

# Un método de series especialmente adaptado a la integración de osciladores armónicos perturbados

F. García-Alonso (*fernando.garcia@ua.es*)

Universidad de Alicante (España), Escuela Politécnica Superior, Departamento de Matemática Aplicada

J. A. Reyes (*jose.reyes@ua.es*)

Universidad de Alicante (España), Escuela Politécnica Superior, Departamento de Matemática Aplicada

## Resumen

En este artículo, de carácter divulgativo, se estudian las  $\varphi$ -funciones de Ferrándiz, sus propiedades y relaciones con las  $G$ -funciones de Scheifele y un método numérico, especialmente adaptado a la integración precisa de osciladores armónicos perturbados. Este tipo de ecuaciones diferenciales aparecen frecuentemente en modelos matemáticos de muchos problemas de la física, ingeniería y astrodinámica. El método de series utiliza desarrollos en  $\varphi$ -funciones, siendo capaz de integrar, sin error de truncamiento, bajo ciertas condiciones, el problema perturbado. Este método supone un refinamiento del método de series de Taylor y de los métodos basados en series de  $G$ -funciones. Su aplicación se ilustra con la resolución exhaustiva de dos problemas *stiff* a modo de *test*, comparándose la precisión del método frente a otros códigos conocidos, implementados en MAPLE V.

## Abstract

In this article, of popularizing nature, the  $\varphi$ -functions of Ferrándiz are studied, and also their properties and relations with the Scheifele  $G$ -functions and a numerical method, specially adapted to the precise integration of perturbed harmonic oscillators. This type of differential equations appears frequently in mathematical modelling of many problems in physics, engineering and astrodynamics. The method uses series of  $\varphi$ -functions, being able to integrate without truncation error, under certain conditions, the perturbed problem. This method represents a refinement of the Taylor series method and methods based on series of  $G$ -functions. Its application is illustrated by the resolution of two stiff problems, comparing the accuracy of the method to other known codes, implemented in MAPLE V.

## 1. Introducción

La integración de osciladores armónicos perturbados es un problema común e importante en muchos campos de la física y de la ingeniería (García-Alonso y Reyes, 2007), habiéndose desarrollado diferentes métodos numéricos que permiten el cálculo de la solución. Así mismo es relevante la integración de osciladores armónicos perturbados en astrodinámica, pues las transformaciones de Kunstaanheimo-Stiefel (KS), (Ferrándiz and Vigo-Aguiar, 1996) y de Burdet-Ferrándiz (BF), (Ferrándiz, 1986, 1988), (Ferrándiz y Sansaturio, 1989), (Ferrándiz, Sansaturio and Pojmand, 1992), reducen el problema de Kepler a osciladores.

Debido fundamentalmente al desarrollo de los programas espaciales, es de gran interés el cálculo preciso de orbitas de satélites artificiales, pues algunos problemas geodinámicos, llegan a necesitar precisiones subcentimétricas para conseguir la posición exacta del satélite artificial en una referencia inercial.

En 1970 Scheifele (1971), (Stiefel and Scheifele, 1971) diseñó un algoritmo capaz de integrar sin error de truncación el oscilador armónico no perturbado. La solución fue expresada en serie de las llamadas  $G$ -funciones de Scheifele, funciones que fueron utilizadas por Martín y Ferrándiz (1995, 1997) para introducir un método multipaso de paso fijo, denominado SMF que, conservando las buenas propiedades del método de Scheifele, evita los cálculos previos que este requería. Utilizando también  $G$ -funciones, Vigo y Ferrándiz, (1998a, 1998b) introdujeron unos nuevos métodos multipaso del tipo VSVO, que presentaban buenas propiedades adicionales.

Por otra parte, alrededor de 1970, Stiefel y Bettis (1969), (Bettis, 1970) modificaron los métodos clásicos de diferencias

de Cowell. Bettis dio formulaciones recurrentes válidas para modificar los métodos de Störmer, Cowell, Adams-Bashforth y Adams-Moulton (Norsett, 1969), (Franco, Correas y Petriz, 1997), con orden arbitrario.

En este trabajo estudiaremos el método numérico basado en las llamadas  $\varphi$ -funciones de Ferrándiz (García-Alonso, Reyes, Ferrándiz y Vigo Aguiar, 2009), algoritmo capaz de integrar, bajo ciertas condiciones y sin error de truncación, el oscilador armónico perturbado,  $x''(t) + \alpha^2 x(t) = \varepsilon \cdot f(t, x(t), x'(t))$ . De forma análoga a los métodos basados en G-funciones (García-Alonso y Reyes, 2007), la solución que proporciona este nuevo método se expresa mediante una serie de  $\varphi$ -funciones.

El algoritmo de series de  $\varphi$ -funciones presenta un mejor comportamiento que el basado en G-funciones, pues permite ganar un orden de con respecto a estas, es decir, consigue que el error de truncación contenga a  $\varepsilon^2$  como factor mientras que en el algoritmo basado en G-funciones solo tenía como factor a  $\varepsilon$ .

El trabajo finaliza con un pormenorizado estudio de dos osciladores perturbados, que ilustran el modo de empleo del método y contrastan su buen comportamiento mediante un estudio comparativo de su precisión frente a otros conocidos códigos tales como GEAR, MGEAR y LSODE, utilizando su implementación en MAPLE, para evitar que los resultados queden distorsionados por una mala programación que favorezca el método basado en  $\varphi$ -funciones.

## 2. Preliminares

Consideremos las ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} x''(t) + \alpha^2 x(t) &= \varepsilon \cdot f(t, x(t), x'(t)), \\ x(0) &= x_0 \text{ y } x'(0) = x'_0 \end{aligned} \quad (1)$$

que formulan un PVI correspondiente a un oscilador forzado de frecuencia  $\alpha$  donde  $\alpha \in \mathbf{R}$ , con  $\varepsilon$  un parámetro de perturbación, usualmente pequeño.

La solución de (1),  $x(t)$  obtenida para las condiciones iniciales dadas, es analítica en el intervalo  $[0, T] \subset \mathbf{R}$  y la función de perturbación  $g(t) = f(t, x(t), x'(t))$  admite en  $[0, T]$ , un desarrollo en serie de potencias, absolutamente convergente, de la forma:

$$g(t) = f(t, x(t), x'(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!} \quad (2)$$

En términos del operador diferencial  $D$ , donde  $D^n$  representa  $\left(\frac{d^n}{dt^n}\right)$ , (1) se puede expresar del modo siguiente:

$$\begin{aligned} (D^2 + \alpha^2)x(t) &= \varepsilon \cdot f(t, x(t), x'(t)), \\ x(0) &= x_0 \text{ y } x'(0) = x'_0 \end{aligned} \quad (3)$$

Aplicando el operador diferencial  $D^2 + \beta^2$  a (3), con el fin de anular la perturbación, se obtiene la ecuación de orden superior siguiente:

$$\begin{aligned} D^4 x(t) + (D^2 + \alpha^2)D^2 x(t) &= \\ = \varepsilon \cdot (D^2 + \beta^2)f(t, x(t), x'(t)) \end{aligned} \quad (4)$$

Dado que  $x(0) = x_0$  y  $x'(0) = x'_0$  y como:

$$x''(t) = -\alpha^2 x(t) + \varepsilon \cdot f(t, x(t), x'(t)), \quad (5)$$

entonces:

$$x''(t) = -\alpha^2 x_0 + \varepsilon \cdot f(0, x_0, x'_0) = x''_0 \quad (6)$$

Además:

$$\begin{aligned} x'''(t) &= -\alpha^2 x'(t) + \varepsilon \left[ \frac{\partial f(t, x(t), x'(t))}{\partial t} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f(t, x(t), x'(t))}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f(t, x(t), x'(t))}{\partial x'} x''(t) \right] = \\ &= -\alpha^2 x'(t) + \varepsilon \vec{\nabla} f(t, x(t), x'(t)) (1, x'(t), x''(t)), \end{aligned} \quad (7)$$

entonces:

$$x'''(0) = -\alpha^2 x'(0) + \varepsilon \vec{\nabla} f(0, x_0, x'_0) (1, x'_0, x''_0) = x'''_0, \quad (8)$$

donde  $\vec{\nabla} f$  es la notación usual del vector gradiente

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x'} \right).$$

Nótese que las ecuaciones (6) y (8) están definidas a lo largo de la solución de (1).

