

Propiedades efectivas de materiales elásticos con fibras multicapas

Effective properties for multi-phase fibrous elastic composites.

Yanely Zaldivar Gerpe (yanely@matcom.uh.cu), Raúl Guinovart Díaz (guino@matcom.uh.cu)
Yoanh Espinosa Almeyda (yealmeya@matcom.uh.cu), Julián Bravo Castellero (jbravo@matcom.uh.cu)
Reinaldo Rodríguez Ramos (reinaldo@matcom.uh.cu)
Universidad de La Habana, Cuba

Resumen

Las expresiones analíticas de las propiedades axiales para un compuesto donde los refuerzos son fibras multilaminadas han sido obtenidas usando el método de homogeneización asintótica (MHA) y han sido alineadas determinando paralelogramos que constituyen las celdas de periodicidad. Este trabajo es una extensión de trabajos previos que han estudiado compuestos bifásicos con celda de periodicidad cuadradas o hexagonales, bajo condiciones de perfecta adhesión entre las fases y las constituyentes exhiben propiedades elásticas transversalmente isotrópicas. Se resolvieron dos problemas sobre la celda periódica usando funciones armónicas doblemente periódicas para obtener dichas propiedades efectivas.

Palabras clave: Método de homogeneización asintótica, coeficientes efectivos, compuesto fibroso, doble periodicidad.

Abstract

Effective longitudinal shear moduli closed-form analytical expressions of n -phase fibrous periodic composites are obtained by means of the asymptotic homogenization method (AHM). The periodic cell is a parallelogram array of laminated circular cylinders. This work is an extension of previous reported results, where two-phase composite with perfect contact were considered and the constituents exhibit transversely isotropic properties. Two problems over the periodic cell are solved using doubly periodic harmonic functions in order to obtain the effective properties.

Key Words: Asymptotic Homogenization Method, effective properties, fibrous composites, doubly periodic.

1. Introducción

Un material compuesto es la combinación de dos o más materiales con propiedades físicas diferentes, que se encuentran indisolublemente unidos formando un nuevo material. Uno de ellos, actúa como matriz o aglutinante y los restantes constituyen las inclusiones o refuerzos. Las propiedades físicas de este compuesto (propiedades efectivas) dependerán de las propiedades, de los volúmenes de sus constituyentes y de la estructura geométrica de los mismos.

El estudio de los materiales compuestos fibrosos ha recibido mucha atención en la literatura científica, motivado fundamentalmente por el amplio campo de aplicaciones de los mismos, por ejemplo: en la industria aeronáutica para la construcción de las estructuras de las naves, en la industria médica son utilizados en dispositivos para el procesamiento de imágenes médicas, así como en muchos otros avances tecnológicos [1].

La ventaja de estos es que se diseñan de manera que exhiban las propiedades necesarias para determinada aplicación, incluso en ocasiones, propiedades que ninguno de sus componentes individualmente presenta [4].

La utilización de métodos matemáticos para la determinación de las propiedades globales o efectivas de los materiales com-

puestos es de gran importancia, pues permiten determinar algoritmos con los cuales se predicen estas de manera teórica.

Las ecuaciones diferenciales de los problemas de contorno, que modelan las condiciones de equilibrio de los medios heterogéneos que estudiamos en el presente trabajo, poseen coeficientes periódicos rápidamente oscilantes. El tratamiento numérico de tales problemas requiere de modelos computacionales que consumen mucho tiempo de cómputo. Una variante de solución para la estimación de las propiedades efectivas nos lo brindan los métodos de homogeneización. Mediante el uso de este método matemático el costo computacional es mucho más eficiente y rápido.

El MHA [2] [7] es una rigurosa teoría matemática para la investigación de las propiedades globales de medios periódicos y rápidamente oscilantes

El objetivo de este trabajo es determinar las expresiones analíticas para los coeficientes efectivos longitudinales de un compuesto elástico con fibras cilíndricas multicapas en el que la celda es paralelogramo y las condiciones de contacto entre las fibras y la matriz es perfecta. Por tal motivo el trabajo se organiza de la siguiente manera: se realiza el planteamiento del problema de contorno en estudio y se explican las ideas fundamentales del MHA a partir de las ecuaciones de la teoría de elasticidad. Seguidamente se plantean y resuelven los problemas sobre la celda periódica y se determinan las expresiones analíticas de los coeficientes efectivos. Los resultados se comparan con otros modelos reportados en la literatura.

