

Comprobación numérica del proceso de homogeneización mediante el método de los elementos finitos.

Numerical verification of the homogenization process by means of the Finite Elements Method.

Ernesto Iglesias Rodríguez^{1*}, Armando Arredondo Soto².

Resumen En el presente trabajo se estudia el problema estacionario de la transmisión del calor. Se observa que para coeficientes de conductividad rápidamente oscilantes es un problema numéricamente inestable pero aplicando la técnica de homogeneización y transformando el problema en su forma variacional se puede resolver efectivamente mediante el método de los elementos finitos. Para ello se emplea el software FreeFEM++.

Abstract In this work the stationary heat transfer problem is studied. For rapidly oscillating coefficients its numerical instability is shown, but by means of homogenization techniques and the variational formulation, the problem could be effectively solved using the Finite Elements Method. For this we use the software FreeFEM++.

Palabras Clave

Elementos Finitos — Homogeneización.

¹IGP-Servicio Geológico de Cuba, La Habana, Cuba, ernesto@igp.minem.cu

²CEMAT, Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, La Habana, Cuba, asoto@cemat.cujae.edu.cu

*Autor para Correspondencia

1. Introducción

En medios compuestos provistos de una estructura compleja, generalmente, la conductividad térmica toma valores altamente oscilantes. Esto hacen que el estudio local de la conducción de calor sea una tarea prácticamente imposible. La Teoría de Homogeneización permite transformar el modelo inicial con coeficientes rápidamente oscilantes en un modelo equivalente con *coeficientes constantes* (propiedades efectivas). Las propiedades efectivas de un compuesto son determinadas a partir de las propiedades físicas y geométricas conocidas de sus componentes. La Homogeneización también estudia las técnicas para la obtención de estas propiedades efectivas [1, 3].

Los problemas de contorno derivados de la conducción de calor en estos casos son, en general, muy difícil de resolver por métodos analíticos, por lo que el uso de los métodos variacionales se hace cada vez más frecuente.

En este artículo se muestra la resolución de problemas elípticos vinculados con la conducción del calor mediante el Método de los Elementos Finitos (FEM por sus siglas en inglés) aplicados a un problema de homogeneización. En la sección 2 se presenta el proceso de homogeneización para una familia de problemas elípticos. En la sección 3 se formula el problema fuerte de la conducción del calor, se deduce su forma débil y se muestra que es un problema bien planteado.

En la sección 4 se muestran los resultados numéricos de la comprobación del proceso de homogeneización y se realiza un análisis del error. Por último, se presentan las conclusiones del trabajo y se incluye un apéndice con resultados teóricos que apoyan los procedimientos escogidos.

2. El problema de Homogeneización

El problema que se pretende estudiar es una familia de ecuaciones diferenciales elípticas con coeficientes periódicos con un período muy corto dependiente de un parámetro pequeño.

$$-\nabla \cdot (k_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f.$$

donde k_ε es una matriz rápidamente oscilante cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Como caso de estudio proponemos:

$$k_\varepsilon = Id_2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin \left(2\pi \frac{x}{\varepsilon} \right) \right).$$

Nuestro objetivo es transformar la resolución de este problema por la búsqueda de una solución de otro problema *equivalente* pero con coeficientes constantes.

En términos prácticos esto significa transformar un problema sobre un medio con muchas heterogeneidades y gran

variabilidad en un problema similar pero sobre un medio homogéneo. Esta característica es lo que lo convierte en un *problema de homogeneización*.

La convergencia de la solución del problema original a la del problema homogeneizado cuando el parámetro geométrico pequeño tiende a cero se encuentra rigurosamente demostrada en los trabajos de diferentes autores [3, 2], así como cada uno de los teoremas que utilizan para la solubilidad de los problemas en los pasos del algoritmo para la construcción de una solución asintótica [7]. Algunos de los resultados más importantes se pueden encontrar como apéndice al final de este artículo.

En el caso nuestro

$$\begin{aligned} k_\varepsilon &= Id_2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin \left(2\pi \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \\ &= Id_2 K \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right), \quad \omega\text{-periódica.} \end{aligned}$$

Nuestro objetivo es encontrar una función u_0 tal que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = u_0,$$

que satisfaga:

$$-\nabla \cdot (k_0 \nabla u_0) = f.$$

El coeficiente k_0 puede ser obtenido por diversas técnicas, en particular de la ecuación (*) en el apéndice:

$$k_0 := \begin{pmatrix} [K^{-1}]^{-1} & 0 \\ 0 & [K] \end{pmatrix},$$

donde $[\cdot] = \int_\omega$ es la integral sobre la celda periódica.

