

# Aplicación del MEF a un Problema de Poisson sobre regiones múltiplemente conexas.

## FEM applied to a Poisson Problem on multiply connected domains.

Abraham Toledo Sánchez<sup>1</sup>

**Resumen** En este trabajo se resuelve un Problema de Poisson mediante el Método de Elementos Finitos (MEF). El problema se define sobre una región acotada y múltiplemente conexa, dada como el conjunto de los puntos comprendidos entre una circunferencia, centrada en el origen de coordenadas, y un polígono regular exterior a dicha circunferencia, también centrado en el origen de coordenadas. La función solución debe cumplir condiciones de periodicidad en la frontera determinada por el polígono y anularse en la frontera determinada por la circunferencia. Se obtiene la formulación variacional correspondiente y se demuestra que se satisfacen las condiciones del teorema de Lax-Milgram. La implementación computacional se realiza usando FreeFem++. Los resultados se aplican al cálculo de la permeabilidad efectiva de un medio poroso y se controlan mediante comparaciones con los reportados por otros autores.

**Abstract** In this work, a Poisson Problem is solved by means of the Finite Element Method (FEM). The problem is defined on a bounded, multiply connected domain, given as the set of points between a circumference, centered in the coordinates origin, and a regular polygon, exterior to the circumference, also centered in the coordinates origin. The solution must satisfy some periodicity conditions on the border determined by the polygon, and must be null on the border determined by the circumference. The corresponding variational formulation is obtained and it is proven that the Lax-Milgram Theorem conditions are satisfied. The computational implementation it is made using FreeFem++. The results are applied to the calculation of effective permeability of a porous medium and are controled by comparison with other authors results.

### Palabras Clave

MEF — EDP — Metodo de Elementos Finitos — Problema de Poisson

<sup>1</sup> Estudiante de último año de Licenciatura en Matemática. Facultad de Matemática y Computación de la Universidad de La Habana, San Lázaro y L, CP 10400, La Habana, Cuba.

## Introducción

Con frecuencia en la ingeniería, es necesario estudiar fenómenos que ocurren sobre medios heterogéneos cuyas propiedades físicas fluctúan notablemente. Las ecuaciones diferenciales que modelan matemáticamente tales procesos tienen coeficientes rápidamente oscilantes. La implementación directa de métodos numéricos para su solución requiere de un elevado costo computacional. Los métodos de homogeneización ([3], [4], [5], entre otros) permiten transformar dichas ecuaciones en otras con coeficientes constantes, que son los llamados coeficientes efectivos y su conocimiento le brinda al ingeniero una estimación del comportamiento macroscópico del medio heterogéneo de interés. Sin embargo, la determinación de dichos coeficientes requiere de la solución de problemas de contorno sobre un elemento representativo de dicho medio, con la ventaja de que los coeficientes de las ecuaciones a resolver son discontinuos pero no rápidamente oscilantes siendo posible aplicar métodos numéricos sin el

alto costo computacional original. Estos problemas sobre el elemento representativo son usualmente llamados "problemas sobre la celda básica". En [6], se resuelven problemas de Poisson sobre la celda, usando FEM, para predecir la permeabilidad efectiva de medios periódicos porosos. El presente trabajo tiene como objetivo resolver estos mismos problemas que en [6] usando FreeFem++.

En la sección 1 se dan conceptos preliminares que se emplearán posteriormente. En particular se presenta la noción de Coordenadas Oblicuas, las cuales se emplean para definir la región asociada al problema de interés. Además se exponen brevemente algunos resultados del Análisis Funcional. En la sección 2 se presentan las formulaciones fuerte y débil del Problema de Poisson estudiado y se demuestra, aplicando el *Teorema de Lax-Milgram* [8], que la segunda, también denominada formulación variacional, es un problema bien planteado. En las secciones 3 y 4 se realizan los cálculos de permeabilidad y se analiza cómo varía con respecto a los valores de los parámetros, además se comparan los valores

obtenidos con los correspondientes en [6]. Al final se anexa el código de FreeFem++ implementado para la solución.

## 1. Resultados preliminares

### 1.1 Puntos interiores de un triángulo. Coordenadas Oblicuas

**Definición 1.1.** Sean los vectores  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$  linealmente independientes. Entonces para cualquier  $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$  existen escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que

$$\vec{p} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}. \quad (1.1)$$

Se dice que los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  forman un sistema de coordenadas oblicuas (o una base oblicua) en el plano  $\mathbb{R}^2$  y las coordenadas de  $\vec{p}$  en este sistema son  $(\alpha, \beta)$  (Fig 1.1) [?].

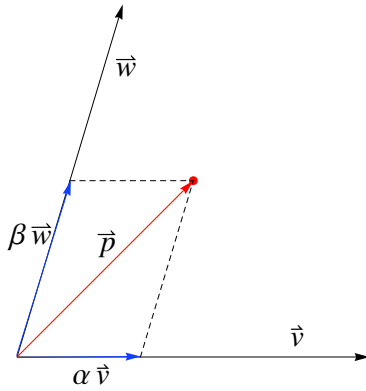


Figura 1.1. Sistema de coordenadas oblicuas.