2. Desarrollo

2.1. Planteamiento y solución del problema

Consideremos un material compuesto fibroso elástico donde los refuerzos son fibras unidireccionales formadas por un núcleo central y $n-2$ láminas cilíndricas concéntricas. Las fibras laminadas están distribuidas periódicamente en la matriz. Supongamos que existe una adhesión perfecta entre cada medio y que las constituyentes son materiales homogéneos e isotrópicos. Los ejes de simetría de las fibras laminadas son paralelos al eje x_3 . La sección transversal de la celda de periodicidad

constituye un paralelogramo cuyos períodos principales ω_1, ω_2 son números complejos (figura 1). Denotemos por l el diámetro de la celda periódica y por L el diámetro del compuesto, sea $\varepsilon = l/L$ un parámetro pequeño que caracteriza la densidad de las inclusiones en la matriz. Siendo $x = (x_1, x_2, x_3)$ la variable global, $y = (x_1, x_2)/\varepsilon$ la variable definida sobre la celda periódica. Las ecuaciones constitutivas de Navier para la elasticidad lineal que gobiernan esta situación están expresadas por la Ley de Hooke (1)

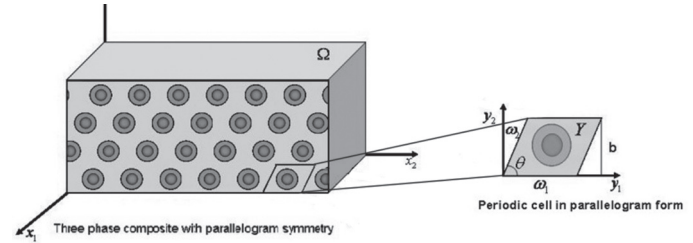


Fig. 1 Compuesto fibroso y sección transversal de la celda de periodicidad

$$S_{i,j} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (1)$$

siendo C_{ijkl} el tensor de rigidez, S_{ij} el tensor de tensiones y e_{kl} el tensor de deformación. Por otro lado se conoce que la relación entre el campo eléctrico y los desplazamientos eléctricos se expresa como:

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad (2)$$

$$\text{donde } u_{k,l} = \frac{\partial u_k}{\partial x_l}.$$

Sustituyendo (2) en (1) y considerando el caso estático, en el cual la ecuación de equilibrio satisface que $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$ siendo f_i funciones suficientemente suaves, que representan las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes periódicos rápidamente oscilantes:

$$(C_{ijkl}(y) u_{k,l})_{,j} + f_i(x) = 0 \text{ en } \quad (3)$$

expresión que constituye el sistema de ecuaciones fundamentales de la Teoría de la Elasticidad Lineal, donde u es la solución del problema de contorno heterogéneo y Ω la región sobre la que está definido el sistema de ecuaciones. Un problema de contorno asociado a la Teoría de la Elasticidad consiste en resolver (3) sujeto a las condiciones de Dirichlet sobre la frontera

$$u_i|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4)$$

Considerando la simetría y la positividad del tensor elástico sobre la celda de periodicidad Y :

$$C_{ijkl}(y) = C_{jikl}(y) = C_{klij}(y) = C_{lkij}(y) \quad \forall y \in Y,$$

$$\exists n > 0 \quad \forall y \in Y \quad C_{ijkl}(y) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \geq n |\varepsilon|^2,$$

se concluye que el problema planteado en (3)-(4) tiene solución y es única [2] [9].

La solución de este sistema se obtiene haciendo uso del Método de Homogeneización Asintótica (MHA) [2].

2.2 Método de Homogeneización Asintótica

La solución del problema (3) se halla mediante el siguiente desarrollo asintótico a doble escala:

$$u(x, y) = u^{(0)}(x, y) + \varepsilon^1 u^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 u^{(2)}(x, y) + \dots \quad (5)$$

donde las funciones $u^{(i)}(x, y)$ son 1-periódicas con relación a la variable rápida y , y continuamente diferenciables en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$.

