

# Modelos SIR modificados para la evolución del COVID-19

## Modified SIR models for the evolution of COVID-19

Nana Cabo Bizet<sup>1</sup>, Alejandro Cabo Montes de Oca<sup>2</sup>

**Resumen** Se estudia el modelo SIR, con tasa de contagio variable, aplicado a la evolución del COVID-19 en Cuba. Se formula un modelo semi-empírico donde alcanzar  $\beta^* \approx 0$  debido al aislamiento, se logra después del tiempo de duración media de la enfermedad  $\tau = 1/\gamma$ ,  $\beta^*(t)$  debe decaer en forma brusca el día de inicio del confinamiento y reducirse hasta anularse al final del intervalo  $\tau$ . El análisis logra describir apropiadamente la curva de infección de Alemania. El modelo con un decaimiento exponencial para  $\beta^*$  se aplica a la epidemia en Cuba, estimando el máximo de infectados a finales de abril 2020 y del orden de los 1000 casos. Con datos de junio se estima la segunda caída de los infectados. Se considera la razón  $k$  entre el número de infectados observados y el número total de infectados menor que la unidad, el reducido valor de  $k$  disminuye los valores máximos cuando  $\beta^* - \gamma > 0$ . En la región lineal con  $k$  constante la evolución de las poblaciones detectadas es independiente de  $k$ . Se estudia también el valor de  $\beta^*(t)$  a pedazos, por intervalos de tiempo, ajustando a los datos de Cuba, Alemania y Corea del Sur. En este esquema se compara la extrapolación de la evolución de Cuba con tasa de contagio al día 16.04.20 con la obtenida suponiendo a finales de abril una cuarentena estricta. Este modelo describe correctamente la evolución de la epidemia, estimando para Cuba el primer pico de forma compatible al método anterior. El máximo deseado de la curva de infectados del SIR no es el máximo estándar con  $\beta^*$  constante, el cual para grandes poblaciones daría millones de infectados, sino un máximo logrado con medidas de contención tal que  $\beta^*(t)$  disminuya en el tiempo, alcanzando  $\tilde{R}_0(t) = \beta^*(t)/\gamma < 1$ .

**Abstract** The SIR model, with a variable contagion rate is applied to the evolution of COVID-19 in Cuba. A semi-empirical model is formulated, where reaching  $\beta^* \approx 0$  due to isolation is achieved after the mean duration of the disease  $\tau = 1/\gamma$ ,  $\beta^*(t)$  should have an abrupt decrease on the initial day of confinement and decrease until canceling at the end of the interval  $\tau$ . The analysis appropriately describes the infection curve for Germany. The model with an exponential decay for  $\beta^*$ , is applied to the outbreak in Cuba, estimating the infected maximum at the end of April and of the order of 1000 cases. With data from June the second peak of the infected is also estimated. We consider the ratio between the observed and real infected cases ( $k$ ) less than unity, the low value of  $k$  decreases the maximum when  $\beta^* - \gamma > 0$ . The observed evolution is independent of  $k$  in the linear region. The value of  $\beta^*$  is also studied by time intervals, adjusting to the data of Cuba, Germany and South Korea. We compare the extrapolation of the evolution of Cuba with the contagion rate until 16.04.20 with that obtained by a strict quarantine at the end of April. This model correctly describes the outbreak evolution, estimating the first peak for Cuba in a compatible way with previous method. The desired maximum of the SIR infected curve is not the standard maximum with constant  $\beta^*$ , for which large population will give millions of infected, but a maximum defined by contention measures when  $\beta^*(t)$  decreases in time, reaching  $\tilde{R}_0(t) = \beta^*(t)/\gamma < 1$ .

### Palabras Clave

susceptibles-infectados-recuperados, tasa de contagio variable, tasa de recuperación

### Keywords

SIR model, variable contagion rate, recuperation rate

<sup>1</sup> Departamento de Física, DCI, Campus León, Universidad de Guanajuato, CP. 37150, León, Guanajuato, México, nana@fisica.ugto.mx.

<sup>2</sup> Departamento de Física Teórica, Instituto de Cibernética, Matemática y Física, Calle E, No. 309, Vedado, La Habana, Cuba, cabo@icimaf.cu.

## 1. Introducción

La pandemia asociada al COVID-19 está siendo investigada con gran intensidad hoy día y la descripción de sus singulares propiedades ampliamente difundidas [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22].

El presente trabajo está dedicado a explorar aspectos de esta epidemia, los resultados esenciales están contenidos en el pre-print [22]. Consideramos un modelo determinista empleado en el estudio de epidemias, el SIR (siglas de Susceptibles, Infectados y Recuperados). Los parámetros que controlan dichos

modelos son  $\beta$  y  $\gamma$ . El primero define el número de personas susceptibles por unidad de tiempo que enferman por unidad de persona susceptible y por unidad de persona infectada. Este también se utiliza después de multiplicado por el número de la población, en las unidades  $\beta^* = \beta \times N$ . El segundo determina el número de personas por unidad de tiempo que se recuperan entre el número de personas infectadas. Estimamos que la aplicación del SIR en una efectiva predicción de los datos necesita la clarificación un aspecto central: el como estimar la dependencia temporal de los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$ . En particular aquí nos enfocamos en el estudio de la evolución del primero de estos.

En la sección 2 se exponen las ecuaciones del modelo SIR y se presentan sus constantes para el caso de Cuba. Las soluciones obtenidas se ajustan a los datos de número de infectados activos que se reportan diariamente. Destacamos las condiciones en que se obtiene un máximo valor del número de infectados en circunstancias realistas. Dichas características son conocidas, pero creemos útil el insistir sobre ellas, se destaca que siempre que las ecuaciones indican infección, se cumple  $\beta^* > \gamma$ . En esa situación el máximo del número de infectados siempre alcanza un valor del orden de la población  $N$ , lo que para Cuba resultaría en millones. Resaltamos que esos máximos, no son los que se reportan en los países que rebasaron la epidemia (por ej. China, Corea del Sur y Alemania), los cuales presentan máximos del número de infectados mucho menores que la población.

En la sección 3 se considera el mismo modelo SIR pero en el cual se introduce una ya reconocida propiedad de la presente epidemia: la razón  $k$  entre el número de infectados observados (por los sistemas de salud) y el total de infectados, es un número que se estima en el intervalo de 0,1 a 0,2 [5, 12]. En esta sección se muestran las curvas solución después de ajustar los datos para los infectados reales con los datos observados después de divididos por  $k$ . Los enormes números máximos de enfermos observados se reducen a medida que  $k$  disminuye. Este efecto es una consecuencia directa de la no linealidad del sistema de ecuaciones. Si el sistema fuera lineal el máximo no debería cambiar, pues al variar las condiciones iniciales en ser divididas por  $k$ , la solución para el número total sería proporcional a la anterior. Luego, después de multiplicar por  $k$  el máximo número de infectados totales para obtener el observado, se volvería a obtener el mismo valor. Sin embargo, como el sistema de ecuaciones es no lineal (el número de infectados no puede sobrepasar la población del país) la no linealidad resulta capaz de reducir el máximo. Sin embargo nuestro interés son las condiciones realistas donde el máximo está muy lejos de acercarse a la población del país, por lo tanto estamos en la región lineal. Esto significa que nuestra predicción para infectados y recuperados observados si  $k$  es constante es independiente de su valor. En la sección III discutimos las condiciones de aparición de esos máximos reducidos.

La sección 4 comienza discutiendo las soluciones del sistema SIR en los casos de que el número de infectados  $I$  es

mucho más pequeño que la población  $N$ . En esta situación el número de susceptibles en esa etapa se puede aproximar por la población del país  $N$ . Se presenta entonces las conocidas soluciones explícitas del problema para  $\beta$  y  $\gamma$  constantes. Estas son exponenciales cuyo tiempo característico de crecimiento o decrecimiento es determinado por el único número  $\beta^* - \gamma$ . Si esta cantidad es positiva la solución del problema crece indefectiblemente, independiente de los valores de  $I$  y  $R$  en el momento dado. Esta es una propiedad importante de la dinámica considerada. Para que  $I$  decrezca en esta zona de bajos valores ( $I \ll N$ ) es estrictamente necesario que los valores locales de  $\beta - \gamma$  resulten negativos o que el parámetro ( $\tilde{R}_0 < 1$ ). Por tanto, en todos los países en que se ha logrado la recuperación lo que se ha alcanzado son valores negativos de esta cantidad. Sin embargo, aunque el país imponga aislamiento total a partir de cierto día, las curvas de infectados en ningún caso comienzan a bajar. Parece lógico suponer que esas medidas deben forzar la validez de la condición  $\beta = 0$ , o sea, ausencia de transmisibilidad. Las causas de esta aparente contradicción se analizan en la siguiente sección.

En esta sección 5 se presenta una razón por la cual el valor de  $\beta = 0$  no es inmediatamente determinado por las medidas de aislamiento. La idea se basa en que el tiempo en que los enfermos sufren el padecimiento se estima en un intervalo  $\tau$  de 15 a 20 días. En este caso el enclaustramiento de las familias, indica que en gran cantidad de ellas pueden existir enfermos asintomáticos. Por tanto el número positivo de infectados por unidad de tiempo no se anula al momento, si no que debe variar discontinuamente de valor (el entorno de cada infestado cambia abruptamente). Por tanto a partir del instante en que comienza el aislamiento y durante veinte días, el número  $\beta$  no debe ser nulo sino debe decrecer de cierta forma hasta anularse a los 20 días aproximadamente. La dependencia temporal en ese intervalo sin embargo no es conocida. Solo es de esperar que ella tenga un salto brusco el día del aislamiento debido a que las condiciones de contacto de los infectados con su entorno cambiaron drásticamente. En la sección se analiza además la curva de infección de China la que permite estimar el valor de  $\gamma$  en alrededor de  $1/20$ . Este modelo cualitativo de la evolución de  $\beta$  bajo condiciones de aislamiento se aplica a describir las curvas de infectados de Alemania y Cuba en la subsección 5.1.

