

Modelación y solución del problema del péndulo doble utilizando RK-4

Modeling and solving the double pendulum problem using RK-4

Miguel Ángel Abreu Terán¹, Alejandro Mesejo Chiong², Glicerio Viltres Castro¹

Resumen En el presente trabajo se aborda el estudio del problema de oscilaciones de un péndulo doble, como un caso aparentemente sencillo de un sistema físico que puede mostrar un comportamiento caótico. Se presenta de manera breve la formulación analítica del problema para obtener dos Ecuaciones Diferenciales de segundo orden, acopladas y altamente no lineales. Estas ecuaciones están asociadas a los ángulos θ_1 y θ_2 , por cuanto bajo condiciones iniciales conocidas es posible resolver el problema original desarrollando un algoritmo Runge-Kutta de orden cuatro "RK4" para obtener la solución numérica. Para el cálculo numérico se empleó el SAC Wolfram Mathematica 9.0. Al final se presentan comparaciones entre las soluciones obtenidas por las diferentes alternativas propuestas y diferencias significativas que existen entre la solución del sistema original de Ecuaciones Diferenciales No Lineales y su respectiva linealización.

Abstract In the present work the study of the problem of oscillations of a double pendulum is approached as an apparently simple case of a physical system that can show a chaotic behavior. The analytical formula of the problem is presented briefly to obtain the second order differential equations, coupled and highly nonlinear. These equations are associated with the angles θ_1 and θ_2 , because under known initial conditions it is possible to solve the original problem by developing a Runge-Kutta algorithm of order "RK4" to obtain the numerical solution. For the numerical calculation the SAC Wolfram Mathematica 9.0 was used. At the end, comparisons are presented between the solutions obtained for the different proposed alternatives and significant differences that exist between the system solution original of Nonlinear Differential Equations and their respective linearization.

Palabras Clave

modelación matemática — EDOs no lineales — solución de sistemas de EDOs no lineales

¹ Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Oriente, Cuba, maabreu@uo.edu.cu, glicerio@uo.edu.cu,

² Departamento de Matemática, Universidad de la Habana, Cuba, mesejo@matcom.uh.cu

Introducción

La mecánica es la rama de la Física que estudia y analiza el movimiento y reposo de los cuerpos al igual que su evolución en el tiempo, bajo la acción de fuerzas. La mecánica analítica es una formulación abstracta y general de la mecánica que permite el uso en igualdad de condiciones de sistemas inerciales o no inerciales sin que, a diferencia de las leyes de Newton, la forma básica de las ecuaciones de movimiento cambie. Se considera que el rasgo determinante es considerar la exposición y planteamiento de la misma en términos de coordenadas generalizadas.

Si se quiere estudiar un sistema físico es importante en principio conocer los elementos, variables, parámetros y posibles comportamientos que pueden derivarse de un determinado escenario o evento. En general un péndulo doble es un sistema compuesto por dos péndulos, con el segundo colgando del extremo del primero. En el caso más simple, se trata

de dos péndulos simples, con el interior colgando de la masa pendular del superior. Normalmente se sobreentiende que nos referimos a un doble péndulo plano. Este sistema físico posee dos grados de libertad y exhibe un rico comportamiento dinámico, su movimiento está gobernado por dos ecuaciones diferenciales de segundo orden ordinarias no lineales acopladas. Por encima de cierta energía su movimiento es caótico. Si bien estas EDOs poseen serias dificultades para obtener la solución analítica es posible obtener una linealización que permite aplicar la Transformada de Laplace bajo ciertas condiciones y obtener una solución analítica para oscilaciones suficientemente pequeñas.

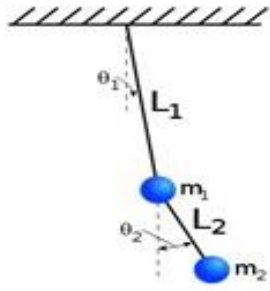


Figura 1. Péndulo Doble.

