

Integración de osciladores perturbados mediante un esquema multipaso basado en una extensión de la serie de Taylor

Solution of a boundary problem Very Complex for hyperbolic equations: Case Zero Index

J. A. Reyes (jose.reyes@ua.es), F. García-Alonso (fernando.garcia@ua.es)

Escuela Politécnica Superior (E.P.S.), Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Alicante (España).

Agradecimientos

El presente trabajo se ha realizado con el apoyo del proyecto GRE09-13, de la Universidad de Alicante, y del proyecto GV/2011/032 de la Generalitat Valenciana.

Resumen

El método de series basado en G -funciones de Scheifele para la integración de osciladores armónicos forzados, presenta la buena propiedad de que si los términos de perturbación son eliminados, entonces el método numérico integra exactamente el correspondiente problema no perturbado. Este método de series es de gran precisión pero de difícil aplicación, debido a la complejidad de los cálculos previos necesarios la obtención de las recurrencias para computar los coeficientes. Con el objetivo de resolver esta dificultad, en este artículo se construye un nuevo esquema multipaso basado en el método series de G -funciones de Scheifele, de tipo VSVO. Para la obtención de algoritmos de orden variable se establecerá un procedimiento de cálculo, mediante matrices recurrentes, para computar los coeficientes del método. Este procedimiento se basa en la relación existente entre las diferencias divididas y las funciones simétricas elementales y completas. Se construyen tanto métodos explícitos como implícitos, así como un método predictor-corrector que integra exactamente el problema homogéneo. El buen comportamiento de los nuevos métodos se pone de manifiesto al aplicarlos a problemas *test*, de los que su solución analítica está calculada, lo que permite la obtención de los errores relativos de la posición así como de la velocidad. Aun siendo conocida su solución analítica, los problemas propuestos presentan dificultades en su integración numérica mediante códigos adaptados al cálculo de soluciones de este tipo de osciladores.

Abstract

The method of series based on the Scheifele G -functions for the integration of forced harmonic oscillators, presents the good property that if the terms of perturbation are eliminated, then the numerical method integrates exactly the corresponding unperturbed problem. This method is highly accurate but difficult to implement due to the complexity of the preliminary calculations needed to obtain the recurrence formulas to compute the coefficients. This problem is resolved in by converting the G -functions series method into a multistep scheme, VSVO type. To obtain variable order algorithms will establish a procedure for calculation, by recurrent matrix, to compute the coefficients of the method. This procedure is based on the relationship between the divided differences and the elementary and complete symmetrical functions. Explicit, implicit and predictor-corrector methods are introduced that generalize SMF ones, which integrate exactly the homogeneous problem. The good behaviour of the new methods is shows, when applied to test problems, with analytical solution known, allowing to obtain the relative errors of the position and the speed. While being known his analytical solution, this problems present difficulty in its numerical integration with the codes adapted to the calculation of solutions of this type of oscillators.

1. Introducción

La importancia de los osciladores armónicos perturbados en la modelización de problemas de la física, de la química, de la ingeniería, de la mecánica celeste, etc., se pone de manifiesto en (García-Alonso y Reyes, 2007), presentándose una familia de funciones, las G -funciones de Scheifele, y un método de series, basado en esas G -funciones. Así mismo se desarrollaban aplicaciones de este método de series para la integración de osciladores armónicos perturbados, que puede considerarse como una extensión de la serie de Taylor.

El tipo de integradores construidos, basados en series de G -funciones, tienen su origen en la resolución de problemas de mecánica celeste. En los últimos años, debido fundamentalmente a las mayores exigencias de los programas espaciales, ha ido ganando interés el cálculo preciso de órbitas de satélites artificiales y los geodestas necesitan precisiones subcentimétricas en el cálculo de la posición exacta del satélite artificial en un sistema de referencia inercial.

En los métodos de cálculo de órbitas resulta ventajoso sustituir las ecuaciones newtonianas del movimiento por otras mejor acondicionadas para su integración numérica. Las transformaciones de Kunstanheimo-Stiefel o Burdet-Ferrándiz reducen esas ecuaciones a osciladores perturbados del tipo $x''(t) + \alpha x(t) = \varepsilon f(x(t), x'(t), t)$, para los que el método está diseñado. Estos integradores son construidos para obtener precisión en la resolución de osciladores perturbados del tipo anteriormente descrito, más que para evolucionar a métodos de coeficientes variables.

Este método de series basado en G -funciones (Stiefel and Scheifele, 1971) (Scheifele, 1971), presenta la buena propiedad de que si los términos de perturbación son eliminados, entonces el método numérico integra exactamente el correspondiente problema no perturbado.

Dicho método de series es de gran precisión pero de difícil aplicación, debido a la complejidad de los cálculos previos necesarios en la obtención de las recurrencias se necesitan para computar los coeficientes del método. Estas recurrencias son específicas de cada uno de los problemas a los que se quiera aplicar el método de series.

Martín y Ferrándiz (1995), (1997), modifican el método de Scheifele convirtiéndolo en el esquema multipaso SMF, de orden fijo, que conservando las buenas propiedades del método de series de G -funciones, evita los cálculos previos que este requería.

En el presente artículo se construye un nuevo esquema multipaso, también basado en el método series de G -funciones de Scheifele, pero de paso y orden variable, es decir, del tipo VSVO. Este nuevo esquema multipaso conserva las buenas propiedades del método de series y generaliza los esquemas SMF.

A tal efecto, se aproximan las derivadas de la función de perturbación que aparecen en el método de series mediante diferencias divididas, junto con unos coeficientes $d_{i,j}$, elementos de una cierta matriz A_p^{-t} (Vigo-Aguilar and Ferrándiz, 1998) (García-Alonso, Reyes, Ferrándiz and Vigo-Aguilar, 2009), de los que no se conoce una relación de recurrencia entre ellos. Análogamente para el caso implícito, la matriz de la que se extraerán los nuevos coeficientes $d_{i,j}$, se denotará por B_p^t (Vigo-Aguilar and Ferrándiz, 1998) (García-Alonso, Reyes, Ferrándiz and Vigo-Aguilar, 2009a).

Para la obtención de algoritmos de orden variable se establecerá un método de cálculo recurrente para computar las matrices A_p^{-t} y B_p^t , que está basado en la relación existente entre las diferencias divididas y las funciones simétricas elementales y completas. Esta relación permite el cómputo de las matrices A_p^{-t} y B_p^t mediante las matrices recurrentes $S_{p,n}$, (Vigo-Aguilar, 1999) (García-Alonso, Reyes, Ferrándiz y Vigo-Aguilar, 2009a), para el método explícito y $S_{p,n+1}$ (Vigo-Aguilar, 1999) (García-Alonso, Reyes, Ferrándiz and Vigo-Aguilar, 2009a), para el método implícito.

Llegados a este punto, se construyen tanto métodos explícitos como implícitos y basados en ellos, un método predictor-corrector que integra exactamente el problema homogéneo y es posible implementar con facilidad en un computador.