**Proposición 1.1.** Sean  $A, B, C$  puntos no colineales del plano afín. Dado un punto  $P$  sobre el segmento  $\overline{BC}$ , se puede expresar su vector de posición respecto a  $A$  como

$$\vec{AP} = (1-t)\vec{AB} + t\vec{AC} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.2)$$

*Demostración.* Es conocido que si  $P$  es un punto del segmento  $\overline{BC}$ , entonces

$$P = B + t(C - B)$$

para algún  $t \in [0, 1]$ . Restando el punto  $A$  de la ecuación anterior queda

$$P - A = B - A + t(C - B)$$

o en forma vectorial

$$\begin{aligned} \vec{AP} &= \vec{AB} + t\vec{BC} \\ &= \vec{AB} + t(\vec{AC} - \vec{AB}) \\ &= (1-t)\vec{AB} + t\vec{AC} \end{aligned}$$

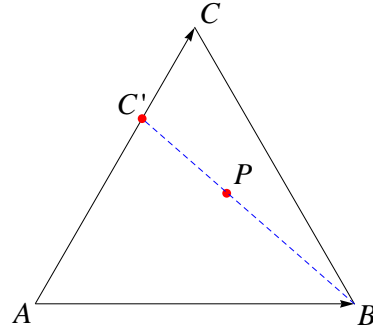


Figura 1.2. Punto interior del  $\triangle ABC$ .

Dado un triángulo  $\triangle ABC$  en el plano afín, se puede encontrar un sistema de coordenadas oblicuas asociado a él, por ejemplo, se puede definir la base oblicua  $\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$ . Si  $P$  es un punto del plano afín, asociando a  $P$  el vector  $\vec{AP}$  es posible expresar  $\vec{AP}$  como

$$\vec{AP} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}, \quad (1.3)$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Una condición necesaria para que el punto  $P$  sea interior al  $\triangle ABC$ , es que pertenezca al primer cuadrante, es evidente por tanto que

$$\alpha, \beta \geq 0 \quad (1.4)$$

Por otro lado, si  $P$  es interior al  $\triangle ABC$  entonces, debe estar sobre algún segmento  $\overline{BC'}$ , donde  $C' = A + q\vec{AC}$ , con  $0 \leq q \leq 1$  (Fig 1.2). Luego

$$\begin{aligned} \vec{AP} &= (1-t)\vec{AB} + t\vec{AC'} \\ &= (1-t)\vec{AB} + tq\vec{AC} \end{aligned} \quad (1.5)$$

con  $0 \leq t \leq 1$ . Por tanto las coordenadas de  $\vec{AP}$  en la base  $\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$  son  $\alpha = 1-t$  y  $\beta = tq$ . Sumando se tiene

$$\alpha + \beta = 1-t + tq \leq 1-t + t = 1.$$

Ha sido probada la siguiente proposición.

**Proposición 1.2.** Si  $A, B, C$  son puntos no colineales del plano afín y  $P$  un punto interior del  $\triangle ABC$ . Las coordenadas  $(\alpha, \beta)$  de  $\vec{AP}$  en la base oblicua  $\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$  satisfacen la desigualdad

$$\alpha + \beta \leq 1 \quad (1.6)$$

Las condiciones (1.4) y (1.6), son además suficientes para que un punto  $P$  sea interior al  $\triangle ABC$ . Por tanto tales condiciones caracterizan a los puntos interiores de un triángulo.

### 1.2 Herramientas del Análisis Funcional

**Definición 1.2** (Forma lineal continua). Si  $V$  es un espacio de Hilbert y  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma lineal sobre  $V$ . Se dice que  $F$  es continua si existe  $M > 0$  tal que

$$|F(v)| \leq M \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (1.7)$$

□

**Definición 1.3** (Forma bilineal continua). Si  $V$  es un espacio de Hilbert y  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma bilineal sobre  $V$ . Se dice que  $a$  es continua si existe  $c > 0$  tal que

$$|a(u, v)| \leq c \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V. \quad (1.8)$$

**Definición 1.4** (Forma bilineal coercitiva). Si  $V$  es un espacio de Hilbert y  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma bilineal sobre  $V$ . Se dice que  $a$  es coercitiva si existe  $c > 0$  tal que

$$a(v, v) \geq c \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V. \quad (1.9)$$

**Definición 1.5.** Sea  $\Omega$  una subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Se define  $H^1(\Omega)$  como el espacio

$$H^1 = \{v \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = 1\}. \quad (1.10)$$

Ver definición 1.1 de [1].

**Teorema 1.1** (Desigualdad de Poincaré-Friedrichs). Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto, acotado, Lipschitz-continuo y conexo de  $\mathbb{R}^n$ . Suponga  $\Gamma$  es un subconjunto cerrado de  $\partial\Omega$  con interior no vacío. Se define

$$H_\Gamma^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_\Gamma = 0\}. \quad (1.11)$$

Entonces existe una constante  $C > 0$  que depende de  $\Omega$  tal que para toda función  $u \in H_\Gamma^1(\Omega)$  se cumple

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}. \quad (1.12)$$

Ver Teorema 1.14 de [1]. El símbolo  $\nabla$  denota el operador Gradiente

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right). \quad (1.13)$$

A continuación se enuncia un teorema que será de gran utilidad más adelante.

