

Análisis de modelos sísmicos mediante un método de series

Seismic model analysis by means of a series method

A. Reyes¹, J. A. Reyes^{2*}, M. Cortés-Molina², F. García-Alonso²

Resumen La respuesta desde la Mecánica Estructural a los fenómenos sísmicos, hace necesario mejorar el cálculo de las estructuras así como su análisis. Para ello los métodos especialmente basados en el análisis estático no lineal necesitan tener una mayor precisión. El análisis no lineal se puede abordar mediante modelos discretos o continuos. Los modelos discretos representan la estructura a través de un número finito de grados de libertad; en este caso las ecuaciones de movimiento son ecuaciones diferenciales ordinarias que se resuelven por métodos numéricos. En este trabajo se muestra una aplicación del método de series Φ -funciones para calcular la respuesta ante un terremoto de las estructuras modeladas mediante sistemas SDOF (Single Degree Of Freedom system) y 2DOF (Two Degree Of Freedom systems). Además, en el caso de SDOF, el método se ha aplicado tomando como la frecuencia forzada la frecuencia natural de vibración. La solución de los modelos sísmicos se ha obtenido mediante la generación de un algoritmo numérico y su implementación computacional. El método de series Φ -funciones integra osciladores forzados y es una adaptación de los métodos de Scheifele, con la ventaja de integrar, sin error de truncamiento, el problema perturbado con sólo las dos primeras Φ -funciones. El cálculo de coeficientes de la serie se efectúa por recurrencias algebraicas sencillas en las que se implica la función de perturbación. El buen comportamiento y precisión del método de series Φ -funciones se ilustra cuando se contrasta con otros métodos de integración ya conocidos e implementados en MAPLE, comparándose también con los métodos clásicos de Ingeniería de Estructuras.

Abstract The seismic events have attracted interest and the need to improve the structures and their analysis to sustain this type of oscillation. To do this, new methods especially those based on static non-linear analysis need to have increased accuracy. The non-linear analysis can be approached by means of discrete or continuous models. The discrete models represent the structure through a finite number of degrees of freedom; in this case the equations of motion are ordinary differential equations which are solved by numerical methods. This paper shows an application of the Φ -functions series method to calculate the response of structures, modeled as both SDOF(Single Degree Of Freedom system) and 2DOF (Two Degree Of Freedom systems) systems, to an earthquake. Furthermore, in the case of SDOF, the method has been applied taking as the forcing frequency the natural frequency of vibration. The solution of the seismic models has been obtained by the generation of the numerical algorithm and its computational implementation. The Φ -functions series method integrates forced oscillators and it is an adaptation of Scheifele's methods, with the advantage of integrating, without truncation error, the perturbed problem with just the first two Φ -functions. The calculation of series coefficients is effected by simple algebraic recurrences in which the perturbation function is takes part. The good precision of Φ -functions series method is illustrated when contrasted with other methods of integration already known and implemented in MAPLE and even with classic methods of Structural Engineering.

Palabras Clave

modelo sísmico, ecuaciones diferenciales, método de series

¹ Universidad de Alicante, Grupo de Investigación Modelización Matemática de Sistemas, España

² Escuela Politécnica Superior, Universidad de Alicante, España, jose.reyes@ua.es

*Autor para Correspondencia

1. Introducción

El interés en la mejora de la respuesta de una estructura frente a un terremoto, ha dado lugar a un aumento significativo en los estudios de los cálculos estructurales, en el campo de la construcción y en general, en la ingeniería civil, motivando

la investigación en el diseño de algoritmos informáticos. En dinámica estructural se han utilizado algoritmos de integración paso a paso respecto al tiempo, eficaces y precisos, por su simplicidad en el cálculo de la solución de los problemas MDOF (Multi-Degree Of Freedom systems) [1, 2, 3, 6, 7, 10,

22, 23].

El estudio de los modelos discretos con sólo un grado de libertad, SDOF, es relevante debido a la relación entre las propiedades de la estructura y la evolución temporal del movimiento del suelo. También muchas ecuaciones del código de construcción se basan en la respuesta de un sistema SDOF. Las ecuaciones que rigen modelos SDOF son de la forma:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) &= f(t, u(t), \dot{u}(t)) \\ u(0) &= u_0 = 0 \\ \dot{u}(0) &= \dot{u}_0 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

donde m es la masa, c es el coeficiente de amortiguación y k es el coeficiente de rigidez, siendo de especial interés aquellos cuya función de perturbación es periódica y en particular las armónicas, es decir, cuando la función de perturbación es del tipo

$$f(t, u(t), \dot{u}(t)) = f_0 (\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t)) \quad (2)$$

donde ω_0 es la frecuencia de la excitación.

La formulación de una ecuación de equilibrio dinámico para un sistema SDOF puede ser extendida a sistemas con múltiples grados de libertad, MDOF. Las estructuras típicas en la ingeniería civil son siempre esquematizadas como MDOF, por ejemplo los edificios de varios pisos son analizados mediante estos sistemas.

Para n grados de libertad, la ecuación (1) se expresa matricialmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) &= -\mathbf{M}\mathbf{a}(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{x}}(0) &= \dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3)$$

donde \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son las matrices de masa, de amortiguación y de rigidez, respectivamente.

El vector columna $\mathbf{a}(t)$ contiene los valores de la aceleración y sus componentes representan el desplazamiento relativo de cada uno de los diferentes puntos de la masa sobre el suelo.

En muchos casos de ingeniería de estructuras, sólo se considera el movimiento horizontal del suelo que provoca el sismo.

En el presente trabajo se aplica un método de series para la integración numérica de este tipo de osciladores y sistemas, que basa su desarrollo en los métodos de Scheifele [1, 2, 3, 10, 22, 23] y supone una extensión de los métodos basados en la serie de Taylor.

Para ello se define una familia de funciones reales con valores en el anillo de las matrices $\mathcal{M}(m, \mathbb{R})$, las Φ -funciones. A partir de estas funciones se construye un algoritmo que permite expresar la solución del sistema como una serie de Φ -funciones. Los coeficientes de esta serie se obtienen a través de relaciones de recurrencia que implican a la función de perturbación.

El método de series de Φ -funciones tiene la ventaja de ser capaz de integrar exactamente las ecuaciones diferenciales del problema perturbado.

