

ALGUNAS NOTAS SOBRE LAS PROPIEDADES EFECTIVAS DE COMPUESTOS LAMINADOS TERMOPIEZOELÉCTRICOS

Esperanza García Santoyo, Julián Bravo Castillero¹ y Reinaldo Rodríguez Ramos

Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba

Federico J. Sabina, Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y Sistemas,
Universidad Nacional Autónoma de México, México, D. F., México

Raúl Martínez Rosado, Instituto Superior de Estudios Superiores de Monterrey, Campus, Estado de México,
Escuela de Ingeniería y Computación, Estado de México, México

RESUMEN

Se obtienen las expresiones generales de las propiedades efectivas para medios laminados termopiezoeléctricos, provistos de una estructura periódica y cualquier número finito de láminas por celda periódica unitaria. Este resultado se basa en la combinación de las fórmulas reportadas por Pobedrya (Capítulo 5, Mecánica de Materiales Compuestos, 1984) para el caso puramente elástico, con las notaciones abreviadas utilizadas en Galka et al. (Comput. Assis. Mech. Engng. Sci., 3, 113-154, 1996). En particular, se demuestra que a partir de las fórmulas generales obtenidas para n fases, resultan las correspondientes al caso $n = 2$, reportadas en el mencionado artículo de Galka et al.

ABSTRACT

General expressions of the effective properties for thermopiezoelectric laminated media, which have a periodic structures and a layers finite number by each unit periodic cell, are obtained. This result consists in the combination of formulae reported by Pobedrya (Chapter 5, Mechanics of Composite Materials, 1984) for the purely elastic case, with the summarized notations used in Galka et al. (Assis. Mech. Engng. Sci.3, 113-154, 1996). The formulae corresponding to two-layered thermopiezoelectric composites published by Galka et al. are derived of the general formulae obtained for n phases.

INTRODUCCIÓN

El Método de Homogeneización Asintótica es una eficiente técnica matemática para obtener propiedades efectivas de materiales compuestos. Este método ha sido aplicado extensivamente a los más diversos medios heterogéneos, sin embargo, a continuación sólo nos referiremos a algunos trabajos donde ha sido aplicado a medios laminados provistos de una estructura periódica. Por ejemplo, en [1] es usado para encontrar fórmulas generales de compuestos termo-piezoeléctricos bifásicos. En [2] se logran fórmulas analíticas generales para todos los coeficientes efectivos de compuestos piezoeléctricos n -laminados mediante una generalización previa de los resultados publicados en el capítulo 5 de [3] para el caso puramente elástico. Importantes resultados matemáticos relativos a los fundamentos del método, con particular insistencia en medios termo-piezoeléctricos laminados, pueden ser encontrados en [4].

La contribución teórica de este artículo es la generalización de las fórmulas reportadas en [1] al caso de compuestos termo-piezoeléctricos formados por cualquier número finito de láminas. Basado en los resultados publicados en [5] se tiene que tales fórmulas son válidas tanto para estructuras periódicas como no periódicas.

En la sección 2 se presenta el planteamiento del problema para un medio termo-piezoeléctrico formado por múltiples láminas, se plantean los problemas locales (modelo matemático) utilizando la notación compacta introducida en [4], y se describe el procedimiento de obtención de las expresiones analíticas para los correspondientes coeficientes efectivos. En la sección 3, siguiendo una vía diferente de solución de los problemas locales, a saber la que aparece en [4], se obtienen las fórmulas generales correspondientes a las propiedades efectivas de compuestos bifásicos. Finalmente, en la sección 4 se demuestra que tales fórmulas resultan a partir de las obtenidas en la sección 2 para un caso particular $n = 2$.