**Teorema 1.2** (Lax-Milgram). Sea  $V$  un espacio de Hilbert,  $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal continua y coercitiva sobre  $V$  y  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional lineal y continuo sobre  $V$ . Entonces el problema, encontrar  $u \in V$  tal que

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V \quad (1.14)$$

admite solución única.

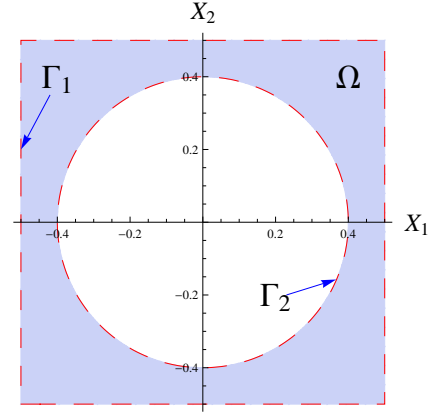
Ver Teorema 2.1 de [1].

## 2. Formulación matemática del problema

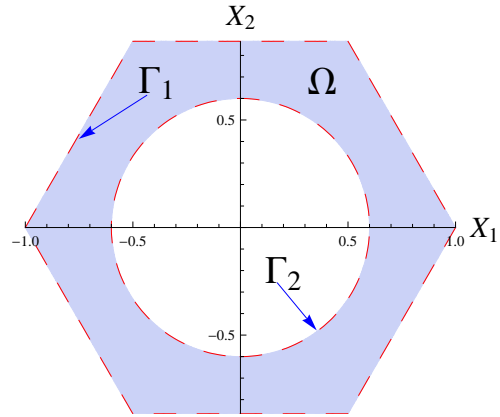
### 2.1 Definición del problema en su forma fuerte

Sean  $a, r > 0, k = 2, 3, \dots$  y  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r\}$ . Se define la región  $\Omega$  como

$$\Omega = \left( \bigcup_{i=0}^{2k-1} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \alpha P_i + \beta P_{i+1}; \right. \\ \left. \alpha, \beta \geq 0; \alpha + \beta < 1\} \right) \setminus D$$



(a) Para  $k = 2, \theta_0 = \pi/4, a = \sqrt{2}/2$



(b) Para  $k = 3, \theta_0 = 0, a = 1$

**Figura 2.1.** Región  $\Omega$  en el problema (2.1).

donde  $P_i = (a \cos(\frac{i\pi}{k} + \theta_0), a \sin(\frac{i\pi}{k} + \theta_0))$ ,  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$  (empleando un cierto abuso de lenguaje, se interpreta a  $P_i$  como su vector de posición  $\vec{OP}_i$ ). Se definen además

$$\Gamma_1 = \bigcup_{i=0}^{2k-1} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \alpha P_i + \beta P_{i+1}; \\ \alpha, \beta \geq 0; \alpha + \beta = 1\}$$

y  $\Gamma_2 = \partial D$ . Finalmente se plantea el siguiente problema de contorno para la ecuación de Poisson,

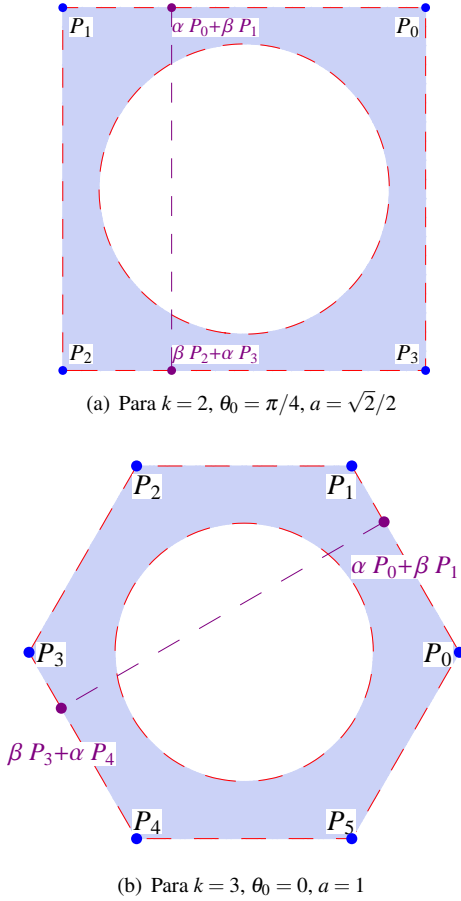
$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= f, & x \in \Omega \\ u &: \Omega - \text{Periódica}, & x \in \Gamma_1 \\ u &= 0, & x \in \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

(Fig 2.1), donde  $\Delta$  es el operador Laplaciano

$$\Delta u = \sum_{i=1,2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u.$$

La  $\Omega$ -periodicidad está descrita por la ley

$$u(\alpha P_i + \beta P_{i+1}) = u(\beta P_{i+k} + \alpha P_{i+1+k}); \\ \forall i \in \mathbb{Z}_+; \alpha, \beta \geq 0; \alpha + \beta = 1 \quad (2.2)$$



**Figura 2.2.** Ley de periodicidad en el problema (2.1).

(Fig 2.2). Para resolver el problema (2.1) se usará el método de elementos finitos (MEF) y para la implementación de éste se empleará el software FreeFem++. Es de interés además analizar las variaciones de la función solución  $u$  encontrada o más bien de su promedio sobre  $\Omega$ , para diferentes valores de la concentración  $c = |D|/|\Omega \cup D|$ , donde  $|\cdot|$  denota el área de la región  $(\cdot)$ .