Para integrar numéricamente los problemas de valor inicial (PVI) (1) y (3) se define un operador diferencial lineal, $D + \mathbf{B}$, donde \mathbf{B} es una matriz apropiada que permite la eliminación de los términos de la función de la perturbación, transformando el sistema en un sistema de ecuaciones de segundo orden no perturbado. Este sistema es integrable exactamente con sólo las dos primeras Φ -funciones del método de series.

Para ilustrar la aplicación del algoritmo se presenta el análisis de un SDOF y de un 2DOF.

El error relativo de las soluciones obtenidas mediante el método de series Φ -funciones se compara con las soluciones aportadas por otros conocidos algoritmos como son LSODE, Rosenbrock, Gear, Taylorseries, Newmark β -método y Wilson θ -método.

2. Ideas Básicas

Consideremos el siguiente PVI:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{e}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, t \in [a, b] = I, \end{aligned} \quad (4)$$

donde, $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}(m, \mathbb{R})$ y $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Las componentes del campo vectorial de perturbación $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$ son $f_i(\mathbf{x}(t), t)$ con $i = 1 \dots m$ siendo éste continuo y con derivadas continuas hasta un cierto orden, satisfaciendo las condiciones de existencia y unicidad de soluciones. A este tipo de sistemas se les denomina sistemas lineales perturbados.

Se asume que $\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$ es analítica en I con respecto a t ; para que esto sea cierto, basta con que \mathbf{f} sea analítica en sus argumentos. Utilizando el operador diferencial D , con respecto a la variable t , el PVI (4) puede escribirse del modo siguiente:

$$\begin{aligned} (D + \mathbf{A})\mathbf{x} &= \mathbf{e}\mathbf{g}(t), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, t \in [0, T] = I, \end{aligned} \quad (5)$$

que tiene la misma solución que el PVI (4), en I , siendo además esta única solución desarrollable en serie de potencias.

Aplicando el operador $(D + \mathbf{B})$ al PVI (5), donde $\mathbf{B} \in \mathcal{M}(m, \mathbb{R})$, y notando por

$$L_2 = D^2 + (\mathbf{A} + \mathbf{B})D + \mathbf{B}\mathbf{A},$$

se obtiene un nuevo PVI:

$$\begin{aligned} L_2(\mathbf{x}) &= (D + \mathbf{B})\mathbf{e}\mathbf{g}(t), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ \dot{\mathbf{x}}(0) &= -\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}\mathbf{g}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0, \end{aligned} \quad (6)$$

con solución exacta $\mathbf{x}(t)$ que coincide con la solución del PVI (4) y (5).

La idea de que lleva a considerar este PVI *ampliado*, es la de eliminar la perturbación mediante el operador $(D + \mathbf{B})$.

Dado que $\mathbf{g}(t)$ es analítica en sus argumentos, se puede expresar como:

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{g}^{(n)}(0)}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathbf{c}_n \quad (7)$$

con:

$$L_2(\mathbf{x}) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\mathbf{c}_{n+1} + \mathbf{B}\mathbf{c}_n), \quad (8)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = -\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{g}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0.$$

La solución del PVI (6) se obtiene sumando una solución particular del PVI no perturbado con las condiciones iniciales nulas a la solución general del PVI perturbado con las condiciones iniciales dadas. La primera se calcula resolviendo los siguientes PVI particulares:

$$\ddot{\mathbf{X}}_j + (\mathbf{A} + \mathbf{B})\dot{\mathbf{X}}_j + \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{X}_j = \frac{t^j}{j!} \mathbf{I}_m, \quad j = 0, 1, \dots \quad (9)$$

$$\mathbf{X}_j(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{X}}_j(0) = \mathbf{0},$$

donde \mathbf{X}_j es una función real con valores en el anillo $\mathcal{M}(m, \mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden m , siendo \mathbf{I}_m y $\mathbf{0}$ los elementos unidad y neutro del anillo, respectivamente.

Las soluciones de (9) son las llamadas Φ -funciones [5].

2.1 Las Φ -funciones

Definición 1 Definamos

$$\Phi_{j+2}(t) = \mathbf{X}_j(t) \quad (10)$$

con $j \geq 0, j \in \mathbb{R}$.

Definición 2 Sean $\Phi_0(t)$ y $\Phi_1(t)$ respectivamente, las soluciones de los siguientes PVI:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}}(t) + (\mathbf{A} + \mathbf{B})\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{X}(t) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{I}_m, \\ \dot{\mathbf{X}}(0) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (11)$$

y

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}}(t) + (\mathbf{A} + \mathbf{B})\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{X}(t) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{X}}(0) &= \mathbf{I}_m, \end{aligned} \quad (12)$$

Teorema 3 La solución del PVI (6), en términos de Φ -funciones, es:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi_0(t)\mathbf{x}_0 + \Phi_1(t)\dot{\mathbf{x}}_0 + \\ &\varepsilon \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_n(t) (\mathbf{c}_{n-1} + \mathbf{B}\mathbf{c}_{n-2}). \end{aligned} \quad (13)$$

2.2 Método de series de Φ -funciones

Dado que la solución del PVI (4) puede expresarse como

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{a}_k,$$

sustituyendo esta serie en (4), una vez calculadas una aproximación a la solución \mathbf{x}_n y a su derivada $\dot{\mathbf{x}}_n$, en el punto $t = nh$, la aproximación a la solución en el punto $t = (n+1)h$ es:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \Phi_0(h)\mathbf{b}_0 + \Phi_1(h)\mathbf{b}_1 + \sum_{n=0}^{m-2} \Phi_{n+2}(h)\mathbf{b}_{n+2} \quad (14)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= \mathbf{x}_n, \quad \mathbf{a}_{k+1} + \mathbf{A}\mathbf{a}_k = \varepsilon \mathbf{c}_k, \quad \text{con } k \geq 0, \\ \mathbf{b}_0 &= \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1, \\ \mathbf{b}_k &= \mathbf{a}_k + (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{a}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{a}_{k-2}, \quad \text{con } k \geq 2, \end{aligned} \quad (15)$$

son las ecuaciones que definen el método de integración numérica basado en la serie Φ -funciones para sistemas lineales perturbados [5].