La subsección 5.1.1 primeramente fija los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$  en el comienzo de crecimiento exponencial de la infección en Alemania. Posteriormente se utiliza la información de que en ese país las medidas de aislamiento comenzaron cerca del 20 de marzo. Utilizando que la curva de infección muestra un cambio en pendiente ese día, se estima entonces el nuevo valor de  $\beta$  al que cambia esta magnitud bruscamente al imponer el aislamiento. Posteriormente se asume que  $\beta$  disminuye linealmente durante un tiempo de vida de la enfermedad de cerca de 20 días. Al final de ese período de confinamiento, el valor disminuye drásticamente a cero. Ajustando la dependencia temporal de  $\beta$  para tiempos posteriores al instante de aislamiento, hasta su disminución brusca a cero 20 días

después, se logra entonces describir la curva de infección de Alemania. El mismo modelo se aplica a la curva de infección de Cuba en 5.1.2. Se toma el 24 de marzo como el día de imposición del aislamiento y los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$  se derivan de describir aproximadamente los datos diarios de infectados. Se obtiene un máximo de infectados que depende del rigor con que se imponga el aislamiento. Los datos sugieren que si el aislamiento resultara gradualmente menos efectivo se podría obtener desde un máximo del orden de 1200 casos cerca del 1 de mayo. Tomando datos posteriores al 23.04.20 con casos sintomáticos y realizando un ajuste se obtiene un estimado similar y más preciso a finales de abril. El análisis en general sugiere que los máximos de la epidemia en Cuba tienen buena probabilidad de suceder en ese rango de valores.

En la última subsección 5.2 se estudian las curvas de infectados de Cuba, Alemania y Corea del Sur. El método que se sigue es el de explorar la tasa de contagio variable  $\beta(t)$  haciendo ajustes locales, al dividir los datos en segmentos. Se estudian los datos de Cuba, considerando dos escenarios: En el primero la tasa de contagio continua siendo la tasa al 16.04.20, la epidemia se extendería a septiembre y los enfermos detectados en el pico rondarían los 200,000. En el segundo escenario a finales de abril la cuarentena estricta logra  $\tilde{R}_0 < 1$  y por tanto el pico de la epidemia se alcanza a finales de abril, y los enfermos detectados en el pico rondan los 1000. Se comprueba que la cuarentena en el caso de Alemania y Corea del Sur a la fecha estudiada alcanza la región deseada  $\tilde{R}_0 < 1$  ( $\beta^* - \gamma < 0$ ). Estos últimos resultados enfatizan la importancia de una cuarentena estricta. Todo lo anterior se resume en nuestra conclusiones en la última sección. Finalmente se presentan tres apéndices en que se extienden el estudio para Cuba, a períodos posteriores a los descritos en el trabajo. El primer apéndice 7 muestra el ajuste para Cuba de la tasa de recuperación  $\gamma = 0,062 \pm 0,004$ . El segundo apéndice 8 estima la llegada del segundo máximo de la curva de infectados con datos de hasta el 7.06.20 con intervalos de confianza. El último apéndice 9 extiende el análisis al futuro de la epidemia con datos hasta el 23.07.20 con intervalos de confianza.

## 2. El modelo SIR

El modelo "Suceptible Infected Recovered" (SIR) es uno de los más sencillos y claves en los estudios epidemiológicos para la propagación de enfermedades [1]. En el mismo la población total  $N$  se divide en tres grupos: suceptibles  $S$ , infectados  $I$  y recuperados  $R$ . Denominemos por  $N$  la población del país considerado. Las ecuaciones diferenciales del modelo que gobiernan la evolución de la epidemia están dadas por

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\beta SI, \quad (1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta SI - \gamma I, \quad (2)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \gamma I. \quad (3)$$

Las unidades de esta ecuación corresponden a *personas* ( $P$ ) para las magnitudes de grupos poblacionales son  $[S] = [I] = [R] = P$ . La unidad de *tiempo* ( $T$ ) es un día y  $\beta$  tiene unidades:  $[\beta] = 1/(PT)$ . Las unidades de  $\gamma$  son  $[\gamma] = 1/T$ . El número  $\gamma$  representa la proporción de recuperados por unidad de tiempo entre la población infectada. Consideraremos la cantidad  $\gamma$  estimada de las curvas de recuperación en países que han sobrepasado ya la epidemia, como es el caso de China, el resultado haciendo un ajuste de mínimos cuadrados es  $\gamma = 1/20$ .

Estas ecuaciones también pueden darse en unidades donde las poblaciones sean adimensionales  $\tilde{S} = S/N, \tilde{I} = I/N, \tilde{R} = R/N$ :

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = -\tilde{\beta} \tilde{S} \tilde{I}, \quad \frac{\partial \tilde{I}}{\partial t} = \tilde{\beta} \tilde{S} \tilde{I} - \gamma \tilde{I}, \quad \frac{\partial \tilde{R}}{\partial t} = \gamma \tilde{I}.$$

Las unidades de  $\tilde{\beta} = \beta N^2 = \beta^* N$  están dadas por  $[\tilde{\beta}] = P/T$ . También emplearemos  $\beta^* = \beta \times N$  con unidades  $[\beta^*] = 1/T$ .

Algo a destacar es que las magnitudes  $S, I$  y  $R$  en las ecuaciones (1,2,3) son los números de personas suceptibles, infectadas y recuperadas que existen realmente en toda la población. Sin embargo, los datos de que se disponen para resolver las ecuaciones a partir de sus condiciones iniciales, en muchos casos son solo la población total del país y los números de infectados y recuperados que detecta el sistema de Salud. En esta sección consideraremos que de los datos observados, el único que es exacto es la población del país que define a  $S$  al inicio. Se toma en cuenta una población de 12 millones de personas para Cuba y de 83 millones para Alemania.

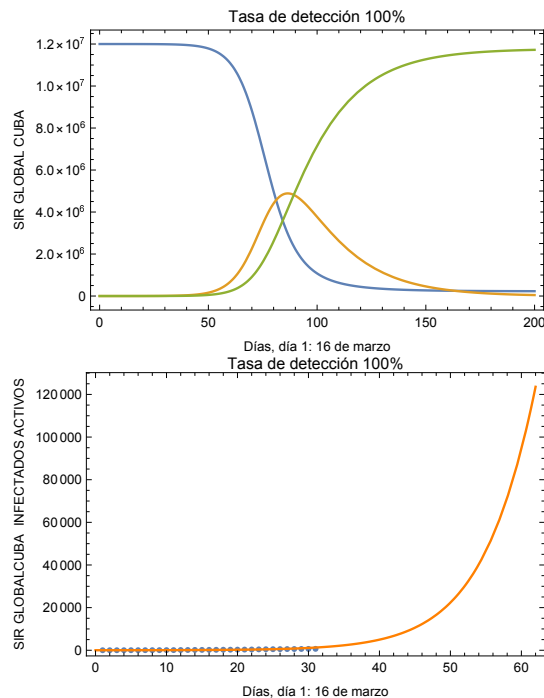
A medida de comenzar con un modelo de juguete, consideremos los datos presentados a partir del 16.03.20 al día 16.04.2020, empleándolos calculamos los siguientes parámetros globales del modelo SIR de Cuba:

$$\tilde{R}_0 = 4,04413, \quad \beta^* = 0,202206 \frac{1}{T}, \quad \gamma = \frac{1}{20} \frac{1}{T}. \quad (4)$$

Esta dependencia se obtiene ajustando a los datos experimentales, es decir la dependencia de los infectados activos en términos del tiempo al comienzo de la epidemia. Se considera una tasa de detección del 100 por ciento. Esto es una valoración muy primitiva de la pandemia, que debe corregirse tomando una tasa de detección del orden del 10% [12] y en nuestra opinión considerando valores variables de  $\beta$  para reflejar las medidas de contención. Los resultados se muestran en la figura 1.

## 3. Modelos SIR y razón entre infectados detectados y totales

Consideremos ahora que el número total de personas infectadas  $I(t)$  se desconoce. Esto sucede debido a que hay personas que enferman y sanan sin ser reportadas, debido a presentar síntomas leves, denotemos por  $I_o(t)$  al número de



**Figura 1.** Curvas “ideales” de la evolución del SIR en Cuba con tasa de contagio constante al 16.04.20, y tasa de detección del 100%. En el panel de arriba, la curva azul corresponde a los susceptibles, la naranja a los recuperados y la amarilla a los infectados activos. Los números obtenidos son gigantescos, porque no se considera el efecto de la cuarentena en la disminución de  $\beta^*$ , ni el hecho de que sólo se detectan del orden del 10% de los casos [5]. El panel de abajo muestra un intervalo de tiempo más pequeño.

personas infectadas observado. La relación  $k$  entre  $I_0(t)$  e  $I(t)$  asumiremos que es una constante estimada en la literatura [5, 12], por lo cual

$$I_o(t) = k I(t), \quad k = \frac{r}{1+r},$$

donde  $r$  es la razón entre el número de infectados observados y el número de los no observados, la cual ha sido estimada en la referencia [5] a un valor en el rango  $(0,1 - 0,2)$ . Los casos observados están entre un décimo y dos décimos de los casos no observados. Adoptaremos un valor de  $k = 0,2$  cercano a  $r = 1/5$ , el cual es simplemente un estimado. El cociente entre el número de recuperados observados a un tiempo dado y el número total de recuperados  $k^*$  podría ser también una constante en la zona de tiempos pequeños, ya que la solución es exponencial. No asumiremos que  $k^*$  coincide con el valor de  $k$ , aunque en los gráficos representaremos también la magnitud

$$R_o(t) = k R(t),$$

que constituyen los recuperados observados en el caso de que  $k^* = k$ . Por lo cual este número no constituye una predicción para el número de recuperados observados.

Consideremos la solución del sistema de ecuaciones (1,2,3) que describa aproximadamente la lista de valores para el nú-

mero de los infectados activos y sus incrementos diarios observados por el Sistema de Salud de Cuba entre los días 11.03.20 y 3.04.20. La solución del sistema debe describir los valores de dicha lista después de divididos por el factor  $k = 0,2$

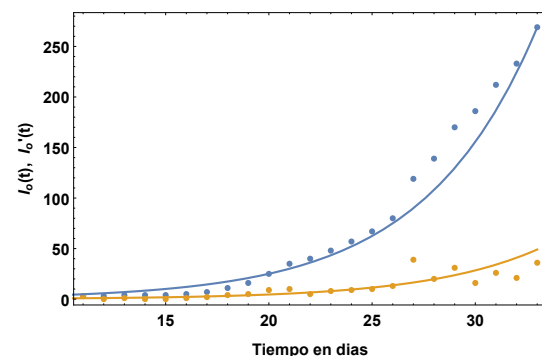
$$I(t) = \frac{1}{k} I_o(t). \quad (5)$$

Los datos para el número de infectados crecen rápidamente en forma compatible con la conocida evolución exponencial de las soluciones SIR cuando la cantidad de infectados es pequeña. El valor de  $\gamma$  describe un decaimiento exponencial de los infectados si no hay contagio ( $\beta = 0$ ). Dado que el tiempo típico en que se cura cada enfermo es de alrededor de 15 a 20 días, en esta sección adoptaremos el estimado de  $\gamma = \frac{1}{15} = 0,066$ . Se obtuvieron valores de  $\beta$  que permiten una aproximación de los datos observados para  $I_o(t)$ .

