

Uso de Filtros Morfológicos en Imágenes de Mamografías

Using Morphological Filters in Mammographic Images

Ceyli M. Ricardo Gomar, Marta L. Baguer Díaz-Romañach*, Jorge Del Risco Martínez

Resumen La detección temprana del cáncer de mama constituye uno de los principales objetivos de la medicina actual. El uso de técnicas matemáticas en imágenes de mamografía digital se está convirtiendo en una tendencia que ofrece resultados ventajosos en el diagnóstico de esta enfermedad. En este trabajo se definen las principales operaciones de la Morfología Matemática necesarias para la implementación de filtros. Se expone una experimentación y evaluación cuantitativa de los filtros morfológicos implementados usando una base de datos reconocida de imágenes de mamografías.

Abstract Early detection of breast cancer is one of the main goals in modern medicine. Using mathematical techniques in digital mammographic images is becoming a trend that provides advantageous results in the diagnosis of this disease. This paper defines the main operations of Mathematical Morphology necessary for the implementation of filters. Experimentation and quantitative assessment of implemented morphological filters is exposed using a recognized database of mammographic images.

Palabras Clave

Procesamiento de Imágenes Digitales — Morfología Matemática — Filtros Morfológicos

¹Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba: cmricardo@grm.desoft.cu, mbaguer@matcom.uh.cu, jrgdelrisco@gmail.com

*Autor para Correspondencia

Introducción

El procesamiento de imágenes digitales obtenidas a partir de mamografías constituye uno de los principales problemas tratados en el campo de la medicina. Existen diversas herramientas computacionales para apoyar el diagnóstico del cáncer de mama, muchas de ellas usan filtros y algoritmos de segmentación.

En el área de la Morfología Matemática se pueden encontrar ventajosas propuestas de filtros morfológicos para la reducción del ruido, suavizado y realce del contraste en imágenes. Estos filtros son composiciones de las operaciones morfológicas básicas como la erosión, dilatación y reconstrucciones geodésicas.

1. Definiciones Preliminares

Frecuentemente se utilizan las técnicas de Morfología Matemática en el Procesamiento de Imágenes Médicas. Sus creadores Georges Matheron y Jean Serra la pensaron inicialmente para imágenes binarias, aunque más tarde fue utilizada en imágenes en escala de grises y actualmente también en imágenes a color. La Morfología Matemática se basa en geometría y forma. Las operaciones morfológicas son general-

mente simples y conservan las principales características de formas de los objetos [11]. Su aplicación en el tratamiento de imágenes de mamografías hace de esta teoría una herramienta muy atractiva, porque en la misma podemos encontrar filtros para el mejoramiento de imágenes y algoritmos de segmentación híbridos¹ [2].

Los filtros morfológicos pueden ser considerados filtros no lineales y en el caso del mejoramiento de imágenes se pueden clasificar según [2] en filtros para: supresión de ruido, mejoramiento del contraste y eliminación de áreas según un criterio específico. En este trabajo se estudia una propuesta para la detección de microcalcificaciones en imágenes de mamografías con un filtro morfológico.

La segmentación de imágenes para la detección de masas y distorsiones de forma en las imágenes de mamografías es una técnica muy utilizada en el campo del Procesamiento de Imágenes Médicas [3]. La Morfología Matemática ofrece como herramientas clásicas para la segmentación las transformadas de *Watershed* y *Waterfall*. La Transformada de *Watershed* ofrece resultados estables para la segmentación de imágenes con inclusión de límites continuos [4]. Una desventaja de este algoritmo es que depende de marcadores o píxeles selecciona-

¹Se utilizan varias técnicas de segmentación.

dos previamente para realizar la segmentación. Una alternativa es el uso de la Transformada de *Waterfall*, la cual brinda una segmentación jerárquica partiendo de la sobresegmentación que provoca *Watershed* [7].

Las definiciones que se presentan a continuación son importantes tanto para la comprensión de los algoritmos mencionados anteriormente, así como para una parte importante de los filtros morfológicos reportados en la literatura.

En esta investigación se adoptó la siguiente definición de imagen digital en escala de grises [10]:

Una **imagen digital en escala de grises** puede denotarse como $I = \langle V, E, f \rangle$, $f: V \rightarrow \mathbb{N}$ donde $V \subset \mathbb{Z}^2$ y $E \subset \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ define la conectividad de cada vértice o píxel $p \in V$ en el grafo. Los tipos de conectividad más utilizados son de 4 u 8 vecinos por píxel.