Las ecuaciones (4), (6) y (8) permiten definir un nuevo PVI auxiliar:

$$\begin{aligned} D^4 x(t) + (\alpha^2 + \beta^2)D^2 x(t) + \alpha^2 \beta^2 x(t) &= \\ = \varepsilon \cdot (D^2 + \beta^2)f(t, x(t), x'(t)) \end{aligned} \quad (9)$$

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, x''(0) = x''_0, x'''(0) = x'''_0$$

que tiene la misma solución exacta que (1), en el intervalo.

Por brevedad se introduce una notación más compacta, llamando:

$$L_4(x(t)) = ((D^2 + \beta^2)(D^2 + \alpha^2))x(t) \quad (10)$$

El PVI auxiliar (9), se puede escribir del modo siguiente:

$$\begin{aligned} L_4(x(t)) &= \varepsilon \cdot (D^2 + \beta^2)g(t) \\ x(0) &= x_0, x'(0) = x'_0, x''(0) = x''_0, x'''(0) = x'''_0 \end{aligned} \quad (11)$$

Con la ayuda del desarrollo de Taylor de  $g(t)$  dado en (2), el PVI (11), se puede formular mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} L_4(x(t)) &= \varepsilon \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2} + \beta^2 c_n) \frac{t^n}{n!}, \\ x(0) &= x_0, x'(0) = x'_0, x''(0) = x''_0, x'''(0) = x'''_0 \end{aligned} \quad (12)$$

Como es usual, la solución del PVI (12), se puede dividir en dos partes, una corresponde a la solución  $x_h(t)$  asociada al PVI homogéneo con las condiciones iniciales dadas, y la otra parte es la solución del PVI no homogéneo en la que esta y sus tres primeras derivadas se anulan en  $t = 0$ .

Teniendo en cuenta el principio de superposición de soluciones, esta última se puede obtener calculando la solución de los siguientes PVI particulares:

$$\begin{aligned} L_4(x_n(t)) &= \frac{t^n}{n!}, \\ x_n(0) &= x'_n(0) = x''_n(0) = x'''_n(0) = 0, \text{ con } n \geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

combinándolas de forma adecuada con  $\varepsilon$ ,  $c_n$  y  $\beta$ .

Es obvio que la solución de (12) y de (1) se puede expresar como suma de  $x_H(t)$  y una serie, similar a la que aparece en los algoritmos de series de funciones de Scheifele (1971), (Stiefel and Scheifele, 1971), que son generalizadas en términos de unas nuevas funciones llamadas  $\varphi$ -funciones.

### 3. Las $\varphi$ -funciones

En este epígrafe se procede a construir y estudiar las propiedades de las  $\varphi$ -funciones.

A tal efecto se consideran los PVI particulares definidos en (13).

Sea  $x_n(t)$ , con  $n \geq 0$ , solución de (13).

**Definición 1:**  $\psi_n(t) = x_n(t)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$

Es decir las funciones  $\psi_n(t)$   $\forall n \in \mathbf{N}$ , verifican:

$$\begin{aligned} L_4(x_n(t)) &= \frac{t^n}{n!}, \\ x_n(0) &= x'_n(0) = x''_n(0) = x'''_n(0) = 0, \text{ con } n \geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

**Proposición 1:**  $\psi'_n(t) = \psi_{n-1}(t)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$  con  $n \geq 1$ .

**Demostración:**

$$\begin{aligned} L_4(\psi'_n(t)) &= (D^2 + (\alpha^2 + \beta^2)D^2 + \alpha^2\beta^2)(\psi'_n) = \\ &= \frac{d}{dt}(L_4(\psi_n(t))) = \frac{d}{dt}(L_4(\psi_n(t))) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^n}{n!}\right) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned} \quad (14)$$

Teniendo en cuenta la definición de las funciones  $\psi_n(t)$ , dada en (14), se tiene que  $\psi'_n(0) = \psi''_n(0) = \psi'''_n(0) = 0$ .

Y como también  $\psi_n(0) = 0$ , entonces:

$$\psi_n^{(iv)}(0) = D^4\psi_n(0) = -(\alpha^2 + \beta^2)D^2 - \alpha^2\beta^2\psi_n(0) = 0.$$

Luego  $\psi'_n(t)$  y  $\psi_{n-1}(t)$  son soluciones del mismo PVI y por el teorema de unicidad de soluciones podemos afirmar que  $\psi'_n(t) = \psi_{n-1}(t)$ .

**Proposición 2:** Las funciones  $\psi_n(t)$   $\forall n \in \mathbf{N}$ , verifican la siguiente ley de recurrencia:

$$\psi_n(t) + (\alpha^2 + \beta^2)\psi_{n+2}(t) + \alpha^2\beta^2\psi_{n+4}(t) = \frac{t^{n+4}}{(n+4)!}.$$

**Demostración:**

Dado que:

$$L_4(\psi_{n+4}(t)) = (D^4 + (\alpha^2 + \beta^2)D^2 + \alpha^2\beta^2)\psi_{n+4}(t),$$

teniendo en cuenta la definición 1 y aplicando la proposición 1, se obtiene:

$$\psi_n(t) + (\alpha^2 + \beta^2)\psi_{n+2}(t) + \alpha^2\beta^2\psi_{n+4}(t) = \frac{t^{n+4}}{(n+4)!}.$$

Es de resaltar que las expresiones explícitas y analíticas de las funciones  $\psi_n(t)$ , dependen de las frecuencias  $\alpha$  y  $\beta$ .

Consideremos el problema homogéneo con las condiciones iniciales dadas.

Sea  $x_H(t)$  la solución general del problema homogéneo con las condiciones iniciales dadas, dicha solución se obtendrá aplicando el principio de superposición a las soluciones de cuatro PVI homogéneos particulares cuyas expresiones dependerán de los valores de las frecuencias  $\alpha$  y  $\beta$ .

Una vez obtenidas las expresiones analíticas de estas funciones podemos, en cada caso, construir la solución del PVI (11), utilizando éstas, junto a las funciones dadas en la definición 1.

Para no trabajar con dos tipos de funciones, las unificaremos definiendo unas nuevas funciones que llamaremos genéricamente  $\varphi$ -funciones denominación dada por Ferrándiz (García-Alonso, Reyes, Ferrándiz and Vigo Aguiar, 2009).

### 3.1 Caso I ( $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha \neq \beta$ )

**Proposición 3:**

Las  $\psi_n(t)$ -funciones se pueden expresar mediante series:

$$\psi_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+4+n)!} \frac{\beta^{2m+2} - \alpha^{2m+2}}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2m+4+n} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{[n]} t^{2m+4+n}$$

donde  $b_m^{[n]} = \frac{(-1)^m}{(2m+4+n)!} \frac{\beta^{2m+2} - \alpha^{2m+2}}{\beta^2 - \alpha^2}$ , con  $n \geq 0$ .

**Demostración:**

Basta suponer:  $\psi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{[n]} t^k$ ,

Sustituyendo en (14) e identificando coeficientes se obtiene

la ecuación en diferencias:

$$(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)b_{k+4}^{[n]} +$$

$$+ (\alpha^2 + \beta^2)(k+1)(k+2)b_{k+2}^{[n]} + \alpha^2 \beta^2 b_k^{[n]} = \frac{\delta_{k,n}}{k!},$$

de la que conocemos, debido a las condiciones iniciales de (13):

$$b_0^{[n]} = b_1^{[n]} = b_2^{[n]} = b_3^{[n]} = 0.$$

Resolviendo esta ecuación para los distintos valores de  $n$ , se obtienen las fórmulas:

$$\psi_{2r}(t) = \sum_{m=r+2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+r}}{2m!} \frac{\beta^{2m-(2r+2)} - \alpha^{2m-(2r+2)}}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2m}, \text{ con } r \geq 0,$$

$$\psi_{2r-1}(t) = \sum_{m=r+2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+r}}{(2m-1)!} \frac{\beta^{2m-(2r+2)} - \alpha^{2m-(2r+2)}}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2m-1}, \text{ con } r \geq 1.$$

Efectuando el cambio de índices  $m = i + r + 2$ , se obtiene:

$$\psi_{2r}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2(i+r+2))!} \frac{\beta^{2i+2} - \alpha^{2i+2}}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2(i+r+2)},$$

$$\psi_{2r-1}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2(i+r+2)-1)!} \frac{\beta^{2i+2} - \alpha^{2i+2}}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2(i+r+2)-1},$$

Bastaría notar  $2r$  como  $N$  y  $2r-1$  como  $M$  para constatar que las  $\psi_n(t)$ , se pueden expresar de forma única.