Se resolvió entonces el sistema de ecuaciones SIR fijando las condiciones iniciales para  $I(t)$  en el tiempo nulo  $I(0)$ . Estas condiciones iniciales se ajustaron con vistas a reproducir los datos reportados. Los valores obtenidos de los parámetros fueron

$$\beta^* = 0,212073, \gamma = 0,066, \beta = \frac{\beta^*}{N} = 1,76727 \times 10^{-8}.$$

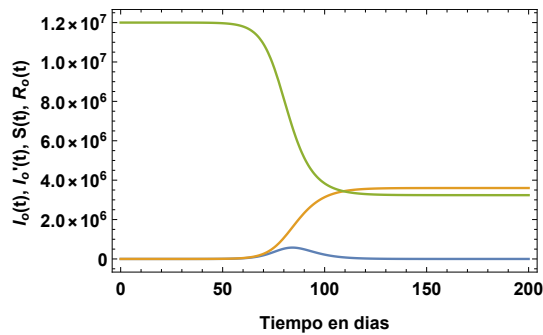
La solución obtenida para  $I(t)$  y su derivada se muestran en la figura 2.



**Figura 2.** Se muestra la solución del SIR al determinar las condiciones iniciales que ajustan a los valores observados de la curva de infectados en Cuba [11]. La curva y los puntos azules corresponden a los infectados predichos y observados, y la curva y los puntos amarillos a la derivada respecto al tiempo de predichos y observados. La curva continua para tiempos mayores a los del gráfico, al compararse con los datos, muestran el funcionamiento de las medidas de confinamiento a partir del día 24.03.2020.

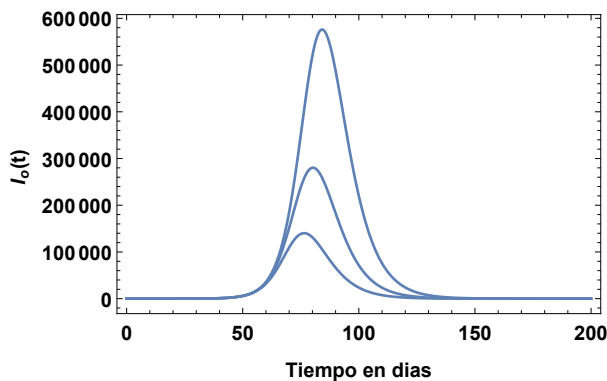
Puede observarse que la evolución presenta el carácter exponencial en la región de tiempos anterior al confinamiento, pese a las fluctuaciones de los datos. Para un intervalo de tiempo mayor:  $(0, 200)$ , la evolución temporal para el número de infectados muestra un máximo como se ilustra en la figura 3, que presenta además las curvas del número de susceptibles y recuperados (considerando  $k^* = k$ ).

Las curvas planteadas en un intervalo de 200 días, muestran los resultados para el número de susceptibles, infectados total



**Figura 3.** Se plotean  $I_o(t)$ ,  $S(t)$ , y  $R_o(t)$  en un intervalo de 200 días. La curva azul corresponde a los infectados, la naranja a los susceptibles y la amarilla a los recuperados. El número de infectados observados tiene un máximo del orden de varios cientos de miles. Estos altos números ocurren siempre que los valores de  $\beta^*$  y  $\gamma$  sean constantes y exista infección creciente:  $\beta^* > \gamma$ . Para detener la infección es necesario lograr  $\beta^* < \gamma$ .

$S$  y el número de infectados observado  $I_o$  que efectivamente son reportados. Finalmente, como antes se indicó,  $R_o(t) = k R(t)$  representa el número de recuperados, asumiendo que  $k^* = k$ . La curvas en figura 4 muestran  $I_o(t)$  para tres valores distintos de  $k$ . Se puede notar que bajo las suposiciones hechas, los picos del número de enfermos se pronostican a ocurrir entre 80 a 90 días a partir del 11 de Marzo y corresponden a cerca de cientos de miles de personas, en el caso de que no se tomen medidas que puedan lograr  $\beta^* - \gamma < 0$ .



**Figura 4.** Número de infectados para tres valores distintos de la relación entre el número de infectados observados y el total:  $k = 0,411, 0,2, 0,1$  (el orden se corresponde a valores crecientes del máximo). Debido a la no linealidad la cantidad máxima de infectados decrece con la disminución de  $k$ . La no linealidad se sigue de que el número de enfermos no puede superar a la población.

Los valores de los parámetros fueron  $k = 0,411, 0,2, 0,1$ , fijando  $\beta$  y  $\gamma$ . La curva con valor más bajo del máximo se corresponde a  $k = 0,1$ , la asociada al máximo de valor intermedio  $k = 0,2$  y la que posee el más alto valor a  $k = 0,411$ .

Quisieramos subrayar que la disminución del valor del máximo con el aumento de  $1/k$ , es un efecto puramente no lineal. Esto ocurre debido a que usamos datos experimentales

para los números totales de infectados siendo proporcionales con  $1/k$ . En el caso de que las ecuaciones fueran lineales, el máximo de  $I_o(t)$  hubiera resultado idéntico para las tres curvas. Sin embargo, la no linealidad del sistema tiene un efecto relevante en la reducción del máximo en el número  $1/k$ . La no linealidad se produce debido a que el número total de infectados no puede nunca ser superior a la población.

#### 4. Relevancia del parametro $\beta^* - \gamma$

A continuación discutiremos las soluciones del sistema SIR en los casos de que el número de infectados es mucho más pequeño que la población  $I \ll N$ . Esta aproximación es relevante con vistas a discutir los casos de los países que han superado la epidemia, en estos países esta relación se cumple. En este caso el número de susceptibles se puede aproximar por la misma población del país  $S(t) \approx N$ .

Por tanto el sistema de ecuaciones (1,2,3) se simplifica a la forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\beta N I, \quad (6)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta N I - \gamma I, \quad (7)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \gamma I. \quad (8)$$

Dado que las ecuaciones son lineales, las soluciones resultan exponenciales dadas por:

$$S_e(t) = N - \beta^* i \text{Exp}((\beta^* - \gamma)t), \quad (9)$$

$$I_e(t) = i \text{Exp}((\beta^* - \gamma)t) \quad (10)$$

$$R_e(t) = \frac{\gamma}{\beta^* - \gamma} i \text{Exp}((\beta^* - \gamma)t). \quad (11)$$

$$\beta^* = \beta N, \quad (12)$$

donde  $i$  constituye el único parámetro libre de la solución. Para países con millones de habitantes, como antes se mencionó, la solución exponencial es una muy buena aproximación para tiempos en que  $I(t) \ll N$ .

En este punto es de interés subrayar que si en esas ecuaciones se considera  $\beta^*$  como una variable dependiente del tiempo, el signo de  $\beta^*(t) - \gamma$  determina el signo de la derivada temporal de  $I(t)$ . Es decir, que la magnitud  $\beta^*(t) - \gamma$  brinda un factor tan relevante como si la epidemia crece o decrece en el instante considerado.

En el caso que no hay contagio  $\beta = 0$ , por lo cual el valor de  $\gamma$  corresponde predecir un decaimiento exponencial de los infectados (caso de China). Sin embargo el tiempo típico en que se cura cada enfermo es de 15 a 20 días. Por lo tanto, adoptaremos en esta sección el estimado de  $\gamma = \frac{1}{15} = 0,066$ . Tal como comentamos en la Introducción, las soluciones exponenciales tienen un tiempo característico de crecimiento o decrecimiento determinado por el número  $\beta^* - \gamma$ . Si esta cantidad resulta positiva la solución del problema crece indefinidamente, independientemente de los valores específicos



de  $I$  y  $R$  en el momento dado. Esta es una propiedad relevante en la dinámica de este problema. Para que  $I$  decrezca en la importante región de los bajos valores es imprescindible que el valor en el tiempo de  $\beta^* - \gamma$  resulte negativo. De acuerdo a esto, en todos los países en que se ha logrado la recuperación de la epidemia, se ha podido hacer que esa cantidad sea negativa, dando un máximo de infectados activos con  $I \ll N$ .

Sin embargo, es también conocido que aunque el país imponga aislamiento total a partir de cierta fecha, las curvas de infección en ningún caso comienzan a bajar instantáneamente. Es decir, aunque es lógico suponer las medidas deben fijar instantáneamente la condición  $\beta^* = 0$  (ausencia de transmisibilidad) los datos de infección niegan esta propiedad y las pendientes continúan siendo positivas días después de la fecha de confinamiento. Analicemos las causas de este comportamiento en la siguiente sección.

## 5. Modelo cualitativo del aislamiento

Describamos ahora un modelo cualitativo que brinda una razón por la que el valor de  $\beta^* = 0$  no se hace cero inmediatamente después de tomar las medidas de aislamiento. Consideremos la circunstancia de que el tiempo en que los enfermos sufren el padecimiento se estima en un período  $\tau = 15 - 20$  días. El enclaustramiento de las familias, implica que en gran cantidad de ellas existen enfermos asintomáticos o infectados leves que pueden transmitir la enfermedad a sus familiares. Por tanto se puede estimar que el número positivo de susceptibles que pasan a ser infectados por unidad de tiempo no se puede anular al instante de implantar el aislamiento. Por tanto  $\beta^*(t)$  no debe reducirse lo suficiente para cambiar el signo de  $\beta^* - \gamma$  ( $\tilde{R}_0 < 1$ ). Sin embargo, lo que debe ser válido es que tras un período cercano al tiempo de vida de la enfermedad, ya no deben existir casos de enfermos leves en las familias. Por lo cual después de ese intervalo de tiempo  $\beta^* \rightarrow 0$ . El modelo propuesto se basa centralmente en esta afirmación.

Es decir, que un día después de la implantación del confinamiento, y durante digamos aproximadamente veinte días  $\beta^*$  debe decrecer hasta anularse. La dependencia temporal en ese intervalo no es conocida. Solo es de esperar que la función tenga una disminución brusca el preciso día en que comienza el aislamiento, dado que las condiciones de contacto de los infectados con su entorno cambiaron drásticamente. Una vez que la transmisibilidad se anula, la curva de decaída del número de infectados  $I(t)$  debe tener un carácter exponencial con tiempo de decaimiento  $\gamma$ . Como antes mencionamos la curva de infección de China reportada en el sitio web [www.worldometer.info](http://www.worldometer.info) [11], permiten estimar el valor de  $1/\gamma$  entre 15 y 20 días.

