

Polinomios multiortogonales clásicos en la recta real

MSc. Walter Carballosa Torres
(Universidad de las Ciencias Informáticas, Cuba)
/Dr. Luis R. Piñero Díaz
(Universidad de La Habana, Cuba)

RESUMEN: un estudio de las propiedades algebraicas de los Polinomios Multiortogonales Clásicos (PMOC) en la recta real es realizado a través del cálculo computacional de los PMOC. La relación con la aproximación simultánea (aproximantes de Hermite-Padé). Los PMOC son generados por diferentes métodos, utilizando la definición del problema de la aproximación simultánea y considerando otras propiedades algebraicas. Algunas propiedades algebraicas de los PMOC son conjeturadas así como otras propiedades extendidas de los Polinomios Ortogonales ordinarios son mostradas por la simulación computacional.

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad se ha incrementado el interés por el estudio de los polinomios multiortogonales, motivados por el desarrollo de la aproximación racional simultánea de funciones y el vínculo existente entre ambas teorías. Constituyendo los polinomios ortogonales y los aproximantes de Padé un área de investigación fundamental, por sus vínculos y aplicaciones en diferentes ramas de la matemática como la teoría de los números, el problema de momentos, la prolongación analítica, los problemas de interpolación, la teoría espectral de operadores y otras.

Las ideas iniciales de la teoría de aproximación se encuentran en los trabajos de Chebyshev y Markov. La construcción de los aproximantes racionales simultáneos fue introducida por Hermite en 1873 durante la demostración de la trascendencia del número de Euler [1], por lo que se le conoce con el nombre de aproximantes de Hermite-Padé (H-P). Los polinomios ortogonales ordinarios cumplen excelentes resultados y propiedades algebraicas que permiten desarrollar una amplia teoría.

Realizar un estudio de las propiedades algebraicas de los polinomios multiortogonales e in-

tentar extender los resultados de los polinomios ortogonales ordinarios a los multiortogonales, acompañado de su cálculo computacional es la intención del presente trabajo. La instrumentación computacional de los resultados se hizo en el software Mathematica. Este programa, junto con los realizados en [2-5] resulta de utilidad como apoyo para el trabajo investigativo y didáctico de los integrantes del Grupo de Teoría de Aproximación de la Facultad de Matemática y Computación de la Universidad de La Habana.

2. APROXIMANTES DE HERMITE-PADÉ

2.1. Aproximación simultánea

Sea $f = (f_1, f_2, \dots, f_r)$ un conjunto de funciones analíticas en una vecindad del infinito, que posee un desarrollo formal en serie de potencias de la forma

$$f_i(z) \approx \sum_{n \geq 0} \frac{c_{n,i}}{z^{n+1}}, \quad c_{n,i} \in \mathbb{C} \quad \text{con} \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (1)$$

Una manera de extender el problema de la aproximación racional de una función.

PROBLEMA 2.1. Dado un conjunto de funciones analíticas en una vecindad del infinito f_1, f_2, \dots, f_r

y el multi-índice . Buscar un polinomio no nulo Q_n de grado no mayor que $|n|$, y polinomios $P_{(n,1)}, \dots, P_{(n,r)}$, tales que para cada j ($j=1,2,\dots,r$)

$$Q_n(z) f_j(z) - P_{(n,j)}(z) = 0 \quad \left(\frac{1}{z^{n_j+1}} \right) \quad (2)$$

Este problema siempre tiene solución, se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de $|n|$ ecuaciones (por cada coeficiente desde $1/z$ hasta $1/z^{n_j}$ de los desarrollos de los miembros izquierdos que se quieren anular) y $|n|+1$ incógnitas (los coeficientes de Q_n y en cada ecuación se obtienen los polinomios $P_{(n,j)}$).

De esta manera se pueden definir los aproximantes de Hermite-Padé de tipo II.

DEFINICIÓN 2.1.1 (Aproximantes de Hermite-Padé de tipo II) Sea $(Q_n, P_{(n,1)}, \dots, P_{(n,r)})$ una solución del problema 2.1, se llaman aproximantes de Hermite-Padé de tipo II de multi-índice en el punto $z = \infty$ a un r -vector $\pi_n = (\pi_{(n,1)}, \dots, \pi_{(n,r)})$ de fracciones racionales de la forma

$$\pi_{(n,j)} = \frac{P_{(n,j)}(z)}{Q_n(z)}, \quad 1 \quad (3)$$

El problema relativo a la existencia de los aproximantes de Hermite-Padé de tipo II (solución del problema 2.1) está resuelto. Sin embargo en general las fracciones $\{\pi_{(n,i)}(z)\}_{i=1}^r$ no quedan definidas de modo único dados los multi-índices y las r funciones analíticas en el infinito, por lo que resulta útil establecer condiciones suficientes para la unicidad de la solución.

DEFINICIÓN 2.1.2: El multi-índice $(Q_n, P_{(n,1)}, \dots, P_{(n,r)})$ se llama normal para el problema 2.1, si en cualquier solución del mismo $Q_n(z)$, el polinomio tiene grado $|n|$.

Si n es un índice normal, entonces el problema de la unicidad de los aproximantes de Hermite-Padé está resuelto. Otra manera de extender el problema es la siguiente

PROBLEMA 2.2: Dado un conjunto de funciones analíticas en una vecindad del f_1, f_2, \dots, f_r infinito y el multi-índice n , buscar un r -vector $A_{n,1}, \dots, A_{n,r}$ de polinomios $A_{n,j}$ de grado no mayor que n_j-1 y un polinomio B_n tales que:

$$\sum_{j=1}^r A_{n,j}(z) f_j(z) - B_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{|n|}}\right). \quad (4)$$

Este problema siempre tiene solución, se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de $|n|-1$ ecuaciones (por cada coeficiente desde $1/z$ hasta $z/z^{|n|-1}$ del miembro izquierdo que se quieren anular) y $|n|$ incógnitas (los coeficientes de los $A_{n,j}$). De este sistema se determinan los polinomios $A_{n,j}$ y se obtiene el polinomio B_n .

DEFINICIÓN 2.1.3: (Aproximantes de Hermite-Padé de tipo I) Sea $(A_{(n,1)}, \dots, A_{(n,r)}, B_n)$ una solución del problema 2.2, se llaman aproximantes de Hermite-Padé de tipo I de multi-índice n en el punto $z = \infty$ a las combinaciones lineales (con coeficientes polinomiales) de las r funciones del problema planteado con la intención de aproximarlas por un polinomio, o sea

$$\sum_{j=1}^r A_{n,j}(z) f_j(z) \approx B_n(z). \quad (5)$$

DEFINICIÓN 2.1.4: El multi-índice n se llama normal para el problema 2.2, si en cualquier solución del mismo $(A_{(n,1)}, \dots, A_{(n,r)}, B_n)$ el polinomio $A_{n,j}(z)$ tiene grado n_j-1 .

El problema relativo a la existencia de los aproximantes de Hermite-Padé de tipo I, está resuelto. Pero se necesitan nuevas condiciones para verificar la unicidad.

2.2. Ortogonalidad

Los polinomios multiortogonales de tipo I y tipo II están directamente relacionados con los aproximantes de Hermite-Padé de tipo I y tipo II, asociados a r funciones de Markov². Resulta interesante mostrar las condiciones de ortogonalidad que satisfacen cada uno de los polinomios multiortogonales, no sin antes recordar que se trabajará con r medidas de Lebesgue μ_1, \dots, μ_r todas sobre el eje real con soporte respectivo en E_1, \dots, E_r ³ o directamente con r funciones de peso w_1, \dots, w_r asociadas a las medidas antes mencionadas.

DEFINICIÓN 2.2.1: (Polinomio multiortogonal de tipo I) El r -vector $(A_{n,1}, \dots, A_{n,r})$ es el polinomio multiortogonal de tipo I asociado a las funciones

¹ De forma análoga los aproximantes de Hermite-Padé se pueden definir también para r funciones con desarrollo formal en series de potencias de z en una vecindad del cero.

² Las funciones de Markov son casos particulares de las funciones que satisfacen 1.

³ Los casos posibles de E_j son subconjuntos cerrados del eje real y está formado por una cantidad infinita de puntos ($\sup p(\mu) \subset E_j \subset \mathbb{R}$).

de peso w_1, \dots, w_r para el multi-índice \bar{n} , si cada uno de los $A_{n,j}$ tiene grado menor que n_j y se satisface la condición de ortogonalidad

$$\sum_{j=1}^r \int_{E_j} x^k A_{n,j}(x) w_j(x) dx = 0 \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, |n| - 2. \quad (6)$$

DEFINICIÓN 2.2.2: (Polinomio multiortogonal de tipo II) P_n es el polinomio multiortogonal de tipo II asociado a las funciones de peso w_1, \dots, w_r para el multi-índice \bar{n} , si tiene grado $|n|$ y satisface las condiciones de ortogonalidad

$$\int_{E_j} P_n(x) w_j(x) x^k dx = 0 \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n_j - 1 \text{ con } j = 1, \dots, r. \quad (7)$$

De las condiciones de ortogonalidad (6) y (7) y las definiciones (2.1.1) y (2.1.3) para las r funciones de Markov asociadas a las medidas de los polinomios multiortogonales, se obtiene la equivalencia entre la determinación de los polinomios multiortogonales y de los aproximantes de Hermite-Padé tanto de tipo I como de tipo II, ver [6-9].

Los polinomios multiortogonales de segundo género de tipo I, vienen dados por

$$B_n(z) = \sum_{j=1}^r \int_{E_j} \frac{A_{n,j}(z) - A_{n,j}(x)}{z - x} w_j(x) dx. \quad (8)$$

Los polinomios multiortogonales de segundo género de tipo II, vienen dados por

$$P_{n,j}(z) = \int_{E_j} \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z - x} w_j(x) dx \quad \text{para } j = 1, \dots, r. \quad (9)$$

2.3. ¿Cómo generarlos?

Una vez definida la ortogonalidad para los polinomios multiortogonales se pueden construir los polinomios asociados a medidas dadas, partiendo de la existencia y convergencia de los momentos.

DEFINICIÓN 2.3.1: La expresión del momento k -ésimo asociado a la medida μ_r , se denota $c_{k,i}$.

$$\int_{E_i} x^k d\mu_i(z) = c_{k,i}. \quad (10)$$

Sea $A_1(x), \dots, A_r(x)$ el r -vector polinomio mutior-
togonal de tipo I e índice \bar{n} , que tiene la forma

$$A_j(x) = a_{j,0} + a_{j,1}x + \dots + a_{j,n_j-1}x^{n_j-1} = \sum_{i=0}^{n_j-1} a_{j,i}x^i,$$

donde los valores $a_{j,i}$ ($0 \leq i \leq n_j - 1$ con $j = 1, \dots, r$) son las incógnitas.

Entonces, de las condiciones de ortogonalidad (6) se tiene

$$\sum_{j=1}^r \int_{E_j} \sum_{i=0}^{n_j-1} a_{j,i} x^i x^k d\mu_j(x) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=0}^{n_j-1} a_{j,i} \int_{E_j} x^{k+i} d\mu_j(x) = 0 \quad \text{para } k = 0, \dots, |n| - 2; \quad (11)$$

que se transforma en

$$\sum_{j=1}^r \sum_{i=0}^{n_j-1} a_{j,i} c_{k+i,j} = 0 \quad \text{para } k = 0, \dots, |n| - 2. \quad (12)$$

Esto proporciona una manera de calcular los polinomios multiortogonales de tipo I para índices normales, salvo una constante multiplicativa.