Se puede ver una imagen digital en escala de grises como un grafo con valores en los vértices, donde al resultado de evaluar $f(p)$ se le denomina valor de gris, altitud o intensidad del píxel p .

1.1 Operaciones morfológicas

Las dos operaciones morfológicas más importantes son la erosión y la dilatación. Son operaciones que actúan espacialmente sobre la imagen usando un elemento estructurante [11], haciendo que se realcen ciertos detalles y se pierdan otros. La mayoría de las otras operaciones morfológicas pueden ser definidas en términos de estas dos operaciones iniciales.

Definición 1.1 La **erosión** de una imagen digital en escala de grises $A = \langle V, E, f \rangle$ por un elemento estructurante B en el píxel x está definida como:

$$A \ominus B(x) = [\varepsilon_B(f)](x) = \min_{b \in B} f(x+b) \quad (1)$$

Al erosionar una imagen en escala de grises, se aplica sucesivamente el elemento estructurante B sobre cada píxel de la imagen, escogiendo el valor mínimo entre sus vecinos y asignándole este nuevo valor al píxel en la imagen resultante. Como los píxeles más oscuros tienen menor valor en las imágenes en escala de grises, entonces la imagen resultante de la erosión realza las partes oscuras de la imagen original.

Definición 1.2 La **dilatación** de una imagen digital en escala de grises $A = \langle V, E, f \rangle$ por un elemento estructurante B en el píxel x está definida como:

$$A \oplus B(x) = [\delta_B(f)](x) = \max_{b \in B} f(x+b) \quad (2)$$

La dilatación de una imagen realza las partes más claras de la misma, al expandir los píxeles con mayor intensidad. La erosión y la dilatación son transformaciones duales respecto al complemento [11], cumpliéndose que $\varepsilon_B(f^C) = [\delta_B(f)]^C$.

Al procesar una imagen, casi no se utilizan la erosión o la dilatación aisladas, comúnmente se utilizan dilataciones seguidas por erosiones o viceversa [4]. Por ejemplo, para suprimir pequeñas regiones brillantes de la imagen se tiende a

hacer una erosión seguida por una dilatación, a esta operación se le conoce como *apertura*. Por el contrario, si se desea suprimir pequeñas regiones oscuras de la imagen se realiza una dilatación seguida por una erosión, a esta operación se le llama *cierre*.

Definición 1.3 La **apertura** de una imagen digital en escala de grises $A = \langle V, E, f \rangle$ por un elemento estructurante B está definida como:

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B \quad (3)$$

Definición 1.4 El **cierre** de una imagen digital en escala de grises $A = \langle V, E, f \rangle$ por un elemento estructurante B está definido como:

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B \quad (4)$$

En ocasiones las operaciones de apertura y cierre morfológicas no son suficientes para el procesamiento de imágenes en escala de grises. Las transformaciones *Top-hats*² son operaciones morfológicas que se usan para extraer pequeños detalles de las imágenes.

Definición 1.5 Las transformaciones **Black top-hat** (BTH) y **White top-hat** (WTH) de una imagen digital en escala de grises $A = \langle V, E, f \rangle$ por un elemento estructurante B están definidas como:

$$BTH = (A \bullet B) - A \quad (5)$$

$$WTH = A - (A \ominus B) \quad (6)$$

Estas operaciones se basan en el principio de que en ocasiones es más fácil eliminar objetos relevantes de la imagen y procesarlos por separado, que eliminar directamente los objetos irrelevantes de la misma [11]. Muchas veces se utilizan también para el mejoramiento del contraste en imágenes en escala de grises.

Todas las transformaciones morfológicas expuestas hasta el momento involucran una imagen con un elemento estructurante específico. Las operaciones geodésicas siguientes involucran dos imágenes de entrada. Las transformaciones morfológicas se aplican sobre la primera imagen (imagen marcador) y la imagen resultante es obligada a permanecer encima o debajo de la segunda imagen (imagen máscara). Estas operaciones se basan en el conocimiento de formas u objetos en la imagen de entrada, de esta forma se evita que dichos objetos pierdan detalles en las transformaciones morfológicas a realizar [12].

Definición 1.6 Sean dos imágenes $A = \langle V, E, f \rangle$ y $A' = \langle V, E, g \rangle$ tales que $f: V \rightarrow \mathbb{N}$ y $g: V \rightarrow \mathbb{N}$ están definidas sobre el mismo dominio, y cumplen que $f \geq g$. La **erosión geodésica elemental** de A' sobre A con un elemento estructurante B , se define como:

$$\varepsilon_g^{(1)}(f) = (A' \ominus B) \vee A = \varepsilon_B(f) \vee g \quad (7)$$

²En la bibliografía no se encontró una definición en español para estas operaciones.