## 2.2 Forma débil o variacional del problema

Para resolver el problema (2.1) mediante el MEF, se debe expresar en su forma variacional o débil. Sea el espacio de Hilbert

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_2} = 0 \text{ y } v|_{\Gamma_1} : \Omega - \text{periódicas en el sentido de (2.2)}\}.$$

En la primera ecuación del problema (2.1), multiplicando por  $v \in V$  en ambos miembros e integrando sobre  $\Omega$ ,

$$\iint_{\Omega} f v dX = - \iint_{\Omega} \Delta u v dX. \quad (2.3)$$

Note que

$$(u_x v)_x = u_{xx} v + u_x v_x \quad (2.4)$$

$$(u_y v)_y = u_{yy} v + u_y v_y \quad (2.5)$$

donde los subíndices  $x$  e  $y$  denotan derivación con respecto a esa variable. Sumando miembro a miembro las ecuaciones (2.4) y (2.5), y agrupando convenientemente se tiene

$$(u_x v)_x + (u_y v)_y = \Delta u v + \nabla u \cdot \nabla v$$

de donde se obtiene

$$\Delta u v = (u_x v)_x + (u_y v)_y - \nabla u \cdot \nabla v. \quad (2.6)$$

Ahora sustituyendo (2.6) en (2.3) se tiene

$$\iint_{\Omega} f v dX = \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dX - \iint_{\Omega} (u_x v)_x + (u_y v)_y dX. \quad (2.7)$$

Nótese que, utilizando el *Teorema de Green para regiones múltiplemente conexas* (Teorema 11.23 de [2], pág 387), se obtiene la identidad

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (u_x v)_x + (u_y v)_y dX &= \oint_{\Gamma_1} u_x v dy - u_y v dx - \\ &\oint_{\Gamma_2} u_x v dy - u_y v dx = \oint_{\Gamma_1} u_x v dy - u_y v dx \end{aligned} \quad (2.8)$$

puesto que  $v|_{\Gamma_2} = 0$  y por tanto

$$\oint_{\Gamma_2} u_x v dy - u_y v dx = 0.$$

Considerando ahora la familia de funciones  $\varphi_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dadas por

$$\varphi_i(\alpha) = (1 - \alpha)P_i + \alpha P_{i+1}. \quad (2.9)$$

Por la propiedad de periodicidad (2.2) se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_i(\alpha) &= (1 - \alpha)P_i + \alpha P_{i+1} \\ &= \alpha P_{i+k} + (1 - \alpha)P_{i+1+k} \\ &= \varphi_{i+k}(1 - \alpha). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Note que las  $\varphi_i$  son parametrizaciones de los segmentos que componen a  $\Gamma_1$ , o sea, si  $(x, y) \in \Gamma_1$  entonces  $(x, y) = \varphi_i(\alpha)$  para algún  $i = 1, 2, \dots, 2k - 1$  y  $\alpha \in [0, 1]$ . Además las  $\varphi_i$  están definidas de forma tal que recorren la frontera  $\Gamma_1$  en sentido antihorario. Por consiguiente se tiene que

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_1} u_x v dy - u_y v dx &= \sum_{i=0}^{2k-1} \int_0^1 (u_x v - u_y v)|_{\varphi_i} \varphi'_i d\alpha \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^1 (u_x v - u_y v)|_{\varphi_i} \varphi'_i d\alpha \\ &\quad + \sum_{i=k}^{2k-1} \int_0^1 (u_x v - u_y v)|_{\varphi_i} \varphi'_i d\alpha \end{aligned}$$

si consideramos  $\beta = 1 - \alpha$  y aplicamos (2.10)

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^1 (u_x v, -u_y v)|_{\varphi_i} \varphi'_i d\alpha \\ &\quad - \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^1 (u_x v, -u_y v)|_{\varphi_i(\beta)} \varphi'_i(\beta) d\beta \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aplicando este resultado a (2.8) se obtiene que

$$\iint_{\Omega} (u_x v)_x + (u_y v)_y dX = 0 \quad (2.12)$$

y finalmente aplicando a su vez este último a (2.7) se obtiene

$$\iint_{\Omega} f v dX = \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dX. \quad (2.13)$$

Como se ha escogido  $v \in V$  arbitrario, se está en presencia del problema variacional, esto es, encontrar  $u \in V$  tal que

$$\iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dX = \iint_{\Omega} f v dX; \quad \forall v \in V \quad (2.14)$$

### 2.3 Existencia y unicidad de la solución del problema variacional

Para probar la existencia y unicidad de la solución del problema en su forma débil, basta con demostrar que se cumplen las hipótesis del Teorema de Lax Milgram (1.2).

