

Resolución con el Método de Elementos Finitos del problema de cavidad con pared móvil.

Finite Element solution of the lid-driven cavity problem

Dayron Chang Dominguez^{1*}, José Enrique Alvarez Iglesias²

Resumen El problema “*lid-driven cavity*” (cavidad con tapa impulsada) es un problema de la física de los fluidos que se puede plantear como un sistema de ecuaciones de Stokes para fluidos incompresibles. Estas ecuaciones son clasificadas como elípticas. Es conocido que el método de elementos finitos es bien utilizado para la resolución de este tipo de ecuaciones. En el trabajo se deducirá la formulación débil de este problema, se mostrará su buen planteamiento y se presentará el algoritmo de Uzawa para su implementación en FreeFem++. Al final se presentan resultados obtenidos.

Abstract The “*lid-driven cavity*” problem is a fluids physics problem that can be modelled with Stokes equation system for incompressible fluids. These equations are of the elliptic type and is well known that for those equations the finite elements method is widely used to solve them. In this paper we deduce the weak formulation of the problem, we show the well-posedness of it and we give the implementation of the Uzawa algorithm in FreeFem++. At the end we present some results.

Palabras Clave

Elementos Finitos — Ecuaciones Diferenciales — Ecuaciones de Stokes — Física de los fluidos

¹ Centro de Meteorología Agrícola, Instituto de Meteorología de Cuba, La Habana, Cuba, dayron.chang@insmet.cu

² Departamento de Software, SIMPRO, La Habana, Cuba, ee2@mitsa.cu

Introduction

El problema “*lid-driven cavity*” (cavidad con tapa impulsada) es un problema derivado del problema clásico de Stokes para fluidos incompresibles con ciertas condiciones de frontera específica [8][6][11][3]. Se trata de una cavidad cuadrada llena de un fluido incompresible de viscosidad μ , por lo que se puede definir en un dominio $\Omega =]0, 1[^2$ para el campo de velocidad y la distribución de la presión en la cavidad (Figura 1).

La cavidad posee tres lados que son paredes no resbaladizas con componentes de velocidad $u_1 = u_2 = 0$ y el otro es una tapa con $u_1 = 1, u_2 = 0$. Dentro de la cavidad se crea un flujo parecido a un remolino y no existen fuerzas adicionales actuando. El objetivo es computar el campo de velocidad y la distribución de la presión en la cavidad.

En las siguientes secciones se planteará el sistema de ecuaciones de Stokes para modelar el problema “*lid-driven cavity*”. Luego se deduce su forma variacional llegando a su formulación débil. Se demuestra el buen planteamiento del problema de *punto de ensilladura* obtenido y se aplica el método de elementos finitos mostrando además el algoritmo de Uzawa como una alternativa iterativa. Al final se exponen los resultados obtenidos por medio de la implementación en el software FreeFem++.

0.1 Lid-Driven Cavity como problema de Stokes

El sistema estacionario de Stokes modela el flujo de un fluido incompresible con poca velocidad. Sea Ω , un conjunto abierto de \mathbb{R}^d , el dominio que ocupa el fluido y g_D la adherencia a las fronteras (Si $g_D = 0$ implica que la velocidad es cero en la frontera) lo que impone condiciones de fronteras de Dirichlet. Bajo la acción de una fuerza $f(x) \in \mathbb{R}^d$ se consideran la velocidad $u(x)$ (vectorial) y la presión $p(x)$ (escalar) como las soluciones del problemas de valores de frontera:

$$(P_{Stokes}) \begin{cases} \nabla p - \mu \Delta u = f, & \Omega \\ \nabla \cdot u = 0, & \Omega \\ u = g_D, & \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

donde $\mu > 0$ es el parámetro de viscosidad del fluido. A la primera ecuación de (1) se le llama ecuación de conservación de *momentum* y a la segunda ecuación de conservación de masa que impone la condición de incompresibilidad al fluido.

El planteamiento del problema “*lid-driven cavity*” se diferencia de (1) solamente en que se suprime la función f y en la definición de la función g_D de acuerdo al comportamiento de los valores de la frontera.

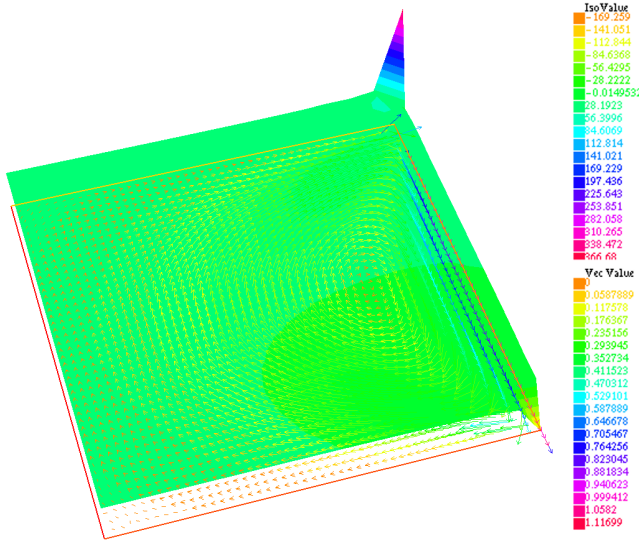


Figura 1. La gráfica muestra el campo de velocidades y distribución de la presión correspondiente a la solución del problema “lid-driven cavity” corrida con FreeFem++ [7].

