

Un modelo de triple porosidad, triple permeabilidad y derivadas fraccionarias para la presión transiente en yacimientos fracturados con geometría fractal

A triple porosity, triple permeability model with fractional derivatives for transient pressure in naturally fractured reservoirs with fractal geometry

Mario A. Vera-Villamar¹, José A. Mesejo-Chiong^{2*}

Resumen Los modelos de flujo de petróleo en un pozo constituyen un elemento fundamental de las llamadas pruebas de pozo. Estas son empleadas en la ingeniería del petróleo para pronosticar la producción en un yacimiento. Para modelar yacimientos naturalmente fracturados se requieren modelos de flujo avanzados. En este trabajo se presenta un modelo que considera la existencia de tres porosidades y tres permeabilidades primarias en un yacimiento con geometría fractal. La evolución temporal se modela mediante derivadas fraccionarias que permiten incorporar la historia productiva del pozo. Se presentan las soluciones semianalíticas del modelo y curvas tipo para diferentes condiciones de frontera.

Abstract Oil flow models in a well are a fundamental element of the so-called well tests. These are used in petroleum engineering to forecast production in a reservoir. To model naturally fractured reservoirs, advanced flow models are required. This paper presents one that considers the existence of three porosities and three primary permeabilities in a reservoir with fractal geometry. The temporal evolution is modeled by fractional derivatives that allow incorporating the productive history of the well. Semi-analytical solutions of the model and type curves for different boundary conditions are presented.

Palabras Clave

Modelo de flujo, Medios fractales, Derivada fraccionaria, Triple porosidad.

Keywords

Flow model, Fractal media, Fractional derivative, Triple porosity.

¹ Escuela Superior Politécnica del Litoral, Guayaquil, Ecuador, maverav@espol.edu.ec

² Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba, mesejo@matcom.uh.cu

*Autor para Correspondencia, Corresponding Author

Introducción

La estimación de parámetros de un yacimiento de hidrocarburos mediante pruebas de pozo es una práctica común en la ingeniería del petróleo que permite pronosticar la producción en el yacimiento. Las pruebas se realizan midiendo la presión del petróleo en el pozo y comparando la curva de presión medida con una teórica que proporciona un modelo de flujo en el pozo. Los modelos de flujo, que por lo general están basados en la ecuación de la difusión, incluyen los parámetros del yacimiento relevantes y estos se pueden estimar mediante un ajuste de la curva teórica contra la de mediciones.

Un tipo común de yacimiento de hidrocarburos son los naturalmente fracturados y vugulares (YNFV). Estos presentan junto a la matriz (la roca) sistemas de fracturas y vugulos

que pueden estar interconectados. En YNFV se han podido obtener curvas de presión que no coinciden con las teóricas que se originan mediante modelos de flujo usuales. La razón de este comportamiento no está completamente explicada, pero se atribuye a la distribución de fracturas y vugulos en tales yacimientos. Los modelos de flujo usuales son euclidianos e implícitamente asumen una distribución uniforme de fracturas y vugulos así como que las fracturas están interconectadas. Esto contradice evidencias obtenidas a partir de estudios geológicos de los YNFV. Una solución a este problema se encuentra en la teoría fractal que permite considerar una distribución no uniforme de fracturas y la existencia de estas a diferentes escalas. Por esta razón varios autores ([7], [2], [1], [8], [5]) han establecido modelos de flujo basados en asumir difusión fractal (vea [12]) en el YNFV.

En el trabajo [11] se estableció un modelo de difusión anómala con derivada temporal fraccionaria con un orden determinado por la dimensión fractal de Hausdorff que se asume para el medio donde ocurre esta difusión. Esto permitió generalizar la ecuación de la difusión fractal. En los trabajos [16], [17], [15] y [14] se presentan modelos fractales y fraccionarios para estudiar la presión en yacimientos fracturados y se señala que el uso de derivadas fraccionarias permite incorporar la historia del flujo en el comportamiento de las curvas de presión.

La existencia de los tres medios matriz, fracturas y vóculos en un YNFV requiere del empleo de un modelo donde se reflejen las características esenciales de los mismos. Estas son porosidad y permeabilidad y por ello el modelo que se presenta en este trabajo es de triple porosidad y triple permeabilidad (TPTP). Los modelos con más de una porosidad y permeabilidad se remontan a los trabajos [4] y [18]. La base fundamental de nuestro modelo se encuentra en el trabajo [6], uno de los primeros en considerar el medio vugular como influyente en el comportamiento de la presión. Teniendo en cuenta las consideraciones en los párrafos precedentes el modelo considera geometría fractal de los medios y emplea derivadas fraccionales (FF). Nuestro modelo extiende otros como los presentados en [19], [6] y [10]. Dadas las características de nuestro modelo lo nombraremos modelo TPTPFF.

En la siguiente sección se presenta el modelo en variables sin dimensiones junto con sus condiciones iniciales y varias condiciones de frontera. En la sección dos se expone el método de solución que llamaremos semianalítico ya que requiere la inversión de la transformada de Laplace mediante métodos numéricos. En la sección tres se muestran curvas solución obtenidas con diferentes valores de los parámetros del modelo

y en la sección cuatro se aportan las conclusiones adecuadas a los resultados obtenidos.

1. El modelo TPTPFF

El modelo TPTPFF está dado por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) que describen la evolución temporal de la presión de petróleo en cada uno de los medios que forman el yacimiento. El yacimiento se considera como un cilindro con propiedades axialmente simétricas, vea figura 1. Por ello se asume que la presión solo depende espacialmente de la distancia hacia el pozo dada por la variable r . Plantearemos el modelo en variables sin dimensiones r_D y t_D . Para una función cualquiera $p(r_D, t_D)$, $1 < \beta \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 1$ definamos el operador diferencial con respecto a r_D

$$D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(p(r_D, t_D)) = \frac{1}{r_D^{\beta-1}} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D^{\beta-\theta-1} \frac{\partial p(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right). \quad (1)$$

Emplearemos también la derivada fraccional de Caputo con respecto a t_D

$$D_{t_D}^{\alpha}(p(r_D, t_D)) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_D} \frac{1}{(t_D - \tau)^{\alpha}} \frac{\partial p(r_D, \tau)}{\partial t_D} d\tau \quad (2)$$

con $0 < \alpha \leq 1$.

Se supone que en cada punto del yacimiento existen presiones $p_{Dm}(r_D, t_D)$, $p_{Df}(r_D, t_D)$ y $p_{Dv}(r_D, t_D)$ en cada uno de los medios matriz, fracturas y vóculos que se pueden interpretar como un promedio de las existentes en una vecindad de r_D en el tiempo t_D (vea Warren). Con la convención $m = 1$, $f = 2$, $v = 3$ el modelo TPTPFF está formado por el sistema de EDPs

$$\kappa_1 D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(p_{D1}) - \lambda_{12}(p_{D1} - p_{D2}) - \lambda_{13}(p_{D1} - p_{D3}) = \omega_1 D_{t_D}^{\alpha_1}(p_{D1}), \quad (3)$$

$$\kappa_2 D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(p_{D2}) + \lambda_{12}(p_{D1} - p_{D2}) - \lambda_{23}(p_{D2} - p_{D3}) = \omega_2 D_{t_D}^{\alpha_2}(p_{D2}), \quad (4)$$

$$\kappa_3 D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(p_{D3}) + \lambda_{13}(p_{D1} - p_{D3}) + \lambda_{23}(p_{D2} - p_{D3}) = \omega_3 D_{t_D}^{\alpha_3}(p_{D3}), \quad (5)$$

donde, para $1 \leq i, j \leq 3$,

$$0 < \alpha_i \leq 1, \quad (6)$$

$$0 \leq \kappa_i, \omega_i \leq 1, \quad (7)$$

$$10^{-9} \leq \lambda_{ij} \leq 10^{-6}, \quad (8)$$

$$\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1. \quad (9)$$

Los parámetros α_i se emplean para las derivadas de Caputo en cada uno de los medios. Los parámetros sin dimensiones ω_i y κ_i están relacionados con la porosidad y la permeabilidad en cada uno de los medios respectivamente. Los λ_{ij} son también parámetros sin dimensiones relativos a los términos

de transferencia en las interfaces entre cada medio. El sistema euclidiano de triple porosidad triple permeabilidad se obtiene cuando $\alpha_i = 1$, $\beta = 2$ y $\theta = 0$.