El buen comportamiento de los nuevos métodos se pone de manifiesto al aplicarlos a problemas test, contrastando los resultados obtenidos frente a otros conocidos integradores numéricos.

2. Preliminares

Si $x(t)$ es la solución del oscilador armónico perturbado de ecuación:

$$\begin{aligned} x'' + \alpha x &= \varepsilon \cdot f(x, x', t), \\ x(0) &= x_0, x'(0) = x'_0 \end{aligned} \quad (1)$$

y se supone que la función $g(t) = f(x, x', t)$ admite un desarrollo de la forma: $g(t)$

$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$ con $c_n = g^{(n)}(0)$, el PVI (1), puede escribirse de la forma siguiente:

$$x'' + \alpha x = \varepsilon \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}, \quad x(0) = x_0, x'(0) = x'_0 \quad (2)$$

La solución de (2) se obtiene de forma habitual, sumando a la solución general de la ecuación homogénea con las condiciones iniciales dadas, una solución particular de la ecuación completa en la que se anula la solución y su derivada en $t = 0$. Esta última puede calcularse aplicando el principio de superposición de soluciones a los PVI:

$$x''_n + \alpha x_n = \frac{t^n}{n!}, \quad x_n(0) = x'_n(0) = 0, \quad n \geq 0 \quad (3)$$

combinando linealmente sus soluciones con los coeficientes de $\varepsilon \cdot c_n$.

Partiendo de esta idea, G. Scheifele (1971), definió una colección de funciones especialmente adaptadas a la resolución de este tipo de problemas.

Se llaman G -funciones de Scheifele, a las funciones G_n que verifican:

$$G_n(t) = x_{n-2}(t), \quad n \geq 2 \quad (4)$$

donde $x_n(t)$ son las soluciones de los problemas (3), es decir, las funciones G_n satisfacen

$$G''_n(t) + \alpha G_n(t) = \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}, \quad G_n(0) = G'_n(0) = 0, \quad n \geq 2 \quad (5)$$

Las soluciones de los problemas homogéneos:

$$x'' + \alpha x = 0, \text{ con: } x(0) = 1, \quad x'(0) = 0 \quad (6)$$

$$x'' + \alpha x = 0, \text{ con: } x(0) = 0, \quad x'(0) = 1 \quad (7)$$

definen las funciones de Scheifele $G_0(t)$ y $G_1(t)$, respectivamente.

Las G -funciones presentan las siguientes propiedades:

$$\text{Para } n \geq 1 \text{ se cumple que: } G'_n(t) = G_{n-1}(t) \quad (8)$$

$$\text{Para } n \geq 0 \text{ se cumple que: } G_n(t) + \alpha G_{n-2}(t) = \frac{t^n}{n!} \quad (9)$$

Otra propiedad relevante en el cálculo de las G -funciones¹ es el

¹ También es posible obtener expresiones trigonométricas, útiles para el cálculo de las G -funciones.

Si $\alpha > 0$, $G_0(t) = \cos \sqrt{\alpha} t$, $G_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin \sqrt{\alpha} t$, en general:

hecho de que estas se pueden expresar mediante desarrollos en series absolutamente convergentes para todo valor de t :

$$G_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \frac{t^{j+n}}{(j+n)!}, \quad n \geq 0 \quad (10)$$

donde $B_{2j} = (-\alpha)^j$ y $B_{2j+1} = 0$, $j \geq 0$.

El resultado que permite definir un método de integración numérica basado en series de G -funciones, se deduce de que la solución del PVI (1) es:

$$x(t) = x_0 G_0(t) + x'_0 G_1(t) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_n G_{n+2}(t) \quad (11)$$

Para la construcción de un método numérico basado en series de G -funciones que integre el PVI (1), se supone que su solución $x(t)$, es una función analítica, es decir:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} \quad (12)$$

Calculadas todas las G -funciones necesarias por truncamiento de las series que las definen, para obtener una aproximación a la solución $x(t)$ sustituimos un truncamiento de su desarrollo en (1), lo que nos permitirá establecer relaciones de recurrencia para calcular los coeficientes $c_k = g^{(k)}(0)$, a partir de x_0 y x'_0 .

Una vez conocidos los coeficientes c_k para $k = 0, \dots, m-2$ y fijado un paso h , la aproximación a la solución y su derivada en el punto h , es decir, en el primer paso, vienen dadas respectivamente por las expresiones:

$$x_1 = x_0 G_0(h) + x'_0 G_1(h) + \varepsilon \sum_{j=0}^{p-1} c_j G_{j+2}(h), \quad (13)$$

$$x'_1 = x'_0 G_0(h) - \alpha x_0 G_1(h) + \varepsilon \sum_{j=0}^{p-1} c_j G_{j+1}(h), \quad (14)$$

En general, calculada una aproximación a la solución y a su derivada en el punto $t = nh$, que llamaremos respectivamente x_n y x'_n , lo que interesa es obtener una solución al problema

$$\begin{aligned} x'' + \alpha x &= \varepsilon \cdot f(x, x', t), \\ x(nh) &= x_n, \quad x'(nh) = x'_n \end{aligned} \quad (15)$$

$$G_{2n}(t) = \frac{(-1)^n}{\alpha^n} \left(\cos \sqrt{\alpha} t - \sum_{k=0}^{n-1} (-\alpha)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \right) \text{ con } n > 0,$$

$$G_{2n+1}(t) = \frac{(-1)^n}{\alpha^n} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sin \sqrt{\alpha} t - \sum_{k=0}^{n-1} (-\alpha)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \text{ con } n > 0.$$

$$\text{Si } \alpha < 0, G_0(t) = \cosh \sqrt{-\alpha} t, G_1(t) = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \sinh \sqrt{-\alpha} t, \text{ en general:}$$

$$G_{2n}(t) = \frac{(-1)^n}{\alpha^n} \left(\cosh \sqrt{-\alpha} t - \sum_{k=0}^{n-1} (-\alpha)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \right) \text{ con } n > 0,$$

$$G_{2n+1}(t) = \frac{(-1)^n}{\alpha^n} \left(\frac{1}{\sqrt{-\alpha}} \sinh \sqrt{-\alpha} t - \sum_{k=0}^{n-1} (-\alpha)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \text{ con } n > 0.$$

$$\text{Si } \alpha = 0, \text{ entonces } G_n(t) = \frac{t^n}{n!} \text{ con } n \geq 0.$$

Para calcular una aproximación a la solución y a su derivada en el punto $(n + 1)h$, se efectúa el cambio de variable $t = \tau + nh$, obteniéndose

$$\begin{aligned} x'' + ax &= \varepsilon \cdot f(x, x', \tau + nh), \\ x(0) &= x_n, \quad x'(0) = x'_n \end{aligned} \quad (16)$$

Calculándose por recurrencia los coeficientes del desarrollo:

$$\begin{aligned} f(x(\tau), x'(\tau), \tau + nh) &= \sum_{j=0}^{\infty} c_j \frac{\tau^j}{j!} \\ \text{con } c_j &= \frac{d^j g(0)}{d\tau^j} = \frac{d^j g(nh)}{dt^j} \end{aligned} \quad (17)$$

la aproximación a la solución en el punto $(n + 1)h$ viene dada por las fórmulas:

$$x_{n+1} = x_n G_0(h) + x'_n G_1(h) + \varepsilon \sum_{j=0}^{p-1} c_j G_{j+2}(h), \quad (18)$$

$$x'_{n+1} = x'_n G_0(h) - \alpha x_n G_1(h) + \varepsilon \sum_{j=0}^{p-1} c_j G_{j+1}(h), \quad (19)$$

Las expresiones (18) y (19) constituyen el método de integración numérica para osciladores armónicos perturbados basado en series de G -funciones.