Haremos un comentario final acerca de las suposiciones del modelo. Considerar  $\beta^* = 0$  luego de un tiempo de duración de la afección después de instaurado el aislamiento, es válido si se supone que este aislamiento es unipersonal. Es decir si cada persona se encuentra aislada. Pasado este intervalo, el número de susceptibles no puede variar con el tiempo pues no es posible infectarlos. Siendo Alemania uno de los países más desarrollados, esa condición pudiera satisfacerse

aproximadamente. Como se verá en la siguiente subsección, el modelo funciona bastante bien para ese país. Sin embargo, en otras situaciones puede suceder que al final de un período de duración después del confinamiento, la tasa de contagio comience a decrecer a partir de un valor disminuido. Esto es de esperar en países donde el aislamiento se aleje bastante del individual, donde existe aglomeración de personas en la familia media. En esos casos, supondremos que pasado el citado intervalo de tiempo los valores de  $\beta^*$  disminuyen exponencialmente con una constante de decaimiento cuyo valor controlará el máximo de  $I_o(t)$ . A continuación el modelo cualitativo descrito de la evolución de  $\beta^*$  bajo condiciones de aislamiento se aplica a describir las curvas de infectados de Alemania y Cuba.

### 5.1 Aplicación a Alemania y a Cuba

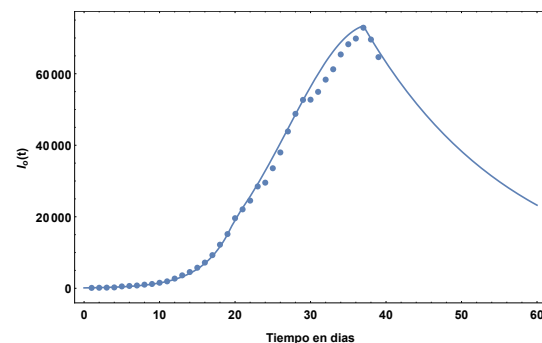
Consideremos en esta subsección una descripción de las curvas de infección de Alemania y Cuba en base al modelo simple descrito. Para ello, primeramente fijamos los parámetros  $\beta^*$  y  $\gamma$  en el comienzo de crecimiento exponencial de la infección en ambos países. El valor de la relación  $k$  entre el número de infectados observados y el total se tomó como  $k = 0,2$ .

#### 5.1.1 Alemania

Discutamos primeramente el caso de Alemania. Para este país se tiene una importante información: sus medidas de aislamiento comenzaron a imponerse fuertemente cerca del 20 de marzo del 2020. Los datos de curvas de infectados al inicio de la epidemia permitieron estimar  $\beta^*$  y  $\gamma$  cuyos valores resultaron:

$$\beta^* = 0,31, \quad \gamma = 1/20.$$

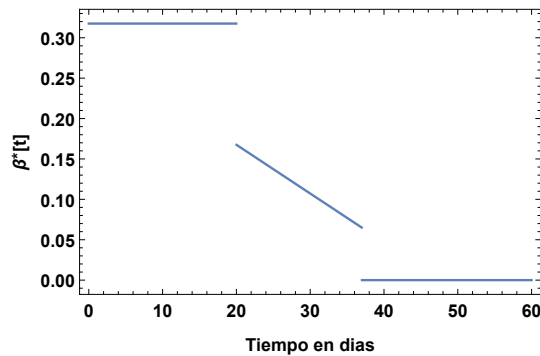
El valor de  $\gamma$  se estimó de los datos de la caída exponencial de la cantidad de infectados en China [11].



**Figura 5.** Número de infectados como función de los días para Alemania [11]. La línea continua muestra la solución del modelo SIR.  $\beta^*$  y  $\gamma$  son constantes en los primeros 20 días, sin medidas de aislamiento. La curva continua (exponencial en la aproximación lineal) sigue a la observada en ese intervalo. En el rango 20-40 días la variación de  $\beta^*$  se muestra en la figura 6. La caída exponencial del número de infectados observados comienza tras un período de duración de la enfermedad a partir del aislamiento.

Estos parámetros determinaron una dependencia exponencial para cortos tiempos que describe muy bien la curva de

datos reportados para Alemania en la referencia [11], hasta los 20 días del mes de marzo. En el entorno de esta fecha fueron impuestas las medidas de aislamiento. La curva de  $I_o(t)$  en esa región de tiempos se muestra en la figura 5.



**Figura 6.** Dependencia temporal de  $\beta^*$  que reproduce la curva de infectados de Alemania. Una primera disminución brusca al imponer el aislamiento es de esperar debido a que el confinamiento reduce las posibilidades para el contagio. El salto al valor nulo también puede esperarse debido a que transcurrido el tiempo medio de infección, es natural que no haya casi disminución del número de susceptibles por unidad de tiempo, t.q.  $\beta^* \approx 0$ . La variación en la zona interior es lineal y la pendiente se determina ajustando a los infectados en la zona de sus máximos valores.

A continuación se utiliza que la curva de infección muestra un cambio en pendiente ese mismo día 20 de marzo. Esto permitió estimar el nuevo valor de  $\beta^*$  al que disminuye esta magnitud bruscamente, al imponer el aislamiento. Posteriormente, dado que no se tiene información a priori acerca del comportamiento de  $\beta^*$  en los 20 días (tiempo medio que dura la enfermedad) posteriores al 20 de marzo, se asumió que  $\beta^*$  disminuye linealmente durante el tiempo de permanencia de la enfermedad hasta que bruscamente salta al valor nulo tras esos 20 días. Esto implementa el modelo de la sección anterior. La figura 6 muestra esta variación. Ajustando la dependencia lineal de  $\beta^*$  para tiempos posteriores al instante de aislamiento, se logra entonces describir satisfactoriamente la curva de infección de Alemania, como lo muestra la figura 5.

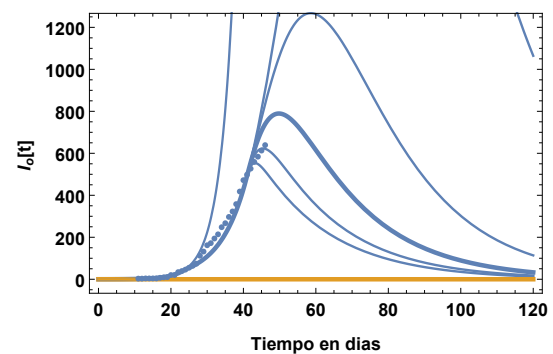
Puede decirse que el caso de Alemania brinda un ejemplo de que la correcta implantación de las medidas de aislamiento puede determinar un decaimiento exponencial de la pandemia, transcurrido aproximadamente un período medio de duración de la enfermedad. Pensamos que este efecto pudiera ser relevante para explicar los casos de otros países en esta etapa como Corea del Sur, Austria, Suiza, etc.

### 5.1.2 Cuba

Posteriormente el mismo modelo se aplicó a la curva de infección de Cuba, asumiendo la fecha del 24 de marzo 2020 para la imposición del aislamiento. Tomando  $\gamma = 0,05$ , para el parámetro  $\beta^*$  derivado de los datos diarios de infectados brindados en la referencia [11], se obtuvieron los valores

$$\beta^* = 0,307088, \gamma = 1/20.$$

Los resultados para  $I_o(t)$  entre el 1 de marzo (fecha en que se comienza medir el tiempo  $t$  en días) y el 24 Marzo, se muestran a la izquierda de la figura 7. En ella los puntos presentan los datos reportados por el Ministerio de Salud Pública y las curvas continuas representan las soluciones del sistema de ecuaciones SIR. Se puede observar que la curva continua describe aceptablemente los datos del número de infectados antes de establecerse el aislamiento el 24 de marzo ( $t = 24$ ). Cabe subrayar que la curva exponencial a la extrema izquierda en el gráfico, es la solución de las ecuaciones SIR en ausencia de las condiciones de aislamiento. Ella indica que en el caso de no haberse aplicado el confinamiento, el crecimiento del número de infectados hubiera sido muy grande, dos semanas después del 24 de Marzo, mostrando claramente el papel del aislamiento.



**Figura 7.** Solución del SIR para Cuba con  $\beta^*$  constante antes del día 24.03.2020 (inicio del aislamiento). Más allá del citado día, se considera que  $\beta^*$  decrece, con una disminución brusca a un valor constante durante un tiempo de duración de la afección  $\tau$ . Al final de ese intervalo, se supone que  $\beta^*$  decae exponencialmente como  $\exp(-\alpha(t - 24 - \tau))$ . Tal que  $\beta^* \approx 0$  tras el aislamiento. Las curvas se corresponden a los valores  $\alpha = 0,6, 0,3, 0,15, 0,075, 0,0375$ . El orden de estas constantes indica valores crecientes de sus máximos.

Posteriormente al 24 de marzo, se supuso, tal como en el modelo, que  $\beta^*$  disminuye bruscamente precisamente ese día, a un valor, menor. En este caso supusimos que dicho valor permanece constante tras 17 de días de duración típica de la afección. Transcurrido ese tiempo, consideramos que  $\beta^*$  tiende a cero, pero no bruscamente. En lugar de esto, asumiremos que tiende a cero con una dependencia exponencial del tipo

$$\beta^*(t) = \text{Exp}[-\alpha(t - (24 + \tau))],$$

donde en este caso, tomamos  $\tau = 17$  como el tiempo de medio de la enfermedad. Las curvas que se muestran en la figura 7 para tiempos mayores que  $24 + \tau$  corresponden a los valores de  $\alpha = 0,6, 0,3, 0,15, 0,075, 0,0375$ . Estas consideran seis formas de decaimiento exponencial de  $\beta^*$  con vistas a intentar describir la esperada disminución de  $\beta^*$  a suceder después de establecido el aislamiento y esperar un tiempo de duración de la enfermedad. Como se comentó en la discusión del modelo, en países en que el confinamiento se logra con mas dificultad, solo cabe esperar que  $\beta^*$  decaiga después de

