

Aproximación por el método de los elementos finitos para el problema estacionario de Navier-Stokes

Approach by the finite elements methods to the steady-state equations of Navier-Stokes

Angel Ulise Tabares González^{1*}, Miguel Angel Socorro Borges²

Resumen En este trabajo se presenta una estrategia para solucionar las ecuaciones estacionarias de Navier-Stokes mediante el método de los elementos finitos utilizando FreeFem++. Se obtiene la formulación variacional del problema de Stokes y se prueba la existencia y unicidad de la solución en este caso. Luego se muestra cómo el problema de Navier-Stokes puede ser resuelto utilizando una linealización, los resultados son mostrados visualmente. Se anexa también todo el código del programa en Freefem++.

Abstract This paper presents a strategy for solving steady-state Navier-Stokes equations by the finite element method using FreeFem++. A variational formulation of the Stokes problem is obtained and the existence and uniqueness of the solution in this case is proved. Then it shows how the Navier-Stokes problem can be solved by means of a linearization, the results are visually displayed. All FreeFem++ code is also provided.

Palabras Clave

Navier-Stokes — FreeFem — Método de los Elementos Finitos

¹ VERTEX Entornos Interactivos 3D, Universidad de las Ciencias Informáticas, La Habana, Cuba, ulise@uci.cu

² Centro de Informática Industrial, Universidad de las Ciencias Informáticas, La Habana, Cuba, miguelsb@uci.cu

*Autor para Correspondencia

Introducción

Las ecuaciones estacionarias de Navier-Stokes describen el movimiento de un fluido con densidad ρ constante en un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^d$ (con $d=2,3$) a los efectos de este trabajo $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Además se considera que dicho flujo no altera su velocidad respecto al tiempo. Esto se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g}, & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

siendo \mathbf{u} la velocidad del fluido, p el cociente de la presión y la densidad, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ la viscosidad cinemática, μ la viscosidad dinámica, y \mathbf{f} un término de fuerza por unidad de masa. El término $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ describe el proceso de transporte convectivo, $-\nu \Delta \mathbf{u}$ es el proceso de difusión molecular cuando ν es constante. $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ es la condición de incompresibilidad. En la última ecuación \mathbf{g} es una función que constituye las condiciones en la frontera[6].

Problema de Stokes

El caso estacionario de Stokes son un caso particular de (1) donde el término convectivo es despreciado, tal como se

muestra:

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{g}, & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2)$$

Esta diferencia lo convierte sin dudas en un modelo más fácil de tratar desde el punto de vista matemático y computacional.

Formulación variacional del problema de Stokes

En el problema (2) $p \in \mathbb{L}_0^2$ pero $\mathbf{u} \notin H_0^1$ debido a que en Γ $\mathbf{u} = \mathbf{g}$. Sin embargo se puede afirmar que $\mathbf{g} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ lo que quiere decir que existe $R_0 \mathbf{g} \in H^1(\Omega)$ tal que su traza en $\partial\Omega$ es \mathbf{g} ; entonces la nueva incógnita $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - R_0 \mathbf{g}$, de ahí que el problema (2) pueda ser expresado como:

$$\begin{aligned} -\nu \Delta (\tilde{\mathbf{u}} + R_0 \mathbf{g}) + \nabla p &= \mathbf{f}, & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} + R_0 \mathbf{g}) &= 0, & \text{en } \Omega, \\ \tilde{\mathbf{u}} &= 0, & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Si multiplicamos la primera ecuación de (3) por una función de prueba $\mathbf{v} \in H_0^1$ e integramos en el dominio Ω , se obtiene:

$$-\int_{\Omega} \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{f} + \nu \Delta R_0 \mathbf{g}) \cdot \mathbf{v} d\Omega. \quad (4)$$

Teniendo en cuenta la primera identidad de Green, y el teorema de la divergencia [5],[7]

$$\int_{\Omega} v \Delta \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} d\Omega = v \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} d\gamma - v \int_{\Omega} \nabla \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot d\Omega, \quad (5)$$

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{v}\mathbf{n}) d\gamma - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \cdot d\Omega. \quad (6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (4):

$$\begin{aligned} & -v \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} d\gamma + v \int_{\Omega} \nabla \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot d\Omega + \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{v}\mathbf{n}) d\gamma \\ & - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \cdot d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{f} + v \Delta R_0 \mathbf{g}) \cdot \mathbf{v} d\Omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Se debe notar que el término $\Delta R_0 \mathbf{g}$ no está necesariamente bien definido ya que $R_0 \mathbf{g}$ no necesariamente pertenece a H^2 . Sin embargo el término $\int_{\Omega} v \Delta R_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d\Omega$ debe ser reescrito, en realidad se puede probar que $\Delta R_0 \mathbf{g} \in H^{-1}$ de manera que la parte lineal se debe leer de forma rigurosa como

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \langle v \Delta R_0 \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Ya que $R_0 \mathbf{g} \in H^1$, el término lineal se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} v \nabla R_0 \mathbf{g} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega.$$

Al no tener información de $\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{n}}$ ni de p o \mathbf{n} en la frontera, es de ayuda haber escogido $\mathbf{v} \in H_0^1$ porque con $\mathbf{v} = 0$ en $\partial\Omega$, (7) resulta:

$$\int_{\Omega} v \nabla \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - v \nabla R_0 \mathbf{g} \cdot \nabla \mathbf{v}) d\Omega.$$

De manera análoga se puede proceder con la segunda ecuación en (3); se multiplica por una función de prueba q e integramos con lo cual se obtiene $\int_{\Omega} q \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} d\Omega = \int_{\Omega} R_0 \mathbf{g} q d\Omega$. Luego, el sistema descrito en (3), puede ser planteado como sigue.