Aunque el método de series de G -funciones, es de gran precisión e integra exactamente el problema homogéneo (García-Alonso y Reyes, 2007) (Stiefel and Scheifele, 1971) (Scheifele, 1971), el cálculo recurrente de los coeficientes c_k , del desarrollo (17), es difícil para expresiones complicadas de la función de perturbación, lo que puede llegar a impedir la implementación del método de series de G -funciones en un computador.

Para resolver esta dificultad, en el epígrafe siguiente se describe la transformación del método numérico basado en series de G -funciones en un esquema multipaso, similar a los métodos SMF, pero de paso y orden variable, es decir, obteniéndose esquemas multipaso VSVO.

Para la obtención del esquema multipaso se aproximarán las derivadas de la función de perturbación mediante diferencias divididas, formulándose tanto métodos explícitos como implícitos que permitirán la implementación de métodos tipo predictor-corrector.

3. Método explícito de p pasos para osciladores perturbados

Para obtener el método explícito, se sustituyen las derivadas de la función de perturbación por expresiones en términos de diferencias divididas y de los coeficientes d_{ij} , elementos de la matriz A^{-t} .

Una vez calculada la matriz A^{-t}_p , se establece un cálculo recurrente de esta, a través de la matriz $S_{p,n}$, para el método explícito.

El estudio de los polinomios simétricos (MacDonald, 1998) y su relación con las diferencias divididas, nos permitirá el cálculo computacional de la matriz $S_{p,n}$.

Para la construcción de un método multipaso explícito de p pasos y de paso variable, se utilizará la diferencia dividida de orden $(p-1)$ -ésimo, de la función g , en los puntos t_n, \dots, t_{n-p+1} , que se nota como $g[t_n, \dots, t_{n-p+1}]$ (Milne-Thomson, 1981).

Las diferencias divididas de la función de perturbación g , satisfacen (Vigo-Aguilar y Ferrándiz, 1988):

$$g[t_n, \dots, t_{n-i}] = \sum_{j=0}^{\infty} P_j[0, -H_1, \dots, -H_i] \cdot g^{(j)}(t_n) \quad (20)$$

$$\text{siendo } P_k(t) = \frac{t^k}{k!} \text{ y } H_i = t_n - t_{n-i} \quad (21)$$

Denotando por $D_{p,n}$, la matriz de orden $1 \times p$ siguiente

$$D_{p,n} = (g[t_n] \quad 1!g[t_n, t_{n-1}] \quad \dots \quad (p-1)!g[t_n, \dots, t_{n-(p-1)}]) \quad (22)$$

y escogiendo $H = \max\{H_1, \dots, H_{p-1}\}$, se verifica la identidad

$$D_{p,n}^t = A_p \begin{pmatrix} g(t_n) \\ g'(t_n) \\ \vdots \\ g^{(p-1)}(t_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(H^p) \\ O(H^{p-1}) \\ \vdots \\ O(H) \end{pmatrix} \quad (23)$$

donde

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & P_1[0] & P_2[0] & \dots & P_{p-1}[0] \\ 0 & 1 & 1!P_2[0, -H_1] & \dots & 1!P_{p-1}[0, -H_1] \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2!P_{p-1}[0, -H_1, -H_2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{p \times p} \quad (24)$$

en notación más compacta

$$D_{p,n}^t = A_p \times Z_{p \times 1} + O_{p \times 1}, \text{ siendo} \quad (25)$$

$$Z_{1 \times p} = (g(t_n) \quad g'(t_n) \quad \dots \quad g^{(p-1)}(t_n)).$$

Efectuando un truncamiento y despejando la matriz $Z_{p \times 1}$ se obtiene

$$Z_{p \times 1} = A_p^{-1} \times (D_{p,n}^t)_{p \times 1} \text{ y } Z_{1 \times p}^t = D_{p,n} \times A_p^{-t} \quad (26)$$

Designando por $(d_{ij})_{p \times p} = A^{-t}_p = (A^{-1}_p)^t$, se puede escribir

$$Z_{1 \times p}^t = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p g[t_n, \dots, t_{n-(i-1)}] d_{i1} (i-1)! \dots \\ \dots \sum_{i=1}^p g[t_n, \dots, t_{n-(i-1)}] d_{ip} (i-1)! \end{pmatrix} \quad (27)$$

Sustituyendo en (18) y en (19) resulta

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n G_0(h) + x'_n G_1(h) + \\
 &+ \varepsilon \sum_{j=0}^{p-1} \left(\sum_{i=1}^p g[t_n, \dots, t_{n-(i-1)}] d_{i,j+1} (i-1)! \right) G_{j+2}(h) = \\
 &= x_n G_0(h) + x'_n G_1(h) +
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \varepsilon \sum_{i=1}^p g[t_n, \dots, t_{n-(i-1)}] \left(\sum_{j=0}^{p-1} d_{i,j+1} (i-1)! G_{j+2}(h) \right) \\
 x'_{n+1} &= x'_n G_0(h) - \alpha x_n G_1(h) + \\
 &+ \varepsilon \sum_{j=0}^{p-1} \left(\sum_{i=1}^p g[t_n, \dots, t_{n-(i-1)}] d_{i,j+1} (i-1)! \right) G_{j+1}(h) \\
 &= x'_n G_0(h) - \alpha x_n G_1(h) + \\
 &+ \varepsilon \sum_{i=1}^p g[t_n, \dots, t_{n-(i-1)}] \left(\sum_{j=0}^{p-1} d_{i,j+1} (i-1)! G_{j+1}(h) \right)
 \end{aligned} \tag{29}$$

Llamando

$$\Lambda_i = \sum_{j=0}^{p-1} d_{i,j+1} (i-1)! G_{j+2}(h) \tag{30}$$

$$\Lambda'_i = \sum_{j=0}^{p-1} d_{i,j+1} (i-1)! G_{j+1}(h) \tag{31}$$

con $i = 1, \dots, p$, se obtienen para un método multipaso explícito, las fórmulas siguientes:

$$x_{n+1} = x_n G_0(h) + x'_n G_1(h) + \varepsilon \sum_{i=1}^p \Lambda_i g[t_n, \dots, t_{n-(i-1)}] \tag{32}$$

$$x'_{n+1} = x'_n G_0(h) - \alpha x_n G_1(h) + \varepsilon \sum_{i=1}^p \Lambda'_i g[t_n, \dots, t_{n-(i-1)}] \tag{33}$$

Con el propósito de diseñar un método de orden y paso variable, VSVO, se obtendrán los elementos de matriz $A^{-t}_p = (d_{ij})_{p \times p}$ de forma recurrente.

