

# Pirámides instrumentales en la enseñanza y aprendizaje del límite funcional

## *Instrumental pyramids in the teaching and learning of the functional limit*

Adriana Díaz Cordero<sup>1\*</sup>, Valentina Badía Albanés<sup>2</sup>

**Resumen** El uso de mapas conceptuales ha sido efectivo en la enseñanza y aprendizaje de diversas ramas de la ciencia. En el presente trabajo se muestra la utilización de las pirámides instrumentales en la Matemática, específicamente en el estudio del límite funcional. El concepto de límite funcional es fundamental en la asignatura “Cálculo de una sola variable”, ya que el resto de los conceptos básicos, tales como la continuidad de una función en un punto, la derivada y la integral definida se apoyan en la definición local de límite, dado que el método de estudio de esta rama de la Matemática es el análisis infinitesimal y de ahí la importancia de que el estudiante alcance una adecuada comprensión del referido concepto. La propuesta metodológica está basada específicamente en el uso de pirámides instrumentales, derivadas de los mapas conceptuales y consta de varias fases. Aquí se expone lo relacionado a la fase de diagnóstico y de diseño de estas pirámides.

**Palabras Clave:** dificultades de aprendizaje, límite funcional, pirámides instrumentales.

**Abstract** The use of concept maps has been effective in the teaching and learning of various branches of science. This paper shows the use of instrumental pyramids in Mathematics, specifically in the study of the functional limit. The concept of functional limit is fundamental in the subject “Calculus of a single variable”, since the rest of the basic concepts, such as the continuity of a function at a point, the derivative and the definite integral are supported by the local definition of limit, since the method of study of this branch of Mathematics is the infinitesimal analysis and hence the importance for the student to reach an adequate understanding of the referred concept. The methodological proposal is specifically based on the use of instrumental pyramids, derived from concept maps, and consists of several phases. The following is related to the diagnostic and design phase of these pyramids.

**Keywords:** learning difficulties, functional limit, instrumental pyramids.

**Mathematics Subject Classification:** 97C70, 97D40, 97D70, 97I40, 97U99.

<sup>1</sup>Departamento de Matemática, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba. Email: [adriana.diaz@matcom.uh.cu](mailto:adriana.diaz@matcom.uh.cu)

<sup>2</sup>Departamento de Matemática, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba. Email: [valia@matcom.uh.cu](mailto:valia@matcom.uh.cu)

\*Autor para Correspondencia (Corresponding Author)

**Editado por (Edited by):** Damian Valdés Santiago, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba.

**Citar como:** Díaz Cordero, A., Badía Albanés, V. (2024). Pirámides instrumentales en la enseñanza y aprendizaje del límite funcional. *Ciencias Matemáticas*, 36(Único), 71–78. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.13968250>. Recuperado a partir de <https://revistas.uh.cu/rcm/article/view/9454>.

## Introducción

La idea del uso de mapas conceptuales en el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto límite funcional surgió relacionada con las inquietudes de la primera autora del trabajo ante las dificultades que percibía en los estudiantes para la comprensión de este concepto. Estas dificultades están motivadas por la complejidad del propio concepto, por el

tratamiento teórico que implica, que es algo novedoso para ellos y por las exigencias cognitivas que conlleva, entre las que se encuentran: la novedad del simbolismo, la operación del “paso límite”, el trabajo con magnitudes infinitesimales e infinitamente grandes, la resolución de indeterminaciones, la necesidad del tránsito de lo algebraico a lo gráfico, entre otras. Se requiere que el estudiante en poco tiempo comprenda gran cantidad de conceptos teóricos, adquiera habilidades para la

correcta manipulación del trabajo algebraico y logre las necesarias conexiones entre los conceptos y las formas de trabajo, todo lo cual hace que el estudiante se sienta abrumado y no pueda avanzar.

El presente trabajo contiene una propuesta metodológica que está basada específicamente en el uso de pirámides conceptuales e instrumentales, derivadas de los mapas conceptuales. Como es una investigación en curso, aquí se expone lo relacionado a la fase de diagnóstico, en la cual se analizaron e identificaron las dificultades que presentan los estudiantes de Química de la Universidad de La Habana en la manipulación del concepto de límite, a partir de observaciones realizadas en clase y de evaluaciones sistemáticas y parciales de la asignatura.

Fueron sistematizados los tipos de dificultades que aparecen cuando los estudiantes se enfrentan al estudio del concepto para, a partir de un análisis crítico, efectuar una mejora de las categorizaciones encontradas. De modo que la categorización propuesta fue tenida en cuenta en la elaboración de una detallada lista de verificación a modo de guía de observación.