1. Análisis del movimiento del péndulo doble plano

1.1 Cinemática

La formulación parte de que el sistema oscila en un plano vertical y no existen fuerzas de amortiguamiento en el mismo. En la cinemática solo estamos interesados en encontrar las expresiones de la posición, la velocidad, la aceleración en términos de las variables que especifican el estado del péndulo doble, sin interesarnos por las fuerzas actuantes. Usando las proyecciones de las líneas L_1 y L_2 sobre un sistema de coordenadas localizado en el extremo superior del péndulo 1, es posible establecer las posiciones de las masas m_1 y m_2 de acuerdo con las ecuaciones (1) a (4).

$$x_1 = L_1 \sin \theta_1 \quad (1)$$

$$y_1 = -L_1 \cos \theta_1 \quad (2)$$

$$x_2 = x_1 + L_2 \sin \theta_2 \quad (3)$$

$$y_2 = y_1 - L_2 \cos \theta_2 \quad (4)$$

Si se sitúa el nivel cero de energía potencial en el punto de suspensión del primer péndulo la energía potencial queda expresada de la siguiente forma:

$$E_p = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \quad (5)$$

y sustituyendo (2) y (4) en (5) queda:

$$E_p = -(m_1 + m_2) g L_1 \cos \theta_1 + m_2 g L_2 \cos \theta_2 \quad (6)$$

Notemos que la magnitud de la velocidad del primer péndulo se obtiene como el producto entre el radio de la circunferencia y la velocidad angular.

$$\vec{v}_1 = L_1 \dot{\theta}_1$$

Su expresión vectorial estará dada por la ecuación

$$\vec{v}_1 = L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \vec{i} + L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \vec{j} \quad (7)$$

La magnitud de la velocidad de la segunda partícula en un sistema de referencia que se mueve con velocidad v_1 de la

primera partícula es $\vec{v}_2 = L_2 \dot{\theta}_2$ y su expresión vectorial estará dada por la ecuación:

$$\vec{v}_2 = L_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \vec{i} + L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \vec{j} \quad (8)$$

Ahora podemos plantear la energía cinética como

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (9)$$

Entonces el lagrangiano del sistema podemos escribirlo

$$L = E_c - E_p$$

En términos de las coordenadas generalizadas podemos escribirlo tras realizar operaciones algebraicas

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (L_1)^2 (\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} (m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2) + \\ & + (m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) + \\ & + (m_1 + m_2) g L_1 \cos(\theta_1) + m_2 g L_2 \cos(\theta_2) \end{aligned} \quad (10)$$

A partir del lagrangiano se obtienen las ecuaciones del movimiento que conducen a un sistema de EDOs no lineales acopladas. Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange en este caso particular:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right] = \left[\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right] \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right] = \left[\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right] \quad (12)$$

Calculando explícitamente las derivadas de las expresiones anteriores se obtiene el sistema (13) de EDOs no lineales

$$\begin{cases} 0 = (m_1 + m_2) L_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ddot{\theta}_2 L_1 L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \\ \quad + m_2 L_2 (\dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin(\theta_1) \\ 0 = m_2 L_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \ddot{\theta}_1 L_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \\ \quad - m_2 L_1 (\dot{\theta}_1)^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin(\theta_2) \end{cases} \quad (13)$$

Es válido observar que el sistema dado anteriormente no posee solución analítica conocida, sin embargo podemos considerar que si los giros son pequeños, es decir

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1 \quad (14)$$

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) \approx 0 \quad (15)$$

$$\sin \theta_1 \approx \theta_1 \quad (16)$$

$$\sin \theta_2 \approx \theta_2 \quad (17)$$

Considerando que los giros son pequeños el sistema puede ser simplificado a un sistema de EDOs lineales, al cual podremos encontrarle una solución analítica. De otra manera considerar que los giros no son pequeños y el sistema (13) es posible encontrarle una solución numérica por reducción de orden a cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales con condiciones adaptadas, partiendo del sistema original.

1.2 Solución para casos particulares

Consideremos primero las oscilaciones pequeñas libres de un péndulo doble plano y desarrollemos un ejemplo con los siguientes datos

$$L_1 = 16ft, \quad L_2 = 16ft, \quad m_1 = 3 \text{ slug}$$

$$m_2 = 1 \text{ slug}, \quad g = 32ft/s^2$$

$$\theta_1(0) = 1 \text{ rad}, \quad \theta_2(0) = -1 \text{ rad}$$

$$\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \text{ rad/s}$$

para un tiempo final de 30 s.

Sustituyendo en el sistema (13) podemos escribir

$$\begin{cases} 0 = 4\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 8\theta_1 \\ 0 = \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 2\theta_2 \end{cases} \quad (18)$$

Resolvemos el sistema utilizando la transformada de Laplace teniendo en cuenta las condiciones iniciales dadas y apoyándonos en el teorema de los residuos podemos obtener finalmente la solución analítica del sistema:

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \frac{3}{4}\cos(2t) + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) \\ \theta_2(t) = -\frac{3}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) \end{cases} \quad (19)$$

Podemos ilustrar gráficamente la solución analítica del sistema utilizando el asistente Wolfram Mathematica 9.0.