La erosión geodésica [11] de tamaño n de la imagen A' sobre A se obtiene evaluando n erosiones geodésicas sucesivas $\varepsilon_g^{(n)}(f) = \varepsilon_g^{(1)}[\varepsilon_g^{(n-1)}(f)]$. A la imagen A se le llama máscara, y a A' marcador.

A los operadores \vee y \wedge se les conoce como máximo punto a punto y mínimo punto a punto, respectivamente [11]. El primero determina la intensidad máxima para cada píxel x , evaluando $f(x)$ y $g(x)$, o sea $(f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x))$, mientras el segundo determina la intensidad mínima como $(f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x))$.

En la práctica las operaciones geodésicas definidas anteriormente se aplican sucesivamente hasta alcanzar una estabilidad [11], y constituyen la base de algunos de los filtros que se presentarán más adelante. A estas iteraciones sucesivas se les conoce como reconstrucciones geodésicas. La estabilidad en las reconstrucciones geodésicas se alcanza cuando se obtiene el mismo resultado entre una iteración y otra de una transformación geodésica en las imágenes.

Definición 1.7 Sea $A = \langle V, E, f \rangle$ la imagen marcador y $A' = \langle V, E, g \rangle$ la imagen máscara, con f y g definidas en el mismo dominio y $f \geq g$, la **reconstrucción geodésica por erosión** se obtiene iterando erosiones geodésicas en escala de grises hasta alcanzar la estabilidad, quedando definida como:

$$R_g^e(f) = \bigwedge_{n \geq 1} [\varepsilon_g^{(n)}(f)] \quad (8)$$

En [11] se definen la dilatación geodésica y la reconstrucción geodésica por dilatación $R_g^d(f)$ como operaciones duales de la erosión geodésica y la reconstrucción geodésica por erosión respectivamente.

1.2 Filtros Morfológicos

Conociendo las principales operaciones morfológicas se pueden crear filtros a partir de estas. Para consultar otras alternativas y sus usos se propone el estudio de [9].

Los filtros de reducción de ruido y suavizado de la imagen usan principalmente las operaciones de apertura y cierre, otro más complejo usa las reconstrucciones geodésicas. Su objetivo principal es la eliminación de píxeles no verídicos en la imagen -es decir que la información que ofrecen no era la real- y aplicar un ligero emborronamiento sobre la imagen para aproximar la información de los píxeles que fueron eliminados.

Definición 1.8 Sea una imagen digital en escala de grises $A = \langle V, E, f \rangle$ y un elemento estructurante B , donde n representa el tamaño de la apertura y el cierre, el **filtro alternado** [1] se define como:

$$alt(A, B) = \{(((A \circ B)^n) \bullet B)^n\} \quad (9)$$

Definición 1.9 Sea una imagen digital en escala de grises $A = \langle V, E, f \rangle$ y un elemento estructurante B , el **filtro alternado completo** se define a través de la siguiente función recursiva:

$$altC(A, B, n) = \begin{cases} ((A \circ B) \bullet B) & n = 1 \\ altC(((A \circ B) \bullet B), B, n-1) & n > 1 \end{cases} \quad (10)$$

Este filtro constituye una propuesta basada en el *full build alternate filter*, en el cual se emplean conceptos como el de apertura y cierre por reconstrucción [1].

Definición 1.10 Sea una imagen digital en escala de grises $A = \langle V, E, f \rangle$ y un elemento estructurante B , el **filtro de nivelación fuerte** [1] utiliza las operaciones básicas erosión y dilatación, así como las reconstrucciones geodésicas por erosión y dilatación para hacer un suavizado de la imagen. El filtro se define como:

$$nivelaciónFuerte(A, B) = R_g^e[R_h^d(f)] \quad (11)$$

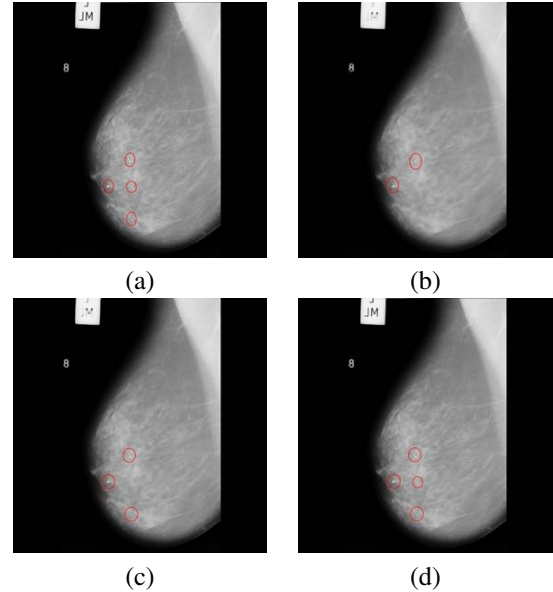


Figura 1. Filtros morfológicos de reducción de ruido y suavizado de la imagen con $n = 2$