Por otra parte, consideremos el problema homogéneo:

$$L_A(x(t)) = 0$$

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_0', x''(0) = x_0'', x'''(0) = x_0''' \quad (15)$$

cuya solución se construirá mediante una combinación lineal de funciones  $\varphi_i(t)$ , con  $i = 0, 1, 2, 3$ , que a continuación se definen.

**Definición 2:**

Sean  $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ , las soluciones de  $L_A(x(t)) = 0$  con condiciones iniciales  $\varphi_i^{(j)}(0) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1, 2, 3$ , siendo  $\delta_{ij}$  la delta de Kronecker.

Es decir  $\varphi_i(t)$ , con  $i = 0, 1, 2, 3$  son las soluciones de los PVI:

$$L_A(\varphi_i(t)) = 0$$

$$\varphi_i^{(j)}(0) = \delta_{ij}, \text{ con } i, j = 0, 1, 2, 3 \quad (16)$$

**Proposición 4:**

Las funciones  $\varphi_n(t)$  con  $n = 0, 1, 2, 3$ , se pueden expresar mediante funciones trigonométricas elementales, de la manera siguiente:

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} (\alpha^2 \cos(\beta t) - \beta^2 \cos(\alpha t))$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left( \frac{\alpha^2}{\beta} \sin(\beta t) - \frac{\beta^2}{\alpha} \sin(\alpha t) \right)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} (\cos(\beta t) - \cos(\alpha t))$$

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left( \frac{1}{\beta} \sin(\beta t) - \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t) \right)$$

**Demostración:**

Basta aplicar los métodos tradicionales de resolución de EDO'S.

**Corolario 1:**

Las funciones  $\varphi_n(t)$  con  $n = 0, 1, 2, 3$ , se pueden expresar mediante las series:

$$\varphi_0(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!} \frac{\alpha^2 \beta^2 (\beta^{2m-2} - \alpha^{2m-2})}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2m},$$

$$\varphi_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!} \frac{\alpha^2 \beta^2 (\beta^{2m-2} - \alpha^{2m-2})}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2m+1},$$

$$\varphi_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!} \frac{\beta^{2m} - \alpha^{2m}}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2m},$$

$$\varphi_3(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!} \frac{\beta^{2m} - \alpha^{2m}}{\beta^2 - \alpha^2} t^{2m+1},$$

**Demostración:**

Basta desarrollar en serie de potencias las funciones trigonométricas que intervienen en proposición 4.

**Proposición 5:**

El sistema  $\{\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\}$  es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación  $L_A(x(t)) = 0$ .

**Demostración:**

Evidentemente el Wronskiano  $W(\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) = 1$

**Teorema 1:**

La solución general de (15) es:

$$x_H(t) = x_0 \varphi_0(t) + x_0' \varphi_1(t) + x_0'' \varphi_2(t) + x_0''' \varphi_3(t) .$$

**Demostración:**

Por la proposición 5:

$$x_H(t) = C_0 \varphi_0(t) + C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t) + C_3 \varphi_3(t) ,$$

y como  $x_H^{(j)}(0) = C_j \varphi_j^{(j)}(0) = C_j$  , con  $j = 0, 1, 2, 3$ ,

entonces:

$$x_H(t) = x_0 \varphi_0(t) + x_0' \varphi_1(t) + x_0'' \varphi_2(t) + x_0''' \varphi_3(t) .$$

**Teorema 2:**

La solución general de (12) es:

$$x(t) = x_H(t) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2} + \beta^2 c_n) \psi_n(t) .$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned} L_A(x(t)) &= L_A(x_H(t)) + \varepsilon L_A\left(\sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2} + \beta^2 c_n) \psi_n(t)\right) = \\ &= \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2} + \beta^2 c_n) L_A(\psi_n(t)) = \\ &= \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2} + \beta^2 c_n) \frac{t^n}{n!} = \varepsilon \cdot (D^2 + \beta^2) g(t) . \end{aligned}$$

Veamos que  $x(t)$  verifica las condiciones iniciales del problema.

Utilizando una notación más compacta, si

$$v(t) = (\varphi_0(t) \ \varphi_1(t) \ \varphi_2(t) \ \varphi_3(t)) \text{ y } x = (x_0 \ x_0' \ x_0'' \ x_0''')^t ,$$

entonces:

$$\begin{aligned} x(0) &= v(0) \cdot x + \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2} + \beta^2 c_n) \psi_n(0) = v(0) \cdot x = x_0 \\ x'(0) &= v'(0) \cdot x + \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2} + \beta^2 c_n) \psi_n'(0) = v'(0) \cdot x = x_0' \\ x''(0) &= v''(0) \cdot x + \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2} + \beta^2 c_n) \psi_n''(0) = v''(0) \cdot x = x_0'' \\ x'''(0) &= v'''(0) \cdot x + \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2} + \beta^2 c_n) \psi_n'''(0) = v'''(0) \cdot x = x_0''' \end{aligned} \quad (17)$$

Luego  $x(t)$  es solución de (12).

La relación expresada en el teorema anterior es análoga a:

$$x(t) = G_0(t) x_0 + G_1(t) x_0' + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_n G_{n+2}(t) \quad (18)$$

obtenida para el oscilador armónico y las  $G$ -funciones de Scheifele (García-Alonso y Reyes, 2007).

Utilizando las funciones  $\psi_n(t)$ , es posible extender las funciones  $\varphi_n(t)$ , del modo siguiente:

**Definición 3:**

$$\varphi_{n+4}(t) = \psi_{n(t)}, \text{ con } n \geq 0.$$

Es sencillo comprobar, basándose en la definición y en la proposición 1, que las  $\varphi$ -funciones verifican las siguientes relaciones:

$$\varphi_0'(t) = -\alpha^2 \beta^2 \varphi_3 \quad (19)$$

$$\varphi_1'(t) = \varphi_0(t) \quad (20)$$

$$\varphi_2'(t) = \varphi_1(t) - (\alpha^2 + \beta^2) \varphi_3(t) \quad (21)$$

$$\varphi_n'(t) = \varphi_{n-1}(t) \quad (22)$$

Estas relaciones muestran directamente que su clausura lineal es cerrada respecto a la derivación.

Utilizando las  $\varphi$ -funciones el **Teorema 2** se puede reescribir, obteniéndose la solución de (12), como:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \varphi_0(t) + x_0' \varphi_1(t) + x_0'' \varphi_2(t) + x_0''' \varphi_3(t) + \\ &+ \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2} + \beta^2 c_n) \varphi_n \end{aligned} \quad (23)$$

o bien:

$$x(t) = v(t) \cdot x + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2} + \beta^2 c_n) \varphi_{n+4}(t) \quad (24)$$

utilizando una notación más compacta.

Además, es posible establecer relaciones entre las  $G$ -funciones de Scheifele y las  $\varphi$ -funciones de Ferrándiz.

Si se introduce la notación  $\varphi(t, \alpha, \beta)$ , con el fin de resaltar la dependencia de las  $\varphi$ -funciones respecto de las frecuencias  $\alpha$  y  $\beta$ , de forma análoga  $G_n(t, \alpha)$  y  $G_n(t, \beta)$ , para las  $G$ -funciones, entonces se puede probar que:

$$\varphi_n(t, \alpha, \beta) = \frac{\alpha^2 G_n(t, \alpha) - \beta^2 G_n(t, \beta)}{\alpha^2 - \beta^2} \forall n \geq 2 \quad (25)$$

y que:

$$G_n(t, \alpha) = \varphi_n(t, \alpha, \beta) + \beta^2 \varphi_{n+2}(t, \alpha, \beta) \forall n \geq 2 \quad (26)$$

Aclaremos que las  $G_n(t, \alpha)$  y  $G_n(t, \beta)$  se calculan para las ecuaciones  $x''(t) + \alpha^2 x(t) = \varepsilon \cdot f(t, x(t), x'(t))$  y

$x''(t) + \beta^2 x(t) = \varepsilon \cdot f(t, x(t), x'(t))$  , respectivamente y vienen dadas por las expresiones (García-Alonso y Reyes, 2007):

$$G_n(t, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha^2)^k \frac{t^{2k+n}}{(2k+n)!} \quad (27)$$

$$G_n(t, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\beta^2)^k \frac{t^{2k+n}}{(2k+n)!} \quad (28)$$

### 3.2 Caso II ( $\alpha \neq 0, \beta = 0$ )

Las fórmulas, expresiones e igualdades correspondientes a este caso, se pueden obtener mediante un proceso análogo al Caso I, o bien mediante el cálculo de límites, sobre las expresiones obtenidas en el caso anterior, cuando  $\beta$  tiende a cero (García-Alonso, Reyes, Ferrándiz y Vigo Aguiar, 2009).