Para denotar la dependencia de las soluciones p_{D1} , p_{D2} y p_{D3} de los parámetros introducimos el vector

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \theta, \\ \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \\ \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23}, s, C_D, r_{eD} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{17} \quad (10)$$

y denotamos $p_{Di} = p_{Di}(r_D, t_D, \mathbf{x})$. Los parámetros s y C_D se llaman piel (skin) y coeficiente de almacenamiento respectivamente. Ellos al igual que r_{eD} aparecerán en las condiciones

de frontera.

La triple permeabilidad que considera el modelo TTPFF está dada por la presencia de los tres parámetros κ_1 , κ_2 y κ_3 . Ellos no son independientes ya que están relacionados mediante la igualdad (9). La triple permeabilidad ocurre cuando se cumplen $0 < \kappa_i < 1$, $i = 1, 2, 3$ y (9). Modelos de una sola permeabilidad se obtienen cuando un $\kappa_i = 1$ mientras que modelos de doble permeabilidad se consideran cuando exactamente un único $\kappa_i = 0$. La triple porosidad está considerada por la presencia de ω_1 , ω_2 y ω_3 . Para los ω_i , $i = 1, 2, 3$ se tienen consideraciones similares a las explicadas anteriormente para los κ_i . Como ejemplo señalamos que el modelo presentado en [6] se obtiene del (3)-(5) cuando $\alpha_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, $\beta = 2$, $\theta = 0$ y $\kappa_2 = 0$.

1.1 Condiciones iniciales y de frontera

Las condiciones iniciales son, para $i = 1, 2, 3$,

$$p_{Di}(r_D, 0, \mathbf{x}) = 0. \quad (11)$$

Las de frontera se imponen para r_D en las que se llaman frontera interior y frontera exterior. Consideraremos tres condiciones de frontera exterior

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{Di}(r_D, t_D, \mathbf{x}) = 0, \quad (12)$$

$$p_{Di}(r_{eD}, t_D, \mathbf{x}) = 0, \quad (13)$$

$$r_{eD}^{\beta-\theta-1} \frac{\partial p_{Di}(r_{eD}, t_D, \mathbf{x})}{\partial r_D} = 0. \quad (14)$$

Como se aprecia la frontera exterior puede ser infinita o está dada por el radio exterior r_{eD} . La condición (12) se llama de yacimiento infinito, la (13) de frontera exterior a presión constante y la (14) de frontera exterior a cero flujo.

Para establecer las condiciones de frontera interior tomamos en consideración el trabajo [3] donde, cuando una sola presión p_D contribuye al flujo en el pozo, se plantean las condiciones

$$C_D \frac{dp_{wD}}{dt_D} - \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = 1, \quad (15)$$

$$p_D|_{r_D=1} - s \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = p_{wD}, \quad (16)$$

donde p_{wD} es la presión que se puede medir en el pozo. En [6] para el modelo euclidiano de triple porosidad doble permeabilidad se propone

$$\frac{\partial (\kappa_2 p_{D2} + (1 - \kappa_2) p_{D3})}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = -1$$

que equivale al caso dado por (15) cuando $C_D = 0$. Extender esta condición, bajo $C_D = 0$, al caso de triple porosidad equivale a

$$\frac{\partial (\kappa_1 p_{D1} + \kappa_2 p_{D2} + \kappa_3 p_{D3})}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = -1,$$

lo cual significa remplazar p_D en (15) y (16) por $\sum_{i=1}^3 \kappa_i p_{Di}$. Tenemos entonces

$$\sum_{i=1}^3 \kappa_i \left(C_D \frac{dp_{wD}}{dt_D} - \frac{\partial p_{Di}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} \right) = \sum_{i=1}^3 \kappa_i, \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^3 \kappa_i \left(p_{Di}|_{r_D=1} - s \frac{\partial p_{Di}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} \right) = \sum_{i=1}^3 \kappa_i p_{wD}, \quad (18)$$

que equivalen a (15) y (16) respectivamente dado que se cumple (9).

De (17) y (18) se obtienen las condiciones de frontera interior que emplearemos, estas son

$$C_D \frac{dp_{wD}}{dt_D} - \frac{\partial p_{Di}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = 1, \quad (19)$$

$$p_{Di}|_{r_D=1} - s \frac{\partial p_{Di}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = p_{wD}, \quad (20)$$

para $i = 1, 2, 3$. A diferencia de (12)-(14), que si establecen tres condiciones de frontera exterior diferenciadas, (19) y (20) constituyen una única condición de frontera exterior dada por su acoplamiento mediante p_{wD} .

En resumen, el modelo TTPFF se estudiará con las condiciones iniciales (11), las de frontera exterior (12)-(14) y la de frontera interior dada por (19) y (20). Se deben encontrar tres soluciones que, de acuerdo a la condición de frontera exterior, llamaremos de yacimiento infinito (YINF), frontera exterior a presión constante (FEPC) y frontera exterior a cero flujo (FECF).

2. Soluciones semianalíticas del modelo TTPFF

El sistema (3)-(5) puede ser resuelto por diferentes vías. Una de ellas es la numérica mediante diferencias finitas u otro método apropiado. Sin embargo existe dificultad para encontrar métodos numéricos capaces de trabajar con condiciones de frontera infinitas como la (12). Por ello es conveniente emplear otra vía de solución. Una de ellas es aplicar la transformada de Laplace con respecto a t_D a las funciones p_{Di} , $i = 1, 2, 3$. De esta forma el sistema de EDPs se transforma en uno de ecuaciones diferenciales ordinarias que puede resolverse de forma analítica para la combinación de la condición de frontera interior (19)-(20) con las diferentes condiciones de frontera externa (12)-(14). El único inconveniente de este método de solución radica en la necesidad de invertir la transformada de Laplace para lo cual, en el presente caso, solo se pueden emplear métodos numéricos.

Tenemos entonces que el método de solución semianalítico para resolver el sistema (3)-(5) emplea la transformada de Laplace de las funciones p_{Di} , $i = 1, 2, 3$, con respecto a t_D . La transformada de Laplace de las funciones p_{Di} está dada por

$$\mathcal{L}\{p_{Di}(r_D, t_D, \mathbf{x})\} = \int_0^\infty e^{-u t_D} p_{Di}(r_D, t_D, \mathbf{x}) dt_D. \quad (21)$$

Emplearemos la notación

$$\hat{p}_{Di}(r_D, u, \mathbf{x}) = \mathcal{L}\{p_{Di}(r_D, t_D, \mathbf{x})\}$$

y denominaremos a u como *tiempo de Laplace*. Una propiedad de la derivada fraccionaria de Caputo (vea [13]), cuando $0 < \alpha_i \leq 1$, es

$$\mathcal{L}\{D_{t_D}^{\alpha_i}(p_{Di})\} = u^{\alpha_i} \hat{p}_{Di}(r_D, u, \mathbf{x}) - p_{Di}(r_D, 0, \mathbf{x}).$$

Dadas las condiciones iniciales (11) obtenemos

$$\mathcal{L}\{D_{t_D}^{\alpha_i}(p_{Di})\} = u^{\alpha_i} \hat{p}_{Di}(r_D, u, \mathbf{x}). \quad (22)$$

Aplicando la transformada de Laplace (21) a cada una de las ecuaciones del sistema (3)-(5) y considerando (22) obtenemos para $\hat{p}_{Di}(r_D, u, \mathbf{x})$, $i = 1, 2, 3$, el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\kappa_1 D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(\hat{p}_{D1}) - a_{11}(u, \mathbf{x}) \hat{p}_{D1} + \lambda_{12} \hat{p}_{D2} + \lambda_{13} \hat{p}_{D3} = 0, \quad (23)$$

$$\kappa_2 D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(\hat{p}_{D2}) + \lambda_{12} \hat{p}_{D1} - a_{22}(u, \mathbf{x}) \hat{p}_{D2} + \lambda_{23} \hat{p}_{D3} = 0, \quad (24)$$

$$\kappa_3 D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(\hat{p}_{D3}) + \lambda_{13} \hat{p}_{D1} + \lambda_{23} \hat{p}_{D2} - a_{33}(u, \mathbf{x}) \hat{p}_{D3} = 0, \quad (25)$$

donde

$$a_{11}(u, \mathbf{x}) = \omega_1 u^{\alpha_1} + \lambda_{12} + \lambda_{13}, \quad (26)$$

$$a_{22}(u, \mathbf{x}) = \omega_2 u^{\alpha_2} + \lambda_{12} + \lambda_{23}, \quad (27)$$

$$a_{33}(u, \mathbf{x}) = \omega_3 u^{\alpha_3} + \lambda_{13} + \lambda_{23}. \quad (28)$$