Sean $\Omega =]0, 1[^2$ y $\Gamma :=]0, 1[\times \{0\}$, entonces

$$(P_{LDC0}) \begin{cases} \nabla p - \mu \Delta u = 0, & \Omega \\ \nabla \cdot u = 0, & \Omega \\ u = g_D, & \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

siendo

$$g_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{Si } x \in \Gamma, \\ 1, & \text{Si } x \in \partial\Omega \setminus \Gamma. \end{cases} \quad (3)$$

1. Análisis del problema P_{LDC0}

El inconveniente que tiene el problema “lid-driven cavity” radica en que las condiciones de frontera impuestas no son regulares. Precisamente la definición de g_D indica que en la coordenada $(0,0)$ exista una discontinuidad por salto del valor 0 al valor 1 al igual que en la coordenada $(0,1)$ del valor 1 a 0. los cuales significan singularidades importantes.

Tales saltos provocan que el gradiente de u tenga un comportamiento singular de forma local (Figura 2). Por tanto para poder solucionar el problema P_{LDC0} es necesario realizar un tratamiento numérico a las condiciones de frontera para manejar estas singularidades correctamente.

Como consecuencia, la condición de frontera de Dirichlet g_D no pertenece al espacio $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ luego no existe una función $lift$ asociada a las condiciones de frontera que pertenezca a $H^1(\Omega)$. Si R_0 se define como el operador $lift$ entonces $\nexists u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$R_0 u = g_D \quad (4)$$

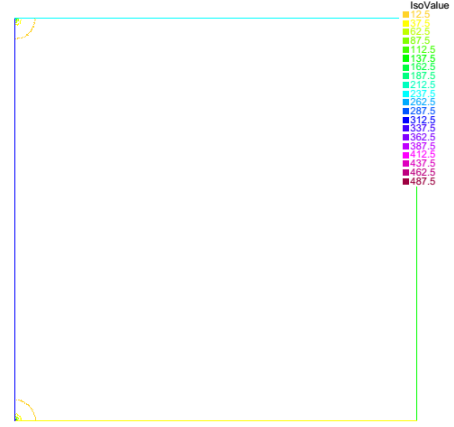


Figura 2. La gráfica muestra el valor de $\|\nabla u\|_{L^2}$ donde se aprecian las singularidades provocadas por la no regularidad de las condiciones de frontera.

o sea, no existe función $u \in H^1(\Omega)$ tal que g_D sea el operador traza (*trace*) sobre la frontera.

Por tal motivo la solución resultante del método de elementos finitos converge a valores que no pertenecen a $H^1(\Omega)$ y el problema P_{LDC0} no admite soluciones en $H^1(\Omega)$ a pesar de que el problema discreto se encuentra bien planteado.

1.1 Formulación variacional

La formulación variacional tiene como objetivo obtener otro planteamiento del mismo problema que reduzca las exigencias del planteamiento original. A la formulación del problema original se le llama **formulación fuerte** y a la formulación variacional se le llama **formulación débil**. En el caso del problema de Stokes la formulación variacional permite trabajar con funciones de clase C^1 en vez de funciones de clase C^2 .

Para tratar las condiciones de frontera en “lid-driven cavity” se cambian las condiciones de frontera de Dirichlet por las condiciones de frontera mixtas de Robin. El problema se puede replantear como

$$(P_{LDCe}) \begin{cases} \nabla p - \mu \Delta u = 0, & \Omega \\ \nabla \cdot u = 0, & \Omega \\ -p \vec{n} + \nabla u \cdot \vec{n} + \frac{1}{e} u = \frac{1}{e} g_D, & \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

diferenciándose del problema (3) en la ecuación que impone las condiciones de frontera donde e es un número positivo pequeño. De la misma se puede apreciar como $-pI + \nabla u$ modela el flujo total y si se le multiplica por la normal $(-p \vec{n} + \nabla u \cdot \vec{n})$ se tiene el flujo normal en la frontera.

Cuando se imponen condiciones de frontera de Neumann solamente, se obliga al modelo a que la velocidad de los flujos sea cero en la frontera mientras que imponer condiciones de Dirichlet solamente, prefijan los valores del campo de velocidades en la frontera. Las condiciones de Robin son mixtas

precisamente porque por medio de ellas se puede balancear los dos tipos mencionados por medio del parámetro $\frac{1}{e}$.

Hay que señalar que el término $-p\vec{n}$ fue agregado de manera conveniente. En efecto, cuando se deriva la forma variacional de P_{LDCe} , sin considerar el término $-p\vec{n}$, se obtiene un término integral definido sobre la frontera el cual no puede ser controlado impidiendo que el problema esté bien planteado. Haciendo esta agregación se logra cancelar el referido término y se obtiene una forma variacional bien planteada.

Para obtener la formulación débil de este problema se multiplica la ecuación de *momentum* por una función v que pertenece a un cierto espacio de prueba y la ecuación de incompresibilidad del fluido por otra función de prueba q en otro espacio. De la correcta elección de estos espacios depende que la formulación variacional esté bien planteada (que exista solución única (u, p) y esta dependa continuamente de los datos del problema).

1.2 Espacios de funciones

Seguidamente se definen los espacios de funciones sobre los que se trabajará posteriormente y algunas de sus propiedades. Los espacios de funciones para la velocidad y la presión son los siguientes:

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : \Omega \in \mathbb{R}^d\} \quad (6)$$

$$Q = \{q \in L_0^2(\Omega) : \Omega \in \mathbb{R}^d\} \quad (7)$$

Es escogido el espacio H^1 para la función de prueba v lo cual ayudará a demostrar el buen planteamiento del problema.

Para el caso de la presión p , esta se encuentra presente en la ecuación de *momentum* solo como ∇p . Esto tiene el inconveniente de que si a cualquier solución obtenida p se le agrega una constante entonces el resultado también será una solución válida por lo que se pierde la unicidad.

Por esta razón se le ha impuesto la restricción de valor de media cero ($1/|\Omega| \int_{\Omega} p = 0$) utilizando el espacio $L_0^2(\Omega)$ en vez de $L^2(\Omega)$ lo cual garantiza la unicidad de la solución.