En la Figura 1 (a) se muestra la imagen original con pequeñas microcalcificaciones³ señaladas. En (b) se observa el resultado de aplicar el filtro alternado. Se pierden algunas zonas brillantes. El resultado de aplicar el filtro alternado completo se muestra en (c), donde se aprecia menos el emborronado del filtro anterior, aunque se conservan más zonas brillantes. Por último en (d) se muestra el resultado del filtro de nivelación fuerte, en el cual no se pierde ninguna de las regiones destacadas en la imagen original, pero aparecen menos nítidas. Nótese que el objetivo fundamental de estos filtros es eliminar ruido, por tanto, estas pequeñas regiones pueden ser confundidas como tal.

En imágenes médicas se usan filtros de realce del contraste para destacar zonas oscuras o claras que ofrezcan información importante para el estudio de alguna anomalía. Se usan

³Pequeñas regiones brillantes que pueden ser lesiones pre-cancerosas.

principalmente las operaciones de erosión, dilatación y las transformadas *Top-hats*.

Definición 1.11 Sea una imagen digital en escala de grises $A = \langle V, E, f \rangle$ y un elemento estructurante B , en cada píxel x el **filtro de contraste** [2] se define como:

$$\text{cont}(A, B)[x] = \begin{cases} (A \oplus B)[x] & A[x] \geq \frac{(A \oplus B)[x] + (A \ominus B)[x]}{2} \\ (A \ominus B)[x] & \text{e.o.c} \end{cases} \quad (12)$$

Definición 1.12 Sea una imagen digital en escala de grises $A = \langle V, E, f \rangle$ y un elemento estructurante B , el **filtro realzador de contraste** [1], se define como:

$$\text{realzadorCont}(A, B) = [A + WTH(A)] - BTH(A) \quad (13)$$

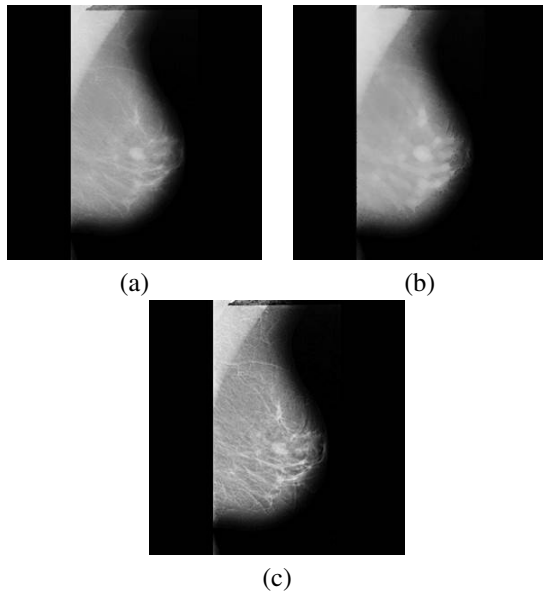


Figura 2. Filtros morfológicos para el realce del contraste

En la Figura 2 (a) se muestra la imagen original, en (b) el resultado de aplicar el filtro morfológico *cont* con $n = 1$, y en (c) el resultado de aplicar el filtro *realzadorCont* con $n = 5$.

En la Morfología Matemática se cuenta con filtros para la detección de regiones específicas en una imagen. Usando las reconstrucciones geodésicas se pueden encontrar regiones claras u oscuras dentro de las imágenes.

Definición 1.13 Sea una imagen digital en escala de grises $A = \langle V, E, f \rangle$ y un elemento estructurante B , se puede definir el **filtro detector de microcalcificaciones** como:

$$\text{detectorMic}(A, B, n) = f - R_g^\delta(f) \quad (14)$$

donde g es el resultado de aplicar una apertura sobre la imagen original de tamaño n . De igual forma este filtro está basado en una variante⁴ que emplea un concepto de apertura alternativo [1].

⁴Conocida como *builSupWhiteTopHat*.

Este filtro se usa para realzar zonas claras de tamaño $2n$ en todas las direcciones posibles. En la Figura 3 se muestra el resultado de aplicar el filtro.

