

# Justificación analítica y numérica del método de solución del problema directo $\operatorname{div}(\varepsilon(x,y)\nabla u) = 0$ , con coeficiente variable y condición de contorno tipo Dirichlet

Emmanuel Abdias Romano Castillo (aromano@mixture.utm.mx), Alexandre I. Grebennikov (agrebe50@yahoo.com.mx)

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, FCFM BUAP

---

## Resumen

Se propone un nuevo método para resolver el problema de Dirichlet para la ecuación  $\operatorname{div} [\varepsilon(x,y)\operatorname{grad} u(x,y)] = 0$  donde la función  $\varepsilon(x,y)$  es una función conocida. El método está basado en el Principio de Rayos Generales (PRG) propuesto en [1]. Con este método se obtiene una solución explícita del problema de contorno de Dirichlet empleando la Transformada Directa e Inversa de Radon. El objetivo de este artículo es exponer la justificación teórica y la implementación numérica del método. La implementación numérica se realiza por algoritmos rápidos, programados en el sistema Matlab y se compara con el método de elemento finito.

## Abstract

We propose a new method for solving the Dirichlet problem for equation  $[\varepsilon(x,y)\operatorname{grad} u(x,y)] = 0$  where  $\varepsilon(x,y)$  is a known function. The method is based on the Principle of General Ray (PRG) proposed in [1]. With this method provides an explicit solution of the Dirichlet boundary problem with direct and inverse transform Radon. The aim of this paper is to present theoretical justification and the numerical implementation of the method. The numerical implementation is realized by rapid algorithms programmed in the system Matlab, and is compared with the method of finite element.

## 1. Introducción

En nuestro entorno a cada momento se desarrollan dos clases de problemas: directos e inversos. La resolución de un problema directo, por ejemplo, encontrar las soluciones de una ecuación algebraica, predecir los efectos de una acción, involucra análisis o razonamiento progresivo, es decir, de premisas a conclusiones. En cambio la, resolución de un problema inverso involucra síntesis o razonamiento regresivo, es decir, de conclusiones a premisas o de efectos a causas [1]. El desarrollo de nuevos métodos para resolver problemas directos es muy importante para resolver problemas inversos [2, p. 311]. La ecuación  $\operatorname{div} [\varepsilon(x,y)\operatorname{grad} u(x,y)] = 0$  describe la distribución de la función potencial  $u(x,y)$  para cualquier campo estacionario, que puede interpretarse como electrostático, elástico u óptico; donde  $\varepsilon(x,y)$  representa alguna característica del medio [3] [4]. Hay dos principales enfoques para resolver la ecuación  $\operatorname{div} [\varepsilon(x,y)\operatorname{grad} u(x,y)] = 0$  en forma analítica para cuando  $\varepsilon(x,y)$  es conocida: descomposición de Fourier y método de funciones de Green [3]. La descomposición de Fourier es usada, como regla, solo en investigaciones teóricas. El método de funciones de Green es uno de los más explícitos [3], pero su dificultad radica en la construcción de la función de Green para coeficiente variable e igualmente si el dominio es de geometría compleja ( $\Omega$  un dominio estrellado). Los algoritmos numéricos conocidos para el problema considerado están basados en el método de

diferencias finitas, método de elemento finito (volumen finito) y el método de ecuaciones integrales de contorno. El tratamiento numérico de los algoritmos conocidos induce a resolver sistemas lineales de ecuaciones algebraicas [4], que requieren mayor tiempo de cómputo y memoria.

Un enfoque nuevo para resolver problemas de contorno en la base del Principio de Rayos Generales (PRG) fue propuesto en [5], [6] para campos de ondas estacionarias. En [7] se propone la  $p$ -versión del Método de Rayos Generales, esta versión está basada en la aplicación de la transformada directa e inversa de Radon para EDP [8]. En este artículo se considera que el coeficiente de permitividad del medio es una función de distribución espacial y se propone la reducción de coeficientes variables a coeficientes constantes. Los algoritmos correspondientes están realizados como programas en el sistema MATLAB e ilustrados por experimentos numéricos, además se realiza una comparación entre el método de solución y el Método de Elemento finito (MEF).

## 2. Planteamiento del problema

Sea  $\Omega$  un dominio estrellado, acotado simplemente conexo con frontera  $\Gamma$  suficientemente regular y sea  $\varepsilon: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  una función estrictamente positiva y dos veces continuamente diferenciable.

Considere la ecuación diferencial parcial de tipo elíptico, esto es

$$\operatorname{div}[\varepsilon(x, y) \nabla u(x, y)] = 0 \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

y condición de contorno de la primera especie (fijar el valor de la solución que se va buscando en la frontera):

$$u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (2)$$

Las ecuaciones (1)-(2) definen lo que se denomina Problema de Dirichlet. El problema consiste en hallar  $u(x, y)$  dos veces continuamente diferenciable en ambas variables en el interior del dominio  $\Omega$ , suponiendo conocidas  $f(x, y)$  y  $\varepsilon(x, y) > 0$ . Tenemos la ecuación (1) en forma divergente y el problema (1)-(2) describe la distribución de la función potencial  $u(x, y)$  para cualquier campo estacionario, que puede interpretarse como electrostático, elástico u óptico [3], [4].

## 3. Fundamento teórico de la $p$ -versión del GR-método y esquema de solución para (1)-(2) empleando la $p$ -versión

En trabajos [9] y [10] fueron presentadas investigaciones de la posibilidad de reducir el problema en Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) a una familia de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) usando la Transformada Directa de Radon.

El método de solución planteado para resolver (1)-(2) al cual nombramos la  $p$ -versión del Método de Rayos Generales (para más información consulte apéndice) consiste en los siguientes pasos:

**Paso 1:** Reducir el problema de contorno no-homogéneo a un problema homogéneo mediante un cambio de variable.

**Paso 2:** Reducir la ecuación (1) con coeficiente variable a una ecuación tipo Poisson con coeficientes constantes.

**Paso 3:** Describir la distribución de la función potencial a lo largo de un rayo general (línea recta  $\ell$ ) por su transformada directa de Radon  $u_\phi(p)$ .