Los resultados son evidencia de las dificultades conceptuales del límite de funciones de una variable real y marcaron el punto de partida para definir las acciones a llevar a cabo durante la fase de diseño, en la cual se proponen las diferentes pirámides que podrían ser usadas durante la impartición de la asignatura.

### Relevancia del estudio

Los conceptos de límite y continuidad de funciones han sido ampliamente estudiados, lo cual se explica por su complejidad, tanto para ser aprendidos, como para ser enseñados. Esta investigación aporta al estudio de las dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de tales conceptos, al proponer una nueva categorización y caracterización de las dificultades, contextualizadas a los estudiantes de la carrera de Química, que se acompaña de una metodología para realizar estudios similares en otros ámbitos educativos.

En el ámbito de la práctica pedagógica, el uso de pirámides conceptuales e instrumentales, acompañado de la metodología para su diseño y utilización, constituye una herramienta que ayuda al aprendizaje significativo en el estudio y manipulación de conceptos del Análisis Matemático.

## 1. Generalidades acerca de la propuesta metodológica

El concepto de propuesta metodológica es controversial. Para este trabajo las autoras asumen como propuesta metodológica aquel “sistema de conocimientos, procedimientos y técnicas, que, condicionados por determinados requerimientos, permiten ordenar mejor el pensamiento y los modos de actuación para responder a una problemática y dar respuesta a determinados objetivos propuestos en una investigación” [6].

La propuesta metodológica para el uso de las pirámides conceptuales e instrumentales en la enseñanza y el aprendizaje

del concepto de límite funcional en los estudiantes de primer año de Química en la Universidad de La Habana consta de 4 etapas: 1) el diagnóstico para conocer el campo específico de actuación de la propuesta, 2) el diseño de la metodología para la enseñanza del concepto de límite funcional mediante pirámides conceptuales e instrumentales, 3) la aplicación de dicha metodología y 4) la evaluación de la propuesta metodológica.

Previo a la concreción de la primera fase se realizó un estudio profundo de las dificultades y los obstáculos epistemológicos, lo que se expone sintéticamente en el próximo apartado. Esta sistematización permitió realizar la categorización de las dificultades que se presentan en el estudio del límite funcional, la que fue utilizada para la etapa del diagnóstico, por lo que también se presenta en un epígrafe aparte.

### 1.1 Obstáculos epistemológicos y dificultades en la comprensión del concepto de límite

Los obstáculos epistemológicos fueron definidos por Bachelard como “aquel conocimiento presente que pone trabas al acceso a un conocimiento nuevo” (citado por [2]). Este autor también señaló que “la aparición de obstáculos tiene un carácter inevitable, son obstáculos que no tiene sentido investigar cómo evitarlos, sino conocerlos para vencerlos y desarrollar el saber” (Bachelard (1938), citado por [8]).

Cornu [4] en su tesis doctoral señala algunos obstáculos epistemológicos que afrontan los estudiantes al estudiar el límite funcional; el primero relacionado con el sentido común de la palabra límite, que induce a concepciones relacionadas a una barrera insuperable, por lo que les crea la duda de si el límite se alcanza o no; segundo, la noción del infinito, la cual induce una nueva manera de razonamiento; y, finalmente, los conceptos de cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas. Basándose en el trabajo de Cornu y en el estudio de la evolución histórica del concepto de límite, Sierpínska [8], p. 37, propone una ampliación de obstáculos epistemológicos relativos al concepto del límite funcional, entre los cuales están los ligados a la noción de función, el cual está muy presente en los estudiantes cubanos que no dominan correctamente el concepto de función, y el obstáculo del símbolo, relativo a que la operación de límite fue simbolizada de una manera que subraya demasiado las analogías con respecto al Álgebra, esconde las diferencias y puede conducir a una pérdida de significación.

Por otra parte, las dificultades en la comprensión del concepto de límite funcional sí podemos intentar evitarlas. Las investigaciones relacionadas con este tema son extensas, en este trabajo se presenta un resumen de las dificultades encontradas. Tall [9], p. 14 se refiere a las dificultades cognitivas que presentan los estudiantes respecto al concepto de límite de una función:

- Dificultades incorporadas en el lenguaje: términos como “límite”, “tiende a”, “tan pequeño como se quiera”, tienen un poderoso significado coloquial que entra en conflicto con los conceptos formales.