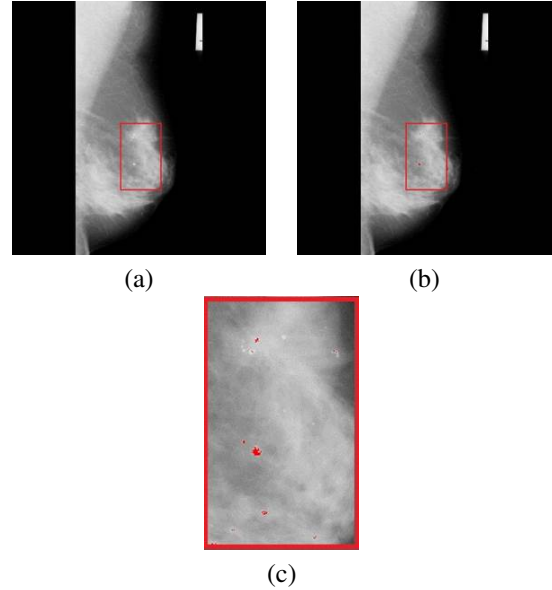


Figura 3. Filtro morfológico *detectorMic*

En la Figura 3 (a) se muestra la imagen original que posee varias regiones con microcalcificaciones. En la (b) se observa el resultado de aplicar el filtro para $n = 40$. En (c) se realiza la zona señalada.

2. Experimentación y Resultados

Para la experimentación con los filtros morfológicos definidos anteriormente se utilizó una muestra de la biblioteca de imágenes de mamografías MIAS⁵. Para medir la efectividad de los filtros morfológicos de reducción de ruido y suavizado de la imagen se implementaron las medidas: error mínimo cuadrático (MSE^6) y relación señal/ruido (SNR^7) [5]. En [8] se presentan varias medidas para la evaluación del realzado del contraste, en esta experimentación se usaron la EME y AME⁸. Para la experimentación con los algoritmos de segmentación se establecieron diferencias entre las segmentaciones ofrecidas por las imágenes originales y las imágenes procesadas inicialmente por los filtros *nivelaciónFuerte*, *altC* y *realzadorCont*.

2.1 Evaluación de los Filtros Morfológicos de Reducción de Ruido

Para establecer una comparación entre imágenes de mamografías con ruido y sin ruido se tomó una muestra de 25 imágenes. Se les afectó un 20% de píxeles con ruido sal y pimienta. La otra prueba se realizó agregando ruido gaussiano

⁵Mammographic Image Analysis Society por sus siglas en inglés.

⁶Por su siglas en inglés mean square error.

⁷Por su siglas en inglés signal to noise ratio.

⁸En la literatura se hace referencia a EME como *measure of enhancement* y a AME como *Michelson law measure of enhancement*.

con los parámetros 0 para la media y 0.01 para la desviación estándar.

La medida MSE establece menor valor a las imágenes con mejor calidad obtenida, mientras en SNR a mayor valor, mayor calidad tendrá la imagen procesada [5]. En la Figura 4 se muestra un gráfico con los resultados obtenidos.

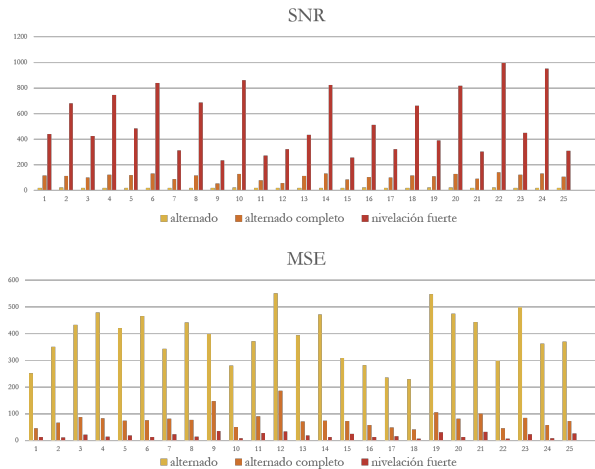


Figura 4. Evaluación de filtros morfológicos en imágenes con ruido sal y pimienta

Para imágenes con ruido de impulso⁹, los filtros que presentan mejor comportamiento son el *nivelaciónFuerte* y el *altC*. En la Figura 5 se ofrece un ejemplo visual del comportamiento de los filtros en una imagen de mamografía, a la que se le ha agregado este tipo de ruido.