2. COEFICIENTES EFECTIVOS Y PROBLEMAS LOCALES

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la región acotada que ocupa un compuesto laminado termo-piezoeléctrico, constituido por elementos recurrentes (celdas) que están periódicamente distribuidas a lo largo del eje Ox_3 . Cada celda puede poseer cualquier número finito de láminas termo-piezoeléctricas. Los ejes de simetría del material de cada lámina son paralelos entre sí y el eje x_3 es perpendicular al laminado. Las componentes de los tensores elástico, termo-elástico, piezoeléctrico, dieléctrico y piro-eléctrico serán denotadas, respectivamente, por C_{ijkl} , λ_{ij} , g_{ijk} , ϵ_{ij} y λ_i . A lo largo de este artículo los índices latinos toman valores 1, 2 y 3; y los índices griegos recorren desde 1 hasta 4. Es adoptado el convenio de suma respecto a los índices repetidos. Denotaremos por k_{ij} la conductividad del calor, por $\beta = \frac{C_e}{T_0}$; C_e el calor específico en tensión constante por unidad de volumen y por T_0 la temperatura de referencia (absoluta). Supongamos que todas las funciones materiales son Y -periódicas donde $Y = \{y_3: 0 \leq y_3 \leq 1\}$ es la celda periódica unitaria. Aquí $y_3 = \frac{x_3}{\alpha}$ es la coordenada local (rápida) y $\alpha = \frac{l}{L}$ es un parámetro geométrico pequeño, el cual representa la razón entre una longitud característica l de la celda periódica Y , y una longitud característica L del dominio completo Ω .

Usando una notación compacta introducida en [1, 4], los coeficientes efectivos pueden ser escritos como:

$$\bar{C}_{\alpha\beta\mu\nu} = \left\langle C_{\alpha\beta\mu\nu} + C_{\alpha\beta\gamma 3} \frac{d_{\mu\nu} \chi_\gamma}{dy_3} \right\rangle \quad (1)$$

$$\bar{k}_{ij} = \left\langle k_{ij} + k_{i3} \frac{d_j \Theta}{dy_3} \right\rangle \quad (2)$$

donde $C_{ijmn} \equiv C_{ijmn}$, $C_{4jmn} \equiv g_{jmn}$, $C_{4j4n} \equiv -\epsilon_{jn}$, $C_{ij44} \equiv -\gamma_{ij}$, $C_{4j44} \equiv \lambda_j$ and $C_{4444} \equiv \beta$. El corchete angular define el promedio por unidad de longitud de la magnitud sobre la celda unitaria, es decir $\langle F \rangle = \int_0^1 F(y_3) dy_3$. Aquí las funciones auxiliares ${}_{\mu\nu} \chi_\gamma$ y j^Θ con los pre-subíndices $\mu\nu$ y j son soluciones de los siguientes problemas locales:

Problema ${}_{\mu\nu}L$: Encontrar ${}_{\mu\nu} \chi_\gamma$ sobre $Y = [0, y_3^1] \cup [y_3^1, y_3^2] \cup \dots \cup [y_3^n, 1]$, que satisfacen la ecuación

$$\frac{d}{dy_3} \left(\bar{C}_{\alpha 3 \gamma 3} \frac{d_{\mu\nu} \chi_\gamma}{dy_3} + C_{\alpha 3 \mu\nu} \right) = 0 \quad (3)$$

tal que $\langle {}_{\mu\nu} \chi_\gamma \rangle = 0$, ${}_{\mu\nu} \chi_\gamma(1) - {}_{\mu\nu} \chi_\gamma(0) = 0$ (condición de periodicidad) y las condiciones de contacto perfecto en las interfaces:

$$[[{}_{\mu\nu} \chi_\gamma]]|_{y_3^m} = 0, \quad (4)$$

$$\left[\left[C_{\alpha 3 \gamma 3}(y_3) \frac{\partial {}_{\mu\nu} \chi_\gamma}{\partial y_3} + C_{\alpha 3 \mu\nu}(y_3) \right] \right] \Big|_{y_3^m} = 0, \quad m = 0, \dots, n \quad (5)$$

Problema j^Θ : Encontrar j^Θ Y -periódica que satisface la ecuación:

$$\frac{d}{dy_3} \left(k_{3j} + k_{33} \frac{d_j \Theta}{dy_3} \right) = 0. \quad (6)$$

tal que $\langle \Theta_k \rangle = 0$, $\Theta_k(1) - \Theta_k(0) = 0$ (condición de periodicidad) y las condiciones de contacto perfecto en las interfaces:

$$[[\Theta_k]]|_{y_3^m} = 0,$$

$$[[k_{ik} + k_{ij} \Theta_{k,j}]]|_{y_3^m} = 0, \quad m = 2, \dots, n$$

donde $[[(\bullet)]]|_{y_3^m} = (\bullet)^m(y_3^{m-1}) - (\bullet)^{m-1}(y_3^{m-1})$

$$\langle f \rangle = \int_0^1 f(y) dy.$$

Siendo $(\bullet)^i$ el valor que toma la función en la lámina $[y_3^{i-1}, y_3^i]$ y y_3^m , $m = 1, \dots, n$, indican las interfaces entre cada lámina.