- El proceso de límite no se realiza por simple aritmética o álgebra, surge el concepto de infinito y todo se vuelve “rodeado de un misterio”.
- El proceso de encontrar “una variable cada vez más pequeña” es muy comúnmente interpretado como “una cantidad variable arbitrariamente pequeña”, que sugiere implícitamente conceptos infinitesimales, incluso cuando estos no se enseñan explícitamente.
- La idea de “obtener un  $N$  arbitrariamente grande”, sugiere implícitamente concepciones de números infinitos.
- Los estudiantes a menudo tienen dificultades acerca de si el límite puede ser realmente alcanzado.
- Hay confusión sobre la comprensión del paso de límite finito al infinito, es decir, en interpretar “lo que sucede en el infinito”.

En las investigaciones de Hernández, Prada y Ramírez [5] se reporta que los estudiantes suelen tener dificultades al comprender los conceptos abstractos de límite y continuidad, que no se pueden visualizar de manera directa, tienden a confundir el límite de una función con el valor de la función en un punto, como también confunden los conceptos de límite y continuidad, porque asumen que los dos representan la misma idea.

En una investigación similar, Quesada y Padilla [7] encontraron que los estudiantes tienen problemas para interpretar y utilizar correctamente los símbolos y la notación matemática que se utilizan en la definición formal de límite. Además, tienen dificultades en el trabajo algebraico para el cálculo de límites.

## 1.2 Categorización de las dificultades en el concepto de límite

En los trabajos revisados se encontró una categorización hecha por Quesada y Padilla, la cual consta de tres categorías de dificultades: conceptual, de argumentación y en el uso de simbología ([7], p. 5). Aunque esta categorización sirvió de punto de partida, como consecuencia del estudio bibliográfico, la reflexión y el análisis realizado, se proponen en este trabajo cuatro categorías, pues se considera apropiado contabilizar por separado las dificultades relacionadas con la manipulación algebraica, debido a la importancia que se le concede en los planes de estudio en Cuba al “saber hacer”.

De modo que para profundizar en las dificultades que enfrentan los estudiantes en el concepto de límite, estas quedaron divididas en cuatro categorías: conceptual, de trabajo algebraico, de argumentación y de formalismo simbólico.

Una dificultad conceptual es aquella que se manifiesta debido al dominio incorrecto o insuficiente por el estudiante de la definición de límite y continuidad de una función en un punto. Algunos ejemplos de esta son: no diferenciar para qué tipos de funciones y en cuáles puntos es necesario hallar los

límites laterales, no identificar el tipo de indeterminación que se presenta, en caso de existir, confundir una indeterminación con una forma indefinida, entre otras.

Una dificultad de trabajo algebraico es aquella que se manifiesta por el estudiante en la realización del trabajo algebraico, encaminado a la eliminación o transformación de la indeterminación presente en el cálculo del límite. El estudiante comete errores, tales como factorizar incorrectamente, simplificar expresiones fraccionarias con sumas y restas sin extraer factor común previamente, no dominar el trabajo algebraico relacionado con la factorización o simplificación cuando las expresiones contienen raíces, así como la realización de transformaciones que no conduzcan a la eliminación de la indeterminación dada.

Una dificultad de argumentación se manifiesta cuando el estudiante es incapaz de explicar correctamente la realización de determinadas acciones o de justificar la estrategia seguida en la solución. Algunos ejemplos de esta dificultad son: la incompreensión del por qué se tiene una indeterminación, no justificar el tipo de indeterminación presente, el desconocimiento de qué tipo de manipulación algebraica transforma una indeterminación en otra (por ejemplo, hallar denominador común en la resta de dos fracciones transforma la indeterminación  $\infty - \infty$  en  $\infty/\infty$ ), y la falta de argumentación al multiplicar por la expresión conjugada en una indeterminación  $\infty - \infty$ .

Una dificultad de formalismo simbólico se manifiesta cuando el estudiante hace un uso inadecuado de la simbología correspondiente al límite y la continuidad, como puede ser: omitir el símbolo de límite cuando aún no lo ha calculado, sino que solo se han realizado transformaciones algebraicas; escribir  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c/\infty = 0$  o similares, escribir  $\lim_{x \rightarrow a} = f(a)$  para indicar que el límite es igual a la función evaluada en el punto, omitir el punto en el cual se desea hallar el límite de una función y el uso incorrecto o inexistente de la simbología aceptada para los límites laterales.