3. Formulación del problema de contorno

Consideremos el problema de la conducción del calor en un medio conductivo caracterizado por su coeficiente de conductividad k en cada punto. Consideraremos un medio definido a partir de dos fronteras, sobre una de ellas se considera una temperatura fija, mientras que sobre la otra se le aplica un flujo de calor g . Denotando por f el calor inducido en todo el medio por radiación, el problema estacionario está definido como sigue:

Encontrar $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$, tal que

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (k \nabla u) &= f, \text{ en } \Omega, \\ k \nabla u \cdot n &= g, \text{ en } \Gamma_1, \\ u &= 0, \text{ en } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Para dos curvas suaves Γ_1 y Γ_2 tales que $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Asumiremos que k es una matriz simétrica y definida positiva. En particular esto es cierto para los coeficientes k_ε y k_0 tal como fueron definidos en la sección anterior.

A modo de ejemplo hemos escogido un medio bidimensional (Figura 1) formado por una circunferencia y una elipse. Este representa la sección transversal de un cilindro (tubería) en el cual se ha colocado otro más pequeño por el que fluye un

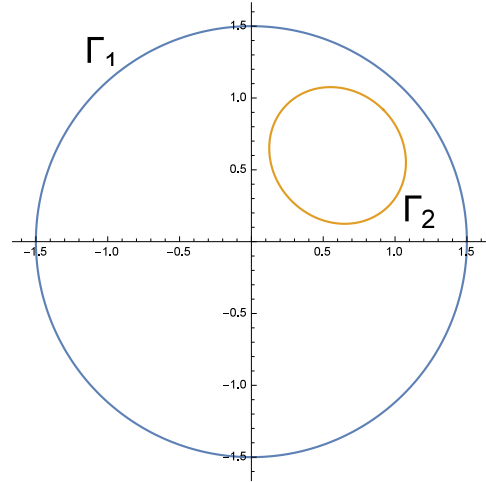


Figura 1. La región de interés Ω .

material a altas temperaturas. Entre ambos se ha colocado un disipador representado mediante la conductividad k_ε . En este ejemplo la radiación inducida desde el exterior solo afecta el material contenido en el cilindro menor generando las altas temperaturas. En este caso se toman $f = 0$ y $g = x^2 + y^2$.

3.1 Formulación variacional

Este problema de contorno es, en general, muy difícil de resolver directamente. Sin embargo, debilitando las hipótesis se pueden usar métodos variacionales para llegar a dicho resultado mediante aproximaciones en espacios de funciones.

El espacio de solución y de las funciones de prueba escogido es:

$$H_{\Gamma_2}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ en } \Gamma_2\} \subset H^1(\Omega).$$

De esta forma obtenemos

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla u) v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega),$$

pero en $H^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} v (\nabla \cdot \Phi) + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \Phi = \int_{\Gamma_1} v (\Phi \cdot n).$$

Esto es un caso particular del Teorema de Stokes (demostrado en [6]).

Teorema 1 (Stokes). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ Lipschitz-continuo y n vector normal unitario en $\partial\Omega$. La aplicación

$$\begin{aligned} \gamma_n : \quad C^\infty(\bar{\Omega}) &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ u &\rightarrow (u \cdot n) \end{aligned}$$

es continua en $H_{div}(\Omega)$. Y

$$\int_{\Omega} w (\nabla \cdot u) + \int_{\Omega} \nabla w \cdot u = \langle \gamma_0 w, \gamma_n u \rangle_{H^{1/2}, H^{-1/2}},$$

para el operador traza γ_0 .

Para el problema (1) se tiene la formulación equivalente:
Encontrar $u \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega)$, tal que

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot k \nabla u = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_1} g v \quad \forall v \in H_{\Gamma_2}^1(\Omega). \quad (2)$$

Demostraremos a continuación que este problema satisface las hipótesis del teorema de Lax-Milgram [5].