2.3 Experimentos numéricos

El siguiente problema muestra una aplicación del método de series de Φ -funciones a un problema similar al planteado en [19], que también aparece propuesto en [5, 11, 15, 18, 20, 21], entre otros.

Sea el PVI:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + 4x(t) &= 10^{-2}e^{2it}, \\ x(0) &= 1,5, \quad \dot{x}(0) = 1,4995i, \end{aligned} \quad (16)$$

cuya solución analítica es:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\frac{t}{400} \sin(2t) + 1,5 \cos(2t) \right) + \\ &i \left(0,751 \sin(2t) - \frac{t}{400} \cos(2t) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

El problema puede ser resuelto, bien como una sola ecuación en la aritmética compleja o como un par de ecuaciones desacopladas.

Notando por $x(t) = u(t) + iv(t)$ y sustituyendo esta expresión en (16), se obtiene el siguiente PVI de segundo orden:

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) + 4u(t) &= 10^{-2} \cos(2t), \\ \ddot{v}(t) + 4v(t) &= 10^{-2} \sin(2t), \\ u(0) &= 1,5, \quad \dot{u}(0) = 0, \\ v(0) &= 0, \quad \dot{v}(0) = 1,4995. \end{aligned} \quad (18)$$

Definiendo las variables $x_1(t) = u(t)$, $x_2(t) = \dot{u}(t)$, $x_3(t) = v(t)$ y $x_4(t) = \dot{v}(t)$, el PVI (18) se transforma en un PVI lineal

de primer orden, que se puede expresar en forma matricial del modo siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_1 \mathbf{x}(t) = 10^{-2} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ 0 \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{x}(0) = (1,5, 0, 0, 1,4995)^T$$

donde

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T,$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tienen los autovalores $\pm 2i$ y la solución exacta:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2,5 \cdot 10^{-3} t \sin(2t) + 1,5 \cos(2t) \\ -\frac{1199}{400} \sin(2t) + 5 \cdot 10^{-3} t \cos(2t) \\ 0,751 \sin(2t) - 2,5 \cdot 10^{-3} t \cos(2t) \\ 1,4995 \cos(2t) + 5 \cdot 10^{-3} t \sin(2t) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

La matriz que elimina la función de perturbación es

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el operador $(D + \mathbf{B})$ al sistema (19) se obtiene $L_2(\mathbf{x}) = \underline{0}$ con:

$$L_2(\mathbf{x}) = \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_2 \mathbf{x}(t) \quad (21)$$

$$\mathbf{x}(0) = (1,5, 0, 0, 1,4995)^T,$$

$$\dot{\mathbf{x}}_0(0) = (0, -5,99, 1,4995, 0)^T,$$

y donde

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema se integra exactamente, con tan sólo las dos

primeras Φ -funciones, mediante el algoritmo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= \mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{a}_1 &= \dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{b}_1 \\ \text{desde } k &= 1 \text{ hasta } n \text{ calcular:} \\ \mathbf{x}_k &= \Phi_0(h) \mathbf{b}_0 + \Phi_1(h) \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_0 &= \mathbf{x}_k \\ \mathbf{b}_1 &= -\mathbf{K}_1 \mathbf{x}_k + 10^{-2} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2kh) \\ 0 \\ \sin(2kh) \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{x}}_k \end{aligned} \quad (22)$$

En la Figura 1 se contrasta el logaritmo decimal del módulo del error relativo de la solución $\mathbf{x}(t)$, calculada mediante el método de series de Φ -funciones con tamaño de paso $h = 0,9$ y 40 dígitos, con otros conocidos algoritmos de integración numérica, tales como Mgear[msteppart] con

$$errorper = \text{Float}(1, -25),$$

LSODE con tolerancia de 10^{-30} y Gear con

$$errorper = \text{Float}(1, -25).$$

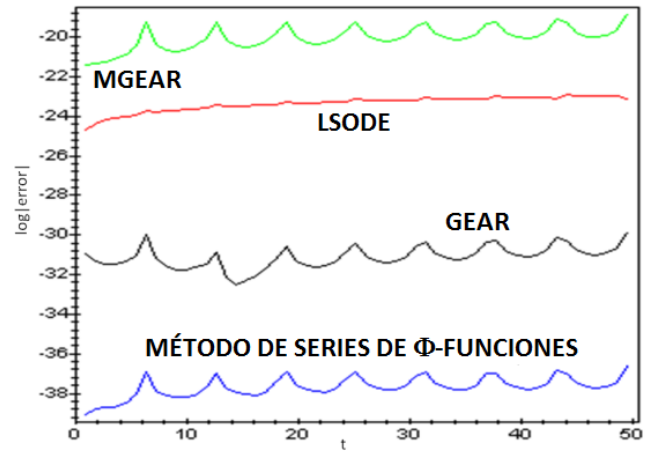


Figura 1. Logaritmo decimal del módulo del error relativo de la solución $\mathbf{x}(t)$.

3. Aplicación del método de series de Φ -funciones a un sistema SDOF

La ecuación de equilibrio dinámico de un SDOF es

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_e(t)$$

donde m es la masa del piso, c y k son los coeficientes de amortiguación y rigidez, respectivamente. $F_e(t)$ es la fuerza externa [8].

La importancia del análisis de un SDOF radica en que muestra mejor la interdependencia entre la estructura y sus propiedades y la duración de un terremoto.

Considerando que la estructura dada en la Figura 2 no está sujeta a ninguna fuerza externa, sino al movimiento del suelo debido a un terremoto, la fuerza elástica de las columnas se expresa mediante la ecuación

$$F_s = -k(y(t) - u_g(t)),$$

donde $y(t)$ y $u_g(t)$ son los desplazamientos absolutos de la masa y del suelo, respectivamente.

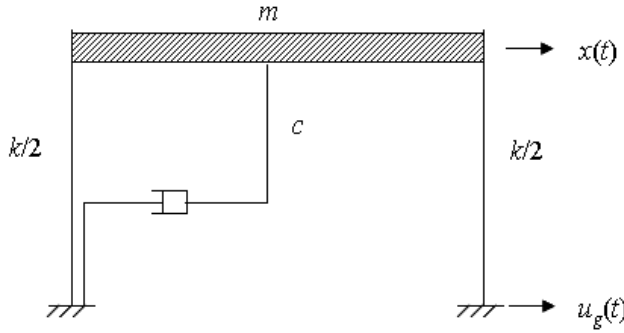


Figura 2. SDOF (Single Degree Of Freedom system).