1.3 Forma débil para el problema P_{LDCe}

Tomemos la ecuación de momentum $\nabla p - \mu \Delta u = 0$ y multiplicándola por una función $v \in V$ se obtiene:

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot v - \mu \int_{\Omega} \Delta u \cdot v = 0 \quad (8)$$

Para la integración por partes del término $\int_{\Omega} \Delta u \cdot v$ se utilizó la fórmula de Green.

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \vec{n}) v \quad (9)$$

donde $\nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^d \nabla u_i \cdot \nabla v_i$ y \vec{n} es el vector normal unitario. Para la integración por partes del término $\int_{\Omega} \nabla p \cdot v$ se utilizó la fórmula de Stokes [1] quedando

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot v = - \int_{\Omega} (\nabla \cdot v) p + \int_{\partial\Omega} (p \cdot \vec{n}) v \quad (10)$$

La forma débil de la ecuación de momentum queda

$$\int_{\partial\Omega} (v \cdot \vec{n}) p - \int_{\Omega} (\nabla \cdot v) p \quad (11)$$

$$+ \mu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \vec{n}) v = 0 \quad (12)$$

La ecuación de incompresibilidad es multiplicada por una $q \in Q$ e integrada

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot u) q = 0 \quad (13)$$

En cuanto a las condiciones de frontera, estas también son multiplicadas por la función de prueba $v \in V$ e integradas:

$$- \int_{\partial\Omega} (p \cdot \vec{n}) v + \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n) v + \frac{1}{e} \int_{\partial\Omega} uv = \frac{1}{e} \int_{\partial\Omega} g_D v \quad (14)$$

En la ecuación de *momentum* se tenía el inconveniente de que el término $\int_{\partial\Omega} (v \cdot \vec{n}) p$ no podía ser controlado. Gracias a que se agregó el término $-p\vec{n}$ a las condiciones de frontera, luego de obtener su forma variacional se obtuvo el término $-\int_{\partial\Omega} (p \cdot \vec{n}) v$ el cual se anula con el de la ecuación de *momentum*.

Entonces sumando (11)-(12) con (14) se obtiene:

$$\mu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v - \int_{\Omega} (\nabla \cdot v) p + \frac{1}{e} \int_{\partial\Omega} uv = \frac{1}{e} \int_{\partial\Omega} g_D v \quad (15)$$

Luego de haber realizado el análisis anterior se puede escribir la forma variacional del problema P_{LDCe} como

Encontrar $u \in V$ y $p \in Q$ tal que:

$$\begin{cases} \mu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v - \int_{\Omega} (\nabla \cdot v) p + \frac{1}{e} \int_{\partial\Omega} uv = \frac{1}{e} \int_{\partial\Omega} g_D v, & v \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) q = 0, & q \in L_0^2(\Omega) \end{cases}$$

También se puede plantear el problema como formas lineales y bilineales:

Encontrar $u \in V$ y $p \in Q$ tal que:

$$\begin{cases} \mu a(u, v) + b(v, p) + c(u, v) = l(g_D, v), & \forall v \in V \\ b(u, q) = 0, & \forall q \in Q \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \\ b(u, q) = \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) q \\ c(u, v) = \frac{1}{e} \int_{\partial\Omega} uv \\ l(g_D, v) = \frac{1}{e} \int_{\partial\Omega} g_D v \end{cases}$$

También se puede resumir en dos formas variacionales grandes:

encontrar $(u, p) \in V \times Q$ tal que:

$$\{ B((u, p), (v, q)) = F((g_D, v)), \forall (v, p) \in V \times Q$$

con las formas bilineales

$$\begin{cases} B((u, p), (v, q)) = \mu a(u, v) + b(v, p) + b(u, q) + c(u, v) \\ F((g_D, v)) = l(g_D, v) \end{cases}$$

La próxima sección presentará una demostración del buen planteamiento de la formulación del problema P_{LDCe} .

2. Buen planteamiento del problema

Este tipo de planteamiento es llamado punto de ensilladura (*saddle point problem*). Normalmente no es posible emplear el teorema de Lax-Milgram ([9], lema 7.3) de forma general para demostrar el buen planteamiento de este.

Esto es debido a que la forma bilineal $b(v, p)$ no puede ser coerciva debido a que v y p pertenecen a espacios diferentes. Este es un problema típico de los problemas de punto de ensilladura.

A pesar de que el teorema de Lax-Milgram no se puede aplicar para toda la fórmula, se puede aplicar a las formas $a(u, v)$, $c(u, v)$ y $l(g_D, v)$ cuyas variables pertenecen al espacio V .

Continuidad de la forma lineal $l(g_D, v)$

Teorema 1 (*Desigualdad del operador Traza*). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio con una frontera $\partial\Omega$ poligonal suave o poligonal. Entonces existe una constante $C = C(\Omega)$ tal que para cualquier $v \in V$,

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \quad (16)$$

Primeramente se demostrará que la forma lineal $l(g_D, v)$ es continua, lo cual es posible demostrar utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, luego la desigualdad del operador Traza (Teorema 1) y finalmente la desigualdad de Poincaré.

$$l(g_D, v)_{L^2(\partial\Omega)} = l(g_D, v)_{L^2(\partial\Omega)} \quad (17)$$

$$\leq \|g_D\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \quad (18)$$

$$\leq C_1 \|g_D\|_{L^2(\partial\Omega)} \left(\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad (19)$$

$$\leq C_2 \|g_D\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad (20)$$

$$\leq C_2 \|g_D\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (21)$$

$$= C_3 \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (22)$$

Continuidad y coercividad de la forma bilineal $A(u, v)$

Para demostrar la continuidad y coercividad de las formas bilineales $a(u, v)$ y $c(u, v)$ se definió una nueva gran forma bilineal

$$A(u, v) = a(u, v) + \frac{1}{e} c(u, v) \quad (23)$$

la cual es la suma de ambas. De hecho esta forma es un producto escalar sobre $H^1(\Omega)$.