Las condiciones de frontera exterior (12)-(14), para $1 \leq i \leq 3$, se transforman en

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \hat{p}_{Di}(r_D, u, \mathbf{x}) = 0, \quad (29)$$

$$\hat{p}_{Di}(r_{eD}, u, \mathbf{x}) = 0, \quad (30)$$

$$r_{eD}^{\beta-\theta-1} \frac{\partial \hat{p}_{Di}(r_{eD}, u, \mathbf{x})}{\partial r_D} = 0. \quad (31)$$

Las de frontera interior, para $1 \leq i \leq 3$, dado que $p_{wD}(0, \mathbf{x}) = 0$, son

$$C_D u \hat{p}_{wD} - \frac{\partial \hat{p}_{Di}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = \frac{1}{u}, \quad (32)$$

$$\hat{p}_{Di}|_{r_D=1} - s \frac{\partial \hat{p}_{Di}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = \hat{p}_{wD}. \quad (33)$$

Combinando ambas ecuaciones tenemos, para $1 \leq i \leq 3$, las condiciones de frontera interior (tipo Neumann)

$$C_D u \hat{p}_{Di}|_{r_D=1} - (s C_D u + 1) \frac{\partial \hat{p}_{Di}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = \frac{1}{u}. \quad (34)$$

La presión $\hat{p}_{wD}(u, \mathbf{x})$, que no es más que la presión en el pozo en el tiempo de Laplace, se calcula mediante cualquiera de las ecuaciones (33). La presión $p_{wD}(t_D, \mathbf{x})$ en tiempo sin dimensiones es la fundamental que se desea obtener ya que permite comparar las solución del modelo con datos de mediciones reales. Dadas las ecuaciones (33) tenemos que

$$p_{wD} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \hat{p}_{Di}|_{r_D=1} \right\} - s \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\partial \hat{p}_{Di}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} \right\}, \quad (35)$$

para un $1 \leq i \leq 3$ tal que $\kappa_i \neq 0$. Obsérvese que si $C_D \neq 0$

$$u \hat{p}_{wD} = \frac{1}{C_D} \left(\frac{1}{u} + \frac{\partial \hat{p}_{Di}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} \right),$$

por lo cual la derivada logarítmica de Bourdet definida por

$$\frac{dp_{wD}}{d \ln(t_D)} = t_D \frac{dp_{wD}}{dt_D}$$

es, para el i mismo tomado en (35),

$$t_D \frac{dp_{wD}}{dt_D} = \frac{t_D}{C_D} \left(1 + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\partial \hat{p}_{Di}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} \right\} \right). \quad (36)$$

El gráfico de la derivada logarítmica de Bourdet es uno de los fundamentales que se emplean en la generación de curvas tipo y por ello lo presentaremos en nuestros resultados.

2.1 Solución general del sistema (23)-(25)

Dadas (7) y (9) tenemos para los κ_i , $i = 1, 2, 3$, las siguientes posibilidades:

1. Se tiene un $\kappa_i = 1$ y los restantes iguales a cero, o sea

$$(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = (1, 0, 0),$$

$$(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = (0, 1, 0),$$

$$(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = (0, 0, 1).$$

2. Se tiene $\kappa_i = 0$ y los restantes distintos de cero, o sea

$$\kappa_1 = 0, 0 < \kappa_2 < 1, \kappa_3 = 1 - \kappa_2,$$

$$\kappa_2 = 0, 0 < \kappa_3 < 1, \kappa_1 = 1 - \kappa_3,$$

$$\kappa_3 = 0, 0 < \kappa_2 < 1, \kappa_1 = 1 - \kappa_2.$$

3. Se tiene que

$$0 < \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 < 1$$

junto a la condición (9).

Los casos 1 y 2 constituyen casos extremos del más general dado por 3. Observe que en los casos 1 y 2 desaparece el operador diferencial en algunas o alguna de las ecuaciones (23)-(25) convirtiéndolas de diferenciales en algebraicas. Ilustraremos la vía de solución en los casos 1 y 2 mediante un único ejemplo de los tres posibles.

2.1.1 Solución general cuando un $\kappa_i = 1$

Supongamos $\kappa_1 = 1$ lo cual significa que el flujo primario solo ocurre en la matriz. Dado que $\kappa_2 = \kappa_3 = 0$ desaparecen los términos $D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(\hat{p}_{D2})$ y $D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(\hat{p}_{D3})$ en las ecuaciones (24) y (25). Por ello el sistema (23)-(25) queda reducido a la ecuación diferencial

$$D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(\hat{p}_{D1}) - a_{11}(u, \mathbf{x})\hat{p}_{D1} + \lambda_{12}\hat{p}_{D2} + \lambda_{13}\hat{p}_{D3} = 0, \quad (37)$$

y a las ecuaciones

$$\lambda_{12}\hat{p}_{D1} - a_{22}(u, \mathbf{x})\hat{p}_{D2} + \lambda_{23}\hat{p}_{D3} = 0, \quad (38)$$

$$\lambda_{13}\hat{p}_{D1} + \lambda_{23}\hat{p}_{D2} - a_{33}(u, \mathbf{x})\hat{p}_{D3} = 0. \quad (39)$$

De las ecuaciones (38) y (39) se obtiene

$$\hat{p}_{D2} = \frac{a_{33}\lambda_{12} + \lambda_{13}\lambda_{23}}{a_{22}a_{33} - \lambda_{23}^2}\hat{p}_{D1},$$

$$\hat{p}_{D3} = \frac{a_{22}\lambda_{13} + \lambda_{12}\lambda_{23}}{a_{22}a_{33} - \lambda_{23}^2}\hat{p}_{D1}.$$

y sustituyendo en (37) obtenemos la ecuación diferencial ordinaria (EDO)

$$\frac{1}{r_D^\theta} \frac{\partial^2 \hat{p}_{D1}}{\partial r_D^2} + \frac{\beta - 1 - \theta}{r_D^{(\theta+1)}} \frac{\partial \hat{p}_{D1}}{\partial r_D} - j_1(u, \mathbf{x})\hat{p}_{D1} = 0 \quad (40)$$

donde

$$j_1(u, \mathbf{x}) = \frac{a_{11}a_{22}a_{33} - \left(a_{11}\lambda_{23}^2 + a_{22}\lambda_{13}^2 + a_{33}\lambda_{12}^2 + 2\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{23} \right)}{a_{22}a_{33} - \lambda_{23}^2}.$$

La solución general de (40) es

$$\hat{p}_{D1}(r_D, u, \mathbf{x}) = r_D^\zeta \left(c_{11} I_\nu \left(\gamma \sqrt{j_1} r_D^{1/\gamma} \right) + c_{12} K_\nu \left(\gamma \sqrt{j_1} r_D^{1/\gamma} \right) \right) \quad (41)$$

donde

$$\gamma = \frac{2}{\theta + 2}, \quad \zeta = \frac{1}{\gamma} - \frac{\beta}{2}, \quad \nu = -\gamma\zeta, \quad (42)$$

y $c_{1j} = c_{1j}(u, \mathbf{x})$ para $j = 1, 2$ son constantes arbitrarias de integración. Considerando (41) y (33) obtenemos

$$\hat{p}_{wD}(u, \mathbf{x}) = c_{11} \left(I_\nu \left(\gamma \sqrt{j_1} \right) - s \sqrt{j_1} I_{\nu+1} \left(\gamma \sqrt{j_1} \right) \right) + c_{12} \left(K_\nu \left(\gamma \sqrt{j_1} \right) + s \sqrt{j_1} K_{\nu+1} \left(\gamma \sqrt{j_1} \right) \right). \quad (43)$$

En los casos $\kappa_2 = 1$ que significa flujo primario solo en fracturas o $\kappa_3 = 1$ para flujo primario solo en vórgulos se obtienen soluciones análogas a 41 y 43 cambiando el valor de $j_1(u, \mathbf{x})$ de forma apropiada.

