

Algoritmo de corte y continuación con ramificación y acotación para la solución del problema cuadrático con restricciones de caja

Cutting and continuation algorithm with branch and bound for the solution of quadratic problem with box constraints

Ridelio Miranda Pérez^{1*}, Sira Allende Alonso², Boris Pérez Cañedo¹, Gemayqzel Bouza Allende²

Resumen Se presenta un algoritmo híbrido que combina una estrategia global de optimización con un método de ramificación y acotamiento basado en relajación semidefinida positiva para el cálculo de una solución ε -aproximada del problema cuadrático con restricciones de caja. Los experimentos realizados demuestran que el algoritmo propuesto disminuye el número de iteraciones necesarias, el número de nodos explorados y el tiempo de ejecución en comparación con otros métodos de optimización global concebidos para este problema.

Abstract We present a hybrid algorithm that combines a global strategy of optimization with a Branch and Bound method based on semi-defined positive relaxation for the calculation of an ε -approximated solution of bound constrained nonconvex quadratic programs. The realized experiments prove that the proposed algorithm decreases the number of necessary repetitions, the number of explored nodes and time of execution as compared with other standard global optimization methods for this problem.

Palabras Clave

nonconcave quadratic optimization, nonconvex quadratic programming, parametric optimization, branch-and-bound, positive semidefinite relaxation, semidefinite programming

¹ Universidad de Cienfuegos, Cuba, rmiranda@ucf.edu.cu, bperez@ucf.edu.cu

² Universidad de la Habana, Cuba, sira@matcom.uh.cu, gema@matcom.uh.cu

*Autor para Correspondencia

1. Introducción

En este trabajo se estudia el problema de encontrar el mínimo global de una función cuadrática de n -variables acotadas inferior y superiormente, conocido como el problema de programación cuadrática con restricciones de caja.

$$[QPB] \quad f_{\min glob} = \min \{ f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + q^T x \mid x \in B \} \quad (1)$$

$$B = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x \leq e \} \quad (2)$$

donde $Q \in S^n$ denota una matriz simétrica de orden n , el vector $q \in \mathbb{R}^n$ los coeficientes lineales de la función objetivo, y (e) el vector unitario $e = [1; 1; \dots; 1] \in \mathbb{R}^n$. Dado que todo problema [QPB] en cajas más generales ($l \leq x \leq u$) puede reducirse, con un cambio de variables, a un problema equivalente con $0 \leq x \leq 1$, en este trabajo sólo nos referimos al problema estándar en la caja B .

Resulta bien conocido que los problemas cuadráticos con-

vexos (Q semidefinida positiva) tienen solución en tiempo polinomial [14]. El interés de este trabajo, sin embargo, se centra en los problemas [QPB] no convexos (Q indefinida o semidefinida negativa), en cuyo caso se tiene un problema que por su complejidad pertenece a la clase llamada NP-Duro [17].

Para resolver [QPB] se han diseñado numerosos métodos de solución, incluyendo problemas cuadráticos generales no convexos, los cuales según su carácter se clasifican en locales y globales. Entre otros, se cuentan, por ejemplo: método de conjuntos activos de [7], algoritmos de punto interior [11], métodos de planos cortantes y relajación lineal [27, 18, 20] y más recientemente, adaptaciones del método de proyecciones [6, 22, 23], métodos de relajación y acotamiento con relajación convexa [26, 4, 3].

Un enfoque explorado por [15] consiste en la aplicación sucesiva de la estrategia de optimización global definida por los dos pasos que se enuncian a continuación:

Paso-1: Partiendo de una solución factible $x^0 \in B$ calcular un mínimo local x^* de [QPB].

Paso-2: Determinar una nueva solución factible $\bar{x} \in B$ con $f(\bar{x}) \leq f_{\minloc} - \varepsilon$, y regresar al paso-1 tomando $x^0 = \bar{x}$ (donde $f_{\minloc} = f(x^*)$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño).

Como resultado de la aplicación de esta estrategia se genera una sucesión monótona decreciente de mínimos locales $\{x_k^*\}$ cuyo límite, de existir, resulta una solución ε -aproximada para el mínimo global de (1). Esto es que $|\frac{f_{\minglob} - f_{\minloc}}{f_{\minglob}}| \leq \varepsilon$.

A la expresión $|\frac{f_{\minglob} - f_{\minloc}}{f_{\minglob}}|$ se le llama entonces *error relativo* de la aproximación.

El paso-1 puede resolverse aplicando un método de búsqueda local, como por ejemplo: Newton, Gradiente proyectado, etc. Sin embargo, la realización del segundo paso resulta un problema tan difícil de resolver como el propio problema [QPB]. En ese mismo trabajo se propone utilizar un método de inmersión y algoritmos de continuación con saltos para resolver los problemas de optimización uni-paramétrica así construidos. La experimentación numérica realizada permitió identificar ciertas limitaciones que invalidan la aplicación directa de esta estrategia. Si en la ejecución del segundo paso se combina el método de corte y continuación con un procedimiento de ramificación y acotación basado en condiciones necesarias de optimalidad de primer orden y relajación semidefinida positiva, se obtiene un algoritmo híbrido que resuelve las dificultades detectadas a la estrategia global.

Los contenidos de este artículo han sido organizados en cinco secciones. En la siguiente sección se describen brevemente la estrategia de corte y continuación dada en [15], y las limitaciones fundamentales que ella presenta. En la sección-3.1 se resumen los resultados más relevantes asociados a la utilización de métodos de ramificación y acotación. En la sección-4 se presentan los pormenores del algoritmo propuesto. Detalles de la implementación computacional del algoritmo y los resultados de la experimentación realizada, son presentados en la sección-5. Finalmente, en las conclusiones, se proponen posibles líneas para continuar la investigación.

1.1 Terminología y notación

En esta sección se introducen algunas de las notaciones que se usaran en el desarrollo del artículo. \mathbb{R}^n se refiere al espacio Euclidiano de dimensión n , \mathbb{R}_+ a los reales positivos, y $\mathbb{R}^{n \times n}$ al conjunto de matrices reales de n filas y n columnas. Con S^n se denota al conjunto de matrices simétricas reales de $n \times n$, y con S_+^n al de las matrices semidefinidas positivas. El producto interno de dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se define como $A \bullet B = \text{trace}(A^T B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ij}$. $A \succeq 0$ indica que $A \in S_+^n$, y $A \preceq 0$ lo contrario $A \notin S_+^n$. Con la letra I se designará siempre a la matriz identidad en la dimensión correspondiente. $u \circ v$ denota el producto Hadamard de los vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$, definido por $[u \circ v]_j = u_j v_j$.

2. Estrategia de corte y continuación

Como se plantea en la introducción, la problemática fundamental en la aplicación de la estrategia de optimización global presentada reside en la realización del paso-2. Resulta evidente que una solución factible del siguiente problema auxiliar es, a su vez, una solución del segundo paso de la estrategia.

$$[QPA] \min \{F(x) \mid x \in S\} \quad (3)$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} x^T Q x + q^T x + q_0 \leq 0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

donde $F(x)$ es una función convexa (preferentemente lineal o cuadrática), y $q_0 = \varepsilon - f(x^*)$.