Una vez determinado el r -vector $A_1(x), \dots, A_r(x)$, se puede determinar $B_n(x)$ a partir de (5) determinado por la expresión

$$B_n(z) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=0}^{n_j-1} \sum_{s=0}^i a_{j,i} c_{s,j} z^{i-s}. \quad (13)$$

De modo similar, sea $Q(x)$ el polinomio mutior-
togonal de tipo II e índice n , que tiene la forma

$$Q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{|n|}x^{|n|} = \sum_{i=0}^{|n|} b_i x^i,$$

donde los valores b_i ($0 \leq i \leq |n|$) son las incógnitas.

De las condiciones de ortogonalidad (7) se tiene

$$\int_{E_j} Q(x) x^k d\mu_j(x) = \sum_{i=0}^{|n|} b_i \int_{E_j} x^{k+i} d\mu_j(x) = 0 \quad \text{para } k = 0, \dots, n_j - 1; \quad i = 1, \dots, m \quad (14)$$

que se transforma en

$$\sum_{i=0}^{|n|} b_i c_{k+i,j} = 0 \quad \text{para } k = 0, \dots, n_j - 1; \quad i = 1, \dots, m \quad (15)$$

Esto proporciona una manera de calcular los polinomios multiortogonales de tipo II para índices normales, salvo una constante multiplicativa que se omite al trabajar con la familia de los mónicos.

Una vez determinado $Q_n(x)$, se pueden obtener los $P_{n,i}(x)$ a partir de (2) determinados por la expresión

$$P_{n,i}(z) = \sum_{k=1}^{|n|} \left(\sum_{j=0}^{k-1} c_{j,i} b_{|n|-(k-1)+j} \right) z^{|n|-k} \quad \text{donde } gr(P_{n,i}) < |n|. \quad (15)$$

La existencia de los polinomios multiortogonales de ambos tipos está demostrada. La unicidad de los mismos salvo constantes multiplicativas solo puede ser garantizada por condiciones adicionales sobre sus r funciones de pesos.

Algunas de estas condiciones se garantizan para sistemas Angelesco y para sistemas Algebras de Chebyshev o AT-sistemas.

2.4. Fórmula de recurrencia

El trabajo con multi-índices de manera general en el estudio de los polinomios multiortogonales se hace bastante engorroso. Para la obtención de mejores y cómodos resultados, se trabaja con multi-índices regulares.

DEFINICIÓN 2.4.1: Se dice que un multi-índice $n=(n_1, \dots, n_r)$ es un índice regular si es tal que para $1 \leq i < j \leq r$ entonces $0 \leq n_i - n_j \leq 1$.⁴

Esta definición nos permite asociar a todo $n \in \mathbb{N}$ un único multi-índice m tal que $n = |m|$.

DEFINICIÓN 2.4.2: El sistema de funciones (f_1, \dots, f_r) se dice débilmente perfecto si todos los índices regulares son normales.

En lo sucesivo asumiremos que los índices que se van a tratar son regulares y por tanto se adopta la notación subíndice n (P_n) para denotar al multi-índice \vec{m} que satisface $|m| = n$ y se denotará por n_i a la i -ésima componente de dicho multi-índice m . Además se supondrá que se trabaja en un sistema débilmente perfecto, con polinomios multiortogonales de tipo II mónicos en índices regulares.

Al expresar $zQ_n(z)$ como combinación lineal de los $n+2$ primeros términos de una sucesión de polinomios multiortogonales de tipo II $(\{Q_k(x)\}_{k=0}^{n+1})$, se obtiene una relación de recurrencia a $r+2$ términos.

TEOREMA 2.4.1: (Fórmula de recurrencia) Sea $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$ la familia de polinomios multiortonormales de tipo II mónicos asociado a las medidas de Lebesgue μ_1, \dots, μ_r de índices regulares en un sistema débilmente perfecto. Entonces

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \sum_{j=0}^r a_{n,j} P_{n-j}(x), \quad n \geq 0, \quad (16)$$

con la condición inicial $P_0(x) = 1$ y $P_{-k}(x) = 0$ para $k = 1, 2, \dots, r$.

La demostración de este teorema es bastante sencilla y se puede ver en [3].

TEOREMA 2.4.2: Sea $\{(q_{n,i}(x), \dots, q_{n,i}(x))\}_{n=0}^\infty$ la familia de r -vectores polinomios multiortonormales de tipo I asociado a las medidas de Lebesgue μ_1, \dots, μ_r de índices regulares en un sistema débilmente perfecto. Entonces

$$xq_{n,i}(x) = q_{n-1,i}(x) + \sum_{j=0}^r a_{n+j,j} q_{n+j,i}(x), \quad n \geq 0 \text{ e } i = 1, \dots, r, \quad (17)$$

partiendo de la definición de los coeficientes $a_{i,j}$ en el teorema (2.4.1).

Una demostración de este teorema se puede ver en [10]. Para la demostración el autor prueba primero el siguiente lema.

Lema: Sea $\{\cdot, \cdot\}: R(X) \times R(X) \rightarrow R$ una forma bilineal, se denota $\{x^i, x^j\} = a_{i,j}$,

$$H_n = \det \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,n-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

y se supone que $H_n \neq 0$ para todo n natural, entonces existen las secuencias de polinomios $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$, $\{q_m(x)\}_{m=0}^\infty$, tal que $gr(p_n) = gr(q_n) = n$, donde los p_n , son mónicos y además

$$\{p_n, q_m\} = \delta_{n,m} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Y además del lema, el autor se apoya en la siguiente forma bilineal

$$\begin{aligned} \{p(x), q(x)\} &= \sum_{i=1}^r \int_{E_i} p(x) q_i(x) d\mu_i(x) \\ \text{con } q(x) &= \sum_{i=1}^r x^{i-1} q_i(x^r). \end{aligned} \quad (18)$$

⁴ Estos índices regulares tienen la forma $\left(\frac{k+1}{j \text{ veces}}, \frac{k+1}{r-j \text{ veces}}, \frac{k}{r-j \text{ veces}}, k \right)$

Esta forma bilineal está bien definida debido a la existencia y unicidad de la descomposición planteada.

Por esta descomposición de los polinomios se puede abusar de la nomenclatura y llamar a los polinomios

$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^r x^{i-1} q_{n,i}(x^r)$$

polinomios multiortogonales de tipo I y para diferenciar, se hará referencia a $(q_{n,1}, \dots, q_{n,r})$ por la expresión “ r -vector multiortogonal de tipo I”.

Con el resultado del teorema anterior se obtiene que los Q_n satisfacen una relación de recurrencia a $r+2$ términos

$$x^r Q_n(x) = Q_{n-1}(x) + \sum_{j=0}^r a_{n+j,j} Q_{n+j}(x), \quad n \geq 0. \quad (19)$$

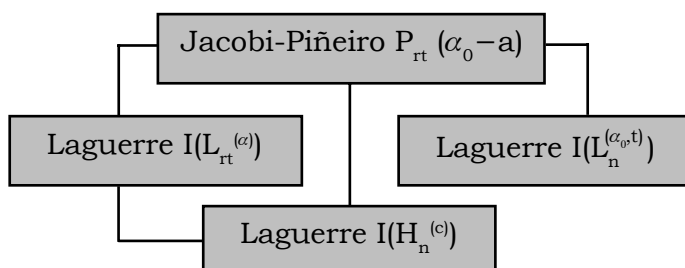
Luego de estos resultados de relaciones de recurrencia entre las familias de polinomios multiortogonales de tipo I y tipo II, se pueden llegar a obtener una mejor vía para su generación computacional y así no recurrir al tradicional método de obtención consistente en resolver el sistema de ecuaciones lineales que satisfacen sus coeficientes, proceso poco eficiente en tiempo y ejecución.

3. POLINOMIOS MULTIORTOGONALES CLÁSICOS

La garantía de la normalidad de los índices regulares está dada para AT-sistemas y sistemas Angelesco (ver [3]). Se introducen algunas familias de polinomios multiortogonales llamados clásicos para los que se mostrarán algunas propiedades.

3.1. Algunos PMOC para AT-sistemas

Las familias planteadas en AT-sistemas serán cuatro, las cuales están conectadas por el esquema



Polinomios multiortogonales de Jacobi-Piñeiro

Los polinomios de Jacobi-Piñeiro están asociados a un AT-sistema para los pesos de Jacobi con diferentes singularidades en cero y en uno. Estos fueron estudiados inicialmente por L. R. Piñeiro en [11] cuando $\alpha_0 = 0$. El caso general aparece en [9]. Sean $\alpha_0 > -1$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ reales tales que $\alpha_i - \alpha_j \notin \mathbb{Z}$ cuando $i \neq j$. Los polinomios de Jacobi-Piñeiro $P_n^{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)}$ satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\int_0^1 P_n^{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)}(x) x^{a_i} (1-x)^{a_0} x^k dx, \quad k=0, \dots, n_i-1, \quad i=1, 2. \quad (20)$$

Usando la integración por parte en las condiciones de ortogonalidad (20), se obtiene la fórmula de Rodríguez

$$(-1)^n \prod_{j=1}^r (n + \alpha_0 + \alpha_j + 1)_{n_j} P_n^{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)}(x) = (1-x)^{-\alpha_0} \prod_{j=1}^r [x^{-\alpha_j} \frac{d^{n_j}}{dx^{n_j}} x^{n_j + \alpha_j}] (1-x)^{\alpha_0 + n}.$$

Realizando cálculos computacionales y trabajo algebraico se obtienen las formas explícitas de los coeficientes de los polinomios multiortogonales de Jacobi-Piñeiro de tipo II, apoyados en la fórmula de Rodríguez, y con ellos se tienen las expresiones de los coeficientes en la relación de recurrencia que se puede ver en [6].

$$\begin{aligned} a_{2n,0}^{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} = & [36n^4 + (48\alpha_0 + 28\alpha_1 + 20\alpha_2 + 38)n^3 + \\ & + (21\alpha_0^2 + 8\alpha_1^2 + 4\alpha_2^2 + 30\alpha_0\alpha_1 + 18\alpha_0\alpha_2 + 15\alpha_1\alpha_2 + \\ & + 39\alpha_0 + 19\alpha_1 + 19\alpha_2 + 9)n^2 + (3\alpha_0^3 + 10\alpha_0^2\alpha_1 + 4\alpha_0^2\alpha_2 + \\ & + 6\alpha_0\alpha_1^2 + 2\alpha_0\alpha_2^2 + 11\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 5\alpha_1^2\alpha_2 + 3\alpha_1\alpha_2^2 + \\ & + 12\alpha_0^2 + 3\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 + 13\alpha_0\alpha_1 + 13\alpha_0\alpha_2 + 8\alpha_1\alpha_2 + \\ & + 6\alpha_0 + 3\alpha_1 + 3\alpha_2)n + \alpha_0^2 + \alpha_0\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1^2 + 2\alpha_2\alpha_1\alpha_0 \\ & + 2\alpha_0^2\alpha_1 + \alpha_1^2\alpha_0 + \alpha_2^2\alpha_0 + \alpha_2^2\alpha_1 + \alpha_0^3\alpha_1 + \alpha_0^2\alpha_1^2 \\ & + \alpha_2^2\alpha_0\alpha_1 + \alpha_2^2\alpha_1^2 + 2\alpha_2\alpha_0^2\alpha_1 + 3\alpha_2\alpha_1\alpha_0 + 2\alpha_2\alpha_0^2 + \\ & + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_0^3 + \alpha_0\alpha_2] \times (3n + \alpha_0 + \alpha_2)^{-1} \times (3n + \alpha_0 + \alpha_1)^{-1} \\ & (3n + \alpha_0 + \alpha_2 + 1)^{-1} (3n + \alpha_0 + \alpha_1 + 2)^{-1}, \end{aligned}$$