Las  $\varphi$ -funciones  $\varphi_n(t)$  para  $n = 1, 2, 3$ , se expresan como:

$$\varphi_0(t) = 1 \quad (29)$$

$$\varphi_1(t) = t \quad (30)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1 - \cos(\alpha t)}{\alpha^2} \quad (31)$$

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{\alpha^2} \left( t - \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha t) \right) \quad (32)$$

definiéndose  $\varphi_{n+4}(t) = \psi_n(t)$  para  $n \geq 0$ , siendo

$$\psi_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+4+n)!} \alpha^{2m} t^{2m+4+n} \quad (33)$$

En este caso la solución de (12) es:

$$x(t) = v(t) \cdot x + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} \varphi_{n+4}(t) \quad (34)$$

### 3.3 Otros casos

Las fórmulas, expresiones e igualdades de las  $\varphi$ -funciones junto a la expresión analítica de la solución de (12), para el Caso III ( $\alpha = 0, \beta \neq 0$ ) y Caso IV ( $\alpha = \beta \neq 0$ ), puede obtenerse calculando, en las fórmulas del Caso I, los límites cuando  $\alpha$  tiende a cero y  $\alpha$  tiende a  $\beta$ , respectivamente.

Para el Caso V ( $\alpha = \beta = 0$ ), las fórmulas de las  $\varphi$ -funciones y la expresión analítica de la solución de (12), se calculan mediante un proceso similar al Caso I, obteniéndose las expresiones:

$$\varphi_0(t) = 1, \varphi_1(t) = t, \varphi_2(t) = \frac{t^2}{2}, \varphi_3(t) = \frac{t^3}{3!}, \quad (35)$$

definiéndose

$$\varphi_{n+4}(t) = \psi_n(t) \text{ para } n \geq 0 \quad (36)$$

$$\text{siendo } \psi_n(t) = \frac{t^{4+n}}{(4+n)!} \quad (37)$$

$$\text{verificándose que } \varphi_n(t, 0, 0) = G(t, 0) \forall n \geq 2 \quad (38)$$

En este Caso V, la solución de (12) es

$$x(t) = v(t) \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} \varphi_{n+4}(t) \quad (39)$$

## 4. Método de series de $\varphi$ -funciones

La novedad del método de series de  $\varphi$ -funciones, consiste en el uso de una segunda frecuencia para eliminar en cierta medida los efectos de la perturbación.

Consideremos el PVI (1) y sea  $x(t)$  la solución, que suponemos analítica en el intervalo  $[0, T] \subset \mathbf{R}$ , es decir  $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$  y que la función de perturbación  $g(t)$  admite en  $[0, T]$ , un desarrollo en serie de potencias, absolutamente convergente, de la forma  $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$ .

Como  $x''(t) + \alpha^2 x(t) = \varepsilon g(t)$ , entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} \frac{t^n}{n!} + \alpha^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}, \text{ con } n \geq 4 \quad (40)$$

de donde se deduce que

$$a_{n+2} + \alpha^2 a_n = \varepsilon c_n, \text{ con } n \geq 0, \text{ con} \quad (41)$$

$$c_n = \frac{d^n g(0)}{dt^n} \quad (42)$$

$$\text{Siendo } a_0 = x_0, a_1 = x'_0. \quad (43)$$

Por (6), (8) y (41), es posible plantear la siguiente recurrencia:

$$a_0 = x_0,$$

$$a_1 = x'_0,$$

$$a_2 = -\alpha^2 a_0 + \varepsilon c_0 = -\alpha^2 a_0 + \varepsilon f(0, x(0), x'(0)) = x''_0, \quad (44)$$

$$a_3 = -\alpha^2 a_1 + \varepsilon c_1 = -\alpha^2 a_1 + \varepsilon f'(0, x(0), x'(0)) = x'''_0,$$

$$a_n = -\alpha^2 a_{n-2} + \varepsilon c_{n-2} = -\alpha^2 a_{n-2} + \varepsilon f^{(n-2)}(0, x(0), x'(0)),$$

con  $n \geq 4$ .

Por el teorema 2, se sabe que:

$$x(t) = v(t) \cdot \mathbf{x} + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2} + \beta^2 c_n) \varphi_{n+4}(t) \quad (45)$$

definiendo:

$$b_0 = a_0, b_2 = a_2, b_3 = a_3, b_n = \varepsilon (c_{n-2} + \beta^2 c_{n-4}), \text{ con } n \geq 4 \quad (46)$$

de (41), se deduce que:

$$b_n = a_n + (\alpha^2 + \beta^2) a_{n-2} + \alpha^2 \beta^2 a_{n-4}, \text{ con } n \geq 4 \quad (47)$$

Por tanto,

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(t), \quad (48)$$



que prescindiendo de truncaciones, es análoga a las expresiones obtenidas para desarrollos en  $G$ -funciones (Stiefel and Scheifele, 1971), (Scheifele, 1971).

Si notamos por  $x_1, x_1', x_1'',$  y  $x_1'''$  las aproximaciones a  $x(h), x'(h), x''(h),$  y  $x'''(h)$  respectivamente, la aproximación a la solución, utilizando  $(p+1)$   $\varphi$ -funciones, vendrá dada por:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{n=0}^p b_n \varphi_n(h) \\ x_1' &= b_0 \varphi_0'(h) + b_1 \varphi_1'(h) + b_2 \varphi_2'(h) + b_3 \varphi_3'(h) + \sum_{n=4}^p b_n \varphi_{n-1}(h) \\ x_1'' &= b_0 \varphi_0''(h) + b_1 \varphi_1''(h) + b_2 \varphi_2''(h) + b_3 \varphi_3''(h) + \sum_{n=4}^p b_n \varphi_{n-2}(h) \\ x_1''' &= b_0 \varphi_0'''(h) + b_1 \varphi_1'''(h) + b_2 \varphi_2'''(h) + b_3 \varphi_3'''(h) + \sum_{n=4}^p b_n \varphi_{n-3}(h) \end{aligned} \quad (49)$$

El segundo paso de integración, presenta la dificultad de que la función de perturbación depende explícitamente de  $t$ . Para efectuar este segundo paso de integración, se toman como valores iniciales  $x_1, x_1', x_1'',$  y  $x_1'''$  es decir se considera el PVI:

$$\begin{aligned} L_4(x(t)) &= \varepsilon f(t, x(t), x'(t)) \\ x(h) &= x_1, x'(h) = x_1', x''(h) = x_1'', x'''(h) = x_1''', \end{aligned} \quad (50)$$

siendo necesario efectuar el cambio de origen  $t = t^* + h$  y considerar  $x^*(t^*) = x(t^* + h)$ , con lo que (50) se expresa como:

$$\begin{aligned} L_4(x^*(t^*)) &= \varepsilon f((t^* + h), x(t^* + h), x'(t^* + h), x''(t^* + h)) = \\ &= \varepsilon f((t^* + h), x^*(t^*), x^{*'}(t^*)) \\ x^*(0) &= x(h) = x_1, x^{*'}(0) = x'(h) = x_1', \\ x^{*''}(0) &= x''(h) = x_1'', x^{*'''}(0) = x'''(h) = x_1''', \end{aligned} \quad (51)$$

Se define:

$$\begin{aligned} a_0 &= x_1, \\ a_1 &= x_1', \\ a_2 &= -\alpha^2 a_0 + \varepsilon c_0 = -\alpha^2 a_0 + \varepsilon f(h, x^*(0), x^{*'}(0)) = x_1'', \\ a_3 &= -\alpha^2 a_1 + \varepsilon c_1 = -\alpha^2 a_1 + \varepsilon f'(h, x^*(0), x^{*'}(0)) = x_1''', \\ a_n &= -\alpha^2 a_{n-2} + \varepsilon c_{n-2} = -\alpha^2 a_{n-2} + \varepsilon f^{(n-2)}(h, x^*(0), x^{*'}(0)), \\ &\text{con } n \geq 4. \end{aligned} \quad (52)$$

Recurrencias que permiten el cálculo de las  $b_n$  correspondientes, así como el cálculo de  $x_2, x_2', x_2'',$  y  $x_2'''$ , no siendo necesario calcular el valor de las  $\varphi$ -funciones por tenerlo calculado en el paso anterior.