No es difícil de observar, que la restricción $\frac{1}{2} x^T Q x + q^T x + q_0 \leq 0$ introduce un corte en la caja B que deja fuera de S al mejor mínimo local x^* calculado. Debido a la no convexidad de la función cuadrática, [QPA] resulta un problema de factibilidad no convexo, que igualmente pertenece a la clase de problemas NP-Duros, tan complejo de resolver como el propio problema cuadrático original.

Para resolver el mismo, en [15] se sugiere aplicar el método de inmersión [10] considerando el problema paramétrico

$$[P_R(t)] : \min \left\{ \begin{array}{l} F(x, w, t) = \frac{1}{2} [x - x_0]^2 + c^T x + \\ \frac{1}{2} [w - w_0]^2 + dw \end{array} \right\} \quad (5)$$

Sujeto a :

$$G_j(x, w, t) = -x_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$G_{n+j}(x) = x_j - 1 \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$G_{2n+1}(x, w, t) = t(\frac{1}{2} x^T Q x + q^T x - q_0) + (1-t)(w - w_0) \leq 0$$

$$G_{2n+2}(x, w, t) = -w \leq 0$$

$$0 \leq t \leq 1$$

donde $d \in \mathbb{R}$, y $w_0 \in \mathbb{R}_+$.

Observe que el punto (x_0, w_0) es una solución del problema $[P_R(t)]$ para $t=0$. Asimismo, si x_0 es un punto interior de la caja ($0 < x_0 < 1$), la única restricción activa en ese punto resulta $G_{2n+1}(x, w, t)$. De esta forma, partiendo de (x_0, w_0) para $t=0$, y utilizando un método de continuación con saltos [2, 8] se describe la curva de puntos críticos generalizados (pcg) del problema $[P_R(t)]$.

Se debe recordar que la utilización de los métodos de continuación descansa sobre la base del teorema de la función implícita, que a su vez requiere la no singularidad de la matriz Jacobiana del sistema de puntos críticos

$$\begin{aligned} D_{x,w} F(x, w, t) + \sum_{j=1}^{2n+2} \mu_j D_{x,w} G_j(x, w, t) &= 0 \\ \mu_j D_{x,w} G_j(x, w, t) &= 0, \quad j = 1, \dots, n+2 \\ \mu_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n+2 \end{aligned} \quad (6)$$

asociado al problema paramétrico (5).

Todos los puntos que resuelven el sistema (6) para los cuales la matriz Jacobiana asociada es no singular se les llama puntos críticos no degenerados o de tipo-1. Aquellas soluciones para las cuales la matriz Jacobiana se hace singular se les llama puntos singulares. Observe que la singularidad de la matriz Jacobiana puede ocurrir si:

- El sistema de vectores gradientes de las restricciones activas resulta linealmente dependiente (singularidades tipo-4 ó 5),
- Se anula exactamente un multiplicador de Lagrange de una restricción activa (singularidad tipo-2), y/o
- La matriz Hessiana restringida al subespacio tangente del problema es singular (singularidad tipo-3).

En [13] los autores definen la clase \mathcal{F} de problemas uni-paramétricos, para los cuales solo aparecen estos cuatro tipo de singularidades.

En el caso específico del problema paramétrico (5) se puede comprobar que la aparición de singularidades tipo-4 solo puede ocurrir cuando $w = 0$ y están activas todas las componentes de x para las cuales $Qx + q \neq 0$. De igual forma las singularidades tipo-5 solo pueden ocurrir en un punto extremo de la caja B con $w = 0$ y $f(x) = f_{minloc} - \varepsilon + \frac{1-t}{t}w_0$.

La experimentación numérica realizada por Miranda permitió identificar que el método de continuación con saltos funciona exitosamente siempre y cuando este se mueva por una curva de puntos críticos generalizados tipo-1,2 y 3, pero no siempre consigue avanzar cuando se llega a una singularidad tipo 4 ó 5.

De esta suerte, cuando concluye el primer paso de la estrategia, con la determinación de un mínimo local x_k^* de [QPB], y se intenta resolver el problema auxiliar [QPA] que introduce el corte $f(x) \leq f(x_k^*) - \varepsilon$ (segundo paso), este puede concluir con la ocurrencia de una de las situaciones siguientes:

- (I) El método de continuación concluye exitosamente en $t=1$ con una solución $\bar{x} \in B$ que resuelve el corte $f(\bar{x}) \leq f_{minloc}^k - \varepsilon$. En ese caso se repite el paso-1 iniciando el algoritmo local en \bar{x} para obtener un nuevo mínimo local x_{k+1}^* de [QPB] con $f(x_{k+1}^*) < f_{minloc}^k$. Esta secuencia de pasos se repite iterativamente hasta que el algoritmo se detenga por la ocurrencia de la situación (II).
- (II) El método de continuación se detiene en un $t = \bar{t} < 1$ con la aparición de una singularidad tipo 4 ó 5, en la cual no se cumple la calificación de restricciones de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) y no es posible encontrar soluciones para valores de $t \geq \bar{t}$.

A su vez la aparición de una situación tipo (II) puede ocurrir por uno de los siguientes motivos

- (II-A) La solución alcanzada es el mínimo global del problema. En ese caso el conjunto factible S del problema auxiliar [PA] resulta vacío, y por ende no es posible encontrar solución del problema $[P_R(t)]$ para $t=1$. Es por ello que el método de continuación queda atrapado en una singularidad tipo 4 ó 5 para un $t = \bar{t} < 1$
- (II-B) La solución alcanzada no es el mínimo global del problema. Sin embargo, no es posible encontrar mejores mínimos locales porque no existe dirección de descenso

para realizar un salto a otra componente conexa, y con ello el algoritmo no consigue encontrar soluciones para valores de $t \geq \bar{t}$.

A partir de estos resultados, se pueden identificar dos limitaciones importantes para la aplicación de la estrategia de corte y continuación. (i) Cuando se encuentra una singularidad tipo 4 ó 5, en la que no se cumple la MFCQ, no se puede identificar si el mínimo local calculado corresponde o no con el mínimo global del problema, y (ii) no se dispone de un criterio que permita medir cuan cerca o lejos está la solución actual del mínimo global buscado.

Para resolver estas limitaciones, proponemos en la sección-4 un algoritmo que combina la resolución del problema paramétrico con un método de ramificación y acotación basado en relajación semidefinida positiva, tema sobre el cual se discute en la siguiente sección.

3. Métodos de ramificación y acotación

En sentido general, los métodos de ramificación y acotación consisten de tres componentes fundamentales: (1) el cálculo de una cota inferior para la solución óptima del problema, (2) una estrategia para la ramificación (particionamiento de la región factible en varios subconjuntos), y (3) la selección del subproblema o nodo a resolver en cada iteración. En las subsecciones que siguen se discuten diferentes propuestas existentes para cada uno de estos aspectos.

3.1 Cálculo de una cota inferior para la solución óptima del problema

En la face de acotación los procedimientos de ramificación y acotación persigue el cálculo de cotas inferiores para el mínimo global del problema a partir de la solución de un problema auxiliar relajado, más sencillo de resolver que el problema original. Una vía lógica para construir tales problemas auxiliares relajados consiste en la convexificación del problema, lo cual puede lograrse a través de:

1. La aproximación de la función objetivo por una función minorante convexa $g(x)$, $[g(x) \leq f(x), \forall x \text{ de la región factible}]$, y/o
2. La aproximación del conjunto de posibles soluciones del problema con un sobreconjunto convexo.