**Proposición 2.1.** El problema (2.14) admite una solución única.

*Demostración.* Para este problema se tiene

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dX \quad (2.15)$$

$$F(v) = \iint_{\Omega} f v dX. \quad (2.16)$$

y la norma  $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_{H^1} = \|\nabla \cdot\|_{L^2}$ . La coercitividad de  $a$  es inmediata

$$a(v, v) = (\nabla v, \nabla v) = \|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V. \quad (2.17)$$

La continuidad de  $a(u, v)$  obtiene de aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$a(u, v) = (\nabla u, \nabla v) \leq \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V. \quad (2.18)$$

La continuidad de  $F$  se tiene de aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y luego la desigualdad de Poincaré

$$F(v) = (f, v) \leq \|f\| \|v\| \leq C \|f\| \|v\|_V \leq \bar{C} \|v\|_V. \quad (2.19)$$

Habiendo comprobado el cumplimiento de las hipótesis del Teorema 1.2 (Lax-Milgram), se tiene que el problema (2.14) admite una solución única.  $\square$

Para esta demostración se siguió la misma idea que en [7] p 192.

## 3. Resolución, resultados, comparaciones

### 3.1 Casos particulares para el problema

En los dos casos particulares del problema (2.1) que trataremos en esta sección, la función  $f$  toma el valor constante  $f = 1$ . Recordemos la definición de  $\Omega$  en el problema (2.1). Para los valores  $k = 2$ ,  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , se comprueba que la sección de frontera  $\Gamma_1$  tiene forma de cuadrado centrado en el origen, con lado  $l = 1$ , el mayor radio que puede alcanzar la circunferencia interior determinada por  $\Gamma_2$ , es  $r_{max} = 0,5$ . Se denominará  $\Omega_{cuad}$  a  $\Omega$  para esta selección de los parámetros (Fig 2.1(a)). En este caso estaremos resolviendo el problema

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= 1 && \text{en } x \in \Omega_{cuad} \\ u &: \Omega_{cuad} - \text{Periódica} && \text{en } x \in \Gamma_1 \\ u &= 0 && \text{en } x \in \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

En el caso que los parámetros en la definición de  $\Omega$  tomen los valores  $k = 3$ ,  $\theta_0 = 0$  y  $a = 1$ , se comprueba que la sección de frontera  $\Gamma_1$  tiene forma de hexágono regular centrado en el origen de coordenadas, con lado  $l = a = 1$ . En este caso el valor máximo para  $r$  es  $r_{max} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Se denominará  $\Omega_{hex}$  a  $\Omega$  para esta selección de los parámetros (Fig 2.1(b)). En este caso se estará resolviendo el problema

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= 1 && \text{en } x \in \Omega_{hex} \\ u &: \Omega_{hex} - \text{Periódica} && \text{en } x \in \Gamma_1 \\ u &= 0 && \text{en } x \in \Gamma_2 \end{aligned} \right\}. \quad (3.2)$$

### 3.2 Resolución mediante el MEF

Para encontrar la solución de los problemas (3.1) y (3.2) se aplica el MEF, implementado con FreeFem++. El primer paso será encontrar la discretización o triangulación de la región  $\Omega$ . Para hacer esto en FreeFem++, es necesario especificar las fronteras de la región mediante curvas paramétricas cerradas sin auto intersecciones. Recordando el problema (2.14), se tiene que  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , donde además los segmentos que componen a  $\Gamma_1$  se pueden parametrizar por las funciones  $\varphi_i$  para  $i = 0, \dots, 2k - 1$  (ver ecuación 2.10). Por otro lado  $\Gamma_2$  puede parametrizarse por la función  $\zeta : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donde

$$\zeta(t) = (r \cos t, r \sin t). \quad (3.3)$$

En el siguiente código se definen  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  en FreeFem++.

```
// Parametrizaciones  $\varphi_i$  de los
// segmentos de  $\Gamma_1$ .  $\alpha \in [0, 1]$ .
func VECT phi(int i, real alpha){
  VECT Res =
    (1-alpha) * PP(i % (2 * k), :)
    + alpha * PP((i+1) % (2 * k), :);
  return Res;
}

// Definición  $\Gamma_1$ 
border G1(t=0, 1; i) {
```

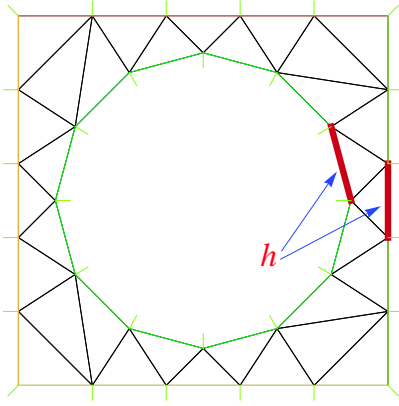


Figura 3.1. Triangulación de  $\Omega$  para  $k = 2, a = \frac{\sqrt{2}}{2}, h = 0.2$ .

```

VECT p = phi(i,t);
x=p(X); y=p(Y);
label=i;
}
macro LABG2() 1000// Label  $\Gamma_2$ 
// Definición  $\Gamma_2$ 
border G2(t=0,2*pi){
  x=r * cos(t); y=r * sin(t);
  label=LABG2;
}

```

La variable **PP** utilizada en el código corresponde a la colección de puntos  $P_i$ , o sea sus vectores de posición.