Esta estrategia nos permite reiniciar el método y diseñar el algoritmo que se describe a continuación.

Si suponemos calculada la aproximación a la solución  $x_i = x(ih)$  y a su derivada  $x_i' = x'(ih)$  entonces:

$$\begin{aligned} a_0 &= x_i, \\ a_1 &= x_i', \\ a_2 &= -\alpha^2 a_0 + \varepsilon f(ih, x^*(0), x^{*'}(0)) \\ a_3 &= -\alpha^2 a_1 + \varepsilon f'(ih, x^*(0), x^{*'}(0)) \\ a_n &= -\alpha^2 a_{n-2} + \varepsilon f^{(n-2)}(ih, x^*(0), x^{*'}(0)), \text{ con } n \geq 4. \\ b_0 &= a_0, b_1 = a_1, b_2 = a_2, \\ b_3 &= a_3, b_n = a_n + (\alpha^2 + \beta^2) a_{n-2} + \alpha^2 \beta^2 a_{n-4}, \\ &\text{con } n \geq 4, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \sum_{n=0}^p b_n \varphi_n(h) \\ x_{i+1}' &= b_0 \varphi_0'(h) + b_1 \varphi_1'(h) + b_2 \varphi_2'(h) + b_3 \varphi_3'(h) + \sum_{n=4}^p b_n \varphi_{n-1}(h) \\ x_{i+1}'' &= b_0 \varphi_0''(h) + b_1 \varphi_1''(h) + b_2 \varphi_2''(h) + b_3 \varphi_3''(h) + \sum_{n=4}^p b_n \varphi_{n-2}(h) \\ x_{i+1}''' &= b_0 \varphi_0'''(h) + b_1 \varphi_1'''(h) + b_2 \varphi_2'''(h) + b_3 \varphi_3'''(h) + \sum_{n=4}^p b_n \varphi_{n-3}(h) \end{aligned}$$

teniendo en cuenta las siguientes relaciones:

$$\varphi_0'(t) = -\alpha^2 \beta^2 \varphi_2(t) \quad (54)$$

$$\varphi_0''(t) = -\alpha^2 \beta^2 \varphi_2'(t) \quad (55)$$

$$\varphi_2'(t) = \varphi_0(t) - (\alpha^2 + \beta^2) \varphi_2(t) \quad (56)$$

$$\varphi_2''(t) = \varphi_0'(t) - (\alpha^2 + \beta^2) \varphi_2'(t) \quad (57)$$

## 4.1 Cálculo del residuo

Si se nota

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+2} + \beta^2 c_n) \varphi_{n+4}(t) \quad (58)$$

la solución de (12) se puede expresar como:

$$x(t) = v(t) \cdot x + \varepsilon S(t), \quad (59)$$

truncando la solución de (12) obtenida en el **Teorema 2**, con  $(m+1)$   $\varphi$ -funciones y  $m \geq 4$ , se llega a la expresión finita siguiente:

$$x_m(t) = v(t) \cdot x + \varepsilon \sum_{n=0}^{m-4} (c_{n+2} + \beta^2 c_n) \varphi_{n+4}(t) \quad (60)$$

El correspondiente residuo es:

$$\begin{aligned} R_m(t) &= \varepsilon \cdot (D^2 + \beta^2) g(t) - L_4(x_m(t)) = \\ &= \varepsilon \cdot \sum_{n=m-3}^{\infty} (c_{n+2} + \beta^2 c_n) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (61)$$

En consecuencia el parámetro de perturbación  $\varepsilon$  es factor del residuo, por lo tanto el residuo será pequeño con  $\varepsilon$ . Si  $\varepsilon = 0$ , el método de series de  $\varphi$ -funciones, integra sin error de truncación el problema (12), con tan sólo el término  $v(t) \cdot x$ .

## 5. Ejemplos numéricos

Se presenta una aplicación del método de series de  $\varphi$ -funciones al cálculo de la solución de PVI's, *stiff* altamente oscilatorios.

El buen comportamiento del método basado en  $\varphi$ -funciones se evidencia mediante su comparación con otros conocidos códigos, implementados en el *packaged* DSOLVE NUMERIC del programa MAPLE, tales como LSODE, método que obtiene una solución numérica que se calcula utilizando el Livermore Stiff ODE solver. GEAR, que proporciona una solución numérica calculada por medio del método de extrapolación racional de Burlirsch-Stoer. MGEAR [msteppart], método multipaso, adecuado para los sistemas stiff. Para realizar la comparación de los errores producidos se ha utilizado la implementación en MAPLE de los códigos anteriormente citados, para asegurar que los resultados no son distorsionados por una deficiente programación que favorezca el nuevo código y además, porque esta aplicación permite un fácil cambio del número de dígitos usado en los cálculos y dispone de una adecuada capacidad gráfica.

### 5.1 Un problema altamente oscilatorio

Se considera el problema altamente oscilatorio, propuesto por Petzold (Palacios, 2003), (Petzold, 1981), en el que aparece el oscilador armónico:

$$x''(t) + \theta^2 x(t) = a \sin(\theta t),$$

$$\text{con } x(0) = 1, x'(0) = -\frac{a}{2\theta} \quad (62)$$

y solución exacta

$$x(t) = \left(1 - \frac{a}{2\theta^2} t\right) \cos(\theta t) \quad (63)$$

siendo su derivada

$$x'(t) = -\theta \left(1 - \frac{a}{2\theta^2} t\right) \sin(\theta t) - \frac{a}{2\theta} \cos(\theta t) \quad (64)$$

Aunque la solución puede ser calculada exactamente mediante procedimientos analíticos, este problema se propone para ilustrar cómo trabaja el método de series de  $\varphi$ -funciones con perturbación armónica altamente oscilatoria.

Aplicando el operador  $D^2 + \beta^2$ , con  $\alpha = \beta = \theta \neq 0$ , se obtiene el PVI:

$$x^{(IV)}(t) + 2\theta^2 x''(t) + \theta^4 x(t) = 0$$

$$x(0) = 1, x'(0) = -\frac{a}{2\theta}, x''(0) = -\theta^2, x'''(0) = \frac{3a\theta}{2} \quad (65)$$

que es posible integrar exactamente mediante el método de series de  $\varphi$ -funciones, con tan solo las cuatro primeras, pero no es posible integrarlo exactamente con el método de series de  $G$ -funciones.

A tal efecto, se construyen las  $\varphi$ -funciones siguientes, correspondientes al Caso IV:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(m-1)}{(2m)!} \theta^{2m} t^{2m} = \\ &= \cos(\theta t) + \frac{\theta}{2} t \sin(\theta t), \\ \varphi_1(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(m-1)}{(2m+1)!} \theta^{2m} t^{2m+1} = \\ &= -\frac{t}{2} \cos(\theta t) + \frac{3}{2\theta} t \sin(\theta t), \\ \varphi_2(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(m)}{(2m)!} \theta^{2m-2} t^{2m} = -\frac{t}{2\theta} \sin(\theta t), \\ \varphi_3(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(m)}{(2m+1)!} \theta^{2m-2} t^{2m+1} = \\ &= -\frac{1}{2\theta^3} \sin(\theta t) - \frac{t}{2\theta^2} \cos(\theta t), \\ \varphi_n(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(m+1)}{(2m+n)!} \theta^{2m} t^{2m+n}, \forall n \geq 4. \end{aligned} \quad (66)$$