Las recurrencias de los elementos d_{ij} se basan en las funciones simétricas completas $h_{n,r}$ ² y en las funciones simétricas elementales $e_{n,r}$ ³ (MacDonald, 1998), (Vigo-Aguilar, 1999), definidas como:

$$e_{n,0} = 1, \quad e_{n,r} = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} t_{i_1} \dots t_{i_r}, \quad e_{n,r} = 0 \quad \text{con } r < 0 \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
 h_{n,r} &= \sum_{|\lambda|=r} \sum_{S_\lambda} t^\alpha \quad \text{donde } \lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathbb{N}^n \text{ siendo} \\
 |\lambda| &= \lambda_1 + \dots + \lambda_n
 \end{aligned} \tag{35}$$

² Por ejemplo para tres variables, t_1, t_2, t_3 tenemos:

$$\begin{aligned}
 h_{3,0} &= 1, \quad h_{3,1} = t_1 + t_2 + t_3, \\
 h_{3,2} &= t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3, \\
 h_{3,3} &= t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 + t_1^2 t_2 + t_1^2 t_3 + t_2^2 t_1 + t_2^2 t_3 + t_1 t_2^2 + t_1 t_3^2 + t_2 t_1^2 + t_2 t_3^2 + t_3 t_1^2 + t_3 t_2^2.
 \end{aligned}$$

La función generatriz de $h_{n,r}$ es $H_n(t) = \sum_{r=0}^{\infty} h_{n,r} \cdot t^r = \prod_{i=1}^n (1 + t_i t)^{-1}$ es decir, efectuando un desarrollo de Mac Laurin de la función $E_n(t)$, hasta orden n , sus coeficientes serían las funciones simétricas elementales $e_{n,r}$.

³ por ejemplo para tres variables, t_1, t_2, t_3 tenemos:

$$\begin{aligned}
 e_{3,0} &= 1, \quad e_{3,1} = t_1 + t_2 + t_3, \quad e_{3,2} = t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3, \quad e_{3,3} = t_1 t_2 t_3. \\
 \text{La función generatriz de } e_{n,r} \text{ es } E_n(t) &= \sum_{r=0}^{\infty} e_{n,r} \cdot t^r = \prod_{i=1}^n (1 + t_i t) \text{ es decir,} \\
 \text{efectuando un desarrollo de Mac Laurin de la función } E_n(t), &\text{ hasta orden } n, \text{ sus coeficientes serían las funciones simétricas elementales } e_{n,r}.
 \end{aligned}$$

y $S_\lambda = \{\text{todas las diferentes permutaciones } \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \text{ de } \lambda\}$ con $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n}$, en el caso $r < 0$, se define $h_{n,r} = 0$.

En particular $h_{n,0} = 1$ y $h_{n,1} = e_{n,1}$ ⁴.

Entre las diferencias divididas de la función $g(t) = t^m$, que notamos como $t_m[t_1, \dots, t_n]$ y las funciones simétricas completas, se establece la siguiente relación:

$$t_m[t_1, \dots, t_n] = h_{n,m-n+1} \tag{36}$$

Trabajando en el punto t_n , se define las funciones simétricas completas

$$q_{i,j}(n) = t^{j-1} [H_m, \dots, H_{n-(i-1)}] \quad \text{y} \quad \sigma_{i,j}(n) = (-1)^{j-i} e_{j-1,j-i} \tag{37}$$

en los valores $H_{n-k} = t_{n-k} - t^*$ con $k = 0, \dots, i-1$, y $t^* \in [a, b]$.

Las matrices cuadradas de orden k , $P_{k,n} = (q_{i,j}(n))$ y $S_{k,n} = (\sigma_{i,j}(n))$, son regulares.

Ya que $H_{n-j} = t_{n-j} - t^*$ y $H_j = t_n - t_{n-j}$ es posible escribir

$$(t_n - t^*) - H_j = H_{n-j} \quad \text{con } j = 0, \dots, i-1.$$

En el caso particular de que $t^* = t_n$ se tiene $H_{n-j} = -H_j$ con $j = 0, \dots, i-1$.

Las diferencias divididas de la función g satisfacen la propiedad:

$$g[t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-(i-1)}] = \sum_{j=0}^{\infty} q_{i,j+1}(n) \frac{1}{j!} g^{(j)}(t^*) \tag{38}$$

Si $H = \max\{|H_n|, \dots, |H_{n-(i-1)}|\}$, y como $q_{i,j}(n)$ tiene orden $j-i$ en H , es posible escribir, basándonos en este último resultado la siguiente expresión:

$$g[t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-(i-1)}] = \sum_{j=0}^{p-1} q_{i,j+1}(n) \frac{1}{j!} g^{(j)}(t^*) + O(H^{p-(i-1)}) \tag{39}$$

con $i = 1, \dots, p$

Considerando $t^* = t_n$ y expresando las igualdades (39) en forma matricial, se tiene

$$\begin{pmatrix} g[t_n] \\ g[t_n, t_{n-1}] \\ \vdots \\ g[t_n, \dots, t_{n-(p-1)}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1,1}(n) & \dots & q_{1,p}(n) \\ q_{2,1}(n) & \dots & q_{2,p}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{p,1}(n) & \dots & q_{p,p}(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{g(t_n)}{1!} \\ \frac{g'(t_n)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{g^{(p-1)}(t_n)}{(p-1)!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(H^p) \\ O(H^{p-1}) \\ \vdots \\ O(H) \end{pmatrix} \tag{40}$$

y como $q_{i,j+1}(n) = h_{i,j}$ en los argumentos $H_n, \dots, H_{n-(i-1)}$, es posible escribir

$$\begin{pmatrix} g[t_n] \\ g[t_n, t_{n-1}] \\ \vdots \\ g[t_n, \dots, t_{n-(p-1)}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h_{1,1} & \dots & h_{1,p-1}(n) \\ 0 & 1 & \dots & h_{2,p-2}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{g(t_n)}{1!} \\ \frac{g'(t_n)}{1!} \\ \vdots \\ \frac{g^{(p-1)}(t_n)}{(p-1)!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(H^p) \\ O(H^{p-1}) \\ \vdots \\ O(H) \end{pmatrix} \tag{41}$$

⁴ Entre las funciones simétricas elementales y completas se establece la relación:

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \cdot h_{n,\alpha-r} \cdot e_{m,r}, \quad \forall m \geq n \geq 1 \quad \text{y} \quad \alpha > m-n$$