2.1.2 Solución general cuando un único $\kappa_i = 0$

Supongamos $\kappa_1 = 0$, en este caso $0 < \kappa_2 < 1$ y el sistema (23)-(25) queda de la forma

$$-a_{11}\hat{p}_{D1} + \lambda_{12}\hat{p}_{D2} + \lambda_{13}\hat{p}_{D3} = 0, \quad (44)$$

$$\kappa_2 D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(\hat{p}_{D2}) + \lambda_{12}\hat{p}_{D1} - a_{22}\hat{p}_{D2} + \lambda_{23}\hat{p}_{D3} = 0, \quad (45)$$

$$\kappa_3 D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(\hat{p}_{D3}) + \lambda_{13}\hat{p}_{D1} + \lambda_{23}\hat{p}_{D2} - a_{33}\hat{p}_{D3} = 0, \quad (46)$$

con $\kappa_3 = 1 - \kappa_2$. De (44) se obtiene

$$\hat{p}_{D1} = \frac{\lambda_{12}\hat{p}_{D2} + \lambda_{13}\hat{p}_{D3}}{a_{11}}.$$

Sustituyendo en (45) y (46) tenemos el sistema de EDOs

$$\kappa_2 D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(\hat{p}_{D2}) - b_{11}\hat{p}_{D2} + b_{12}\hat{p}_{D3} = 0, \quad (47)$$

$$(1 - \kappa_2) D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(\hat{p}_{D3}) + b_{12}\hat{p}_{D2} - b_{22}\hat{p}_{D3} = 0, \quad (48)$$

donde

$$b_{11} = b_{11}(u, \mathbf{x}) = a_{22} - \frac{\lambda_{12}^2}{a_{11}}, \quad (49)$$

$$b_{12} = b_{12}(u, \mathbf{x}) = \frac{\lambda_{12}\lambda_{13}}{a_{11}} + \lambda_{23}, \quad (50)$$

$$b_{22} = b_{22}(u, \mathbf{x}) = a_{33} - \frac{\lambda_{13}^2}{a_{11}}. \quad (51)$$

Podemos escribir (47)-(48) como

$$D_{r_D}^{(\beta, \theta)} \begin{pmatrix} \hat{p}_{D2} \\ \hat{p}_{D3} \end{pmatrix} - B(u, \mathbf{x}) \begin{pmatrix} \hat{p}_{D2} \\ \hat{p}_{D3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

donde

$$B(u, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{b_{11}}{\kappa_2} & -\frac{b_{12}}{1-\kappa_2} \\ -\frac{b_{12}}{1-\kappa_2} & \frac{b_{22}}{1-\kappa_2} \end{pmatrix}.$$

Observemos que si B fuese diagonal el sistema dado por (52) estaría desacoplado. Tenemos que se cumple $B = QJQ^{-1}$ con

$$Q(u, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q_{21}(u, \mathbf{x}) & q_{22}(u, \mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

$$J(u, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} j_{11}(u, \mathbf{x}) & 0 \\ 0 & j_{22}(u, \mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

y donde

$$q_{21}(u, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\kappa_3 b_{12}} (b_{(-)} - d),$$

$$q_{22}(u, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\kappa_3 b_{12}} (b_{(-)} + d),$$

$$j_{11}(u, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\kappa_2 \kappa_3} (b_{(+)} + d),$$

$$j_{22}(u, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\kappa_2 \kappa_3} (b_{(+)} - d),$$

$$b_{(-)} = \kappa_3 b_{11} - \kappa_2 b_{22},$$

$$b_{(+)} = \kappa_3 b_{11} + \kappa_2 b_{22},$$

$$d(u, \mathbf{x}) = \sqrt{b_{(-)}^2 + 4\kappa_2 \kappa_3 b_{12}^2}.$$

Si denotamos

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{D2} \\ \hat{y}_{D3} \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} \hat{p}_{D2} \\ \hat{p}_{D3} \end{pmatrix} \quad (53)$$

podemos transformar (52) en

$$\begin{pmatrix} D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(\hat{y}_{D2}) \\ D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(\hat{y}_{D3}) \end{pmatrix} - J(u, \mathbf{x}) \begin{pmatrix} \hat{y}_{D2} \\ \hat{y}_{D3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que equivale a

$$D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(\hat{y}_{D2}) - j_{11}(u, \mathbf{x}) \hat{y}_{D2} = 0, \quad (54)$$

$$D_{r_D}^{(\beta, \theta)}(\hat{y}_{D3}) - j_{22}(u, \mathbf{x}) \hat{y}_{D3} = 0. \quad (55)$$

Las soluciones $\hat{y}_{D2}(r_D, u, \mathbf{x})$ y $\hat{y}_{D3}(r_D, u, \mathbf{x})$ de (54) y (55) están dadas por

$$\hat{y}_{D2} = r_D^\zeta \left(c_{21} I_\nu \left(\gamma \sqrt{j_{11}} r_D^{1/\gamma} \right) + c_{22} K_\nu \left(\gamma \sqrt{j_{11}} r_D^{1/\gamma} \right) \right),$$

$$\hat{y}_{D3} = r_D^\zeta \left(c_{31} I_\nu \left(\gamma \sqrt{j_{22}} r_D^{1/\gamma} \right) + c_{32} K_\nu \left(\gamma \sqrt{j_{22}} r_D^{1/\gamma} \right) \right).$$

A partir de (53) y los coeficientes de $Q(u, \mathbf{x})$ obtenemos

$$\hat{p}_{D2}(r_D, u, \mathbf{x}) = \hat{y}_{D2} + \hat{y}_{D3}, \quad (56)$$

$$\hat{p}_{D3}(r_D, u, \mathbf{x}) = q_{21}^{(vi)} \hat{y}_{D2} + q_{22}^{(vi)} \hat{y}_{D3}. \quad (57)$$

La transformada de Laplace de la presión en el pozo $\hat{p}_{wD}(u, \mathbf{x})$ se obtiene sustituyendo en (33) una de las presiones dadas por (56) y (57).

El mismo método de solución presentado anteriormente puede emplearse para los casos cuando solo κ_2 o solo κ_3 se anulan.

2.1.3 Solución general cuando $0 < \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 < 1$

En este caso el sistema (23)-(25) puede escribirse de la forma

$$D_{r_D}^{(\beta, \theta)} \begin{bmatrix} \hat{p}_{D1} \\ \hat{p}_{D2} \\ \hat{p}_{D3} \end{bmatrix} - \bar{B}(u, \mathbf{x}) \begin{bmatrix} \hat{p}_{D1} \\ \hat{p}_{D2} \\ \hat{p}_{D3} \end{bmatrix} = 0 \quad (58)$$

donde

$$\bar{B}(u, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{\kappa_1} & -\frac{\lambda_{12}}{\kappa_1} & -\frac{\lambda_{13}}{\kappa_1} \\ -\frac{\lambda_{12}}{\kappa_2} & \frac{a_{22}}{\kappa_2} & -\frac{\lambda_{23}}{\kappa_2} \\ -\frac{\lambda_{13}}{\kappa_3} & -\frac{\lambda_{23}}{\kappa_3} & \frac{a_{33}}{\kappa_3} \end{pmatrix}. \quad (59)$$

El polinomio característico de $\bar{B}(u, \mathbf{x})$ es

$$p_c(\lambda) = \lambda^3 + b(u, \mathbf{x})\lambda^2 + c(u, \mathbf{x})\lambda + d(u, \mathbf{x})$$

donde

$$b = -\frac{1}{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3} \begin{pmatrix} \kappa_2 \kappa_3 a_{11} + \\ \kappa_1 \kappa_3 a_{22} + \kappa_1 \kappa_2 a_{33} \end{pmatrix},$$

$$c = \frac{1}{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3} \begin{pmatrix} \kappa_1 (a_{22} a_{33} - \lambda_{23}^2) + \\ \kappa_2 (a_{11} a_{33} - \lambda_{13}^2) + \\ \kappa_3 (a_{11} a_{22} - \lambda_{12}^2) \end{pmatrix},$$

$$d = -\frac{1}{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3} \begin{pmatrix} a_{11} a_{22} a_{33} - a_{33} \lambda_{12}^2 - \\ a_{22} \lambda_{13}^2 - a_{11} \lambda_{23}^2 - \\ 2 \lambda_{12} \lambda_{13} \lambda_{23} \end{pmatrix}.$$