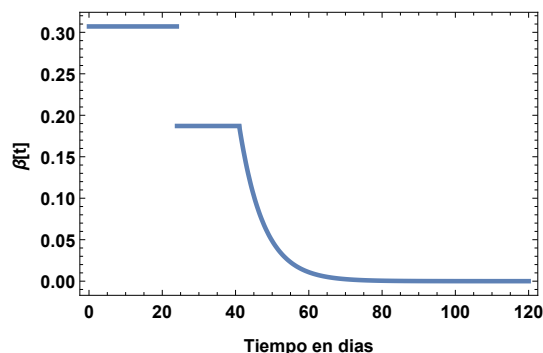
esperar un tiempo  $\tau$  a partir del día de aislamiento. Es interés entonces comparar las observaciones que se ofrecen por el Ministerio de Salud Pública con las curvas de infectados para varios valores del parámetro  $\alpha$ . Obsérvese que para  $\alpha = 0,6$  la exponencial se reduce bastante en el curso de dos días, por lo que para ese valor se puede considerar que se está imponiendo  $\beta^* = 0$  una vez pasado un período medio de duración de la enfermedad. Esto puede considerarse como una buena aproximación de una respuesta similar a la de Alemania. Para valores mayores de  $\alpha$  las curvas de la figura predicen máximos de mayor valor que van apareciendo a tiempos también superiores. Los tiempos a que ocurren están descritos por los ceros de la función

$$\frac{I'(t)}{I(t)} = \beta^*(t) - \gamma, \quad (13)$$

que se plotea en la figura 8. Es claro de los datos observados, que los dos primeros máximos, asociados a  $\alpha = 0,6$  y  $0,3$  no pueden ocurrir, pues los datos de número de infectados han sobrepasado esos valores ya. Los datos de 16 de abril se acercan a los de la curva de  $\alpha = 0,15$  pero no muestran aún una derivada cercana a cero, por lo que su máximo (de cerca de 800 casos activos) no debe realizarse tampoco. Para  $\alpha = 0,075$ , sin embargo el máximo se aparecería para cerca del 1 de mayo, mostrando 1200 casos. Por otro lado la curva de  $\alpha = 0,0375$  mostraría su máximo cerca del 12 de mayo con alrededor de 2000 casos de infectados activos

Cabe estimar que dados los valores de las observaciones mostradas, existen buenas posibilidades para que los máximos a ocurrir realmente estén por debajo de 1,000 o 2,000 casos

La variación temporal descrita para  $\beta^*$  se muestra en la figura 8 para el caso de  $\alpha = 0,15$ . La curva de  $I_o(t)$  asociada es la línea continua más gruesa en la figura 7.

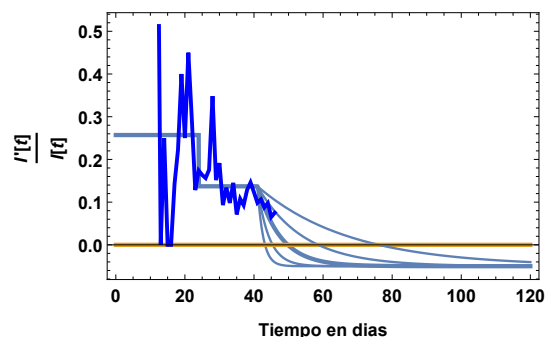


**Figura 8.** Se muestra la variación temporal de  $\beta^*$  que permite describir la curva de número de infectados observados para Cuba más gruesa que se muestra en la figura 7. Esta corresponde a  $\alpha = 0,15$ .

Como ya mencionamos, la figura 8 muestra las curvas de  $I'(t)/I(t) = \beta^*(t) - \gamma$  para el modelo y para los datos, estimada para estos por la razón entre el número de enfermos reportados diariamente y la cantidad total de enfermos activos. A pesar de las fluctuaciones, debidas a que la cantidad de casos es aún reducida (respecto a la población), se indentifica

cierta coherencia con la dependencia temporal de la  $\beta^*(t) - \gamma$  asumida en el marco del modelo considerado. La dependencia más allá del día 16 de abril, debe decidir cuan válida es la suposición sugerida por el modelo de Alemania: considerar que  $\beta^*(t)$  debe tender a cero después de un tiempo de duración medio de la enfermedad.

Una sugerencia importante que puede extraerse de las figuras 8 y 7 se refiere a asumir que la curva azul de los datos para  $I'(t)/I(t)$  en 8 se debe esperar que se apegue a alguna de las exponenciales ploteadas en ella. Si ello es así, se sigue que las cotas de un máximo no superior a 1,000 o 2,000 casos, a suceder a finales de abril, pueden resultar válidas como indica la figura 7.



**Figura 9.** Curvas de  $I'(t)/I(t) = \beta^*(t) - \gamma$  para la solución y para los datos. El gráfico muestra cierta semejanza entre la  $\beta^*(t)$  asumida en el marco del modelo con la observada. Las 5 curvas exponenciales que aparecen corresponden a los varios valores de  $\alpha = 0,6, 0,3, 0,15, 0,075, 0,0375$ . La curva gruesa corresponde a  $\alpha = 0,15$ . Esta figura sugiere que el máximo del número de casos podría ser del orden de 1,000 si la curva azul de  $I'(t)/I(t)$  observada corta el eje horizontal a finales de abril.

Concluimos esta sección con un estudio más exacto realizado con datos para Cuba posteriores al período en que se completaron las secciones principales del trabajo. Estos son datos tomados hasta el 23.04.20. Alrededor del 16.04.20 las mediciones mejoraron significativamente, detectándose una gran proporción de casos asintomáticos. La figura 10 muestra el estudio de la evolución en función del tiempo de  $I'/I$  para casos sintomáticos, obteniéndose un estimado de  $\beta^* \approx \gamma$  a partir del 30.04.20. Esto concuerda con alcanzar un pico para los infectados activos a finales de abril 2020.

## 5.2 Ajustes a modelos con tasa de contagio variable

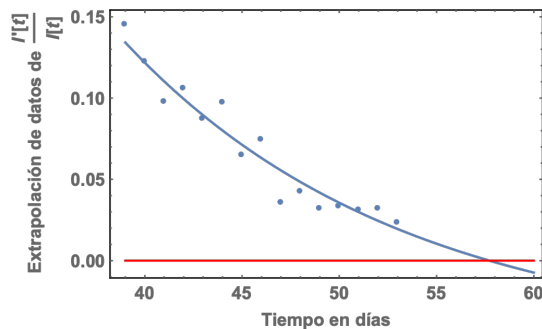
En esta subsección realizaremos un estudio experimental del cambio de la tasa de contagio  $\beta$  para varios países. Estos resultados los comparamos con el modelo presentado anteriormente, llegando a la conclusión de que efectivamente esta tasa de contagio variable se ajusta a los datos, y se reduce con el proceso de cuarentena. Por lo cual el estudio de la dinámica de esta tasa de contagio es relevante.

Quisiéramos destacar además que estudiando el caso de Alemania y el caso de Corea del Sur comprobaremos que el



**Tabla 1.** Valores de tasa de contagio variables de Cuba obtenidas ajustando localmente al comportamiento exponencial del SIR para tiempos pequeños. En el primer escenario se extrapola con la tasa de contagio del periodo IV. En el segundo escenario se fija una tasa de contagio reducida a partir del periodo V. Se considera una tasa de recuperación  $\gamma = 1/20$ , estimada de la cola de la curva de China.

Períodos	$\gamma(\tilde{R}_0 - 1)$	$\beta^*$	$\tilde{R}_0$
I: 16.03.20 al 21.03.20	0.38313	0,43313	8.66261
II: 22.03.20 al 28.03.20	0.207859	0,257859	5.15717
III: 29.03.20 al 9.04.20	0.105325	0,155325	3.10649
IV: 10.04.20 al 16.04.20( o en adelante)	0.0460772	0,0960772	1.92154
V: 30.04.20- en adelante	-0.0115691	0,0384309	0.768618

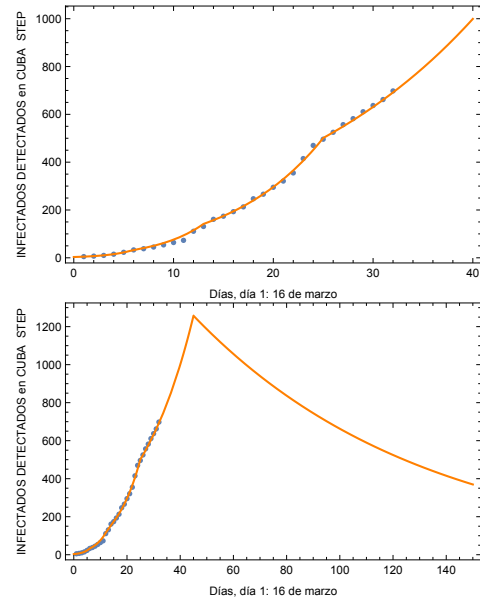


**Figura 10.** Evolución de la magnitud  $(\beta^* - \gamma)$  para Cuba. Se estima con datos hasta el 23.04.20 que el valor  $\beta^* - \gamma = 0$ , es decir el pico de infectados activos, se alcanza a finales de abril, para  $\beta$  siguiendo el comportamiento del ajuste exponencial calculado. El día 55 es el 27.04.20.

máximo alcanzado (y deseado) se corresponde con un máximo debido a  $\beta^* - \gamma < 0$ , o lo que es lo mismo  $\tilde{R}_0 < 1$ . El cual no es el máximo estándar del SIR, si no uno logrado en la región donde  $S \approx N$ . Empleando los datos que se tienen hasta el 16.04.20 construimos un modelo SIR para Cuba dividido en cuatro etapas, considerando valores de  $\beta^*$  dependientes del tiempo. Los valores se muestran en la tabla 1. Estos valores de  $\beta^*$  locales se emplean para construir dos escenarios, el primero con tres valores de  $\beta^*$  y extrapolando la evolución para tiempos mayores con la última tasa de contagio calculada. El segundo, suponiendo que a finales de abril el  $\beta^*$  se reduce dando  $\tilde{R}_0 < 1$ .

En la figura 11 se muestra la solución del SIR, empleando los valores  $\beta^*$  obtenidos haciendo ajustes exponenciales locales mediante mínimos cuadrados. El panel izquierdo de la figura 11 muestra el ajuste a los datos, y el panel derecho de 11 destaca que sucedería a la curva si a finales de abril disminuye la tasa de contagio al nivel  $\beta^* - \gamma < 0$ .

La figura 12 muestra en la primera columna la situación hipotética de evolución del modelo SIR si la tasa de contagio continua siendo la observada al 16.04.20. El pico de la infección sería dilatado hasta septiembre, y alcanzaría los 200,000 infectados activos observados. Se considera una tasa de detección  $k = 0,14$  [5, 12] lo que diría que el pico real sería de aproximadamente 1.5 millones de personas. Este escenario diría que la mayor parte de la población del país se enfermaría,



**Figura 11.** La figura superior representa el número de infectados total (puntos), y la predicción del modelo SIR con tasa de contagio variable (curva naranja) para Cuba. La figura inferior representa el caso optimista de extrapolación en que el confinamiento logre alcanzar una tasa de contagio efectiva con  $\tilde{R}_0 < 1$  a finales de abril. Datos hasta el 18.04.20.

como se puede ver en el panel izquierdo de la figura 13, y no es deseable. De aquí la necesidad de confinamiento. En la segunda columna de la figura 12 se muestra la situación hipotética que debido a las medidas de confinamiento, a finales de abril se alcance un  $\beta^* = 0,0384309$  dado en la quinta columna de la tabla 1.