2.1. Coeficientes efectivos de un compuesto termo-piezoeléctrico de n fases

Para obtener las expresiones generales de los coeficientes efectivos definidos por las relaciones (1) - (2), es necesario resolver los anteriores problemas locales. Usaremos, para este caso, el procedimiento empleado en [3] para el caso puramente elástico. En efecto, la ecuación (3) es equivalente a:

$$C_{\alpha 3 \gamma 3} (\mu \nu \chi_\gamma)' + C_{\alpha 3 \mu \nu} = C_{\alpha 3 \mu \nu}^0$$

siendo $C_{\alpha 3 \mu \nu}^0$ las componentes del tensor constante resultante de la integración. Despejando en la ecuación anterior resulta

$$(\mu \nu \chi_\gamma)' = C_{\alpha 3 \gamma 3}^{-1} (C_{\alpha 3 \mu \nu}^0 - C_{\alpha 3 \mu \nu}) \quad (7)$$

donde $C_{\alpha 3 \gamma 3}^{-1}$ son las componentes de la matriz inversa de $C_{\alpha 3 \gamma 3}$.

Las funciones locales $\mu \nu \chi_\gamma$ pueden ser escritas como:

$$\mu \nu \chi_\gamma(\xi) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu \nu \chi_\gamma^{(i)}(\xi) l_i(\xi) \quad (8)$$

donde $\mu \nu \chi_\gamma^{(i)}$ es la correspondiente a la lámina i , e l_i es la función indicadora, es decir

$$l_i(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \in [y_3^{i-1}, y_3^i] \\ 0 & \text{si } \xi \notin [y_3^{i-1}, y_3^i] \end{cases} \quad \text{siendo } y_3^0 = 0, y_3^{n+1} = 1$$

Promediando en ambos miembros de (8), resulta:

$$\langle (\mu \nu \chi_\gamma)' \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{y_3^{i-1}}^{y_i} (\mu \nu \chi_\gamma)'(\xi) d\xi = \mu \nu \chi_\gamma^{(n+1)}(1) - \mu \nu \chi_\gamma^{(0)}(0) + \sum_{i=2}^{n+1} [[\mu \nu \chi_\gamma]]|_{y_3^{(i)}} \quad (9)$$

La expresión (9) se anula en virtud de las condiciones de contacto ideal, (4) y (5). Seguidamente, promediando en ambos miembros de (7), se obtiene:

$$C_{p3q3}^0 = \left\langle C_{\delta3p3}^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle C_{p3\theta3}^{-1} C_{\theta3\mu\nu} \right\rangle \quad (10)$$

Luego sustituyendo (10) en (7) se tiene que:

$$\frac{d_{\mu\nu} \chi_\gamma}{dy_3} = C_{\gamma3\delta3}^{-1} \left(\left\langle C_{\delta3p3}^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle C_{p3\theta3}^{-1} C_{\theta3\mu\nu} \right\rangle - C_{\delta3\mu\nu} \right) \quad (11)$$

Finalmente, sustituyendo (11) en (1) se obtiene la expresión general para los coeficientes efectivos de compuestos termo-piezoeléctricos formados por n láminas:

$$\bar{C}_{\alpha\beta\mu\nu} = \left\langle C_{\alpha\beta\mu\nu} \right\rangle + \left\langle C_{\alpha\beta\gamma3} C_{\gamma3\delta3}^{-1} \right\rangle \left\langle C_{\delta3p3}^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle C_{p3\theta3}^{-1} C_{\theta3\mu\nu} \right\rangle - \left\langle C_{\alpha\beta\gamma3} C_{\gamma3\delta3}^{-1} C_{\delta3\mu\nu} \right\rangle \quad (12)$$

Siguiendo un procedimiento análogo, se pueden obtener los coeficientes efectivos para el tensor de la conductividad térmica, a saber:

$$\bar{k}_{ij} = \left\langle k_{ij} \right\rangle + \left\langle k_{i3} k_{33}^{-1} \right\rangle \left\langle k_{33}^{-1} \right\rangle^{-1} \left\langle k_{33}^{-1} k_{3j} \right\rangle - \left\langle k_{i3} k_{33}^{-1} k_{3j} \right\rangle \quad (13)$$