$$a_{2n,1}^{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} = n(2n + \alpha_0)(2n + \alpha_0 + \alpha_1)(2n + \alpha_0 + \alpha_2) \times \\ \times [54n^4 + (63\alpha_0 + 45\alpha_1 + 45\alpha_2)n^3 + (24\alpha_0^2 + 8\alpha_1^2 + \\ + 8\alpha_2^2 + 42\alpha_0\alpha_1 + 42\alpha_0\alpha_2 + 44\alpha_1\alpha_2 - 8)n^2 + \\ + (3\alpha_0^3 + \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + 12\alpha_0^2\alpha_1 + 12\alpha_0^2\alpha_2 + 3\alpha_0\alpha_1^2 + \\ + 3\alpha_0\alpha_2^2 + 33\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 8\alpha_1^2\alpha_2 + 8\alpha_1\alpha_2^2 - 3\alpha_0 - \\ - 4\alpha_1 - 4\alpha_2)n + \alpha_0^3\alpha_1 + \alpha_0^3\alpha_2 + 6\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^3\alpha_2 + \\ + \alpha_1\alpha_2^3 + 3\alpha_0\alpha_1^2\alpha_2 + 3\alpha_0\alpha_1\alpha_2^2 - \alpha_0\alpha_1 - \alpha_0\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_2] \times \\ \times (3n + \alpha_0 + \alpha_1 + 1)^{-1} \times (3n + \alpha_0 + \alpha_2 + 1)^{-1} (3n + \alpha_0 + \\ + \alpha_1)^{-1} (3n + \alpha_0 + \alpha_2)^{-1} (3n + \alpha_0 + \alpha_1 - 1)^{-1} \times \\ \times (3n + \alpha_0 + \alpha_2 - 1)^{-1},$$

$$a_{2n,1}^{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} = n(2n + \alpha_0)(2n + \alpha_0 + \alpha_1)(2n + \alpha_0 + \alpha_2) \times \\ \times [54n^4 + (63\alpha_0 + 45\alpha_1 + 45\alpha_2)n^3 + (24\alpha_0^2 + 8\alpha_1^2 + \\ + 8\alpha_2^2 + 42\alpha_0\alpha_1 + 42\alpha_0\alpha_2 + 44\alpha_1\alpha_2 - 8)n^2 + (3\alpha_0^3 + \\ + \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + 12\alpha_0^2\alpha_1 + 12\alpha_0^2\alpha_2 + 3\alpha_0\alpha_1^2 + 3\alpha_0\alpha_2^2 + \\ + 33\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 8\alpha_1^2\alpha_2 + 8\alpha_1\alpha_2^2 - 3\alpha_0 - 4\alpha_1 - 4\alpha_2)n + \\ + \alpha_0^3\alpha_1 + \alpha_0^3\alpha_2 + 6\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^3\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2^3 + 3\alpha_0\alpha_1^2\alpha_2 + \\ + 3\alpha_0\alpha_1\alpha_2^2 - \alpha_0\alpha_1 - \alpha_0\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha_2] \times (3n + \alpha_0 + \alpha_1 + 1)^{-1} \\ \times (3n + \alpha_0 + \alpha_2 + 1)^{-1} (3n + \alpha_0 + \alpha_1)^{-1} (3n + \alpha_0 + \alpha_2)^{-1} \\ (3n + \alpha_0 + \alpha_1 - 1)^{-1} \times (3n + \alpha_0 + \alpha_2 - 1)^{-1},$$

$$a_{2n+1,1}^{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} = (2n + \alpha_0 + 1)(2n + \alpha_0 + \alpha_1 + 1)(2n + \alpha_0 + \\ + \alpha_2 + 1) \times [54n^5 + (63\alpha_0 + 45\alpha_1 + 45\alpha_2 + 135)n^4 + \\ + (24\alpha_0^2 + 8\alpha_1^2 + 8\alpha_2^2 + 42\alpha_0\alpha_1 + 42\alpha_0\alpha_2 + 44\alpha_1\alpha_2 + \\ + 104\alpha_2 + 120)n^3 + (3\alpha_0^3 + \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + 12\alpha_0^2\alpha_1 + 12\alpha_0^2\alpha_2 + \\ + 33\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 8\alpha_1^2\alpha_2 + 8\alpha_1\alpha_2^2 + 36\alpha_0^2 + 5\alpha_1^2 + 19\alpha_2^2 + \\ + 66\alpha_1\alpha_2 + 87\alpha_0 + 39\alpha_1 + 81\alpha_2 + 45)n^2 + (\alpha_0^3\alpha_1 + \alpha_0^3\alpha_2 + \\ + \alpha_1\alpha_2^3 + 3\alpha_0\alpha_1^2\alpha_2 + 3\alpha_0\alpha_1\alpha_2^2 + 3\alpha_0^3 + 2\alpha_2^3 + 12\alpha_0^2\alpha_1 + \\ + 33\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 5\alpha_1^2\alpha_2 + 11\alpha_1\alpha_2^2 + 18\alpha_0^2 + 20\alpha_0\alpha_1 + 38\alpha_0 + \\ + 24\alpha_0 + 6\alpha_1 + 24\alpha_2 + 6)n + \alpha_0^3\alpha_1 + 3\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_0\alpha_1 \\ + 3\alpha_0^2\alpha_1 + 3\alpha_0^2\alpha_2 + 6\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_0\alpha_2^2 + 3\alpha_1\alpha_2^2 + 3\alpha_0^2 + \\ + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_0 + 2\alpha_2] \times (3n + \alpha_0 + \alpha_1 + 3)^{-1} (3n + \alpha_0 + \\ \times (3n + \alpha_0 + \alpha_1 + 2)^{-2} (3n + \alpha_0 + \alpha_2 + 1)^{-2} (3n + \alpha_0 + \alpha_1 \\ \times (3n + \alpha_0 + \alpha_2)^{-1},$$

$$a_{2n,2}^{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} = n(2n + \alpha_0)(2n + \alpha_0 - 1)(2n + \alpha_0 + \alpha_1) \\ (2n + \alpha_0 + \alpha_1 - 1)(2n + \alpha_0 + \alpha_2) \times (2n + \alpha_0 + \alpha_2 - 1) \\ (n + \alpha_1)(n + \alpha_1 - \alpha_2)(3n + 1 + \alpha_0 + \alpha_1)^{-1} \times \\ \times (3n + \alpha_0 + \alpha_1)^{-2} (3n + \alpha_0 + \alpha_2)^{-1} (3n - 1 + \alpha_0 + \alpha_1)^{-2} \\ (3n - 1 + \alpha_0 + \alpha_2)^{-1} \times (3n - 2 + \alpha_0 + \alpha_1)^{-1} (3n - 2 + \\ + \alpha_0 + \alpha_2)^{-1},$$

$$a_{2n+1,2}^{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} = n(2n + 1 + \alpha_0)(2n + \alpha_0)(2n + \alpha_0 + \alpha_1) \\ (2n + 1 + \alpha_0 + \alpha_1)(2n + 1 + \alpha_0 + \alpha_2) \times (2n + \alpha_0 \\ + \alpha_2)(n + \alpha_2)(n + \alpha_2 - \alpha_1) \times (3n + 2 + \alpha_0 + \alpha_1)^{-1} (3n + 2 \\ + \alpha_0 + \alpha_2)^{-1} (3n + 1 + \alpha_0 + \alpha_1)^{-1} \times (3n + 1 + \alpha_0 + \alpha_2)^{-2} \\ (3n + \alpha_0 + \alpha_1)^{-1} (3n + \alpha_0 + \alpha_2)^{-2} (3n - 1 + \alpha_0 + \alpha_2)^{-1},$$

siendo $\alpha_{n,j}^{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)}$ los coeficientes que permiten generar los polinomios multiortogonales de Jacobi-Piñeiro mediante sus fórmulas de recurrencia respectivas.

Polinomios multiortogonales de Laguerre

También para AT-sistemas se extienden hasta los polinomios multiortogonales de Laguerre pero de dos maneras distintas. Ambas maneras están soportadas en el $[0, \infty)$ pero asociadas a diferentes funciones de peso. Las primeras familias están asociadas a las funciones de peso $\{x^{\alpha_i} e^{xq}\}_{i=1}^r$ con $\alpha_i > -1$ y $\alpha_i - \alpha_j \notin \mathbb{Z}$. Las segundas familias están asociadas a las funciones de peso $\{x^{\alpha_i} e^{-c_i x q}\}_{i=1}^r$ con $\alpha_0 > -1$ y $c_i > 0$, $c_i \neq c_j$ para $i \neq j$.

Polinomios multiortogonales de Laguerre I

Los primeros polinomios multiortogonales de Laguerre fueron considerados por Sorokin en [12, 13]. Los polinomios multiortogonales de Laguerre I para $r=2$ ($L_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}$) satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}(x) x^{\alpha_i} e^{-x} x^k dx, \quad k=0, \dots, n_i - 1, \quad i=1, 2. \quad (21)$$

Partiendo de las condiciones de ortogonalidad (21), se obtiene una fórmula de Rodríguez

$$(-1)^n L_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}(x) = e^x \prod_{j=1}^r [x^{-\alpha_j} \frac{d^{n_j}}{dx^{n_j}} x^{n_j + \alpha_j}] e^{-x}.$$

Estas familias de polinomios, por su propia relación de ortogonalidad y la definición de sus funciones de peso, permiten que se puedan obtener por el paso al límite a partir de los de Jacobi-Piñeiro. Para el caso particular $r = 2$ queda de la siguiente manera

$$L_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}(x) = \lim_{\alpha_0 \rightarrow \infty} \alpha_0^n P_n^{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)}\left(\frac{x}{\alpha_0}\right). \quad (22)$$

Esta relación por el paso al límite permite calcular los coeficientes $a_{n,0}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$, $a_{n,1}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$, $a_{n,2}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ de las relaciones de recurrencia (16), (17) y (19) para la familia en cuestión

$$\begin{aligned} a_{n,0}^{(\alpha_1, \alpha_2)} &= \lim_{\alpha_0 \rightarrow \infty} a_{n,0}^{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} \alpha_0, & a_{n,1}^{(\alpha_1, \alpha_2)} &= \\ &= \lim_{\alpha_0 \rightarrow \infty} a_{n,1}^{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} \alpha_0^2, & a_{n,2}^{(\alpha_1, \alpha_2)} &= \lim_{\alpha_0 \rightarrow \infty} a_{n,2}^{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2} \alpha_0^3. \end{aligned}$$

Los resultados de los cálculos se muestran a continuación

$$\begin{aligned} a_{2n,0}^{\alpha_1, \alpha_2} &= 3n + \alpha_1 + 1, & a_{2n+1,0}^{\alpha_1, \alpha_2} &= 3n + \alpha_2 + 2, \\ a_{2n,1}^{\alpha_1, \alpha_2} &= n(3n + \alpha_1 + \alpha_2), & a_{2n+1,1}^{\alpha_1, \alpha_2} &= 3n^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + 3)n + \alpha_1 + 1, \\ a_{2n,2}^{\alpha_1, \alpha_2} &= n(n + \alpha_1)(n + \alpha_1 - \alpha_2), & & \\ a_{2n+1,2}^{\alpha_1, \alpha_2} &= n(n + \alpha_2)(n + \alpha_2 - \alpha_1). \end{aligned}$$

Estos resultados permitirán generar los polinomios multiortogonales de Laguerre I mediante sus fórmulas de recurrencia respectivas.