**Paso 4:** Construir la familia de EDO en la variable  $p$  con respecto a la función  $u_\phi(p)$ , aplicando la transformada directa de Radon a EDP con condición de contorno homogénea.

**Paso 5:** Resolver la familia de EDO sujeta a condiciones de contorno homogéneas.

**Paso 6:** Calcular la inversa de la transformada de Radon de la solución obtenida en paso anterior.

**Paso 7:** Recuperar la solución del problema (1) - (2), agregando funciones construidas para satisfacer las condiciones (2).

Suponemos que el contorno  $\Gamma$  puede ser descrito en coordenadas polares  $(r, \theta)$ , para alguna función positiva que denotamos por  $r_0(\theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Esto es siempre posible para una región estrellada cerrada  $\Omega$  con centro en el origen de coordenadas. De este modo podemos escribir la condición de contorno como:

$$\bar{f}(\theta) = f(r_0(\theta) \cos \theta, r_0(\theta) \sin \theta) \quad \text{en } \theta \quad (3)$$

**Paso 1:** Suponemos que las funciones:  $r_0(\theta)$  y  $\bar{f}(\theta)$  tienen segundas derivadas e introducimos las siguientes funciones:

$$f_0(\theta) = \frac{\bar{f}(\theta)}{r_0^2(\theta)}, \quad (x, y) \in \Omega \quad (4)$$

$$u_0(x, y) = u(x, y) - r^2 f_0(\theta) \quad (5)$$

$$\varepsilon(x, y) \mapsto \varepsilon_0(r, \theta) \quad (6)$$

Obteniendo la ecuación (1) en forma polar e intercambiando el coeficiente variable por (6) queda:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial r} \right) + \left( \frac{\varepsilon_0}{r} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \\ + \left( \frac{\varepsilon_0}{r^2} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) + \left( \frac{1}{r^2} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \theta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Sustituyendo (5) en (7) y simplificando queda:

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \nabla u_0) = -\psi_0 \quad (8)$$

donde

$$\psi_0 = 4\varepsilon_0 f_0(\theta) + 2r f_0'(\theta) \left( \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial r} \right) + \varepsilon_0 f_0''(\theta) + f_0'(\theta) \left( \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \theta} \right) \quad (9)$$

De este modo conseguimos el problema equivalente a (1) - (2):

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \nabla u_0) = -\psi_0 \quad (10)$$

$$u_0 = 0 \quad (11)$$

Usando (2), (3), (4) y (5) se tiene (11) que representa la transición de condición de contorno no-homogénea a homogénea.

**Paso 2:** Para reducir la ecuación (10) con coeficientes variables a una ecuación con coeficientes constantes, se realiza la siguiente reducción:

$$\varepsilon_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_0 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon_0 \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (13)$$

Empleando (12) - (13) en (10) se consigue la realización del paso 2 del esquema quedando:

$$\Delta v = -\psi_0, \quad (14)$$

$$v = 0. \quad (15)$$

donde el lado derecho de (14) está representado por (9). La realización concreta de los pasos: 3-7 del esquema están implementados en los algoritmos desarrollados para sistema Matlab y cuyos resultados numéricos presentan las etapas de procesamiento.

## 4. Ejemplo analítico-numérico para la ecuación $\operatorname{div}(\varepsilon(x, y) \nabla u) = 0$ con coeficiente variable

Consideremos el problema de contorno (1) - (2) sobre el círculo de radio  $R$ . Luego  $\Gamma$  puede ser descrita en coordenadas polares  $(r, \theta)$  y (3) cambia por:

$$\bar{f}(\theta) = f(R \cos \theta, R \sin \theta) \quad (16)$$

Supongamos que  $\varepsilon(x, y) = \frac{1}{[\cos(x+y) + 2]}$  es positivo y que  $v_x = v_y = 1$ , la representación de  $\varepsilon(x, y)$  en coordenadas polares es denotada por  $\varepsilon_0(r, \theta)$ .

### 4.1 Solución analítica

Procedemos a recuperar la solución  $u_0(x, y)$  para el problema equivalente (10) - (11), empleando la primer variante de (12):

$$u_0(x, y) = \int_{x_1}^x \left[ \frac{v_x}{\varepsilon} \right] dx + h(y) \quad (17)$$

$$u_0(x, y) = \int_{x_1}^x \{ \cos(x_0, y) + 2 \} dx_0 + h(y) \quad (18)$$

Para determinar  $h(y)$  de manera explícita en (18) procedemos conforme a lo siguiente:

1. Establecemos límites de integración, para satisfacer automáticamente las condiciones de contorno en las curvas  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , donde  $\Gamma_1$  es la rama izquierda de (19) y  $\Gamma_2$  es la rama derecha de (19).
2. Sea  $h(y)$  una función a trozos, debido a la condición de contorno en distintas ramas denotadas como  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ .
3. Establecer la continuidad de la solución hasta la frontera, por coincidencia de valores de las funciones obtenidas por las fórmulas que presentan la solución analítica en diferentes partes del dominio que corresponden a las curvas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ .

Para el primer paso, considere dos ramas del círculo de radio  $R$  centrado en el origen; en términos de la expresión matemática:

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{R^2 - y^2} \quad (19)$$

Una vez despejada la variable  $x$  en (19) se puede emplear para establecer los límites de la ecuación (18) y se aplican según la rama:

$$u_0(x, y) = \left\{ \begin{aligned} & \left[ \int_{x_0=x}^{+\sqrt{R^2-y^2}} \cos(x_0+y) dx_0 + \int_{x_0=x}^{+\sqrt{R^2-y^2}} 2 dx_0 \right] + \\ & + h_1(y), 0 \leq x \leq +\sqrt{R^2-y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (20a)$$

$$u_0(x, y) = \left\{ \begin{aligned} & \left[ \int_{x_0=x}^{-\sqrt{R^2-y^2}} \cos(x_0+y) dx_0 + \int_{x_0=x}^{-\sqrt{R^2-y^2}} 2 dx_0 \right] + \\ & + h_2(y), -\sqrt{R^2-y^2} \leq x \leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (20b)$$