Ya que $\sigma_{ij}(n) = \sigma_{i-1,j-1}(n) - H_{n-j+2} \sigma_{ij-1}(n)$ para $i, j \geq 2$ (Vigo-Aguiar, 1999), si se tiene en cuenta que $t^* = t_n$, entonces:

$$S_{p,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rightarrow \sigma_{2,3}(n) & \rightarrow \sigma_{2,4}(n) & \rightarrow \sigma_{2,5}(n) & \cdots \rightarrow \sigma_{2,p}(n) \\ 0 & 0 & 1 & \sigma_{3,4}(n) & \sigma_{3,5}(n) & \cdots \rightarrow \sigma_{3,p}(n) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sigma_{4,5}(n) & \cdots \rightarrow \sigma_{4,p}(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (42)$$

La expresión recurrente de la matriz A_p^{-t} se obtiene mediante la expresión:

$$A_p^{-t} = M_p \times P_{p,n}^{-t} \times N_p = M_p \times S_{p,n}^t \times N_p \quad (43)$$

es decir

$$d_{ij} = \frac{(j-1)! \sigma_{j,i}(n)}{(i-1)!} \quad \text{con } i, j = 1, \dots, p \quad (44)$$

donde

$M_p = (m_{ij})_p$ es una matriz diagonal, tal que $m_{ij} = \frac{1}{i!}$, con $i = 0, \dots, p-1$ y $N_p = M_p^{-1}$.

Las expresiones (43) y (44) permiten calcular la matriz A_p^{-t} mediante recurrencia, utilizando la matriz $S_{p,n}^{-t}$.

Sustituyendo (44) en (28), (29), (30) y (31), es posible definir el método multipaso explícito, usando la siguiente notación:

x_n es la aproximación al valor de la solución en t_n .

x'_n es la aproximación al valor de la derivada de la solución en t_n .

Los valores iniciales de la solución $x(t)$ en los puntos t_0, \dots, t_{p-1} son: x_0, \dots, x_{p-1} .

Los valores iniciales de la derivada de la solución $x'(t)$ en los puntos t_0, \dots, t_{p-1} son: x'_0, \dots, x'_{p-1} .

La expresión formal, del método multipaso explícito, basado en G -funciones, es

$$x_{n+1} = x_n G_0(h) + x'_n G_1(h) + \varepsilon \sum_{i=1}^p \Lambda_i g[t_n, \dots, t_{n-(i-1)}] \quad (45)$$

con $n \geq p-1$

$$x'_{n+1} = x'_n G_0(h) - \alpha x_n G_1(h) + \varepsilon \sum_{i=1}^p \Lambda'_i g[t_n, \dots, t_{n-(i-1)}] \quad (46)$$

con $n \geq p-1$

donde

$$\Lambda_i = \sum_{j=0}^{p-1} j! \sigma_{j+1,i}(n) G_{j+2}(h) \quad \text{con } i = 1, \dots, p \quad (47)$$

$$\Lambda'_i = \sum_{j=0}^{p-1} j! \sigma_{j+1,i}(n) G_{j+1}(h) \quad \text{con } i = 1, \dots, p \quad (48)$$

4. Método implícito de p pasos para osciladores perturbados

De forma similar al caso explícito, la matriz de la que se obtienen los coeficientes d_{ij} se nota como B_p^{-t} , siendo la matriz B_p :

$$B_p = \begin{pmatrix} 1 & P_1[h] & P_2[h] & \cdots & P_p[h] \\ 0 & 1 & 1!P_2[h,0] & \cdots & 1!P_p[h,0] \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2!P_p[h,0-H_1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{(p+1) \times (p+1)} \quad (49)$$

Designando por $(d_{ij})_{(p+1) \times (p+1)} = B_p^{-t} = (B_p^{-1})^t$, se puede escribir

$$Z_{1 \times (p+1)}^t = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p+1} g[t_{n+1}, \dots, t_{n+1-(i-1)}] di 1 (i=1)! \cdots \\ \cdots \sum_{i=1}^{p+1} g[t_{n+1}, \dots, t_{n+1-(i-1)}] di (p+1)(i) \end{pmatrix}_{1 \times p} \quad (50)$$

Procediendo de forma análoga al caso explícito, se obtiene:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n G_0(h) + x'_n G_1(h) + \\ &+ \varepsilon \sum_{j=0}^p \left(\sum_{i=1}^{p+1} g[t_{n+1}, \dots, t_{n+1-(i-1)}] d_{i,j+1} (i-1)! \right) G_{j+2}(h) \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} &= x_n G_0(h) + x'_n G_1(h) + \\ &+ \varepsilon \sum_{i=1}^p g[t_{n+1}, \dots, t_{n+1-(i-1)}] \left(\sum_{j=0}^p d_{i,j+1} (i-1)! G_{j+2}(h) \right) \\ x'_{n+1} &= x'_n G_0(h) - \alpha x_n G_1(h) + \\ &+ \varepsilon \sum_{j=0}^p \left(\sum_{i=1}^{p+1} g[t_{n+1}, \dots, t_{n+1-(i-1)}] d_{i,j+1} (i-1)! \right) G_{j+1}(h) \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} &= x_n G_0(h) + x'_n G_1(h) + \\ &+ \varepsilon \sum_{i=1}^p g[t_{n+1}, \dots, t_{n+1-(i-1)}] \left(\sum_{j=0}^p d_{i,j+1} (i-1)! G_{j+2}(h) \right) \end{aligned}$$

Llamando

$$\Gamma_i = \sum_{j=0}^p d_{i,j+1} (i-1)! G_j \quad (53)$$

$$\Gamma'_i = \sum_{j=0}^{p-1} d_{i,j+1} (i-1)! G_{j+1}(h) \quad (54)$$

con $i = 1, \dots, p+1$, se obtienen para un método multipaso implícito, las fórmulas siguientes:

$$x_{n+1} = x_n G_0(h) + x'_n G_1(h) + \varepsilon \sum_{i=1}^{p+1} \Gamma_i g[t_{n+1}, \dots, t_{n+1-(i-1)}] \quad (55)$$

$$x'_{n+1} = x'_n G_0(h) - \alpha x_n G_1(h) + \varepsilon \sum_{i=1}^{p+1} \Gamma'_i g[t_{n+1}, \dots, t_{n+1-(i-1)}] \quad (56)$$

Una vez conocida la matriz B_p^{-t} , se establece un cálculo recurrente a través de la matriz $S_{p,n+1}^t$ para el método implícito, siendo la matriz $S_{p,n+1}^t$:

$$S_{p,n+1}^t = \begin{pmatrix} 1 & -h_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rightarrow \sigma_{2,3}(n) & \rightarrow \sigma_{2,4}(n) & \rightarrow \sigma_{2,5}(n) & \cdots \rightarrow \sigma_{2,p+1}(n) \\ 0 & 0 & 1 & \sigma_{3,4}(n) & \sigma_{3,5}(n) & \cdots \rightarrow \sigma_{3,p+1}(n) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sigma_{4,5}(n) & \cdots \rightarrow \sigma_{4,p+1}(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(p+1) \times (p+1)} \quad (57)$$

donde

$$\sigma_{ij}(n) = \sigma_{i-1,j-1}(n) - H_{n-j+3} \sigma_{ij-1}(n) \quad (58)$$

con $i, j \geq 2$, (Vigo-Aguiar, 1999)