2.1.1. Algunas notas

- 1) Las fórmulas (12) y (13) son también válidas para un laminado finito no necesariamente periódico. Las expresiones de los problemas locales y de los coeficientes efectivos son las mismas en ambos casos, con la particularidad de que para un problema no periódico las funciones locales toman el valor cero en las caras opuestas de la celda unitaria Y (ver, por ejemplo [5], de donde resulta que para el caso unidimensional, que aquí se estudia, las condiciones de contorno son equivalentes a las condiciones de periodicidad).
- 2) En (12) y (13) se cumplen las propiedades de simetría de las fases así como las condiciones de elipticidad, es decir,

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}^h = C_{\mu\nu\alpha\beta}^h, C_{\alpha\beta\mu\nu}^h = C_{\alpha\beta\nu\mu}^h, C_{\alpha\beta\mu\nu}^h = C_{\beta\alpha\mu\nu}^h$$

$$\exists \alpha > 0 : \forall \mathbf{e} \in E_S^3 C_{\alpha\beta\mu\nu}^h e_{\alpha\beta} e_{\mu\nu} \geq \alpha |\mathbf{e}|^2$$

$$\exists \alpha_1 > 0 : \forall \mathbf{e} \in E_S^3 k_{ij}^h a_i a_j \geq \alpha_1 |\mathbf{e}|^2$$

La comprobación de las propiedades de simetría se realiza haciendo permutaciones de índices convenientemente hasta obtener la expresión deseada. Para verificar, las condiciones de elipticidad basta seguir la técnica empleada en el Capítulo 6, Págs. 196-222 de [6].

- 3) A modo de control, se puede observar de (12) y (13) que las unidades para los coeficientes efectivos coinciden con las unidades de las fases. Además, si el medio es homogéneo, los paréntesis angulares desaparecen y se reproducen las propiedades efectivas de las fases del medio homogéneo.
- 4) En la literatura técnica este tipo de distribución de las láminas ($y \equiv y_3$) es conocida como “conectividad en serie” (ver Figura 1), y el caso correspondiente $y \equiv y_1$ (o y_2) es llamado “conectividad en paralelo” (ver [4]). De (13) y (14), intercambiando en estas expresiones los índices 3 y 2 (ó 1), puede ser obtenida la correspondiente fórmula para el caso de conectividad en paralelo.

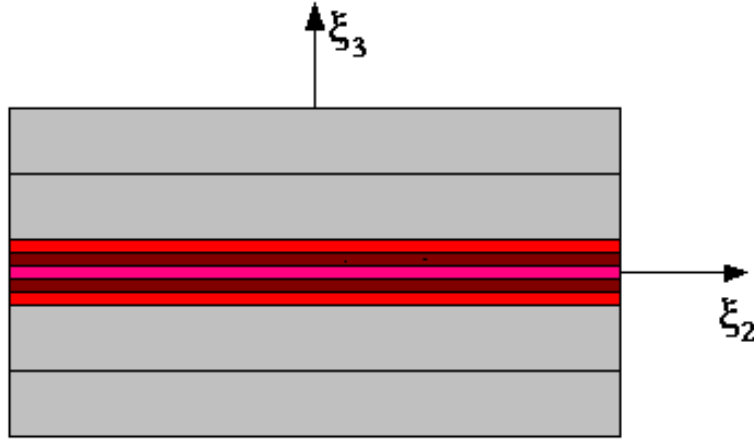


Figura 1. Distribución laminada “conectividad en serie”.

3. COEFICIENTES EFECTIVOS PARA EL CASO BILAMINADO ($n = 2$)

Para que el trabajo sea auto-contenido, se incluye ahora la solución correspondiente al caso bifásico dada en [4]. Los problemas locales (3)-(6) pueden ser resueltos usando el procedimiento empleado en [1] para el caso de un compuesto bilaminado, como sigue: De (7) resulta que:

$${}_{\mu\nu}\chi_{\gamma} = C_{\alpha 3\gamma 3}^{-1} \left(C_{\alpha 3\mu\nu}^0 - C_{\alpha 3\mu\nu} \right) y_3 + A_{\gamma}^{\mu\nu}$$