Realizando integración queda:

$$u_0 = (x, y) \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} &\text{sen}(\sqrt{R^2 - y^2} + y) - \text{sen}(x + y) + \\ &+ 2(\sqrt{R^2 - y^2} - y) \end{aligned} \right\} + & (20c) \\ + h_1(y), 0 \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2}, \\ \left\{ \begin{aligned} &\text{sen}(x + y) - \text{sen}(-\sqrt{R^2 - y^2} + y) + \\ &+ 2(x + \sqrt{R^2 - y^2} - y) \end{aligned} \right\} + \\ + h_2(y), -\sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq 0, & (20d) \end{cases}$$

Proponemos el siguiente par de ecuaciones que deben satisfacer las condiciones de contorno:

$$u_0(x, y) = g(x, y) + h(y) \quad (21a)$$

$$u(x, y) = u_0(x, y) + H(y) \quad (21b)$$

A fin de obtener la solución explícita, se realizan dos etapas que comprende la obtención de (21a) seguida de (21b) en las ramas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ .

### Caso 1: Solución en la rama $\Gamma_1$

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \text{sen}(\sqrt{R^2 - y^2} + y) - \text{sen}(x + y) + \\ &+ 2(\sqrt{R^2 - y^2} - y) + h_1(y) \\ \Rightarrow u_0|_{\Gamma} &= \text{sen}(\sqrt{R^2 - y^2} + 2) - \text{sen}(\sqrt{R^2 - y^2} + y) + \\ &+ 2(\sqrt{R^2 - y^2} - \sqrt{R^2 - y^2}) + h_1(y) \\ u_0|_{\Gamma} &= 0 \Rightarrow h_1(y) = 0 \end{aligned}$$

Así podemos formular a  $u_0$  como:

$$u_0(x, y) = \text{sen}(\sqrt{R^2 - y^2} + y) - \text{sen}(x + y) + 2(\sqrt{R^2 - y^2} + y)$$

Una representación equivalente de la expresión anterior es:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= -\text{sen}(\sqrt{R^2 - y^2} + y) + \text{sen}(x, y) - 2(\sqrt{R^2 - y^2} - y) \\ \Rightarrow u(x, y) &= -\text{sen}(\sqrt{R^2 - y^2} + y) + \text{sen}(x, y) - \\ &- 2(\sqrt{R^2 - y^2} - y) + H_1(x) \\ \Rightarrow u|_{\Gamma} &= \text{sen}(x, y) + 2(x + y) = \\ &= \text{sen}(\sqrt{R^2 - y^2} + y) + 2(\sqrt{R^2 - y^2} + y) \\ \Rightarrow \text{sen}(\sqrt{R^2 - y^2} + y) + 2(\sqrt{R^2 - y^2} + y) &= \\ &= -\text{sen}(\sqrt{R^2 - y^2} + y) + \\ &+ \text{sen}(\sqrt{R^2 - y^2} + y) - 2(\sqrt{R^2 - y^2} - \sqrt{R^2 - y^2}) + H_1(y) \\ \Rightarrow H_1(y) &= \text{sen}(\sqrt{R^2 - y^2} + y) + 2(\sqrt{R^2 - y^2} + y) \\ \Rightarrow u(x, y) &= -\text{sen}(\sqrt{R^2 - y^2} + y) + \text{sen}(x + y) - \\ &- 2(\sqrt{R^2 - y^2} - x) + \text{sen}(\sqrt{R^2 - y^2} + y) + 2(\sqrt{R^2 - y^2} + y) \\ \Rightarrow u(x, y) &= \text{sen}(x + y) + 2(x + y) \end{aligned}$$

### Caso 2: Solución en la rama $\Gamma_2$

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \text{sen}(x + y) - \text{sen}(-\sqrt{R^2 - y^2} + y) + \\ &+ 2(x + \sqrt{R^2 - y^2}) + h_2(y) \\ \Rightarrow u_0|_{\Gamma} &= \text{sen}(-\sqrt{R^2 - y^2} + y) - \text{sen}(-\sqrt{R^2 - y^2} + y) + \\ &+ 2(-\sqrt{R^2 - y^2} + \sqrt{R^2 - y^2}) + h_2(y), \\ u_0|_{\Gamma} &= 0 \Rightarrow h_2(y) = 0 \end{aligned}$$

Así podemos formular a  $u_0$  como:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \text{sen}(x + y) - \text{sen}(\sqrt{R^2 - y^2} + y) + 2(x + \sqrt{R^2 - y^2}) \\ \Rightarrow u(x, y) &= \text{sen}(x + y) - \text{sen}(-\sqrt{R^2 - y^2} + y) + \\ &+ 2(x + \sqrt{R^2 - y^2}) + H_2(y) \\ \Rightarrow u|_{\Gamma} &= \text{sen}(x + y) + 2(x + y) = \\ &= \text{sen}(-\sqrt{R^2 - y^2} + y) + 2(-\sqrt{R^2 - y^2} + y) \\ \Rightarrow \text{sen}(-\sqrt{R^2 - y^2} + y) + 2(-\sqrt{R^2 - y^2} + y) &= \\ &= \text{sen}(-\sqrt{R^2 - y^2} + y) - \text{sen}(-\sqrt{R^2 - y^2} + y) + \\ &+ 2(-\sqrt{R^2 - y^2} + \sqrt{R^2 - y^2}) + H_2(y) \\ \Rightarrow H_2(y) &= \text{sen}(-\sqrt{R^2 - y^2} + y) + 2(-\sqrt{R^2 - y^2} + y) \\ \Rightarrow (x, y) &= \text{sen}(x + y) - \text{sen}(-\sqrt{R^2 - y^2} + y) + \\ &+ 2(x + \sqrt{R^2 - y^2}) + \text{sen}(-\sqrt{R^2 - y^2} + y) + 2(-\sqrt{R^2 - y^2} + y) \\ \Rightarrow u(x, y) &= \text{sen}(x + y) + 2(x + y) \end{aligned}$$

De este modo, las soluciones correspondientes a las ramas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , muestran de manera explícita para un ejemplo modelo la validez del método, para un conjunto de datos de entrada.