Encontrar $(\tilde{\mathbf{u}}, p) \in (H_0^1(\Omega))^2 \times \mathbb{L}_0^2(\Omega)$ tal que:

$$\begin{cases} a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = f(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2, \\ b(\tilde{\mathbf{u}}, q) = h(q), & \forall q \in \mathbb{L}_0^2(\Omega), \end{cases} \quad (8)$$

donde:

$$\begin{aligned} a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) &= v \int_{\Omega} \nabla \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot d\Omega, \\ b(\mathbf{v}, p) &= - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \cdot d\Omega, \\ f(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - v \nabla R_0 \mathbf{g} \cdot \nabla \mathbf{v}) d\Omega, \\ h(q) &= - \int_{\Omega} R_0 \mathbf{g} \cdot q d\Omega. \end{aligned}$$

1. Existencia y unicidad

La existencia de la solución para (1) se puede probar para $d = 2$, sin embargo unicidad se ha probado solo para el caso en que los datos son suficientemente pequeños [6], esto quiere decir que las dimensiones físicas del problema deben estar en un entorno controlado. Si se define $Re = \frac{|U|L}{\nu}$ donde L es una longitud representativa del dominio Ω , y U una velocidad del fluido también representativa. El número de Reynolds mide el punto en que la convección prevalece sobre la difusión. Cuando $Re \ll 1$ el término convectivo puede ser omitido, de lo contrario si Re es grande pueden existir problemas relativos a la unicidad de la solución. De manera que el problema de Stokes es una buena aproximación para el problema de Navier-Stokes con datos lo suficientemente pequeños, de ahí que se realicen los siguientes análisis sobre (8).

1.1 Condiciones de existencia y unicidad

Teorema 1 (Brezzi) Sean V y Q espacios de Hilbert; sean $a(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot)$ formas bilineales continuas en $V \times V$ y $V \times Q$ respectivamente. Denotemos el kernel de $b(\cdot, \cdot)$ como $Z = \{v \in V : b(v, q) = 0, \forall q \in Q\}$. Si $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva en Z , y si $b(\cdot, \cdot)$ satisface la condición inf-sup:

$$\beta \|q\|_Q \leq \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V}, \quad \forall q \in Q, \quad (9)$$

entonces existe una única solución $(u, p) \in V \times Q$ para el problema de punto de ensilladura (8).

Para obtener detalles de este teorema consultar [5].

Si se quiere asegurar que la solución a (8) existe y es única se debe probar, de acuerdo al teorema 1, que los términos bilineales $a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$ y $b(\mathbf{v}, p)$ son continuos y que el primero es coercivo. Definamos $\|\cdot\|_{H_0^1}$ como

$$\begin{aligned} H_0^1 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathbf{u} &\mapsto \|\mathbf{u}\|_{H_0^1} := \left(\int |\nabla \mathbf{u}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Gracias a la desigualdad de Poincaré-Friedrichs, esto es un equivalente a la norma usual H^1 en H_0^1 .

Continuidad de $a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$

Se debe probar que

$$|a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})| \leq \beta \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H_0^1} \cdot \|\mathbf{v}\|_{H_0^1}, \quad \text{con } \beta > 0.$$

Desarrollando $|a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})|$:

$$\begin{aligned} |a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})| &= |v \int_{\Omega} \nabla \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega|, \\ |a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})| &= |v| \int_{\Omega} |\nabla \tilde{\mathbf{u}}| \cdot |\nabla \mathbf{v}| d\Omega. \end{aligned}$$

Usando propiedades del producto escalar en \mathbb{L}^2 y desigualdad de Cauchy se tiene:

$$\begin{aligned} |a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})| &\leq \|\mathbf{v}\| \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2} \cdot \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2}, \\ |a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})| &\leq \|\mathbf{v}\| \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H_0^1} \cdot \|\mathbf{v}\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

lo que prueba la continuidad de $a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$.