Lo siguiente es generar la triangulación  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$ , donde  $h_{\max} = \max\{\|P_1 - P_2\| : P_1, P_2 \in T_n \in \mathcal{T}_h\} \leq h$  es el diámetro máximo de los triángulos que conforman  $\mathcal{T}_h$ . La triangulación en FreeFem++ se realiza mediante el *Algoritmo de Delaunay-Voronoi* [9], el cual garantiza que la densidad de vértices en el interior de  $\mathcal{T}_h$  es proporcional a la densidad en las fronteras. Definiendo una densidad constante  $1/h$  en las fronteras se obtiene la misma densidad constante en el interior, de manera tal que  $h_{\max} \leq h$  Fig 3.1. La implementación es la siguiente.

```

// Esta es la forma de definir un array
// de fronteras en FreeFem.
int[int] nn(2*k);
// n = longitud * densidad
nn=(2*a*sin(pi/(2*k)) * 1./h;
// Triangulación  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$ 
mesh Th = buildmesh(G1(nn)
+ G2(-2.*pi * r / h));

```

A continuación se define el espacio correspondiente  $V_h$  de elementos finitos, en el que las funciones deben ser  $\Omega$ -periódicas en el sentido de (2.2).

```

// Razón entre los segmentos  $P_iP$  y  $P_iP_{i+1}$ 
func real ratio(int i, real x, real y){
  VECT p = [x,y], A = p-PP(i%(2*k),:),
  B=PP((i+1)%(2*k),:)-PP(i%(2*k),:);
  return norm(A)/norm(B);
}

```

```

// Espacio de EF
fespace Vh(Th, Pk,
// Condiciones de periodicidad
periodic=[
  [0, ratio(0, x, y)],
  [0+k, 1-ratio(0+k, x, y)]
, [1, ratio(1, x, y)],
  [1+k, 1-ratio(1+k, x, y)]
// Descomentar para k=3,
// Comentar para k=2
//, [2, ratio(2, x, y)],
// [2+k, 1-ratio(2+k, x, y)]
]);

```

Vh u, v;

Finalmente se define y resuelve el problema de Poisson sobre  $\Omega$  y se calcula el promedio  $k^* = \langle u \rangle_{\Omega_{cp}}$  sobre la celda periódica, donde  $\Omega_{cp} = \Omega \cup D$  y  $\langle \cdot \rangle_{\Omega_{cp}}$  es el operador de promediación sobre  $\Omega_{cp}$

$$\langle u \rangle_{\Omega_{cp}} = \frac{1}{|\Omega_{cp}|} \int_{\Omega_{cp}} u dX. \quad (3.4)$$

El código para esto es

```

solve Poisson(u,v,solver=CG) =
  int2d(Th) (dx(u) * dx(v)
+ dy(u) * dy(v))
- int2d(Th) (v)
+ on(LABG2, u=0);

// Área de la celda periódica
real Acp = a * a *
  cos(pi/(2*k)) * sin(pi/(2*k));
real kAst = int2d(Th) (u) / Acp;

```

La figura 3.2 muestra la gráfica de la función encontrada ( $u$ ) para una concentración  $c = 0.5$ , tanto para el problema con  $\Omega = \Omega_{cuad}$  (Fig 3.2(a)), como para el problema con  $\Omega = \Omega_{hex}$  (Fig 3.2(b)). El promedio  $k^*$  modela la permeabilidad efectiva de un compuesto poroso [6]. El código completo del programa que puede ejecutarse con el software FreeFem++ aparece en el Anexo.

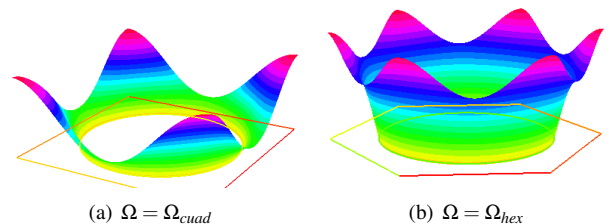


Figura 3.2. Región de definición del problema.

### 3.3 Evaluación y Comparaciones

A continuación se utiliza el programa descrito en la sección anterior, para hallar los valores de  $k^*$  a diferentes concentraciones y también variando el diámetro máximo  $h$  para observar de forma cualitativa la convergencia del MEF. Los cuadros 1 y 2 muestran los resultados para los casos  $k = 2$  (celda periódica cuadrada) y  $k = 3$  (celda periódica hexagonal), así como el tiempo de ejecución del programa en cada caso.

Además se presenta una columna con los resultados obtenidos por [6]. En ese trabajo el autor calcula la permeabilidad como

$$\tilde{k} = \frac{\langle u \rangle_{\Omega_{cp}}}{4r^2}. \quad (3.5)$$

Por esa razón los valores incluidos en esa columna de las tablas, están multiplicados por  $4r^2$ . También se presentan columnas para los errores absolutos entre los resultados en ambos trabajos.

**Cuadro 1.** Permeabilidad para el caso  $\Omega = \Omega_{cuad}$  y diferentes valores de  $c$  y  $h$ . Comparación con [6].