## 4.2 Experimentos numéricos

Se realizan experimentos numéricos para el problema (1)-(2) siguiendo los pasos del esquema (1)-(7). Sea el ejemplo simulado cuya solución exacta es  $u(x, y) = \text{sen}(x + y) + 2(x + y)$  y considere el coeficiente de permisividad en dos sistemas de referencia: (rectangular)  $\epsilon(x, y) = \frac{1}{\cos(x + y) + 2}$ ; (polar)  $\epsilon_0(r, \theta) = \frac{1}{\cos(r(\cos \theta + \text{sen} \theta)) + 2}$ .

Considere  $\Omega$  el círculo centrado en el origen de radio  $R$ , cuya parametrización de la condición de contorno definida por  $\Gamma$  simple; por otro lado debemos componer la expresión (9) mediante resultados parciales a partir de las fórmulas (3)-(6):

$$\begin{aligned} f_0(\theta) &= \frac{\text{sen}(R(\cos \theta + \text{sen} \theta))}{R^2} + \frac{2(\cos \theta + \text{sen} \theta)}{R}, \sqrt{2} \\ f_0' &= \frac{-(\text{sen} \theta + \cos \theta)}{R} [\cos(R(\cos \theta + \text{sen} \theta)) + 2]. \\ f_0'' &= \frac{-(\text{sen} \theta + \cos \theta)}{R} [\cos(R(\cos \theta + \text{sen} \theta)) + 2] - \\ &- (\cos \theta - \text{sen} \theta)^2 \text{sen}(R(\cos \theta + \text{sen} \theta)) \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} &= \frac{\text{sen}(r(\cos \theta + \text{sen} \theta)) [r(\cos \theta - \text{sen} \theta)]}{[\cos(r(\cos \theta + \text{sen} \theta)) + 2]^2} \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial r} &= \frac{\text{sen}(r(\cos \theta + \text{sen} \theta)) [(\cos \theta - \text{sen} \theta)]}{[\cos(r(\cos \theta + \text{sen} \theta)) + 2]^2} \end{aligned}$$

A continuación procedemos a realizar cálculos numéricos a través de las expresiones obtenidas para  $R = 1$ , de este modo deseamos cumplir los siguientes puntos:

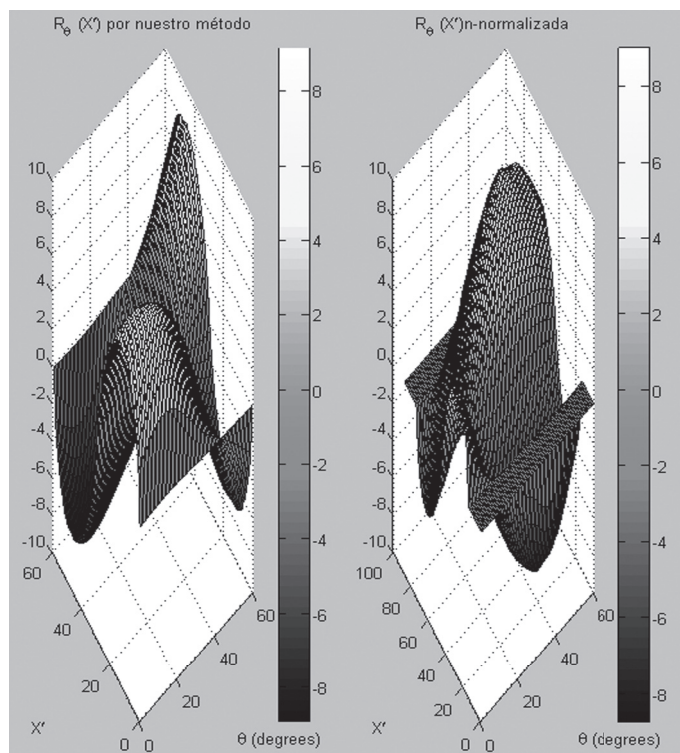


1. Resolver el problema equivalente (14)-(15).
2. Recuperar  $u_0(x,y)$  en forma analítica por formula (20a)-(20b) según las curvas  $\Gamma_1, \Gamma_2$ .
3. Recuperar  $u(x,y)$  por (5) en forma numérica y comparar con la solución exacta del problema para el coeficiente de permisividad expresado como una función  $\varepsilon(x,y)$ .

Se procede a analizar el comportamiento cualitativo de la aproximación numérica de la solución para el problema (1)-(2) dados los datos iniciales: permisividad del medio y condición de contorno. Los experimentos se realizan para  $n$ -valores de nodos y  $n$ -rayos de escaneo, algunas variables indicadoras del comportamiento de la  $p$ -versión del método de rayos generales se resumen a continuación:

1. Comparación del cálculo de la transformada de Radon por los programas *pradon* y comando interno de Matlab *radon*.
2. Verificación de las condiciones de contorno a lo largo de las ramas  $\Gamma_1, \Gamma_2$ .
3. Efectos de la simetría del problema y escala de presentación.
4. Convergencia de la  $p$ -versión del método de rayos generales.