Sean

$$p_0 = \frac{3c - b^2}{9},$$

$$q_0 = -\frac{27d - 9bc + 2b^3}{54},$$

dado que se cumple

$$p_0^3(u, \mathbf{x}) + q_0^2(u, \mathbf{x}) \leq 0$$

hay tres raíces reales y positivas de $p_c(\lambda)$ para todo (u, \mathbf{x}) . Para calcularlas sean

$$\theta_1(u, \mathbf{x}) = \frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{q_0}{p_0 \sqrt{-p_0}} \right),$$

$$\theta_2(u, \mathbf{x}) = \frac{1}{3} (\pi - \theta_1),$$

$$\theta_3(u, \mathbf{x}) = -\frac{1}{3} (\pi + \theta_1),$$

entonces, para $i = 1, 2, 3$, las raíces λ_i de $p_c(\lambda)$ están dadas por

$$\lambda_i(u, \mathbf{x}) = 2\sqrt{-p_0} \sin(\theta_i) - \frac{b}{3}. \quad (60)$$

Sea $Q(u, \mathbf{x})$ la matriz dada por

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11}(\lambda_1) & q_{12}(\lambda_2) & q_{13}(\lambda_3) \\ q_{21}(\lambda_1) & q_{22}(\lambda_2) & q_{23}(\lambda_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (61)$$

donde, para $i = 1, 2, 3$,

$$q_0(\lambda_i) = a_{22} - \lambda_i \kappa_2,$$

$$q_1(\lambda_i) = \lambda_{12} \lambda_{23} + \lambda_{13} q_0(\lambda_i),$$

$$q_{1i}(\lambda_i) = \frac{a_{22} a_{33} - \lambda_{23}^2 - \lambda_i (\kappa_3 q_0(\lambda_i) + \kappa_2 a_{33})}{q_1(\lambda_i)},$$

$$q_{2i}(\lambda_i) = \frac{\lambda_{13} \lambda_{23} + \lambda_{12} (a_{33} - \lambda_i \kappa_3)}{q_1(\lambda_i)}.$$

Denotando

$$j_{ii}(u, \mathbf{x}) = \lambda_i(u, \mathbf{x}) \quad (62)$$

y

$$J(u, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} j_{11}(u, \mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & j_{22}(u, \mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & j_{33}(u, \mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

tenemos que la matriz $\bar{B}(u, \mathbf{x})$ en (59) tiene la descomposición

$$\bar{B}(u, \mathbf{x}) = Q(u, \mathbf{x}) J(u, \mathbf{x}) Q^{-1}(u, \mathbf{x}).$$

Al igual que en la sección anterior el sistema (58) puede transformarse en

$$D_{r_D}^{(\beta, \theta)} \begin{bmatrix} \hat{y}_{D1} \\ \hat{y}_{D2} \\ \hat{y}_{D3} \end{bmatrix} - J(u, \mathbf{x}) \begin{bmatrix} \hat{y}_{D1} \\ \hat{y}_{D2} \\ \hat{y}_{D3} \end{bmatrix} = 0$$

donde

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{D1} \\ \hat{y}_{D2} \\ \hat{y}_{D3} \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} \hat{p}_{D1} \\ \hat{p}_{D2} \\ \hat{p}_{D3} \end{bmatrix}.$$

Se tiene que las $\hat{y}_{Di}(r_D, u, \mathbf{x})$, para $i = 1, 2, 3$, están dadas por

$$\hat{y}_{Di} = r_D^\zeta \left(c_{i1} I_\nu \left(\gamma \sqrt{j_{ii}} r_D^{1/\gamma} \right) + c_{i2} K_\nu \left(\gamma \sqrt{j_{ii}} r_D^{1/\gamma} \right) \right) \quad (63)$$

y se obtiene

$$\hat{p}_{D1} = q_{11}\hat{y}_{D1} + q_{12}\hat{y}_{D2} + q_{13}\hat{y}_{D3}, \quad (64)$$

$$\hat{p}_{D2} = q_{21}\hat{y}_{D1} + q_{22}\hat{y}_{D2} + q_{23}\hat{y}_{D3}, \quad (65)$$

$$\hat{p}_{D3} = \hat{y}_{D1} + \hat{y}_{D2} + \hat{y}_{D3}. \quad (66)$$

Al igual que en la sección anterior la presión $p_{wD}(u, \mathbf{x})$ se obtiene empleando una de las presiones \hat{p}_{Di} en (33).

2.2 Soluciones particulares

Las soluciones particulares para YINF, FEPC y FECF se hallan determinando las constantes arbitrarias de integración que aparecen en las soluciones calculadas en las secciones precedentes. Recordemos que tenemos un total de siete casos posibles determinados por los valores de κ_i , $i = 1, 2, 3$ además de las tres posibles condiciones de frontera YINF, FEPC y FECF lo cual genera un conjunto de 21 posibles soluciones. Para no extender demasiado este trabajo presentaremos solo las soluciones para yacimiento infinito en cada uno de los siete casos posibles.

2.2.1 YINF cuando un $\kappa_i = 1$

Debemos satisfacer la condición de frontera exterior (29) y en el caso $\kappa_1 = 1$ tenemos la solución (41). Dado que

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} I_\nu \left(\gamma \sqrt{j_1} (u, \mathbf{x}) r_D^{1/\gamma} \right) = +\infty,$$

se debe cumplir que

$$c_{11}(u, \mathbf{x}) = 0.$$

Se obtiene

$$\hat{p}_{D1} = c_{12} r_D^\zeta K_\nu \left(\gamma \sqrt{j_1} r_D^{1/\gamma} \right),$$

y por ello

$$\frac{\partial \hat{p}_{D1}}{\partial r_D} = -c_{12} r_D^{1/\gamma + \zeta - 1} \sqrt{j_1} K_{\nu+1} \left(\gamma \sqrt{j_1} r_D^{1/\gamma} \right).$$

El valor de $c_{12}(u, \mathbf{x})$ se obtiene de (34) y resulta en

$$c_{12} = \frac{1}{u \sqrt{j_1} K_{\nu+1} (\gamma \sqrt{j_1}) + C_D u^2 K_1},$$

donde

$$K_1 = K_\nu \left(\gamma \sqrt{j_1} \right) + s \sqrt{j_1} K_{\nu+1} \left(\gamma \sqrt{j_1} \right).$$

Empleando (43) obtenemos que

$$\hat{p}_{wD}(u, \mathbf{x}) = \frac{K_1(u, \mathbf{x})}{u \sqrt{j_1}(u, \mathbf{x}) K_{\nu+1} \left(\gamma \sqrt{j_1}(u, \mathbf{x}) \right) + C_D u^2 K_1(u, \mathbf{x})}. \quad (67)$$

En los casos $\kappa_2 = 1$ y $\kappa_3 = 1$ la presión $\hat{p}_{wD}(u, \mathbf{x})$ se obtiene reemplazando en (67) $j_1(u, \mathbf{x})$ por $j_2(u, \mathbf{x})$ y $j_3(u, \mathbf{x})$ respectivamente. Los valores de $j_2(u, \mathbf{x})$ y $j_3(u, \mathbf{x})$ están dados por

$$j_2(u, \mathbf{x}) = \frac{a_{11}a_{22}a_{33} - \left(\frac{a_{11}\lambda_{23}^2 + a_{22}\lambda_{13}^2 + a_{33}\lambda_{12}^2 + 2\lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{23}}{a_{11}a_{33} - \lambda_{13}^2} \right)}{a_{11}a_{33} - \lambda_{13}^2},$$

$$j_3(u, \mathbf{x}) = \frac{a_{11}a_{22}a_{33} - \left(\frac{a_{11}\lambda_{23}^2 + a_{22}\lambda_{13}^2 + a_{33}\lambda_{12}^2 + \lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{23}}{a_{11}a_{22} - \lambda_{12}^2} \right)}{a_{11}a_{22} - \lambda_{12}^2}.$$

2.2.2 YINF cuando un único $\kappa_i = 0$

Tomaremos como ejemplo $\kappa_1 = 0$. En este caso las soluciones generales \hat{p}_{D2} y \hat{p}_{D3} están dadas por (56) y (57). Se deben encontrar las constantes c_{21} , c_{22} , c_{31} y c_{32} . De (29) se deduce que $c_{21} = c_{31} = 0$ ya que, al igual que en el caso precedente,