Continuidad de $b(\mathbf{v}, p)$

Siguiendo la misma idea el término $|b(\mathbf{v}, p)|$ puede ser desarrollado:

$$|b(\mathbf{v}, p)| = \int_{\Omega} |p| \cdot |\nabla \cdot \mathbf{v}| d\Omega.$$

Usando propiedades del producto escalar en \mathbb{L}^2 y la desigualdad de Cauchy se tiene:

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{v}, p)| &\leq \|p\|_{L^2} \cdot \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^2}, \\ |b(\mathbf{v}, p)| &\leq \|p\|_{L^2} \cdot \left(\int |\nabla \mathbf{v}|^2 \right)^{1/2}, \\ |b(\mathbf{v}, p)| &\leq \|p\|_{L^2} \cdot \|\mathbf{v}\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

lo que prueba la continuidad de $b(\mathbf{v}, p)$.

Coercividad de $a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$

Se debe probar que $a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \beta \|\mathbf{u}\|^2$, con $\beta > 0$, veamos:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \cdot d\Omega, \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \nu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \cdot d\Omega, \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \nu \|\nabla \mathbf{u}\|^2 = \nu \|\mathbf{u}\|_{H_0^1}^2, \end{aligned}$$

lo que prueba la coercividad de $a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})$ ya que ν es positivo.

Habiendo ya comprobado las condiciones de continuidad y coercividad en los términos que lo requieren basta con verificar que se cumpla (9), esto es:

$$\beta \|p\|_{\mathbb{L}_0^2} \leq \sup_{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)} \frac{b(\mathbf{v}, p)}{\|\mathbf{v}\|_{H^1}}, \quad \forall p \in \mathbb{L}_0^2(\Omega).$$

Teorema 2 (Bogovskii) Sea Ω un dominio de Lipschitz en \mathbb{R}^d conexo y acotado. Existe un operador lineal continuo Π de $\mathbb{L}_0^2(\Omega)$ a $(H_0^1(\Omega))^d$, tal que $\forall q \in \mathbb{L}_0^2(\Omega)$, la función $\mathbf{u} = \Pi(q)$ satisface:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = q.$$

Para obtener detalles de este teorema consultar [1].
Se tiene

$$b(\mathbf{v}, p) = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega,$$

si tomamos $p \in \mathbb{L}_0^2$ entonces

$$\sup_{\mathbf{v} \in H^1} \frac{b(\mathbf{v}, p)}{\|\mathbf{v}\|_{H^1}} \geq \frac{b(\Pi(p), p)}{\|\Pi(p)\|_{H^1}},$$

donde $\Pi(p)$ es un campo de velocidad asociado a p usando el teorema 2, se debe notar que esto es posible realizarlo porque al seleccionar una \mathbf{v} en particular, dígame $\Pi(p)$, se obtiene una estimación inferior con respecto a la cota superior. Entonces $b(\Pi(p), p) = \|p\|_{\mathbb{L}_0^2}^2$, por lo que:

$$\sup_{\mathbf{v} \in H^1} \frac{b(\mathbf{v}, p)}{\|\mathbf{v}\|_{H^1}} = \sup_{\mathbf{v} \in H^1} \frac{\|p\|_{\mathbb{L}_0^2}^2}{\|\mathbf{v}\|_{H^1}}.$$

Pero $\|\Pi(p)\|_{H^1} \leq c \|p\|_{\mathbb{L}_0^2}$ de ahí que lo anterior resulte

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{v} \in H^1} \frac{b(\mathbf{v}, p)}{\|\mathbf{v}\|_{H^1}} &\geq \frac{\|p\|_{\mathbb{L}_0^2}^2}{c \|p\|_{\mathbb{L}_0^2}}, \\ \sup_{\mathbf{v} \in H^1} \frac{b(\mathbf{v}, p)}{\|\mathbf{v}\|_{H^1}} &\geq c^{-1} \|p\|_{\mathbb{L}_0^2}. \end{aligned}$$

Esto se cumple para cualquier campo de presión $p \in \mathbb{L}_0^2$ (en particular la constante c no depende de p), lo cual garantiza la existencia y unicidad del problema (8). A pesar de que esta formulación es necesaria para un tratamiento matemático riguroso del problema en la prácticas se utilizan otros métodos para manejar las restricciones en la frontera desde el punto de vista computacional[2], de ahí que de ahora en adelante se considere el problema con condiciones de fronteras homogéneas.

2. Aproximación por el método de los elementos finitos

Para encontrar una solución aproximada de (8) por el método de los elementos finitos se debe particionar la región Ω continua en una cantidad finita de elementos discretos relacionados a través un número discreto de nodos. En este caso la región es $\Omega = (0, a) \times (0, b) \in \mathbb{R}^2$ por lo que se utilizan triángulos para dicha discretización. Si se denota la triangulación por τ_h entonces:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \tau_h} K, \quad \text{donde } \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega.$$

Lo siguiente es construir el subespacio de dimensión finita donde se buscará la solución, es decir un conjunto de funciones que defina de forma única el desplazamiento dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales. Se utiliza un esquema $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$ que es estable [2], de manera que la velocidad \mathbf{u} es aproximada con el espacio de elementos finitos $\mathbb{P}_2(X_h)$, y la presión es aproximada con el espacio de elementos finitos $\mathbb{P}_1(M_h)$ donde:

$$\begin{aligned} X_h &= \{v \in H^1(\Omega) \mid \forall K \in \tau_h \quad v|_K \in \mathbb{P}_2\}, \\ M_h &= \{p \in H^1(\Omega) \mid \forall K \in \tau_h \quad p|_K \in \mathbb{P}_1\}. \end{aligned}$$

De forma general \mathbb{P}_n representa el conjunto de los polinomios de grado n . X_h y V_h son espacios de funciones cuadráticas o lineales respectivamente en cada triángulo y globalmente continuas.