Proposición 1 *La forma bilineal $A(u, v)$ es un producto escalar sobre V .*

Demostración 1 *Para todo $x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ la forma bilineal $A(u, v) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ cumple con:*

1. $(A(u, u) \geq 0 \text{ y } A(u, u) = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0)$. Se puede apreciar fácilmente que $A(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{e} \int_{\partial\Omega} |u|^2 \geq 0$. Si $A(u, u) = 0$ entonces, dado $a(u, v)$ se tiene que u está obligado a ser una constante por el término ∇u y como $c(u, v) \in L_0^2(\partial\Omega)$ se obtiene que u además tiene que ser 0.

2. $(A(u, v) = \overline{A(v, u)})$. Haciendo uso de las propiedades de la integral:

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{e} \int_{\partial\Omega} uv \\ &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + \frac{1}{e} \int_{\partial\Omega} vu \\ &= A(v, u) = \overline{A(v, u)} \end{aligned}$$

3. $(A(\alpha u, v) = \alpha A(u, v))$.

$$\begin{aligned} A(\alpha u, v) &= \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla v + \frac{1}{e} \int_{\partial\Omega} \alpha uv \\ &= \alpha \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \frac{\alpha}{e} \int_{\partial\Omega} uv \\ &= \alpha \left(a(u, v) + \frac{1}{e} c(u, v) \right) \\ &= \alpha A(u, v) \end{aligned}$$

4. $(A(u + v, z) = A(u, z) + A(v, z))$

$$\begin{aligned} A(u + v, z) &= \int_{\Omega} \nabla(u + v) \cdot \nabla z + \frac{1}{e} \int_{\partial\Omega} (u + v)z \\ &= \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla z + \nabla v \cdot \nabla z] + \frac{1}{e} \int_{\partial\Omega} uz + vz \\ &= \left[\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla z + \frac{1}{e} \int_{\partial\Omega} uz \right] \\ &\quad + \left[\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla z + \frac{1}{e} \int_{\partial\Omega} vz \right] \\ &= A(u, z) + A(v, z) \end{aligned}$$

Entonces el espacio V puede ser equipado con el producto interno $A(u, v)$ según la proposición 1. Como consecuencia de esto se tiene la norma:

$$\|v\|_V = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \frac{1}{e} \int_{\partial\Omega} |u|^2 \right)^{1/2} \quad (24)$$

La elección de esta norma es conveniente para demostrar que la forma bilineal $A(u, v)$ es continua y coerciva.

$A(u, v)$ es continua si existe $\lambda > 0$ tal que

$$|A(u, v)| \leq \lambda \|u\|_V \|v\|_V, \forall u, v \in V \quad (25)$$

pero esta es precisamente la aplicación de la desigualdad de Cauchy-Schwarz a $A(u, v)$ por lo que se satisface la condición de continuidad.

Para que $A(u, v)$ sea coerciva (elíptica) tiene que existir $\sigma > 0$ tal que

$$A(u, u) \geq \sigma \|u\|_V^2, \forall u \in V \quad (26)$$

precisamente $A(u, u) = \|u\|_V^2$ por lo que la condición de coercividad se satisface para $\sigma = 1$.

Aplicación del teorema de Lax-Milgram

Siendo V un espacio de Hilbert y habiendo demostrado la continuidad y coercividad de la forma bilineal $A(u, v)$ y la continuidad de la forma lineal $l(g_D, v)$ entonces se cumplen las hipótesis del teorema de Lax-Milgram (teorema 2) por medio del cual se demuestra la existencia y unicidad de la solución para el campo de velocidades u .

Teorema 2 (Teorema de Lax-Milgram). Sea \mathbb{H} un espacio de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal y $l(\cdot)$ una forma lineal sobre \mathbb{H} . Asumiendo que $a(\cdot, \cdot)$ es continua y coerciva, y $l(\cdot)$ continua, entonces el problema abstracto

Encontrar $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H \quad (27)$$

admite una solución única.

La forma bilineal $b(v, p)$ y la condición *Inf-Sup*

Como ya se ha referido anteriormente, la forma bilineal $b(v, p)$ no puede ser coerciva por lo que no se puede aplicar el teorema de Lax-Milgram para demostrar su buen planteamiento. Por tal motivo es necesario recurrir a otro recurso matemático, la condición de Babuška-Brezzi o Ladyshenskaya-Babuška-Brezzi conocido como condición *Inf-Sup*.

Esta condición para nuestro problema se escribe:

$$\sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} p(\nabla \cdot v)}{\|v\|_{H^1}} \geq \beta \|p\|_{L^2}, \quad \forall p \in L_0^2(\Omega) \quad (28)$$

La demostración de esta condición tiene un alto nivel técnico por lo que este artículo solamente dará la idea de la demostración y referencias para aquellos que necesiten profundizar en los detalles. La idea es utilizar el siguiente lema como base de la demostración sustituyendo el espacio $H_0^1(\Omega)$ por el espacio en el que estamos trabajando $V \equiv H^1(\Omega)$. Este lema se deriva de uno más general y ambos pueden ser encontrados en [4] y [5] respectivamente.

De esta manera se ha mostrado que el problema P_{LDCe} se encuentra bien planteado al utilizar condiciones de frontera de Robin. Precisamente esta es la forma en la que el software FreeFem++ enfrenta cualquier problema que tenga condiciones de frontera de Dirichlet, sean problemas homogéneos o no-homogéneos. El software considera que todos los nodos en la frontera no están prescritos y para el caso en que $u = g_D$ ($g_D \notin H^{1/2}(\partial\Omega)$) entonces se considera la condición de Robin con un ϵ bien pequeño como se ha explicado para el problema que nos ocupa.

