problemas que relacionen el nuevo concepto con los conceptos inmediatos de los núcleos conceptuales que le dieron origen. Luego profundizar el nivel de complejidad del concepto, esto se debe hacer variando las formas de aplicación de sus propiedades y cualidades en distintos registros de representación semiótica.

3. Conclusiones

El pensamiento lógico-matemático avanzado es un proceso psíquico cognoscitivo que se manifiesta durante la interacción del hombre con objetos matemáticos, ya sea para la asimilación de estos o para su aplicación. Este proceso permite acceder a lo esencial dentro de lo complejo, direcciona los razonamientos de forma que se tenga una visión generalizada de los procesos de asimilación y del control a la solución de ejercicios y problemas. Para el estudio de este tipo de pensamiento se han elaborado modelos cognitivos y didácticos que permiten potenciar, desde las clases de Matemática, formas de razonamientos lógicos.

El modelo que se propone tiende a buscar una linealidad entre las formas de razonamiento que se originan durante el proceso de asimilación y las formas de razonamiento que se utilizan durante la resolución de ejercicios y problemas matemáticos. Para ello se establece una fase de activación que se realiza sobre la base generadora, constituida por núcleos conceptuales, posteriormente se trabaja el proceso de asimilación como nuevas configuraciones entre núcleos conceptuales, es en este proceso donde emergen nuevas formas de razonamientos y finalmente una fase de aplicación donde el estudiante debe poner en acción el nuevo conocimiento integrándolo sistemáticamente a la mayor cantidad de estructuras cognitivas precedentes.

Una de las formas de implementar en la práctica el modelo para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático avanzado es la utilización del método genético-constructivo desde la clase de Matemática. Con la aplicación sistemática de dicho método es posible potenciar la racionalización del trabajo mental, el nivel de abstracción así como la visualización generalizada y coherente de la estructura sistémico-lógica de conocimientos durante los procesos de ejecución en ejercicios y problemas. Estas formas de razonamiento tienen su génesis durante el proceso de asimilación y se sustentan en la descomposición genética de conceptos, el trabajo con la coordinación de registros semióticos y los mapas concep-

tuales.

Referencias

- [1] Angélica, M. (2014). *Análisis según el Modelo Cognitivo APOS del Aprendizaje Construido del Concepto de la Derivada*. Bolema, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 403-429, abr. ISSN 1980-4415 Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a20>.
- [2] Artigue, M. (2003). *¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel Universitario?* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 pp. 117-131.
- [3] Asunción, M. (2012). *Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles*, ISSN: 2254-8351 ISSN: 2254-8351. Universidad de Almería, pág. 2. Disponible por: mabosch@ual.es.
- [4] Azcárate, C. (2003). *Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 135-146.
- [5] Campistrous. (1993). *Lógica y procedimientos lógicos del aprendizaje*. Ciudad de La Habana: República de Cuba. MINED. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas, pág. 18. Material impreso.
- [6] D'Amore, B. (2015). *Análisis de los antecedentes históricos-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval"*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 18, núm. 2, 2015, pp. 177-212. Pág. 178. Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33540064003>.
- [7] De Armas, A.; Tulio R.; Pino-Fan; Luis R.; Medina, A. (2016). *Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función* Educación Matemática, vol. 28, núm. 3, diciembre, 2016, pp. 111-144. Grupo Santillana México. Distrito Federal, México. Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40548562005>.
- [8] Delgado, J. (1999). *Tesis doctoral: La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas*. Base de datos AGIC-CREA.
- [9] Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En Investigaciones en Matemática Educativa II (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica. Traducción de: Registres de représentationssémiotique et fonctionnementcognitif de la pensée. Annales de Didactique et de SciencesCognitives, Vol. 5, p. 175.
- [10] Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación Matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. LA GACETA DE LA RSME, 9(1), 143 -168. Instituto Peruano de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad de la Educación Básica - IPEBA. Disponible en <http://www.ipeba.gob.pe/estandares/MapasProgresoMatematicaNumerosOperaciones.pdf>.
- [11] González, V. (1995). *Psicología para educadores*. Editorial Pueblo y Educación Ciudad de La Habana. Pág.187-188. Pág. 47.
- [12] Herlina, E. (2015). *Advanced Mathematical Thinking and the Way to Enhance IT*, Journal of Education and Practice, ISSN 2222-1735 (Paper) ISSN 2222-288X (Online), Vol.6, No.5, 2015, Pág. 2, Disponible en: www.iiste.org
- [13] --- (2016). *Modelo del profesional*, Plan de estudio E. Carrera Educación Matemática, Comisión Nacional de Carrera, Cuba, Pág. 8.
- [14] Parada, S. (2014). *Reflexiones de profesores de Matemática sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 17, núm. 1, marzo, pp. 83-113, p.88. Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33530083005>.
- [15] Petrovski, A. (1985). *Psicología General*. Ed. Progreso. Moscú. Pág. 311.
- [16] Rubinstein, S.L. (1966). *El proceso del pensamiento*. Editorial Universitaria, La Habana, Cuba.
- [17] Valle, A. (2012). *La investigación pedagógica. Otra mirada*. Ed Pueblo y Educación, La Habana, Cuba p. 135-140.
- [18] Vega, M.; Carrillo, J.; Soto, J. (2014). *Análisis según el Modelo Cognitivo APOS del Aprendizaje Construido del Concepto de la Derivada*. ISSN 1980-4415. Bolema, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 403-429, abril. Pág. 406. Disponible en <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a20>.
- [19] Vigotsky, L. S. (1987). *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores*. Editorial Científico Técnica, La Habana. P. 161.
- [20] Villabona, M. (2016). *Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE*. Educación Matemática, vol. 28, núm. 2, agosto, 2016, pp. 119-150. Grupo Santillana México. Distrito Federal, México. Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40546500005>