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} r_D^\zeta I_\nu \left(\gamma \sqrt{j_{ii}} r_D^{1/\gamma} \right) = +\infty$$

para $i = 1, 2$. Se tiene que \hat{p}_{D2} y \hat{p}_{D3} en (56) y (57) se reducen a

$$\hat{p}_{D2} = r_D^\zeta \left(\frac{c_{22} K_\nu \left(\gamma \sqrt{j_{11}} r_D^{1/\gamma} \right) + c_{32} K_\nu \left(\gamma \sqrt{j_{22}} r_D^{1/\gamma} \right)}{c_{22} K_\nu \left(\gamma \sqrt{j_{11}} r_D^{1/\gamma} \right) + c_{32} K_\nu \left(\gamma \sqrt{j_{22}} r_D^{1/\gamma} \right)} \right),$$

$$\hat{p}_{D3} = r_D^\zeta \left(\frac{q_{21} c_{22} K_\nu \left(\gamma \sqrt{j_{11}} r_D^{1/\gamma} \right) + q_{22} c_{32} K_\nu \left(\gamma \sqrt{j_{22}} r_D^{1/\gamma} \right)}{q_{22} c_{32} K_\nu \left(\gamma \sqrt{j_{22}} r_D^{1/\gamma} \right)} \right),$$

con las derivadas parciales

$$\frac{\partial \hat{p}_{D2}}{\partial r_D} = -r_D^{1/\gamma + \zeta - 1} \left(\frac{c_{22} \sqrt{j_{11}} K_{\nu+1} \left(\gamma \sqrt{j_{11}} r_D^{1/\gamma} \right) + c_{32} \sqrt{j_{22}} K_{\nu+1} \left(\gamma \sqrt{j_{22}} r_D^{1/\gamma} \right)}{c_{22} K_\nu \left(\gamma \sqrt{j_{11}} r_D^{1/\gamma} \right) + c_{32} K_\nu \left(\gamma \sqrt{j_{22}} r_D^{1/\gamma} \right)} \right),$$

$$\frac{\partial \hat{p}_{D3}}{\partial r_D} = -r_D^{1/\gamma + \zeta - 1} \left(\frac{c_{22} q_{21} \sqrt{j_{11}} K_{\nu+1} \left(\gamma \sqrt{j_{11}} r_D^{1/\gamma} \right) + c_{32} q_{22} \sqrt{j_{22}} K_{\nu+1} \left(\gamma \sqrt{j_{22}} r_D^{1/\gamma} \right)}{c_{32} q_{22} \sqrt{j_{22}} K_{\nu+1} \left(\gamma \sqrt{j_{22}} r_D^{1/\gamma} \right)} \right).$$

Las constantes c_{22} , c_{32} se obtienen de (34). Se construye el sistema

$$c_{22} g_{11} + c_{32} g_{12} = \frac{1}{u}$$

$$c_{22} q_{21} g_{11} + c_{32} q_{22} g_{12} = \frac{1}{u}$$

donde

$$g_{11} = C_D u K_{1\nu} + \sqrt{j_{11}} K_{\nu+1} \left(\gamma \sqrt{j_{11}} \right),$$

$$g_{12} = C_D u K_{2\nu} + \sqrt{j_{22}} K_{\nu+1} \left(\gamma \sqrt{j_{22}} \right),$$

con

$$K_{1v} = K_v \left(\gamma \sqrt{j_{11}} \right) + s \sqrt{j_{11}} K_{v+1} \left(\gamma \sqrt{j_{11}} \right),$$

$$K_{2v} = K_v \left(\gamma \sqrt{j_{22}} \right) + s \sqrt{j_{22}} K_{v+1} \left(\gamma \sqrt{j_{22}} \right).$$

Se obtiene

$$c_{22} = \frac{1}{u(q_{22} - q_{21})} \frac{(q_{22} - 1)}{g_{11}},$$

$$c_{32} = \frac{1}{u(q_{22} - q_{21})} \frac{(1 - q_{21})}{g_{12}}.$$

Una vez determinados los valores de c_{22} y c_{32} calculamos \hat{p}_{D2} que sustituida en (33) nos permite obtener

$$\hat{p}_{wD} = \frac{1}{u(q_{22} - q_{21})} \left(\frac{\frac{(q_{22}-1)K_{1v}}{C_{Du}K_{1v} + \sqrt{j_{11}}K_{v+1}(\gamma\sqrt{j_{11}})} + \frac{(1-q_{21})K_{2v}}{C_{Du}K_{2v} + \sqrt{j_{22}}K_{v+1}(\gamma\sqrt{j_{22}})}}{C_{Du}K_{2v} + \sqrt{j_{22}}K_{v+1}(\gamma\sqrt{j_{22}})} \right). \quad (68)$$

2.2.3 YINF cuando $0 < \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 < 1$

Considerando las condiciones (29), al igual que en las situaciones anteriores, obtenemos

$$c_{11} = c_{21} = c_{31} = 0.$$

Para encontrar las c_{i2} , $i = 1, 2, 3$, se emplea (34) y se plantea el sistema

$$c_{12}g_{11} + c_{22}g_{12} + c_{32}g_{13} = \frac{1}{u},$$

$$c_{12}q_{21}g_{11} + c_{22}q_{22}g_{12} + c_{32}q_{23}g_{13} = \frac{1}{u},$$

$$c_{12}q_{11}g_{11} + c_{22}q_{12}g_{12} + c_{32}q_{13}g_{13} = \frac{1}{u}.$$

donde

$$g_{11} = C_{Du}K_{1v} + \sqrt{j_{11}}K_{v+1} \left(\gamma \sqrt{j_{11}} \right),$$

$$g_{12} = C_{Du}K_{2v} + \sqrt{j_{22}}K_{v+1} \left(\gamma \sqrt{j_{22}} \right),$$

$$g_{13} = C_{Du}K_{3v} + \sqrt{j_{33}}K_{v+1} \left(\gamma \sqrt{j_{33}} \right),$$

$$K_{iv} = K_v \left(\gamma \sqrt{j_{ii}} \right) + s \sqrt{j_{ii}} K_{v+1} \left(\gamma \sqrt{j_{ii}} \right).$$

La solución está dada por

$$c_{12} = \frac{1}{u} \frac{q_{c12}}{g_{11}q_s}, c_{22} = \frac{1}{u} \frac{q_{c22}}{g_{12}q_s}, c_{32} = \frac{1}{u} \frac{q_{c32}}{g_{13}q_s}$$

donde

$$q_{c12} = q_{13}q_{22} - q_{12}q_{23} + q_{23}$$

$$- q_{13} + q_{12} - q_{22},$$

$$q_{c22} = q_{11}q_{23} - q_{13}q_{21} + q_{21}$$

$$- q_{11} + q_{13} - q_{23},$$

$$q_{c32} = q_{12}q_{21} - q_{11}q_{22} +$$

$$q_{11} - q_{12} + q_{22} - q_{21},$$

$$q_s = q_{13}q_{22} - q_{12}q_{23} +$$

$$q_{11}q_{23} - q_{13}q_{21} + q_{12}q_{21} - q_{11}q_{22}.$$

Sustituyendo c_{12} , c_{22} y c_{32} en (63) se obtienen las funciones \hat{y}_{Di} , $i = 1, 2, 3$. Sustituyendo las \hat{y}_{Di} en (64)-(66) se obtienen \hat{p}_{D1} , \hat{p}_{D2} y \hat{p}_{D3} . Finalmente empleando \hat{p}_{D3} en (33) se calcula

$$\hat{p}_{wD} = \frac{1}{uq_s} \left(\frac{q_{c12}K_{1v}}{g_{11}} + \frac{q_{c22}K_{2v}}{g_{12}} + \frac{q_{c32}K_{3v}}{g_{13}} \right). \quad (69)$$

2.3 Soluciones en tiempo sin dimensiones

Una vez obtenidas las soluciones $\hat{p}_{wD}(u, \mathbf{x})$ se necesita aplicar la transformada inversa de Laplace para obtener las correspondientes soluciones $p_{wD}(t_D, \mathbf{x})$ en tiempo sin dimensiones. Dada la complejidad de las ecuaciones para $\hat{p}_{wD}(u, \mathbf{x})$ es imposible aplicar métodos analíticos de inversión de la transformada de Laplace. Debido a ello se emplearán métodos numéricos para calcular $p_{wD}(t_{iD}, \mathbf{x})$ en un cierto conjunto de puntos t_{iD} , $i = 1, \dots, N$, distribuidos de forma logarítmica en el intervalo $[10^{-2}, 10^8]$.