La expresión $x(t) = y(t) - u_g(t)$ es el desplazamiento relativo entre la masa y el suelo, por consiguiente $F_s = -kx(t)$. Análogamente, la fuerza de amortiguación es

$$F_d = -c(\dot{y}(t) - \dot{u}_g(t)) = -c\dot{x}(t)$$

y la fuerza externa es cero.

Aplicando la segunda ley de Newton,

$$\sum F = m\ddot{y}(t)$$

se obtiene $m\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) + cx(t) = -m\ddot{u}_g(t)$. En forma estándar

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = -\ddot{u}_g(t), \quad (23)$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural no amortiguada de la vibración y $\zeta = c/2m\omega_n$ es el coeficiente de amortiguamiento crítico.

Si $m\ddot{u}_g(t)$ es una función de perturbación armónica, esto es $m\ddot{u}_g(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$, la ecuación (23) puede expresarse:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = -\frac{F_0}{m} \sin(\omega_0 t). \quad (24)$$

En el momento en el que ocurre el terremoto, es muy razonable asumir que la estructura está en reposo, esto es $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ y $t \in [0, T]$. Para aplicar el método de series de Φ -funciones, se efectúa el cambio de variable, $u_1 = x$, $u_2 = \dot{x}$, $\dot{u}_1 = \dot{x} = u_2$, de manera que

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 = \ddot{x} &= -2\zeta\omega_n\dot{x} - \omega_n^2x - \frac{F_0}{m} \sin(\omega_0 t) \\ &= -2\zeta\omega_n u_2 - \omega_n^2 u_1 - \frac{F_0}{m} \sin(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (25)$$

El PVI (25) puede expresarse matricialmente como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) &= -\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_0 \sin(\omega_0 t)}{m} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (26)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= (u_1(t), u_2(t))^T, \\ \mathbf{K} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega_n^2 & 2\zeta\omega_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se introduce una nueva variable

$$u_3 = -\frac{F_0}{m} \sin(\omega_0 t),$$

para facilitar la eliminación de la función de perturbación del PVI (26), siguiendo las técnicas de Steffensen [16, 17], generándose el siguiente PVI:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}_3\mathbf{u}(t) &= -\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_0}{m} \sin(\omega_0 t) \\ \frac{F_0}{m} \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (27)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T, \\ \mathbf{K}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \omega_n^2 & 2\zeta\omega_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para eliminar la función de perturbación, se aplica a (27) el operador $(D + \mathbf{B})$, donde \mathbf{B} es la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix},$$

obteniéndose el PVI ampliado,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}_4\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}_4\mathbf{u}(t) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{u}}(0) &= \left(0, 0, -\frac{F_0}{m} \omega_0\right)^T \end{aligned} \quad (28)$$

donde

$$\mathbf{C}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \omega_n^2 & 2\zeta\omega_n & -1 \\ 0 & \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega_n^2 \omega_0^2 & 2\zeta\omega_n \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

que se integra exactamente con el algoritmo de series de Φ -funciones descrito en (14).

3.1 Análisis de un sistema SDOF

En esta sección se aborda un problema similar al propuesto en [8]. Se ha seleccionado los siguientes valores específicos para las variables estructurales:

$$\begin{aligned} m &= 579,3307 \frac{\text{N} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} = 1,5 \frac{\text{k} \cdot \text{s}^2}{\text{in}} \\ \zeta &= 5\% \\ \omega_n &= \frac{3\pi}{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ F_0 &= 66723,324 \text{N} = 15 \text{ kip} \\ T &= \frac{4}{3} \text{ s} \end{aligned}$$

donde $1\text{in} = 0,0254\text{m}$ y $1\text{kip} = 4448,2216\text{N}$.

Tomando la frecuencia de la función de perturbación igual a la frecuencia natural de vibración de la estructura, es decir:

$$\omega_0 = \omega_n = \frac{3\pi}{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

el PVI que se obtiene es:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}_5 \mathbf{u}(t) &= - \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) \\ 15\pi \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}(0) &= \underline{0} \end{aligned} \quad (29)$$

donde

$$\mathbf{K}_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{9\pi^2}{4} & \frac{3\pi}{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el operador diferencial, $(D + \mathbf{B})$ se llega al PVI ampliado:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}_6 \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}_6 \mathbf{u}(t) &= \underline{0}, \\ \mathbf{u}(0) &= \underline{0}, \\ \dot{\mathbf{u}}(t) &= (0, 0, -15\pi)^T, \end{aligned} \quad (30)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_6 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{9\pi^2}{4} & \frac{3\pi}{20} & -1 \\ 0 & \frac{9\pi^2}{4} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{81\pi^4}{16} & \frac{27\pi^3}{80} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y que es integrado exactamente por el algoritmo (14), adaptado

a este problema:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= \mathbf{u}_0 = \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{a}_1 &= \dot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{b}_1 \\ \text{desde } k &= 1 \text{ hasta } n \text{ calcular:} \\ \mathbf{u}_k &= \Phi_0(h) \mathbf{b}_0 + \Phi_1(h) \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_0 &= \mathbf{u}_k \\ \mathbf{b}_1 &= -\mathbf{K}_5 \mathbf{u}_k - \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \sin(1,5\pi k h) \\ 15\pi \cos(1,5\pi k h) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

Los resultados conseguidos mediante el método de series de Φ -funciones, se comparan con los conocidos métodos:

- LSODE, método que calcula una solución numérica utilizando el Livermore Stiff Ode Solver. Resuelve problemas stiff y no stiff. Utiliza los métodos de Adams (predictor-corrector) en el caso no stiff, y la Backward Differentiation Formulae (BDF) en el caso stiff.
- Rosenbrock, método que obtiene una solución numérica utilizando un algoritmo de Runge-Kutta de orden tres-cuatro implícito.
- Gear, calcula una solución numérica a través del método de extrapolación racional de Burlisch-Stör. El método alcanza una mayor precisión y eficiencia de cálculo, especialmente en la resolución de ecuaciones diferenciales que rigen los sistemas stiff.
- Taylorseries, este método encuentra una solución numérica para las ecuaciones y sistemas diferenciales, usando un método de series de Taylor. Este método se puede utilizar para soluciones de alta precisión.
- Newmark β -método es un método de integración numérica para la resolución de ecuaciones diferenciales. Este método se utiliza generalmente en la dinámica estructural porque se ha demostrado que tienen un alto grado de estabilidad numérica.
- Wilson θ -método supone que la aceleración del sistema varía linealmente entre dos instantes de tiempo, desde t a $t + \theta h$, donde el valor de θ no tiene por qué ser un número entero y es, por lo general, superior a 1. El método es incondicionalmente estable para sistemas dinámicos lineales cuando $\theta > 1,37$. Un valor de θ que se utiliza a menudo para los sistemas dinámicos no lineales es $\theta = 1,4$.