Teorema 2 (Lax-Milgram). *Sea H un espacio de Hilbert, A una forma bilineal y L lineal en H :
si A es continua, A es coerciva, y L es continua. El problema*

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in H \text{ tal que} \\ A(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H. \end{cases}$$

admite una única solución y

$$\|u\| \leq \frac{\|L\|}{\alpha},$$

donde α es una constante de coercividad, es decir

$$A(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2.$$

Sea $H = H_{\Gamma_2}^1(\Omega)$ dotado de la norma:

$$\|u\|_H = \|\nabla u\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tomando:

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot k \nabla u, \\ L(v) &= \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_1} g v, \end{aligned}$$

Es evidente que A es una forma bilineal, y L lineal, en H . Por otro lado, notemos que:

$$\begin{aligned} |A(u, v)| &= \langle k \nabla u, \nabla v \rangle \leq \|k\| \langle \nabla u, \nabla v \rangle \\ &\leq \|k\| \|u\|_H \|v\|_H, \end{aligned}$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, donde

$$\|k\| = \sup_{|\xi|=1} k\xi.$$

De aquí se obtiene la continuidad de A .

La matriz k es definida positiva, es decir:

$$\exists C > 0 : \xi \cdot k \xi \geq C |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

En particular para $\xi = \nabla u$, se tiene:

$$\begin{aligned} A(u, u) &= \int_{\Omega} \xi \cdot k \xi \\ &\geq C \int_{\Omega} |\xi|^2 = C \|u\|_H^2. \end{aligned}$$

Esto demuestra que la aplicación A es coerciva.

En cuanto a la continuidad de L , nótese que para cualquier $v \in H$ se tiene:

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)},$$

por desigualdad de Cauchy-Schwarz. Dado que las normas $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_H$ son equivalentes en H , se tiene que existe $C_1 > 0$ tal que para cualquier $v \in H$:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \|v\|_H.$$

Adicionalmente, por la continuidad del operador traza, existe $C_2 > 0$ tal que para cualquier $v \in H^1(\Omega)$:

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq C_2 \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 C_2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Entonces se obtiene finalmente que para cualquier $v \in H$:

$$|L(v)| \leq \left(C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_1 C_2 \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \right) \|v\|_H,$$

esto demuestra la continuidad de L .

De esta manera quedan satisfechas las hipótesis del teorema de Lax-Milgram, luego este es un problema bien planteado. Notemos además que, por la unicidad, la solución de dicho problema es una solución el problema de contorno original.

4. Experimentación y discusión de resultados

En las secciones anteriores se muestra teóricamente que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = u_0,$$

es decir que la solución del problema con coeficientes rápidamente oscilantes tiende a la solución del problema homogeneizado.

Uno de los objetivos de este trabajo es comprobar este hecho numéricamente, para el caso particular de estos problemas de contorno. La técnica consiste en encontrar u_0 resolviendo el problema (1) para k_0 , y encontrar u_ε resolviéndolo para k_ε con varios valores de ε .

Para cada k_0, k_ε se resuelve una formulación variacional análoga a la presentada en (2). Para ello se empleó el software libre FreeFEM++, una herramienta computacional que automatiza el proceso de discretización de la región en los elementos (Figura 2) y lleva a cabo el cómputo del proceso de integración numérico. La implementación se encuentra en el archivo adjunto `source.edp`.

4.1 Resultados numéricos

La solución para el caso límite u_0 se muestra en la figura (3), mientras que la figura (4) muestra las soluciones u_ε del problema no homogeneizado para algunos de los valores de ε seleccionados.

Se puede comprobar por simple inspección que efectivamente las curvas de nivel de u_ε se asemejan a las de u_0 progresivamente. A continuación se realiza un análisis más detallado de la convergencia.

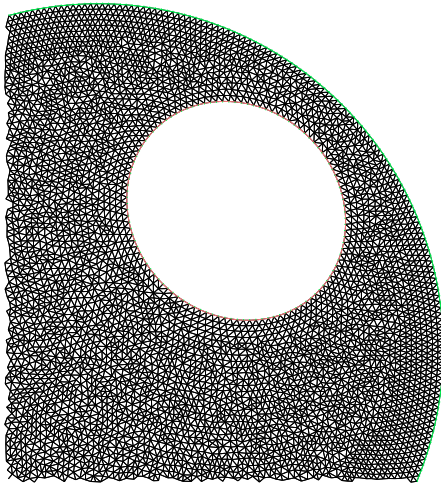


Figura 2. Detalle de la discretización de Ω .