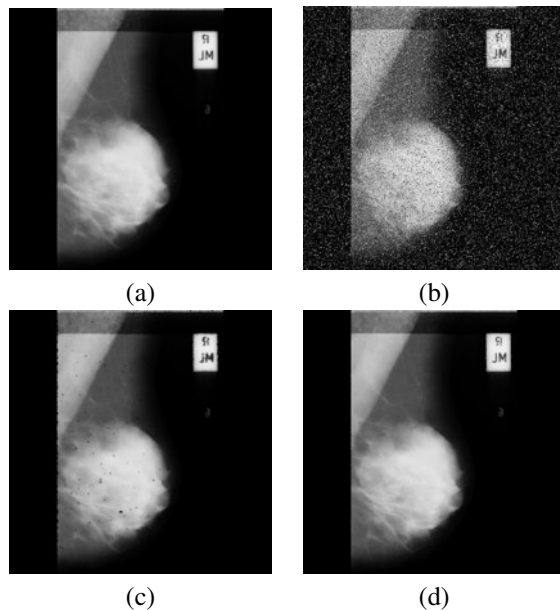


Figura 5. Imagen original (a), imagen con ruido sal y pimienta en (b), y resultado usando los filtros *altC* y *nivelaciónFuerte* en (c) y (d)

⁹Conocido como ruido *salt and pepper*.

En el caso de imágenes con ruido gaussiano (Figura 6), los filtros que presentan mejor comportamiento coinciden con los del experimento anterior. Aunque se puede ver en las gráficas que su desempeño no es muy superior en los resultados, en comparación con el ruido de impulso. En la Figura 7 se ofrece un ejemplo visual del comportamiento de los filtros en una imagen de mamografía a la que se le ha agregado ruido gaussiano.

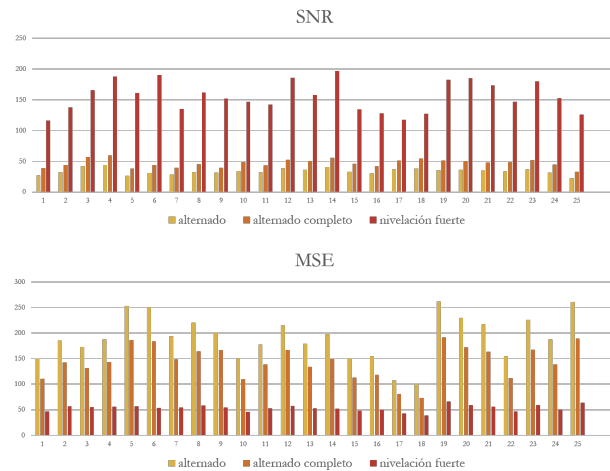


Figura 6. Evaluación de filtros morfológicos en imágenes con ruido gaussiano

2.2 Evaluación de los Filtros Morfológicos de Realce del Contraste

Una medida visual para la evaluación de los filtros de realce del contraste es *line profile*¹⁰ [5]. Inicialmente se traza una recta sobre la imagen original y se construye un sistema de coordenadas donde en el eje de las X se encuentran los píxeles de la imagen que están sobre la recta y en el eje de las Y su respectivo valor de intensidad. Análogamente se realiza el mismo procedimiento sobre la imagen resultante tras el realce del contraste. La gráfica correspondiente a la imagen con el contraste mejorado debe mostrar una estructura similar a la de la imagen original, aunque pueden notarse cambios bruscos que se observarán como picos.

Tras aplicar el filtro *realzadorCont* se conserva la estructura de la imagen original, como se muestra en la Figura 8, por tanto, este filtro se puede considerar como una buena técnica para el realce de contraste en imágenes de mamografías.

Las medidas EME y AME miden el mejoramiento del contraste en una imagen. Estas se aplican sobre la imagen original y al resultado del procesamiento de mejoramiento del contraste. En EME, a mayor valor mayor es el contraste de la imagen, y en AME, a menor valor mayor es el contraste [6]. En la Figura 9 se presentan los valores obtenidos para una experimentación con 25 imágenes de la base de datos MIAS usando el filtro *realzadorCont* con $n = 5$.

¹⁰Se utiliza el término en inglés porque no se encontró en ninguna bibliografía reconocida en español.