En este caso el pico de infectados activos se alcanzaría a finales de mayo y los valores observados estarían en el orden de los 1200, los reales más bien en los 8,000 casos. Esto se puede ver también en el panel derecho de la figura 13 donde se observa claramente que la población infectada sería una pequeña fracción de los 12 millones de habitantes. Este escenario ideal es una muestra clara de que el máximo que queremos alcanzar no es el máximo standard de la evolución del SIR, si no un máximo logrado cuando  $\tilde{R}_0 < 1$ . Este es una propiedad importante a tener en cuenta por las personas que en estos tiempos deseen comenzar a analizar esta pandemia.

**Tabla 2.** Tasa de contagio variable a pedazos para Alemania. En el presente período se alcanza  $\tilde{R}_0 < 1$ , por lo que la epidemia está por el momento controlada.

Períodos	$\gamma(\tilde{R}_0 - 1)$	$\tilde{\beta}$	$\tilde{R}_0$
(1): 26.02.20 al 29.02.20	0.583043	$5,25552 * 10^7$	12.6609
(2): 29.02.20 al 04.03.20	0.32193	$3,08777 * 10^7$	7.43861,
(3): 04.03.20 al 08.03.20	0.324113	$3,10589 * 10^7$	7.48226
(4): 08.03.20- al 12.03.20	0.242933	$2,43193 * 10^7$	5.85866
(5): 12.03.20- al 16.03.20	0.241112	$2,41682 * 10^7$	5.82225
(6): 16.03.20- al 20.03.20	0.249774	$2,48873 * 10^7$	5.99549
(7): 20.03.20- al 24.03.20	0.10755	$1,30798 * 10^7$	3.15101
(8): 24.03.20- al 28.03.20	0.127047	$1,46985 * 10^7$	3.54094
(9): 28.03.20- al 01.04.20	0.0400058	$7,47228 * 10^6$	1.80012
(10): 01.04.20- al 05.04.20	0.04677	$8,03384 * 10^6$	1.9354
(11): 05.04.20- al 14.04.20	-0.0161831	$2,80747 * 10^6$	0.676337

**Tabla 3.** Tasa de contagio variable a pedazos para Corea del Sur. En el presente período se alcanza  $\tilde{R}_0 < 1$ , por lo que la epidemia está por el momento controlada.

Períodos	$\gamma(\tilde{R}_0 - 1)$	$\tilde{\beta}$	$\tilde{R}_0$
(1): 29.02.20 al 03.03.20	0.164554	$1,10431 * 10^7$	4.29108
(2): 03.03.20 al 07.03.20	0.0743729	$6,40147 * 10^6$	2.48746
(3): 07.03.20 al 11.03.20	0.0146416	$3,3271 * 10^6$	1.29283
(4): 11.03.20- al 15.03.20	-0.00454485	$2,33958 * 10^6$	0.909103
(5): 15.03.20- al 19.03.20	-0.0244965	$1,31267 * 10^6$	0.510071
(6): 19.03.20- al 23.03.20	-0.0348858	777930.	0.302285
(7): 23.03.20- al 27.03.20	-0.0480769	98981,1	0.0384617
(8): 27.03.20- al 31.03.20	-0.0258793	$1,24149 * 10^6$	0.482413
(9): 31.03.20- al 04.04.20	-0.0357962	731069	0.284076
(10): 04.04.20- al 08.04.20	-0.0180901	$1,64241 * 10^6$	0.638199
(11): 08.04.20- al 14.04.20	-0.0317687	938363.	0.364625

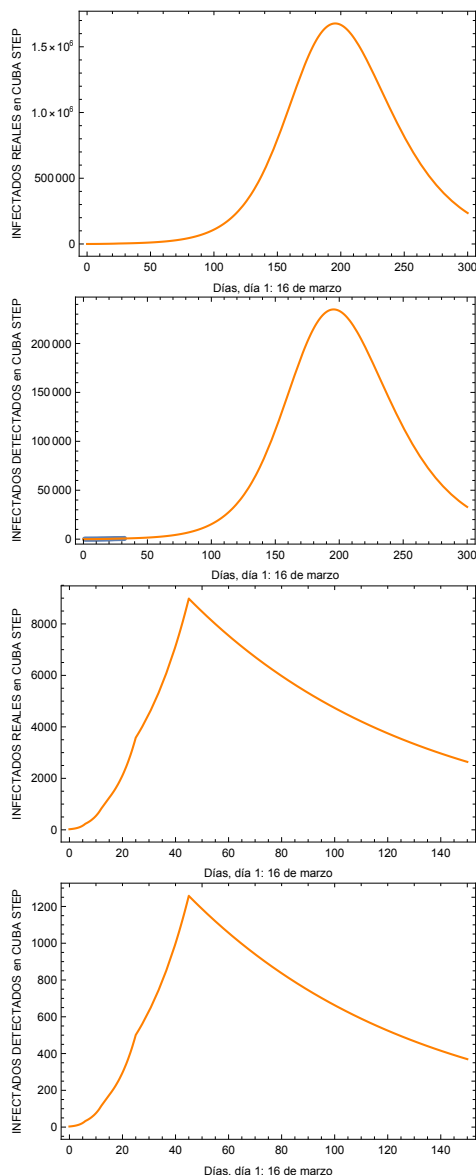
Para aclarar aún más nuestra idea mostraremos las curvas de Alemania y Corea del Sur, esta última con los datos considerados ya en fase de salida de la epidemia. Las figuras 14 y 15 muestran la evolución de la epidemia en estas dos naciones empleando un modelo SIR con tasa de contagio variable en el tiempo, con vistas a reflejar el efecto del confinamiento. Las líneas sólidas representan a las soluciones de las ecuaciones diferenciales del modelo SIR empleando la tasa  $\beta(t)$  obtenida de realizar ajustes locales. En las Tablas 2 y 3 se representa la evolución de los valores de las tasas de contagio  $\beta$ ,  $\tilde{R}_0$  y  $\gamma(\tilde{R}_0 - 1)$ . Se observa que ambos países alcanzaron la región  $\tilde{R}_0 < 1$ .

## 6. Conclusiones

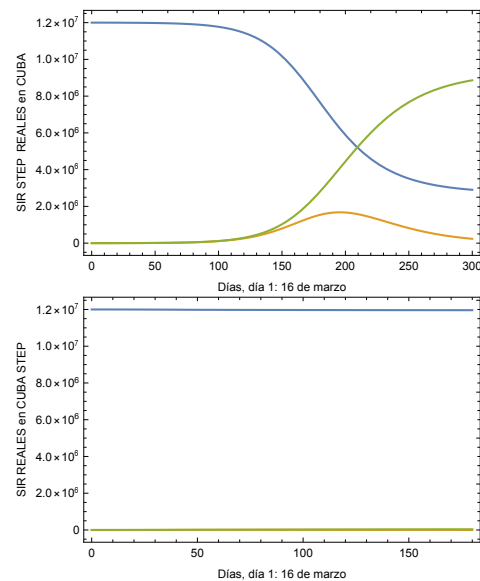
En el trabajo se exploraron dos descripciones de la pandemia. Una de ellas constituye un modelo empírico en el cual se considera que desde el punto en que se establece el confinamiento, la tasa de contagio debe, al menos, empezar a decrecer tendiendo cero después de un período de duración de la enfermedad ( $1/\gamma$ ) (aproximadamente 15 a 20 días). Este modelo es capaz de describir bien el comportamiento de la epidemia

en países como Alemania. El segundo es un modelo SIR con tasa de contagio variable, la cual se ajusta experimentalmente, y su variación se asume que se produce a consecuencia de la cuarentena. Estos análisis sugieren que la tasa de contagio a partir del día de aislamiento se comporta aproximadamente como una exponencial. Ambas descripciones coinciden, y el énfasis de ambos análisis radica en que un control de la epidemia sólo se logra con un confinamiento riguroso. Por lo cual analizando la evolución de la epidemia, resulta muy importante el monitorear los valores de  $\beta$  instantáneos para medir si el confinamiento está siendo lo estricto que se necesita. Esto es, con vistas a controlar la pandemia con un número de infectados muy inferior a la población se requiere que en cierto período de días se cumpla la condición  $\beta^* - \gamma < 0$  ( $\tilde{R}_0 < 1$ ). En los días del 12-04-20 al 18.04.20, cuando se terminó parte de los cálculos en la secciones la tasa de contagio de Cuba estuvo en  $\tilde{R}_0 = 1,92154$ , por lo que aún no eran totalmente efectivas las medidas de confinamiento (La última tasa de contagio estimada en este trabajo para Alemania fue de 0.68, coincidente con la reportada también en la literatura).

El modelo para la evolución de  $\beta^*$  aplicado al caso cubano, predice que la epidemia pudiera concluir inclusive a finales



**Figura 12.** Número de infectados predichos por el modelo SIR con tasa variable para Cuba. La tasa de detección se toma de  $k = 0,14$  [5, 12]. Los dos primeros gráficos muestran los infectados activos totales y observados, considerando una tasa de contagio variable ajustada. La extrapolación a grandes tiempos se hace empleando la tasa de contagio al 16.04.20. Los dos gráficos siguientes muestran la evolución de infectados totales y observados para el caso de imponer un confinamiento más estricto a finales de abril (tabla).