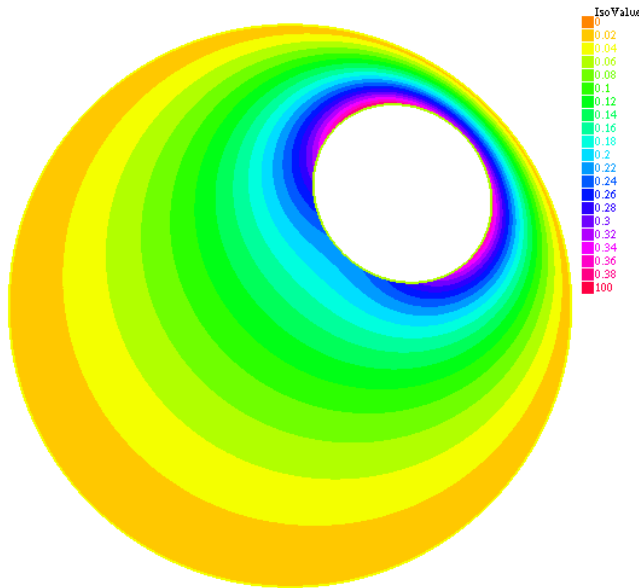


Figura 3. Solución límite u_0 .

4.2 Análisis del error

Para comprobar la convergencia de las soluciones, se procedió a calcular el error incurrido en cada un de las u_ε . Este error se define como:

$$E_\varepsilon = \int_{\Omega} |u_0 - u_\varepsilon|.$$

Se espera que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon = 0$. La figura (5) muestra el valor de E_ε para algunos de los valores de ε seleccionados.

En la figura (5) se observa cierta tendencia decreciente de E_ε , pero al hacer ε aun más pequeño, este error no decrece mucho más de lo que se muestra en la figura, mateniéndose acotado por el valor 0,03 aproximadamente, con algunas oscilaciones esporádicas para valores muy pequeños de ε . Es decir,

no se puede verificar numéricamente que E_ε pueda ser arbitrariamente pequeño, ni siquiera dentro del rango admisible de la aritmética flotante.

Para comprender el motivo de este comportamiento aparentemente contradictorio resulta conveniente la visualización de la discretización de la función $K_\varepsilon = K\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right)$ para valores decrecientes de ε (Figura 6).

Debido a que el período de K_ε es ε , la frecuencia de esta función en Ω tiende a infinito cuando ε tiende a cero. Esto provoca la aparición del efecto de *aliasing* ya que la muestra que se toma de K_ε es siempre la misma (la discretización de Ω no depende de ε), y se puede comprobar que a partir de cierto valor, K_ε pierde completamente su estructura y se convierte en ruido.

Puesto que el efecto del *aliasing* es inevitable, se concluye que, fijada la discretización de la región y el orden de la aproximación, el error de la aproximación u_ε no se puede hacer arbitrariamente pequeño haciendo ε tender a cero.

5. Conclusiones

La experimentación realizada nos permite arribar a las siguientes conclusiones:

- Es posible resolver el problema estacionario de la conducción del calor en un medio laminado utilizando las técnicas de homogeneización.
- El correspondiente problema variacional es bien planteado luego su solución coincide con la del problema original en su formulación fuerte, y utilizando FEM se obtiene una aproximación de la solución del problema variacional.
- Se verificó numéricamente que la solución u_0 obtenida mediante el proceso de homogeneización coincide con el límite de la sucesión $\{u_\varepsilon\}$, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.
- Encontrar este límite numéricamente mediante FEM haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ es un método no convergente. El efecto *aliasing* es predominante e inevitable.

Apéndice

A continuación se muestran algunos [7] de los principales resultados de la Teoría de la Homogeneización que validan la convergencia descrita.

