

Solución del problema elástico lineal en medios cilíndricos y esféricos transversalmente isotrópicos

Solution of the linear elastic problem for transversely isotropic cylindrical and spherical medias

David Guinovart Sanjuán*, Reinaldo Rodríguez Ramos, Raúl Guinovart Díaz, Julián Bravo Castillero, Ransés Alfonso Rodríguez.

Resumen En este trabajo se estudia el problema elástico lineal en medios transversalmente isotrópicos cuando la geometría de estos es descrita utilizando coordenadas curvilíneas. Se obtienen las expresiones de las ecuaciones de equilibrio de compuestos cilíndricos y esféricos. Cuando el medio es homogéneo, las ecuaciones tienen solución analítica, que puede ser encontrada usando el método de variación de parámetros. Se obtienen las soluciones de los problemas unidireccionales para las coordenadas cilíndricas y esféricas.

Abstract In this work, the linear elastic problem in transversely isotropic medias, which geometry is described using curvilinear coordinates, is studied. The general expression of the equilibrium equations for cylindrical and spherical structures is obtained. When the medium is homogeneous, the problem has an analytic solution, that can be found by the parameters variation method. The solution of the unidirectional problems for the cylindrical and spherical coordinates is obtained.

Palabras Clave

Elasticidad — Ecuaciones diferenciales — Ecuaciones de equilibrio

Departamento de Matemática, Universidad de La Habana, davidgs@matcom.uh.cu, reinaldo@matcom.uh.cu, guino@matcom.uh.cu, jbravo@matcom.uh.cu, ralfonso@matcom.uh.cu

*Autor para Correspondencia

Introducción

La homogeneización es un método matemático útil para resolver problemas con condiciones de frontera en medios de estructura periódica, facilitando además el cálculo de las propiedades efectivas de compuestos con contacto perfecto e imperfecto, [2, 7, 12, 13].

En [4] se ilustran los cambios de anisotropía tras aplicar el Método de Homogeneización Asintótica en compuestos laminados y las aplicaciones de los mismos. Se muestra, además, que para un compuesto laminado de componentes isotrópicas, la estructura homogeneizada exhibe un comportamiento transversalmente isotrópico. Esta clase de simetría se manifiesta en un gran número de compuestos laminados, entre los que se incluyen los tejidos blandos, [14, 15].

En este trabajo se deduce el problema de equilibrio para compuestos cilíndricos y esféricos transversalmente isotrópicos en términos de la base ortormal de vectores tangentes, [2, 3, 6, 9]. Se determinan las expresiones de los vectores tangentes covariantes y los símbolos de Christoffel asociados a dichos sistemas. Se obtiene la expresión general de la solución del problema elástico unidimensional para las coordenadas ci-

lindricas y esféricas. El trabajo presenta una metodología para determinar la solución del problema elástico unidireccional para compuestos en coordenadas curvilíneas.

1. Problema elástico en coordenadas curvilíneas

Consideremos un medio curvilíneo homogéneo Ω en el cual el tensor de tensiones σ y el de deformaciones ε se relacionan por la ley de Hooke

$$\sigma = C : \varepsilon, \quad (1)$$

donde C es el tensor elástico del sólido Ω , el cual es un tensor de cuarto orden y que cumple las siguientes propiedades de simetría

$$C^{ijkl} = C^{jikl} = C^{ijlk} = C^{klij}.$$

En el caso particular donde Ω es transversalmente isotrópico el tensor elástico tiene la expresión

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C^{1122} & C^{2222} & C^{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C^{1133} & C^{2233} & C^{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^{1212} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Para describir la geometría del sólido se toma un sistema de coordenadas curvilíneas (x_1, x_2, x_3) ortogonal, es decir la base de vectores tangentes, $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^3$, asociados al sistema cumple que el tensor métrico tiene la forma

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

donde $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$, [5]. Casos particulares de dichos sistemas de coordenadas ortogonales son las coordenadas cilíndricas (ver Figura 1) y esféricas (ver Figura 2).