Partimos  $x_0$  y de  $x'_0$ , par calcular  $x'_1$  y  $x'_1$ . En un primer paso de integración se obtienen las recurrencias:

$$\begin{aligned} a_0 &= x_0, \\ a_1 &= x'_0, \\ a_2 &= -\theta^2 a_0 + c_0 = -\theta^2 a_0 = x''_0, \\ a_3 &= -\theta^2 a_1 + c_1 = -\theta^2 a_1 + \theta a_0 = x'''_0, \\ a_n &= -\theta^2 a_{n-2} + c_0 = -\theta^2 a_{n-2} + \\ &+ a \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} \theta^j \sin\left(j \frac{\pi}{2}\right) = x''_0, \text{ con } n \geq 4. \end{aligned} \quad (67)$$

y se calculan los coeficientes  $b_k$  del desarrollo en serie de  $\varphi$ -funciones mediante las relaciones:

$$b_0 = a_0, b_2 = a_2, b_3 = a_3, b_n = a_n + 2\theta^2 a_{n-2} + \theta^4 a_{n-4} \text{ con } n \geq 4,$$

Si notamos por  $x_1$  y  $x'_1$  las aproximaciones a  $x(h)$  y  $x'(h)$ , respectivamente, la aproximación a la solución, utilizando  $(p+1)$   $\varphi$ -funciones, vendrá dada por:

$$x_1 = \sum_{n=0}^p b_n \varphi_n(h) \quad (68)$$

$$x'_1 = b_0 \varphi'_0(h) + b_1 \varphi'_1(h) + b_2 \varphi'_2(h) + b_3 \varphi'_3(h) + \sum_{n=4}^p b_n \varphi'_{n-1}(h) \quad (69)$$

El segundo paso de integración presenta la dificultad de que la función de perturbación depende explícitamente de  $t$ . Para efectuar este segundo paso se toman como valores iniciales  $x_1$  y  $x'_1$ , es decir, se considera el PVI:

$$\begin{aligned} L_A(x(t)) &= a \sin(\theta t) \\ x(h) &= x_1, x'(h) = x'_1 \end{aligned} \quad (70)$$



realizando el cambio de variable independiente  $t = t^* + h$  por el que  $x^*(t^*) = x(t^* + h)$ , (70) se expresa como:

$$L_4(x^*(t^*)) = a \sin(\theta(t^* + h))$$

$$x^*(0) = x(h) = x_1, x^{*'}(0) = x'(h) = x_1'$$

Obteniéndose las recurrencias:

$$\begin{aligned} a_0 &= x_1, \\ a_1 &= x_1', \\ a_2 &= -\theta^2 a_0 + c_0 = -\theta^2 a_0 + f'(x^*(0), x^{*'}(0), h) = \\ &= -\theta^2 a_0 + a \sin(\theta h) = x_1'' \\ a_3 &= -\theta^2 a_1 + c_1 = -\theta^2 a_1 + f'(x^*(0), x^{*'}(0), h) = \\ &= -\theta^2 a_1 + a \cos(\theta h) = x_1''' \\ a_n &= -\theta^2 a_{n-2} + c_{n-2} = -\theta^2 a_{n-2} + f^{(n-2)}(x^*(0), x^{*'}(0), h) \\ &= -\theta^2 a_{n-2} + \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} \theta^j a \sin\left(\theta h + j \frac{\pi}{2}\right), \text{ con } n \geq 4. \end{aligned} \quad (71)$$

Recurrencias que permiten el cálculo de las  $b_n$  correspondientes así como el cálculo de  $x_2, x_2', x_2''$  y  $x_2'''$ , no siendo necesario calcular el valor de las  $\varphi$ -funciones por tenerlo calculado en el paso anterior.

Esta estrategia nos permite reiniciar el método y diseñar el algoritmo que se describe a continuación.

Si calculamos la aproximación a la solución  $x_i = x(ih)$  y  $x_i' = x'(ih)$ , entonces la aproximación a la solución  $x_{i+1}$  y a su derivada  $x_{i+1}'$ , viene dada mediante el algoritmo descrito en (53).

$$\begin{aligned} a_0 &= x_i, \\ a_1 &= x_i', \\ a_2 &= -\theta^2 a_0 + a \sin(\theta h i), \\ a_3 &= -\theta^2 a_1 + a \cos(\theta h i), \\ a_n &= -\theta^2 a_{n-2} + \theta_{n-2} a \sin\left(\theta h i + (n-2) \frac{\pi}{2}\right) + \\ &+ a \sum_{j=0}^{n-3} \binom{n-2}{j} \theta^j \sin\left(\theta h i + j \frac{\pi}{2}\right), \text{ con } n \geq 4, \\ b_0 &= a_0, b_1 = a_1, b_2 = a_2, b_3 = a_3, \\ b_n &= a_n + 2\theta^2 a_{n-2} + \theta^4 a_{n-4}, \text{ con } n \geq 4, \\ x_{i+1} &= \sum_{j=0}^3 b_j \varphi_j(h), \\ x_{i+1}' &= \sum_{j=0}^3 b_j \varphi_j'(h). \end{aligned} \quad (72)$$

En la figura 1 y en la figura 2 se muestran los gráficos obtenidos, con 100 dígitos, del logaritmo del valor absoluto del error relativo de la solución  $x(t)$  y su derivada  $x'(t)$  respectivamente, para  $\theta = 1000$  y  $a = 100$ , calculados mediante (53), con cuatro  $\varphi$ -funciones y tamaño de paso  $h = 0.9$ , frente a los gráficos correspondientes al logaritmo del valor absoluto del error relativo de los métodos LSODE[BACKFUNC] con  $tol = 10^{-14}$ ,

MGEAR con  $errorper = Float(1,-9)$  y GEAR con  $errorper(1,-8)$ .

En las figuras 3 y 4 se ha representado, en el eje de abscisas, el tiempo de computación, utilizando una escala logarítmica y en

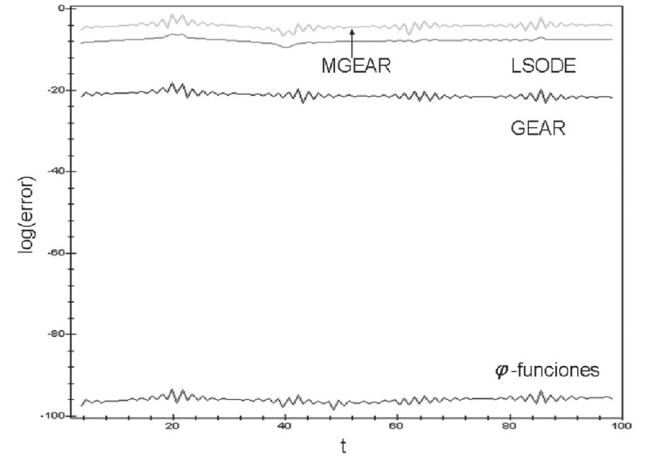


Fig. 1. Gráfico de error de la solución  $x(t)$  con cuatro  $\varphi$ -funciones y  $h = 0.9$ .

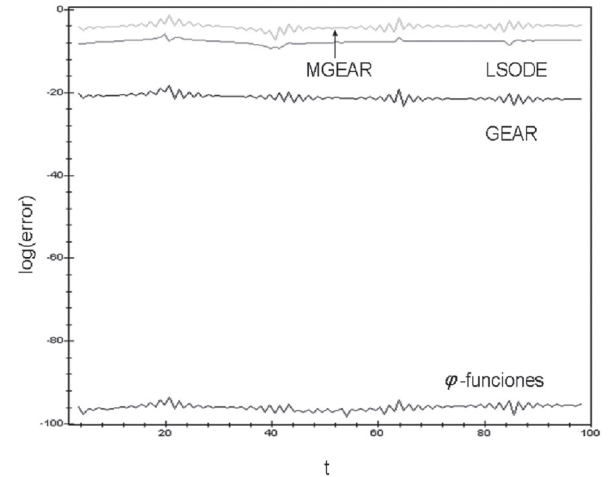


Fig. 2. Gráfico de error de la derivada  $x'(t)$  con cuatro  $\varphi$ -funciones y  $h = 0.9$ .

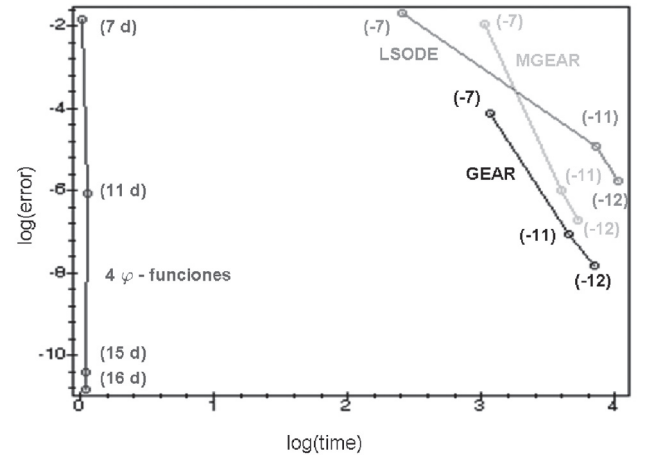


Fig. 3. Gráfico de eficiencia para el problema 5.1. Error en la coordenada  $x(t)$  para el último punto,  $t = 100$ , versus tiempo de computación para diferentes métodos.