La expresión recurrente de la matriz B_p^{-t} , se obtiene mediante

la expresión:

$$B_p^{-t} = M_{p+1} \times P_{p,n+1}^{-t} \times N_{p+1} = M_{p \times 1} \times S_{p,n+1}^t \times N_{p+1} \quad (59)$$

es decir

$$d_{i,j} = \frac{(j-1)! \sigma_{ji}(n)}{(i-1)!} \quad \text{con } i, j = 1, \dots, p+1 \quad (60)$$

donde

$M_{p+1} = (m_{ij})_{p+1}$ es una matriz diagonal, tal que $m_{ij} = \frac{1}{i!}$, con $i=0, \dots, p$ y $N_{p+1} = M - I_{p+1}$.

Las expresiones (58) y (59) permiten calcular computacionalmente la matriz B_p^{-t} , por recurrencia, utilizando la matriz $S_{p,n+1}^t$.

Sustituyendo (59) en (51), (52), (53) y (54), es posible definir el método multipaso implícito, usando la siguiente notación:

x_n es la aproximación al valor de la solución en t_n .

x'_n es la aproximación al valor de la derivada de la solución en t_n .

Los valores iniciales de la solución $x(t)$ en los puntos t_0, \dots, t_{p-1} son: x_0, \dots, x_{p-1} .

Los valores iniciales de la derivada de la solución $x'(t)$ en los puntos t_0, \dots, t_{p-1} son: x'_0, \dots, x'_{p-1} .

La expresión formal, del método multipaso implícito, basado en G -funciones, es

$$x_{n+1} = x_n G_0(h) + x'_n G_1(h) + \epsilon \sum_{i=1}^{p+1} \Gamma_i g[t_{n+1}, \dots, t_{n+1-(i-1)}] \quad (61)$$

con $n \geq p-1$

$$x'_{n+1} = x'_n G_0(h) - \alpha x_n G_1(h) + \epsilon \sum_{i=1}^{p+1} \Gamma'_i g[t_{n+1}, \dots, t_{n+1-(i-1)}] \quad (62)$$

con $n \geq p-1$

donde

$$\Gamma_i = \sum_{j=0}^p j! \sigma_{j+1,i} G_{j+2}(h) \quad \text{con } i = 1, \dots, p+1 \quad (63)$$

$$\Gamma'_i = \sum_{j=0}^p j! \sigma_{j+1,i} G_{j+1}(h) \quad \text{con } i = 1, \dots, p+1 \quad (64)$$

5. Método predictor-corrector de p pasos para osciladores perturbados

El método predictor-corrector, con tamaño de paso variable, de p pasos, para osciladores armónicos perturbados, se define como el que tiene como factor predictivo el método explícito, y como método corrector el implícito, ambos basados en G -fun-

ciones y con las definiciones anteriores, dadas en (45) a (48) y (60) a (63). Es decir, el método predictor-corrector empleado es del tipo $P(EC)^{\mu} E^{1-t}$, con $t = \mu = 1$ (Lambert, 1991).

5.1 Experimentos numéricos

En esta sección, cuatro problemas muestran el buen comportamiento del nuevo método basado en G -funciones, comparando la precisión de este, frente a los conocidos códigos:

LSODE, que obtiene soluciones numéricas utilizando el integrador Stiff Livermore ODE.

GEAR, que obtienen soluciones numéricas por medio del método de Burlirsch-Stoer, de extrapolación racional.

MGEAR [msteppart] que es un método multipaso, susceptible de ser aplicado a problemas *stiff*.

Los problemas propuestos son conocidos problemas test, de los que su solución analítica está calculada, lo que permite la obtención de los errores relativos de la posición $x(t)$ así como de la velocidad $x'(t)$.

Aun siendo conocida su solución analítica, los problemas propuestos presentan dificultades en su integración numérica mediante códigos LSODE, GEAR y MGEAR, entre otros, adaptados al cálculo de soluciones de este tipo de osciladores.

Para realizar la comparación de los errores producidos se ha utilizado la implementación en MAPLE de los códigos anteriormente citados, para asegurar que los resultados no son distorsionados por una deficiente programación que favorezca el nuevo código.

Problema I

Consideremos el oscilador armónico perturbado, altamente oscilatorio.

$$x'' + 400x = 50 \sin(20t) \quad (65)$$

$$\text{con } x(0) = 1 \text{ y } x'(0) = -\frac{5}{4}.$$

La solución exacta y su derivada, se expresan mediante las ecuaciones:

$$x(t) = \left(1 - \frac{5t}{4}\right) \cos(20t) \quad (66)$$

$$x'(t) = 25t - 20 \sin(20t) - \frac{5}{4} \cos(20t) \quad (67)$$

Este problema, corresponde al problema general propuesto por Petzold (1981), para $A = 50$ y $\alpha = 40$.

En la figura 1 se contrasta el gráfico del logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución $x(t)$, obtenida con 40 dígitos y contrastados con los gráficos del logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución que proporcionan los métodos LSODE[backfunc] con $tol = 10^{-17}$, MGEAR con $errorper = 10^{-13}$ y GEAR con $errorper = 10^{-13}$.

En la figura 2, se contrasta la derivada $x'(t)$ bajo las mismas condiciones.

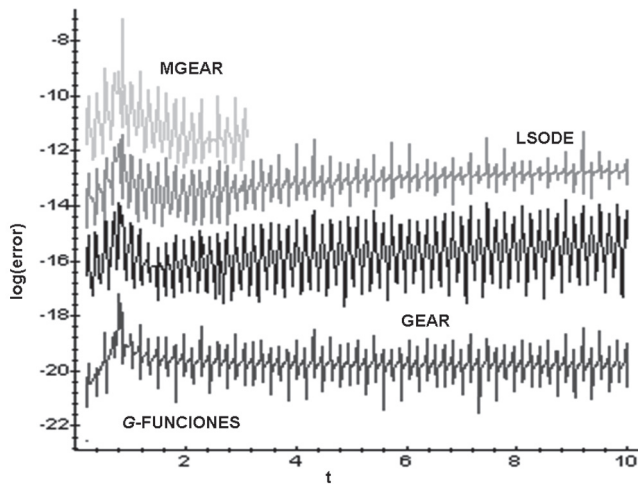


Fig. 1 $x'' + 400x = 50\sin(20t)$, $x(t)$ posición.