Dado que $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^3$ es una base para \mathbb{R}^3 se cumple, entonces, que $\{\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j\}_{i,j=1}^3$ es una base para el espacio $\text{Lin}^3(\mathbb{R}^3)$ de las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^3 en sí mismo, donde “ \otimes ” denota el producto diádico. De esta forma se tiene que el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ se puede expresar respecto a la base $\{\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j\}_{i,j=1}^3$ en la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\sigma}^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j, \quad (4)$$

donde $\hat{\sigma}^{ij}$ son las componentes contravariantes del tensor de tensiones. Con el objetivo de expresar el tensor $\boldsymbol{\sigma}$ respecto a una base ortonormal, se considera la base de vectores $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$ donde

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \mathbf{g}_i.$$

Por tanto, sustituyendo en la ecuación (4) llegamos a la expresión

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} \hat{\sigma}^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (5)$$

de donde se tiene que

$$\sigma^{ij} = \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} \hat{\sigma}^{ij}, \quad (6)$$

son las componentes del tensor $\boldsymbol{\sigma}$ respecto a la base $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}_{i,j=1}^3$.

1.1 Ecuaciones de equilibrio

Estudiemos las ecuaciones de equilibrio de la teoría de elasticidad sobre Ω acotado por su frontera $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, donde $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. El problema elástico tiene la expresión

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0, \quad \text{en } \Omega, \quad (7)$$

y condiciones de frontera dadas por

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0, \quad \text{en } \Sigma_1, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{S}^0 \quad \text{en } \Sigma_2, \quad (8)$$

donde \mathbf{f} denota el vector de las fuerzas que actúan sobre Ω , \mathbf{u}^0 es el desplazamiento en Σ_1 y \mathbf{S}^0 denota la tracción en Σ_2 .

Desarrollando la expresión de la derivada covariante, [4], en el operador “div” de la ecuación (7), respecto a la base covariante $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^3$, se tiene que

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} = \hat{\sigma}^{ij} ||_j \mathbf{g}_i = \left(\hat{\sigma}^{ij} ||_j + \hat{\sigma}^{kj} \Gamma_{kj}^i + \hat{\sigma}^{ik} \Gamma_{kj}^j \right) \mathbf{g}_i. \quad (9)$$

donde $(\cdot) ||_j$ denota la derivada covariante respecto a la variable x_j y Γ_{kj}^j son los símbolos de Christoffel de segundo tipo

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (g_{li,j} + g_{lj,i} - g_{ij,l}), \quad (10)$$

donde $[g^{kl}] = [g_{kl}]^{-1}$.

Sustituyendo la ecuación (6) en (9) se tiene la expresión de $\text{div} \boldsymbol{\sigma}$ respecto a la base $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^3$.

Tomando en cuenta la fórmula de Cauchy que relaciona las deformaciones y los desplazamientos en la forma

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i||j} + u_{j||i}), \quad (11)$$

se obtiene la expresión del tensor de deformación $\boldsymbol{\epsilon}$ en términos de los desplazamientos \mathbf{u} , para la base de vectores ortonormales, $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^3$.

2. Problema elástico en coordenadas cilíndricas

Consideremos un estructura homogénea cilíndrica. La geometría de dicho sólido se describe por las coordenadas cilíndricas (θ, z, r) , Figura 1, [5], [11]. La base covariante de vectores tangentes $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^3$ que describe la geometría de la estructura está dada por las expresiones

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\theta &= (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0), \\ \mathbf{g}_z &= (0, 0, 1), \\ \mathbf{g}_r &= (\cos \theta, \sin \theta, 0). \end{aligned} \quad (12)$$

Por tanto, el tensor métrico asociado al sistema de coordenadas (θ, z, r) tiene la forma

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

y los símbolos de Christoffel de segundo tipo no nulos asociados al tensor métrico pueden ser calculados usando la ecuación (10)

$$\Gamma_{11}^3 = -r, \quad \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{r}. \quad (14)$$

Sustituyendo las ecuaciones (6), (13) y (14) en (9) se obtienen las siguientes expresiones para las componentes de la tensión en coordenadas cilíndricas respecto a la base ortonormal $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$

$$\sigma_{,r}^{r\theta} + \frac{1}{r} \sigma_{,\theta}^{\theta\theta} + \sigma_{,z}^{\theta z} + \frac{2\sigma^{r\theta}}{r} + f^\theta = 0, \quad (15)$$