Para el caso específico del problema (1), la función α -Minorante de Adjiman-Floudas (α -MAF) [1] es un ejemplo concreto de relajación tipo (1). Esta función se define según $g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n \alpha x_i(x_i - 1)$. Note que $\sum_{i=1}^n \alpha x_i(x_i - 1) \leq 0$ (con Hessiana $\Delta = \alpha I$). Es evidente que $g(x) \leq f(x)$ sobre la región factible, y para α suficientemente grande, con $Q + 2\Delta \in S_+^n$, se obtiene la convexidad de $g(x)$.

Por otra parte, un modo de caracterizar el conjunto de posibles soluciones del problema [QPB] es describir los posibles mínimos locales mediante el sistema de condiciones necesarias de

primer orden de Karush-Kuhn-Tucker

$$\sum_{i=1}^n Q_{ji}x_i + q_j + y_j - z_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

$$y_j(1 - x_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

$$z_j x_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

$$x_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

$$x_j, y_j, z_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

(donde $y, z \in \mathbb{R}^n$ son los multiplicadores de Lagrange relativos a las restricciones ($x \leq 1$) y ($x \geq 0$) respectivamente)

Se puede probar que sobre el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{3n}$ que satisfacen las condiciones (7-11), se cumple $\frac{1}{2}x^T Qx + q^T x = \frac{1}{2}(q^T x - e^T y)$.

De esta forma el problema (1) es equivalente a

$$[QPBKKT] \quad \min \left\{ \frac{1}{2}(q^T x - e^T y) \mid x \in \tilde{B} \right\} \quad (12)$$

$$\tilde{B} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{3n} \mid \begin{array}{l} Qx + q + y - z = 0, \\ y \circ (1 - x) = 0, z \circ x = 0, \\ 0 \leq x \leq 1, y, z \geq 0 \end{array} \right\} \quad (13)$$

Note que, con esta transformación se logra linealizar la función objetivo, pero, debido a las restricciones KKT de complementariedad ($y \circ (1 - x) = 0, z \circ x = 0$) se traslada el problema de la no convexidad al nuevo conjunto factible \tilde{B} .

La relajación más natural de \tilde{B} consiste en suprimir las condiciones KKT de complementariedad y con ello obtener un problema de programación lineal (PL) al que se referirá en lo adelante como [RKKT]. Sin embargo, dado que las variables y, z no están acotadas, no se puede garantizar la existencia de una solución acotada para dicho PL.

Otra forma de reformular del problema (1) es la sugerida por Padberg [16], consistente en linealizar las componentes cuadráticas de $f(x)$ por medio del cambio de variables $x_{ij} = x_i x_j$, $1 \leq i \leq j \leq n$. Dado que $\frac{1}{2}x^T Qx + q^T x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Q_{ij}x_{ij} + q^T x$, el problema

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Q_{ij}x_{ij} + q^T x \mid x \in \bar{B} \right\} \quad (14)$$

$$\bar{B} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+\frac{n(n+1)}{2}} \mid \begin{array}{l} 0 \leq x_j, x_{ij} \leq 1, \quad x_{ij} = x_i x_j, \\ 1 \leq i \leq j \leq n \end{array} \right\} \quad (15)$$

es equivalente a [QPB]. Como en el caso anterior, aquí se logra la linealización de $f(x)$ pero la región factible resultante \bar{B} es igualmente no convexa.

En este caso, la relajación lineal del conjunto factible resulta probablemente la elección más popular, evidenciado por la gran cantidad de reportes que la contienen. A esta clase de relajaciones pertenecen las llamadas Técnicas de Reformulación y Linealización (RLT) de Sherali [20], extensivamente utilizadas con estos y otros fines. La misma consiste en relajar las condiciones cuadráticas ($x_{ij} = x_i x_j$) por el conjunto

de inequaciones ($x_{ij} \leq x_i, x_{ij} \leq x_j, x_{ij} \geq x_i + x_j - 1, x_{ij} \geq 0$), para obtener un (PL) con función objetivo definida según (14) y conjunto factible

$$\hat{B} = \left\{ (x, X) \in \mathbb{R}^{n+(n \times n)} \mid \begin{array}{l} 0 \leq x_j, x_{ij} \leq 1, \\ x_{ij} \leq x_j, \quad x_{ij} \leq x_i, \\ x_i + x_j \leq x_{ij} + 1, \\ 1 \leq i \leq j \leq n \end{array} \right\} \quad (16)$$

Por otra parte, utilizando la notación matricial, las ecuaciones $x_{ij} = x_i x_j$, $1 \leq i \leq j \leq n$ pueden escribirse como $X = xx^T$, y con ello el problema (14) puede reformularse como:

$$\min \left\{ \frac{1}{2}Q \bullet X + q^T x \mid x \in B, X = xx^T \right\} \quad (17)$$

Dado que la ecuación $X = xx^T$ es equivalente con $\text{rang}(X)=1$ y $X \in S_n^+$, y esta última con $\begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \in S_+^n$, si se elimina la condición de rango se obtiene la relajación semidefinida positiva de [QPB] propuesta por Shor [21]

$$\min \left\{ \frac{1}{2}Q \bullet X + q^T x \mid x \in B, \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \succeq 0 \right\} \quad (18)$$

Se sabe, sin embargo, que cuando $Q \preceq 0$ la solución óptima de (18) es $-\infty$, lo cual ocurre porque se tienen muchos grados de libertad para X .

Para salvar este inconveniente [19] propone introducir las restricciones lineales $\text{diag}(X) \leq x$ (derivadas de $x_{ij} = x_i x_j$), con lo cual se obtiene una nueva relajación semidefinida positiva de (1).

$$[RSDP_0] \quad \min \left\{ \frac{1}{2}Q \bullet X + q^T x \mid (x, X) \in \hat{B}_0 \right\} \quad (19)$$

$$\hat{B}_0 = \left\{ (x, X) \in \mathbb{R}^{n+n \times n} \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1, \quad \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \succeq 0, \\ \text{diag}(X) \leq x \end{array} \right\} \quad (20)$$

Una mejora significativa a la propuesta de Sherali fue presentada recientemente por Burer y Vandenbussche [4]. En ella se combina $[RSDP_0]$ con la la relajación basada en las condiciones necesarias de optimalidad KKT de primer orden para obtener el siguiente modelo relajado.

$$[RSDP_1] \quad \min \left\{ \frac{1}{2}Q \bullet X + q^T x \mid (x, y, z, X) \in \hat{B}_1 \right\} \quad (21)$$

$$\hat{B}_1 = \left\{ (x, y, z, X) \in \mathbb{R}^{3n+n \times n} \mid \begin{array}{l} x \in B, \quad \text{diag}(X) \leq x, \\ \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \succeq 0, \\ Qx + q + y - z = 0, \\ y, z \geq 0, \\ Q \bullet X + q^T x = \\ \frac{1}{2}(q^T x - e^T y) \end{array} \right\} \quad (22)$$

Este modelo posee característica muy favorables para la aplicación de un procedimiento de ramificación y acotación, que

contrarrestan la desventaja asociada a la inserción de nuevas variables y restricciones en el modelo

. Existen asimismo variaciones de $[RSDP_1]$, como la propuesta por Burer y Chen [5], que incorporan al modelo condiciones necesarias de segundo orden para conseguir una aproximación más fina de (15). Según su reporte, los experimentos realizados muestran una reducción en el número de nodos explorados, pero a costa de un incremento sensible en el tiempo de resolución.