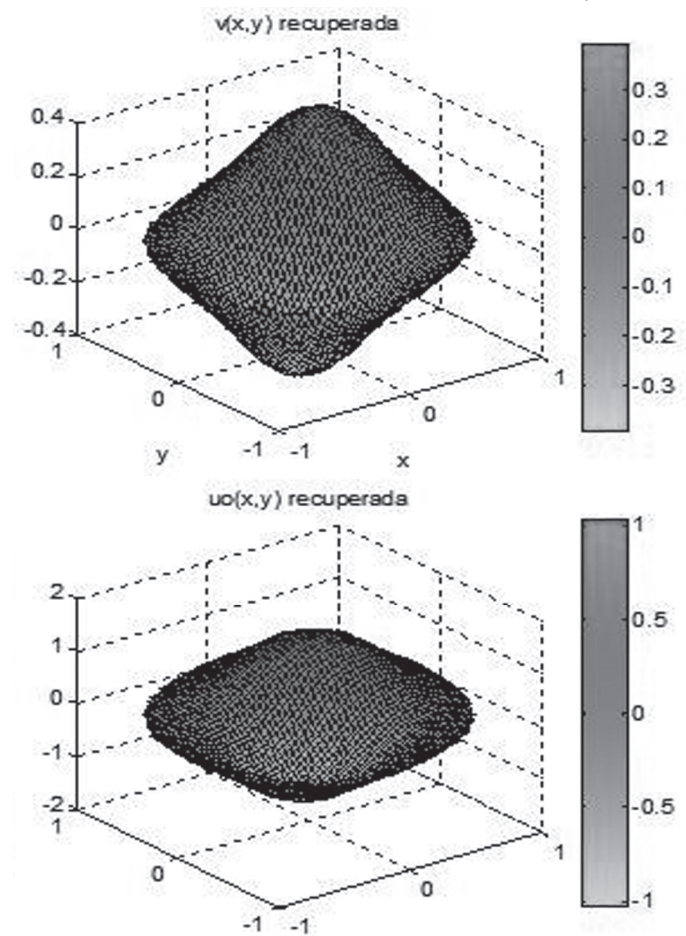
## Experimento numérico de la Transformada de Radon por dos vías de obtención



A continuación presentamos una descripción de los rasgos en forma detallada:

1. La transformada de Radon se obtuvo mediante dos vías y comprende el empleo de dos métodos: programa alternativo escrito por autores y comando interno de sistema Matlab. A primera vista el comando interno genera un tipo de información artificial; en forma visual corresponde a dos mesetas de valor cero a los costados, paralelas al eje que corresponde al parámetro angular. Aún no contamos con una estrategia de eliminación de esta información artificial.
2. Por nuestro método e implementación de programa obtenemos la transformada de Radon; observe que no agrega información artificial.
3. Las superficies obtenidas no guardan similitud alguna, tienen una morfología distinta.

## Experimento numérico que muestra las recuperaciones de las soluciones $v(x,y)$ y $u_0(x,y)$



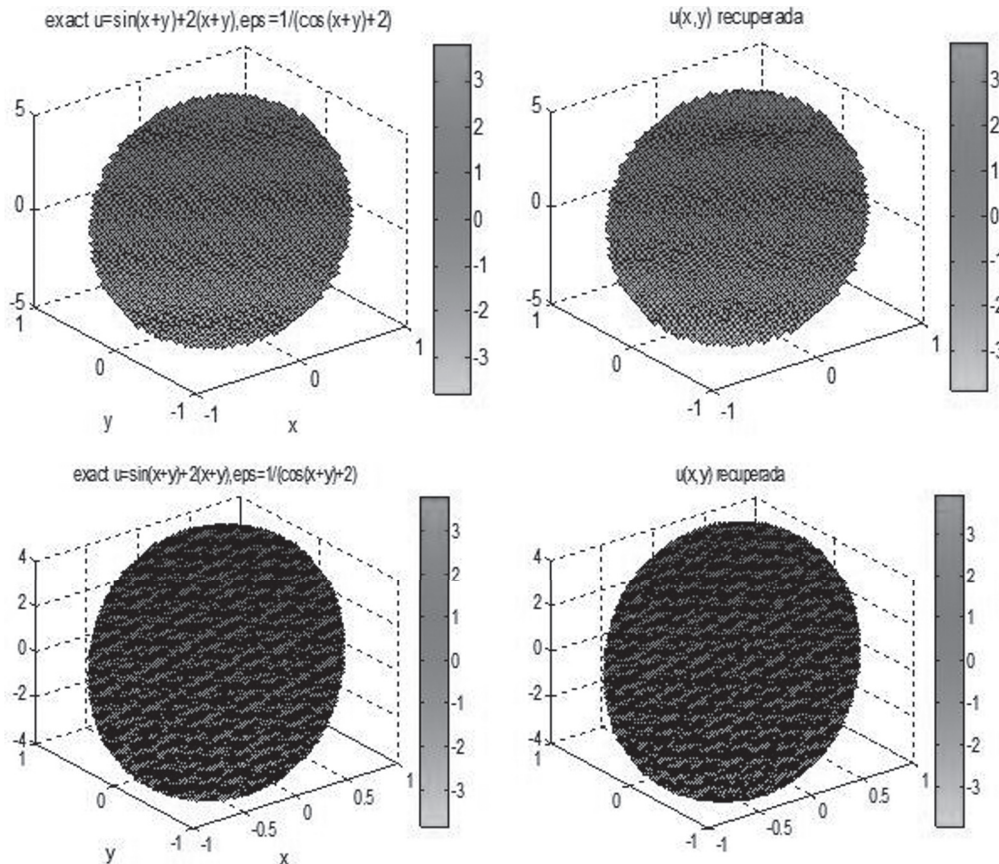
Se presenta una descripción de la calidad de las recuperaciones en problemas: (14)-(15) y (10)-(11) mediante cálculos numéricos obtenidos:

1. La figura a la izquierda corresponde a la solución del problema (14)-(15) por el empleo del método de la Transformada Directa e Inversa de Radon por autores. Un rasgo importante que hay que señalar es que cumple las condiciones de contorno en el contorno.
2. La figura a la izquierda tiene un punto máximo y punto mínimo y espacialmente tiene la característica de simetría respecto a una proyección de la recta  $y = x$ .
3. La figura a la derecha muestra la recuperación de la solución  $u_0$  numéricamente para el problema equivalente (10)-(11), la cual satisface las condiciones de contorno, está solución numérica se sustituye en (5) para determinar  $u$  de manera aproximada.

Experimento numérico que muestra la recuperación de la solución del problema (1)-(2) para  $n$ -nodos e igualmente  $n$ -rayos de escaneo

En las siguientes líneas se explican las figuras tomando el orden por renglones de arriba-abajo.