De manera análoga a lo reportado en [8], utilizando desarrollos asintóticos a doble escala, obtenemos el problema homogeneizado:

$$C_{ijpq}^* \frac{\partial^2 u_p^{(0)}(x)}{\partial x_q \partial x_i} \quad (6)$$

donde los coeficientes efectivos obedecen a la fórmula:

$$C_{ijpq}^* = \langle C_{ijpq}(y) + C_{ijkl}(y) N_{k,l}(y) \rangle, \quad (7)$$

y las funciones locales \tilde{N} representan el vector de desplazamiento mecánico y son soluciones de los problemas locales L_{pq} definidos por:

$$(C_{ijpq}(y) + C_{ijkl}(y) N_{k,l}(y))_{,j} = 0, \text{ sobre } Y \setminus \Gamma \quad (8)$$

$$\langle {}^{pq}N_k \rangle = 0 \quad (9)$$

$$[[pqN_k^{(s)}]] = 10 \quad (10)$$

$$[[(C_{ijpq}^{(s)}(y) + C_{ijkl}^{(s)}(y) N_{k,l}^{(s)}(y))] n_j] = 0 \quad (11)$$

La notación $[[f^{(s)}]] = f^{(s)} - f^{(s+1)}$ significa el salto de la función en el contorno Γ_s , indicando el supraíndice la fase en cuestión y n_j es la componente del vector en la dirección normal a Γ_s y $s = 1, n - 1$. Es importante destacar que el procedimiento de homogeneización ha sido descrito para cuando los coeficientes del sistema son infinitamente diferenciables, pero puede ser extendido al caso discontinuo [2] y la única diferencia es que se deben añadir condiciones de contacto sobre las intercaras entre las componentes.

2.3 Solución de los problemas L_{pq}

Los problemas locales se descomponen en planos y antiplanos según el estado de deformación considerado. La solución de estos problemas es lo que permite determinar las componentes elásticas del tensor de rigidez efectivo.

Consideremos un problema de deformación puramente longitudinal en los planos x_1x_3 y x_2x_3 bajo las tensiones tangenciales σ_{13} y σ_{23} , ambas diferentes de cero. Las tensiones normales σ_{11} , σ_{22} y σ_{33} así como la tensión tangencial σ_{12} son asumidas iguales a cero. Este estado de tensión-deformación corresponde a la torsión del compuesto alrededor del eje x_3 .

Nuestro estudio se centra en los problemas antiplanos L_{13} , L_{23} , los cuales se resolverán simultáneamente por su similitud y se denotarán por $L_{\alpha 3}$.

El problema local $L_{\alpha 3}$ para cada una de las constituyentes del compuesto se plantea de la siguiente manera:

$$\nabla^2 {}_{\alpha 3} N_3^{(i)} = 0 \quad i = l, n \quad (12)$$

Sujeto a las condiciones de continuidad de los desplazamientos mecánicos y condiciones de salto de las pseudo-tensiones:

$${}_{\alpha 3} N_3^{(s)}|_{\Gamma_s} = {}_{\alpha 3} N_3^{(s+1)}|_{\Gamma_s} \quad (13)$$

$$[[(C_{ijkl\alpha 3}^{(s)} N_{k,l}^{(s)}) n_j]] = - [[C_{ij\alpha 3}^{(s)}]] n_j \quad (14)$$

$$\langle {}_{\alpha 3} N_3^{(s)} \rangle = 0 \quad (15)$$

Teniendo en cuenta el problema planteado, la su solución se puede encontrar representando las funciones armónicas y doblemente periódicas N_3 , mediante los siguientes desarrollos en series de Laurent con coeficientes complejos indeterminados:

$$N_3^{(i)} = \text{Re}[\phi_i(z)] \quad (16)$$

considerando:

$$\phi_1(z) = \frac{z}{R_1} a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} {}^* a_p \left(\frac{R_1}{z} \right)^p + \sum_{p=1}^{\infty} {}^* \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{kp} \left(\frac{z}{R_1} \right)^p \quad (17)$$

$$\phi_r(z) = \sum_{p=1}^{\infty} {}^* b_p^{(r)} \left(\frac{R_{r-1}}{z} \right)^p + \sum_{p=1}^{\infty} {}^* b_p^{(r)} \left(\frac{z}{R_r} \right)^p \quad r = \overline{2, n-1} \quad (18)$$

$$\phi_n(z) = \sum_{p=1}^{\infty} {}^* c_p \left(\frac{z}{R_{n-1}} \right)^p \quad (19)$$

donde:

$$\eta_{kp} = \begin{cases} C_{-k}^p R^{k+p} S_{k+p} & \text{para } k+p \geq 4 \\ 0 & \text{para } k+p = 1 \end{cases}$$

$$C_{-k}^p = (-1)^p \frac{(p+k-1)!}{p!(k-1)!},$$

$$Sp + k = \sum_{\substack{n, m \\ n = m \neq 0}} \beta_{mn}^{-(p+k)}, \quad S_{2l+1} \text{ y } S_2 = 0 \quad \forall l \in \mathbb{Z}^+$$

Siendo $\beta_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2$ con $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = Re^{i\theta}$ los periodos principales de la celda de periodicidad. La notación $\sum_{k=1}^{\infty}$ significa que los subíndices son solo números enteros impares.