Como se puede observar, en todos los casos estudiados la relajación \hat{B} del conjunto factible B y/o la obtención de una función minorante $g(x)$ para $f(x)$ están estrechamente ligadas. Entre ellos puede verificar la siguiente relación

$$\min_{x \in \hat{B}} g(x) \leq \left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in B} g(x) \\ \min_{x \in \hat{B}} f(x) \end{array} \right\} \leq \min_{x \in B} f(x) \quad (23)$$

La clave del éxito reside en elegir $g(x)$ y/o \hat{B} de forma tal que uno de los problemas $\min_{x \in \hat{B}} g(x)$, $\min_{x \in B} g(x)$ ó $\min_{x \in \hat{B}} f(x)$ sea más fácil de resolver que el problema original $\min_{x \in B} f(x)$.

3.2 Estrategias de ramificación

Toda estrategia de ramificación puede ser vista como la división de cierta parte de la región factible por la adición de nuevas restricciones, frecuentemente asignando valores a las variables. Si el conjunto en cuestión se divide en dos, a la ramificación utilizada se le llama particionamiento dicotómico. La ramificación recursiva del problema define un árbol estructurado, cuyos nodos se corresponden precisamente con los subproblemas que se definen manteniendo la misma función objetivo sobre cada una de las subregiones en que se divide el conjunto factible. En general, toda estrategia de particionamiento dicotómico pasa necesariamente por establecer: (a) qué reglas utilizar para la división del conjunto y (b) qué reglas aplicar para la selección del subproblema (nodo) a resolver en cada iteración.

Entre las reglas más usadas para el particionamiento dicotómico se cuentan:

RPS: Regla de Particionamiento Simple. Se selecciona una variable x_i , que corresponde a la arista más larga de la caja, y se divide el conjunto en dos partes iguales respecto a la variable seleccionada. De esta forma, si $l_i \leq x_i \leq u_i$, los dos nuevos subconjuntos se generan insertando en uno de ellos la restricción $x_i \leq \frac{l_i+u_i}{2}$, y en el otro $x_i \geq \frac{l_i+u_i}{2}$.

RPA: Regla de Particionamiento Avanzada. Se procede de forma similar a la regla (RPS), pero al definir los dos nuevos subconjuntos, se verifica si el valor de la variable x_i seleccionada es un punto interior de su arista $l_i < x_i^* < u_i$. De ser así, las restricciones a introducir en los nuevos subconjuntos son $x_i \leq x_i^*$ y $x_i \geq x_i^*$ respectivamente. En caso contrario se procede según (RPS).

PKKT: Particionamiento basado en las condiciones KKT de complementariedad. Esta regla está asociada al parti-

cionamiento del conjunto que se obtiene por la relajación de las condiciones KKT de complementariedad en (13). Según (PKKT) se deben seleccionar las variables x_i, y_i, z_i correspondientes a la mayor violación de las condiciones KKT de complementariedad, y el particionamiento se realiza forzando el cumplimiento de la misma. Observe que en este caso se obtiene un particionamiento tricotómico, donde el primer subconjunto se genera insertando las restricciones $x_i = 0$ y $z_i = 0$, en el segundo $x_i = 1$ y $y_i = 0$, y en el tercero $y_i = 0$ y $z_i = 0$.

RPH: Regla de Particionamiento de Hansen. Una vez seleccionada (según los criterios precedentes) la variable x_i sobre la cual se realizará el particionamiento del conjunto, la construcción de estos se realiza atendiendo al teorema de Hansen et. al., según el cual:

- (a) cuando $Q_{ii} \leq 0$
 - (a.1) Definir el primer subconjunto insertando las restricciones $x_i = 0$, y
 - (a.2) en el segundo $x_i = 1$.
- (b) pero cuando $Q_{ii} > 0$, se precisa un particionamiento del conjunto en tres partes, donde
 - (b.1) el primer subconjunto se define insertando la condición $x_i = 0$,
 - (b.2) en el segundo $Q_{ii}x + q = 0$, y
 - (b.3) en el tercero $x_i = 1$.

Finalmente, para la selección del subproblema o nodo a resolver en cada iteración, las reglas más utilizadas son:

ENMCI: Explorar el Nodo con Menor Cota Inferior. Prioriza la exploración del subproblema de menor cota inferior calculada, por ser la región donde se sospecha puede existir el menor valor de la función objetivo. Tiene como ventaja que en cada nueva iteración se pueden eliminar todos los subproblemas para cuya cota inferior f_{LB} calculada sea mayor o igual que la mejor cota superior f_{UB}^* encontrada ($f_{LB} \geq f_{UB}^*$).

EHA: Exploración Horizontal del Árbol. Consiste en resolver todos los subproblemas de un mismo nivel en el árbol, antes de pasar a explorar los del siguiente nivel. Tiene como inconveniente el crecimiento exponencial del número de subproblemas en cada nuevo nivel del árbol.

EPA: Exploración en Profundidad del Árbol. Se trata de seleccionar primero al nodo que se encuentra en el nivel más profundo del árbol. En este caso el número de nodos pendientes de resolver es menor o igual al número de niveles del árbol multiplicado por el máximo número de subproblemas en que se divide un nodo.

La selección combinada de los elementos presentados dan lugar a diferentes métodos de ramificación y acotación. Así, por ejemplo, uno de los primeros métodos de optimización global efectivo conocido para resolver [QPB] fue desarrollado por Hansen et. al. [12], y en él se combinan las técnicas de

padberg con las RLT para la relajación de la región factible, y las reglas RPS y RPH para la ramificación del problema. Un procedimiento de ramificación y acotación muy eficiente es el presentado por Burer y Vandenbussche [4], que igualmente parte de aplicar las técnicas TRP combinadas con la relajación $RSDP_1$ para el cálculo de las cotas inferiores, y para determinar la cota superior de cada subproblema, utilizan un procedimiento de búsqueda local. Para conformar la estrategia de ramificación utilizan la regla PKKT (para la selección de la variable sobre la cual se realizará el particionamiento), combinada con RPH (para la generación de los nuevos subconjuntos), y ENMCI (para la selección del nodo a explorar). Dado que el número de multiplicadores de Lagrange es finito, el procedimiento así construido concluye en un número finito de pasos, característica que lo distingue y lo hace ventajoso en comparación con los propuestos anteriormente.

4. Algoritmo de corte y continuación con Ramificación y Acotación

El algoritmo que se propone en este trabajo puede verse como una mejora de la estrategia global de corte y continuación presentada en la sección-2. En este sentido se mantiene la idea de la realización de un paso de búsqueda global (paso-1) seguido de un paso globalización (paso-2), pero difiere de esta en forma en que se ejecuta el segundo paso.