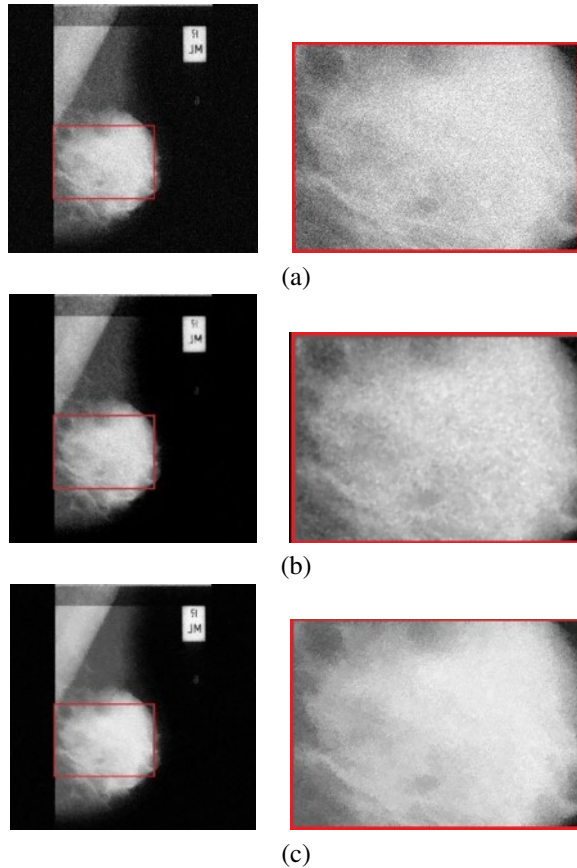


Figura 7. Imagen con ruido gaussiano en (a). Resultados usando los filtros *altC* y *nivelaciónFuerte* en (b) y (c)

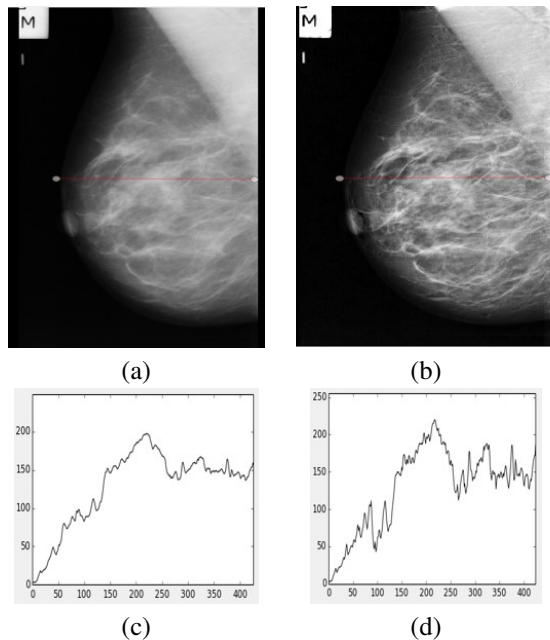


Figura 8. Imagen original (a), y un *line profile* en (c). Resultado de aplicar el filtro morfológico *realzadorCont* con $n=20$ en (b), y su *line profile* en (d) con igual posición que en (a)

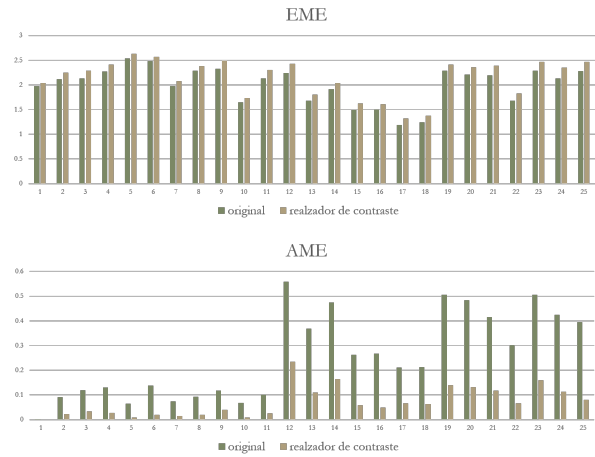


Figura 9. Evaluación del filtro morfológico *realzadorCont* en imágenes de mamografías

Los resultados obtenidos usando estas dos evaluaciones demuestran las ventajas del filtro *realzadorCont* para el realce del contraste en imágenes de mamografías. En las imágenes resultantes se puede apreciar un ligero realce en los pequeños objetos, como en las microcalcificaciones o en las venas.

2.3 Desempeño del Filtro Morfológico de Segmentación

Las distintas características presentes en las mamas dificultan el proceso de segmentación que ofrece la Morfología Matemática. Los resultados pueden ser mejorados con el pre-procesamiento de las imágenes con algunos de los filtros estudiados.

El filtro *detectorMic* tiene gran utilidad en la detección de microcalcificaciones, pues señala las zonas brillantes de la imagen en un radio de tamaño n . Las microcalcificaciones aparecen en las mamografías como zonas o regiones pequeñas y más claras; la identificación de estas regiones constituye la principal funcionalidad de este filtro.