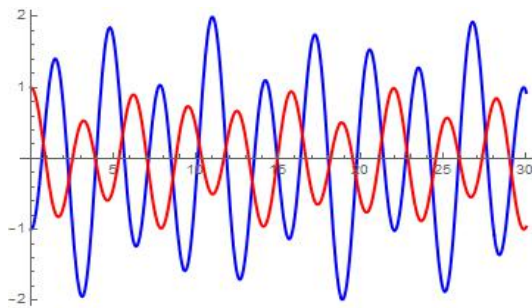


Figura 2. Linealizado utilizando Transformada de Laplace.

En la gráfica se muestra el modelo linealizado, el segundo péndulo (rojo) con amplitudes de giro mayor que el primero (azul). Se puede apreciar la forma de la solución dada en cosenos en donde la amplitud no es periódica a lo largo de todo el intervalo.

1.2.1 Solución del modelo lineal utilizando RK-4

Se utilizarán los mismos datos de la sección 1.2

$$L_1 = 16ft, \quad L_2 = 16ft, \quad m_1 = 3 \text{ slug}$$

$$m_2 = 1 \text{ slug}, \quad g = 32ft/s^2$$

$$\theta_1(0) = 1 \text{ rad}, \quad \theta_2(0) = -1 \text{ rad}$$

$$\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \text{ rad/s}$$

para un tiempo final de 30 s.

El sistema (18) se puede reducir a un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales lineales considerando que

$$\frac{d\theta_1}{dt} = w_1 \quad (20)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = w_2 \quad (21)$$

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{1}{3}(-8\theta_1 + 2\theta_2) \quad (22)$$

$$\frac{dw_2}{dt} = \frac{8}{3}(\theta_1 - \theta_2) \quad (23)$$

Solamente mostraremos en la tabla y en la gráfica los valores de t comprendidos entre 0 y 3 s.

t	θ_1	θ_2
0	0	0
0,1	0,0009978	0,0019956
0,2	0,0019624	0,0039248
0,3	0,0028617	0,0057234
0,4	0,0036658	0,0073317
0,5	0,004348	0,008696
0,6	0,0048855	0,009771
0,7	0,0052605	0,0105209
0,8	0,0054604	0,0109208
0,9	0,0054787	0,0109573
1	0,0053146	0,0106292
1,1	0,0049737	0,0099474
1,2	0,0044673	0,0089347
1,3	0,0038123	0,0076246
1,4	0,0030304	0,0060608
1,5	0,0021476	0,00429513
1,6	0,0011934	0,0023868
1,7	0,0001994	0,0003989
1,8	-0,0008012	-0,0016024
1,9	-0,0017752	-0,0035504
2	-0,0026901	-0,0053802
2,1	-0,0035156	-0,0070311
2,2	-0,0042241	-0,0084481
2,3	-0,004792	-0,009584
2,4	-0,005201	-0,010401
2,5	-0,005436	-0,01087
2,6	-0,005491	-0,010981
2,7	-0,005363	-0,010725
2,8	-0,005056	-0,010112
2,9	-0,004581	-0,009163
3	-0,003954	-0,007908

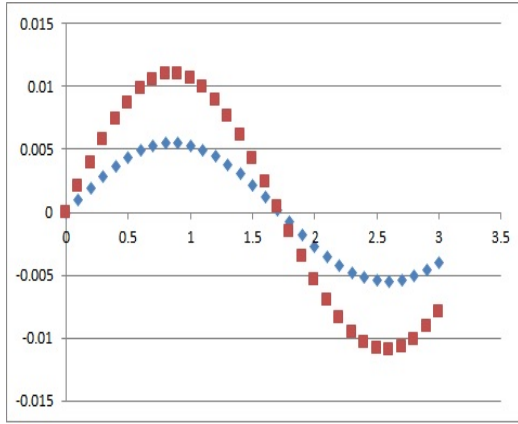


Figura 3. Linealizado utilizando RK-4.

En la gráfica se muestra el modelo linealizado utilizando el Método de RK-4, el segundo péndulo (rojo) con amplitudes de giro mayor que el primero (azul). Se puede apreciar la forma de la solución dada en cosenos en donde la amplitud no es periódica a lo largo de todo el intervalo. Notemos que los gráficos de las soluciones obtenidas en ambos no son significativamente diferentes.

1.2.2 Solución del modelo no lineal utilizando RK-4

Se utilizarán los mismos datos de la sección 1.2

$$L_1 = 16ft, \quad L_2 = 16ft, \quad m_1 = 3 \text{ slug}$$

$$m_2 = 1 \text{ slug}, \quad g = 32ft/s^2$$

$$\theta_1(0) = 1 \text{ rad}, \quad \theta_2(0) = -1 \text{ rad}$$

$$\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \text{ rad/s}$$

para un tiempo final de 30 s.