## 2. Diagnóstico de las dificultades de los estudiantes

### 2.1 Metodología para el diagnóstico

Se realizó un estudio de carácter descriptivo para la exploración del estado actual que presentan los estudiantes al enfrentarse a los conceptos de límite y continuidad de funciones de variable real. El objetivo del estudio es el análisis de las dificultades presentes en los estudiantes de la asignatura “Cálculo de una sola variable” en la carrera de Química de la Universidad de La Habana, por lo cual se decidió realizar un muestreo no probabilístico, específicamente un muestreo intencional homogéneo. De la matrícula de la asignatura de 82 estudiantes, se decidió contar para el estudio con 55 estudiantes que tuvieran los mismos profesores (la profesora de conferencias y la primera autora de esta investigación como profesora de clase práctica).

Entre los métodos de investigación empíricos usados se encuentra la observación de los modos de actuación de los estudiantes en clases prácticas, que permitió obtener información sobre la cantidad de estudiantes que llegan con una preparación previa a la clase y la calidad de esa preparación, así como la cantidad de ejercicios que son capaces de resolver en clases prácticas y cuánta ayuda necesitan del profesor.

También se utilizó el análisis documental de las respuestas a las preguntas escritas y del examen parcial realizado por los estudiantes. Estos métodos, unidos a los métodos de carácter teórico, como el análisis-síntesis, el método histórico-lógico y la abstracción permitieron describir las relaciones esenciales del objeto de estudio para proponer una categorización de las dificultades que presentan los estudiantes al utilizar el concepto de límite, y en base a la misma elaborar un instrumento que fue aplicado durante el proceso investigativo.

## 2.2 Descripción del instrumento

A partir de las categorías establecidas se elaboró un instrumento para la identificación de las dificultades de los estudiantes de la carrera de Química en la comprensión y manipulación de los conceptos de límite y continuidad. El instrumento elaborado consiste en un banco de preguntas (ver el enlace de la información suplementaria) con ejercicios parecidos a los presentes en el texto básico de la asignatura o en otras bibliografías complementarias, ejercicios modificados o concebidos que permiten establecer la presencia o no de las dificultades según la clasificación realizada. Este instrumento es dinámico, es decir, que puede ser actualizado a medida que avanza la investigación, o sea, se puede incrementar la cantidad de preguntas, modificar las preguntas para revelar las evidencias de las dificultades y errores con más claridad y precisión, o poner nuevos tipos de preguntas.

El instrumento realizado consta de un banco de ejercicios donde existen distintos tipos de preguntas, las cuales se clasifican como: de cálculo de límites con trabajo algebraico, de argumentación usando el significado conceptual del límite, de relación de límite y continuidad de una función de una variable real en un punto, y de cambios de contexto para medir cómo el estudiante cambia de lo algebraico-analítico a lo sintético-geométrico y viceversa.

Con el objetivo de verificar la validez del instrumento realizado se confeccionó una encuesta que se aplicó a 22 profesores de Matemática, los cuales cuentan con un promedio de 30,7 años de experiencia docente. Ante el enunciado “el instrumento diseñado logra el diagnóstico de las dificultades”, 16 profesores estuvieron totalmente conformes, para un 72,7 %, mientras que ningún profesor lo encontró inadecuado. Por lo que se concluyó que el instrumento utilizado es válido para diagnosticar las dificultades presentes en los estudiantes de primer semestre de la carrera de Química de la Universidad de La Habana.

Al considerar los objetivos de las preguntas que conforman el instrumento y la categorización de las dificultades descrita, se diseñó una guía de observación basada en una

lista constituida por 16 rubros o preguntas, que se usaron para calificar las respuestas de los estudiantes en cada examen aplicado. La lista de verificación permite tabular y evaluar las respuestas de los estudiantes a cada ejercicio del banco de ejercicios, con el objetivo de identificar las dificultades presentes en la comprensión y la manipulación del concepto límite funcional.

El criterio utilizado para analizar las respuestas de los estudiantes es establecer la presencia o ausencia de cada rubro de la lista de verificación, quedándonos con el número de comportamientos presentes y calculando así el porcentaje de estos. Antes de usar la lista de verificación para identificar las dificultades presentes en los estudiantes, se valoró la confiabilidad del instrumento en sí, y para ello se procedió a efectuar un test de confiabilidad de la lista de verificación. Por confiabilidad se entiende, la estabilidad de los resultados que expresen los evaluadores usando la lista de verificación, lo que presupone que las respuestas dadas no sean significativamente dependientes del evaluador.

Para la realización del test de confiabilidad, se convocaron a 10 profesores que imparten o han impartido estos temas en sus respectivos programas y se les pidió evaluar determinadas respuestas a preguntas del banco de ejercicios de algunos estudiantes, usando la lista de verificación. Para el test de confiabilidad se usaron las preguntas 5 inciso a, 6 y 8 del banco de preguntas.