Aunque el filtro no siempre es exacto ofrece mejores resultados en la detección de las microcalcificaciones para imágenes sin pre-procesar. Otras estrategias de segmentación estudiadas no muestran tan buen desempeño en la detección de este tipo de lesiones de mama.

En la Figura 10 se muestra en (a) una imagen de mamografía, en (b) el resultado del filtro *detectorMic* y en (c) se realza la zona de interés marcada en las imágenes anteriores. En (d) se muestra la misma imagen tras un pre-procesamiento con filtro *realzadorCont* usando $n = 10$, en (e) el resultado de aplicar el filtro de detección de microcalcificaciones y en (f) se realza la zona de interés planteada.

Nótese que la diferencia entre las imágenes (c) y (f) es bien visible, en (c) se realzan más microcalcificaciones que en (f).

Los filtros han devenido herramientas muy útiles en el área de procesamiento de imágenes. Suelen aplicarse independientemente y combinados con otros algoritmos. Esto se debe

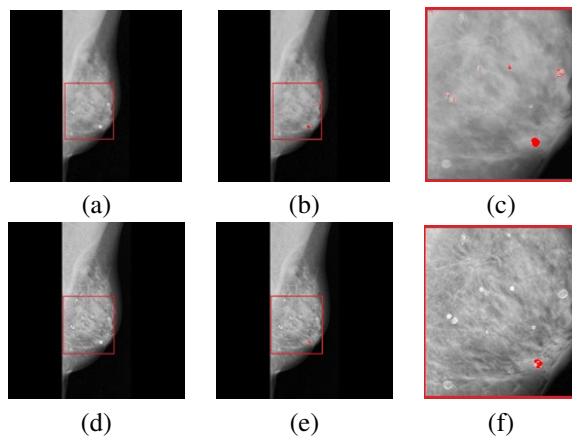


Figura 10. Filtro morfológico *detectorMic* con $n = 70$ en imagen de mamografía sin pre-procesamiento, y aplicando el filtro *realzadorCont* inicialmente

fundamentalmente a su amplio uso y sobre todo a su bajo costo computacional, lo que permite incluirlos en algoritmos que corren en tiempo real.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado bajo la asesoría médica de las doctoras Margarita Delia Serres Moret y Mercedes Valdés Tejeda del Hospital Manuel Fajardo de La Habana. Los autores agradecen el trabajo de las doctoras.

Referencias

- [1] Beucher, Nicolas y Serge Beucher: *Mamba Image User Manual*.
- [2] Bovik, Alan C.: *The Essential Guide to Image Processing*. Academic Press, 2009.
- [3] Bozek, Jelena, Mario Mustra, Kresimir Delac y Mislav Grbic: *A survey of image processing algorithms in digital mammography*. En *Recent advances in multimedia signal processing and communications*, páginas 631–657. Springer, 2009.
- [4] Breckon, Toby y Chris Solomon: *Fundamentals of digital image processing: a practical approach with examples in Matlab*. Wiley-Blackwell, 2011.
- [5] Gonzalez, Rafael C. y Richard E. Woods: *Digital Image Processing*. Pearson, 3ra edición, 2007.
- [6] Ismail, Nur Halilah Binti y Chen Soong Der: *A Review of Image Quality Assessment Algorithm to Overcome Problem of Unnatural Contrast Enhancement*. Journal of Theoretical and Applied Information Technology, 83(3):415–422.
- [7] Meyer, Fernand: *The watershed concept and its use in segmentation: a brief history*. CoRR, abs/1202.0216, 2012. <http://arxiv.org/abs/1202.0216>.
- [8] Panetta, Karen, Zhou Yicong, Sos Agaian y Jia Hongwei: *Nonlinear Unsharp Masking for Mammogram Enhancement*. IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine, 15(6):918–928, 2011.
- [9] Ricardo Gomar, Ceyli: *Empleo de filtros de la Morfología Matemática en imágenes de mamografías*. Tesis de Diploma en opción al Título de Licenciada en Ciencia de la Computación, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba, 2015. Tesis inédita.
- [10] Roerdink, Jos B.T.M. y Arnold Meijster: *The Watershed Transform: Definitions, Algorithms and Parallelization Strategies*. Fundamenta Informaticae, 41(1,2):187–228, Abril 2000.
- [11] Soille, Pierre: *Morphological Image Analysis: Principles and Applications*. Springer, 2da edición, 2004.
- [12] Vincent, Luc: *Morphological grayscale reconstruction in image analysis: applications and efficient algorithms*. IEEE Transactions on Image Processing, 2(2):176–201, 1993.