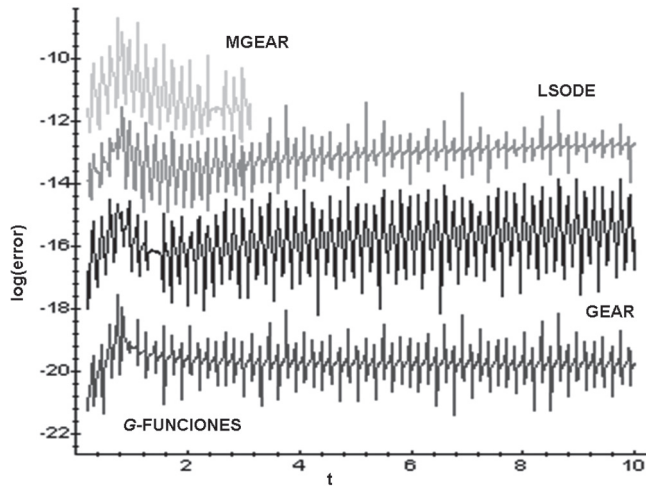


Fig. 2 $x'' + 400x = 50\sin(20t)$, $x'(t)$ posición.

Problema II

Consideremos el oscilador armónico con perturbación periódica, altamente oscilatoria y proporcional al parámetro de perturbación (García-Alonso, Reyes, Ferrándiz. and Vigo-Aguiar, 2009b).

$$x''(t) + x(t) = \cos(100t)$$

$$x(0) = \frac{9998}{9999} \quad (68)$$

$$x'(0) = 1$$

La solución exacta y su derivada, se expresan mediante las ecuaciones:

$$x(t) = \cos(t) + \sin(t) - \frac{\cos(100t)}{9999} \quad (69)$$

$$x'(t) = \sin(t) + \cos(t) - \frac{100\sin(100t)}{9999} \quad (70)$$

En las figuras 3 y 4 se contrastan los gráficos del logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución $x(t)$ y de su derivada $x'(t)$, respectivamente, obtenidas con 40 dígitos y contrastadas con los gráficos del logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de las aproximaciones a $x(t)$ y $x'(t)$ que proporcionan los métodos LSODE[backfunc] con $tol = 10^{-17}$, MGEAR con $errorper = 10^{-13}$ y GEAR con $errorper = 10^{-13}$.

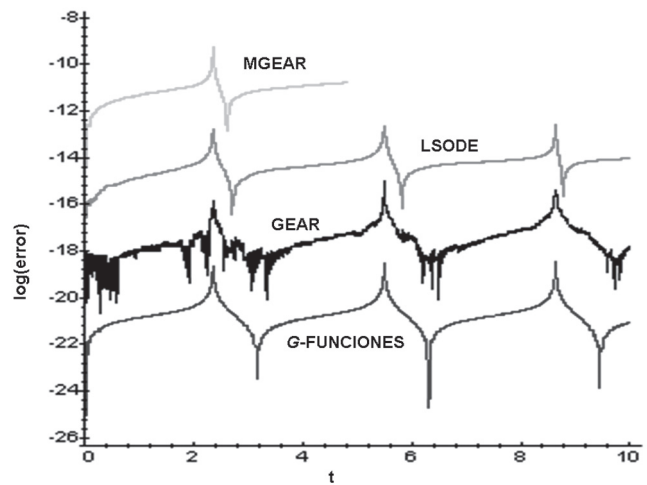


Fig. 3 $x''(t) + x(t) = \cos(100t)$, $x(t)$ posición.

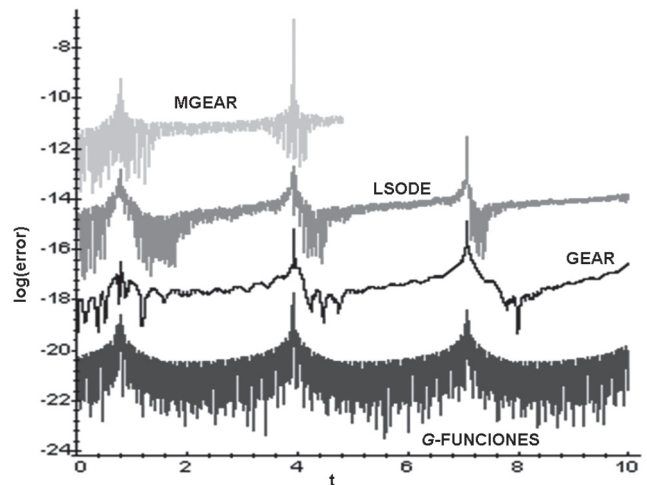


Fig. 4 $x''(t) + x(t) = \cos(100t)$, $x'(t)$ posición.

Problema III

Consideremos el PVI:

$$x'' + k^2x = k^2t$$

$$x(0) = 10^{-5} \quad (71)$$

$$x(0) = 1 - 10^{-5}k \cot(k)$$

donde $k = 314.16$, propuesto por G. Denk (1993), como un problema *test*, altamente oscilatorio.

La solución analítica y su derivada, se expresan como

$$x(t) = t + 10^{-5}(\cos(kt) - \sin(kt) \cot(k)) \quad (72)$$

$$x'(t) = 1 - 10^{-5}(\sin(kt) + \cos(kt) \cot(k)) \quad (73)$$

De forma análoga a los dos casos anteriores, en las figuras 5 y 6, se contrasta la precisión del método multipaso, frente a los métodos LSODE[backfunc] con $tol = 10^{-20}$, MGEAR con $errorper = 10^{-17}$ y GEAR con $errorper = 10^{-17}$.

Problema IV

Consideremos el oscilador armónico con función de perturbación que no depende explícitamente del tiempo, que supone una generalización del propuesto en García-Alonso (2008), descrito por las ecuaciones:

$$x'' + (1+x)(x - \cos(100t)) + 10000 \cos(100t) = 0 \quad (74)$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

Con solución analítica y derivada, altamente oscilatorias, dadas por las expresiones:

$$x(t) = \cos(100t) \quad (75)$$

$$x'(t) = -100 \sin(100t) \quad (76)$$

En las figuras 7 y 8 se contrastan los gráficos del logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de la solución $x(t)$ y de su derivada $x'(t)$, respectivamente, obtenidas con 40 dígitos y contrastadas con los gráficos del logaritmo decimal del valor absoluto del error relativo de las aproximaciones a $x(t)$ y $x'(t)$ que proporcionan los métodos LSODE[backfunc] con $tol = 10^{-17}$, MGEAR con $errorper = 10^{-17}$ y GEAR con $errorper = 10^{-17}$.

6. Comentarios finales

A pesar de la gran precisión que se puede obtener mediante el método basado en series de *G*-funciones, este presenta la dificultad de solo poder aplicarse en algunos casos, debido a la complejidad de los cálculos preliminares necesarios para el diseño de las re-

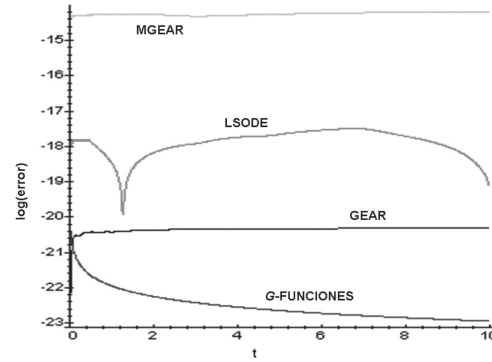


Fig. 5 $x'' + k^2x = k^2t$ con $k = 314.16$, $x(t)$ posición.