Sustituyendo (12) en (9)-(10) se obtienen los siguientes sistemas de ecuaciones con coeficientes indeterminados a_k y $s = 2, n-2$:

$$a_0 \delta_{1p} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{kp} + \overline{a_p} - b_p^{(2)} \left(\frac{R_1}{R_2} \right) - \overline{b_p^{(2)}} = 0 \quad (20)$$

$$b_p^{(s)} + \overline{b_p^{(s)}} \left(\frac{R_{s-1}}{R_s} \right)^p - \overline{b_p^{(s+1)}} \left(\frac{R_s}{R_{s+1}} \right)^p = 0 \quad (21)$$

$$b_p^{(n-1)} + \overline{b_p^{(n-1)}} \left(\frac{R_{n-2}}{R_{n-1}} \right)^p - c_p = 0 \quad (22)$$

$$\left[a_0 \delta_{1p} - \overline{a_p} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{kp} - k_1 \left(b_p^{(2)} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^p - \overline{b_p^{(2)}} \right) \right] = (k_1 - 1) [\delta_{1\alpha} - i\delta_{2\alpha}] \delta_{1p} R_1 \quad (23)$$

$$\left[k_{s-1} \left[b_p^{(s)} - \overline{b_p^{(s)}} \left(\frac{R_{s-1}}{R_s} \right)^p \right] - k_s \left[b_p^{(s+1)} \left(\frac{R_s}{R_{s+1}} \right)^p - \overline{b_p^{(s+1)}} \right] \right] = (k_2 - k_{s-1}) [\delta_{1\alpha} - i\delta_{2\alpha}] R_s \delta_{1p} \quad (24)$$

$$\left[kn - 2 \left[b_p^{(n-1)} - \overline{b_p^{(n-1)}} \left(\frac{R_{n-2}}{R_{n-1}} \right)^p \right] - k_{n-1} c_p \right] = (kn - 1 - kn - 2) [\delta_{1\alpha} - i\delta_{2\alpha}] R_{n-1} \delta_{1p} \quad (25)$$

2.4 Coeficientes efectivos

Las propiedades efectivas longitudinales del compuesto (7) se pueden expresar teniendo en cuenta el operador promediación:

$$\langle * \rangle = \frac{1}{V} \iint_S (*) dx_1 dx_2,$$

siendo V la medida de la celda de periodicidad y $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$, donde S_i es la región formada por una celda en forma de paralelogramo Σ con un hueco circular cuyo radio es R_i con contorno Γ_i y Σ que cumple $\Sigma = \bigcup_{i=1}^n \Sigma_i$, S_s son los anillos circulares limitados por los contornos Γ_{s-1} y Γ_s con radio R_s y S_n es el círculo limitado por Γ_{n-1} con radio R_{n-1} como se muestra en la figura 2 para el caso de 4 fases.

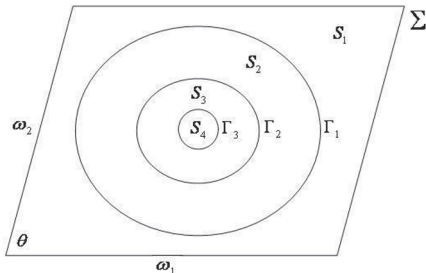


Fig. 2 Sección transversal de la celda periódica.