Γ -convergencia

La Γ -convergencia es una noción abstracta de la convergencia funcional enfocada en la descripción del comportamiento asintótico de una familia de problemas extremos, usualmente dependiente de algún parámetro de naturaleza geométrica o constitutiva, derivado de alguna discretización, aproximación, etc. Esta técnica tiene muchas aplicaciones incluyendo, por ejemplo, el cálculo de variaciones y la homogeneización de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

A continuación veremos la definición, sus teoremas fundamentales y como se utiliza en la homogeneización de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Definición 1. Sea W un espacio métrico y d su distancia. Sea $(F_\varepsilon)_{\varepsilon \in E}$ una sucesión de funciones reales en W . La sucesión $(F_\varepsilon)_{\varepsilon \in E}$ se dice que Γ -converge a la función límite F_0 si para cualquier $x \in W$:

1. Toda sucesión $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in E}$ convergente a x en W cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ satisface

$$F_0(x) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(x_\varepsilon),$$

2. Existe una sucesión $(x_\varepsilon)_{\varepsilon \in E}$ convergente a x cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ tal que

$$F_0(x) \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(x_\varepsilon).$$

Llamaremos a una sucesión $(F_\varepsilon)_{\varepsilon \in E}$ definida en W *equi-medio* coerciva en W si existe un conjunto compacto K (independiente de ε) tal que

$$\inf_{x \in W} F_\varepsilon(x) = \inf_{x \in K} F_\varepsilon(x).$$

Teorema 3. Sea $(F_\varepsilon)_{\varepsilon \in E}$ una sucesión equi-medio coerciva en W que Γ -converge al límite F_0 . Entonces

1. El valor mínimo de (F_ε) converge al de F_0 :

$$\min_{x \in W} F_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\min_{x \in W} F_\varepsilon(x) \right),$$

2. Los mínimos de (F_ε) convergen a los de F_0 , a saber, si $x_\varepsilon \rightarrow x$ en W y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(x_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\min_{x \in W} F_\varepsilon(x) \right)$$

entonces x es un mínimo de $F(0)$.

Teorema 4. Si W es separable, para toda sucesión de funciones $(F_\varepsilon)_{\varepsilon \in E}$ definida en W existe una subsucesión $E' \in E$ y un Γ -límite F_0 tal que $(F_\varepsilon)_{\varepsilon \in E'}$ Γ -converge a F_0 cuando $E' \ni \varepsilon \rightarrow 0$.

En términos generales, para utilizar la Γ -convergencia en homogeneización, usualmente se transforma la ecuación en un problema de optimización. Consideremos por ejemplo el problema:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left(A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \right) = f, & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u_\varepsilon = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3)$$

con A coerciva, acotada y simétrica.

Para $\varepsilon \in E$ hacemos

$$F_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u \cdot \nabla u dx - \int_{\Omega} f u dx; \quad u \in H_0^1(\Omega). \quad (4)$$

Como A es simétrica, (3) es equivalente al problema de minimización

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq F_\varepsilon(v) \text{ para toda } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (5)$$

Luego la Γ -convergencia de la serie de funcionales $(F_\varepsilon)_{\varepsilon \in E}$ (definida por (4)) en $L^2(\Omega)$ -fuerte es equivalente a la homogeneización de la ecuación diferencial parcial (3). El método de Γ -convergencia aplicado a la teoría de la homogeneización no está restringido a la ecuaciones lineales ni a estructuras periódicas. Si bien es cierto que es una de las técnicas de homogeneización más utilizadas, se suele criticar por tener poco interés en los problemas prácticos de la física del medio continuo. Si bien existen autores que logran explicar dichos problemas a partir de problemas de minimización [4].

H -convergencia

La H -convergencia es una generalización de la G -convergencia un método bien conocido para problemas simétricos basado en la Función de Green.

Sea $\mathbb{R}^N \ni \Omega$ abierto y $0 < \alpha \leq \beta$. Se define $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ como el conjunto de las matrices $N \times N$ con constante de coercividad α y acotación β :

$$\mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega) = \left\{ A \in L^\infty(\Omega, M_N) : \forall \xi \in \mathbb{R}^N \right. \\ \left. \alpha |\xi|^2 \leq A(x) \xi \cdot \xi \leq \beta |\xi|^2 \quad \text{c.d. } \Omega \right\}.$$

Consideremos $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in E} \subset \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$. Dada $f \in L^2(\Omega)$, existe una solución (Lax-Milgram) $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ para

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f, & \text{en } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6)$$

Definición 2. La sucesión $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in E}$ se dice que H -converge a un límite A^* cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon \in E$), si, para cualquier $f \in L^2(\Omega)$ en el miembro derecho se tiene