Para que la notación sea más simple hagamos $y_3 = y$, de donde se tiene que las funciones locales ${}_{\mu\nu}\chi_{\gamma}(y)$ se pueden definir por:

$${}_{\mu\nu}\chi_{\gamma}(y) = \begin{cases} (1) \\ {}_{\mu\nu}\chi_{\gamma}(y), y \in (0, \xi) \\ (2) \\ {}_{\mu\nu}\chi_{\gamma}(y), y \in (\xi, 1) \end{cases}$$

En este caso las condiciones (4)-(5) vienen dadas por:

$$\begin{matrix} (1) \\ {}_{\mu\nu}\chi_{\gamma}(0) \end{matrix} = \begin{matrix} (2) \\ {}_{\mu\nu}\chi_{\gamma}(1) \end{matrix}, \quad \begin{matrix} (1) \\ {}_{\mu\nu}\chi_{\gamma}(\xi) \end{matrix} = \begin{matrix} (2) \\ {}_{\mu\nu}\chi_{\gamma}(\xi) \end{matrix},$$

las cuales conducen a las siguientes expresiones:

$$\begin{matrix} (1) \\ A_{\gamma} \end{matrix}^{\mu\nu} = \begin{matrix} (2) \\ C_{\alpha 3\gamma 3} \end{matrix}^{-1} \left(C_{\alpha 3\mu\nu}^0 - \begin{matrix} (2) \\ C_{\alpha 3\mu\nu} \end{matrix} \right) + \begin{matrix} (2) \\ A_{\gamma} \end{matrix}^{\mu\nu} \quad (14)$$

$$\begin{matrix} (1) \\ C_{\alpha 3\gamma 3} \end{matrix}^{-1} \left(C_{\alpha 3\mu\nu}^0 - \begin{matrix} (1) \\ C_{\alpha 3\mu\nu} \end{matrix} \right) + \begin{matrix} (1) \\ A_{\gamma} \end{matrix}^{\mu\nu} = \begin{matrix} (2) \\ C_{\alpha 3\gamma 3} \end{matrix}^{-1} \left(C_{\alpha 3\mu\nu}^0 - \begin{matrix} (2) \\ C_{\alpha 3\mu\nu} \end{matrix} \right) \xi + \begin{matrix} (2) \\ A_{\gamma} \end{matrix}^{\mu\nu} \quad (15)$$

Restando miembro a miembro (14) y (15) se obtiene:

$$C_{\alpha 3\mu\nu}^0 = B_{\alpha\gamma}^{-1} \begin{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ \xi \end{matrix}^{-1} & \begin{matrix} (1) \\ C_{\alpha 3\gamma 3} \end{matrix} & \begin{matrix} (2) \\ C_{\alpha 3\gamma 3} \end{matrix}^{-1} & \begin{matrix} (2) \\ C_{\alpha 3\gamma 3} \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (16)$$

donde

$$B_{\alpha\gamma} = \xi C_{\alpha 3\gamma 3}^{(1)-1} + (1-\xi) C_{\alpha 3\gamma 3}^{(2)-1}$$

Sustituyendo (16) en (7), resulta

$$\left(\begin{matrix} (1) \\ \mu\nu \chi_\gamma \end{matrix} \right)' = (1-\xi) \tilde{B}_{\alpha\gamma}^{-1} [[C_{\alpha 3\mu\nu}]] \quad (17)$$

$$\left(\begin{matrix} (2) \\ \mu\nu \chi_\gamma \end{matrix} \right)' = -\xi \tilde{B}_{\alpha\gamma}^{-1} [[C_{\alpha 3\mu\nu}]] \quad (18)$$

donde $\tilde{B}_{\alpha\gamma} = \xi C_{\alpha\gamma}^{(2)} + (1-\xi) C_{\alpha\gamma}^{(1)}$ y $[[C_{\alpha 3\mu\nu}]] = C_{\alpha 3\mu\nu}^{(2)} - C_{\alpha 3\mu\nu}^{(1)}$

Para obtener los coeficientes efectivos asociados al problema local ${}_{\mu\nu}L$ basta sustituir (17) y (18) en (1), de donde se tiene que:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}^h = \xi C_{\alpha\beta\mu\nu}^{(1)} + (1-\xi) C_{\alpha\beta\mu\nu}^{(2)} - \xi(1-\xi) [[C_{\alpha\beta\gamma 3}]] = \tilde{B}_{j\gamma}^{-1} [[C_{j3\mu\nu}]] \quad (19)$$