Polinomios multiortogonales de Laguerre II

Los segundos polinomios multiortogonales de Laguerre fueron estudiados en [9]. Los polinomios multiortogonales de Laguerre II para $r = 2$ ($L_n^{(\alpha_0, c_1, c_2)}$) satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\int_0^\infty L_n^{(\alpha_0, c_1, c_2)}(x) x^{\alpha_0} e^{-c_1 x} x^k dx, \quad k = 0, \dots, n_i - 1, \quad i = 1, 2. \quad (23)$$

De modo similar a los de Laguerre I, se obtiene una fórmula de Rodrigues

$$(-1)^n \prod_{j=1}^r c_j^{n_j} L_n^{(\alpha_0, c_1, c_2)}(x) = x^{-\alpha_0} \prod_{j=1}^r [e^{c_j x} \frac{d^{n_j}}{dx^{n_j}} e^{-c_j x}] e^{\alpha_0 + n}.$$

Por su propia relación de ortogonalidad y la definición de sus funciones de peso, estas familias de polinomios permiten que se puedan obtener por el paso al límite a partir de los de Jacobi-Piñeiro. Para el caso particular $r = 2$ queda de la siguiente manera

$$L_n^{(\alpha_0, c_1, c_2)}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^n P_n^{(\alpha_0, \alpha c_1, \alpha c_2)}\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right). \quad (24)$$

Esta relación permite calcular los coeficientes $a_{n,0}^{\alpha_0, c_1, c_2}$, $a_{n,1}^{\alpha_0, c_1, c_2}$, $a_{n,2}^{\alpha_0, c_1, c_2}$ de las relaciones de recurrencia (16), (17) y (19) para la familia

$$a_{n,0}^{(\alpha_0, c_1, c_2)} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (1 - a_{n,0}^{\alpha_0, \alpha c_1, \alpha c_2}) \alpha,$$

$$a_{n,1}^{(\alpha_0, c_1, c_2)} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} a_{n,1}^{\alpha_0, \alpha c_1, \alpha c_2} \alpha^2,$$

$$a_{n,2}^{(\alpha_0, c_1, c_2)} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} a_{n,2}^{\alpha_0, \alpha c_1, \alpha c_2} \alpha^3.$$

Los resultados de los cálculos se muestran a continuación

$$\begin{aligned} a_{2n,0}^{\alpha_0, c_1, c_2} &= \frac{n(c_1 + 3c_2) + c_2 + \alpha_0 c_2}{c_1 c_2}, \\ a_{2n+1,0}^{\alpha_0, c_1, c_2} &= \frac{n(3c_1 + c_2) + 2c_1 + c_2 + \alpha_0 c_1}{c_1 c_2}, \\ a_{2n,1}^{\alpha_0, c_1, c_2} &= \frac{n(2n + \alpha_0)(c_1^2 + c_2^2)}{c_1^2 c_2^2}, \\ a_{2n+1,1}^{\alpha_0, c_1, c_2} &= \frac{2n^2(c_1^2 + c_2^2) + n[c_1^2 + 3c_2^2 + \alpha_0(c_1^2 + c_2^2)] + c_2^2 + \alpha_0 c_2^2}{c_1^2 c_2^2}, \\ a_{2n,2}^{\alpha_0, c_1, c_2} &= \frac{n(2n + \alpha_0)(2n + \alpha_0 - 1)(c_2 - c_1)}{c_1^3 c_2}, \\ a_{2n+1,2}^{\alpha_0, c_1, c_2} &= \frac{n(2n + \alpha_0)(2n + \alpha_0 + 1)(c_1 - c_2)}{c_1 c_2^3}. \end{aligned}$$

Estos resultados permitirán generar los polinomios multiortogonales de Laguerre II mediante sus fórmulas de recurrencia respectivas.

Polinomios multiortogonales de Hermite

Los denominados polinomios multiortogonales de Hermite H_n^c , están soportados sobre todo el eje real $(-\infty, +\infty)$ para cuando sus funciones de peso asociadas vienen dadas por $\{W_i = e^{-x^2+c_jx}\}_{j=1}^r$ para diferentes reales c_j .

Los polinomios multiortogonales de Hermite para $r = 2$ ($H_n^{c_1, c_2}$) satisfacen la condición de ortogonalidad

$$\int_0^\infty H_n^{(c_1, c_2)}(x) e^{-x^2+c_jx} x^k dx, \quad k = 0, \dots, n_i-1, \quad i = 1, 2. \quad (25)$$

De manera similar por su propia relación de ortogonalidad y la definición de sus funciones de peso, estas familias de polinomios permiten que se puedan obtener por el paso al límite a partir de los de Jacobi-Piñeiro. Para el caso particular $r = 2$ queda de la siguiente manera

$$H_n^{(c_1, c_2)}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} 2(\sqrt{\alpha})^n P_n^{(\alpha, \alpha+c_1\sqrt{\alpha}, \alpha+c_2\sqrt{\alpha})}\left(\frac{x+\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}\right). \quad (26)$$

Esta relación por el paso al límite permite calcular los coeficientes $a_{n,0}^{(c_1, c_2)}$, $a_{n,1}^{(c_1, c_2)}$, $a_{n,2}^{(c_1, c_2)}$ de las relaciones de recurrencia (16), (17) y (19) para la familia de Hermite

$$a_{n,0}^{(c_1, c_2)} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} 2(a_{n,0}^{\alpha, \alpha+c_1\sqrt{\alpha}, \alpha+c_2\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{2})\sqrt{\alpha},$$

$$a_{n,1}^{(c_1, c_2)} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} 4a_{n,1}^{\alpha, \alpha+c_1\sqrt{\alpha}, \alpha+c_2\sqrt{\alpha}}\alpha,$$

$$a_{n,2}^{(c_1, c_2)} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} 8a_{n,2}^{\alpha, \alpha+c_1\sqrt{\alpha}, \alpha+c_2\sqrt{\alpha}}(\sqrt{\alpha})^3.$$

Los resultados de los cálculos se muestran a continuación

$$a_{2n,0}^{\alpha_0, c_1, c_2} = \frac{c_1}{2}, \quad a_{2n+1,0}^{\alpha_0, c_1, c_2} = \frac{c_2}{2}, \quad a_{n,1}^{\alpha_0, c_1, c_2} = \frac{n}{2},$$

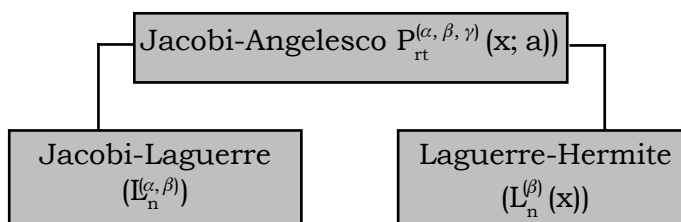
$$a_{2n,2}^{\alpha_0, c_1, c_2} = \frac{n(c_1 - c_2)}{4}, \quad a_{2n+1,2}^{\alpha_0, c_1, c_2} = \frac{n(c_2 - c_1)}{4}.$$

Estos resultados permitirán generar los polinomios multiortogonales de Hermite de tipo I y de tipo II mediante sus fórmulas de recurrencia respectivas.

3.2. Algunos PMOC para sistemas Angelesco

De modo análogo a los planteados en AT-sistemas, las familias planteadas en sistemas Angelesco serán tres, las cuales estarían conectadas como se muestra a continuación.

Sistemas-Angelesco



En general los polinomios multiortogonales para sistemas Angelesco se estudian sólo para $r = 2$, hecho asumido en el presente trabajo.

Polinomios multiortogonales de Jacobi-Angelesco

Los polinomios de Jacobi-Angelesco están asociados a un sistema Angelesco que tienen como función de peso una extendida del peso de Jacobi, particularmente $W_i = |h(x)|$ con $h(x) = (x-a)^\alpha x^\beta (1-x)^\gamma$ para $\alpha, \beta, \gamma > -1$ y w_1, w_2 soportadas respectivamente en $[a, 0]$ ($a < 0$) y $[0, 1]$.

Estos polinomios multiortogonales $P_n^{(\alpha, \beta, \gamma)}(x; a)$ fueron estudiados a profundidad en [14, 15], donde $P_n^{(\alpha, \beta, \gamma)}(x; a)$ satisface la condición de ortogonalidad

$$\begin{aligned} \int_a^0 P_n^{(\alpha, \beta, \gamma)}(x; a) (x-a)^\alpha |x|^\beta (1-x)^\gamma x^k dx &= 0, \\ k &= 0, \dots, n_1-1, \\ \int_0^1 P_n^{(\alpha, \beta, \gamma)}(x; a) (x-a)^\alpha x^\beta (1-x)^\gamma x^k dx &= 0, \\ k &= 0, \dots, n_2-1. \end{aligned} \quad (27)$$

Usando las condiciones de ortogonalidad (27), se obtiene una fórmula de Rodrigues

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} [(x-a)^{\alpha+m} x^{\beta+m} (1-x)^{\gamma+m} P_{k,0}^{(\alpha+m, \beta+m, \gamma+m)}(x; a)] &= \\ = (-1)^m (\alpha + \beta + \gamma + k + 2m + 1)_m (x-a)^\alpha x^\beta & \\ (1-x)^\gamma P_{(m+k, m)}^{(\alpha, \beta, \gamma)}(x; a). \end{aligned}$$

Realizando un trabajo algebraico auxiliado de cálculos computacionales se obtienen las formas explícitas de los coeficientes de los polinomios multiortogonales de Jacobi-Angelesco de tipo II, apoyados en la fórmula de tipo Rodrigues, y con ellos se tienen las expresiones de los coeficientes en la relación de recurrencia (16) (ver [6]).

Sea

$$X_n^{(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{\int_a^0 x(x-a)^{\alpha+n} |x|^{\beta+n} (1-x)^{\gamma+n} dx}{\int_a^0 (x-a)^{\alpha+n} |x|^{\beta+n} (1-x)^{\gamma+n} dx}, \quad (28)$$