Posteriormente se procesaron las evaluaciones de los profesores desde dos puntos de vista: cuantitativo, para cada celda de cada examen de un estudiante y cualitativo, para la generalidad de la lista de verificación. Con el objetivo de contar con un criterio de estabilidad en el análisis de los datos, se consideró que una pregunta de la lista de verificación es estable si se obtiene un 70 % de coincidencia. Como resultado se tuvo que 12 preguntas de la lista tienen más del 70 % de coincidencia, para un total de 75 % de preguntas estables de la lista de verificación. Por lo que se concluyó que el test de estabilidad resultó favorable.

Además, se les pidió a los profesores que opinaran con respecto a la correspondencia de la lista de verificación con la categorización asumida y a la redacción de los rubros de la lista. Los resultados fueron positivos y se usaron en el perfeccionamiento de la lista de verificación.

## 2.3 Resultados y discusión del diagnóstico de las dificultades

El instrumento se aplicó en el primer semestre del año 2023 en dos momentos del curso y para dos tipos de evaluaciones parciales diferentes. Un primer momento fue una pregunta escrita y un segundo momento fue la prueba parcial.

La pregunta escrita se realizó con el objetivo de observar los métodos que usan los estudiantes para resolver las indeterminaciones, mientras la prueba parcial, donde hay más preguntas relacionadas al concepto de límite, permite tener mayor información de otras representaciones semióticas del concepto.



Al procesar la lista de verificación observamos un amplio número de estudiantes en los cuales se evidencia que no conocen el procedimiento para resolver los ejercicios, específicamente, en las preguntas de análisis de la continuidad de una función en un punto, se precisó que la intentaron resolver el 76 % de los estudiantes y solamente el 7 % la resuelve correctamente.

El 86 % de los estudiantes presentan errores en el trabajo algebraico y un 75 % de los estudiantes ni siquiera saben qué tipo de trabajo algebraico pueden realizar para seguir resolviendo el ejercicio. Además, un 24 % de los estudiantes comete errores de tipo simbólico al realizar algún cálculo de límite.

Un 87 % de los estudiantes es capaz de identificar una indeterminación cuando están en presencia de preguntas de cálculo de límite, pero, solamente el 20 % es capaz de identificarla en un ejercicio de análisis de continuidad. Lo cual indica dos graves errores: uno es que los estudiantes buscan la indeterminación de forma mecánica en ejercicios de cálculo de límite y el otro, que los estudiantes consideran el análisis de continuidad como una simple evaluación y no como un proceso en el cual interviene el concepto de límite funcional.

También es preocupante el hecho de que solamente el 11 % de los estudiantes logra relacionar el resultado de un límite con el comportamiento gráfico de la función alrededor del punto o en el infinito. Este dato demuestra que existen lagunas en el entendimiento de los estudiantes con respecto al concepto de límite.

Los resultados evidencian que los estudiantes tienen errores de tipos simbólicos, algebraicos, de interpretación geométrica, conceptuales y, sobre todo, que no tienen incorporados algoritmos correctos para resolver ejercicios relacionados con el análisis de continuidad de funciones.

### 3. Diseño de las pirámides conceptuales e instrumentales

#### 3.1 Base teórica del diseño

Los mapas conceptuales son “herramientas gráficas para organizar y representar el conocimiento. Incluyen conceptos y relaciones entre conceptos indicados por una línea conectiva que enlaza los dos conceptos” [3]. Los mapas conceptuales deben tener una estructura proposicional, “un mapa conceptual consiste de una representación gráfica de un conjunto de proposiciones sobre un tema”. Los mapas conceptuales responden a una jerarquía, aunque puede no ser rígida, en dependencia de la Pregunta de Enfoque, se pueden obtener mapas conceptuales declarativos, explicativos o cíclicos, pero siempre mantienen una jerarquía natural entre conceptos [3].

Los mapas conceptuales permiten sistematizar e interrelacionar los conocimientos teóricos con el objetivo de organizar el pensamiento, pero son usados principalmente para sistematizar contenido previamente tratado. Al utilizarlos en Matemática, y específicamente para la enseñanza del límite funcional, necesitamos más, es necesario organizar métodos de trabajo,

crear en los estudiantes una interrelación de conceptos e instrumentar el cálculo algebraico de límites de funciones, pues los estudiantes deben tomar conciencia de la amplia variedad de posibilidades y métodos de resolución para las indeterminaciones. Necesitamos enseñar un contenido y una forma de trabajo totalmente nueva para el estudiante, por lo que surge la pregunta: ¿será posible enseñar el cálculo de límite funcional usando mapas conceptuales?