La fórmula (19) fue reportada en [4] salvo un pequeño detalle de impresión en el orden de los factores del segundo sumando, el cual no tendría sentido desde el punto de vista algebraico. Esta fórmula general puede ser aplicada a tensores cartesianos de segundo rango, como es el caso del tensor de conductividad térmica, de donde resulta que:

$$k_{mn}^h = \langle k_{mn} \rangle - \xi(1-\xi) [[k_{m3}]] = \tilde{K}^{-1} [[k_{3n}]] \quad (20)$$

siendo $\tilde{K} = \xi k_{33}^{(2)} + \xi k_{33}^{(1)}$.

4. RELACIÓN ENTRE LAS FÓRMULAS (12) Y (13) CON (19) Y (20), RESPECTIVAMENTE

Las fórmulas (19) y (20) pueden ser obtenidas a partir de (12) y (13). Para probar que de (12) resulta (19) como caso particular, re-escribamos primero la ecuación (12) de la forma siguiente:

$$\bar{C}_{\alpha\beta\mu\nu} = \langle C_{\alpha\beta\mu\nu} \rangle + A_{\alpha\beta\mu\nu} - B_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (21)$$

donde

$$A_{\alpha\beta\mu\nu} = \langle C_{\alpha\beta\gamma 3} C_{\gamma 3\delta 3}^{-1} \rangle \langle C_{\delta 3\rho 3}^{-1} \rangle^{-1} \langle C_{\rho 3\theta 3}^{-1} C_{\theta 3\mu\nu} \rangle \quad (22)$$

$$B_{\alpha\beta\mu\nu} = \langle C_{\alpha\beta\gamma 3} C_{\gamma 3\delta 3}^{-1} C_{\delta 3\mu\nu} \rangle \quad (23)$$

para el caso $n = 2$, (23) se puede escribir como:

$$A_{\alpha\beta\mu\nu} = \left[\xi C_{\alpha\beta\gamma 3}^{(1)} (C_{\gamma 3\delta 3}^{(1)})^{-1} + (1-\xi) C_{\alpha\beta\gamma 3}^{(2)} (C_{\gamma 3\delta 3}^{(2)})^{-1} \right] C_{\delta 3\lambda 3}^{(1)} \tilde{B}_{\lambda\tau}^{-1} C_{\tau 3\rho 3}^{(2)} \times \\ \times \left[\xi (C_{\rho 3\theta 3}^{(1)})^{-1} C_{\theta 3\mu\nu}^{(1)} + (1-\xi) C_{\rho 3\theta 3}^{(2)} (C_{\theta 3\mu\nu}^{(2)})^{-1} \right] \quad (24)$$

donde

$$B_{\delta\rho} = \left\langle C_{\delta 3\rho 3}^{-1} \right\rangle = \xi(C_{\delta 3\rho 3}^{-1})^{-1} + (1-\xi)(C_{\delta 3\rho 3}^{(2)})^{-1},$$

$$\tilde{B}_{\delta\rho} = \xi C_{\delta 3\rho 3}^{(2)} + (1-\xi)C_{\delta 3\rho 3}^{(1)}, \quad (25)$$

$$B_{\delta\rho}^{-1} = \left\langle C_{\delta 3\rho 3}^{-1} \right\rangle^{-1} = C_{\delta 3\lambda 3}^{(2)} \tilde{B}_{\lambda\beta}^{-1} C_{\beta 3\rho 3}^{(1)} = C_{\delta 3\lambda 3}^{(1)} \tilde{B}_{\lambda\beta}^{-1} C_{\beta 3\rho 3}^{(2)},$$

$$\tilde{B}_{\delta\rho} = C_{\delta 3\alpha 3}^{(1)} B_{\alpha\beta} C_{\beta 3\rho 3}^{(2)} = C_{\delta 3\alpha 3}^{(2)} B_{\alpha\beta} C_{\beta 3\rho 3}^{(1)}. \quad (26)$$