1. El primer experimento corresponde al primer renglón; este fue realizado para  $n = 41$  nodos en cada variable  $p$  y  $\varphi$  ( $n$  rayos y  $n$  escaneos), mientras que el segundo experimento corresponde al segundo renglón; este fue realizado para  $n = 81$  nodos en cada variable  $p$  y  $\varphi$  ( $n$  rayos y  $n$  escaneos).
2. Las columnas de izquierda a derecha representan lo siguiente: soluciones  $u$  exactas del problema (1) - (2) y soluciones  $u$  recuperadas al problema (1) - (2) empleando los pasos 1 – 7 de la  $p$ -versión del método de rayos generales.
3. Seleccionamos dos variables que nos permiten medir la calidad de recuperación a través de nuestro método; estas son:  $dmáx$  - el error máximo y  $dsr$  - el error promedio en media cuadrática.
4. Se realizan muchos experimentos en función de la cantidad de rayos de escaneo, para resumir mostramos dos experimentos: el experimento para  $n = 41$  nodos en cada variable  $p$  y  $\varphi$  ( $n$  rayos y  $n$  escaneos) se obtuvo  $dmáx = 0.2365$ ,  $dsr = 0.0571$ ; el experimento para  $n = 81$  nodos en cada va-



riable  $p$  y  $\varphi$  ( $n$  rayos y  $n$  escaneos) se obtuvo  $dmáx = 0.1606$ ,  $dsr = 0.0372$ .

5. Observe que la recuperación por la  $p$ -versión del esquema de rayos generales para el ejemplo numérico, cuyos datos de entrada se establecieron en líneas superiores cumple los siguientes puntos: aumento de número de nodos muestra una clara tendencia a disminuir el error máximo y el error promedio en media cuadrática; por tanto la calidad de recuperación óptima.

## 6. Comentarios finales

Este trabajo de investigación explica el esquema de solución del problema planteado (1)-(2) por medio de la  $p$ -versión del método de rayos generales y para un ejemplo sintético abarca los aspectos analítico y numérico, que nos permiten establecer las siguientes afirmaciones:

1. Se muestra analíticamente el valor de las funciones auxiliares  $h_1(y)$ ,  $h_2(y)$  que componen a la solución  $u_0$  en forma analítica para cada una de las ramas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  (izquierda y derecha) del círculo de radio  $R$  expresado en (19).
2. Obviamente se calculó de manera analítica la solución  $u$  para el problema (1) - (2) empleando (21a) - (21b) para las ramas:  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ ; la cual en la frontera coincide con la condición de contorno de Dirichlet prefijada.
3. Se resolvió numéricamente (1) - (2), para el ejemplo simulado y se estudió el comportamiento del cálculo numérico de la transformada directa de Radon; a través de dos programas: programa *pradon* y función interna de sistema Matlab *radon*. De lo cual se desprende que nuestro método de construcción es mejor; ya que no incorpora información artificial la cual destruye propiedades esperadas de las soluciones.
4. Los pasos posteriores del experimento generaron los resultados parciales con la satisfacción de las condiciones de contorno en la ramas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  para la solución  $v$  al problema (14) - (15) y la solución numérica  $u_0$  al problema (10) - (11) empleando (12). Luego, el siguiente uso del resultado numérico  $u_0$  en (5) permite recuperar  $u$  con buena calidad y rapidez.
5. Por lo tanto, la parte analítica y numérica para este ejemplo sintético permiten: establecer la validez del método cons-

truido; medir la calidad y rapidez de recuperación mediante cálculos numéricos.

## 7. Apéndice

### 7.1. Método de Rayos Generales

Para modelar problemas que no dependen de la variable temporal y que están restringidos a las variables espaciales, cuya dinámica es considerada estacionaria y concretamente en ecuaciones diferenciales parciales (EDP) los modelos matemáticos cuyo enfoque está aplicado a los problemas de contorno se utilizará el Principio de Rayos Generales (PRG). El PRG fue propuesto en [5] y [6] y consta de las siguientes suposiciones:

1. Considera la influencia del campo físico externo como rayos que pueden ser simulados matemáticamente por el campo vectorial plano  $\vec{V}(l)$  paralelo a la dirección a lo largo de la línea recta  $l$ ;
2. El campo  $\vec{V}(l)$  es caracterizado con alguna función  $u(x,y)$ ;
3. Valores de la función  $u(x,y)$  o flujo del vector  $\vec{V}(l)$  son conocidos en el contorno  $\Gamma$ .

La aplicación del PRG a problemas bajo investigación significa la construcción de un análogo de la ecuación (1)-(2) describiendo la distribución de la función  $u(x,y)$  a lo largo de “Rayos Locales Generales” que formalizan un modelo matemático del esquema de escaneo, los cuales vienen expresados como líneas  $l$  para algún tipo de parametrización.

Considere la parametrización de alguna línea recta  $l$  debido al parámetro  $t$ :  $x = p\cos\varphi - t\sin\varphi$ ,  $y = p\sin\varphi + t\cos\varphi$ . Aquí  $|p|$  es la longitud de la perpendicular del centro de coordenadas a la línea  $l$ ,  $\varphi \in [0,\pi]$  es el ángulo entre el eje  $x$  y está perpendicular.

En trabajos [5] y [6] fue construida la  $t$ -versión del método de rayos generales. Usando la parametrización se convierten las funciones  $u(x,y)$ ,  $\varepsilon(x,y)$ ,  $f(x,y)$  en  $(x,y) \in l$  para  $p$ ,  $\varphi$  fijo a las función de  $u(t)$ ,  $\varepsilon(t)$   $f(t)$  de la variable  $t$ . Supongamos ahora que



el dominio  $\Omega$  es convexo. Definamos para cada  $p$  y  $\varphi$  fijo las funciones  $u_0(p, \varphi) = u(t_0)$ ,  $u_1(p, \varphi) = u(t_1)$ , para los parámetros  $t_0$  y  $t_1$ , que corresponden a los puntos de la intersección de la línea  $l$  y la frontera del dominio.