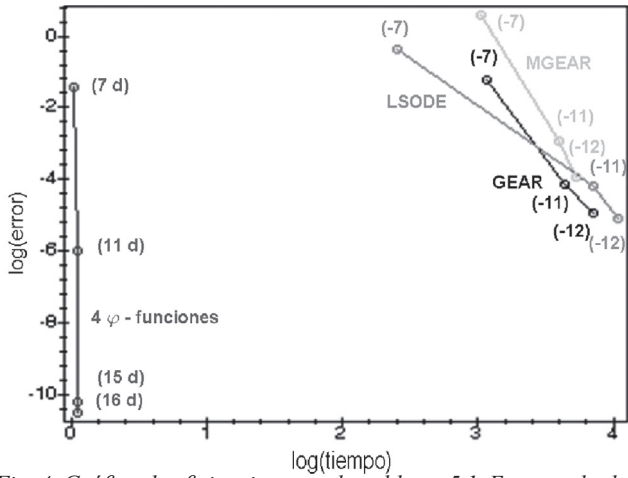


Fig. 4. Gráfico de eficiencia para el problema 5.1. Error en la derivada  $x'(t)$  para el último punto,  $t = 100$ , versus tiempo de computación para diferentes métodos.

el eje de ordenadas el logaritmo decimal del error de integración en el último punto,  $t = 100$ . En las figuras 3 y 4 se muestran entre paréntesis, el logaritmo decimal de las tolerancias usadas en los códigos estándar. El número de dígitos del método de series de  $\varphi$ -funciones se representa en las figuras 3 y 4 entre paréntesis, seguido de "d". La longitud de la mantisa utilizada por MAPLE se ajusta de acuerdo con las tolerancias del integrador, usándose  $-\log(tol) + 4$  dígitos, con el fin de evitar falsos aumentos en el tiempo de computación. El tamaño de paso es también  $h = 0.9$ .

En el caso de usar más  $\varphi$ -funciones, los resultados son análogos, ya que el método integra exactamente el problema, con tan solo las cuatro primeras  $\varphi$ -funciones.

## 5.2 Oscilador lineal con perturbación cuadrática

Se considera el mismo problema propuesto por Stiefel y Scheifele (1971), (Stiefel and Scheifele, 1971), para introducir el método de series de  $G$ -funciones.

$$\begin{aligned} x'' + \alpha^2 x &= \varepsilon x^2 \\ x(0) &= 1 \text{ y } x'(0) = 0 \end{aligned} \quad (73)$$

Utilizaremos, para contrastar el método, la integral primera<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Se considera la ecuación diferencial  $x''(t) + x(t) - \varepsilon x^2(t) = 0$ . Derivando

respecto a  $t$ , la función  $H(x(t), x'(t)) = \frac{1}{2}(x^2(t) + x'^2(t)) - \frac{\varepsilon}{3}x^3(t)$

se obtiene  $x'(t)x''(t) + x(t)x'(t) - \varepsilon x^2(t)x'(t) = x'(t)(x''(t) + x(t) - \varepsilon x^2(t))$ , que es 0 cuando  $x(t)$  es solución de la ecuación diferencial dada. A las funciones que como en el caso de la función son constantes sobre las soluciones de la ecuación diferencial dada, se les llama integrales primeras.

para  $\alpha = 1$ .

$$H(x, x') = \frac{1}{2}(x^2 + x'^2) - \frac{\varepsilon}{3}x^3 \quad (74)$$

Para resolver este problema por el método de series de  $\varphi$ -funciones se toma como segunda frecuencia  $\beta = 2$  y  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Por tanto las  $\varphi$ -funciones utilizadas, corresponden a las del caso I.

Sea  $x(t)$  la solución del problema anterior, que suponemos analítica, por lo que

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_k, \text{ de donde} \quad (75)$$

$$x^2(t) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} \right) \quad (76)$$

llamando  $u_k = a_k \frac{t^k}{k!}$  y aplicando la Regla de Cauchy para el producto de series se obtiene:

$$\begin{aligned} x^2 &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (u_0 u_k + u_1 u_{k-1} + \dots + u_k u_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^k u_i u_{k-i} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^k a_i \frac{t^i}{i!} a_{k-i} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^k a_i a_{k-i} \frac{t^i}{i!} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a_i a_{k-i} \right) \frac{t^k}{k!} \end{aligned} \quad (77)$$

sustituyendo esta expresión en el PVI (73), obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} \frac{t^k}{k!} + \alpha^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} = \varepsilon \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} \right) \quad (78)$$

Identificando coeficientes se establecen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} a_0 &= x_0, \\ a_1 &= x'_0, \\ a_2 &= -\alpha^2 a_0 + \varepsilon c_0 = -\alpha^2 a_0 + \varepsilon x_0^2, \\ a_{k+2} + \alpha^2 a_k &= \varepsilon \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a_i a_{k-i} \quad \forall k \geq 2 \end{aligned} \quad (79)$$

que nos permiten definir la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned} b_i &= a_i \quad i = 0, 1, 2, 3 \\ b_{k+2} &= a_{k+2} + (\alpha^2 + \beta^2) a_k + \alpha^2 \beta^2 a_{k-2} \quad \forall k \geq 4 \end{aligned} \quad (80)$$

Denotando por  $x_i$  y  $x'_i$  las aproximaciones a  $x(h)$  y  $x'(h)$  respectivamente, la aproximación a la solución y sus derivadas, con  $(p+1)$   $\varphi$ -funciones, vendrá dada por:

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{n=0}^p b_n \varphi_n(h) \\ x'_i &= b_0 \varphi'_0(h) + b_1 \varphi_0(h) + b_2 \varphi'_2(h) + b_3 \varphi_2(h) + \sum_{n=4}^p b_n \varphi_{n-1}(h) \end{aligned} \quad (81)$$

Una vez obtenido el valor de las  $\varphi$ -funciones, cada paso de inte-

gración, se completa mediante el algoritmo siguiente:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= x_i, \\
 a_1 &= x'_i, \\
 a_2 &= -\alpha^2 a_0 + \varepsilon x''_i, \\
 a_3 &= -\alpha^2 a_1 + 2\varepsilon x'_i x''_i, \\
 a_{k+2} &= -\alpha^2 a_k + \varepsilon \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_j a_{k-j}, \text{ con } 2 \leq k \leq p-2, \\
 b_i &= a_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \\
 b_{k+2} &= a_{k+2} + (\alpha^2 + \beta^2) a_k + \alpha^2 \beta^2 a_{k-2}, \text{ con } 2 \leq k \leq p-2, \\
 x_{i+1} &= \sum_{n=0}^p b_n \varphi_n(h), \\
 x'_{i+1} &= b_0 \varphi'_0(h) + b_1 \varphi'_1(h) + b_2 \varphi'_2(h) + b_3 \varphi'_3(h) + \sum_{m=4}^p b_m \varphi'_{m-1}(h)
 \end{aligned} \tag{82}$$

En la figura 5 se presenta una comparación del nuevo algoritmo frente a los códigos LSODE, MGEAR y GEAR, implementados en MAPLE. La información de la figura está organizada del mismo modo que en las figuras 3 y 4. El tamaño de paso es  $h = 0.1$ .

La figura 6 proporciona información sobre las ventajas de usar  $\varphi$ -funciones en lugar de  $G$ -funciones. El tamaño de paso es también  $h = 0.1$ . Como puede observarse para  $\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $\varepsilon = 10^{-8}$  y  $\varepsilon = 10^{-16}$ , el método de series de  $\varphi$ -funciones presenta un mejor comportamiento que el método de series de  $G$ -funciones, pues permite ganar un orden de  $\varepsilon^2$  con respecto a estas.