Como aproximación del desplazamiento en el elemento se toma:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^M u_h(a_i) \Phi_i(x) \quad x \in \Omega,$$

donde a_i es un nodo determinado y $\Phi_i(x)$ es el conjunto de las bases nodales definidas en los nodos de τ_h .

Este desarrollo se puede hacer de manera más exhaustiva y rigurosa sin embargo como se apreciará más adelante en términos de implementación por lo general trabajando con Freefem++ estos desarrollos se realizan de forma transparente. Para una explicación más detallada ver [4].

3. Posibles soluciones

El problema principal existente para aplicar el método de los elementos finitos al problema estacionario de Navier-Stokes son los términos no lineales $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ que impiden extraer directamente un sistema de ecuaciones lineales. La principal diferencia entre los métodos existentes para tratar este problema consiste precisamente en cómo tratar este término.

3.1 Procedimientos basados en linealización

La idea de este método consiste en utilizar un procedimiento iterativo que consta de los siguientes pasos:

1. Obtener un estimado inicial de la solución
2. Mientras el error sea mayor de una tolerancia prefijada, hacer:
 - a) Linealizar las ecuaciones no lineales utilizando los resultados de la iteración anterior.
 - b) Resolver el sistema de ecuaciones lineales obtenido.

3.1.1 Linealización

La no linealidad del problema de Navier-Stokes se encuentra en el término inercial $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$. En aras de obtener la solución del problema se puede proceder de diferentes maneras.

Propuesta 1. La solución del problema de Navier-Stokes se puede obtener iterativamente calculando la sucesión $\{\mathbf{u}_k\}_k$ que converge a la solución, en cada paso del procedimiento se calcula la solución de un problema lineal de Navier-Stokes gracias a la linealización de $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$, de manera que el procedimiento se describe como sigue:

- Definir $\mathbf{u}_0 = 0$.
- Para $k \in \mathbb{N}$, calcular la solución \mathbf{u}_{k+1} de

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_k - \nu \Delta \mathbf{u}_{k+1} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_{k+1} &= 0. \end{aligned}$$

Si hacemos k tender a $+\infty$ (en la práctica se puede usar un test de parada) podemos obtener la solución del sistema de Navier-Stokes, si el proceso converge. Se debe notar que la linealización del término inercial puede ser $\mathbf{u}_k \cdot \nabla \mathbf{u}_{k+1}$ en lugar de $\mathbf{u}_{k+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_k$.

Propuesta 2. Una aproximación ruda de la solución del sistema de Navier-Stokes se puede construir usando el siguiente procedimiento:

- Calcular la solución (\mathbf{u}, p) del sistema de Stokes (es decir, obviar el término no lineal):

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

- Calcular la corrección $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$ usando el campo de velocidades \mathbf{u} del sistema anterior de Stokes como término de transporte:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \tilde{p} &= \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= 0. \end{aligned}$$

En esta propuesta, $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$ define una aproximación ruda del sistema de Navier-Stokes ya que la solución del sistema de Stokes (\mathbf{u}, p) se utiliza como un estimado del campo de velocidades. Se debe notar que la **Propuesta 2** consiste en parar la **Propuesta 1** luego de solo dos iteraciones. Los cálculos son más rápidos pero, por supuesto, no garantizan una gran exactitud en los resultados numéricos de la solución. Como se verá más adelante, esta segunda variante es la que se decidió implementar.

3.1.2 Linealización del problema de Navier-Stokes

Si en el problema (1) linealizamos, entonces se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_k - \nu \Delta \mathbf{u}_{k+1} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_{k+1} &= 0. \end{aligned}$$

Que escrito en una forma más compacta y tras la formulación variacional, utilizando condiciones de frontera de Dirichlet ($\mathbf{g} = 0$) para mayor comodidad: encontrar $(\mathbf{u}, p) \in (H_0^1(\Omega))^2 \times \mathbb{L}_0^2(\Omega)$ tal que:

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = f(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2, \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, & \forall q \in \mathbb{L}_0^2(\Omega). \end{cases}$$

donde:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v} d\Omega + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega, \\ b(\mathbf{v}, p) &= - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \cdot d\Omega, \\ f(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega. \end{aligned}$$

Se debe notar aquí que $\nabla \mathbf{u}_k$ es conocido.