Entonces aplicando el Teorema de Green para regiones múltiplemente conexas [10] y haciendo $p_i = C_{1313}^{(i)}$. Las expresiones de los coeficientes efectivos resultan:

$$\begin{aligned} C_{1313}^* - iC_{1313}^* &= \\ &= \langle p \rangle + \frac{(p_2 - p_1) R_1 \pi}{V} \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{k1} + \overline{a_1} \right] + \\ &+ \sum_{i=3}^{n-1} \frac{(p_i - p_{i-1}) R_{i-1} \pi}{V} \left[b_1^{(i-1)} + \overline{b_1^{(i-1)}} \left(\frac{R_{i-2}}{R_{i-1}} \right) \right] + \\ &+ \frac{(p_n - p_{n-1}) R_{n-1} \pi}{V} c_1 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} C_{1313}^* - iC_{2323}^* &= \\ &= -i \langle p \rangle + \frac{(p_2 - p_1) R_1 \pi}{V} \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{k1} + \overline{a_1} \right] + \\ &+ \sum_{i=3}^{n-1} \frac{(p_i - p_{i-1}) R_{i-1} \pi}{V} \left[b_1^{(i-1)} + \overline{b_1^{(i-1)}} \left(\frac{R_{i-2}}{R_{i-1}} \right) \right] + \\ &+ \frac{(p_n - p_{n-1}) R_{n-1} \pi}{V} c_1 \end{aligned} \quad (27)$$

Las expresiones (26) y (27) constituyen las expresiones analíticas buscadas para los coeficientes efectivos longitudinales del compuesto. Para determinar los mismos es necesario resolver los sistemas de ecuaciones algebraicas (20)-(25) y hallar las constantes $a_1, c_1, b_1^{(i-1)}$ y $\overline{b_1^{(i-1)}}$. Por la complejidad de los cálculos esto se resolverá computacionalmente y aquí solo se mostrarán los resultados analíticos-numéricos obtenidos para un compuesto de 4 fases.

2.5 Expresiones analíticas de los sistemas

Considerando los sistemas (20)-(25) para $n = 4$ se determinan las expresiones de $b_p^{(3)}$ y $\overline{b_p^{(3)}}$ resolviendo (22) y (25), se sustituyen en (21) y (24) se obtienen $b_p^{(2)}$ y $\overline{b_p^{(2)}}$ se sustituyen en (20) y (23) y cada una de estas da una expresión de c_p las cuales se igualan y agrupando convenientemente se tiene:

$$\overline{ap} - \chi p \left\{ a_0 \delta_{1p} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{kp} \right\} = R_1 E [\delta_{1\alpha} - i\delta_{2\alpha}] \quad (28)$$

donde

$$\begin{aligned} \chi_p &= \frac{(A_{2p} - k_1 A_{1p})}{(A_{2p} + k_1 A_{1p})} \\ A_{2p} &= \frac{\left[(k_1 - k_2) (k_2 - k_3) R_3^{2p} R_1^{2p} + (k_1 + k_2) (k_2 + k_3) R_1^{2p} R_2^{2p} \right] + (k_1 - k_2) (k_2 - k_3) R_2^{2p} R_3^{2p} + (k_1 - k_2) (k_2 + k_3) R_3^{4p}}{4k_2 R_1^p R_2^{2p} R_3^p} \\ A_{1p} &= \frac{\left[(k_1 - k_2) (k_2 - k_3) R_3^{2p} R_1^{2p} + (k_1 + k_2) (k_2 + k_3) R_1^{2p} R_2^{2p} \right] - (k_1 + k_2) (k_2 - k_3) R_2^{2p} R_3^{2p} - (k_1 - k_2) (k_2 + k_3) R_2^{4p}}{4k_2 R_1^p R_2^{2p} R_3^p} \end{aligned}$$

$$E = \frac{\begin{pmatrix} 2k_2(1-k_1)(k_1+k_3)V_2V_4 + \\ + 2k_1[(3-k_2)k_2 + (1-3k_2)k_3]V_3V_4 + \\ + (1-k_1)(k_1+k_2)(k_2+k_3)V_2V_3 + \\ + 2k_1(1-k_2)(k_2+k_3)V_3V_3 + 4k_1k_2(1-k_3)V_4V_4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2k_2(1+k_1)(k_1+k_3)V_2V_4 + \\ + 2k_1((3+k_2)k_2 + (3k_2+1)k_3)V_3V_4 + \\ + (1+k_1)(k_1+k_2)(k_2+k_3)V_2V_3 + \\ + 2k_1(1+k_2)(k_2+k_3)V_3V_3 + 4k_1k_2(1+k_3)V_4V_4 \end{pmatrix}}$$

Si $p = 1$ y $\alpha = 1, 2$ de (28) se tiene:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta k_1 = \frac{1}{\chi_1} (\overline{a_1} + (\delta_{2\alpha} - \delta_{1\alpha}) R_1 E)$$

Estas son las expresiones analíticas de los sistemas correspondientes a los problemas locales L_{13} y L_{23} respectivamente, cuya solución nos permite determinar los coeficientes efectivos asociados a cada problema local.