El algoritmo inicia con la estrategia de corte y continuación, que como se explicó en la sección-2 concluye cuando para cierto $\bar{t} < 1$ el método de continuación queda atrapado en una singularidad tipo 4 ó 5, reportando a f_{UB}^* como la mejor cota superior calculada para $f_{minglob}$.

La novedad del algoritmo consiste en continuar la búsqueda, ahora con el cálculo de una cota inferior f_{LB} , a partir de la solución del problema relajado [RSDP1]. De esta forma se dice que el nodo origen ha sido resuelto o explorado.

Disponer de ambas cotas permite determinar entonces el *gap relativo* $= \left| \frac{f_{UB}^* - f_{LB}}{f_{UB}^*} \right|$ que mide la diferencia existente entre ellas y que será tomado en cuenta para reconocer cuándo se ha alcanzado una solución del problema suficientemente buena. En caso que el *gap relativo* sea inferior a cierta tolerancia $\varepsilon > 0$ prefijada (criterio de parada), el algoritmo concluye reportando el mejor mínimo local calculado como una solución ε -aproximada de $f_{minglob}$. Observe que, a diferencia de la estrategia global, el algoritmo propuesto dispone de un mecanismo para reconocer cuando ha alcanzado la solución óptima.

En caso contrario (*gap relativo* $> \varepsilon$), se sigue (según ramificación y acotación) con el particionamiento de la caja actual en dos subregiones B_1 y B_2 más pequeñas y disjuntas. A continuación se resuelve el problema relajado [RSDP1] sobre cada una de las nuevas subregiones, calculando así una cota inferior $f_{LB}^{(k)}$ para cada B_k .

Si para alguna de las cotas $f_{LB}^{(k)}$ calculadas se cumple $f_{LB}^{(k)} > f_{UB}^*$, el problema correspondiente a B_k queda eliminado.

Seguidamente, de entre la lista de nodos no explorados se selecciona, según el criterio ENMCI, al nodo con menor cota inferior. Sobre el subproblema B_k seleccionado se aplica nuevamente el método de corte y continuación para calcular una cota superior $f_{UB}^{(k)}$, con lo cual el nodo queda explorado. En lo adelante se repite la misma rutina hasta que todos los nodos hayan sido explorados y/o eliminados.

El pseudocódigo que sigue a continuación resume el funcionamiento lógico del algoritmo.

Inicio: $k=0$, $\underline{B} = B$, fijar $\bar{x}^{(k)} \in B$.

Resolver problema relajado $RSDP_1$ para calcular cota inferior $f_{LB}^{(k)}$.

Paso-1: Calcular mínimo local x^* de (1) partiendo de $\bar{x}^{(k)} \in \underline{B}$.

Hacer $f_{UB}^{(k)} = f(x^*)$ y $f_{UB}^* = \min\{f_{UB}^{(j)}, j = 0, \dots, k\}$

Si $\left| \frac{f_{UB}^{(k)} - f_{LB}^{(k)}}{f_{UB}^{(k)}} \right| \leq \varepsilon$, FIN del procedimiento, x^* solución ε -aproximada.

Paso-2: Determinar una nueva solución factible $\bar{x} \in B$ con $f(\bar{x}) \leq f_{UB}^* - \varepsilon$.

Para ello se propone la ejecución de los pasos 2.1 a 2.3

Paso-2.1: Utilizar método de continuación para resolver el Problema $[P_R(t)]$ en la caja \underline{B} . Si se alcanza una solución $\bar{x}^{(k)}$ para $[P_R(t=1)]$, poner $x^{(k)} = \bar{x}^{(k)}$ y regresar al Paso-1.

En caso contrario seguir al paso 2.2

Paso-2.2: Particionar el conjunto \underline{B} según reglas de particionamiento seleccionadas.

Supongamos que \underline{B} corresponde a la subcaja B_m de la partición, ($m \in \{1, \dots, k\}$)

Como resultado de la partición se obtienen dos nuevas subcajas, indexadas como B_m y B_{k+1} . Continuar al Paso-2.3.

Paso-2.3: Resolver problema relajado según $RSDP_1$ en las cajas B_m y B_{k+1} para obtener cotas inferiores $f_{LB}^{(m)}$ y $f_{LB}^{(k+1)}$. Eliminar de la búsqueda aquellas subcajas B_j donde $f_{LB}^{(j)} \geq f_{UB}^*$.

Determinar índice j^* con $f_{LB}^{(j^*)} = \min\{f_{LB}^{(j)}, j = 1, \dots, k+1\}$ y seleccionar subcaja $\underline{B} = B_{j^*}$.

Hacer $k=k+1$. Poner $\bar{x}^{(k)} = \underline{x}^{j^*} \in B_{j^*}$, y regresar al Paso-1.

Observe que cuando la región factible se particiona, el reinicio del método de corte y continuación sobre las nuevas subregiones funciona como un salto a una nueva componente conexa del conjunto original, y con ello el método de continuación puede escapar de la región de atracción de las singularidades donde estaba atrapado. De esta forma el algoritmo resuelve la segunda limitación señalada a la estrategia global. En relación con el método de ramificación y acotación de Burer-Vandenbussche, el algoritmo híbrido permite el cálculo

de una mejor cota superior que los algoritmos de búsqueda local empleados en [4], provocando con ello la introducción de cortes más profundos en el problema paramétrico y un nivel de comparación más exigente para la eliminación de nodos.

Un elemento importante a destacar es la introducción de una nueva regla para la selección de la variable a particionar.

RPD: Regla de Particionamiento basada en los elementos de la Diagonal de Q . Consiste en seleccionar la variable x_i (no seleccionada antes) que corresponda al elemento Q_{ii} de menor valor en la matriz Q .

La introducción de este criterio está orientada a eliminar, en primer lugar, a las componentes de x que más contribuyen a la no convexidad de la función objetivo ($Q_{ii} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} < 0$), de forma tal que los nuevos nodos que se van a crear resulten más sencillos de resolver.

Otros aspectos a señalar para la implementación del algoritmo son:

- Utilizar la estrategia de corte y continuación para el cálculo de la cota superior en cada subproblema a resolver.
- Para el cálculo de la cota inferior en cada nodo del árbol, se resuelve un problema de programación semidefinida positiva definido por la relajación RSDP1 correspondiente.
- Tomar como punto de partida para el cálculo de la cota superior, a la componente x de la solución (x^*, X^*, y^*, z^*) del problema relajado correspondiente.
- Realizar ramificación utilizando la regla RPD para la selección de la variable a particionar, combinando las reglas PKKT y RPH para la división del conjunto factible y la regla ENMCI para la selección del próximo nodo a explorar.
- Como es típico en la programación de los métodos de ramificación y acotación, en este trabajo, junto con el criterio de parada basado en el *gap relativo*, se establece un tiempo límite de procesamiento, transcurrido el cual, el algoritmo se detiene, aún cuando la mejor solución calculada no satisfaga la tolerancia prefijada. Por defecto se tomará una tolerancia del 1 % del valor f_{UB}^* ($\varepsilon = 0,01$), y el límite de tiempo máximo se fijará en 40 000 CPU segundos.
- En base a la experiencia, y conociendo que a medida que los conjuntos factibles se hacen más pequeños, disminuye la probabilidad de encontrar mejoras cal mínimo local calculado en el paso-1, se establece el parámetro (MAXPAFO) que controla la cantidad de iteraciones en que se utiliza el método de corte y continuación (Paso-2.1).