3.2 Procedimiento general iterativo

Una vez linealizado el término convectivo el método estándar de Galerkin puede ser aplicado. Una cuestión importante a tener en cuenta es cuán buena debe ser la aproximación inicial para que el método converja rápido. Es conocido que la iteración de Newton converge rápido pero depende de una buena aproximación a diferencia de la iteración de Picard que no tiene una velocidad de convergencia grande pero la región es mayor por lo que no necesita una aproximación inicial tan precisa, de ahí que una posible estrategia iterativa mejorada sería:

1. Empezar con un estimado inicial.
2. Realizar unas pocas iteraciones de Picard con el objetivo de mejorar el estimado inicial.
3. Utilizar la iteración de Newton hasta que el error estimado sea menor que la tolerancia.

4. Implementación

A continuación se verá como se implementó la solución en FreeFem++.

4.1 Generación de la malla

La malla escogida es un cuadrado unitario que en el centro posee un hueco con 0,1 unidades de radio como puede apreciarse a continuación:

Fragmento de código 1. Mallado

```
int nx=20, ny=nx;
real radius=0.1;
```

```
int nc=2*floor(2*pi*radius*nx);
border A(t=0,1){x=t;y=0;label=1;};
border B(t=0,1){x=1;y=t;label=2;};
border C(t=0,1){x=1-t;y=1;label=3;};
border D(t=0,1){x=0;y=1-t;label=4;};
border Hole1(t=0,2*pi){x=0.5+radius*cos(t);y=0.5+radius*sin(t);label=5;};

mesh Th= buildmesh(A(nx)+B(ny)+C(nx)+D(ny)+Hole1(-nc));
```

4.2 Espacios de elementos finitos

En FreeFem++ para crear los espacios de elementos finitos se debe proveer una triangulación como la obtenida anteriormente y un espacio de funciones de aproximación, para luego especificar cada magnitud en que espacio se encontrará, en nuestro código esto sería:

Fragmento de código 2. Espacios

```
func gx=1;
func gy=0;

fespace Xh(Th,P2);
fespace Mh(Th,P1);
Xh u2,v2;
Xh u1,v1;
```

4.3 Desarrollo de los términos para implementación

A continuación se muestra el problema escrito en el lenguaje de FreeFem++ el cual se explicará término a término.

Fragmento de código 3. Problema

```
1 problem NavierStokes ([u1,u2,p],[v1,v2,q]) =
2   int2d(Th)(
3     + nu * ( dx(u1)*dx(v1) + dy(u1)*dy(v1)
4     + dx(u2)*dx(v2) + dy(u2)*dy(v2) )
5     - p*q*epsr
6     + p*dx(v1)+ p*dy(v2)
7     + dx(u1)*q+ dy(u2)*q
8   )
9   + int1d(Th)( -fhx*v1 - fhy*v2)
10  + int2d(Th)( rho*(u1*dx(up1)*v1+u2*dy(up2)*v2) )
11  + on(2,4,u1=ghx,u2=ghy)
12  + on(1,3,u1=0,u2=0)
13  + on(5,u1=0,u2=0);
```

Comparando con la formulación variacional en la ecuación (8) las líneas 4 y 5 no son más que el desarrollo de $\nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v}$, aquí $u1$, $u2$, $v1$ y $v2$ son las componentes en x e y de \mathbf{u} y \mathbf{v} respectivamente. Es necesario notar en la línea 6 el uso de $p \cdot q \cdot eps$ que no es más que un término de estabilización necesario aquí porque el esquema $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$ para p y q no satisface la condición inf-sup, en este caso $eps = 1e - 8$. La línea 7 corresponde al término $\nabla p \cdot \mathbf{v}$. La expresión $\nabla \cdot \mathbf{u} q$ se ve claramente reflejada en la línea 8 y a continuación la 9 es $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ donde fhx y fhy son las componentes en x e y de \mathbf{f} respectivamente, nótese aquí que los términos bilineales respecto a \mathbf{u} y \mathbf{v} están precedidos del operador de Freefem++ *int2d*, no así los lineales que van precedidos de *int1d*. Las condiciones de frontera se ven claramente en las líneas de la 11 a la 13, esto quiere decir que en las fronteras laterales $\mathbf{u} = \mathbf{g}$ donde se define directamente $g_x = 1$ y $g_y = 1$, en el resto de las fronteras $\mathbf{u} = 0$.

El resto de los términos se explicarán en los acápites si-

guientes.

4.4 Inicialización

Ya que se ha formado un esquema iterativo surge un aspecto importante que debe ser tomado en cuenta, y es la necesidad de obtener una aproximación inicial relativamente buena, esta puede ser la solución al problema de Stokes, que no es más que las ecuaciones en cuestión con el término convectivo omitido. En estas si el número de Reynolds es muy grande es posible que la distancia entre ambas soluciones sea demasiada, por el contrario si el número de Reynolds es pequeño las soluciones deben estar próximas y es una buena idea tomar la solución del primer problema como estimado inicial del segundo.