Luego sustituyendo en las expresiones (26) y (27) se tiene:

$$\begin{aligned} C_{1313}^* - iC_{2323}^* &= \langle p \rangle + (p_2 - p_1) \frac{R_1 \pi}{\chi_1 V} ((1 + \chi_1) \overline{a_1} - R_1 E) + \\ &+ (p_3 - p_2) \frac{R_2 \pi}{V} \left(b_1^{(2)} + \overline{b_1^{(2)}} \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \right) + (p_4 - p_3) \frac{R_3 \pi}{V} c_1, \\ C_{1313}^* - iC_{2323}^* &= -i \langle p \rangle + (p_2 - p_1) \frac{R_1 \pi}{\chi_1 V} ((1 + \chi_1) \overline{a_1} + iR_1 E) + \\ &+ (p_3 - p_2) \frac{R_2 \pi}{V} \left(b_1^{(2)} + \overline{b_1^{(2)}} \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \right) + (p_4 - p_3) \frac{R_3 \pi}{V} c_1. \end{aligned}$$

3. Resultados y discusión

Las expresiones analíticas obtenidas para los coeficientes efectivos (26)-(27), reproducen como caso particular las expresiones análogas para materiales elásticos bifásicos, trifásicos y de 4 fases. A partir de dichas expresiones (26)-(27), se ha elaborado un programa en MATLAB, donde se pueden verificar que los resultados alcanzados satisfacen los casos límites reportados en la literatura, es decir, los casos bifásicos, trifásicos y de 4 fases, con celdas cuadradas, hexagonales y en forma de paralelogramo.

3.1 Resultados numéricos

1. Caso donde la celda es un cuadrado de periodos $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = i$, formado por dos fases. La tabla 1 reproduce los cálculos reportados [7]. Como parámetros de entrada se consideró $C_{1313}^{(1)} = 1$, $C_{1313}^{(2)} = C_{1313}^{(3)} = 6$, y como concentración de la

fase intermedia se tomó $V_2 = 10^{-8}$. Se observa que las propiedades efectivas se corresponden con un material isotrópico, es decir, $C_{1313} = C_{2323}$ y $C_{2313} = C_{1323} = 0$.

Tabla 1. Material bifásico elástico con celda cuadrada

Ángulo de 90°		$V_2 = 10^{-8}$		
V_f	C1313	C2313	C1323	C2323
0.4	1.80451	0	0	1.80451
0.55	2.32562	0	0	2.32562
0.7	3.17312	0	0	3.17312
0.75	3.61967	0	0	3.61967
0.78	3.97709	0	0	3.97709
0.785	4.04785	0	0	4.04785

2. Caso donde la celda es de periodos $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = e^{i\theta}$ el compuesto está formado de fibras vacías, considerando diferentes ángulos para las celdas, $\theta = 60^\circ$ y $\theta = 90^\circ$. La tabla siguiente reproduce los mismos cálculos reportados en [6] para diferentes porcentajes de porosidad.

Como parámetros de entrada se considera que la matriz tiene un coeficiente elástico $C_{1313}^{(1)} = 30 \text{ GPa}$ para la fibra y las láminas intermedias los coeficientes elásticos son $C_{1313}^{(2)} = C_{1313}^{(3)} = C_{1313}^{(4)} = 10^{-8}$, los volúmenes de las fases intermedias se tomaron $V_2 = V_3 = 10^{-8}$, por lo tanto la fibra porosa tiene una concentración próxima al volumen de la fibra central V_4 .

Tabla 2. Material formado de fibras vacías para diferentes porcentajes de porosidad

V_f	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
60°	24.5455	20	16.1533	12.8534	9.98427	7.45029
90°	24.5453	19.9959	16.1274	12.7605	9.73963	6.90954

3. La figura 3 muestra el comportamiento de la propiedad efectiva $C_{1313}^*/C_{1313}^{(1)}$ con la variación del volumen de fracción del núcleo para dos compuestos fibrosos que poseen una interfase entre la matriz y el refuerzo. Los materiales considerados son de tres fases (fibra/interfase/matriz) y fueron modelados usando un esquema autoconsistente generalizado (GSCS) reportado en el trabajo de Dasgupta y Bhandarkar [3].