5. Análisis de Resultados

En esta sección se describen las experiencias extraídas de la experimentación computacional realizada con el fin de verificar si el algoritmo de corte y continuación con ramificación y acotación resuelve las limitaciones señaladas a la estrategia de optimización global, y medir la calidad de los resultados obtenidos.

La implementación del algoritmo propuesto la sección 4 (que en lo adelante se denotará por PAFO-SDP1), así como de la estrategia de optimización global descrita en la sección 2 (denotada por CUTandPAFO), y del procedimiento de ramificación y acotación de Burer-Vandenbussche de la sección 3 (denotada por SDP1-KKT) fueron todas realizadas sobre MATLAB R2013a. En los tres códigos se incluye el uso de funciones propias de Matlab, tales como *quadprog* [24] que se utiliza para el cálculo del mínimo local de [QPB], y la combinación *cvx.m* - *sdpt3.m* [25, 9] para resolver los problemas de programación semidefinidos positivos y respectivamente. Todos los experimentos realizados fueron corridos en una computadoras VIT con procesador *core i3* a 2.4 G y 2 GB de memoria RAM.

Para la ejecución de los experimentos fueron tomados los 90 problemas pruebas recibidos gracias al intercambio personal con Samuel Burer (University of Iowa). Los mismos incluyen 54 las instancias propuestas en [26] que contiene problemas de hasta 60 variables, y a los que Burer refiere como *básicos*, y 36 ejemplos adicionales que contienen problemas entre 70 y 100 variables propuestos [5, 3] y referidos como *extendidos* en la citada comunicación personal con Burer.

Al igual que en los trabajos referidos, aquí se identificará cada problema por la tupla (N-D-S), donde N es la dimensión (número de variables) del problema, D la densidad (porcentaje de elementos distintos de cero) de la matriz Q, y S la semilla utilizada en cada una de las réplicas del experimento. Para cada combinación de N y D se los autores generan tres réplicas del mismo tomando S=1,2,3 en el generador de números aleatorios (random) de Matlab. Así por ejemplo la notación 50-60-1 indica que el problema tiene 50 variables, el 60 % de los elementos de la matriz Q son diferentes de 0, y la generación se realiza a partir de la semilla 1.

Para evaluar el comportamiento de los algoritmos se tendrán en cuenta los siguientes parámetros:

- Número total de nodos (*NODOS*) generados por el algoritmo, que equivale al número de problemas relajados tipo [RSDP1] resueltos,
- Tiempo total empleado por el algoritmo para resolver los problemas (*TIEMPO*),
- Número total de iteraciones ejecutadas (*TOTITER*),
- Iteración en que se alcanza la solución óptima (*OPTITER*),
- así como el *gap relativo* (GAPREL) para aquellos problemas en que el algoritmo se detiene por alcanzar el

límite de tiempo prefijado.

La sección se inicia con experimentos preliminares para determinar la magnitud del parámetro MAXPAFO para el algoritmo PAFO-SDP1. A partir de los resultados observados en la figura-1(a), se puede fijar MAXPAFO = $\frac{N}{5}$, pues a la altura de esa iteración (excepto para el problema 100-75-1) ya el algoritmo ha alcanzado la solución óptima. El total de las iteraciones restantes (TOTITER-OPTITER) ha de realizarse entonces para identificar que el mejor mínimo local calculado se corresponde con el mínimo global del problema.

Seguidamente, se analizan los resultados alcanzados con la aplicación de la estrategia global CUTandPAFO y se comparan con los del algoritmo propuesto con el fin de verificar si PAFO-SDP1 resuelve las limitaciones señaladas al primero. Luego se comparan los resultados de PAFO-SDP1 con los alcanzados por la implementación realizada del procedimiento de Burer-Vandenbussche (SDP1-KKT) y finalmente se estudia la dependencia existente entre los parámetros entre ellos y con las características del problema.

5.1 Comparación de CUTandPAFO con PAFO-SDP1

Comparando la solución óptima calculada por la estrategia global pura (CUTandPAFO) con los valores óptimos reportados en la comunicación personal de Burer con los autores de este trabajo, se comprobó que en 74 de los 90 problemas se alcanza la solución óptima, lo cual puede considerarse como un buen resultado. Sin embargo, y como ya se ha expresado, CUTandPAFO carece de un criterio para medir la calidad de la solución alcanzada, por lo que en ninguno de los casos se puede asegurar que la solución calculada es el mínimo global de [QPB]. Lo anterior queda evidenciado, por ejemplo, en el caso de las tres réplicas del problema de 20 variables y densidad 100 (20-100-S con S=1,2,3). Observe en la tabla-1 que en los problemas 1 y 3 se ha alcanzado la solución óptima reportada (Error Relativo=0), pero en ambos casos la estrategia se detiene (Salida) al encontrar una singularidad tipo-4. Igual ocurre con el problema 2, en el cual el mínimo local calculado no se corresponde con la solución óptima del problema (ver en la tabla-1 $ErrorRelativo \neq 0$, y $f_{minloc}^* < f_{minglob}^*$).

Por otra parte, se pudo comprobar que el algoritmo híbrido (PAFOSDP1) alcanza la solución óptima reportada en todos los casos. Sólo en seis problemas (80-50-1, 100-50-(1 y 2) y 100-75-(1,2 y 3)) no se puede confirmar el resultado, por sobrepasar los 40 000 cpu segundos prefijados sin el nivel de tolerancia especificado (1 %) (fig-1(b)). En este caso, sin embargo, como el algoritmo dispone ahora de una acotación inferior f_{LB} para el valor mínimo global se puede calcular el *gap relativo*, medida de calidad que no se dispone en CUTandPAFO. En la figura-1(c) se observa que el *gap relativo* correspondiente a estos seis problemas es siempre inferior a 0.05 (5 %).

Tomando en cuenta estos resultados se puede inferir que el algoritmo diseñado cumple satisfactoriamente las expectativas para las que fue diseñado, resolviendo en todos los casos las

limitaciones señaladas a CUTandPAFO.

Otros aspectos de interés a resaltar sobre el comportamiento de algoritmo diseñado son:

- Relación entre el número de nodos generados (NODOS) y los nodos explorados (TOTITER)

La figura-2(a) muestra una relación lineal muy bien ajustada ($R^2 = 1$) entre estas dos magnitudes, cuya ecuación ($NODOS = 2(TOTITER) + 0.9422$) es una prueba de la fuerza que aporta la búsqueda una mejor cota superior al criterio de eliminación asumido en el algoritmo. Observe además que la diferencia entre TOTITER (ver figura-2(a)) y OPTITER (ver figura-1(a)) expresa costo computacional tan elevado que hay que pagar para identificar el óptimo global.

- Relación entre el tiempo total empleado por el algoritmo (TIEMPO) y el número de nodos generados (NODOS).