Efectuando los productos indicados en (22) resulta:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\mu\nu} = & \xi^2 C_{\alpha\beta\lambda 3}^{(1)} \tilde{B}_{\lambda\tau}^{-1} C_{\tau 3\rho 3}^{(2)} (C_{\rho 3\theta 3}^{(1)})^{-1} C_{\theta 3\mu\nu}^{(1)} + \xi(1-\xi) C_{\alpha\beta\lambda 3}^{(1)} \tilde{B}_{\lambda\tau}^{-1} C_{\tau 3\mu\nu}^{(2)} + \\ & + \xi(1-\xi) C_{\alpha\beta\gamma 3}^{(2)} (C_{\gamma 3\delta 3}^{(2)})^{-1} (C_{\delta 3\lambda 3}^{(1)} \tilde{B}_{\lambda\tau}^{-1} C_{\tau 3\rho 3}^{(2)} (C_{\rho 3\theta 3}^{(1)})^{-1} C_{\theta 3\mu\nu}^{(1)} + \\ & + (1-\xi)^2 C_{\alpha\beta\gamma 3}^{(2)} (C_{\gamma 3\delta 3}^{(2)})^{-1} C_{\delta 3\lambda 3}^{(1)} \tilde{B}_{\lambda\tau}^{-1} C_{\tau 3\mu\nu}^{(2)} \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\mu\nu} = & \xi C_{\alpha\beta\lambda 3}^{(1)} \tilde{B}_{\lambda\delta}^{-1} \left[\xi C_{\delta 3\rho 3}^{(2)} (C_{\rho 3\theta 3}^{(1)})^{-1} C_{\theta 3\mu\nu}^{(1)} + (1-\xi) C_{\delta 3\mu\nu}^{(2)} \right] + \\ & + (1-\xi) C_{\alpha\beta\lambda 3}^{(2)} \left[\xi (C_{\lambda 3\delta 3}^{(2)})^{-1} C_{\delta 3\gamma 3}^{(1)} \tilde{B}_{\gamma\tau}^{-1} C_{\tau 3\rho 3}^{(2)} (C_{\rho 3\theta 3}^{(1)})^{-1} C_{\theta 3\mu\nu}^{(1)} + \right. \\ & \left. + (1-\xi) (C_{\lambda 3\delta 3}^{(2)})^{-1} C_{\delta 3\gamma 3}^{(1)} \tilde{B}_{\gamma\tau}^{-1} C_{\tau 3\mu\nu}^{(2)} \right] \quad (27) \end{aligned}$$

Por otra parte, para (23) se tiene que

$$B_{\alpha\beta\mu\nu} = \xi C_{\alpha\beta\gamma 3}^{(1)} (C_{\gamma 3\delta 3}^{(1)})^{-1} C_{\delta 3\mu\nu}^{(1)} + (1-\xi) C_{\alpha\beta\gamma 3}^{(2)} (C_{\gamma 3\delta 3}^{(2)})^{-1} C_{\delta 3\mu\nu}^{(2)}$$

es decir

$$B_{\alpha\beta\mu\nu} = \xi C_{\alpha\beta\lambda 3}^{(1)} \tilde{B}_{\lambda\delta}^{-1} \tilde{B}_{\delta\gamma} (C_{\gamma 3\delta 3}^{(1)})^{-1} C_{\delta 3\mu\nu}^{(1)} + (1-\xi) C_{\alpha\beta\gamma 3}^{(2)} (C_{\gamma 3\delta 3}^{(2)})^{-1} C_{\delta 3\mu\nu}^{(2)} \quad (28)$$

Completando la diferencia $A_{\alpha\beta\mu\nu} - B_{\alpha\beta\mu\nu}$, agrupando el primer término de (27) y el primer término de (28); y el segundo sumando de (27) con el segundo sumando de (28) respectivamente resulta:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\mu\nu} - B_{\alpha\beta\mu\nu} = & \xi C_{\alpha\beta\lambda 3}^{(1)} \tilde{B}_{\lambda\delta}^{-1} \left[\xi C_{\delta 3\rho 3}^{(2)} (C_{\rho 3\theta 3}^{(1)})^{-1} C_{\theta 3\mu\nu}^{(1)} + \right. \\ & \left. + (1-\xi) (C_{\delta 3\mu\nu}^{(2)} - \tilde{B}_{\delta\gamma} (C_{\gamma 3\delta 3}^{(1)})^{-1} C_{\delta 3\mu\nu}^{(1)}) \right] \\ & + (1-\xi) C_{\alpha\beta\lambda 3}^{(2)} \left[\xi (C_{\lambda 3\delta 3}^{(2)})^{-1} C_{\delta 3\gamma 3}^{(1)} \tilde{B}_{\gamma\tau}^{-1} C_{\tau 3\rho 3}^{(2)} (C_{\rho 3\theta 3}^{(1)})^{-1} C_{\theta 3\mu\nu}^{(1)} + \right. \\ & \left. + (1-\xi) (C_{\lambda 3\delta 3}^{(2)})^{-1} C_{\delta 3\gamma 3}^{(1)} \tilde{B}_{\gamma\tau}^{-1} C_{\tau 3\mu\nu}^{(2)} - (C_{\lambda 3\delta 3}^{(2)})^{-1} + C_{\delta 3\mu\nu}^{(2)} \right] \quad (29) \end{aligned}$$