Después de una investigación bibliográfica se decidió que el recurso más apropiado para lo que se pretende lograr es la pirámide conceptual e instrumental. En la investigación hecha por Bermúdez y Rodríguez [1], se plantea que estas pirámides “reflejan una estructura jerárquica estricta, además, no sólo han de constreñirse a la representación de estructuras cognitivas, sino también han de configurar estructuras instrumentales, en las que la subordinación y concomitancia de los elementos que se organizan constituyen su propiedad conspicua”. Por lo que permiten dirigir el aprendizaje mediante la organización lógica de los conceptos, determinando “una trayectoria inalterable con respecto al criterio de clasificación fijado en el primer nivel de analogía” ([1], p. 18).

Una pirámide conceptual va dirigida a la sistematización y comprensión de los aspectos teóricos de un tema, a lograr un entendimiento de las relaciones esenciales entre conceptos. Una pirámide instrumental va encaminada a la apropiación de algoritmos de trabajo, al logro de habilidades en la solución de problemas de diversa índole.

#### 3.2 Metodología para el diseño y utilización de las pirámides

Para la conformación de las pirámides conceptuales e instrumentales primero se debe organizar la secuencia de actividades del tema, de forma tal que esta secuencia se refleje en la organización jerárquica de la pirámide.

Las clases de corte teórico deben ser aprovechadas para la construcción, en el aula y con la participación activa de los estudiantes, de las pirámides conceptuales, que basadas en las definiciones y conceptos del tema y sus relaciones, permitan alcanzar cada rama y definir el orden jerárquico.

Mientras que durante el planteamiento, la resolución y discusión de los ejemplos que se realizan en las actividades prácticas, se va conformando la pirámide instrumental. Esta pirámide se debe ir construyendo en clase con el estudiante. Se debe presentar un ejemplo, resolverlo usando el método adecuado de solución y una vez que se comprende que el método es válido, incorporar ese método de trabajo a la pirámide, que debe estar en una sección de la pizarra o irse elaborando en formato digital.

El estudiante debe usar la pirámide instrumental para la resolución de los ejercicios de las clases prácticas y el profesor así lo debe orientar. Cuando un estudiante cometa un error, el profesor debe señalar la zona de la pirámide que no siguió o que saltó, de forma tal que el pensamiento del estudiante se vaya organizando según la pirámide instrumental.

Con base en esa teoría y la metodología para la construcción de pirámides expuestas por Bermúdez y Rodríguez ([1], p. 19), se elaboraron pirámides conceptuales e instrumentales para la enseñanza del concepto de límite funcional de una variable real. Aquí se pondrá como ejemplo una de ellas y se explicará su contenido y forma de utilización en clase, donde se podrá apreciar la relación entre la secuencia de actividades y la pirámide instrumental.

### 3.3 Ejemplo de pirámide instrumental

En la Tabla 1 se muestra la secuencia de actividades propuesta para la enseñanza del tema de límite de funciones.

**Tabla 1.** Secuencia de actividades. Tema: Límite Funcional [*Sequence of activities for the Topic: Functional Limit*].

Act.	Contenido
C-4	Función. Conceptos afines. Función real de una variable independiente. Representación de funciones. Propiedades de las funciones básicas y función elemental. Funciones definidas por secciones. Funciones exponenciales de base $e$ y su inversa.
C-5	Límite de una función (solamente análisis gráfico y teórico) en un punto (según Cauchy - Weierstrass). Límites laterales. Continuidad de una función en un punto. Tipos de discontinuidades. Asíntotas verticales. Límites infinitos, límites al infinito y límites en el infinito. Asíntotas no verticales.
CP-4	Ejercitación sobre funciones y límites con análisis gráfico.
C-6	Cálculo de límites. Leyes de los límites. Formas indefinidas que no conllevan a indeterminación y formas indeterminadas. Teorema del emparedado. Límites fundamentales.
CP-5	Ejercitación sobre cálculo de límites.
CP-6	Ejercitación sobre cálculo de límites y cambios de contextos.

Es posible desarrollar pirámides conceptuales para el concepto de límite, para el análisis de la continuidad de una función en un punto o la clasificación de los tipos de discontinuidades, mediante el estudio de su comportamiento alrededor de un punto.