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightharpoonup u_0 && \text{debilmente en } H_0^1(\Omega), \\ A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon &\rightharpoonup A^* \nabla u_0 && \text{debilmente en } L^2(\Omega)^N, \end{aligned}$$

cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, donde u_0 es la solución del problema *homogeneizado* asociado a A :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A^* \nabla u_0) = f, & \text{en } \Omega, \\ u_0 = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7)$$

Entre sus propiedades se encuentran:

1. Si $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in E} \subset \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ H -converge, su H -límite es único.
2. El H -límite no depende ni del punto inicial ni de la condición de contorno.
3. Si $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in E} \subset \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$ H -converge a A^* entonces la densidad de energía asociada también converge, esto es, $A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon$ converge a $A^* \nabla u \cdot \nabla u$ en el sentido de las distribuciones.

De hecho la H -convergencia es una propiedad local.

Nota: En la G -convergencia solo se exige $u_\varepsilon \rightarrow u_0$, sin restricciones para el flujo $A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon$; esta última es necesaria cuando se elimina la simetría de las hipótesis pues garantiza la unicidad del límite. En realidad la verdadera utilidad de la H -convergencia se basa en el siguiente resultado sobre compacidad.

Teorema 5. Para cualquier sucesión $(A_\varepsilon)_{\varepsilon \in E} \subset \mathcal{M}(\alpha, \beta, \Omega)$, existe una subsucesión $E' \subset E$ y un límite

$$A^* \in \mathcal{M}\left(\alpha, \frac{\beta^2}{\alpha}, \Omega\right)$$

tal que A_ε H -converge a A^* cuando $E' \ni \varepsilon \rightarrow 0$.

Método de expansión asintótica

El método de expansión asintótica en la homogeneización es un *procedimiento formal* para derivar los problemas límites. Usualmente es necesario utilizar otras técnicas para justificar los resultados de homogeneización obtenidos por este método. Si bien en apariencia es uno de los métodos más simples en realidad se basa en establecer una forma (un *ansatz*) para el problema homogeneizado. [1]

A diferencia de los métodos descritos con anterioridad el método de expansión asintótica solo es usado en problemas de homogeneización lineal.

En particular, analizaremos el problema

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon \right) = f, & \text{en } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (8)$$

asumiendo que A es una matriz simétrica, definida positiva, acotada y I -periódica ($I = [0, 1]^N$).

Intentaremos buscar una solución en forma de desarrollo asintótico a doble escala

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x, \xi) + \varepsilon u_1(x, \xi) + \varepsilon^2 u_2(x, \xi) + \dots,$$

donde u_i son I -periódicas con respecto a la variable local $\xi = x/\varepsilon$. Sustituyendo en (8):

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{-2} \nabla_\xi \cdot (A(\xi) \nabla_\xi u_0(x, \xi)) \\ &+ \varepsilon^{-1} (\nabla_\xi \cdot A(\xi) (\nabla_\xi u_1(x, \xi) + \nabla_x u_0(x, \xi)) \\ &\quad + A(\xi) \nabla_x \cdot \nabla_\xi u_0(x, \xi)) \\ &+ \varepsilon^0 (\nabla_\xi \cdot A(\xi) (\nabla_\xi u_2(x, \xi) + \nabla_x u_1(x, \xi)) \\ &\quad + A(\xi) \nabla_x \cdot (\nabla_\xi u_1(x, \xi) + \nabla_x u_0(x, \xi))) \\ &+ \varepsilon^1 (\dots) + \dots \\ &= -\varepsilon^0 f(x). \end{aligned} \quad (9)$$

El siguiente paso consiste en igualar los coeficientes que acompañan las diferentes potencias de ε . De esta forma, para ε^{-2} :

$$-\nabla_\xi \cdot (A(\xi) \nabla_\xi u_0(x, \xi)) = 0.$$

Esta ecuación solo admite soluciones I -periódicas constantes respecto a ξ , es decir:

$$u_0 = u_0(x).$$

Para ε^{-1} se demuestra que

$$u_1 = \chi(\xi) \cdot \nabla_x u_0(x) + \hat{u}(x);$$

donde $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_N)$ son las soluciones I -periódica de los llamados problemas locales:

$$-\nabla_\xi \cdot (A(\xi) \nabla_\xi \chi_j(x, \xi)) = -\nabla_\xi \cdot (A(\xi) e_j), \quad (10)$$

(e_j vectores de la base canónica).