Para validar nuestro modelo, hemos usado el esquema de cuatro fases desarrollado. Se ha considerado que las propiedades de las dos láminas intermedias son iguales, es decir $C_{1313}^{(2)} = C_{1313}^{(3)} = 14.34 \text{ GPa}$ y que la suma de los volúmenes de fracción de cada lámina intermedia es igual al volumen de la interfase del medio trifásico reportado en Dasgupta y Bhandarkar [3].

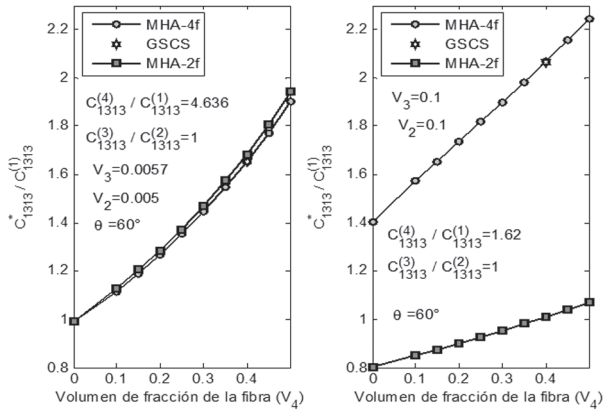


Fig. 1 Comportamiento de la mencionada propiedad efectiva

4. Un debilitamiento de las propiedades de las láminas intermedias debilita las propiedades efectivas con el incremento del volumen de fibra. Esto se observa en la figura 4, donde del ejemplo anterior, solo se ha cambiado las propiedades de las láminas intermedias haciéndolas más débiles, es decir $C_{1313}^{(2)} = C_{1313}^{(3)} = 0.14 \text{ GPa}$.

5. En la Figura 3 se muestran las propiedades efectivas en función de las propiedades de una de las láminas intermedias ($C_{1313}^{(3)}/C_{1313}^{(1)}$), para la otra lámina $C_{1313}^{(2)} = 14.34 \text{ GPa}$. Para valores bajos del contraste entre la $C_{1313}^{(3)}/C_{1313}^{(1)}$ el efecto de las láminas es muy bajo y se cumple $C_{1313}^* \approx C_{2323}^* \approx C_{1313}^{(1)}$,

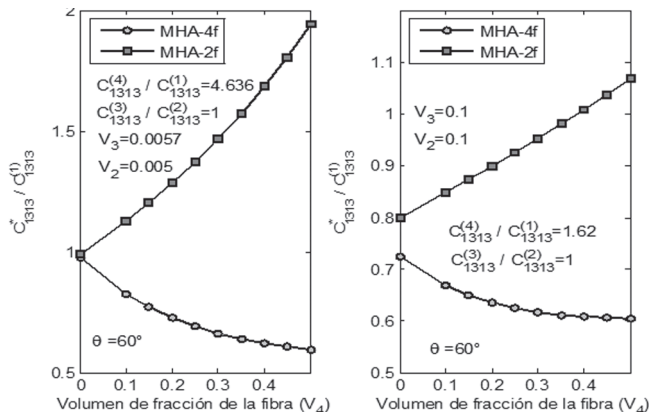


Fig. 4 Solo se cambiaron las propiedades de las láminas intermedias.

en cambio cuando este contraste aumenta, el compuesto es fuertemente anisótropo, es decir las propiedades axiales se diferencian mucho entre sí, en este caso $C_{1313}^{(1)} < C_{1313}^* < C_{2323}^*$, $C_{2313}^* < 0$.

6. En la figura 6 se muestran las propiedades efectivas en función de las propiedades de una de las láminas intermedias ($C_{1313}^{(3)}/C_{1313}^{(1)}$), y la otra lámina es más débil $C_{1313}^{(2)} = 0.1434 \text{ GPa}$ que lo considerado en el ejemplo anterior. Tienen lugar ahora la situación recíproca, para valores bajos del contraste entre la $C_{1313}^{(3)}/C_{1313}^{(1)}$ el efecto de las láminas provoca que el compuesto es anisótropo y se cumple $C_{1313}^{(1)} < C_{1313}^* < C_{2323}^*$, en cambio cuando este contraste aumenta se obtiene $C_{1313}^* \approx C_{2323}^* \approx C_{1313}^{(1)}$.