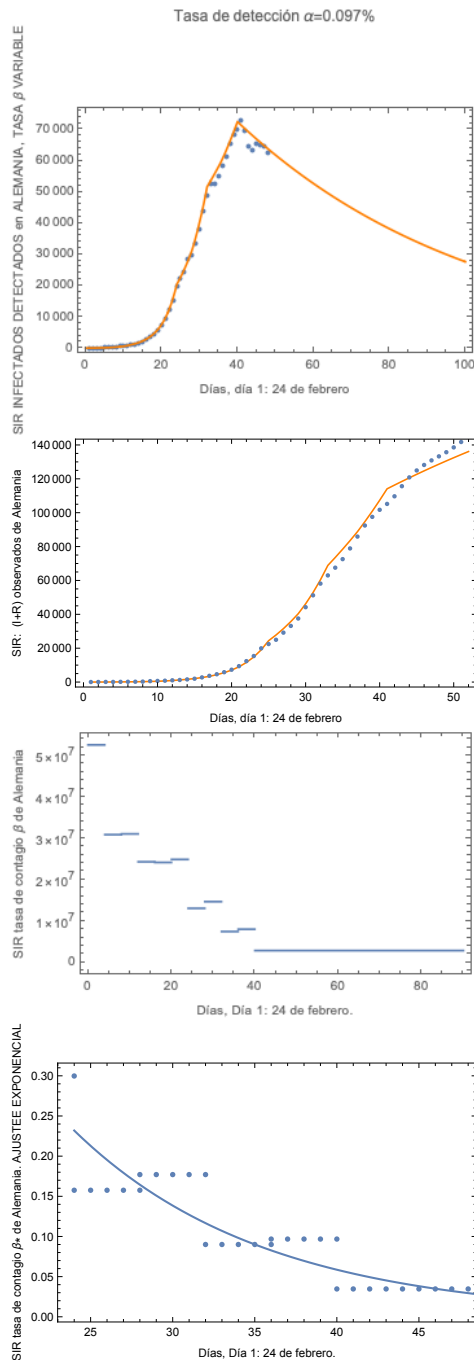


**Figura 13.** Evolución de susceptibles, infectados y recuperados en el modelo SIR aplicado a Cuba. La curva azul representa los susceptibles, la roja los recuperados y la amarilla los infectados. En la primera fila se ve que con la tasa de contagio al 16.04.20 se estima que 4 millones de personas no sufran contagio. La segunda figura muestra como ejemplo el efecto de un confinamiento estricto a finales de abril: una epidemia controlada como parece ser el caso de China y Alemania, en que el número de infectados es muy inferior a la población.

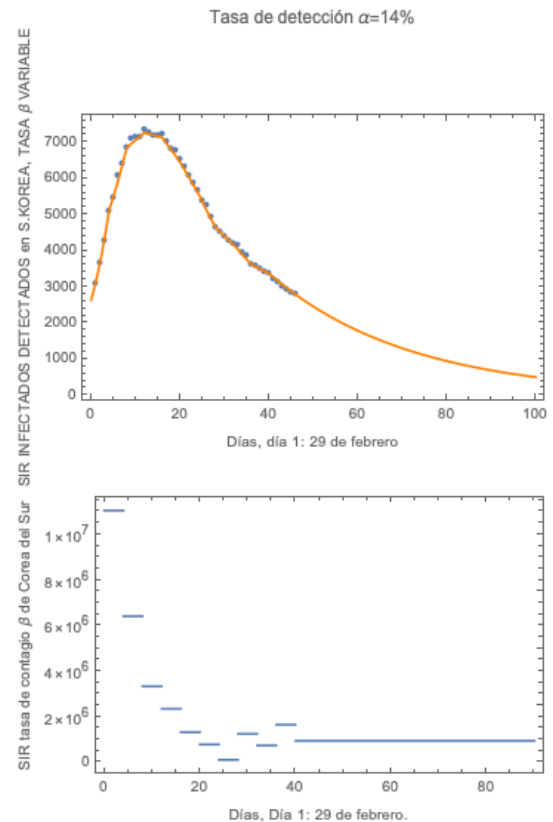
de abril o principios de mayo si las medidas de aislamiento tomadas en el entorno del 24 de Marzo, resultaran efectivas. En este caso el máximo número de infectados resultaría del orden de 1000 infectados activos con el máximo apareciendo a finales de abril. El valor del máximo crecería a medida que este tarde mas en realizarse. Es claro por la evolución posterior de la epidemia en Cuba que en nuestro trabajo estimamos correctamente esta tendencia.

También en los modelos de  $\beta^*$  variables a pedazo en el tiempo, se asumió una efectividad del aislamiento a finales de abril logrando  $\beta^* - \gamma < 0$ , que podría definir a finales de abril un pico de infectados activos del orden de las 1000 personas. En esta situación optimista el número de personas máximo en estado grave estaría en el orden los cientos. En el caso de no haberse logrado controlar la evolución de la epidemia, y continuar con la tasa de contagio al 16.04.20 los casos graves hubiesen rondado los 20000, y el pico se hubiese alcanzado en el mes de septiembre. Este análisis coincide con el anterior.

El apéndice 7 muestra la estimación de la tasa de recuperación para Cuba como  $\gamma = 0,062 \pm 0,004$ , la cual posee coincidencia con la estimada para la cola de la curva de infectados de China, dándose una universalidad en este parámetro. Con los métodos estudiados en el trabajo los apéndices 8 y 9 se dedican a la evolución de la epidemia en Cuba con datos al 7.06.20 y al 23.07.20 respectivamente. El primer estudio nos permite estimar la aparición de un segundo pico y decaimiento del contagio. El segundo estudio intenta ser una estimación a



**Figura 14.** La primera figura muestra la evolución de los infectados para Alemania de acuerdo a los datos experimentales (puntos azules) en a un modelo SIR con tasa de contagio  $\beta$  variable (línea naranja). El segundo gráfico muestra el número de  $I + R$  de los datos (puntos azules) confrontado con el modelo (línea naranja). El tercer gráfico muestra primero la variación de la tasa de contagio en el tiempo, y el cuarto gráfico se realiza el ajuste de una de exponencial (línea) a las  $\beta$ s locales (puntos) a partir del confinamiento. Se considera  $\gamma = 1/20$ . Alemania se encuentra en la región donde  $\beta^* - \gamma < 0$ .



**Figura 15.** La primera figura muestra la evolución de los infectados para Corea del Sur de acuerdo a los datos experimentales (puntos azules) y a un modelo SIR con tasa de contagio  $\beta$  variable. La segunda figura muestra la variación de la tasa de contagio en el tiempo. Se considera  $\gamma = 1/20$ . Corea del Sur se encuentra en la región donde  $\beta^* - \gamma < 0$ .

futuro a partir de la fecha en que se envía este trabajo.

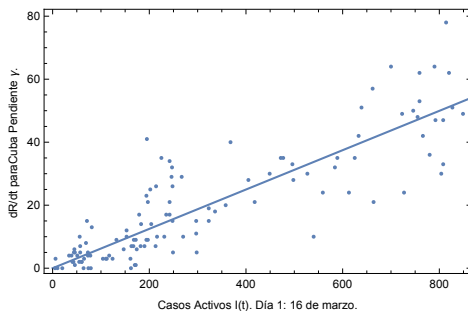
Nos gustaría destacar que el mensaje importante de este trabajo es el hecho de que la dinámica de los parámetros que controlan la evolución de la epidemia es relevante. En particular la evolución de la tasa de contagio  $\beta^*$  (o de  $\tilde{R}_0 - 1$ , o de  $\frac{I'(t)}{I(t)}$ ) debe tomarse muy en cuenta para determinar que medidas imponer. La observación de estas cantidades sin duda permite una estimación cualitativa de cuando se debe obtener el máximo de casos, es decir, de cuando comenzará el fin de la epidemia.

## Agradecimientos

Agradecemos a Juan Barranco, Argelia Bernal, Alejandro Cabo Bizet, Milagros Bizet, David Delepine, Alejandro Gil, Augusto González, Alma González, Alejandro Lage, Oscar Loaiza, Albrecht Klemm, Damián Mayorga, Mauro Napsuciale, Gustavo Niz, Octavio Obregón y Luis Ureña, por discusiones muy útiles y comentarios durante el desarrollo del trabajo. NCB agradece al Proyecto CONACyT A1-S- 37752, al Proyecto UG CIIC 290/2020 y al Proyecto COVID19-UG 36/2020 “Modelación matemática de la propagación del COVID-19 en México y Guanajuato”, y al Laboratorio de Datos, DCI, de la Universidad de Guanajuato. ACM desea agradecer el apoyo recibido del Network 09, de la Oficina de Asuntos Externos (OEA) del “Centro Internacional para la Física Teórica”(ICTP) en Trieste, Italia.

## 7. Apéndice A: Gamma

A continuación en la figura 16 mostramos una gráfica de  $dR/dt$  versus  $I$ . Se puede apreciar que los valores de la tasa de recuperación son aproximadamente constantes.



**Figura 16.** La figura muestra el ajuste para  $\gamma$  de Cuba, obteniéndose  $\gamma = 0,062 \pm 0,004$ . Los datos corresponden al intervalo del 16.03.20 al 23.07.20, sin embargo este parámetro no ha variado considerablemente desde el comienzo de la epidemia, y este resultado es universal (se corresponde al estimado de la cola de la curva de infectados de China). Se reporta con el 95 % de confianza.

## 8. Apéndice B: Segundo pico

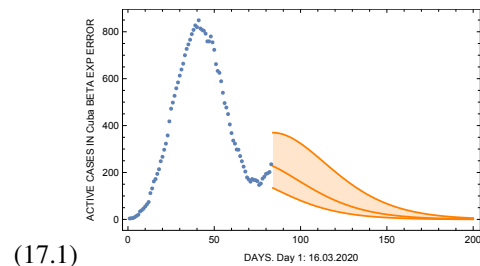
En los meses posteriores a la aparición del primer pico empleamos dos modelos para estudiar la evolución de Cuba

a futuro teniendo en cuenta las incertidumbres. El primero se basó en la estimación de  $R_0(t)$  de los datos de infectados acumulados y el segundo de los datos de activos. El primero posee menos dispersión que el segundo.

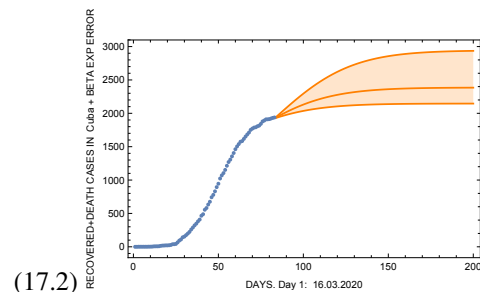
**Modelo I:** El último gráfico en la Fig.17 muestra el valor de  $R_0$  obtenido del ajuste exponencial:

$$R_0 = \frac{(I+R)'}{\gamma(I+R)} + 1. \quad (14)$$

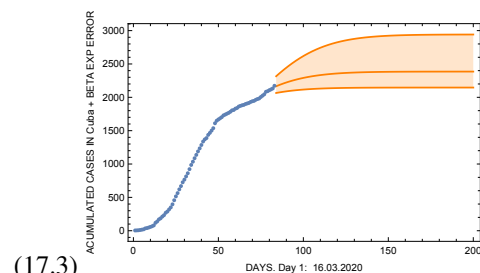
Esta formula es exacta en el límite donde la ecuaciones del SIR son lineales. Note que este valor de  $R_0$  provee un estimado valido siempre que  $R_0 > 1$  puesto que los casos acumulados siempre aumentan. Existía un riesgo con el valor de  $R_0$ , dando resultados locales por encima de 1. Las tres primeras figuras en 17 muestran los gráficos de:  $I$ ,  $R$ ,  $(I+R)$  con esta extrapolación exponencial al futuro. Se consideran errores en la medición de condiciones iniciales para extrapolar. Se reportan parámetros con el 95 % de confianza.