De igual forma se evidencia una relación lineal ($TIEMPO = 9.57(NODOS) - 408$) entre el tiempo que emplea el algoritmo para alcanzar la solución óptima y el número de nodos generados, cuya ecuación explica que por cada nodo generado el algoritmo consume aproximadamente 10 CPU segundos (ver figura-2(b)).

- Relación entre el número de nodos generados (NODOS) y la densidad de la matriz

El estudio de esta relación se ve críticamente afectado por la no homogeneidad de la distribución de las densidades en relación con el número de variables (La base de problemas seleccionada no tiene la misma cantidad de niveles de densidad para todos los niveles del número de variables). Como se evidencia en la figura-2(c), el análisis de los 8 problemas 20-D-S, con 8 niveles de densidad $30 \leq D \leq 100$, no permite detectar una relación entre estas dos magnitudes. Observe que los ajustes ilustrados tienen todos muy mala calidad ($R^2 < 0.25$). Para el análisis de esta relación se necesitan más experimentos.

- Relación entre el tiempo total empleado por el algoritmo (TIEMPO) y los nodos explorados (TOTITER)

Esta relación se puede deducir de las dos primeras relaciones estudiadas, lo cual se puede confirmar en la figura-2(d).

5.2 Comparación con otros métodos

Para proveer alguna perspectiva sobre cómo nuestro algoritmo se compara con técnicas globales estándares de optimización para [QPB], se presenta una breve comparación con el procedimiento propuesto por Burer y Vandenbussche [4], uno de los más eficientes conocidos para la solución del problema cuadrático con restricciones de caja. Las características fundamentales de este procedimiento han sido claramente presentadas al final de la sección-3.2. Aunque la comparación se realiza a un alto nivel, sentimos que resalta las diferencias

Prob.	N-D-S	f_{minloc}^*	$f_{minglob}^*$	ErrorRelativo	Salida
1	20-100-1	-706.500	-706.500	0.000	'GCP Typ-4'
2	20-100-2	-851.058	-856.500	0.006	'GCP Typ-4'
3	20-100-3	-772.000	-772.000	0.000	'GCP Typ-4'

Tabla 1. Resumen de las solución alcanzada por CUTandPAFO para 20-100-S.

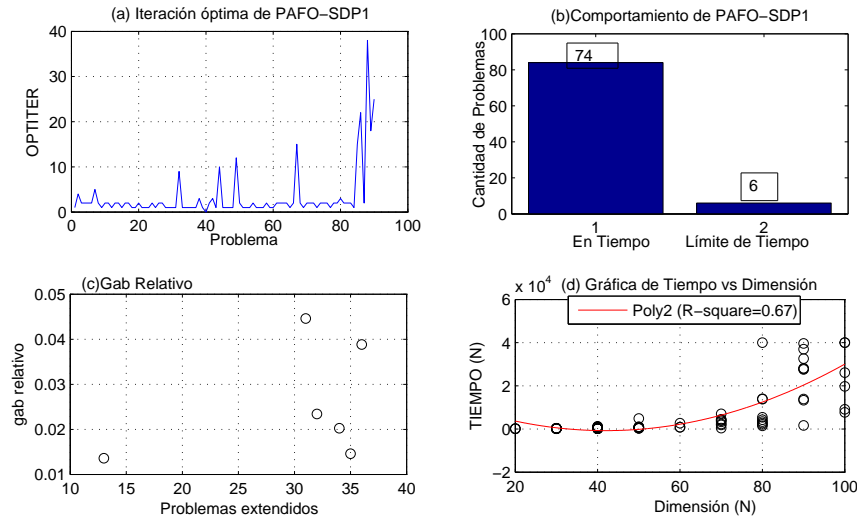


Figura 1. Mediciones del comportamiento del algoritmo PAFO-SDP1

típicas entre nuestro método y los métodos globales de optimización más utilizados en los últimos tiempos.

Note también que estamos ajenos a cualquier códigos de optimización global disponible públicamente.

La diferencia principal que existe entre estos dos enfoques resulta, la determinación de una cota superior mejorada en el algoritmo PAFO-SDP1. El resultado de esta variación se muestra en la figura-3. La figura -3(a) muestra una gráfica log-log de el número de nodos generados por nuestro algoritmo contra los generados por SDP1-KKT. En la figura se puede observar que al menos para la solución de los 90 problemas pruebas el árbol generado por nuestro algoritmo tiene un número considerablemente menor de nodos que el generado por SDP1-KKT. De igual forma, en la gráfica log-log (figura-3(b)) que muestra el número de nodos explorados por PAFO-SDP1 contra los explorados por SDP1-KKT, se evidencia que para resolver los problemas pruebas, nuestro algoritmo precisa de menos iteraciones (= número de nodos explorados) que el procedimiento SDP1-KKT. Como consecuencia directa de estos resultados, en PAFO-SDP1 se logra también una sensible reducción del tiempo total de procesamiento necesario para alcanzar la solución óptima (ver figura-3(c)).

Otro aspecto a comparar es, cuán lejos de la solución óptima quedan ambos algoritmos en aquellos problemas donde se detienen por alcanzar el límite de tiempo prefijado (40000 CPU segundos). En la figura-3(d) se grafican las curvas correspondientes al *gap relativo* del procedimiento SDP1-KKT

y al algoritmo PAFO-SDP1. Una lectura simple de esta gráfica permite detectar que en todos los casos el algoritmo de corte y continuación con ramificación y acotación alcanza una solución más cercana al óptimo global que el procedimiento de Burer-Vandenbussche.

A la vista de estos resultados se puede conjeturar el algoritmo diseñado mantiene un comportamiento muy bueno en comparación con el procedimiento de Burer-Vandenbussche.

6. Conclusiones

Los resultados computacionales presentados en este trabajo evidencian la clara ventaja que posee el algoritmo diseñado en comparación con la estrategia global de corte y continuación. Asimismo se muestra el efecto positivo que produce la introducción de cortes más fuertes y el uso de la regla de selección RPD en el procedimiento de ramificación y acotación. Adicionalmente se sugiere la posibilidad de estudiar el efecto que producen el cambio de densidad y del número de valores propios negativos en la matriz Q en los parámetros que miden el comportamiento del algoritmo.

Referencias

- [1] Claire S. Adjiman and Christodoulos A. Floudas. *The α BB global aoptimization algorithm for nonconvex problems: An overview*, volume 53 of *Nonconvex Optimi-*