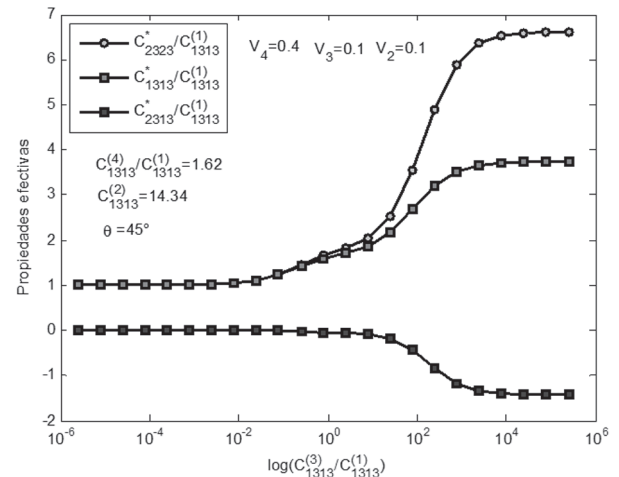


Fig. 5 Propiedades efectivas en función de una de las láminas intermedias.

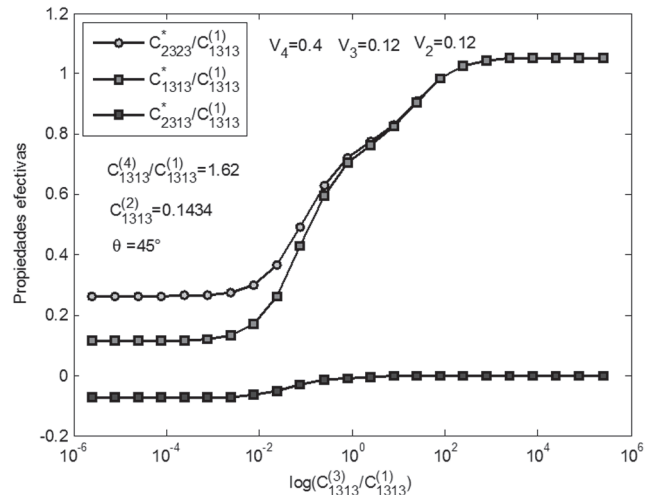


Fig. 6 Otro caso de una lámina intermedia.

Referencias bibliográficas

- [1] ANDRIANOV, IGOR V., *et al.* (2005). Effective properties and micro-mechanical response of filamentary composite wires under longitudinal shear, *Eur. J. Mech. A-Solids* 24, pp. 195-206.
- [2] BAKHVALOV, N.S. AND PANASENKO, G.P. (1989). *Homogenization Averaging Processes in Periodic Media*. Kluwer, Dordrecht.
- [3] DASGUPTA, A., BHANDARKAR, S.M. (1992). A generalized selfconsistent Mori–Tanaka scheme for fiber-composites with multiple interphases, *Mech. Mater.*, pp.14, 67–82.
- [4] ESPINOSA, Y. (2010). Obtención de los Coeficientes Efectivos para materiales compuestos fibrosos magneto electro elásticos con contacto imperfecto. Problema antiplano. Facultad de Matemática, Universidad de La Habana, Tesis Maestría.
- [5] GUINOVART, R. (2001). Modelación matemática de materiales compuestos fibrosos usando el método de homegeneización asintótica. Facultad de Matemática, Universidad de La Habana, Tesis Doctoral.
- [6] JIANG, C.P, *et al.* (2004). A rigorous analytical method for doubly periodic cylindrical inclusions under longitudinal shear and its application, *Ed. Elsevier*. pp. 225-237.
- [7] POBEDRIA, B.E. (1984). *Mechanics of Composite Materials*. Moscow State University Press, Moscow (in Russian).
- [8] RODRIGUEZ-RAMOS, R., SABINA, F.J., GUINOVART-DIAZ, R. AND BRAVO-CASTILLERO, J. (2001). Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents-I. Elastic and square symmetry. *Mech. Mat.*, 33, pp. 223-235.
- [9] SOKOLNIKOFF. (1956). *Mathematical Theory of Elasticity*. Ed. McGraw-Hill, United States. pp 86-89.
- [10] VALDÉS CASTRO, C. (2006). Análisis de funciones de varias variables. Ed. Félix Varela, Ciudad de La Habana.