entonces los coeficientes tienen la forma

$$\begin{aligned} a_{2n,o} &= \frac{n[n+\gamma+a(n+\alpha)]}{(\alpha+\beta+\gamma+3n)(\alpha+\beta+\gamma+3n+1)} + \\ &\quad + X_n^{(\alpha, \beta, \gamma)} \frac{2n+\alpha+\beta+\gamma+1}{3n+\alpha+\beta+\gamma+1}, \\ a_{2n+1,o} &= (5n^2 + (4\alpha+4\beta+3\gamma+7)n + (\alpha+\beta+\gamma+1)(\alpha+\beta+2) \\ &\quad + a[5n^2 + (3\alpha+4\beta+4\gamma+7)n + (\alpha+\beta+\gamma+1)(\beta+\gamma+2)]) \\ &\quad \times (\alpha+\beta+\gamma+3n+1)^{-1} (\alpha+\beta+\gamma+3n+3)^{-1} \\ &\quad - X_n^{(\alpha, \beta, \gamma)} \frac{2n+\alpha+\beta+\gamma+1}{3n+\alpha+\beta+\gamma+1}, \\ a_{2n,1} &= \frac{n(\alpha+\beta+\gamma+2n)}{(\alpha+\beta+\gamma+3n-1)(\alpha+\beta+\gamma+3n)^2(\alpha+\beta+\gamma+3n-1)} \\ &\quad \times ((\alpha+\beta+2n)(\gamma+n) - 2a(\alpha+n)(\gamma+n) + a^2(\beta+\gamma+2n)(\alpha+n)), \\ a_{2n+1,1} &= \frac{\alpha+\beta+\gamma+2n+1}{(\alpha+\beta+\gamma+3n+3)(\alpha+\beta+\gamma+3n+2)(\alpha+\beta+\gamma+3n+1)^2(\alpha+\beta+\gamma+3n)} \\ &\quad \times (n(\alpha+\beta+2n+1)(\gamma+n)(\alpha+\beta+\gamma+3n+3) \\ &\quad - a[24n^4 + (29\alpha+41\beta+29\gamma+48)n^3 \\ &\quad + (10\gamma^2 + 39\alpha\beta + 26\alpha\gamma + 29\beta^2 + 39\beta\gamma + 10\gamma^2 44\alpha + 62\beta + 44\gamma + 30)n^2 \\ &\quad + (\alpha^3 + 11\alpha^2\beta + 5\alpha^2\gamma + 19\alpha\beta^2 + 24\alpha\beta\gamma + 5\alpha\gamma^2 + 9\beta^3 + 19\beta^2\gamma + 11\beta\gamma^2 + \gamma^3 \\ &\quad + 11\alpha^2 + 39\alpha\beta + 28\alpha\gamma + 28\beta^2 + 39\beta\gamma + 11\gamma^2 + 19\alpha + 25\beta + 19\gamma + 6)n \\ &\quad + (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma+1)(\alpha+\beta+\gamma+2)(\beta+1)] \\ &\quad + a^2n(\alpha+n)(\beta+\gamma+2n+1)(\alpha+\beta+\gamma+3n+3)) \\ &\quad + \frac{\alpha+\beta+\gamma+2n+1}{(\alpha+\beta+\gamma+3n+3)(\alpha+\beta+\gamma+3n+1)^2(\alpha+\beta+\gamma+3n)} X_n^{(\alpha, \beta, \gamma)} \\ &\quad \times (12n^3 + (16\alpha+16\beta+10\gamma+18)n^2 \\ &\quad + [(\alpha+\beta+\gamma)(7\alpha+7\beta+2\gamma) + 16\alpha+16\beta+10\gamma]n \\ &\quad + (\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha+\beta) + (\alpha+\beta+\gamma)(3\alpha+3\beta+2\gamma+2) \\ &\quad + a[12n^3 + (10\alpha+16\beta+16\gamma+18)n^2 \\ &\quad + [(\alpha+\beta+\gamma)(2\alpha+7\beta+7\gamma) + 10\alpha+16\beta+16\gamma]n \\ &\quad + (\alpha+\beta+\gamma)^2(\beta+\gamma) + (\alpha+\beta+\gamma)(2\alpha+3\beta+3\gamma+2)]) \\ &\quad - \frac{(\alpha+\beta+\gamma+2n+1)^2}{(\alpha+\beta+\gamma+3n+1)^2} (X_n^{(\alpha, \beta, \gamma)})^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{2n,2} &= \frac{-an(n+\beta)(\alpha+\beta+\gamma+2n)(\alpha+\beta+\gamma+2n-1)[n+\gamma+a(n+\alpha)]}{(\alpha+\beta+\gamma+3n-2)(\alpha+\beta+\gamma+3n-1)(\alpha+\beta+\gamma+3n)^2(\alpha+\beta+\gamma+3n+1)} \\
&\quad + \frac{n(\alpha+\beta+\gamma+2n)(\alpha+\beta+\gamma+2n-1)X_{n-1}^{(\alpha,\beta,\gamma)}}{(\alpha+\beta+\gamma+3n+2)(\alpha+\beta+\gamma+3n+1)^2(\alpha+\beta+\gamma+3n)^2(\alpha+\beta+\gamma+3n-1)} \\
&\quad \times [(n+\gamma)(\alpha+\beta+2n) - 2a(n+\gamma)(n+\alpha) - a^2(n\alpha)(\beta+\gamma+2n)], \\
a_{2n+1,2} &= \frac{n(\alpha+\beta+\gamma+2n+1)(\alpha+\beta+\gamma+2n)}{(\alpha+\beta+\gamma+3n+2)(\alpha+\beta+\gamma+3n+1)^2(\alpha+\beta+\gamma+3n)^2(\alpha+\beta+\gamma+3n-1)} \\
&\quad \times ((n+\gamma)(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1) - a(n+\alpha)(n+\gamma)(2\alpha+2\beta-\gamma+3n+1) \\
&\quad - a^2(n+\alpha)(n+\gamma)(-\alpha+2\beta+2\gamma+3n+1) + a^3(n+\alpha)(\beta+\gamma+2n)(\beta+\gamma+2n+1)) \\
&\quad - \frac{n(\alpha+\beta+\gamma+2n+1)(\alpha+\beta+\gamma+2n)X_n^{(\alpha,\beta,\gamma)}}{(\alpha+\beta+\gamma+3n+1)^2(\alpha+\beta+\gamma+3n)^2(\alpha+\beta+\gamma+3n-1)} \\
&\quad \times [(n+\gamma)(\alpha+\beta+2n) - 2a(n+\alpha)(n+\gamma) + a^2(n+\alpha)(\beta+\gamma+2n)].
\end{aligned}$$

Polinomios multiortogonales de Jacobi-Laguerre

Los polinomios de Jacobi-Laguerre están asociados a un sistema Angelesco que tienen como función de peso $W_i = |h(x)|$ con $h(x) = (x-a)^\alpha x^\beta e^{-x}$ donde w_1, w_2 están soportadas respectivamente en $[a, 0]$ ($a < 0$) y $[0, +\infty]$.

Estos polinomios multiortogonales $L_n^{(\alpha,\beta)}(x; a)$ fueron considerados en [16], donde $L_n^{(\alpha,\beta)}(x; a)$ satisface la condición de ortogonalidad

$$\begin{aligned}
\int_a^0 L_n^{(\alpha,\beta)}(x; a)(x-a)^\alpha |x|^\beta e^{-x} x^k dx &= 0, \quad k = 0, \dots, n_1 - 1, \\
\int_0^{+\infty} L_n^{(\alpha,\beta)}(x; a)(x-a)^\alpha x^\beta e^{-x} x^k dx &= 0, \quad k = 0, \dots, n_2 - 1.
\end{aligned} \quad (29)$$

Análogamente, de las condiciones de ortogonalidad (29), se obtiene una fórmula de Rodrigues

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dx^m} [(x-a)^{\alpha+m} x^{\beta+m} e^{-x} L_{k,0}^{(\alpha+m,\beta+m)}(x; a)] &= \\
= (-1)^m (x-a)^\alpha x^\beta e^{-x} L_{(m+k,m)}^{(\alpha,\beta)}(x; a).
\end{aligned}$$

Realizando un trabajo algebraico auxiliado de cálculos computacionales se obtienen las formas explícitas de los coeficientes de los polinomios multiortogonales de Jacobi-Angelesco de tipo II, apoyados en la fórmula de Rodrigues. Pero es más conveniente emplear el paso al límite

te que relaciona los polinomios multiortogonales de Jacobi-Laguerre con los de Jacobi-Angelesco y con ellos se tienen de modo más factible las expresiones de los coeficientes en la relación de recurrencia (16) que se puede ver en [6].

Relación por el paso al límite

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(x; a) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma^n P_n^{(\alpha,\beta,\gamma)}\left(\frac{x}{\gamma}; \frac{a}{\gamma}\right). \quad (30)$$

Esta relación a su vez induce un resultado similar para los coeficientes $\{a_{n,i}^{(\alpha,\beta)}\}_{i=0}^2$.

$$a_{n,0}^{(\alpha,\beta)} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma a_{n,0}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\left(\frac{a}{\gamma}\right), \quad a_{n,1}^{(\alpha,\beta)} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma^2 a_{n,1}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\left(\frac{a}{\gamma}\right),$$

$$a_{n,2}^{(\alpha,\beta)} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma^3 a_{n,2}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\left(\frac{a}{\gamma}\right).$$

Las expresiones explícitas de los coeficientes se muestran a continuación. Sea

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma X_n^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{\int_a^0 x(x-a)^{\alpha+n} |x|^{\beta+n} e^{-x} dx}{\int_a^0 (x-a)^{\alpha+n} |x|^{\beta+n} e^{-x} dx} =: X_n^{(\alpha,\beta)}, \quad (31)$$

entonces los coeficientes tienen la forma

$$\begin{aligned}
a_{2n,0}^{(\alpha,\beta)} &= n + X_n^{(\alpha,\beta)}, \\
a_{2n+1,0}^{(\alpha,\beta)} &= 3n + \alpha + \beta + 2 + a - X_n^{(\alpha,\beta)}, \\
a_{2n,1}^{(\alpha,\beta)} &= n(\alpha + \beta + 2n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{2n+1,1}^{(\alpha,\beta)} &= n(\alpha + \beta + 2n + 1) - a(n + \beta + 1) + (\alpha + \beta + 2n + 2 + a)X_n^{(\alpha,\beta)} - X_n^{(\alpha,\beta)^2}, \\
a_{2n,2}^{(\alpha,\beta)} &= -an(\beta + n) + n(\alpha + \beta + 2n)X_{n-1}^{(\alpha,\beta)}, \\
a_{2n+1,2}^{(\alpha,\beta)} &= n[(\alpha + \beta + 2n)(\alpha + \beta + 2n + 1) + a(n + \alpha)] - n(\alpha + \beta + 2n)X_n^{(\alpha,\beta)}.
\end{aligned}$$

Polinomios multiortogonales de Laguerre-Hermite

Los polinomios de Laguerre-Hermite están asociados a un sistema Angelesco que tienen como función de peso $W_i = |h(x)|$ con $h(x) = x^\beta e^{-x^2}$ donde w_1, w_2 están soportadas respectivamente en $(-\infty, 0], [0, +\infty)$.

Estos polinomios multiortogonales $H_n^{(\beta)}(x)$ fueron considerados en [12], donde $H_n^{(\beta)}(x)$ satisface la condición de ortogonalidad

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 H_n^{(\beta)}(x) |x|^\beta e^{-x^2} x^k dx &= 0, \quad k = 0, \dots, n_1 - 1, \\
\int_0^{+\infty} H_n^{(\beta)}(x) x^\beta e^{-x^2} x^k dx &= 0, \quad k = 0, \dots, n_2 - 1.
\end{aligned} \quad (32)$$

Para este caso también se cuenta con una relación por el paso al límite que relaciona los polinomios multiortogonales de Laguerre-Hermite con los de Jacobi-Angelesco y con ellos se tienen de modo más factible las expresiones de los coeficientes en la relación de recurrencia (16) como se puede ver en [6].

Relación por el paso al límite

$$H_n^{(\beta)}(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sqrt{\alpha}^n P_n^{(\alpha, \beta, \alpha)}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}; -1\right). \quad (33)$$

Esta relación a su vez induce una expresión para los coeficientes $\{a_{n,i}^{(\beta)}\}_{i=0}^2$

$$\begin{aligned}
a_{n,0}^{(\beta)} &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sqrt{\alpha} a_{n,0}^{(\alpha, \beta, \alpha)} \quad (a = -1), \\
a_{n,1}^{(\beta)} &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha a_{n,1}^{(\alpha, \beta, \alpha)} \quad (a = -1), \\
a_{n,2}^{(\beta)} &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\sqrt{\alpha})^3 a_{n,2}^{(\alpha, \beta, \alpha)} \quad (a = -1).
\end{aligned}$$

Las expresiones explícitas de los coeficientes se muestran a continuación. Sea

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sqrt{\alpha} X_n^{(\alpha, \beta, \alpha)} = \frac{\int_{-\infty}^0 x |x|^{\beta+n} e^{-x^2} dx}{\int_{-\infty}^0 |x|^{\beta+n} e^{-x^2} dx} =: X_n^{(\beta)}, \quad (34)$$

entonces los coeficientes tienen la forma

$$\begin{aligned}
a_{2n,0}^{(\alpha, \beta)} &= X_n^{(\beta)}, & a_{2n+1,0}^{(\alpha, \beta)} &= -X_n^{(\beta)}, \\
a_{2n,1}^{(\alpha, \beta)} &= \frac{n}{2}, & a_{2n+1,1}^{(\alpha, \beta)} &= \frac{2n+\beta+1}{2} X_n^{(\beta)^2}, \\
a_{2n,2}^{(\alpha, \beta)} &= \frac{n}{2} X_{n-1}^{(\beta)}, & a_{2n+1,2}^{(\alpha, \beta)} &= -\frac{n}{2} X_n^{(\beta)}.
\end{aligned}$$

4. IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

4.1. Software Mathematica

Mathematica es un software con propósitos matemáticos que tiene las siguientes características

- Constituye una poderosa calculadora simbólica y numérica.
- Posee grandes posibilidades gráficas.
- Incorpora un lenguaje de programación.
- Permite desarrollar tareas complejas e ilustrar gráficamente los resultados.