El método numérico más empleado en la industria del petróleo para la inversión numérica de la transformada de Laplace es el método de Stehfest (vea [9]). Sea $\hat{f}(u)$ la transformada de Laplace de la función $f(t_D)$, el método de Stehfest está dado por la fórmula

$$f(t_D) \approx \frac{\ln(2)}{t_D} \sum_{i=1}^n \alpha_i \hat{f} \left(\frac{\ln(2)}{t_D} i \right).$$

Los valores de α_i se pueden consultar en [9] y usualmente se toma $n \in \mathbb{N}$ par.

La ventaja fundamental del método de Stehfest radica en que solo requiere evaluar la transformada de Laplace en un conjunto de tiempos de Laplace reales. Muchos otros métodos, como el de Zakian (vea [9]), requieren la evaluación de $\hat{f}(u)$ para $u \in \mathbb{C}$. La elección del número de evaluaciones n es dependiente de la complejidad de $\hat{f}(u)$. Si bien teóricamente el aumento de n conduce a mayor precisión existe un valor a partir del cual los errores de aproximación en aritmética de punto flotante de los α_i producen un deterioro de la aproximación.

3. Curvas tipo obtenidas con el modelo TPTPF

Las soluciones obtenidas en la sección anterior permiten la generación de curvas tipo para el comportamiento de la presión sin dimensiones y en tiempo sin dimensiones en el pozo $p_{wD}(t_D)$ así como de la derivada logarítmica de la misma $dp_{wD}/d \ln(t_D)$. Las curvas tipo se generan con escala logarítmica en ambos ejes, se grafica $p_{wD}(t_D)$ y $dp_{wD}/d \ln(t_D)$ contra t_D . Ilustraremos solamente las curvas tipo para el caso YINF, por ello el parámetro r_{eD} no se toma en cuenta y se trabaja con la condición de frontera exterior (12). Para generar las curvas se emplearon los siguientes valores de los parámetros ω_i y λ_{ij}

$$\omega_1 = 1 - \omega_2 - \omega_3, \quad \omega_2 = 10^{-3}, \quad \omega_3 = 10^{-2},$$

$$\lambda_{12} = 10^{-8}, \quad \lambda_{13} = 10^{-8}, \quad \lambda_{23} = 10^{-6}.$$

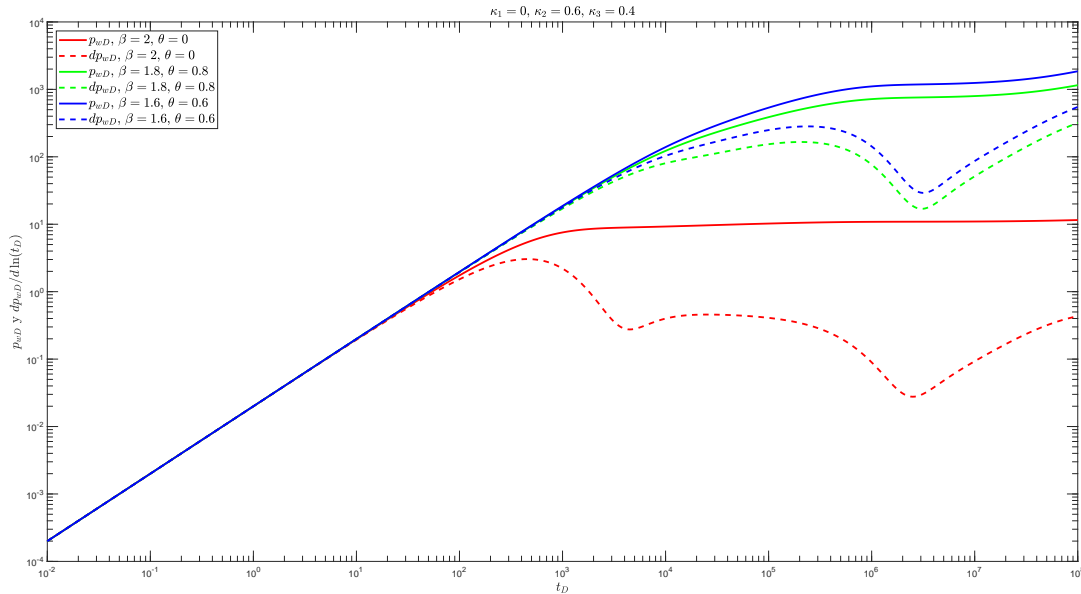


Figura 1. Curvas tipo generadas para $\kappa_i = 0$ y diferentes valores de los parámetros fractales β y θ .

Los parámetros piel y coeficiente de almacenamiento sin dimensiones se tomaron con los valores

$$s = 1,9, C_D = 50,0.$$

La figura 1 se generó para el caso cuando uno de los $\kappa_i = 0$, en específico para $\kappa_1 = 0$. En este caso el flujo primario ocurre en fracturas y vórgulos y se aprecia la influencia de los parámetros fractales β y θ en las curvas tipo. El comportamiento de un yacimiento con geometría euclidiana ocurre en el caso cuando $\beta = 2$ y $\theta = 0$ reflejado por las curvas en rojo en la figura 1. Se observa que cambios de los parámetros fractales producen un incremento considerable de la presión en el pozo así como un período transiente más largo.

En la figura 2 se toma $\kappa_2 = 1$ lo cual implica que el flujo primario solo ocurre en fracturas. En la figura se explora la influencia de los parámetros fraccionarios en el comportamiento de la presión sin dimensiones y su derivada logarítmica en el pozo. Se observa que cuando los parámetros fraccionarios $\alpha_1 \neq 1$, $\alpha_2 \neq 1$ y $\alpha_3 \neq 1$ la presión disminuye para tiempos sin dimensiones largos. Como es de esperar la derivada logarítmica también lo hace y a la vez se observa un suavizado. Las curvas en rojo de presión y derivada corresponden al modelo presentado en [6]. Los dos pronunciados valles que aparecen en la curva de derivada en rojo son mucho menos pronunciados en las curvas derivada en verde y azul a pesar de la poca variación que existe en las correspondientes presiones.

Para comprobar la calidad de las soluciones encontradas en el caso $0 < \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 < 1$ en la figura 3 se trata de reproducir las curvas presentadas en la figura 1. Para ello se tomó $\kappa_2 = 0,6$ y $\kappa_3 = 0,3999$ por lo cual se obtiene un valor pequeño para $\kappa_1 = 0,0001$. Se puede observar en este caso un comportamiento bien cercano al presentado en la figura 1.

En todos los casos presentados se empleó el algoritmo de Stehfest con un $n = 16$.

4. Conclusiones

En el presente trabajo se ha presentado un modelo de triple porosidad y triple permeabilidad con derivadas fraccionarias y geometría fractal para analizar el comportamiento transiente de la presión en un pozo de petróleo. El modelo denominado TPTPFF es una generalización de modelos anteriores. Soluciones semianalíticas del modelo para diferentes condiciones de frontera exterior han sido calculadas aunque solo se presentan las correspondientes al caso conocido como yacimiento infinito.

Se presenta por primera vez el cálculo de las soluciones en el espacio de Laplace cuando se tiene que $0 < \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 < 1$ que corresponde a la verdadera existencia de tres permeabilidades en el sistema. Los resultados obtenidos reproducen los que se presentaron en [6] lo que muestra la exactitud del procedimiento empleado.