Este es el conocido método de penalizaciones que imita las condiciones de Dirichlet. En el próximo capítulo se

presentará el método de elementos finitos para el problema P_{LDC0} usando FreeFem++ el cual, por medio del método de las penalizaciones, será capaz de computar la solución de este problema no-homogéneo.

3. Aproximación de elementos finitos

Con el objetivo de formular un método numérico para P_{LDC0} vamos a considerar V_h y Q_h dos espacios de polinomios que aproximan V y Q . Entonces podemos considerar la siguiente aproximación de (1.3);

Encontrar $u_h \in V_h$ y $p_h \in Q_h$ tal que

$$\begin{aligned} \mu a(u_h, v) + b(v, p_h) &= 0, & \forall v \in V_h \\ b(u_h, q) &= 0, & \forall q \in Q_h \end{aligned} \quad (29)$$

3.1 Representación matricial

Si tomamos los conjuntos de funciones $\{\varphi_i\}_1^n$ y $\{\chi_i\}_1^m$ como bases para V_h y Q_h respectivamente e $i = 1, \dots, n$; entonces podemos representar

$$u_h = \sum_{j=1}^n \xi_j \varphi_j \quad (30)$$

$$p_h = \sum_{j=1}^m \eta_j \chi_j \quad (31)$$

Sustituyendo en $a(\cdot, \cdot)$:

$$a(u_h, v) = \int_{\Omega} \nabla u_h(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad (32)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla u_h(x) \cdot \nabla \varphi_i(x) dx \quad (33)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{j=1}^n \xi_j \varphi_j(x) \right) \cdot \nabla \varphi_i(x) dx \quad (34)$$

$$= \sum_{j=1}^n \xi_j \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi_j(x) \cdot \nabla \varphi_i(x) dx \right) \quad (35)$$

$$= \sum_{j=1}^n \xi_j a(\varphi_j, \varphi_i) \quad (36)$$

La representación matricial es:

$$a(u_h, v) = A \xi \quad (37)$$

tal que $A_{i,j} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ ($i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, n$) y ξ un vector con variables incógnitas de $n \times 1$. Si realizamos el

mismo análisis para $b(v, p_h)$:

$$b(v, p_h) = \int_{\Omega} \nabla \cdot v(x) p_h(x) dx \quad (38)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla \cdot \varphi_i(x) p_h(x) dx \quad (39)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla \cdot \varphi_i(x) \left(\sum_{j=1}^m \eta_j \chi_j(x) \right) dx \quad (40)$$

$$= \sum_{j=1}^m \eta_j \left(\int_{\Omega} \nabla \cdot \varphi_i(x) \chi_j(x) dx \right) \quad (41)$$

$$= \sum_{j=1}^m \eta_j b(\varphi_i, \chi_j) \quad (42)$$

Quedando la siguiente expresión

$$b(v, p_h) = B\eta \quad (43)$$

donde $B_{ij} = b(\varphi_i, \chi_j)$ ($i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, n$) y η es un vector con variables incógnitas $n \times 1$.

Si realizamos el mismo análisis para $b(u_h, q)$ con $j=1, \dots, m$:

$$b(u_h, q) = \int_{\Omega} \nabla \cdot u_h(x) q(x) dx \quad (44)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla \cdot u_h(x) \chi_j(x) dx \quad (45)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \varphi_i(x) \right) \chi_j(x) dx \quad (46)$$

$$= \sum_{i=1}^n \xi_i \left(\int_{\Omega} \nabla \cdot \varphi_i(x) \chi_j(x) dx \right) \quad (47)$$

$$= \sum_{i=1}^n \xi_i b(\varphi_i, \chi_j) \quad (48)$$

Quedando la siguiente expresión:

$$b(u_h, q) = B\xi \quad (49)$$

donde $B_{ij} = b(\varphi_i, \chi_j)$ ($i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, n$) y ξ un vector de variables incógnitas $n \times 1$.

El sistema queda compuesto como sigue:

$$\mu A \xi + B\eta = 0 \quad (50)$$

$$B\xi = 0 \quad (51)$$

si tenemos en cuenta que $u_h = [u_1, u_2]$ es una función vectorial, debemos considerar la resolución de u_1 y u_2 por separado [10], o sea,

$$\mu A \xi_1 + B_1^T \eta = 0 \quad (52)$$

$$\mu A \xi_2 + B_2^T \eta = 0 \quad (53)$$

$$B_1 \xi_1 + B_2 \xi_2 = 0 \quad (54)$$

donde $\xi = \xi_1 + \xi_2$ y $B = B_1 + B_2$.

Algorithm 1: Algoritmo de Uzawa para “lid-driven cavity”

```

1 Inicializar  $\xi^{(0)} = \psi^{(0)}$ ;
2 Seleccionar un parámetro de relajación  $\tau > 0$ , y un
  preconditionador  $M$  para el complemento de Schur
   $S = BA^{-1}B^T$ ;
3 for  $k=1, 2, \dots$  hasta que converja do
4   Solucionar:  $\mu A \xi_1^{(k)} = B_1^T \psi^{(k-1)}$ ;
5   Solucionar:  $\mu A \xi_2^{(k)} = B_2^T \psi^{(k-1)}$ ;
6   Solucionar:  $\psi^{(k)} = \psi^{(k-1)} + \tau M(B_1 \xi_1^{(k)} + B_2 \xi_2^{(k)})$ ;
7 end
```

3.2 Algoritmo iterativo de Uzawa

El algoritmo de Uzawa [7] [2] es el resultado de aplicar las formulas (52-54) como se muestra en el algoritmo 1:

4. Resultados

Se llevaron a cabo 8 experimentos en los cuales se resuelve el problema “lid-driven cavity” utilizando la implementación matricial y la del algoritmo de Uzawa con $M = I$ y el método del gradiente conjugado para estimar los valores de τ . Se probaron las diferentes aproximaciones de elementos finitos usando $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_0$, $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_1 b - \mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$ en cada caso. Las pruebas que se muestran en Figura 3 no son aproximaciones inf-sup estables por lo que el campo de velocidades (gráficas a la izquierda) obtenido no es representativo de la circulación del fluido dentro de la cavidad y la distribución de la presión (gráficas a la derecha) tampoco es correcta.