Se ha seleccionado el Mathematica para el desarrollo de este trabajo, fundamentalmente por sus posibilidades en cuanto a la programación y al trabajo simbólico que con él se puede realizar, permitiendo la solución exacta de sistemas de ecuaciones lineales, el cálculo de determinantes, integración, uso de funciones recurrentes, etcétera.

Los resultados de este trabajo fueron implementados en formas de funciones y procedimientos que posibilitan generar los polinomios de las familias de los polinomios multiortogonales clásicos de tipo I y tipo II y sus aproximantes de Hermite-Padé, graficándolos e ilustrando algunas de sus propiedades.

4.2. Ejemplos

Usando el software Mathematica se verá una serie de ejemplos para mostrar algunas propiedades que cumplen los polinomios multiortogonales clásicos en el eje real. Además se ha podido conjeturar el cumplimiento de otras propiedades algebraicas de los mismos, gracias al cálculo computacional de los polinomios de estas familias, así como reiteradas corridas y graficaciones de los mismos.

Todos los ejemplos a presentar en el presente trabajo están desarrollados para índices regulares con $r = 2$ y varios valores de n que se especifican en cada caso. Utilizando la notación general de los polinomios multiortogonales empleada:

P_n : polinomio multiortogonal de tipo II e índice n .

Q_n : polinomio multiortogonal de tipo I e índice n .

$q_{n,i}$: componente i -ésima de vector Multiortogonal de tipo I e índice (n, i) .

$H_{n,i}$: polinomio multiortogonal de segundo Género de índice (n, i) .

Las figuras asociadas a las familias de polinomios multiortogonales particulares seguirán el mismo propósito.

EJEMPLO 4.2.1: Ilustrar las propiedades de los ceros de los polinomios multiortogonales que se enumeran a continuación:

- Localización de los ceros.
- Intercalación de los ceros (Entre dos ceros del polinomio de grado $n+1$ hay un cero del polinomio de grado n)

Ejemplos de polinomios multiortogonales de Laguerre I

Los ejemplos visualizados están desarrollados para la familia paramétrica con valores $\alpha_1=1$ y $\alpha_2=2.5$.

Los ceros de los polinomios multiortogonales de tipo II se encuentran en el eje real y son todos simples. Ver gráficas 1.1, 1.6, 1.7 (p. 85).

Los ceros de los polinomios multiortogonales de tipo I y de las componentes de los r -vectores multiortogonales de tipo I no son todos reales. Ver gráficas 1.2, 1.3, 1.4, 1.5.

Los ceros de los polinomios multiortogonales consecutivos de tipo II no se intercalan. Ver gráfica 1.1.

Los ceros de los polinomios de tipo II y de segundo género no se intercalan. Ver gráficas 1.6, 1.7.

Se conjetura que los ceros de los polinomios consecutivos de segundo género se intercalan. Ver gráficas 1.8, 1.9 (p. 86).

Ejemplos de polinomios multiortogonales de Laguerre II

Los ejemplos visualizados están desarrollados para la familia paramétrica con valores $\alpha_0=0$ y $c_1=1$ y $c_2=-1$.

Los ceros de los polinomios multiortogonales de tipo II se encuentran en el eje real y son todos simples. Ver gráficas 2.1, 2.6, 2.7.

Los ceros de los polinomios multiortogonales de tipo I y de las componentes de los r -vectores multiortogonales de tipo I no son todos reales. Ver gráficas 2.2, 2.3, 2.4, 2.5.

Los ceros de los polinomios multiortogonales consecutivos de tipo II se intercalan. Ver gráfica 2.1.

Se conjetura que los ceros de los polinomios de tipo II y de segundo género se intercalan. Ver gráficas 2.6, 2.7.

Se conjetura que los ceros de los polinomios consecutivos de segundo género se intercalan. Ver gráficas 2.8, 2.9.

Ejemplos de polinomios multiortogonales de Hermite

Los ejemplos visualizados están desarrollados para la familia paramétrica con valores $c_1=2$ y $c_2=-2$.

Los ceros de los polinomios multiortogonales de tipo II se encuentran en el eje real y son todos simples. Ver gráficas 3.1, 3.6, 3.7 (p. 87).

Los ceros de los polinomios multiortogonales de tipo I no son todos reales, pero los ceros de las componentes de los r -vectores multiortogonales de tipo I son todos reales y se encuentran en semiplanos diferentes. Ver gráficas 3.2, 3.3, 3.4, 3.5.

Los ceros de los polinomios multiortogonales consecutivos de tipo II se intercalan. Ver gráfica 3.1.

Se conjetura que los ceros de los polinomios de tipo II y de segundo género se intercalan. Ver gráficas 3.6, 3.7.

Se conjetura que los ceros de los polinomios consecutivos de segundo género se intercalan. Ver gráficas 3.8, 3.9.

Ejemplos de polinomios multiortogonales de Jacobi-Laguerre

Los ejemplos visualizados están desarrollados para la familia paramétrica con valores $\alpha=-1$, $\alpha=0$ y $\beta=1.5$.

Los ceros de los polinomios multiortogonales de tipo II se encuentran en el eje real y son todos simples. Ver gráficas 4.1, 4.6, 4.7 (p. 88).

Los ceros de los polinomios multiortogonales de tipo I y de las componentes de los r -vectores

multiortogonales de tipo I no son todos reales. Ver gráficas 4.2, 4.3, 4.4, 4.5.

Los ceros de los polinomios multiortogonales consecutivos de tipo II se intercalan. Ver gráfica 4.1.

Los polinomios de tipo II y de segundo género no se intercalan. Ver gráficas 4.6, 4.7.

Se conjetura que los ceros de los polinomios consecutivos de segundo género se intercalan. Ver gráficas 4.8, 4.9.

Ejemplos de polinomios multiortogonales de Laguerre-Hermite

Los ejemplos visualizados están desarrollados para la familia paramétrica con valor $\beta_0 = 0$.

Los ceros de los polinomios multiortogonales de tipo II se encuentran en el eje real y son todos simples. Ver gráficas 5.1, 5.6, 5.7.

Los ceros de los polinomios multiortogonales de tipo I no son todos reales, pero los ceros de las componentes de los r -vectores multiortogonales de tipo I son todos reales y se encuentran en semiplanos diferentes. Ver gráficas 5.2, 5.3, 5.4, 5.5.

Los ceros de los polinomios multiortogonales consecutivos de tipo II se intercalan. Ver gráfica 5.1.

Los ceros de los polinomios de tipo II y de segundo género no se intercalan. Ver gráficas 5.6, 5.7.

Se conjetura que los ceros de los polinomios consecutivos de segundo género se intercalan. Ver gráficas 5.8, 5.9.

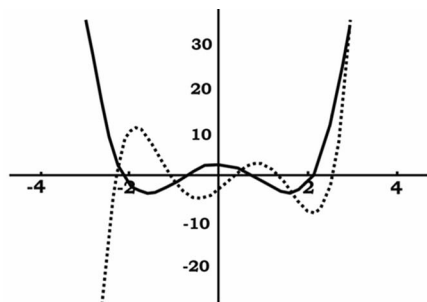


Fig. 1.1

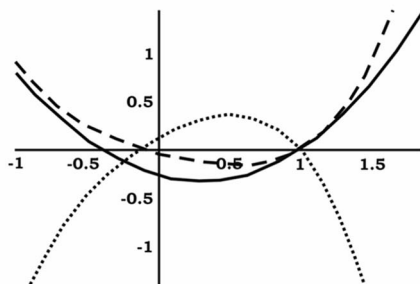


Fig. 1.2

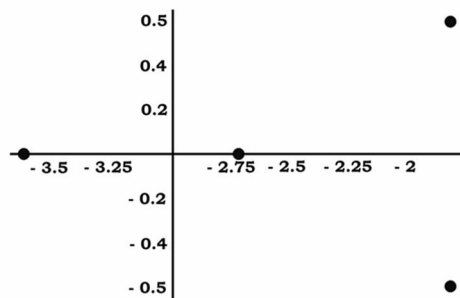


Fig. 1.3

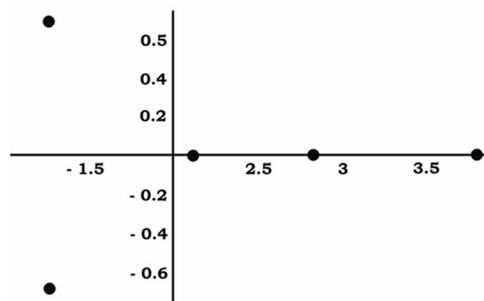


Fig. 1.4

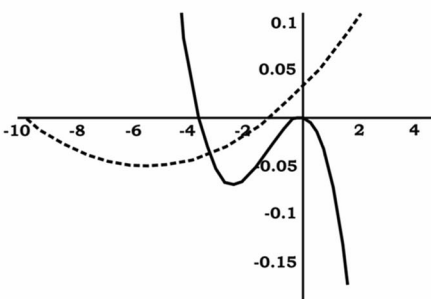


Fig. 1.5

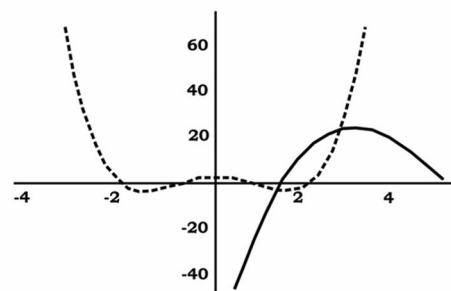


Fig. 1.6

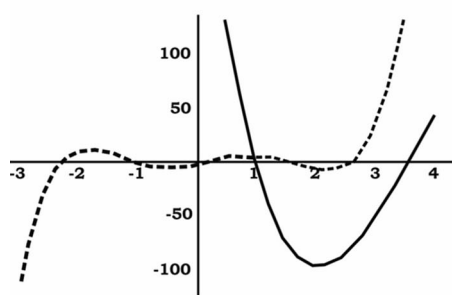


Fig. 1.7

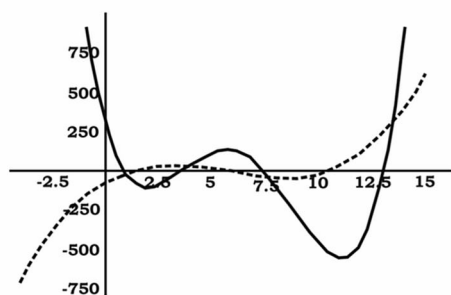


Fig. 1.8

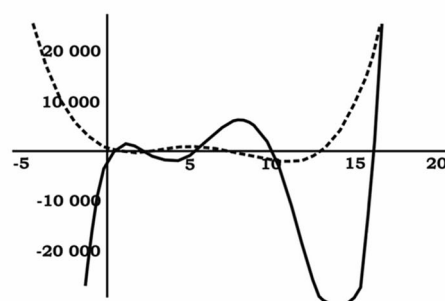


Fig. 1.9

En las figuras aparecen representados:

Fig. 1.1. Polinomios P_4 (—) y P_5 (----)

Fig. 1.2. Polinomios Q_3 (—), Q_4 (----) y Q_5 (----)

Fig. 1.3. Ceros de $q_{10,2}$ (•)

Fig. 1.4. Ceros de $q_{10,1}$ (•)

Fig. 1.5. Polinomios $q_{7,1}$ (—) y $q_{7,2}$ (----)

Fig. 1.6. Polinomios $H_{4,1}$ (—) y P_4 (----)

Fig. 1.7. Polinomios $H_{5,2}$ (—) y P_5 (----)

Fig. 1.8. Polinomios $H_{4,1}$ (----) y $H_{5,1}$ (—)