Se debe señalar que se requiere de una mayor experimentación para analizar la influencia de los parámetros fractales y fraccionarios. Resultados preliminares indican que los parámetros fractales β y θ provocan un incremento de la presión en el pozo así como un periodo transiente de mayor duración. Los parámetros fraccionarios α_1, α_2 y α_3 por el contrario provocan una disminución de la presión y un comportamiento más suave de la derivada logarítmica. Para analizar la influencia combinada de dichos parámetros se requiere de un diseño experimental apropiado. El modelo que más aproxima el presentado aquí es el de [10] que solo emplea parámetros fraccionarios. Por ello comparaciones definitivas no están

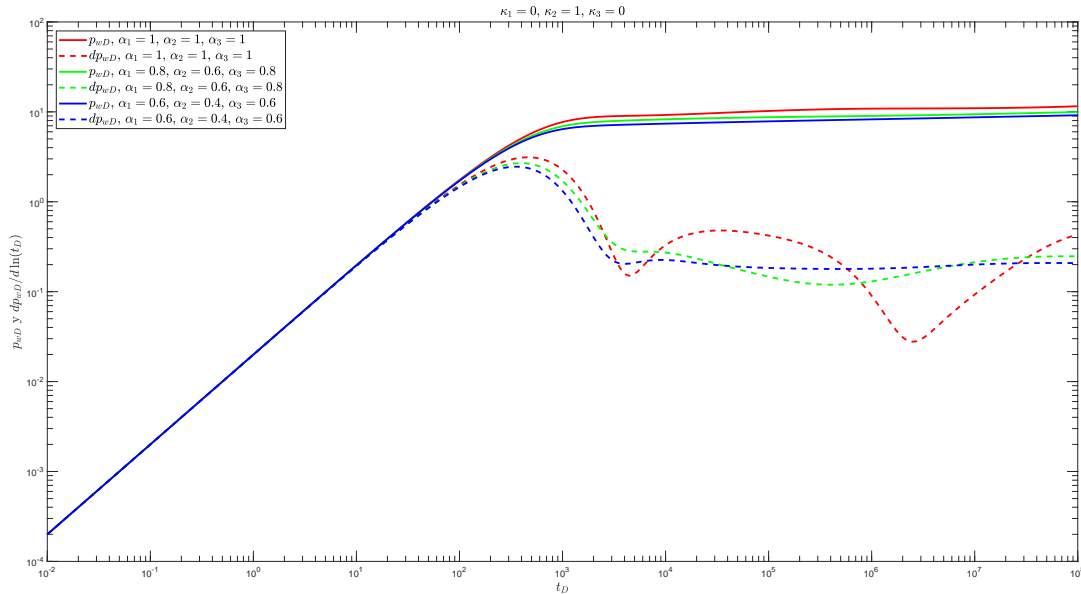


Figura 2. Curvas tipo generadas para $\kappa_2 = 1$ y diferentes valores de los parámetros fraccionarios α_1 , α_2 y α_3 .

disponibles actualmente.

Referencias

- [1] Acuna, J A, Iraj Ershaghi y Y C Yortsos: *Practical Application of Fractal Pressure-Transient Analysis in Naturally Fractured Reservoirs*. SPE Formation Evaluation, páginas 173–179, 1995.
- [2] Acuna, Jorge A. y Yanis C. Yortsos: *Application of Fractal Geometry to the Study of Networks of Fractures and Their Pressure Transient*. Water Resources Research, 31(3):527–540, 1995.
- [3] Agarwal, Ram G, Rafi Al-Hussainy, HJ Ramey Jr y others: *An investigation of wellbore storage and skin effect in unsteady liquid flow: I. Analytical treatment*. Society of Petroleum Engineers Journal, 10(03):279–290, 1970.
- [4] Barenblatt, G.I., I.P. Zheltov y I.N. Kochina: *Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks*. Journal of Applied Mathematics, 24(5):1286–1303, 1960.
- [5] Camacho-Velazquez, Rodolfo, Gorgonio Fuentes-Cruz y Mario A. Vasquez-Cruz: *Decline-Curve Analysis of Fractured Reservoirs With Fractal Geometry*. SPE Reservoir Evaluation & Engineering, 11(03):606–619, 2008.
- [6] Camacho-Velazquez, Rodolfo, Mario Vasquez-Cruz, Rafael Castrejon-Aivar y Victor Arana-Ortiz: *Pressure transient and decline curve behaviors in naturally fractured vuggy carbonate reservoirs*. SPE Reservoir Evaluation & Engineering, 8(02):95–111, 2005.
- [7] Chang, Jincal y Yanis C. Yortsos: *Pressure Transient Analysis of Fractal Reservoirs*. SPE Formation Evaluation, 5(01):31–38, 1990.
- [8] Flamenco-Lopez, F. y R. Camacho-Velázquez: *Determination of fractal parameters of fracture networks using pressure-transient data*. SPE Reservoir Evaluation & Engineering, 6(1):39–47, 2003.
- [9] Machado, M.V.B.: *Numerical Laplace Inversion Methods: Application to the Calculation of the Water Influx from Aquifers Connected to Petroleum Reservoirs*. Petroleum Science and Technology, 30(1):74–88, 2012.
- [10] Martínez-Salgado, B.F., F. Brambila-Paz, R. Rosas-Sampayo y C. Fuentes: *A model of pressure deficit in an oil well using fractional order Caputo derivatives*. Ciencias Matemáticas, 32(2):89–95, 2018.
- [11] Metzler, Ralf, Walter G. Glöckle y Theo F. Nonnenmacher: *Fractional model equation for anomalous diffusion*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 211(1):13–24, 1994.
- [12] O’Shaughnessy, Ben y Itamar Procaccia: *Diffusion on fractals*. Physical Review A, 32(5):3073–3083, 1985.
- [13] Podlubny, Igor: *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, volumen 198. Academic press, 1998.
- [14] Razminia, Kambiz, Abolhassan Razminia y Dumitru Baleanu: *Fractal-fractional modelling of partially pene-*

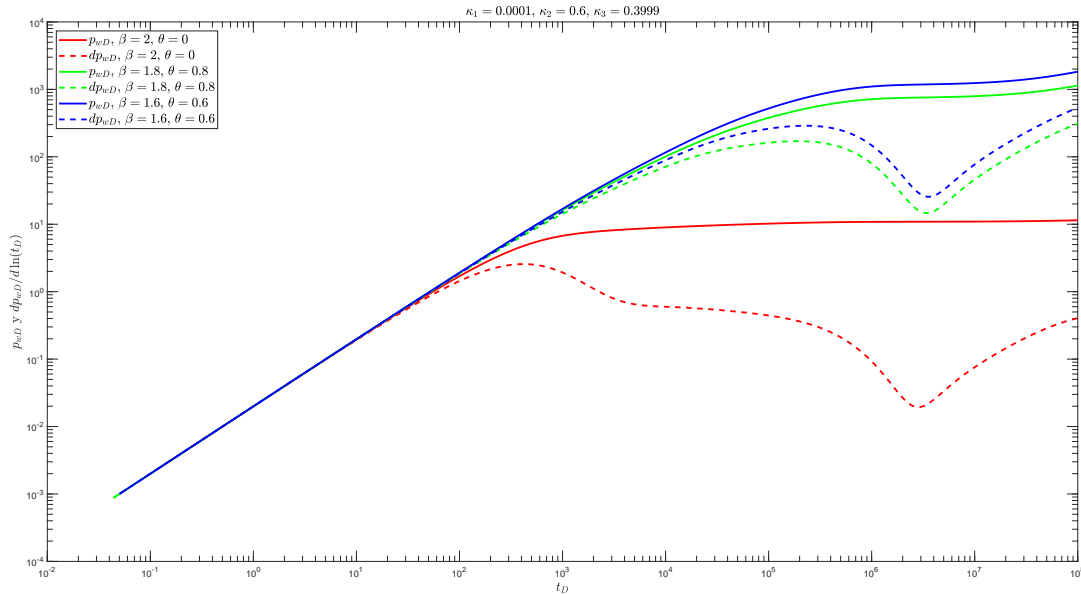


Figura 3. Curvas tipo generadas para $0 < \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 < 1$ y diferentes valores de los parámetros fractales β y θ .

trating wells. *Chaos, Solitons & Fractals*, 119:135–142, 2019.

- [15] Razminia, Kambiz, Abolhassan Razminia y JA Tenreiro Machado: *Analytical Solution of Fractional Order Diffusivity Equation With Wellbore Storage and Skin Effects*. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 11(1):011006–1–011006–8, 2016.
- [16] Razminia, Kambiz, Abolhassan Razminia y J.A. Tenreiro-Machado: *Analysis of diffusion process in fractured reservoirs using fractional derivative approach*. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19:3161–3170, 2014.
- [17] Razminia, Kambiz, Abolhassan Razminia y Juan J. Trujillo: *Analysis of radial composite systems based on fractal theory and fractional calculus*. *Signal Processing*, 107:378–388, 2015.
- [18] Warren, J.E. y P.J. Root: *The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs*. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 3(03):245–255, 1963.
- [19] Wu, Yu Shu, H.H. Liu y G.S. Bodvarsson: *A triple-continuum approach for modeling flow and transport processes in fractured rock*. *Journal of Contaminant Hydrology*, 73:145–179, 2004.