De manera similar se sustituye para ε^0 , solo que esta vez, además, si promediamos respecto la variable local en I obtenemos:

$$-\nabla \cdot (\hat{A}(x) \nabla u_0(x)) = f(x)$$

Donde $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$ para

$$\hat{a}_{ij} = [a_{ij} - \sum_{k=1}^N a_{ik} \frac{\partial \chi_j}{\partial \xi_k}]. \quad (*)$$

Este es precisamente el problema homogeneizado o límite, donde \hat{A} conserva la simetría y el carácter definido positivo.

Este procedimiento garantiza que la ecuación obtenida sea correcta, pero queda entonces demostrar la convergencia de las soluciones. Este ultimo paso se puede realizar por diferentes métodos, como la Γ o G -convergencia, utilizando funciones de prueba oscilantes, el principio del máximo, etc.

Agradecimientos

Los autores desean agradecer a los profesores Sébastien Martin (Université Paris Descartes) y Ángela León Mecías (Universidad de La Habana) por su labor durante el curso de Elementos Finitos (La Habana, 2016), y al profesor Julián Bravo Castellero (Universidad de La Habana) por sus oportunos comentarios.

Referencias

- [1] Bakhvalov N. y Panasenko G. (1989) Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media. Kluwer Academic Publishers.
- [2] Allaire G., Briane M. (1996) Multiscale convergence and reiterated homogenisation. P Roy Soc Edinb A 126(2):297-342. doi: 10.1017/S0308210500022757.
- [3] Cioranescu D., Donato P. (1999) An Introduction to Homogenization. Oxford University Press Inc., New York.
- [4] Benamou J.D. and Brenier Y. (2000) A computational fluid mechanics solution to the monge-kantorovich mass transfer problem. Numerische Mathematik, 84:375-393.
- [5] Ern A., Guermond J-L. (2004) Theory and Practice of Finite Elements. Springer-Verlag Inc., New York.
- [6] Boyer F. (2013) Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier Stokes Equations and Related Models. Springer Science+Business Media, New York. doi:10.1007/978-1-4614-5975-0.
- [7] Douanla H. Y. (2013) Two-scale Convergence and Homogenization of Some Partial Differential Equations. Chalmers University of Technology University of Gothenburg (PhD. Thesis).