(17.1)



(17.2)

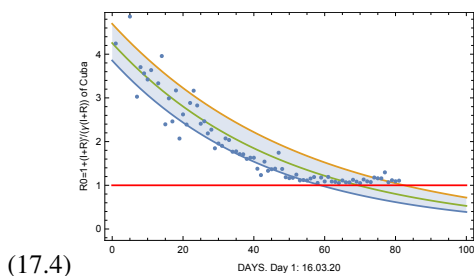


(17.3)

**Modelo II:** El último gráfico en la Fig.18 muestra el valor de  $R_0$  obtenido del ajuste exponencial:

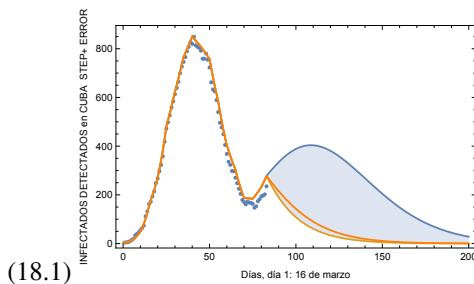
$$R_0 = \frac{I'}{\gamma I} + 1. \quad (15)$$



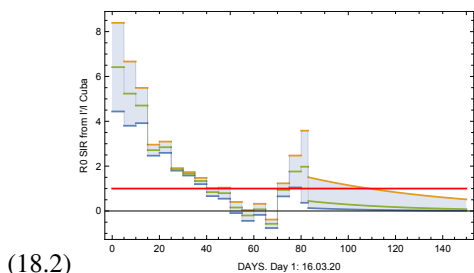


**Figura 17.** Modelo I, estimados de  $R_0 = \left(\frac{(I+R)'}{\gamma(I+R)} + 1\right)$ . Las figuras (17.1) (17.2) y (17.3) muestran  $I$ ,  $R$  e  $(I+R)$  con esta extrapolación exponencial al futuro a partir del 7.06.20. La figura (17.4) muestra el  $R_0$  obtenido del ajuste exponencial de con datos del 16.03.20 al 06.06.20. Se consideran errores en la medición de condiciones iniciales para extrapolar. Se reportan parámetros con el 95% de confianza. Los puntos azules son los datos, la curva intermedia denota el valor más probable, y la zona sombreada las trayectorias posibles.

Esta estimación es exacta en el límite donde las ecuaciones del SIR son lineales y válida para cualquier valor de  $R_0$ , sin embargo posee más dispersión que (14) como puede apreciarse. El primer gráfico en la Fig. 18 es la curva de activos, descrita primero por un  $\beta^*$  a pedazos y con extrapolación al futuro exponencial. El segundo gráfico muestra el cambio en los valores de  $R_0$ , primero a pedazos en el tiempo, luego con una extrapolación exponencial.

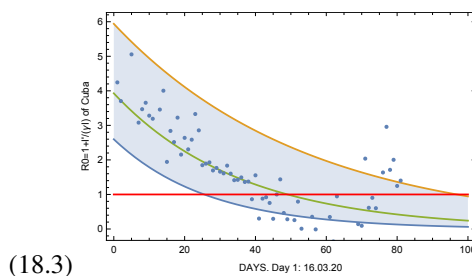


(18.1)



(18.2)

Ambos estimados en el Modelo I y en el Modelo II permitieron determinar el 7.06.2020 que ocurriría un segundo pico de la epidemia, y el valor de los infectados disminuiría.



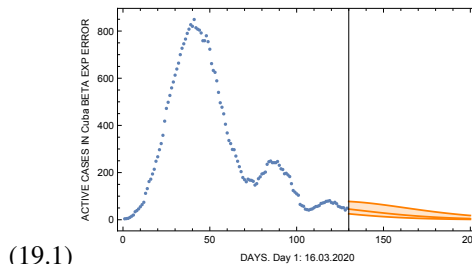
(18.3)

**Figura 18.** Modelo II, estimados de  $R_0 = \left(\frac{I'}{\gamma I} + 1\right)$ . Las figuras (18.1) y (18.2) muestran  $I(t)$  y  $R_0$  con una tasa de contagio a pedazos y esta extrapolación exponencial al futuro a partir del 07.06.20. La figura (18.3) muestra el  $R_0$  obtenido del ajuste exponencial. Se reportan parámetros con el 95% de confianza. Los puntos azules son los datos, la curva intermedia denota el valor más probable, y la zona sombreada las trayectorias posibles.

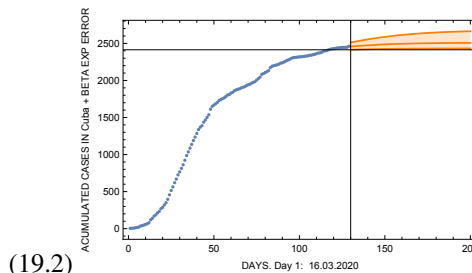
## 9. Apéndice C: Última actualización

Considerando datos hasta el 23.07.2020 realizamos una extrapolación de las poblaciones de Cuba al futuro. Considerando intervalos de confianza se aprecia que la situación está por el momento controlada.

Los gráficos en la figura 19 muestran:  $I$ ,  $R$ ,  $(I+R)$  con esta extrapolación exponencial al futuro para el Modelo I. Se consideran errores en la medición de condiciones iniciales para extrapolar. Se reportan parámetros con el 95% de confianza.



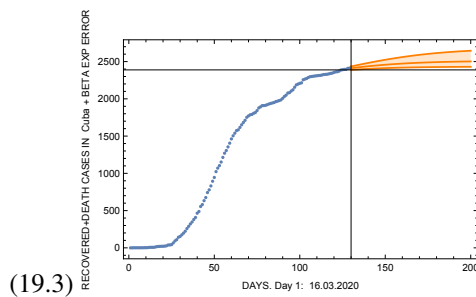
(19.1)



(19.2)

## Referencias

- [1] "The SARS-CoV-2 in Mexico: analysis of plausible scenarios of behavioral change and outbreak containment", Acuña-Zegarra et al. *Sin publicar*.



**Figura 19.** Modelo I: Las figuras (19.1)(19.2) y (19.3) muestran los gráficos de  $I$ ,  $R$  e  $(I + R)$  con esta extrapolación exponencial al futuro a partir del 23.07.20. Se consideran errores en la medición de condiciones iniciales para extrapolar. Se reportan parámetros con el 95 % de confianza. Los puntos azules son los datos, la curva intermedia denota el valor más probable, y la zona sombreada las trayectorias posibles.

- [2] "An updated estimation of the risk of transmission of the novel coronavirus (2019-nCoV)", Tang et al.  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S246804272030004X>
- [3] "Modelo de infectados para el Edo. de Guanajuato COVID-19", J.Barranco y A.Bernal. *Sin publicar*.
- [4] Entrada de Blog: "Como usé las matemáticas para predecir COVID-19 en el estado de Guanajuato, México", Lisa Shiller.  
<https://www.lisashiller.com>.
- [5] "Substantial undocumented infection facilitates the rapid dissemination of novel coronavirus (SARS-CoV2)", Li et al. Science 2020,  
<https://science.sciencemag.org/content/early/2020/03/24/science.abb3221>
- [6] "Public Health Responses to COVID-19 Outbreaks on Cruise Ships euro Worldwide", February href euro "March 2020", Moriarty et al.  
<https://www.cdc.gov/mmwr/volumes/69/wr/mm6912e3.htm>
- [7] "An SIR Epidemic Model with Time Delay and General Nonlinear Incidence Rate", Mingming Li and Xianning Liu,  
<https://doi.org/10.1155/2014/131257>
- [8] "Infectious disease models with time-varying parameters and general nonlinear incidence rate", Xinzhi Liu and Peter Stechlinski  
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.08.019>
- [9] "John Hopkins Data"  
<https://data.humdata.org/dataset/novel-coronavirus-2019-ncov-cases>
- [10] "Epidemic Modeling 101: Or why your CoVID-19 exponential fits are wrong", Bruno Gonçalves  
<https://medium.com/data-for-science>
- [11] "Database worldometer"  
<https://www.worldometer.info>
- [12] "Estimating the number of infections and the impact of non- pharmaceutical interventions on COVID-19 in 11 European countries". <https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/medicine>
- [13] "Coronavirus Covid-19 spreading in Italy: optimizing an epidemiological model with dynamic social distancing through Differential Evolution"  
<https://arxiv.org/pdf/2004.00553.pdf>
- [14] "Epidemic situation and forecasting of COVID-19 in and outside China" Yubei Huang, Lei Yangb, Hongji Daia, Fei Tiana, and Kexin Chena. [https://www.who.int/bulletin/online\\_first/20-255158.pdf](https://www.who.int/bulletin/online_first/20-255158.pdf)
- [15] "Clinical Characteristics of 138 Hospitalized Patients With 2019 Novel Coronavirus-Infected Pneumonia in Wuhan, China", D.Wang et al. <https://jamanetwork.com/journals/jama/fullarticle/2761044>
- [16] "Clinical features of patients infected with 2019 novel coronavirus in Wuhan, China", C.Huang et al. [https://www.thelancet.com/journals/lancet/article/PIIS0140-6736\(20\)30183-5/fulltext](https://www.thelancet.com/journals/lancet/article/PIIS0140-6736(20)30183-5/fulltext)
- [17] "A Time-dependent SIR model for COVID-19 with Undetectable Infected Persons", Y.Chen. P.E.Lu, CS. Chang and T.H. Liu. <https://arxiv.org/pdf/2003.00122.pdf>
- [18] "Estimating the asymptomatic proportion of coronavirus disease 2019 (COVID-19) cases on board the Diamond Princess cruise ship, Yokohama, Japan, 2020", K.Mizumoto, K.Kagaya, A.Zarebski, G.Chowell. <https://www.eurosurveillance.org/content/10.2807/1560-7917.ES.2020.25.10.2000180>
- [19] "La pandemia covid-19-coronavirus en México y el mundo" José-Antonio de la Peña. *Sin publicar*.
- [20] "Covid Cuba data". <https://covid19cubadata.github.io/#cuba>
- [21] "Preliminary estimation of the basic reproduction number of novel coronavirus (2019-nCoV) in China, from 2019 to 2020: A data-driven analysis in the early phase of the outbreak", International Journal of Infectious Diseases 92 (2020) 214-217. S. Zhao et al. <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/32007643/>
- [22] "Modelos SIR modificados para la evolución del COVID19" Nana Cabo Bizet, Alejandro Cabo Montes de Oca. <https://arxiv.org/abs/2004.11352>