En la Figura 3 se contrasta el logaritmo decimal del módulo del error relativo de la solución $\mathbf{u}(t)$, calculada mediante el método de series de Φ -funciones con tan sólo las dos primeras, tamaño de paso $h = 0.01$ y 50 dígitos, frente a otros conocidos métodos de integración numérica, tales como LSODE con $tol = 10^{-25}$, Rosenbrock con $abserr = 10^{-30}$, Gear con $errorper = 10^{-25}$ y Taylorseries con $abserr = 10^{-25}$.

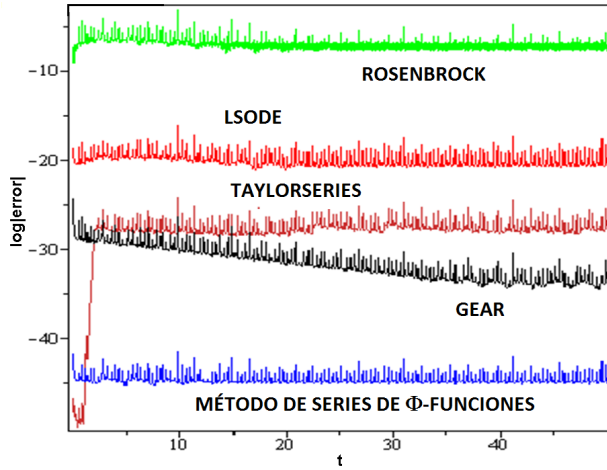


Figura 3. Logaritmo decimal del módulo del error relativo de la solución $u(t)$ del SDOF.

La Figura 4 muestra el gráfico del logaritmo del valor absoluto del error relativo de la solución $x(t)$, obtenido con 50 dígitos, calculado mediante (31), con dos Φ -funciones y tamaño de paso $h = 0,001$, comparado con los métodos de integración numérica Newmark β -método con $\delta = 1/2$, $\alpha = 1/4$, $h = 0,001$ y Wilson θ -método con $\delta = 1/2$, $\alpha = 1/6$, $\theta = 1,4$, $h = 0,001$. Se obtienen resultados análogos para la velocidad $\dot{x}(t)$.

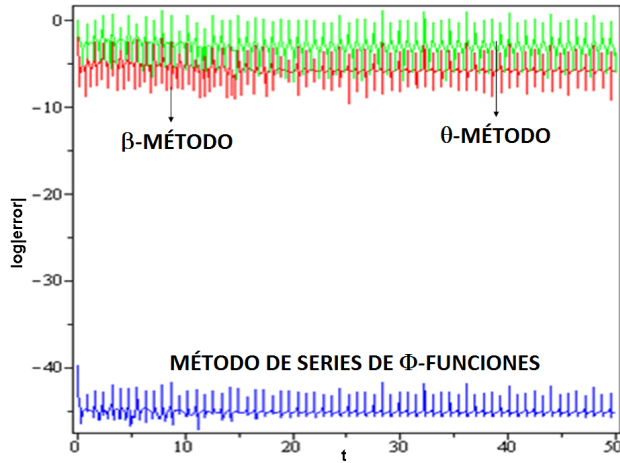


Figura 4. Logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución $x(t)$.

La Figura 5 muestra el buen comportamiento y precisión del método de series de Φ -funciones, con tamaño de paso 0.9 y 100 dígitos.

4. Aplicación del método de series de Φ -funciones a un sistema 2DOF

En la Figura 6 se muestra el esquema de un sistema 2DOF que se usa para el estudio de las fuerzas que actúan sobre dicho sistema. De forma análoga al sistema SDOF, cuatro

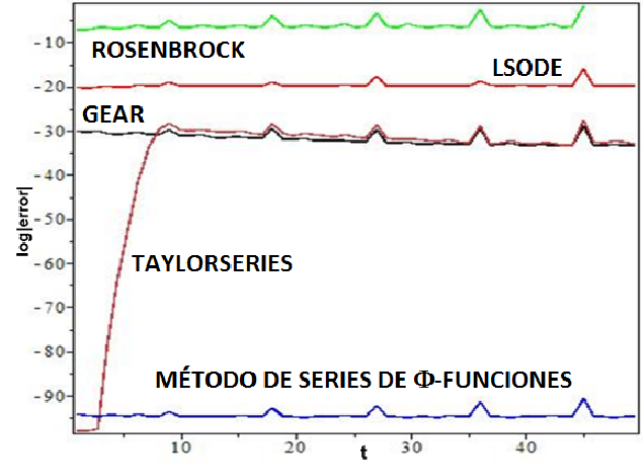


Figura 5. Logaritmo decimal del módulo del error relativo de la solución $u(t)$ de un SDOF.

tipos de fuerzas actúan en cada una de las masas de los pisos, la fuerza de rigidez, la fuerza de amortiguación, la fuerza externa y la fuerza inercial [8].

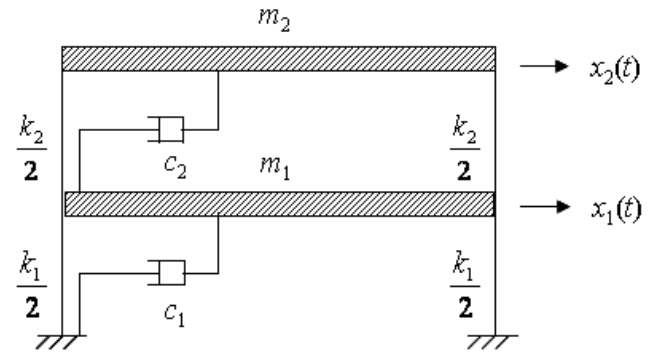


Figura 6. 2DOF (Two Degree Of Freedom system).