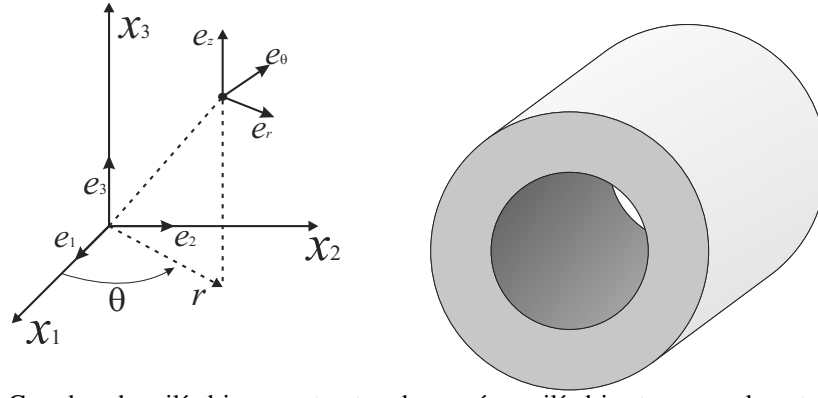


Figura 1. Coordenadas cilíndricas y estructura homogénea cilíndrica transversalmente isotrópica.

$$\sigma_{,r}^{rz} + \frac{1}{r}\sigma_{,\theta}^{r\theta} + \sigma_{,z}^{zz} + \frac{\sigma^{rz}}{z} + f^z = 0, \quad (16)$$

$$\sigma_{,r}^{rr} + \frac{1}{r}\sigma_{,\theta}^{r\theta} + \sigma_{,z}^{rz} + \frac{\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}}{r} + f^r = 0. \quad (17)$$

Las expresiones (15)-(17) coinciden con las reportadas en [8], [11].

Por otro lado el tensor de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ tiene componentes

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}u_{\theta,\theta}, \quad \varepsilon_{zz} = u_{z,z}, \quad (18)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r}u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{1}{r}u_{\theta} \right), \quad (19)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r}u_{r,z} + u_{z,r} \right), \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r}u_{z,\theta} + u_{\theta,z} \right), \quad (20)$$

respecto a la base $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$.

2.1 Solución del problema lineal elástico unidireccional

Consideremos que la variación de las propiedades elásticas de una estructura cilíndrica homogénea, de coordenadas (θ, z, r) , ocurre en la dirección de la coordenada r y el tensor de desplazamientos es de la forma

$$\mathbf{u} = (0, 0, u_r),$$

por tanto se tiene que la componente no nula del tensor de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ para las coordenadas cilíndricas, (18)-(20), tiene la forma

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}. \quad (21)$$

Tomando en cuenta la ley de Hooke (1) se tiene que

$$\sigma^{ij} = C^{ij33}\varepsilon_{rr}. \quad (22)$$

Dado que la estructura es transversalmente isotrópica, (2), las componentes σ^{ij} del tensor de tensiones son distintas de cero para el caso de $i = j$. Por tanto se llega a que

$$\sigma^{\theta\theta} = C^{1133}u_{r,r}, \quad \sigma^{zz} = C^{2233}u_{r,r}, \quad \sigma^{rr} = C^{3333}u_{r,r}. \quad (23)$$

Sustituyendo la ecuación (23) en el problema de equilibrio (15)-(17) se obtiene que

$$C^{3333}u_{r,rr} + \frac{C^{3333} - C^{1133}}{r}u_{r,r} + f^r = 0. \quad (24)$$

Si se considera que $f^r \equiv 0$ el problema (24) toma la forma

$$u_{r,rr} + \frac{B}{r}u_{r,r} = 0, \quad (25)$$

donde $B = (C^{3333} - C^{1133})/C^{3333}$. La ecuación (25) tiene solución

$$u_r = \alpha + \beta r^{1-B}, \quad (26)$$

donde α, β son números reales.

3. Problema elástico en coordenadas esféricas

Consideremos una estructura homogénea esférica. La geometría del medio se describe por el sistema de coordenadas esféricas (θ, ϕ, r) , como se muestra en la Figura 2, [10], [11]. La base covariante de los vectores tangentes $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^3$ asociados a las coordenadas esféricas, tienen la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\theta &= (-r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta \sin \phi, 0), \\ \mathbf{g}_\phi &= (r \cos \theta \cos \phi, r \sin \theta \cos \phi, -r \sin \theta), \\ \mathbf{g}_r &= (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi). \end{aligned} \quad (27)$$

Por tanto, el tensor métrico tiene la forma

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} (r \sin \phi)^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

y los símbolos de Christoffel de segundo tipo, (10), no nulos asociados al tensor métrico tienen la forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^3 &= -r, \quad \Gamma_{11}^3 = -r \sin^2 \phi, \quad \Gamma_{11}^2 = -\sin \phi \cos \phi, \\ \Gamma_{23}^2 &= \Gamma_{32}^2 = 1/r, \quad \Gamma_{12}^1 = \cot \phi. \end{aligned} \quad (29)$$