Aquí, el PRG conduce a la reducción de EDP a una familia (que dependen de  $p, \varphi$ ) de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) como una versión local de la ecuación (1):

$$[\varepsilon(t)u_t(t)]_t = 0, t \in [t_0, t_1] \quad (22)$$

Las correspondientes condiciones de contorno conducen a las correspondientes condiciones de contorno locales para  $u(t)$  en los puntos  $t_0$  y  $t_1$ . Designamos como  $\bar{u}_{p, \varphi}(t)$  la solución del problema local (22) con tales condiciones de contorno. La  $t$ -versión del método de rayos generales consiste en la aplicación de la fórmula final

$$u(x, y) = R^{-1} \left[ \frac{u_0(p, \varphi)(t_1 - t_0) + u_1(p, \varphi) - u_0(p, \varphi)}{K_1(p, \varphi)} K_0(p, \varphi) \right] \quad (23)$$

$$\text{donde } \gamma(t) = \frac{1}{\varepsilon(t)}, \quad k_0(t) = \int_{t_0}^{t_1} \gamma(\xi) d\xi;$$

$$K_0(p, \varphi) = \int_{t_0}^{t_1} k_0(\xi) d\xi; \quad K_1(p, \varphi) = k_0(t_1)$$

La  $p$ -versión del método de rayos generales, desarrollado en este trabajo fue propuesta para el Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en [7].

## 7.2 Comparación del Método de Rayos Generales con Método de Elementos Finitos

Para realizar la comparación procedemos a determinar la solución numérica del problema:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon(x, y) \operatorname{grad} u) &= 0, \quad (x, y) \in \Omega \\ u|_{\Gamma} &= f(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (23)$$

Mediante sistema de programas construido para realizar la  $p$ -versión del método de rayos generales y programas Toolbox PDETool de sistema Matlab.

Usando el ejemplo numérico anterior con las siguientes funciones:  $\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\cos(x, y) + 2}$  y  $f(x, y) = \sin(x+y) + 2(x+y)$ . Dada la formulación (23a) – (23b) e igualmente los valores de las funciones se tiene un problema directo. El objetivo es recuperar

$u$  en el interior de  $\Omega$  en forma numérica. Es un requisito establecer parámetros que permitan determinar la calidad mediante la representación visual y el tiempo de realización de cálculos numéricos. El toolbox denominado PDETool del sistema Matlab utiliza en la resolución de EDP el Método de Elemento Finito (MEF) para problemas definidos en dominios acotados en el plano. Para aproximar la solución numérica de una EDP elíptica se procede mediante tres pasos:

1. Describir la geometría del dominio  $\Omega$  y la condición de contorno. Esto se puede realizar en cualquiera de las vías: interactiva usando pdetool o a través de archivos \*.m
2. Construir una mallado o grilla triangular del dominio  $\Omega$ . El paquete tiene un generador de grilla y facilita el refinamiento de la misma. Una malla es descrita por tres matrices de formato fijo que contiene información acerca de los nodos de la malla, segmentos de contorno y los triángulos.
3. Discretizar la EDP y la condición de contorno para obtener un sistema lineal  $Ku = F$ . El vector desconocido  $u$  contiene los valores de la solución aproximada en los puntos de la malla, la matriz  $K$  es obtenida a través de las funciones  $\varepsilon(x, y)$  y  $f(x, y)$  el lado derecho denotado por  $F$  contiene valores promedio de  $f$  alrededor de cada nodo.

Se procedió a realizar una serie de experimentos para obtener la solución numérica de (23a)-(23b) en el pdetool de sistema Matlab descritos en la tabla 1:

Tabla 1 Cantidad de experimentos a realizar por las estrategias de aproximación numérica

Experimento	Cantidad de rayos de escaneo
1	14
2	28
3	42

Se procede a medir los tiempos de ejecución que toman las estrategias: aplicación pdetool que incorpora aproximación por medio del método de elemento finito y  $p$ -versión del método de rayos generales en la aproximación de la solución numérica.



La segunda estrategia incorpora dos variables que permiten medir: el error máximo y el error promedio en media cuadrática, que se cometen en comparación con la solución exacta del problema y se capturan en la tabla 2.

Tabla 2. Tiempo de ejecución de las estrategias de aproximación numérica y medida de los errores cometidos

Rayos de escaneo	Pdtool	Método GR	Dmax	Dsr
14	0.902346seg	0.32455seg	0.6555	0.1713
28	0.869951seg	0.097181seg	0.4917	0.1076
42	2.387995seg	0.197593seg	0.3985	0.0819