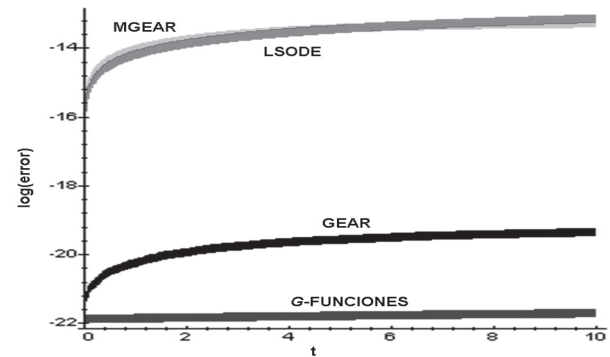


Fig. 6 $x'' + k^2x = k^2t$ con $k = 314.16$, $x'(t)$ posición.

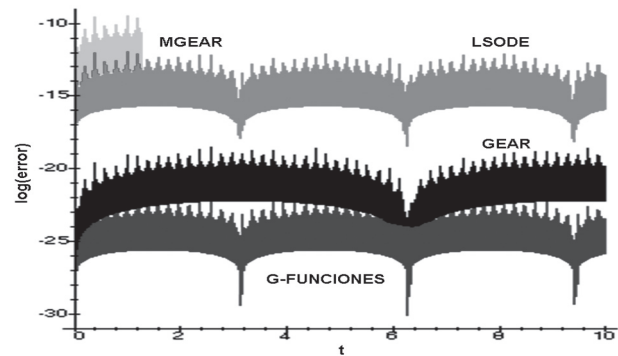


Fig. 7 $x'' + (1+x)(x - \cos(100t)) + 10000 \cos(100t) = 0$, $x(t)$ posición.

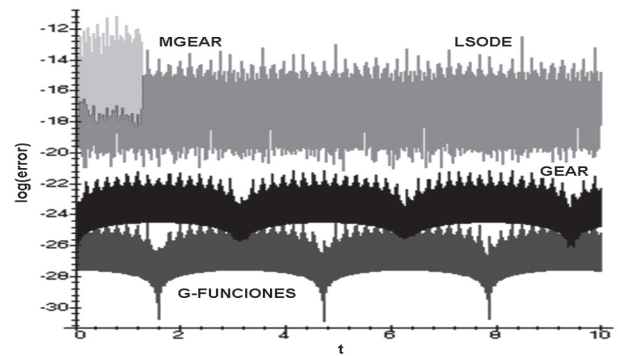


Fig. 8 $x'' + (1+x)(x - \cos(100t)) + 10000 \cos(100t) = 0$, $x'(t)$ posición.

currencias que utiliza el algoritmo. Además, estos cálculos preliminares deben realizarse de forma específica en cada problema.

En este artículo se resuelve la dificultad anterior, transformando el método de series de G -funciones en un algoritmo multipaso.

A tal efecto, se aproximan las derivadas de la función de perturbación, mediante diferencias divididas.

Basándose en las relaciones existentes entre las diferencias divididas y las funciones simétricas elementales y completas, se establecen recurrencias que permiten, mediante un procedimiento algebraico sencillo, calcular los coeficientes del nuevo método, lo que facilita su implementación en un computador.

Se construyen tanto métodos explícitos como implícitos y basados en ellos, un método predictor-corrector que integra exactamente el problema homogéneo.

Los nuevos métodos contruidos son de paso y orden variable, es decir son del tipo VSVO y mejoran los métodos SMF, conservando las buenas propiedades de este.

El buen comportamiento de los nuevos métodos se pone de manifiesto, al aplicarlos a problemas test, contrastando los resultados obtenidos frente a otros conocidos integradores numéricos, tales como LSODE, MGEAR y GEAR.

Referencias bibliográficas

- [1] DENK, G. (1993): «A new numerical method for the integration of highly oscillatory second-order ordinary differential equations». *Appl. Numer. Math.*, vol.13, 57-67.
- [2] GARCÍA-ALONSO, F. (2008): « Algoritmos para la integración de problemas oscilatorios en varias frecuencias», Ediciones Biblioteca Virtual Miguel de Cervantes. Alicante.
- [3] GARCÍA-ALONSO, F. REYES, J. A. (2007): «Una extensión de la serie de Taylor y su aplicación a la integración de osciladores», *Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación*, vol. 5, nº 1, 1-21.
- [4] GARCÍA-ALONSO, F., REYES, J. A., FERRÁNDIZ, J. M. VIGO-AGUIAR, J. (2009a): «Multistep numerical methods for the integration of oscillatory problems in several frequencies», *Advances in Engineering Software*, vol. 40, nº 8, 543-553.
- [5] GARCÍA-ALONSO, F., REYES, J. A., FERRÁNDIZ, J. M., VIGO-AGUIAR, J. (2009b): «Accurate numerical integration of perturbed oscillatory Systems in two frequencies». *Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, vol. 36, nº 4, article 21.
- [6] LAMBERT, J. D. (1991): *Numerical methods for ordinary differential systems*. John Wiley and Sons Ltd., New York.
- [7] MacDONALD, I. G. (1998): *Symmetric Functions and Hall Polynomials*. Oxford University Press Inc. New York.
- [8] MARTÍN, P., FERRÁNDIZ, J.M. (1995): «Behaviour of the SMF method for the numerical integration of satellite orbits», *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 63, nº 1, 29-40.
- [9] MARTÍN, P., FERRÁNDIZ, J. M. (1997): «Multistep numerical methods based on Scheifele G -functions with application to satellite dynamics», *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 34, nº 1, 359-375.
- [10] MILNE-THOMSON, LM. (1981): *The calculus of finite differences*. The Macmillan Press. New York.
- [11] PETZOLD, LR. (1981): «An efficient numerical method for highly oscillatory ordinary differential equations». *SIAM J. on Numerical Analysis*; vol.18 nº3, 455-479.
- [12] SCHEIFELE, G. (1971): «On numerical integration of perturbed linear oscillating systems», *ZAMP*; vol. 22, nº 1, 186-210.
- [13] STIEFEL, E. L. and SCHEIFELE, G. (1971): *Linear and regular celestial mechanics*, Springer, New York.
- [14] VIGO-AGUIAR, J., FERRÁNDIZ, J. M. (1998): «Higher-order variable-step algorithms adapted to the accurate numerical integration of perturbed oscillators», *Computer in Physics*, vol. 12, nº 5, 467-470.
- [15] VIGO-AGUIAR, J. (1999): «Approach to Variable Coefficients Methods for Special Differential Equations». *International Journal of Applied Mathematics. Ed Academic Pub*, vol. 1, nº 8, 911-921.