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (32)$$

donde

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

son matrices simétricas de masas, de amortiguamiento y de rigidez respectivamente y

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{pmatrix}.$$

Se supone que la estructura está sometida a un sismo del cual sólo se considera la traslación horizontal del suelo. Aplicando la segunda ley de Newton y teniendo en cuenta que

la fuerza externa es cero, las ecuaciones del movimiento en este caso son:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + c_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + c_1 (\dot{y}_1 - \dot{u}_g) + \\ k_2 (y_1 - y_2) + k_1 (y_1 - u_g) = 0, \\ m_2 \ddot{y}_2 + c_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2 (y_2 - y_1) = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

donde u_g y \dot{u}_g son el desplazamiento absoluto del suelo y la velocidad absoluta del suelo respectivamente.

Si se definen los desplazamientos relativos entre las masas y el suelo, como

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t) - u_g(t) \\ x_2(t) &= y_2(t) - u_g(t) \end{aligned}$$

(33) se puede expresar como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{M}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ddot{u}_g. \quad (34)$$

Si $\mathbf{M} \cdot (1, 1)^T \ddot{u}_g$ es una matriz de fuerzas armónicas, esto es:

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ddot{u}_g = \begin{pmatrix} F_0 \sin(\omega_0 t) \\ F_0 \sin(\omega_0 t) \end{pmatrix} \quad (35)$$

La ecuación (34) se escribe:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = -\begin{pmatrix} F_0 \sin(\omega_0 t) \\ F_0 \sin(\omega_0 t) \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Cuando el sismo comienza, es muy razonable suponer que la estructura esté en reposo, por lo tanto, el PVI puede escribirse en forma normalizada:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) &= -\begin{pmatrix} \frac{F_0 \sin(\omega_0 t)}{m_1} \\ \frac{F_0 \sin(\omega_0 t)}{m_2} \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}(0) &= \underline{0} \\ \dot{\mathbf{x}}(0) &= \underline{0} \end{aligned} \quad (37)$$

Para aplicar el método de series de Φ -funciones, se efectúa el cambio de variables

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1, \dot{x}_1 = u_3, \ddot{x}_1 = \dot{u}_3, \\ x_2 &= u_2, \dot{x}_2 = u_4, \ddot{x}_2 = \dot{u}_4. \end{aligned}$$

El PVI (37) puede expresarse:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} \\ \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) + \\ \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{2 \times 2} & -\mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{O}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F_0 \sin(\omega_0 t)}{m_1} \\ \frac{F_0 \sin(\omega_0 t)}{m_2} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}(0) &= \underline{0}. \end{aligned} \quad (38)$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{2 \times 2} & -\mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F_0 \sin(\omega_0 t)}{m_1} \\ \frac{F_0 \sin(\omega_0 t)}{m_2} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}(0) &= \underline{0} \end{aligned} \quad (39)$$

Siguiendo las técnicas de Steffensen [16, 17], se introduce la variable

$$u_5 = -\frac{F_0}{m_1} \sin(\omega_0 t)$$

con el fin de facilitar la eliminación de la función de perturbación de PVI (39), obteniéndose el nuevo PVI:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{2 \times 2} & -\mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 1} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{O}_{2 \times 1} \\ \mathbf{O}_{1 \times 2} & \mathbf{O}_{1 \times 2} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) &= \\ -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F_0 \sin(\omega_0 t)}{m_1} \\ \frac{F_0 \sin(\omega_0 t)}{m_2} \\ \frac{F_0}{m_1} \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}(0) &= \underline{0}, \end{aligned} \quad (40)$$

pero ahora con $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_5(t))$.

Definiendo \mathbf{B} como la matriz siguiente

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 1} \\ \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \bar{\Omega}_{2 \times 1} \\ \mathbf{O}_{1 \times 2} & \Omega_{1 \times 2} & \mathbf{O}_{1 \times 1} \end{pmatrix} \quad (41)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{2 \times 1} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{m_1}{m_2} \end{pmatrix}, \\ \Omega_{1 \times 2} &= (\omega_0^2 \quad 0), \end{aligned}$$

y aplicando a (40) el operador diferencial $(D + \mathbf{B})$ para eliminar la función de perturbación, se llega el PVI ampliado:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{2 \times 2} & -\mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 1} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{O}_{2 \times 1} \\ \mathbf{O}_{1 \times 2} & \mathbf{O}_{1 \times 2} & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) + \\ \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 1} \\ \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{O}_{2 \times 1} \\ \Omega_{1 \times 2} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \Omega_{1 \times 2} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) &= \underline{0} \\ \mathbf{u}(0) &= \underline{0} \\ \dot{\mathbf{u}}(0) &= \left(0, 0, 0, 0, -\frac{F_0 \omega_0}{m_1} \right)^T \end{aligned} \quad (42)$$

que se integra exactamente utilizando el algoritmo de series de Φ -funciones descrito en (14).

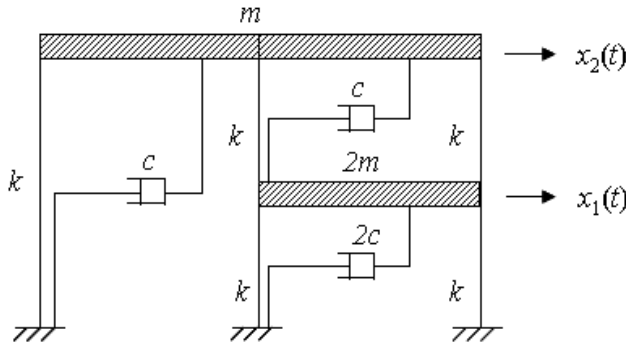


Figura 7. Esquema de dos pisos.

4.1 Análisis de un sistema 2DOF

Consideremos el esquema de dos pisos sometido a un fenómeno sísmico [8], Figura 7.