		$\mathbb{P}_1$		$\mathbb{P}_2$		Comparación con [6]		
$c$	$h$	$k^*$	$t$ (seg)	$k^*$	$t$ (seg)	$4r^2\tilde{k}$	$ k^* - 4r^2\tilde{k} $ ( $\mathbb{P}_1$ )	$ k^* - 4r^2\tilde{k} $ ( $\mathbb{P}_2$ )
0.1	0.05	0.0810166	0.04	0.0820764	0.073	0.0812671	1.54002e-006	9.33916e-006
0.1	0.02	0.0812168	0.155	0.0813988	0.648			
0.1	0.01	0.0812561	0.822	0.0813013	4.962			
0.1	0.005	0.0812655	5.036	0.0812764	49.437			
0.3	0.05	0.0223098	0.031	0.0226294	0.06	0.0224569	6.4892e-007	3.88164e-006
0.3	0.02	0.0224352	0.118	0.0224859	0.427			
0.3	0.01	0.0224529	0.541	0.0224658	3.01			
0.3	0.005	0.0224575	3.124	0.0224608	22.166			
0.5	0.05	0.00696453	0.026	0.00712745	0.042	0.00707348	2.54978e-007	1.73987e-006
0.5	0.02	0.00705838	0.085	0.00708329	0.262			
0.5	0.01	0.00707086	0.359	0.00707685	1.675			
0.5	0.005	0.00707374	1.958	0.00707522	12.744			
0.77	0.05	0.00129857	0.022	0.00135209	0.034	0.00134059	7.95356e-008	4.78879e-007
0.77	0.02	0.00133414	0.051	0.00134277	0.115			
0.77	0.01	0.00133922	0.163	0.00134141	0.576			
0.77	0.005	0.00134051	0.744	0.00134107	4.014			

**Cuadro 2.** Permeabilidad para el caso  $\Omega = \Omega_{hex}$  y diferentes valores de  $c$  y  $h$ . Comparación con [6].

		$\mathbb{P}_1$		$\mathbb{P}_2$		Comparación con [6]		
$c$	$h$	$k^*$	$t$ (seg)	$k^*$	$t$ (seg)	$4r^2\tilde{k}$	$ k^* - 4r^2\tilde{k} $ ( $\mathbb{P}_1$ )	$ k^* - 4r^2\tilde{k} $ ( $\mathbb{P}_2$ )
0.1	0.05	0.0514399	0.034	0.0524636	0.053	0.0516904	1.40803e-006	9.24442e-006
0.1	0.02	0.0516456	0.1	0.0518218	0.346			
0.1	0.01	0.0516796	0.444	0.0517245	2.379			
0.1	0.005	0.051689	2.685	0.0516996	19.595			
0.3	0.05	0.0133676	0.025	0.0136784	0.038	0.0135129	1.75023e-007	3.11611e-006
0.3	0.02	0.0134889	0.08	0.0135411	0.241			
0.3	0.01	0.0135081	0.324	0.0135211	1.569			
0.3	0.005	0.0135127	1.774	0.013516	11.6			
0.6	0.05	0.0016381	0.022	0.00173809	0.029	0.00171009	1.21145e-007	9.63691e-007
0.6	0.02	0.00169752	0.051	0.00171523	0.118			
0.6	0.01	0.0017076	0.175	0.00171189	0.672			
0.6	0.005	0.00170997	0.815	0.00171105	4.575			
0.9	0.05	4.8198e-005	0.018	6.44944e-005	0.023	6.26777e-005	1.29853e-007	7.88384e-008
0.9	0.02	5.96582e-005	0.029	6.30346e-005	0.042			
0.9	0.01	6.1993e-005	0.06	6.28124e-005	0.13			
0.9	0.005	6.25479e-005	0.183	6.27566e-005	0.583			



## 4. Conclusiones y recomendaciones

En el trabajo se presenta un método relativamente sencillo para resolver un problema de Poisson sobre una clase particular de regiones múltiplemente conexas de  $\mathbb{R}^2$ . La idea seguida puede servir como guía para resolver el mismo problema en otros tipos de regiones múltiplemente conexas. Los resultados obtenidos mediante el empleo del programa implementado, muestran como disminuye la permeabilidad a medida que aumenta la concentración de poros, tanto en el modelo de celda cuadrada, como en el de celda hexagonal. La comparación con los resultados de [6] da una medida de la validez de los aquí presentados. En el error absoluto se aprecia que los resultados en ambos trabajos son muy próximos, aunque tal proximidad disminuye a medida que se aumenta la concentración, por lo que se recomienda compensar la pérdida de precisión mediante el uso de un espaciado  $h$  más pequeño en estos casos.

Este trabajo forma parte del proyecto de Tesis de Grado del autor, en el que se propone, por ejemplo, ampliar el estudio al caso en que  $\Gamma_2$  sea una súper circunferencia, es decir esté dada por la ecuación  $|x|^p + |y|^p = r^p$  con  $p, r > 0$ .