5. Resultados

A continuación se muestra el código completo con comentarios para su mejor comprensión:

```
//these are the mesh divisions
int nx=20, ny=nx;
real radius=0.1;
int nc=2*floor(2*pi*radius*nx);

//definition of the border of a domain
//the direction must be counter clockwise
border A(t=0,1){x=t;y=0;label=1;};
border B(t=0,1){x=1;y=t;label=2;};
border C(t=0,1){x=1-t;y=1;label=3;};
border D(t=0,1){x=0;y=1-t;label=4;};
border Hole1(t=0,2*pi){x=0.5+radius*cos(t);y=0.5+radius*sin(t);label=5;};

//definition of a mesh
mesh Th= buildmesh(A(nx)+B(ny)+C(nx)+D(ny)+Hole1(nc));
plot(Th,wait=1);

//function f defined by components
func fx=x*x+y;
func fy=y*x;

//function g defined by components
func gx=1;
func gy=0;

//declaration of the FE Space. Will use a P2-P1 scheme
fespace Xh(Th,P2);
fespace Mh(Th,P1);
Xh u2,v2;
Xh u1,v1;
Mh p,q;
Mh fhx=fx;
Mh fhy=fy;
```

```

Mh ghx=gx;
Mh ghy=gy;
real epsr = 1e-8;

```

//First we solve Stokes to obtain a first approximation

```

solve Stokes ([u1,u2,p],[v1,v2,q]) =
  int2d(Th)( ( dx(u1)*dx(v1) + dy(u1)*dy(v1)
    + dx(u2)*dx(v2) + dy(u2)*dy(v2) ) //divergence of u and v terms
    - p*q*epsr //stabilization terms
    + p*dx(v1)+ p*dy(v2) //pressure gradient terms
    + dx(u1)*q+ dy(u2)*q //divergence of q term
  )
+ int1d(Th)( -fhx*v1 - fhy*v2) //external contribution term
+ on(2,4,u1=ghx,u2=ghy) //boundary conditions
+ on(1,3,u1=0,u2=0)
+ on(5,u1=0,u2=0);

```

//Here we plot initial estimates

```

plot(coef=0.2,cmm=" p ",p,wait=1,value=1,fill=1);
plot(coef=0.2,cmm=" [u1,u2] ",[u1,u2],ArrowSize=0.5,wait=1,value=1,fill=1);
plot(coef=0.2,cmm=" [u1,u2] y p ",p,[u1,u2],ArrowSize=0.5,wait=1,value=1,fill=1);

```

```

int i=0;
real nu=1./100.;
real dt=0.1;
real alpha=1/dt;
real rho=1.0;

```

```

Xh up1,up2;

```

/*Now will solve Navier-Stokes

**As we can see the non linear term has been replaced
by a first order discretization**

***/**

```

problem NavierStokes ([u1,u2,p],[v1,v2,q]) =
  int2d(Th)(
    + nu * ( dx(u1)*dx(v1) + dy(u1)*dy(v1) //gradient of u^(k+1) dot
      gradient of v
    + dx(u2)*dx(v2) + dy(u2)*dy(v2) )
    - p*q*epsr //stabilization term
    + p*dx(v1)+ p*dy(v2) //p divergence of v
    + dx(u1)*q+ dy(u2)*q //q divergence of u^(k+1)
  )
+ int1d(Th)( -fhx*v1 - fhy*v2) //f dot v
+ int2d(Th)( rho*(u1*dx(up1)*v1+u2*dy(up2)*v2)) //u^(k+1) dot gradient of u^k
  dot v
+ on(2,4,u1=ghx,u2=ghy) //same boundary conditions
+ on(1,3,u1=0,u2=0)
+ on(5,u1=0,u2=0);

```

//the output of the Stokes probleme is used as input in Navier-Stokes

```

up1=u1;
up2=u2;
NavierStokes;

```



```
//Here we plot final solution
```

```
plot(coef=0.2,cmm=" p",p,wait=1,value=1,fill=1);
plot(coef=0.2,cmm=" [u1,u2]",[u1,u2],wait=1,value=1,fill=1);
plot(coef=0.2,cmm=" [u1,u2] y p ",p,[u1,u2],ArrowSize=0.5,wait=1,value=1,fill=1);
```

En la figura 1 se puede apreciar a) el resultado de la triangulación del problema, esta malla será usada tanto para resolver el problema de Stokes como el de Navier-Stokes; luego en b) se muestra las diferencias de presión en las diferentes áreas del dominio, como se puede ver los mayores valores están a la derecha de la imagen teniendo los picos en las esquinas superior e inferior derecha. Se muestra en la figura 1 c) el campo vectorial que representa la velocidad del fluido donde los valores absolutos de la velocidad más elevados son en las zonas por encima y por debajo del hueco en la malla. Estos datos son los utilizados como entrada inicial para resolver (8).

En las figuras 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, se muestran los campos (escalares) de presiones y los campos (vectoriales) de velocidades que se obtienen como solución para diferentes valores del coeficiente ρ (ν) variando desde 0.2 hasta 2.0, esta variación es equivalente a modificar ν en el otro término, lo que determina el comportamiento del sistema es cuál de estos términos predomina, dicho de otra manera a mayor valor de ρ menos viscoso es el fluido, o sea menos espeso. Nótese como a medida que el valor de ρ aumenta la solución se aleja de la figura 1, y comienza a dominar el término inercial como era de esperarse, que provoca visualmente las espirales cada vez más pronunciadas.