En el caso ideal de que se pueda desarrollar una actividad práctica del concepto de límite y su relación con el comportamiento gráfico de la función en un punto, se propone realizarla antes de la clase dedicada al cálculo algebraico del límite funcional, es decir, evitar los métodos analíticos y enfocarse en comportamientos gráficos y análisis cualitativo. De esta forma el concepto se afianza mejor en el estudiante, pues este se trabaja de forma visual y se relaciona así con el contenido precedente que los estudiantes tienen, el cual es funciones y representación de funciones. Esta manera de enseñar el límite funcional trabaja sobre las dificultades conceptuales que los estudiantes presentan y los ayuda a transitar entre los contextos gráficos y analíticos, y viceversa.

Por ejemplo, para usar la pirámide instrumental que se presenta en la Figura 1, previamente se realiza una clase explicando el concepto límite funcional según Cauchy y la relación entre el valor del límite y el comportamiento gráfico de la función alrededor del punto, también se tocan los temas de continuidad y discontinuidad de las funciones y los ejemplos de tipos de discontinuidad, separando así el concepto de límite, del cálculo algebraico de los límites.

Para la secuencia de actividades propuesta en la Tabla 1 se diseña la pirámide instrumental que se presenta en la Figura 1, dedicada al cálculo algebraico del límite de una función real de una variable y que trabaja específicamente sobre la organización de los métodos de trabajo.

Como se observa en la Figura 1, en la pirámide se encuentra: resolución de indeterminaciones, formas indefinidas o concluyentes que no constituyen una indeterminación, teorema relacionado con las funciones acotadas, y la estructura de trabajo general para el cálculo de límite.

Nótese que la pirámide es cíclica en la sección de trabajo con las formas indeterminadas, lo que garantiza que el estudiante evalúe si la técnica empleada fue efectiva para la eliminación de las indeterminaciones.

La importancia de esta evaluación viene dada, por ejemplo, para evitar que el estudiante utilice la Regla de L'Hôpital cuando ya ha eliminado la indeterminación.

Los ejemplos deben seguir el orden propuesto en la pirámide, para cada una de las formas de trabajo usuales en la eliminación de las indeterminaciones. Es importante escoger bien los ejemplos a resolver en clase y la secuencia de los mismos, de modo que se vayan introduciendo paulatinamente los métodos de trabajo, que permitan explicar cada paso del trabajo algebraico y lo que se logra al realizar determinadas transformaciones. Esta organización y concientización de los métodos para el cálculo de límites de funciones, permitirá ir eliminando los errores usuales que los estudiantes cometen.