## Anexo

### 4.1 Programa en FreeFem++

Se muestra completamente el programa utilizado para el cálculo en FreeFem++

```
// Definición de parámetros.
int k = 2; // caso cuadrado
// int k = 3; // caso hexágono
real h = 0.2;
real phi0 = pi/4; // caso cuadrado
// real phi0 = 0; // caso hexágono
real a = sqrt(2.)/2;
real Acp = a^2 *
    cos(pi/(2*k))*sin(pi/(2*k));
real r = 0.4;

macro Pk() P1// Definir el tipo de
    // elemento finito

macro X() 0 // Coordenada 'x'
macro Y() 1 // Coordenada 'y'
macro VECT() real[int] // Vector
// Array de Vectores
macro VECTARR() real[int,int] //

// Generación de los vértices del
// polígono formado por  $\Gamma_1$ .
func VECTARR genVertexes(real a,
    real phi0, int k){
    VECTARR PP(2*k,2);
    for(int i = 0; i < 2*k; i++){
        PP(i,X) = a * cos(phi0 + (i * pi)/k);
        PP(i,Y) = a * sin(phi0 + (i * pi)/k);
    }
}
```

```
}
return PP;
}
// Norma de un vector
func real norm(VECT A){
    return sqrt(A' * A);
}
// Vertices de  $\Gamma_1$ 
VECTARR PP =
    genVertexes(a, phi0, k);

// Parametrizaciones  $\varphi_i$  de los
// segmentos de  $\Gamma_1$ .
func VECT phi(int i, real alph){
    VECT Res =
        (1-alph) * PP(i % (2 * k), :) +
        alph * PP((i+1) % (2 * k), :);
    return Res;
}

// Definición  $\Gamma_1$ 
border G1(t=0,1;i){
    VECT p = phi(i,t);
    x=p(X); y=p(Y);
    label=i;
}

macro LABG2() 1000// Label  $\Gamma_2$ 
// Definición  $\Gamma_2$ 
border G2(t=0,2*pi){
    x=r * cos(t); y=r * sin(t);
    label=LABG2;
}

// Esta es la forma de definir un array
// de fronteras en FreeFem.
int[int] nn(2*k);
// La fórmula indica la longitud del
// segmento entre h
nn=2.*a*sin(pi/(2.*k))/h;
// Construcción de la triangulación de
// Omega
mesh Th = buildmesh(G1(nn)
    + G2(-2.*pi * r / h));
plot(Th, wait=1);

// Razón entre los segmentos  $P_iP$  y
//  $P_iP_{i+1}$ 
func real ratio(int i, real x, real y){
    VECT p = [x,y], A = p-PP(i%(2*k),:),
    B=PP((i+1)%(2*k),:)-PP(i%(2*k),:);
    return norm(A)/norm(B);
}

// Espacio de EF
fespace Vh(Th, Pk,
    // Condiciones de periodicidad
```



```

periodic=[
  [0, ratio(0, x, y)],
  [0+k, 1-ratio(0+k, x, y)]
, [1, ratio(1, x, y)],
  [1+k, 1-ratio(1+k, x, y)]
// Descomentar para k=3,
// Comentar para k=2
//, [2, ratio(2, x, y)],
// [2+k, 1-ratio(2+k, x, y)]
];

Vh u,v;

solve Poisson(u,v,solver=CG) =
  int2d(Th) (dx(u) * dx(v)
    + dy(u) * dy(v))
- int2d(Th) (v)
+on(LABG2,u=0);

plot(u,fill=1,wait=1);

real kAst = int2d(Th) (u) /Acp;

cout << "k*=" + kAst << endl;

```

### Agradecimientos

Se agradece al profesor Sébastien Martin de la Universidad Descartes de París por el curso impartido sobre el Método de Elementos Finitos y por la asistencia prestada en la comprensión del lenguaje FreeFem++. A los Dres. Ángela Mireya León Mesías y José Alejandro Mesejo Chiong, ambos de la Facultad de Matemática y Computación de la Universidad de La Habana, por el apoyo brindado a este trabajo sobre todo en lo relacionado con el MEF. Por último, pero no menos importante, al profesor Dr. Julián Bravo Castillero de la Facultad de

Matemática y Computación de la Universidad de La Habana, por la propuesta del tema y por su constante apoyo e interés en el desarrollo del trabajo.

### Referencias

- [1] Boyer, F., Martin, S., 2016. *An introduction to the finite element method*.
- [2] Apostol, T.M. 1969. *CALCULUS VOLUME II. Multi Variable Calculus and Linear Algebra, With Applications to Differential Equations and Probability. Second Edition*. John Wiley & Sons. New York, London, Sydney, Toronto.
- [3] Bensoussan, A., Lions, J.L., Papanicolaou, G., 1978. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland, Amsterdam.
- [4] Sánchez-Palencia, E., 1980. *Non Homogeneous Media and Vibration Theory*. Lecture Notes in Physics, vol. 127. Springer, Berlin.
- [5] Bakhvalov, N.S., Panasenko, G.P., 1989. *Homogenization Averaging Processes in Periodic Media*. Kluwer, Dordrecht.
- [6] Lisboa, E.F.A. 2000. *Un Método Multi-escala para el Cálculo de Permeabilidad Longitudinal de Medios Porosos Fibrosos Aleatorios*. Rio de Janeiro.
- [7] Larson, M.G.; Bengson, F. 2013. *The Finite Element Method: Theory, Implementation and Applications*. Springer.
- [8] Quarteroni, A. 2009. *Numerical Methods for Differential Methods*. Springer.
- [9] George, P.L. 1996. *Automatic triangulation*. Wiley & Sons.