

El modelo de Lotka -Volterra

The Lotka-Volterra model

Jorge Estrada Hernández¹, Ana Isis Toledo Marrero¹

Resumen En este trabajo se analiza un modelo de Lotka-Volterra, o presa-depredador, con dos ecuaciones en derivadas parciales. Se hace una primera aproximación mediante el Método de Diferencias Finitas, y luego se demuestra que el problema simplificado está bien planteado y se puede resolver mediante el Método de Elementos Finitos. Por último, se resuelve numéricamente el problema con el software FreeFem++ y se experimenta con diversos parámetros, regiones y condiciones iniciales.

Abstract In this paper we analyze a Lotka-Volterra, or predator-prey model of two partial differential equations. A first approximation using the Finite Differences Method is made. Then it is proved that the simplified problem is well-posed and can be solved using the Finite Elements Method. Finally, the problem is solved numerically using the FreeFem++ software and experiments are made varying the parameters, regions and initial conditions.

Palabras Clave

Lotka-Volterra, Elementos Finitos, Diferencias Finitas

¹ Departamento de Matemática, Universidad de La Habana, Cuba, jestrada@matcom.uh.cu, nany@matcom.uh.cu

1. Introducción

El modelo matemático de Lotka-Volterra, también conocido como *presa-depredador*, fue propuesto inicialmente por Alfred J. Lotka en "*teoría de las reacciones químicas autocatalíticas*", en 1910. Esta era efectivamente la ecuación logística, que debe su origen a Pierre François Verhulst. En 1920, a través de Kolmogorov, Lotka extendió el modelo a "*sistemas ecológicos*", con una especie de planta y una especie de animales herbívoros como ejemplo, y es en 1925 cuando utiliza las ecuaciones para analizar las interacciones depredador-presa en su libro sobre biomatemáticas, donde se llega a las ecuaciones que hoy se conocen. De manera casi simultánea, en 1926, Vito Volterra en un análisis estadístico de las capturas de peces en el mar Adriático, investigó de forma independiente, estas mismas ecuaciones; es por tal motivo que el modelo es reconocido en la actualidad por el nombre de ambos. [GonMa]

Este modelo describe la lucha constante por la supervivencia entre dos especies:

En un hábitat en el que hay abundantes recursos naturales se deja evolucionar dos especies, una depredadora y la otra presa. Se designará por $v(t, x, y)$ al número de individuos de la especie depredadora en el instante t en la ubicación de coordenadas (x, y) y por $u(t, x, y)$ a la cantidad de presas en ese instante en el mismo lugar.

Se sabe que la especie depredadora se extinguiría en ausencia de presas y que a su vez la población de presas crecería sin la presencia de los depredadores, se asume este crecimiento de forma exponencial. Sin embargo, al compartir las dos po-

blaciones el mismo hábitat, aumentará la tasa de crecimiento de los depredadores en una cantidad proporcional al número de presas existentes en ese momento, a la vez que las presas experimentarían una disminución en su tasa de crecimiento proporcional al número de depredadores en ese instante.

Asumiendo las condiciones anteriormente descritas, el modelo de Lotka-Volterra explica la evolución conjunta de las dos especies en el tiempo y el espacio mediante el sistema:

$$\begin{cases} \partial_t u = D_1 \Delta u - \alpha_1 uv \\ \partial_t v = D_2 \Delta v + \alpha_2 uv \end{cases} \quad (1)$$

donde D_1, D_2, α_1 y α_2 son constantes positivas, $\partial_t \phi$ representa la derivada parcial con respecto al tiempo de la función $\phi(t, x, y)$ y Δ es el operador Laplaciano definido como

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

En lo que sigue se considerarán condiciones de frontera tipo Dirichlet, no homogéneas, o sea

$$u(t, x, y) = g_u(t, x, y), v(t, x, y) = g_v(t, x, y), \forall (x, y) \in \partial\Omega, t \in [0, T]$$

y condiciones iniciales

$$u(0, x, y) = u_0(x, y), v(0, x, y) = v_0(x, y), \forall (x, y) \in \Omega$$

donde Ω es una región del plano abierta, conexa y acotada.