Fig. 1.9. Polinomios $H_{5,2}$ (----) y $H_{6,2}$ (—)

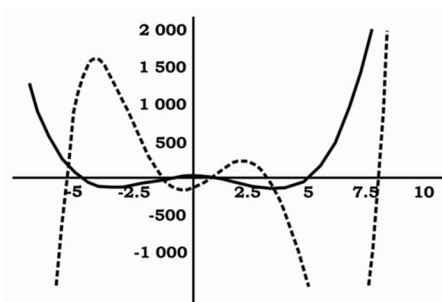


Fig. 2.1

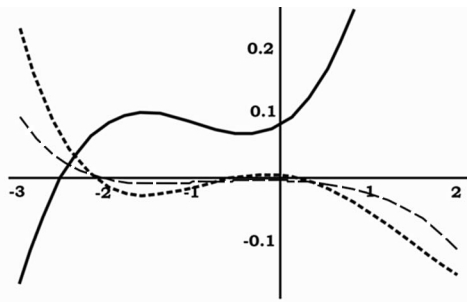


Fig. 2.2

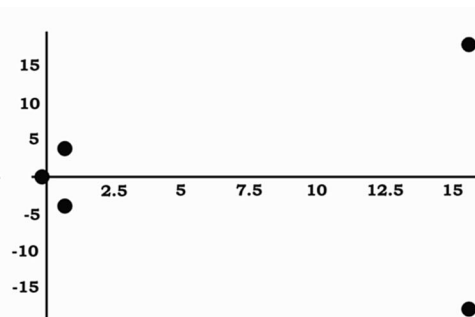


Fig. 2.3

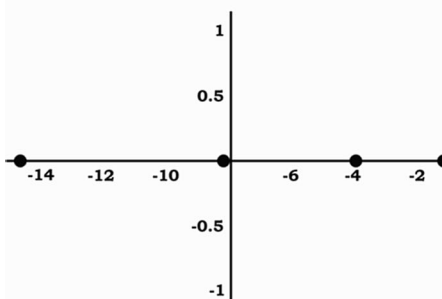


Fig. 2.4

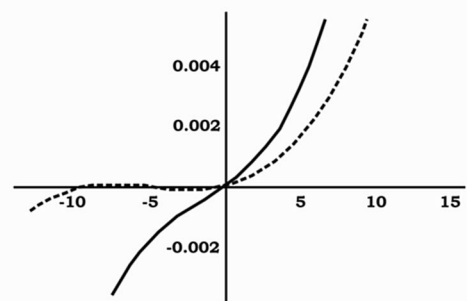


Fig. 2.5

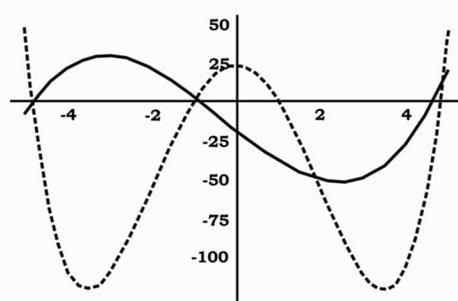


Fig. 2.6

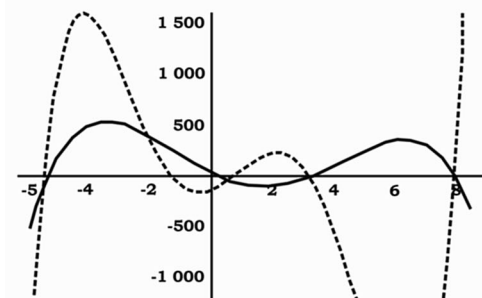


Fig. 2.7

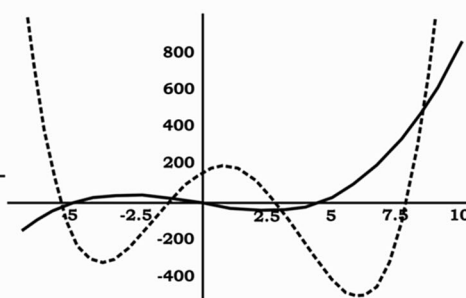


Fig. 2.8

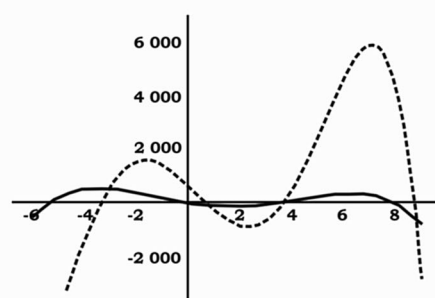


Fig. 2.9

En las figuras aparecen representados:

Fig. 2.1. Polinomios P_4 (—) y P_5 (----)

Fig. 2.2. Polinomios Q_3 (—), Q_4 (----) y Q_5 (----)

Fig. 2.3. Ceros de $q_{10,1}$ (•)

Fig. 2.4. Ceros de $q_{10,2}$ (•)

Fig. 2.5. Polinomios $q_{7,1}$ (—) y $q_{7,2}$ (----)

Fig. 2.6. Polinomios $H_{4,1}$ (—) y P_4 (----)

Fig. 2.7. Polinomios $H_{5,2}$ (—) y P_5 (----)

Fig. 2.8. Polinomios $H_{4,1}$ (—) y $H_{5,1}$ (----)

Fig. 2.9. Polinomios $H_{5,2}$ (----) y $H_{6,2}$ (—)

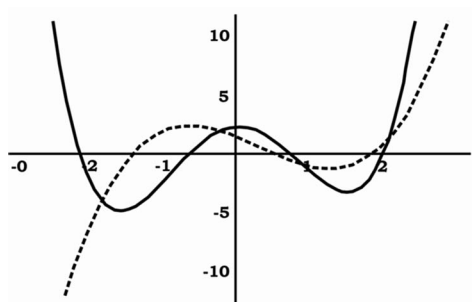


Fig. 3.1

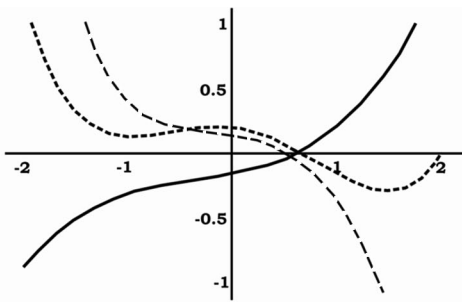


Fig. 3.2



Fig. 3.3



Fig. 3.4

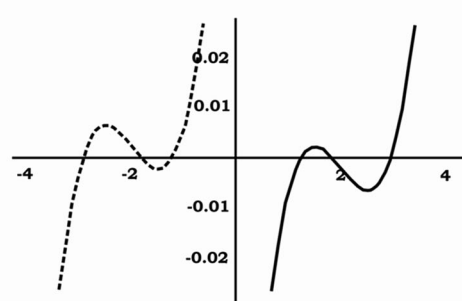


Fig. 3.5

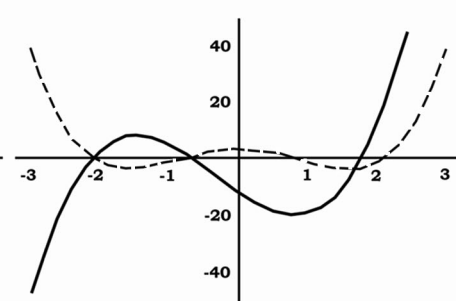


Fig. 3.6

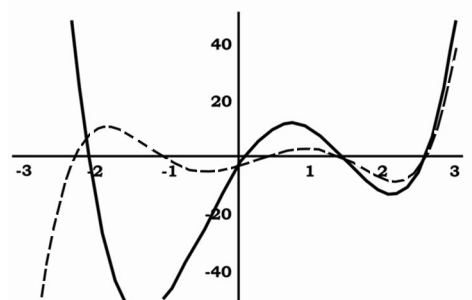


Fig. 3.7

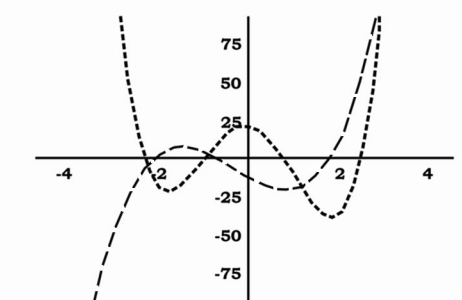


Fig. 3.8

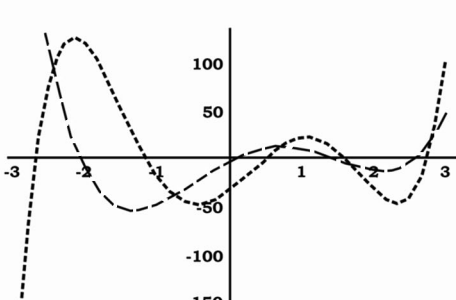


Fig. 3.9

En las figuras aparecen representados:

Fig. 3.1. Polinomios P_4 (—) y P_3 (----)

Fig. 3.2. Polinomios Q_3 (—), Q_4 (----) y Q_5 (.....)

Fig. 3.3. Ceros de $q_{8,2}$ (•)

Fig. 3.4. Ceros de $q_{8,1}$ (•)

Fig. 3.5. Polinomios $q_{7,1}$ (—) y $q_{7,2}$ (----)

Fig. 3.6. Polinomios $H_{4,1}$ (—) y P_4 (----)

Fig. 3.7. Polinomios $H_{5,2}$ (—) y P_5 (----)

Fig. 3.8. Polinomios $H_{4,1}$ (----) y $H_{5,1}$ (.....)

Fig. 3.9. Polinomios $H_{5,2}$ (----) y $H_{6,2}$ (.....)