Se tiene entonces que las componentes de la ecuación de equilibrio respecto a la base ortonormal $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$ para una estructura esférica, son de la forma

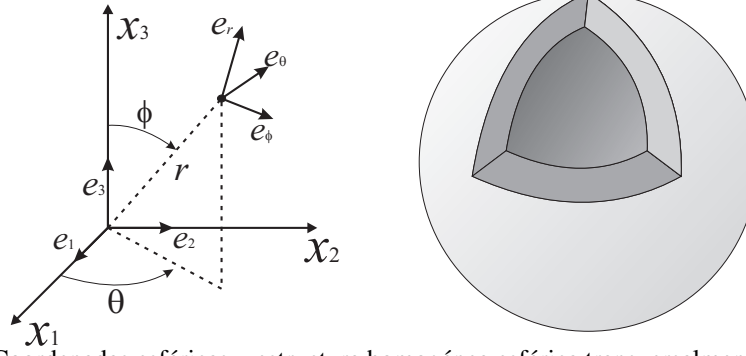


Figura 2. Coordenadas esféricas y estructura homogénea esférica transversalmente isotrópica.

$$\sigma_{,r}^{rr} + \frac{1}{r} \sigma_{,\varphi}^{r\varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \sigma_{,\theta}^{r\theta} + \frac{1}{r} (2\sigma^{rr} - \sigma^{\varphi\varphi} - \sigma^{\theta\theta} + \sigma^{r\varphi} \cot \varphi) + f^r = 0 \quad (30)$$

$$\sigma_{,r}^{r\varphi} + \frac{1}{r} \sigma_{,\varphi}^{\varphi\varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \sigma_{,\theta}^{\varphi\theta} + \frac{1}{r} ([\sigma^{\varphi\varphi} - \sigma^{\theta\theta}] \cot \varphi + 3\sigma^{r\varphi}) + f^{\varphi} = 0 \quad (31)$$

$$\sigma_{,r}^{r\theta} + \frac{1}{r} \sigma_{,\varphi}^{\varphi\theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \sigma_{,\theta}^{\theta\theta} + \frac{1}{r} (2\sigma^{\varphi\theta} \cot \varphi + 3\sigma^{r\theta}) + f^{\theta} = 0 \quad (32)$$

Por otro lado, respecto a la base $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$, el tensor de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ tiene componentes

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} (u_r + u_{\varphi,\varphi}), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r \sin \varphi} (u_r \sin \varphi + u_{\theta,\theta} + u_{\varphi} \cos \varphi), \quad (33)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} u_{r,\varphi} + u_{\varphi,r} - \frac{1}{r} u_{\varphi} \right), \quad \varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{\sin \varphi} u_{\varphi,\theta} + u_{\theta,\varphi} - \cot \varphi u_{\theta} \right), \quad (34)$$

$$\varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \varphi} u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{1}{r} u_{\theta} \right). \quad (35)$$

3.1 Solución del problema lineal elástico unidireccional

Consideremos que la variación de las propiedades de una estructura esférica, de coordenadas (θ, φ, r) , ocurre en la dirección de la coordenada r y el tensor de desplazamiento es de la forma

$$\mathbf{u} = (0, 0, u_r),$$

por tanto se tiene que las componentes no nulas del tensor de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ es

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} u_r, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} u_r. \quad (36)$$

Por la ley de Hooke y considerando que el tensor \mathbf{C} es transversalmente isotrópico, (2), se tiene que las componentes no

nulas de la tensión $\boldsymbol{\sigma}$ tienen la forma

$$\sigma^{\theta\theta} = C^{1111} \frac{1}{r} u_r + C^{1122} \frac{1}{r} u_r + C^{1133} u_{r,r}, \quad (37)$$

$$\sigma^{\varphi\varphi} = C^{1122} \frac{1}{r} u_r + C^{2222} \frac{1}{r} u_r + C^{2233} u_{r,r}, \quad (38)$$

$$\sigma^{rr} = C^{1133} \frac{1}{r} u_r + C^{2233} \frac{1}{r} u_r + C^{3333} u_{r,r}. \quad (39)$$