Se han seleccionado los siguientes valores específicos para las variables estructurales, similares a los propuestos en [8]: $m = 1,6 \text{ k} \cdot \text{s}^2/\text{in}$, $\zeta = 5\%$, $F_0 = 12 \text{ kip}$, $\omega_0 = \omega_n = 5\pi/3 \text{ rad/s}$, el PVI se puede escribir:

$$\mathbf{M}_7 \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_7 \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_7 \mathbf{x}(t) = - \begin{pmatrix} 12 \sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right) \\ 12 \sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right) \end{pmatrix} \quad (43)$$

$$\mathbf{x}(t) = \underline{0}$$

donde

$$\mathbf{M}_7 = \begin{pmatrix} 3,2 & 0 \\ 0 & 1,6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_7 = \begin{pmatrix} \frac{4\pi}{5} & -\frac{4\pi}{15} \\ -\frac{4\pi}{15} & \frac{8\pi}{15} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_7 = \begin{pmatrix} \frac{160\pi^2}{9} & -\frac{80\pi^2}{9} \\ -\frac{80\pi^2}{9} & \frac{40\pi^2}{3} \end{pmatrix}.$$

Efectuando el cambio de variable $x_1 = u_1$, $\dot{x}_1 = \dot{u}_1$, $\ddot{x}_1 = \ddot{u}_1$, y $x_2 = u_2$, $\dot{x}_2 = \dot{u}_2$, $\ddot{x}_2 = \ddot{u}_2$ y aplicando el operador $(D + \mathbf{B})$ al nuevo sistema, con

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{25\pi^2}{9} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

se obtiene el PVI ampliado:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}_9 \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}_9 \mathbf{u}(t) = \underline{0} \quad (45)$$

$$\mathbf{u}(0) = \underline{0}$$

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \underline{0}$$

donde

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), u_5(t))^T,$$

$$\mathbf{C}_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{50\pi^2}{9} & -\frac{25\pi^2}{9} & \frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{12} & -1 \\ -\frac{50\pi^2}{9} & \frac{25\pi^2}{3} & -\frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{3} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{25\pi^2}{9} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\left(\frac{5\pi}{3}\right)^4 & -\left(\frac{5\pi}{3}\right)^4 & \pi\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 & -\frac{\pi}{3}\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 & 0 \end{pmatrix}$$

que se integra exactamente mediante (14), adaptado a este problema. Se aplica

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{u}_0 = \mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{a}_1 = \dot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{b}_1$$

desde $k = 1$ hasta n calcular: (46)

$$\mathbf{u}_k = \Phi_0(h)\mathbf{b}_0 + \Phi_1(h)\mathbf{b}_1$$

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{b}_1 = -\mathbf{K}_8 \mathbf{u}_k - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{15}{4} \sin\left(\frac{5\pi}{3}kh\right) \\ \frac{15}{2} \sin\left(\frac{5\pi}{3}kh\right) \\ \frac{25\pi}{4} \cos\left(\frac{5\pi}{3}kh\right) \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{K}_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{50\pi^2}{9} & -\frac{25\pi^2}{9} & \frac{\pi}{4} & -\frac{\pi}{12} & 0 \\ -\frac{50\pi^2}{9} & \frac{25\pi^2}{3} & -\frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{25\pi^2}{9} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En la Figura 8 se muestra el gráfico del logaritmo decimal del módulo del error relativo de la solución $\mathbf{u}(t)$, calculada mediante el método de series de Φ -funciones con tan sólo las dos primeras, tamaño de paso $h = 0.01$ y 50 dígitos, frente a los métodos de integración numérica LSODE con $tol = 10^{-25}$, Rosenbrock con $abserr = 10^{-30}$, Gear con $errorper = 10^{-25}$ y Taylorseries con $abserr = 10^{-25}$.

La Figura 9 muestra el gráfico del logaritmo del módulo del error relativo de la solución $x(t)$, obtenido con 50 dígitos, calculado mediante (46), con dos Φ -funciones y tamaño de paso $h = 0,001$, comparado con los métodos de integración numérica Newmark β -método con $\delta = 1/2$, $\alpha = 1/4$, $h = 0,001$ y Wilson θ -método con $\delta = 1/2$, $\alpha = 1/6$, $\theta = 1,4$, $h = 0,001$. Se obtienen resultados análogos para la velocidad $\dot{x}(t)$.

En la Figura 10 se pone de manifiesto el buen comportamiento y precisión del método de series de Φ -funciones, con tamaño de paso 0.9 y 100 dígitos.

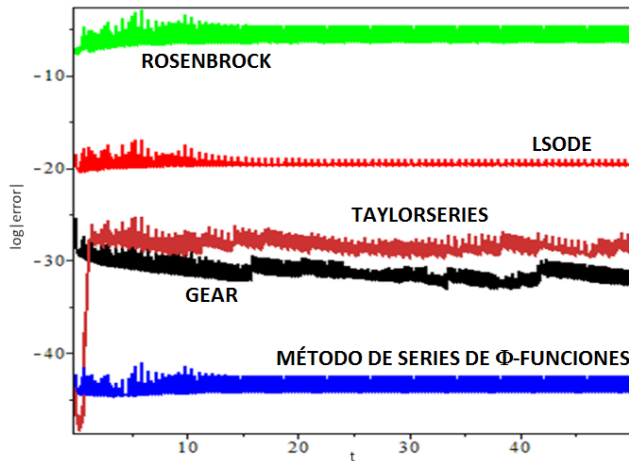


Figura 8. Logaritmo decimal del módulo del error relativo de la solución $u(t)$ del 2DOF.

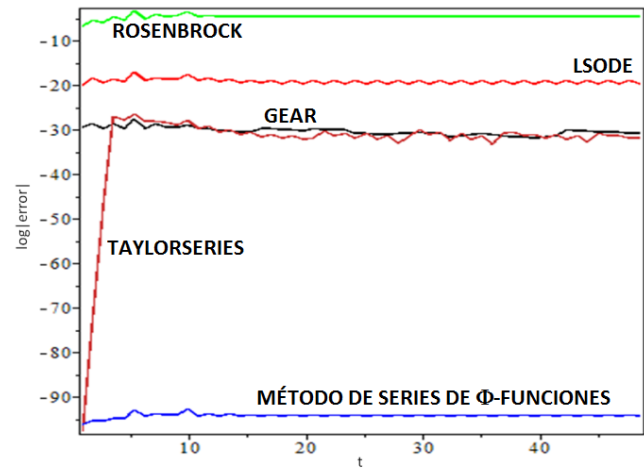


Figura 10. Logaritmo decimal del módulo del error relativo de la solución $u(t)$ de un 2DOF.