En cambio las que se muestran en Figura 4 si cumplen la condición inf-sup de estabilidad por lo que sí se obtienen buenas aproximaciones del campo de velocidades (gráficas a la izquierda) del fluido dentro de la cavidad y de la distribución de la presión (gráficas a la derecha).

Las gráficas contenidas en la Figura 5 son obtenidas por la aplicación del algoritmo de Uzawa y no son aproximaciones inf-sup estables por lo que los resultados obtenidos para el campo de velocidades (gráficas a la izquierda) del fluido y la distribución de la presión (Gráficas a la derecha) no son buenos.

Por otra parte las mostradas en Figura 6 si lo son por lo que dan buenos resultados en el campo de velocidades (gráficas a la izquierda) y en la distribución de la presión (Gráficas a la derecha).

4.1 Implementación en FreeFem++

FreeFem++ es un ambiente de desarrollo integrado para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para dos y tres dimensiones. Es una herramienta muy útil para aplicar el método de elementos finitos y crear aplicaciones complejas de forma relativamente rápida.

Este software consta de un avanzado generador automático de mallas. Contiene implementaciones de algoritmos eficien-

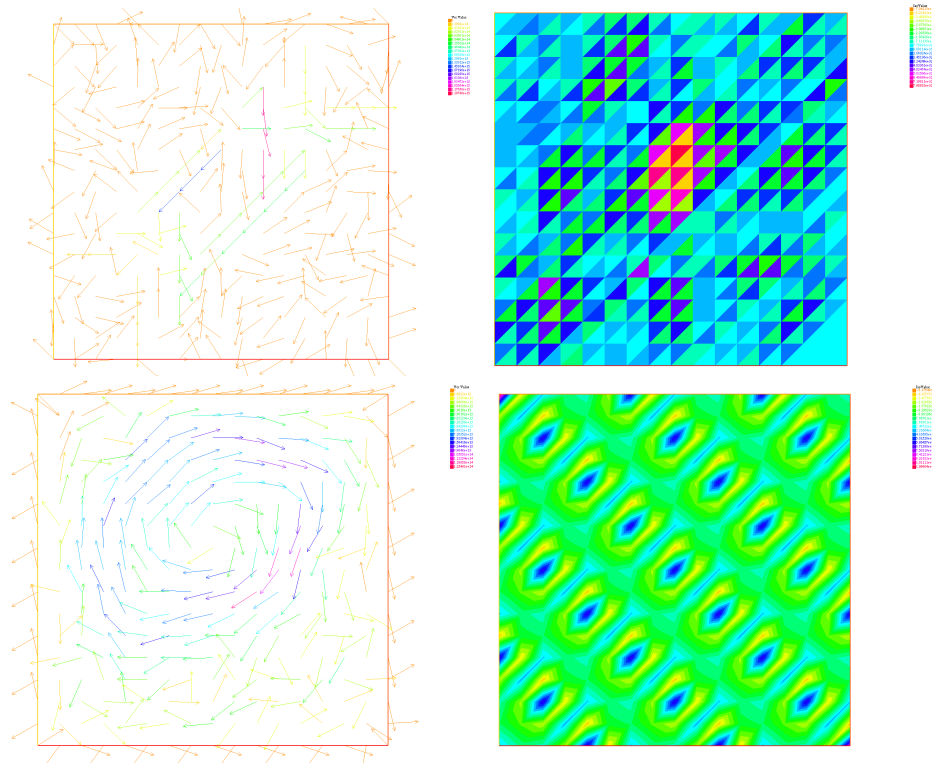


Figura 3. En las gráficas se muestra la resolución del problema “*lid-driven cavity*” con una implementación matricial clásica, para una malla de elementos cuadrada de 16×16 con las aproximaciones $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_0$ y $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$.

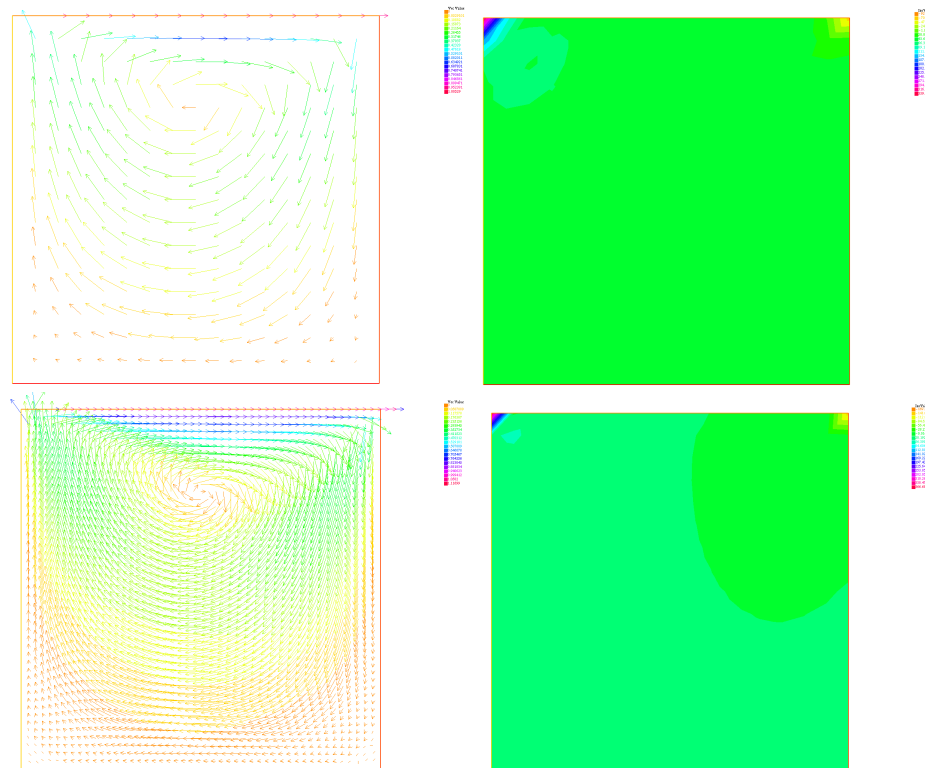


Figura 4. En las gráficas se muestra la resolución del problema “*lid-driven cavity*” con una implementación matricial clásica, para una malla de elementos cuadrada de 16×16 con las aproximaciones $\mathbb{P}_1 b - \mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$.