Para una estructura esférica transversalmente isotrópica, las componentes $\sigma^{\theta\theta}$, $\sigma^{\varphi\varphi}$ coinciden. Si sustituimos las expresiones (37)-(39) en (7) y consideramos que el vector \mathbf{f} es nulo, se tiene la siguiente ecuación diferencial para el desplazamiento u_r

$$u_{r,rr} + \frac{2}{r} u_{r,r} + \frac{2(C^{1133} - C^{1122} - C^{1111})}{r^2 C^{3333}} u_r = 0, \quad (40)$$

la cual tiene como solución la expresión

$$u_r = \alpha r^{z_1} + \beta r^{z_2}, \quad (41)$$

donde

$$z_{1,2} = \left(-1 \pm \sqrt{1 - 8B} \right) / 2$$

con

$$B = (C^{1133} - C^{1122} - C^{1111}) / C^{3333},$$

y α, β son números reales. Para el caso particular de un material isotrópico los valores de $\alpha_{1,2}$ son 1 y -2; este resultado fue reportado en [10].

Colusiones

El objetivo principal del trabajo ha sido presentar una metodología para determinar las expresiones generales de las ecuaciones de equilibrio de la teoría de elasticidad y la solución de las mismas.

Se tomaron como ejemplos estructuras cilíndricas y esféricas. La geometría de dichas estructuras homogéneas es descrita por las coordenadas esféricas y cilíndricas; para las cuales se determinaron los vectores tangentes y el tensor métrico asociado a las mismas.

Los resultados obtenidos tienen gran aplicación en la ingeniería y la biomecánica. En [1, 4, 8] se ilustra la importancia que poseen los medios curvilíneos transversalmente isotrópicos y la necesidad de resolver los problemas de la teoría de elasticidad sobre dichas estructuras.

Los resultados aquí presentados pueden ser usados en la modelación de fenómenos como la aterosclerosis que afecta las vasos sanguíneos y la hipertensión intraocular, una de las principales causas de la pérdida de la visión.

Referencias

- [1] A. Alonso Fúster, D. Guinovart Sanjuán, R. Guinovart Díaz, R. Rodríguez Ramos, and J. Bravo Castillero. Promediación de estructuras regulares. *Revista Ciencias Matemáticas*, (26):58–64, 2012.
- [2] Y. Chen, K. R. Rajagopal, and L. Wheeler. Homogenization and global responses of inhomogeneous spherical nonlinear elastic shells. *Journal of Elasticity*, 82:193–214, 2006.
- [3] H. Ding, W. Chen, and Z. Liangchi. *Solid mechanics and its applications: Elasticity of transversely isotropic materials*. Springer, The Netherlands, 2006.
- [4] D. Guinovart-Sanjuán, R. Rodríguez-Ramos, R. Guinovart-Díaz, J. Bravo-Castillero, F. J. Sabina, J. Merodio, F. Lebon, S. Dummont, and A. Conci. Effective properties of regular elastic laminated shell composite. *Composites Part B*, 87:12–20, 2016.
- [5] M. Itskov. *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers With Applications to Continuum Mechanics*. Springer, Berlin, Germany, 2009.
- [6] X. Y. Li, H. J. Ding, and W. Q. Chen. Elasticity solutions for a transversely isotropic functionally graded circular plate subject to an axisymmetric transverse load qr^k . *International Journal of Solids and structures*, 45:191–210, 2008.
- [7] A. Lutoborski. Homogenization of linear elastic shells. *Journal of Elasticity*, 15:69–87, 1985.
- [8] B. E. Pobedrya. *Mechanics of Composite Materials*. Moscow State University Press, Moscow, Russia., 1984.
- [9] J. N. Reddy. *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*. CRC Press, United States of America, 2004.
- [10] R. Rizzoni and F. Lebon. Imperfect interfaces as asymptotic models of thin curved elastic adhesive interphase. *Mechanics Research Communications*, 51:39–50, 2013.
- [11] M. Sadd. *Elasticity. Theory, applications and numerics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, United States of America, 2005.
- [12] G. C. Saha, A. L. Kalamkarov, and A. V. Georgiades. Effective elastic characteristics of honeycomb sandwich composite shells made of generally orthotropic materials. *Composites Part A*, 38:1533–1546, 2007.
- [13] D. Tsalis, G. Chatzigeorgiou, and N. Charalambakis. Homogenization of structures with generalized periodicity. *Composites Part B*, (43 (2012)):2495–2512, 2012.
- [14] J. A. Weiss, B. N. Maker, and S. Govindjee. Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 135:107–128, 1996.
- [15] Y. J. Yoon, G. Yang, and C. Cowin. Estimation of the effective transversely isotropic elastic constants of a material from known values of the material's orthotropic elastic constants. *Biomechan Model Mechanobiol*, 1:83–93, 2002.