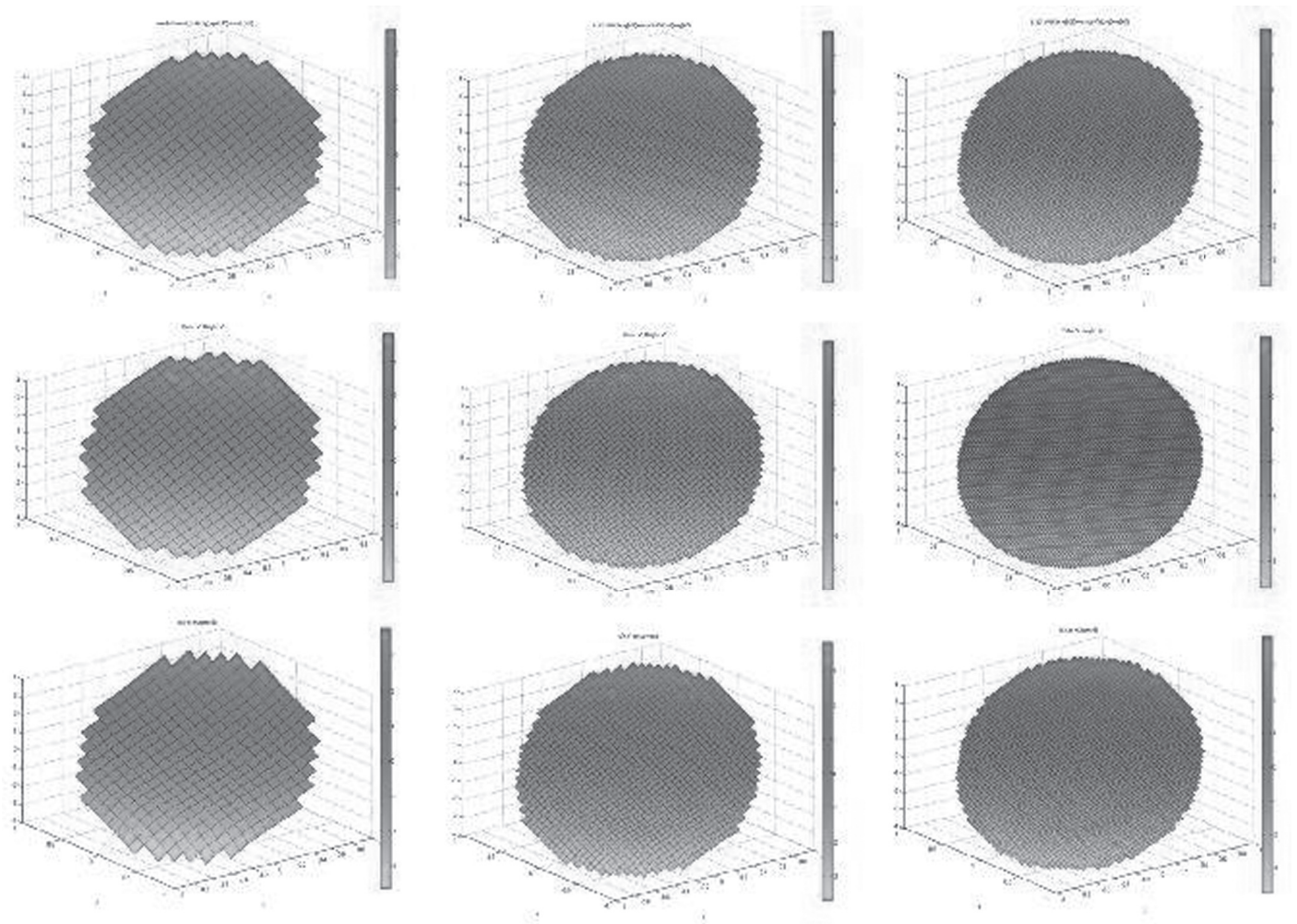
En la siguiente figura se realiza una comparación visual del problema (1)-(2) para datos iniciales dados arriba; las columnas en la figura indican la cantidad de rayos de escaneo: izquierda  $n = 14$ , central  $n = 28$  y derecha  $n = 42$ ; igualmente los renglones indica: primer renglón corresponde a las soluciones exactas para  $n$ -rayos de escaneo, segundo renglón corresponde a la solución

por MEF para  $n$ -rayos de escaneo que aumenta según tabla 2 y tercer renglón corresponde a la solución recuperada por nuestro programa para  $p$ -versión del método de rayos generales.

Aquí ofrecemos la siguiente conclusión: a medida que aumentamos la cantidad de rayos de escaneo la ejecución de la  $p$ -versión del método de rayos generales mejora el tiempo requerido de cómputo frente al pdtool de sistema Matlab.

### 7.3 Convergencia del método de rayos generales

El análisis numérico [11] es la parte de las matemáticas que diseña métodos para aproximar de forma eficiente las soluciones de problemas expresados matemáticamente. Así la existencia de la solución de un problema directo se puede garantizar por medio de la teoría apropiada al problema; el contrario del análisis que permite obtenerla mediante algún proceso constructivo.



Un método constructivo es un conjunto de instrucciones conducentes a calcular la solución de un problema, bien en un número finito de pasos o bien en un número infinito mediante un proceso de paso al límite.

Una tarea esencial es establecer la convergencia de la solución producida por el algoritmo (solución numérica) a la solución exacta del problema, y también estudiar la velocidad de convergencia a dicha solución. Luego deseamos establecer como disminuyen: el error máximo y error promedio en media cuadrática a medida que aumentamos el número de  $n$ -nodos e igualmente  $n$ -rayos de escaneo.

Por consiguiente nos enfocamos en dos características de exactitud que nos permitan medir la convergencia del método a cargo de los errores que se cometen. Aquí se ofrece una segunda conclusión respecto al orden de convergencia: analizando la información de la Tabla 2 para las columnas Dmax y Dsr concluimos que para los diferentes valores de  $n$  los errores disminuyen linealmente a medida que aumentamos la cantidad de  $n$ -rayos de escaneo.

*their applications*. Uspehi Mat. Nauk, 10, 3-70.

- [10] V. A. Borovikov (1959) *Fundamental solutions of linear partial differential equations with constant coefficients*. Trudy Moscow. Math Obshch, 8, 877-890.
- [11] Consulta de sitio web: [http://pcmap.unizar.es/~mpala/C\\_N\\_lecci/Calc\\_N\\_1.1.pdf](http://pcmap.unizar.es/~mpala/C_N_lecci/Calc_N_1.1.pdf)

## Referencias bibliográficas

- [1] A. I. GREBENNIKOV (2005) *A novel approach for solution of direct and inverse problems for some equations of mathematical physics* Proceedings of the 5-th International conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice (ed. D. Lesnic) Vol. II, Leeds University Press, Leeds, UK, chapter G04, 1-10.
- [2] A. N. TIKHONOV (199) *Mathematical Geophysics*, Moscow.
- [3] S. L. SOBOLEV (1996) *Equations of Mathematical Physics*, Moscow.
- [4] A.A. SAMARSKY (1977) *Theory of Difference Schemes*, Moscow.
- [5] A. I. GREBENNIKOV (2003) *Fast algorithm for solution of Dirichlet problem for Laplace equation*. J. WSEAS Transaction on Computers, 2(4), 1039-1043.
- [6] A. I. GREBENNIKOV (2003) *The study of the approximation quality of GR-method for solution of Dirichlet problem for Laplace equation*. J. WSEAS Transaction on Mathematics, 2(4), 312-317.
- [7] A. I. GREBENNIKOV (2007) *General Ray Method for Solution of Boundary Value Problems for Elliptic Partial Differential Equations*. APLIEMATH, Memorias del Congreso Internacional en Matemáticas Aplicadas, Instituto Politécnico Nacional, México, 200-209.
- [8] HELGASON SIGURDUR (1999) *The Radon Transform*, Birkhauser, Boston-Berlin.
- [9] M. Gelfand, S. J. Shapiro (1955) *Homogeneous functions and*