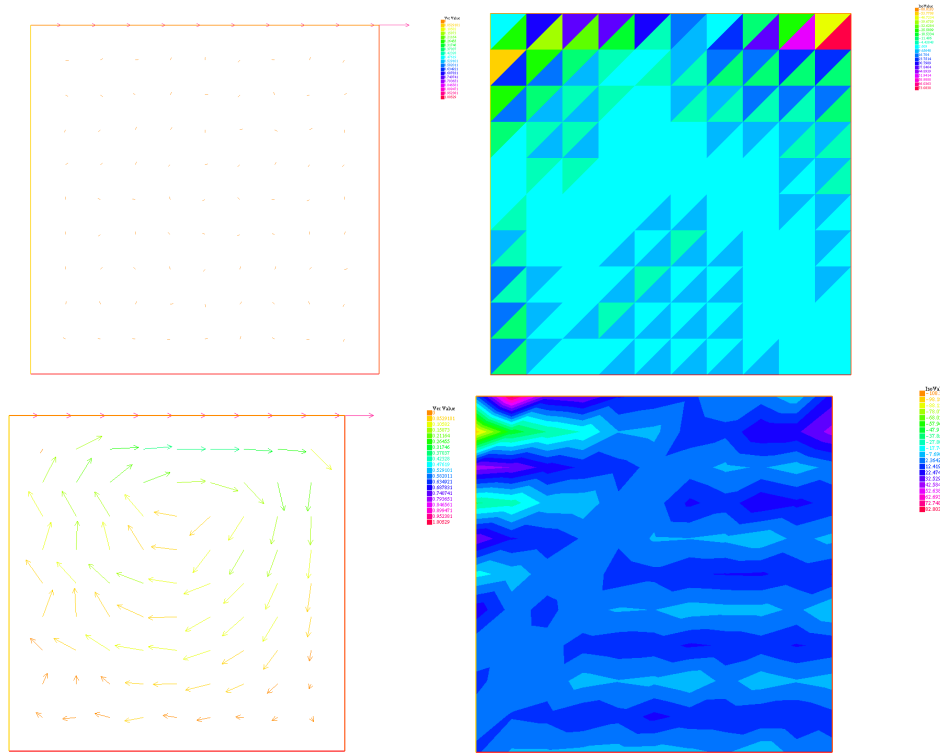


Figura 5. En las gráficas se muestra la resolución del problema “*lid-driven cavity*” con la implementación del método iterativo de Uzawa, para una malla de elementos cuadrada de 16×16 con las aproximaciones $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_0$ y $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$.

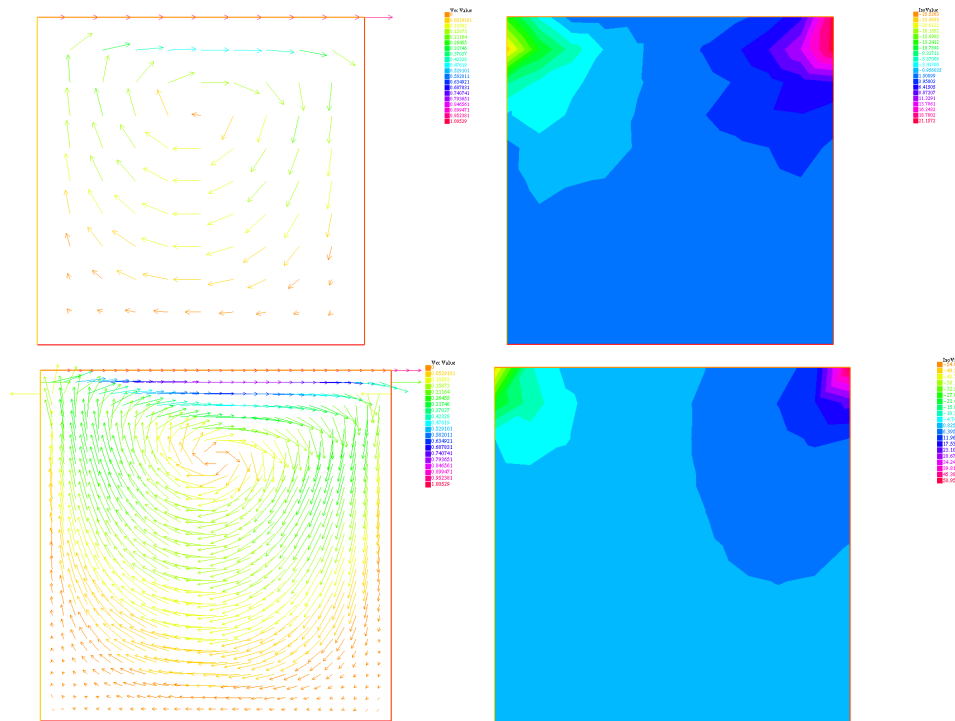


Figura 6. En las gráficas se muestra la resolución del problema “*lid-driven cavity*” con la implementación del método iterativo de Uzawa, para una malla de elementos cuadrada de 16×16 con las aproximaciones $\mathbb{P}_1b - \mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$.

tes como UMFPACK y SuperLU para problemas elípticos. Para hiperbólicos y parabólicos utiliza algoritmos iterativos predefinidos por el usuario usando el lenguaje propio de FreeFem++.