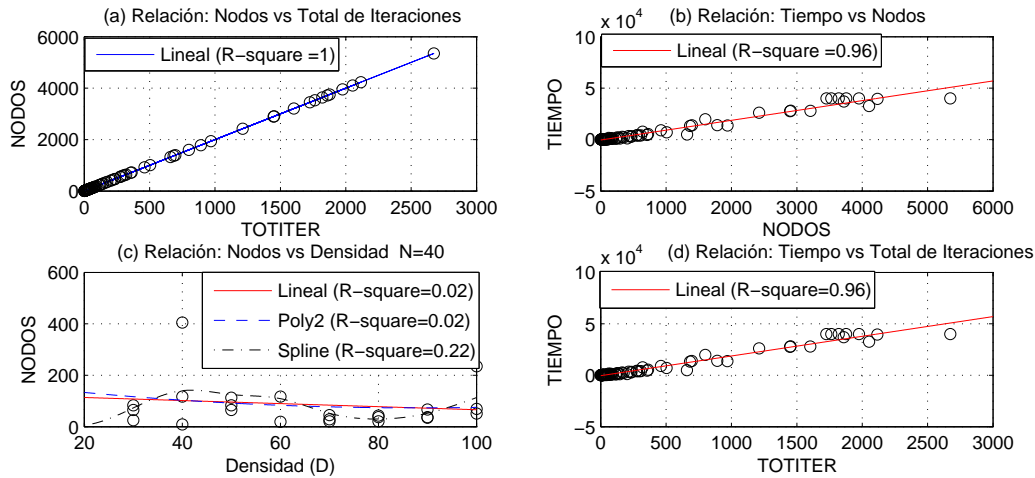


Figura 2. Mediciones del comportamiento del algoritmo PAFO-SDP1

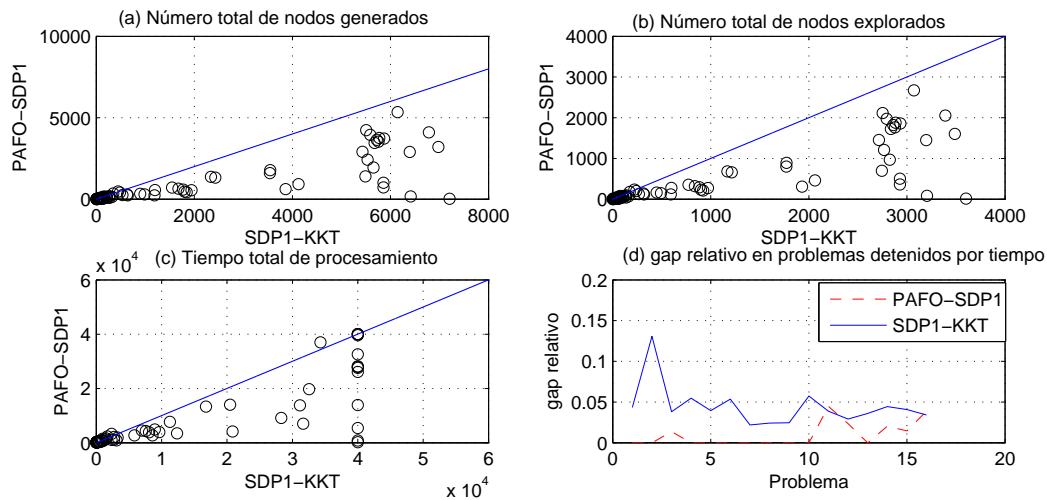


Figura 3. Comparación del rendimiento entre SDP1-KKT y PAFO-SDP1

- zation and Its Applications, chapter 8, pages 155–186. Kluwer Academic, 2001.
- [2] E.L. Allgower and K. Georg. *Numerical Continuation Methods: An Introduction*. Berlin, Heidelberg, New York, 1990.
- [3] Samuel Burer and Jieqiu Chen. Relaxing the optimality conditions of box QP. *Computational Optimization and Applications*, 48:653–673, 2011.
- [4] Samuel Burer and Dieter Vandenbussche. A finite branch-and-bound algorithm for nonconvex quadratic programming via semidefinite relaxations. *Math. Program.*, 113(Ser. A):259–282, 2008.
- [5] Jieqiu Chen. *Convex relaxations in nonconvex and applied optimization*. PhD thesis, University of Iowa, 2010.
- [6] J.W. Chinneck. The constraint consensus method for finding approximately feasible points in nonlinear programs. *INFORMS Journal on Computing*, 16(3):255–265, 2004.
- [7] T.F. Coleman and L.A. Hulbert. A direct active set algorithm for large sparse quadratic programs with simple bounds. *Mathematical Programming*, (45):373–406, 1989.
- [8] W. Gomez, J. Guddat, H.Th. Jongen, J. Ruckmann, and C.Solano. *Curvas críticas y saltos en optimización no lineal*. On Line, 2000. <http://www.emis.de/monographs/curvas/index.html>.
- [9] MC. Grant and SP. Boyd. *The CVX Users Guide*. CVX Research, Inc., 2014.

- [10] J. Guddat, F. Guerra, D. Nowack, and J.J. Ruckmann. On the calculation of feasible point of a nonconvex set: pathfollowing and jumps. *Optimization*, 2006.
- [11] P. Hansen and B. Joumard. Reduction of indefinite quadratic programs to bilinear programs. *Journal of Global Optimization*, (2):41–62, 1992.
- [12] P. Hansen, B. Joumard, M. Ruiz, and J. Xiong. Global minimization of indefinite quadratic functions subject to box constraints. Technical report, GERAD, Ecole Polytechnique Université MacGill, Montreal, Canada, 1991. Technical Report.
- [13] F. Twilt H.Th. Jongen, P. Jonker. Critical sets in parametric optimization. *Mathematical Programming*, (34):333–353, 1986.
- [14] M.K. Kozlov, S.P. Tarasov, and L.G. Khachiyan. Polynomial solvability of convex quadratic programming. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 248(5):10491051, 1979.
- [15] R. Miranda. On the generic character of the problem pr(t). *Optimization*, 2009.
- [16] M. Padberg. The boolean quadric polytope: Some characteristics, facets and relatives. *Mathematical Programming*, 45:139–172, 1989.
- [17] P.M. Pardalos and S.A. Vavasis. Quadratic programming with one negative eigenvalue is np-hard. *Journal of Global Optimization*, (1):15–22, 1991.
- [18] H. D. Sherali and W. P Adams. A hierarchy of relaxations between the continuous and convex hull representations for zero-one programming problems. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 3(3):411–430, 1990.
- [19] H. D. Sherali and A Alameddine. A new reformulation-linearization technique for solving bilinear programming problems. *Journal of Global Optimization*, 2:379–410, 1992.
- [20] H. D. Sherali and C. H. Tuncbilek. A reformulation-convexification approach for solving nonconvex quadratic programming problems. *Journal of Global Optimization*, (7):101–112, 1995.
- [21] N.Z. Shor. Quadratic optimization problems. *Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1:128–139, 1987.
- [22] Laurence Smith, John Chinneck, and Victor Aitken. Constraint Consensus Concentration for Identifying Disjoint Feasible Regions in Nonlinear Programs. *Optimization Methods and Software*, 00(00):1–30, 2011.
- [23] Laurence Smith, John Chinneck, and Victor Aitken. Improved Constraint Consensus Methods for Seeking Feasibility in Nonlinear Programs. *Computational Optimization with Applications*, 2012.
- [24] MatLab Team. *Matlab users Guide*. The mathWorks, Inc., 2013.
- [25] KC Toh, RH Tutuncu, and MJ Todd. Solving semidefinite-quadratic-linear programs using sdpt3. *Mathematical Programming, Series B*, (95):189–217, 2003.
- [26] Dieter Vandenbussche and George L Nemhauser. A branch-and-cut algorithm for nonconvex quadratic programs with box constraints. *Math. Program.*, 102:559–575, 2005.
- [27] Yasutoshi Yajima and Tetsuya Fujie. A Polyhedral Approach for Nonconvex Quadratic Programming Problems with Box Constraints. *Journal of Global Optimization*, 13(2):151–170, 1998.