En este informe se analizará el comportamiento de las soluciones del sistema (1) por medio de la utilización del Método de los Elementos Finitos combinado con una discretización previa del problema utilizando el Método de las Diferencias Finitas para aproximar la derivada parcial con respecto al tiempo.

2. Una aproximación al problema desde el Método de las Diferencias Finitas

Si analizamos el problema desde el enfoque de las diferencias finitas, estamos en presencia de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales bidimensional, para el cual es importante seleccionar convenientemente un esquema adecuado en diferencias, de manera que la resolución del sistema correspondiente no sea muy costosa computacionalmente y además que se pueda garantizar la consistencia y estabilidad del mismo.

A este análisis sería importante agregar que el sistema de ecuaciones diferenciales a estudiar no es lineal y por tanto, aunque se utilizara un esquema de discretización económico (en direcciones alternadas) que garantizara disminuir el costo computacional, la no linealidad del mismo implicaría complicaciones teóricas y prácticas considerablemente altas para la demostración de la estabilidad o consistencia del esquema, así como para el cálculo numérico de las soluciones.

Suponiendo que todos los obstáculos anteriormente mencionados fueran eficientemente salvados, limitarnos al Método de las Diferencias Finitas implicaría limitaciones relacionadas con la región Ω de estudio del problema, pues usualmente se utilizan mallas regulares o rectangulares y no resulta sencillo discretizar una región arbitraria con este tipo de mallado.

Aunque el método de las Diferencias Finitas no es adecuado para resolver completamente el problema planteado anteriormente, si será de gran ayuda para transformar el sistema en un nuevo sistema lineal que puede ser iterativamente resuelto por medio del Método de los Elementos Finitos.

En efecto, considérese que el tiempo varía en el intervalo $I = [0, T]$ y sea

$$I_h = \left\{ t_n = n \cdot \Delta t, \quad n = 0 \dots N, \quad N = \frac{T}{\Delta t} \right\}$$

Sea

$$\phi_n \simeq \phi(t_n, x, y)$$

una aproximación de ϕ en los momentos t_n . Usando la discretización de Euler para aproximar la derivada con respecto al tiempo, se tiene

$$\partial_t \phi(t_{n+1}, x, y) \simeq \frac{\phi_{n+1}(x, y) - \phi_n(x, y)}{\Delta t}$$

se obtiene la siguiente discretización del problema planteado en (1) con respecto al tiempo:

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = D_1 \Delta u_{n+1} - \alpha_1 u_n v_n \\ \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} = D_2 \Delta v_{n+1} + \alpha_2 u_{n+1} v_n \end{cases} \quad (2)$$

Reescribiendo el sistema anterior, se tiene:

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + C_1 u_{n+1} = u_n (C_1 - C_2 v_n) & (2,1) \\ -\Delta v_{n+1} + C_3 v_{n+1} = v_n (C_3 + C_4 u_{n+1}) & (2,2) \end{cases}$$

$$\text{donde } C_1 = \frac{1}{\Delta t D_1}, C_2 = \frac{\alpha_1}{D_1}, C_3 = \frac{1}{\Delta t D_2} \text{ y } C_4 = \frac{\alpha_2}{D_2}.$$

Nótese que en cada iteración, conociendo u_n , v_n y resolviendo (2,1) para u_{n+1} entonces se podría calcular v_{n+1} por medio de (2,2). Los valores u_0 y v_0 se tienen de las condiciones iniciales del problema, por tanto de forma iterativa se obtendrían los vectores soluciones $u = (u_0, u_1, \dots, u_N)$ y $v = (v_0, v_1, \dots, v_N)$.

Faltaría solamente definir la manera en que será resuelta cada ecuación para pasar del nivel n al nivel $n + 1$.

3. Resolución del problema por el Método de los Elementos Finitos

En esta sección se demuestra que cada una de las ecuaciones del sistema anteriormente planteado para un nivel n dado, se puede resolver aplicando el Método de los Elementos Finitos.