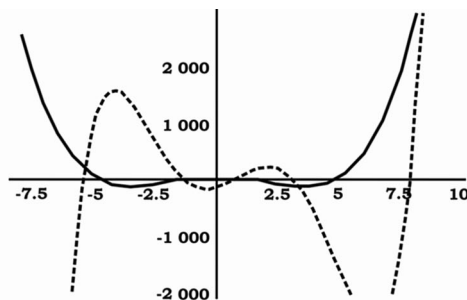


Fig. 4.1

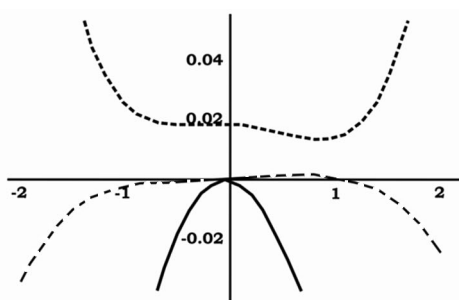


Fig. 4.2

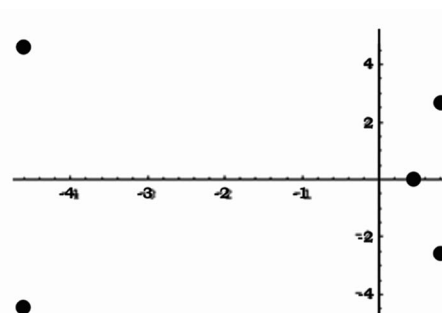


Fig. 4.3

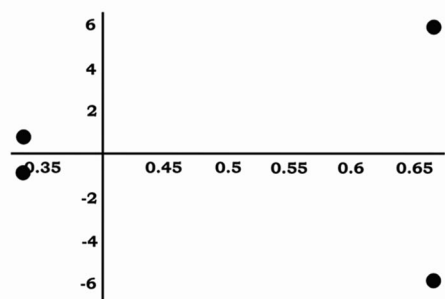


Fig. 4.4

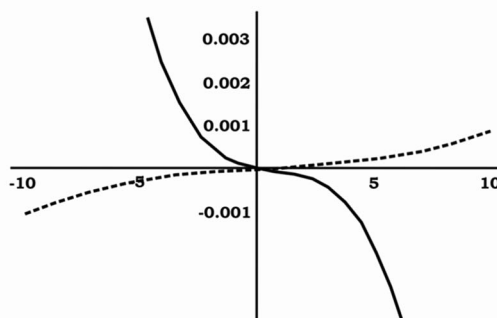


Fig. 4.5

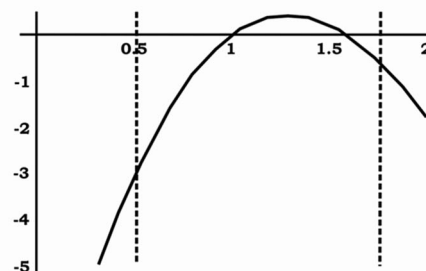


Fig. 4.6

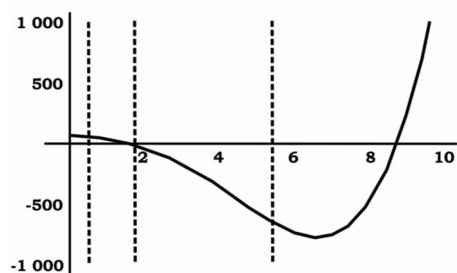


Fig. 4.7

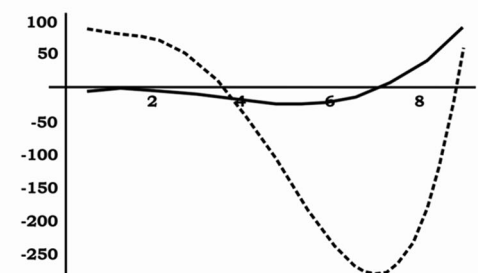


Fig. 4.8

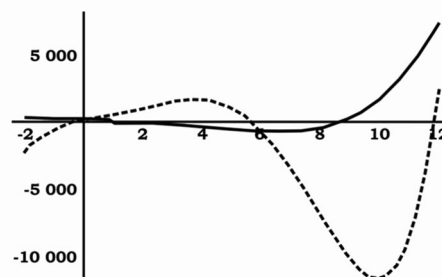


Fig. 4.9

En las figuras aparecen representados:

Fig. 4.1. Polinomios P_4 (—) y P_5 (----)

Fig. 4.2. Polinomios Q_3 (—), Q_4 (----) y Q_5 (— · —)

Fig. 4.3. Ceros de $q_{10,1}$ (•)

Fig. 4.4. Ceros de $q_{10,2}$ (•)

Fig. 4.5. Polinomios $q_{7,1}$ (—) y $q_{7,2}$ (----)

Fig. 4.6. Polinomios $H_{4,1}$ (—) y P_4 (----)

Fig. 4.7. Polinomios $H_{5,2}$ (—) y P_5 (----)

Fig. 4.8. Polinomios $H_{4,1}$ (—) y $H_{5,1}$ (----)

Fig. 4.9. Polinomios $H_{5,2}$ (----) y $H_{6,2}$ (—)

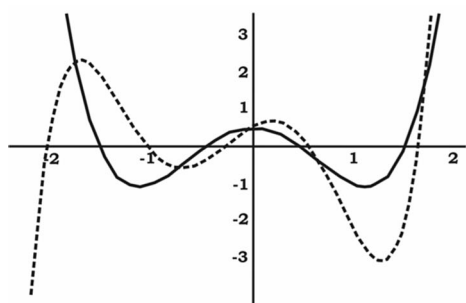


Fig. 5.1

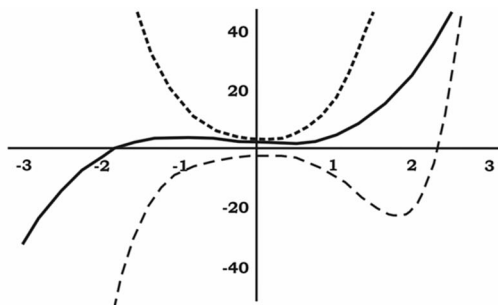


Fig. 5.2

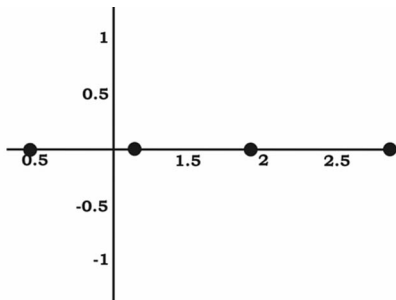


Fig. 5.3

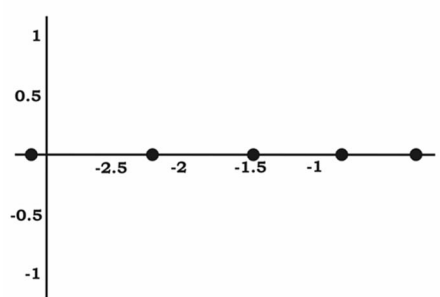


Fig. 5.4

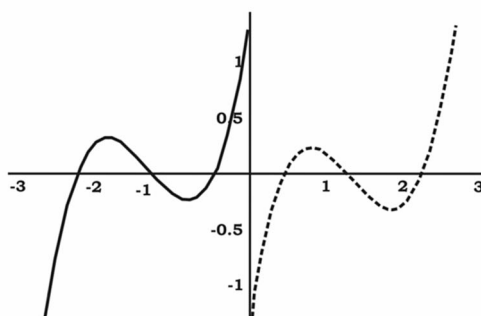


Fig. 5.5

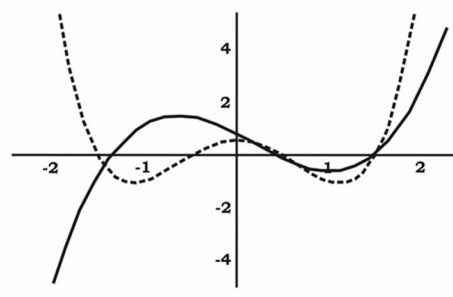


Fig. 5.6

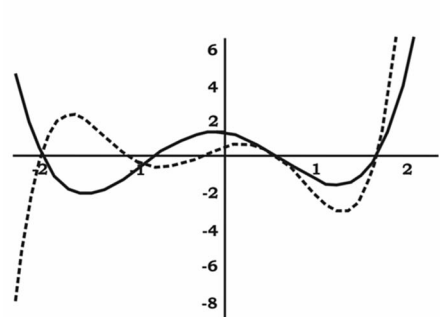


Fig. 5.7

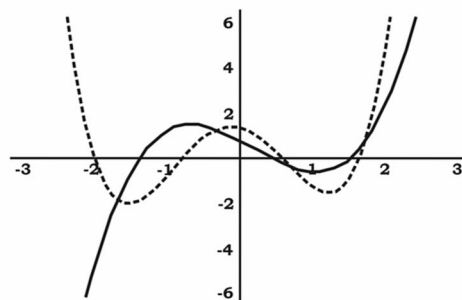


Fig. 5.8

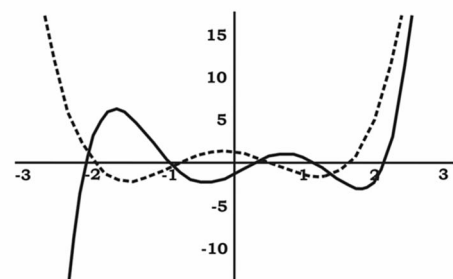


Fig. 5.9

En las figuras aparecen representados:

Fig. 5.1. Polinomios P_4 (—) y P_5 (----)

Fig. 5.2. Polinomios Q_3 (—), Q_4 (----) y Q_5 (----)

Fig. 5.3. Ceros de $q_{10,2}$ (•)

Fig. 5.4. Ceros de $q_{10,1}$ (•)

Fig. 5.5. Polinomios $q_{7,1}$ (—) y $q_{7,2}$ (----)

Fig. 5.6. Polinomios $H_{4,1}$ (—) y P_4 (----)

Fig. 5.7. Polinomios $H_{5,2}$ (—) y P_5 (----)

Fig. 5.8. Polinomios $H_{4,1}$ (—) y $H_{5,1}$ (----)

Fig. 5.9. Polinomios $H_{5,2}$ (----) y $H_{6,2}$ (—)

4. CONCLUSIONES

A modo de extensión de los polinomios ortogonales se plantean los conceptos fundamentales y los resultados más importantes para el desarrollo de los polinomios multiortogonales clásicos de tipo I y Tipo II, así como la aproximación racional simultánea con sus aproximantes y su modo de obtención, resultando un complemento aceptable para la incursión en los polinomios ortogonales y la aproximación racional simultánea.

Con ayuda del Software Mathematica 5.0 se realizó un análisis gráfico de los polinomios multiortogonales clásicos en la recta real que permitió conjeturar propiedades de los polinomios multiortogonales clásicos en el eje real que parecen ciertas. Constituye una novedad importante la instrumentación computacional de los resultados señalados. Los procedimientos y funciones elaboradas forman un asistente gráfico fundamental para el estudio de cualquiera de las familias estudiadas de polinomios multiortogonales, así como apoyo a la docencia e ilustración de resultados posteriores.

5. REFERENCIAS

1. Hermite, C., Sur la fonction exponentielle. Oeuvres. III: p. 150-181.
2. Carballosa, W., Polinomios Multiortogonales de Hermite, in Facultad de Matemática y Computación. 2002, Universidad de la Habana: Habana, Cuba.
3. Carballosa, W., Polinomios Multiortogonales Clásicos, in Facultad de Matemática y Computación, Dpto. Teoría de Funciones. 2007, Universidad de la Habana: Habana, Cuba.
4. Fundora, A., Aproximantes simultáneos de Hermite-Padé para dos funciones de Markov, in Facultad de Matemática y Computación, Dpto. Teoría de Funciones. 1998, Universidad de la Habana: Habana, Cuba.
5. Urrutia, I., Instrumentación computacional de los resultados relativos a polinomios ortogonales in Facultad de Matemática y Computación. 1997, Universidad de la Habana: Habana, Cuba.
6. Assche, W.V., Some classical multiorthogonal polynomials. J. Comput. Appl. Math., 2000. 127.
7. Assche, W.V., Multiple orthogonal polynomials for classical weights. Trans. Amer. Math. Soc., 2003. 355: p. 3887-3914.
8. Nikishin, E.M., On simultaneous Padé approximants. In Math USSR, 1982. 41: p. 409-426.
9. Nikishin, E.M., Rational approximations and orthogonality. 1991: Providence RI.
10. Santiago, L., Aproximación racional infinita, in Facultad de Matemática y Computación. 2002, Universidad de la Habana: Habana, Cuba.
11. Piñero, L.R., Sobre los aproximantes de Hermite-Padé para una clase de funciones de Markov. Vestnik Mosk. Univ., 1987. Ser I No. 2: p. 67-70.
12. Sorokin, V.N., Generalization of classical orthogonal polynomial and convergence of simultaneous Padé approximants. Trudy Sem. petrovsk, 1986. 11: p. 125-165.
13. Sorokin, V.N., On simultaneous Padé approximants for function. 1990.
14. Kalyagin, K.A., On a class of polynomials defined by two orthogonality relations. In Math. USSR Sb, 1981. 38: p. 562-580.
15. Kalyagin, K.A., On classical system of polynomials of simultaneous orthogonality. J. Comput. Appl. Math., 1996. 67: p. 207-217.
16. Sorokin, V.N., Simultaneous Padé approximants for finite intervals. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1984. 8: p. 45-52.

ABSTRACT: In this work a study about Multiple Orthogonal Polynomials (MOP) is done. The relation with the simultaneous rational approximation (Hermite-Padé-Rs approximates) is also considered. For do so, these families of MOP are generated through different methods, by using the definition of the simultaneous approximation problem and by considering algebraic properties. Some conjectures on algebraic properties of MOP as well as extensions of properties algebraic of the ordinary orthogonal.