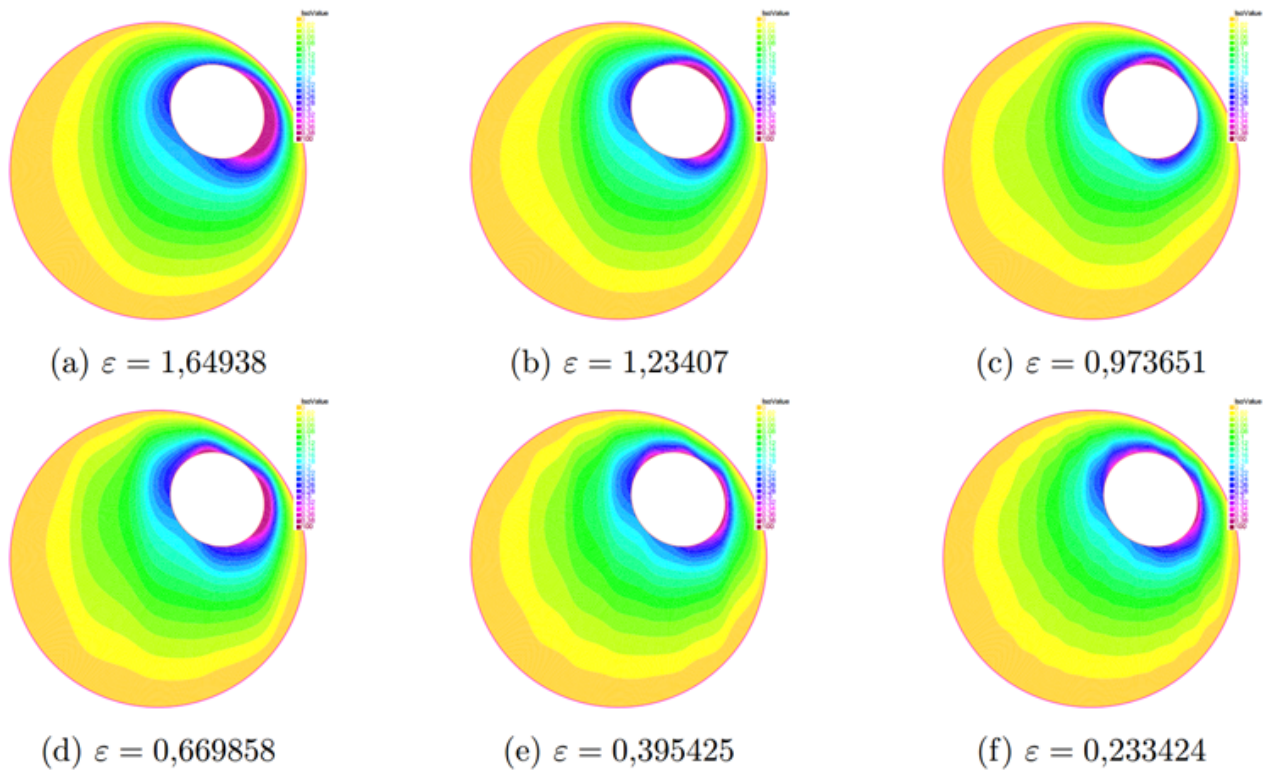


Figura 4. La solución u_ε para diferentes valores de ε . La escala mostrada muestra los valores entre 0 y 100

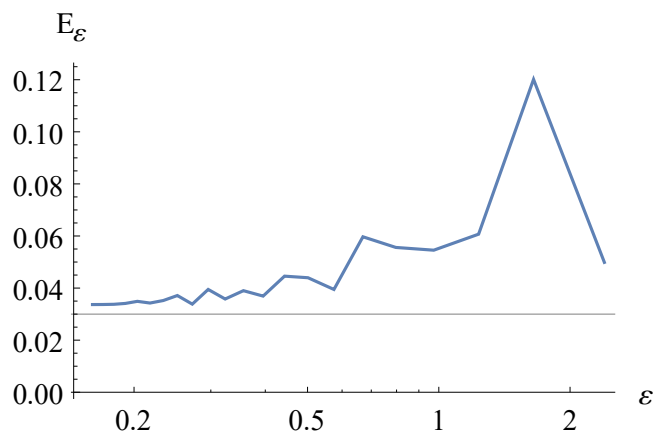


Figura 5. Error absoluto de u_ϵ en función de ϵ .

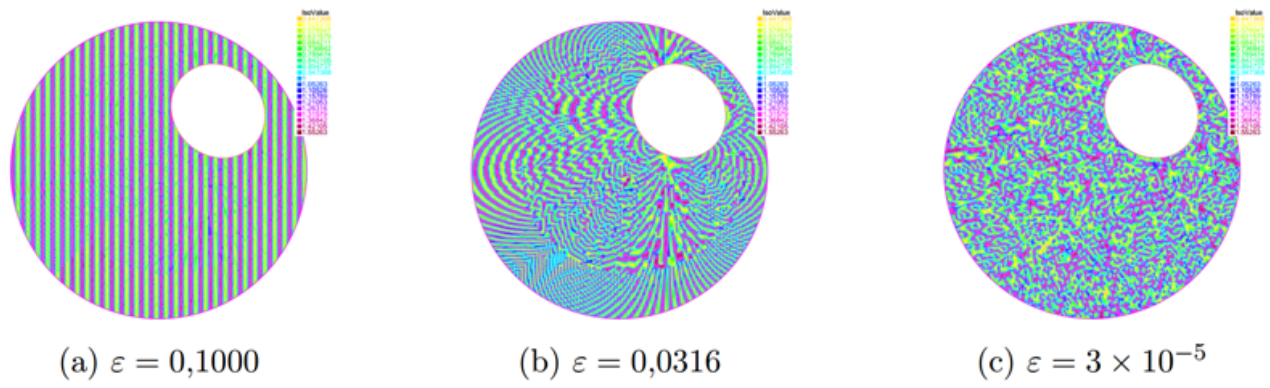


Figura 6. La función K_ε para diferentes valores de ε . Los colores claros (oscuros) denotan baja (alta) conductividad.