Asúmanse conocidos u_n y v_n , la cuestión será entonces encontrar la solución u_{n+1} del siguiente problema elíptico con condiciones de frontera tipo Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + C_1 u_{n+1} = u_n (C_1 - C_2 u_n v_n), & \forall (x, y) \in \Omega \\ u_{n+1}(x, y) = g_u(t_{n+1}, x, y), & \forall (x, y) \in \partial \Omega \end{cases} \quad (3)$$

Para resolver (3) es importante obtener la formulación variacional del mismo y demostrar que es un problema bien planteado.

Nótese que, cómo las condiciones de frontera de Dirichlet no son homogéneas, u no pertenece al espacio H_0^1 ; sin embargo,

$$g_{u,n+1} := g_u(t_n, x, y) \in H^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega)$$

luego, existe un operador de extensión (en inglés, *lift operator*) $R_0(g_{u,n+1}) : H^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ tal que su traza en $\partial \Omega$ es $g_{u,n+1}$. Luego, la nueva variable sería $\bar{u} = u - R_0(g_{u,n+1})$ la cual está en $H_0^1(\Omega)$.

Introduciendo la función de prueba $\phi \in H_0^1(\Omega)$ y por medio de la integración por partes, se obtiene la siguiente formulación variacional del problema (3)

$$-\int_{\Omega} \nabla u_{n+1} \nabla \phi + C_1 \int_{\Omega} u_{n+1} \phi = \int_{\Omega} u_n (C_1 - C_2 v_n) \phi \quad (4)$$

A continuación se enuncia el teorema de Lax-Milgram, que será utilizado para demostrar que el problema variacional (4) está bien planteado, esto es, que tiene una solución única y que esta depende continuamente de los datos.

Teorema de Lax-Milgram

Sea H un espacio de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ una forma bilineal y L una forma lineal. Si se cumplen las siguientes condiciones

i) $a(\cdot, \cdot)$ es continua, esto es $\forall (u, \phi) \in H$,
 $|a(u, \phi)| \leq \|a\| \|u\|_H \|\phi\|_H$

ii) $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva, esto es $\exists \alpha > 0$:
 $\forall u \in H, a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2$

iii) L es continua, esto es $\forall u \in H, |L(u)| \leq \|L\| \|u\|_H$

Entonces el problema

$$\text{buscar } u \in H : a(u, \phi) = L(\phi), \forall \phi \in H$$

admite una única solución u y esta solución satisface además que $\|u\|_H \leq \frac{\|L\|}{\alpha}$.

Por la linealidad de la integral y del operador ∇ (gradiente), se tiene claramente que

$$a(u_n, \phi) = - \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \phi + C_1 \int_{\Omega} u_n \phi$$

es una forma bilineal en $H^1(\Omega)$, veamos además que es continua.

$$\begin{aligned} |a(u_n, \phi)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \phi + C_1 \int_{\Omega} u_n \phi \right| \\ &\leq \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2} \sqrt{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2} + C_1 \sqrt{\int_{\Omega} u_n^2} \sqrt{\int_{\Omega} \phi^2} \\ &\leq \max(C_1, 1) \sqrt{\int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 + u_n^2)} \sqrt{\int_{\Omega} (|\nabla \phi|^2 + \phi^2)} \\ &= \max(C_1, 1) \|u_n\|_{H^1(\Omega)} \|\phi\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

(En la segunda desigualdad usamos Cauchy-Schwarz.)
 Además se cumple que

$$a(u_n, u_n) = \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 + C_1 \int_{\Omega} u_n^2 \geq \min(C_1, 1) \|u_n\|_{H^1(\Omega)}^2$$

con lo cual también se tiene que $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva.