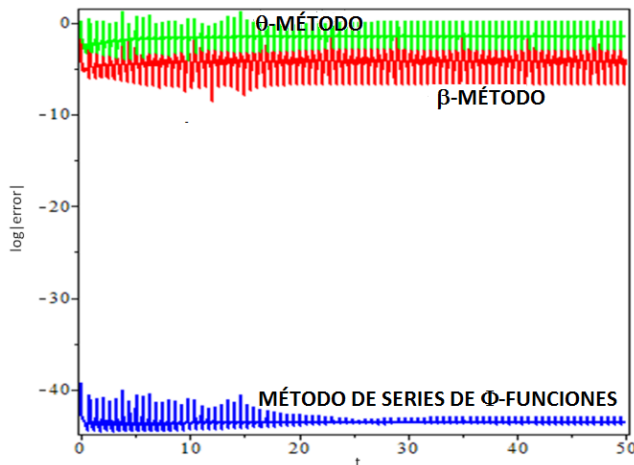


Figura 9. Logaritmo decimal del módulo del error relativo de la posición $x(t)$.

5. Conclusiones

En el presente trabajo se muestra una aplicación del método de series de Φ -funciones a un problema oscilatorio de una órbita cuasiperiódica en el plano complejo, así como al análisis de la respuesta de dos estructuras, modeladas mediante un SDOF y 2DOF, frente a un terremoto.

El algoritmo integra el problema perturbado, con las dos primeras Φ -funciones, sin error de truncamiento, después de su transformación en un problema no perturbado de segundo orden, mediante la aplicación de un operador diferencial adecuado.

El método funciona con precisión con tamaños de paso grandes y pequeños. La precisión y la eficiencia del método de series Φ -funciones se contrasta con los resultados obtenidos por otros integradores bien conocidos, tales como: LODE, Rosenbrock, Gear, Taylorseries, Newmark β -método y Wilson θ -método.

Referencias

- [1] ANDÚJAR R, ROSET J, KILAR V. (2011). Interdisciplinary approach to numerical methods for structural dynamics. World applied sciences journal; 14 (8): 1246-53.
- [2] CHOPRA AK. (2007). Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering. 3rd ed. Prentice-Hall - Upper Saddle River - NJ.
- [3] CHUNG J, HULBERT, GM. (1994). A family of single-step Houbolt time integration algorithms for structural dynamics. Computer Methods Applied Mechanics and Engineering; 118: 1-11.
- [4] GARCÍA-ALONSO F, REYES JA, FERRÁNDIZ JM, VIGO-AGUIAR J. (2009). Accurate numerical Integration of perturbed oscillatory Systems in two frequencies. Transactions on Mathematical Software TOMS; 36 (4): article 21.
- [5] GARCÍA-ALONSO F, REYES JA. (2009). A new method for exact integration of some perturbed stiff linear systems of oscillatory type. Appl. Math. Comput.; 215: 2649-62.
- [6] GHOLAMPOUR A, GHASSEMIEH M. (2011). New implicit method for analysis of problems in nonlinear structural dynamics, Applied and computational mechanics; 5: 15-20.
- [7] GHOLAMPOUR A, GHASSEMIEH M. (2012). New practical approach to nonlinear dynamic analysis of structures: Refinement of Newmark's and Wilson's classical methods. Practice periodical on structural design and construction; 17: 30-34.
- [8] HART GC, WONG K. (1999). Structural dynamics for structural engineers. John Wiley & Sons, Inc.

- [9] MARTÍN P, FERRÁNDIZ JM. (1997). Multistep numerical methods based on Scheifele G-functions with application to satellite dynamics. *SIAM J. on Numerical Analysis*; 34: 359-75.
- [10] NEWMARK NM. (1959). A method of computation for structural dynamics. *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85, No. EM3.
- [11] RAMOS JJ. (2006). Piecewise-linearized methods for initial-value problems with oscillating solutions. *Applied Mathematics and Computation*; 181: 123-46.
- [12] REYES JA, GARCÍA-ALONSO F, FERRÁNDIZ JM, VIGO-AGUIAR J. (2007). Numeric multistep variable methods for perturbed linear system integration. *Appl. Math. Comput.*; 190: 63-79.
- [13] REYES JA, GARCÍA-ALONSO F. (2012). Computational series and multistep methods to integrate forced and damped stiff oscillators. *The Open Applied Mathematics Journal*; 6: 9-22.
- [14] SCHEIFELE G. (1971). On numerical integration of perturbed linear oscillating systems. *ZAMP*; 22: 186-10.
- [15] SIMOS TE, VIGO-AGUIAR J. (2003). Exponentially fitted symplectic integrator. *Phys. Rev. E*; 67: 1-7.
- [16] STEFFENSEN JF. (1955a). On the differential equations of Hill in the theory of the motion of the moon. *Acta Math.*; 93: 169-77.
- [17] STEFFENSEN JF. (1955b). On the differential equations of Hill in the theory of the motion of the moon II. *Acta Math.*; 95: 25-37.
- [18] STIEFEL E, BETTIS DG. (1969). Stabilization of Cowells Method. *Numer. Math.*; 13: 154-75.
- [19] STIEFEL EL, SCHEIFELE G. (1971). *Linear and Regular Celestial Mechanics*. Berlin-Heldelberg - New York: Springer.
- [20] VAN DE VYVER H. (2006). Two-step hybrid methods adapted to the numerical integration of perturbed oscillators. *arXiv: math/0612637v1 [math.NA]*. 21.
- [21] VIGO-AGUIAR J, FERRÁNDIZ JM. (1998). A general procedure for the adaptation of multistep algorithms to the integration of oscillatory problems. *SIAM Journal Numerical Analysis*; 35(4): 1684-708.
- [22] WILSON EL. (1962). Dynamic response by step-by-step matrix analysis, 1-5 October 1962, Symposium on the use of computers in civil engineering, Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Portugal.
- [23] WILSON EL, FARHOOMAND I, BATHE KJ. (2007). Nonlinear dynamic analysis of complex structures, *Earthquake engineering and structural dynamics*; 1: 241-52.