Agradecimientos

Al profesor Sebastien Martin por todos los minutos de revisión dedicados. A la profesora Ángela León Mecías por

la espera y el ánimo.

Referencias

- [1] Franck Boyer and Pierre Fabrie. *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*, volume 183 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 2013.
- [2] Franck Boyer and Sebastien Martin. An introduction to the finite element method. 2016.
- [3] A. J. Figueredo and P. S. A. Wolf. Assortative pairing and life history strategy - a cross-cultural study. *Human Nature*, 20:317–330, 2009.
- [4] Angela Mireya Leon Mecias. Notas de clase. metodos numericos avanzados para ecuaciones diferenciales en derivadas and parciales, 2010.
- [5] Fredrik Bengzon Mats G. Larson. *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications*. Number pag 335. Springer, 2013.
- [6] Alfio Quarteroni. *Numerical Models for Differential Problems*. Springer, 2009.
- [7] James Stewart. *Calculus: early transcendentals*. Cengage Learning, 2015.

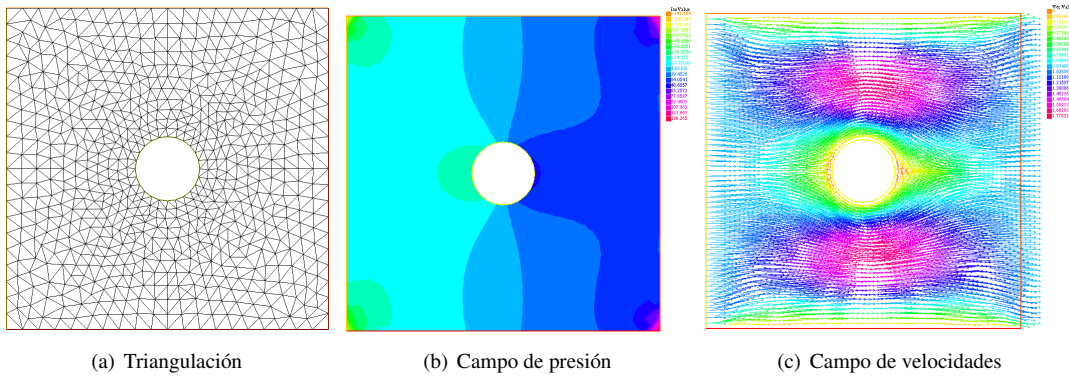


Figura 1. Resultado de resolver el problema de Stokes.

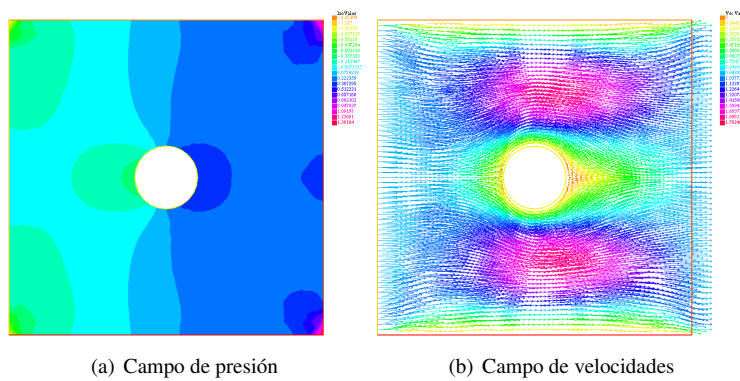


Figura 2. Resultado de resolver el problema de Navier-Stokes con un coeficiente $\rho = 0,2$.

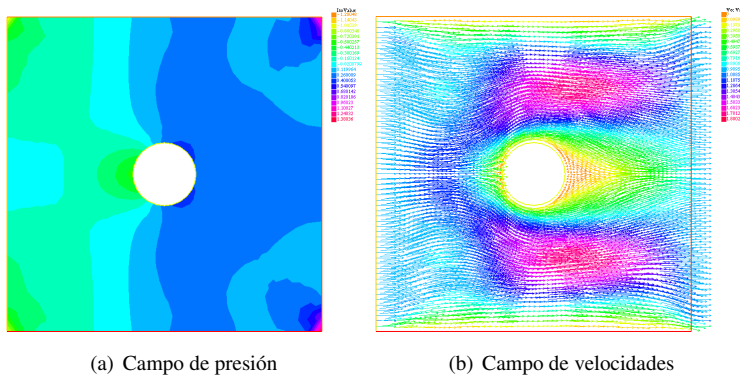


Figura 3. Resultado de resolver el problema de Navier-Stokes con un coeficiente $\rho = 0,5$.