Los siguientes códigos corresponden a las dos implementaciones del problema “*lid-driven cavity*” presentadas en este trabajo. Ambas desarrolladas sobre este software utilizando el lenguaje FreeFem++. Las gráficas de las salidas de los campos de velocidades y la distribución de la presión son generadas por la propia herramienta.

Código FreeFem++ corresponde a la solución del problema “*lid-driven cavity*” utilizando su forma matricial clásica:

```

mesh Th=square(16,16);
fespace Xh(Th,P2);
fespace Mh(Th,P1);
Xh u2,v2;
Xh u1,v1;
Mh p,q;

solve Stokes ([u1,u2,p],[v1,v2,q]) =
  int2d(Th)((dx(u1)*dx(v1)+ dy(u1)*dy(v1))
    + dx(u2)*dx(v2)+ dy(u2)*dy(v2))
    + p*dx(v1)+ p*dy(v2)
    + dx(u1)*q+ dy(u2)*q)
  + on(3,u1=1,u2=0)
  + on(1,2,4,u1=0,u2=0);

plot([u1,u2],value=1,wait=2,ArrowSize=0.5);
plot(p,wait=1,fill=1,value=1);

Código FreeFem++ correspondiente a la solución del problema “lid-driven cavity” utilizando el algoritmo de Uzawa:

mesh Th=square(16,16);
fespace Xh(Th,P2),Mh(Th,P1);
Xh u1,u2,v1,v2;
Mh p,q,ppp;

varf bx(u1,q) = int2d(Th)((dx(u1)*q));
varf by(u1,q) = int2d(Th)((dy(u1)*q));

varf a(u1,u2)=
  int2d(Th)(dx(u1)*dx(u2) + dy(u1)*dy(u2))
    + on(1,2,4,u1=0)
    + on(3,u1=1);

Xh bc1; bc1[] = a(0,Xh);
Xh b;

matrix A= a(Xh,Xh,solver=CG);
matrix Bx= bx(Xh,Mh);
matrix By= by(Xh,Mh);
Xh bcx=1,bcy=0;
```

```

func real[int] divup(real[int] & pp)
{
  int verb=verbosity;
  verbosity=0;
  b[] = Bx'*pp; b[] += bc1[] .*bcx[];
  u1[] = A^-1*b[];
  b[] = By'*pp; b[] += bc1[] .*bcy[];
  u2[] = A^-1*b[];
  ppp[] = Bx*u1[];
  ppp[] += By*u2[];
  verbosity=verb;
  return ppp[];
};
p=0;q=0;u1=0;v1=0;
```

```
LinearCG(divup,p[],q[],eps=1.e-6,nbiter=300);
```

```
divup(p[]);
```

```
plot([u1,u2],wait=1,value=true,ArrowSize=0.5);
plot(p,wait=1,value=true,fill=1);
```

5. Conclusiones

En el trabajo se presenta una forma variacional del problema de Stokes para la modelación de fluidos incompresibles la cual es a su vez un modelo físico-matemático para el problema “*lid-driven cavity*”. Se dedujo la forma variacional de este problema y se mostró el buen planteamiento del mismo. Además se brindaron dos alternativas de implementación usando el método de elementos finitos y el algoritmo de Uzawa donde se evidenció la necesidad de que sus aproximaciones cumplan con la condición inf-sup de estabilidad para obtener resultados coherentes. Al final se exponen sus códigos FreeFem++ y se grafican las salidas de ambos métodos para el campo de velocidades del fluido dentro de la cavidad y la distribución de la presión, para diferentes aproximaciones de elementos finitos.

Agradecimientos

Agradecemos al profesor Sébastien Martin (Université Paris Descartes, Laboratoire MAP5 CNRS-UMR 8145) y a la profesora Ángela León Mecías (Universidad de la Habana, Departamento de Matemática Aplicada) por el apoyo que han brindado como consultores de este trabajo.

Referencias

- [1] Grégoire Allaire. *Numerical Analysis and Optimization. An Introduction to Mathematical Modelling and Numerical Simulation*, chapter 3 Variational formulation of elliptic problems, page 70. Oxford University Press, 2007.

- [2] C Bacuta. A unified approach for uzawa algorithms. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 44(6):2633–2649, 2006.
- [3] A.S. Benjamin and V.E. Denny. On the convergence of numerical solutions for 2-d flows in a cavity at large re. *Journal of Computational Physics*, 33:340–358, 1979.
- [4] Franck Boyer and Pierre Fabrie. *Applied Mathematical Sciences*, volume 183, chapter 4, pages 251–252. Springer, 2013.
- [5] Franck Boyer and Pierre Fabrie. *Applied Mathematical Sciences*, volume 183, chapter 4, page 245. Springer, 2013.
- [6] O.R. Burggraf. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 24:113–151, 1966.
- [7] F. Hecht. *FreeFem++*, chapter 9, page 251. Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [8] M. Kawaguti. Numerical solution of the navier-stokes equations for the flow in a two-dimensional cavity. *Journal of the Physical Society of Japan*, 16:2307–2315, 1961.
- [9] F. Larson, M. G. Bengzon. *The finite element method: theory, implementation and applications*, chapter 7, pages 191–192. Springer, 2013.
- [10] F. Larson, M. G. Bengzon. *Texts in Computational Science and Engineering*, chapter Fluid Mechanics, page 308. Springer, 2013.
- [11] S.G. Rubin and P.K. Khosla. Polynomial interpolation methods for viscous flow calculations. *Journal of Computational Physics*, 24:217–244, 1977.