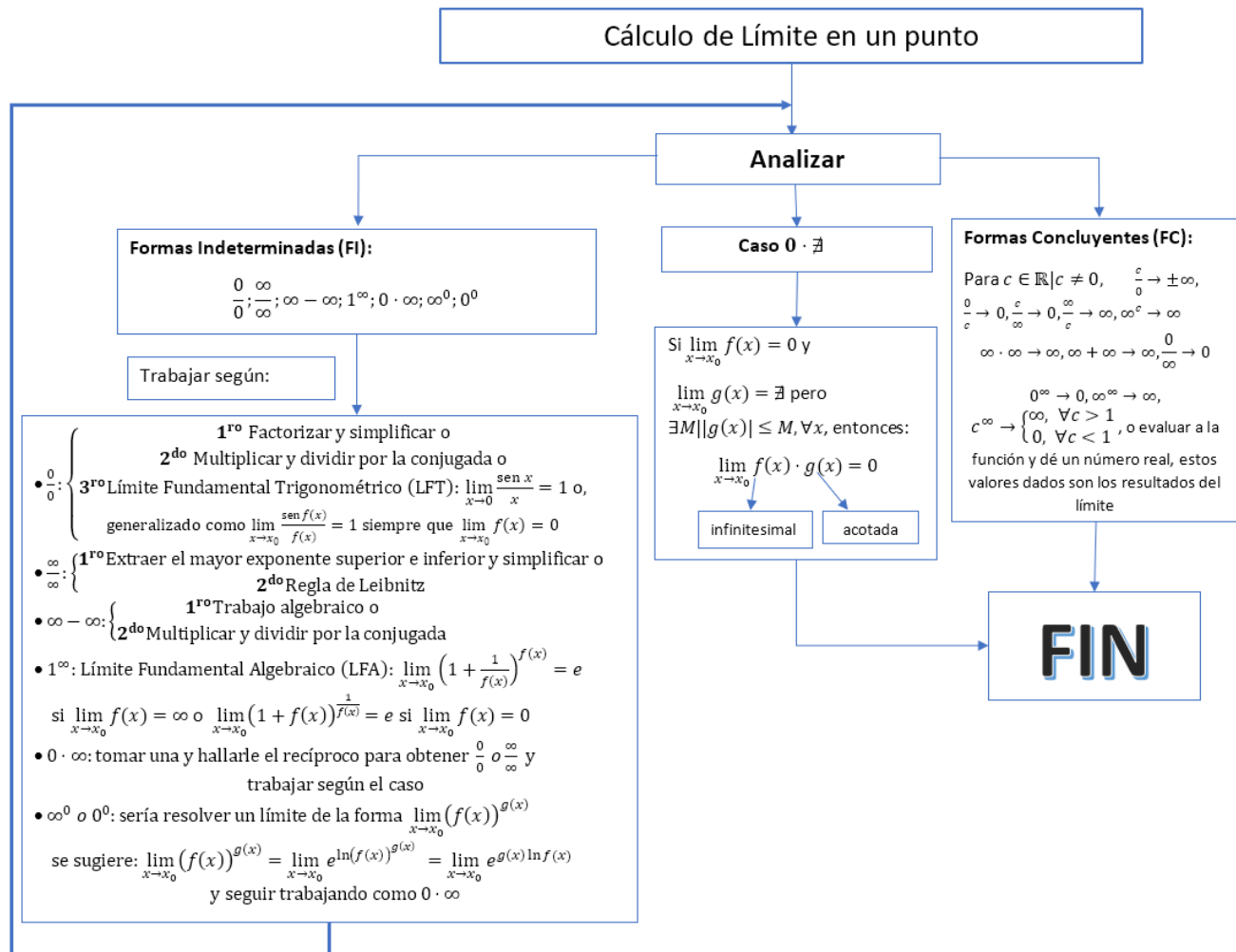
## Conclusiones

En este trabajo se describen las dos primeras fases de una propuesta metodológica, basada en el uso de mapas conceptuales, para el estudio del límite funcional de funciones de una variable en estudiantes de Licenciatura en Química.

Se profundizó en los obstáculos epistemológicos y específicamente los vinculados al concepto de límite funcional. Se realizó una exposición exhaustiva de las dificultades relativas a este concepto.

Se propuso una categorización propia, con definiciones y algunas de sus manifestaciones, que resulta apropiada a los objetivos investigativos de este trabajo.

Se diseñó una lista de verificación para medir las dificultades que pueden tener los estudiantes, que fue validada mediante un test de confiabilidad y se discutieron los resultados obtenidos de la aplicación de la lista de verificación. Se fundamentó el uso de las pirámides conceptuales e instrumentales y se ilustró un ejemplo de esta última para su uso en la enseñanza del concepto de límite funcional.



## Suplementos

## Conflictos de interés

## Contribución de autoría

**Validación** A.D.C., V.B.A.

## Referencias

iques\_et\_la\_didactique\_des\_mathematiques89.pdf.

- [3] Cañas, A. y J. Novak: *Mapas conceptuales: qué son y cómo elaborarlos*, Agosto 2008. [https://repository.icesi.edu.co/biblioteca\\_digital/bitstream/10906/85728/1/canas\\_mapas\\_conceptuales\\_2018.pdf](https://repository.icesi.edu.co/biblioteca_digital/bitstream/10906/85728/1/canas_mapas_conceptuales_2018.pdf).
- [4] Cornu, B.: *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*, 1983. <http://pascal-francis.inist.fr/vibad/index.php?action=getRecordDetail&idt=9690985>.
- [5] Hernandez-Suarez, C.A., R. Prada-Núñez y P. Ramírez-Leal: *Obstáculos epistemológicos sobre los conceptos de límite y continuidad en cursos de cálculo diferencial en programas de ingeniería*. Revista Perspectivas, 2:73–83, Julio 2017. <https://revistas.ufps.edu.co/index.php/perspectivas/article/view/1316>.
- [6] López Falcón, A.: *Los tipos de resultados de investigación en las ciencias de la educación*. Revista Conrado, 17:53–61, Diciembre 2021. <https://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado/article/view/2137>.
- [7] Quesada, C. y E. Padilla: *Límite de funciones en una variable y principales dificultades conceptuales de estudiantes en formación inicial*. En *Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, páginas 1–9. XV CIAEM-IACME, Mayo 2019. <https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/453/332>.
- [8] Sierpinski, A.: *Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite*. Recherches En Didactique Des Mathématiques, 6:5–67, 1985, ISSN 0246-9367. <https://revue-rdm.com/1985/obstacles-epistemologiques/>.
- [9] Tall, D.: *Students' difficulties in calculus Plenary presentation in Working Group 3, ICME, Quebec, August 1992*. Mathematics Education Research Centre, 1992. <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993k-calculus-wg3-icme.pdf>.