Partiendo del sistema (13) es posible mediante reducción de orden obtener el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden.

$$\frac{d\theta_1}{dt} = w_1 \quad (24)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = w_2 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dt} = & \frac{-m_2 l_1 w_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 [(m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]} + \\ & + \frac{m_2 g \sin(\theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 [(m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]} - \\ & - \frac{m_2 l_2 w_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin(\theta_1)}{l_1 [(m_1 + m_2) - m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{dw_2}{dt} = \frac{-m_2 l_2 w_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g \sin(\theta_1)}{m_2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$- \frac{(m_1 + m_2) l_1 \frac{dw_1}{dt}}{m_2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad (27)$$

Este nuevo sistema puede ser resuelto numéricamente mediante una adaptación del Método de RK-4 para sistemas de EDOs con los datos dados anteriormente. Se obtuvieron los valores de θ_1 y θ_2 que aparecen en la siguiente tabla. Solamente mostraremos en la tabla y en la gráfica los valores de t comprendidos entre 0 y 0.2 s.

t	θ_1	θ_2
0	0	0
0,01	0,000251505	0,000103045
0,02	0,00034483	0,000206091
0,03	6,06362	0,000309136
0,04	-0,000450133	0,000412182
0,05	-0,000616787	0,000515227
0,06	5,3009	0,000618273
0,07	0,00123555	0,000721318
0,08	0,001669569	0,000824364
0,09	0,000250582	0,000927409
0,1	-0,002328668	0,001030455
0,11	-0,003281604	0,0011335
0,12	-0,00012773	0,001236545
0,13	0,00564887	0,001339591
0,14	0,007876718	0,001442636
0,15	0,001003321	0,001545682
0,16	-0,011831485	0,001648727
0,17	-0,01695083	0,001751773
0,18	-0,001729951	0,0018548181
0,19	0,027168524	0,00195786355
0,2	0,038270127	0,002060909

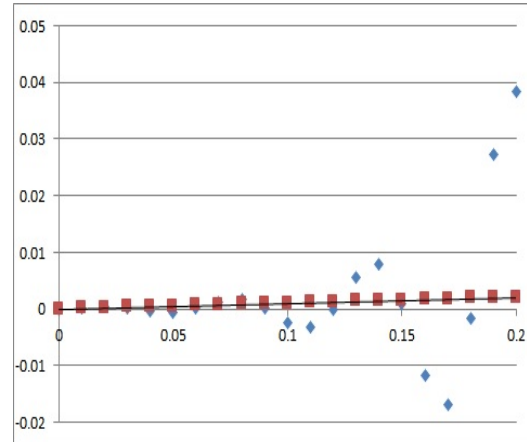


Figura 4. No linealizado utilizando RK-4.

En la **Figura 4** θ_1 aparece en color azul y θ_2 aparece en color rojo.

Según el gráfico podemos apreciar el comportamiento caótico del primer péndulo, cuyo ángulo de giro es θ_1 , esto nos permite establecer una comparación entre la solución del modelo

linealizado y el modelo no linealizado, es decir, para oscilaciones no pequeñas existe una diferencia considerable entre ambas soluciones.

2. Resultados y Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos queda claro que cuando se modela cualquier fenómeno debemos ser muy cuidadosos, cuando se consideraron oscilaciones pequeñas los resultados obtenidos en el modelo lineal exhiben diferencias no muy significativas entre el modelo numérico y el analítico, no ocurriendo así si quisiéramos establecer comparación entre la solución aproximada del modelo no lineal y las soluciones linealizadas.

Referencias

- [1] L. Lifshitz. *Mechanics*, 1976.
- [2] M. R. Spiegel. *Theory and problems of theoretical mechanics*, 1967.
- [3] J. B. Castillero y R. R. Ramos y B. Valiño. *Apuntes para un curso de mecánica clásica*.
- [4] D. Garanin. *Exercises in Classical Mechanics*.
- [5] V. H. Mandell. *The Double Pendulum Problem*, 2000.
- [6] K. R. Symon. *Mechanics*, 1960.
- [7] Stickel. *The Double Pendulum*, 2009.
- [8] G. González. *Single and Double plane pendulum*.
- [9] P. Valdés Castro. *Sistema de actividades de dinámica no lineal en un curso inicial de Mecánica*, 2015.
- [10] Seoane, J., Zambrano, S. y SanJuan, M. (2011) “Teaching Nonlinear Dynamics and Chaos for Beginners”.
- [11] S. C. Chapra y R. P. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. 719-756, 2007.