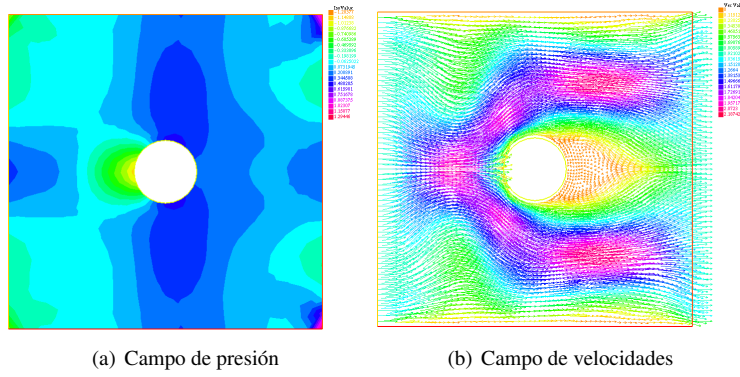


Figura 4. Resultado de resolver el problema de Navier-Stokes con un coeficiente $\rho = 1,0$.

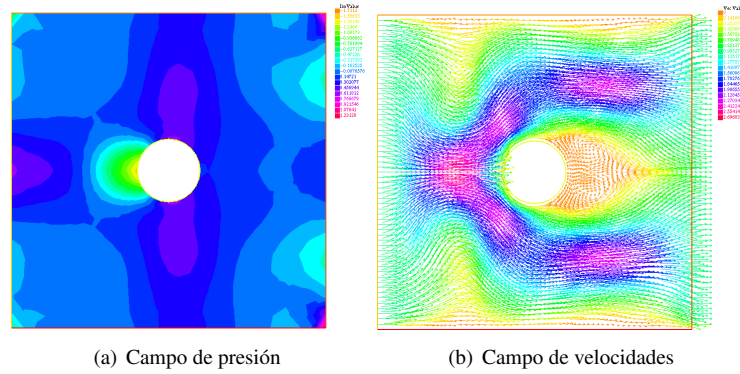


Figura 5. Resultado de resolver el problema de Navier-Stokes con un coeficiente $\rho = 1,2$.

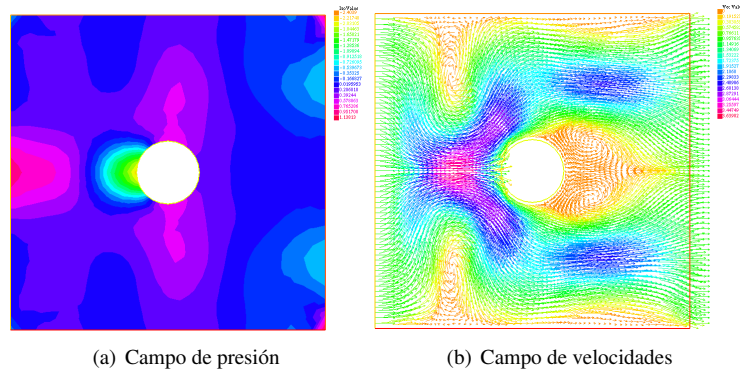


Figura 6. Resultado de resolver el problema de Navier-Stokes con un coeficiente $\rho = 1,4$.

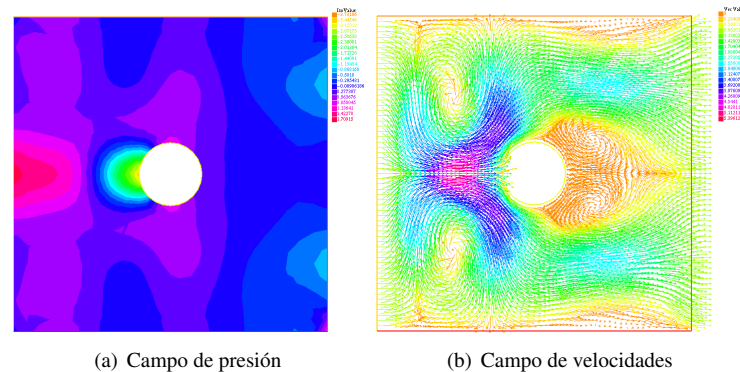


Figura 7. Resultado de resolver el problema de Navier-Stokes con un coeficiente $\rho = 1,6$.

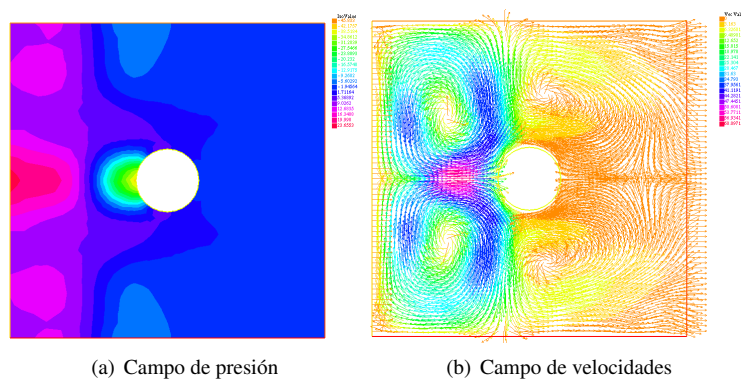


Figura 8. Resultado de resolver el problema de Navier-Stokes con un coeficiente $\rho = 2,0$.