## 6. Comentarios finales

Se estudia una sucesión de funciones analíticas dependientes  $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  de dos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , que generaliza a las  $G$ -funciones de Scheifele y nos permite presentar un método de integración numérica capaz, bajo ciertas hipótesis, de integrar exactamente el problema perturbado.

En los experimentos numéricos se pone de manifiesto que el método de series basado en  $\varphi$ -funciones, compite exitosamente con otros métodos muy conocidos, tales como GEAR, MGEAR y LSODE, implementados en MAPLE.

La sencillez de la construcción teórica de las  $\varphi$ -funciones hace del método numérico de series asociado a ellas, una herramienta útil y asequible para su exposición en los primeros cursos de Escuelas Técnicas y Facultades de Ciencias. Además, el método de series de  $\varphi$ -funciones es generalizable a la integración de siste-

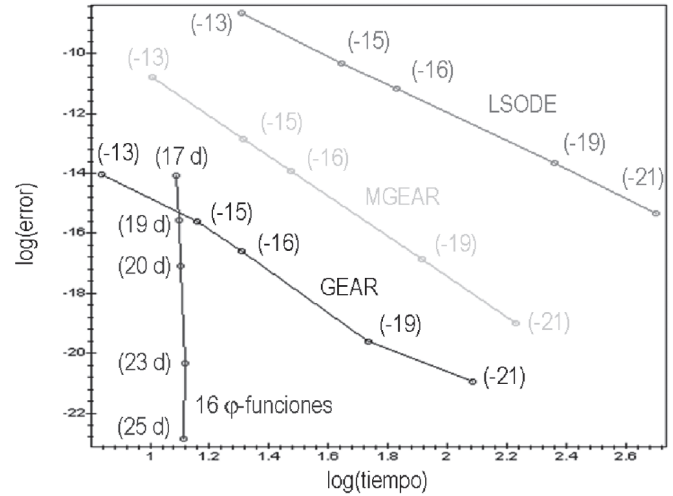


Fig. 5. Gráfico de eficiencia para el problema 5.2. Error para el último punto,  $t = 100$ , versus tiempo de computación para diferentes métodos.

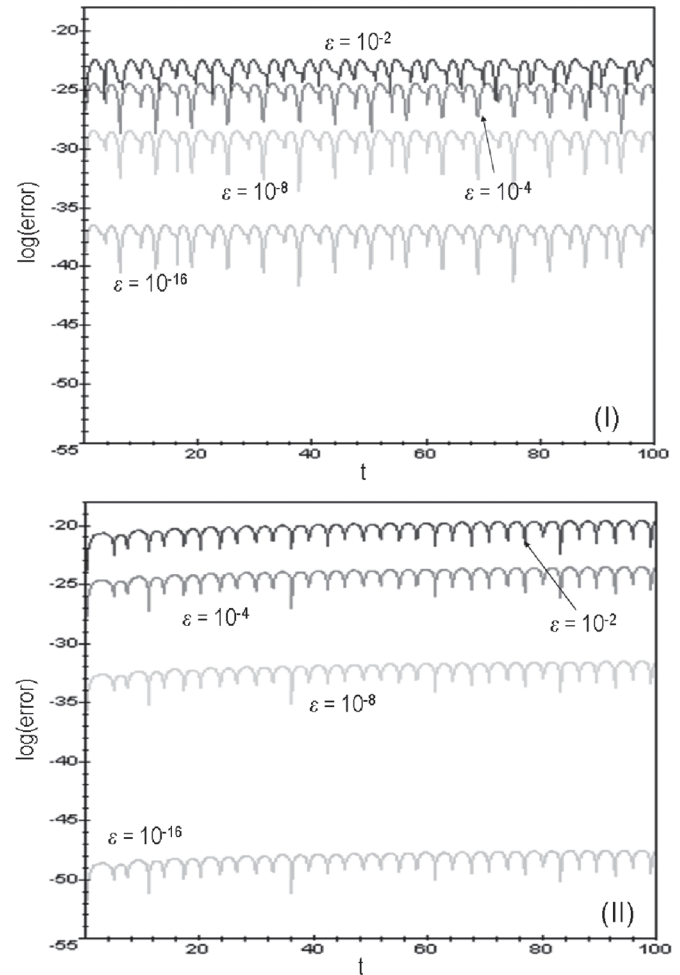


Fig. 6.  $G$ -funciones versus,  $\varphi$ -funciones, para diferentes valores de  $\varepsilon$ . Error a lo largo de la trayectoria para  $G$ -funciones (I) y para  $\varphi$ -funciones (II).

mas de ecuaciones diferenciales, manteniendo las mismas buenas propiedades que presenta el algoritmo diseñado para ecuaciones.

## Referencias

- [1] BETTIS, D.G. (1970): «Stabilization of finite difference methods of numerical integration». *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 2, nº 3, 282-295.
- [2] FERRÁNDIZ, J. M. (1986): «Linearization in special cases of perturbed Keplerian motions», *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 39, nº 1, 23-31.
- [3] FERRÁNDIZ, J. M. (1988): «A general canonical transformation increasing the number of variables with application to the two-body problem», *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 41, nº 1-4, 343-357.
- [4] FERRÁNDIZ, J. M. y SANSATURIO, M. E. (1989): «Elemento de tiempo en variables de Ferrándiz», *Actas XIV Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas*, Puerto de la Cruz, vol. III, 1231-1236.
- [5] FERRÁNDIZ, J. M. , SANSATURIO, M. E. and POJMAND, J. R. (1992): «Increased accuracy of computations in the main satellite through linearization methods», *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 53, nº 4, 347-363.
- [6] FERRÁNDIZ, J. M. and VIGO-AGUIAR, J. (1996): «New numerical method improving the integration of time in KS regularization», *J. Guidance*, vol. 19, nº3, 742-745.
- [7] FRANCO, J. M., CORREAS, J. M. y PETRIZ, F. (1997): «Métodos adaptados de tipo Störmer- Cowell de orden elevado». *Rev. Internac. Method. Numer. Cal. Diseñ. Ing.*, vol. 7, nº 2, 193-216.
- [8] GARCIA-ALONSO, F. y REYES, J. A. (2007): «Una extensión de la serie de Taylor y su aplicación a la integración de osciladores», *Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación*, vol. 5, nº 1, 1-21.
- [9] GARCÍA-ALONSO, F., REYES, J. A., FERRÁNDIZ, J. M. and VIGO-AGUIAR, J. (2009): «Accurate numerical integration of perturbed oscillatory systems in two frequencies». *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 36, nº 4, 1-34.
- [10] MARTÍN, P. and FERRÁNDIZ, J.M. (1995): «Behaviour of the SMF method for the numerical integration of satellite orbits», *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 63, nº 1, 29-40.
- [11] MARTÍN, P. and FERRÁNDIZ, J.M. (1997): «Multistep numerical methods based on Scheifele G-functions with application to satellite dynamics», *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 34, nº 1, 359-375.
- [12] NORSETT, S. P. (1969): «An A-stable modification of the Adams-Bashforth methods». In *Conference on the Numerical Solution of Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 109. Dold A, Eckmann B. eds. Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg, New York, 214-219.
- [13] PALACIOS, M. (2003): «Métodos multirevolución simétricos para propagación de órbitas en intervalos grandes de tiempo». *Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza*, nº 22, 55-66.
- [14] PETZOLD, L. R. (1981): «An efficient numerical method for highly oscillatory ordinary differential equations», *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 18 , nº 3, 455-479.
- [15] ROY, A. E. (1988): *Orbital Motion*, Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia.
- [16] SCHEIFELE, G. (1971): «On numerical integration of perturbed linear oscillating systems», *ZAMP*, vol. 22, nº 1, 186-210.
- [17] STIEFEL E. L. and BETTIS, D. G. (1969): «Stabilization of Cowell's method». *Numer. Math.*, vol. 13, nº 2, 154-175.
- [18] STIEFEL, E. L. and SCHEIFELE, G. (1971): *Linear and regular celestial mechanics*, Springer, New York.
- [19] VIGO-AGUIAR, J. and FERRÁNDIZ, J.M. (1998(a)): « A general procedure for the adaptation of multistep algorithms to the integration of oscillatory problems», *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 35, nº 4, 1684-1708.
- [20] VIGO-AGUIAR, J. and FERRÁNDIZ, J.M. (1998(b)): «Higher-order variable-step algorithms adapted to the accurate numerical integration of perturbed oscillators», *Computer in Physics*, vol 12, nº 5, 467-470.