Nótese por último que la forma lineal
 $L(\phi) = \int_{\Omega} u_n (C_1 - C_2 v_n) \phi$ es continua

$$\begin{aligned} |L(\phi)| &= \left| \int_{\Omega} u_n (C_1 - C_2 v_n) \phi \right| \\ &\leq C_1 \left| \int_{\Omega} u_n \phi \right| + C_2 \left| \int_{\Omega} u_n v_n \phi \right| \\ &\leq C_1 \|u_n\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2} + C_2 \|u_n\|_{L^4} \|v_n\|_{L^4} \|\phi\|_{L^2} \\ &\leq C_1 \|u_n\|_{L^2} \|\phi\|_{H^1} + C_2 \|u_n\|_{L^4} \|v_n\|_{L^4} \|\phi\|_{H^1} \\ &\leq M \|\phi\|_{H^1} \end{aligned}$$

donde $M = C_1 \|u_n\|_{L^2} + C_2 \|u_n\|_{L^4} \|v_n\|_{L^4}$. Para las desigualdades anteriores se ha utilizado la desigualdad triangular, la desigualdad de Cauchy-Schwarz para el producto usual $u_n \phi$ y la desigualdad de Hölder para $u_n v_n \phi$.

Como se han verificado las hipótesis del teorema de Lax-Milgram para el problema (4) en el espacio de Hilbert $H^1(\Omega)$, se puede asegurar la existencia y unicidad de la solución y la dependencia continua de esta con respecto a los datos del problema; es decir, el problema está bien planteado.

4. Resolución numérica del problema utilizando FreeFEM++

A continuación se expone un pseudocódigo para resolver nuestro problema con el software FreeFem++

procedure RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA USANDO FREE-FEM++

(1) Declarar la frontera de la región, el espacio de elementos finitos (en este caso P2) y los valores de los parámetros.

(2) Plantear los problemas en su formulación variacional y las condiciones de frontera.

(3) Resolver los problemas.

(4) Graficar las soluciones.

(5) Actualizar las condiciones iniciales.

(6) Repetir (3)-(5) en el intervalo de tiempo deseado.

end procedure

Se experimentó con diversos valores de los parámetros $D_1, D_2, \alpha_1, \alpha_2$, diversas condiciones iniciales y dos regiones distintas: La circunferencia unitaria y el cuadrado de lado 2, ambos con centro en $(3, 4)$. La siguiente lista resume los resultados de la experimentación numérica:

- Para valores pequeños de α_1, α_2 respecto a D_1, D_2 , las soluciones convergen en el tiempo.
- Para valores un poco mayores de α_1, α_2 las soluciones son periódicas, como es típico de los sistemas de EDOs de presa-depredador.
- Para valores grandes de α_1, α_2 , sin embargo, las soluciones explotan en tiempo finito en el centro de la región.
- No hubo diferencias significativas entre el comportamiento dentro del cuadrado y de la circunferencia.

Referencias

[GonMa] González, M., T., *Modelo predador-presa de Volterra-Lotka*, Proyecto de Innovación y Mejora de la Calidad Docente, Proyecto 29, UCM MATH-TRAINING 1.0: Desarrollo de una plataforma de software y de módulos docentes en matemáticas, Universidad Complutense de Madrid.

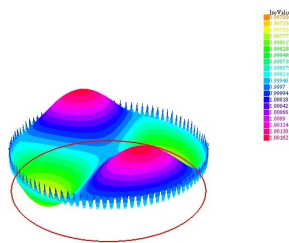


Figura 1. Población de la presa en un círculo

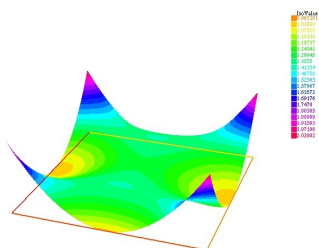


Figura 2. Población de la presa en un cuadrado

[All07] Allaire, G., *Numerical Analysis and Optimization*, Oxford Science Publication, 2007.

[Leo10] León, A.M, *Métodos Numéricos Avanzados para EDDP*, Notas de Clase, curso 2010-2011, UH.

[Hecht] Hecht, M., *FreeFem++*, Third Edition, version 3.40, <http://www.freefem.org/ff++>