Usando la fórmula (25), el primer sumando de (29) toma la forma

$$A_{\alpha\beta\mu\nu}^* = \xi(1-\xi) C_{\alpha\beta\lambda 3}^{(1)} \tilde{B}_{\lambda\delta}^{-1} \left(C_{\delta 3\mu\nu}^{(2)} - C_{\delta 3\mu\nu}^{(1)} \right)$$

Análogamente, usando (25) y (26), el segundo sumando de (29) se transforma en

$$B_{\alpha\beta\mu\nu}^* = \xi(1-\xi)C_{\alpha\beta\lambda 3}^{(2)}\tilde{B}_{\lambda\delta}^{-1}(C_{\delta 3\mu\nu}^{(2)} - C_{\delta 3\mu\nu}^{(1)})$$

Finalmente

$$A_{\alpha\beta\mu\nu} - B_{\alpha\beta\mu\nu} = A_{\alpha\beta\mu\nu}^* - B_{\alpha\beta\mu\nu}^* = \\ -\xi(1-\xi)(C_{\alpha\beta\lambda 3}^{(2)} - C_{\alpha\beta\lambda 3}^{(1)})\tilde{B}_{\lambda\delta}^{-1}(C_{\delta 3\mu\nu}^{(2)} - C_{\delta 3\mu\nu}^{(1)})$$

es decir,

$$A_{\alpha\beta\mu\nu} - B_{\alpha\beta\mu\nu} = \xi(1-\xi)[[C_{\alpha\beta\lambda 3}]]\tilde{B}_{\lambda\delta}^{-1}[[C_{\delta 3\mu\nu}]] \quad (30)$$

donde $[[C_{\alpha\beta\gamma\rho}]] = C_{\alpha\beta\gamma\rho}^{(2)} - C_{\alpha\beta\gamma\rho}^{(1)}$.

Ahora sustituyendo (30) en (21) llegamos finalmente a:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}^h = \langle C_{\alpha\beta\mu\nu} \rangle - \xi(1-\xi)[[C_{\alpha\beta\gamma 3}]]\tilde{B}_{\gamma\delta}^{-1}[[C_{\delta 3\mu\nu}]]$$

la cual coincide con (19).

Utilizando el mismo procedimiento de arriba puede obtenerse (20) a partir de (13).

CONCLUSIONES

Combinando las notaciones compactas reportadas en [1] con el procedimiento de homogeneización desarrollado en [3], para el caso puramente elástico, se han obtenido expresiones analíticas para todos los coeficientes efectivos de compuestos termo-piezoelectricos laminados con cualquier número finito “n” de láminas. A modo de control, se demuestra que para “n = 2” se obtienen, como caso particular, las fórmulas reportadas en [1].

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido apoyado por los proyectos CONACYT 47218-F, y CITMA PNCIT IBMFQC 09-2004.

REFERENCIAS

- [1] GALKA, A.; J.J. TELEGA and R. WOJNAR (1996): Some Computational aspects of Homogenization of Termopiezoelectric Composites, **Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences**, 3:133-154.
- [2] CASTILLERO, J.B.; J.A. OTERO; R.R. RAMOS and A. BOURGEAT (1998): “Asymptotic Homogenization of Laminated Piezocomposite Materials”, **Int. J. Solids Structures** 35(5-6), 527-541.
- [3] POBEDRYA, B.E. (1984): **Mecánica de Materiales Compuestos**, Universidad Estatal de Moscú, (en ruso).
- [4] GALKA, A.; J.J. TELEGA and R. WOJNAR (1997): “Thermodiffusion in Heterogeneous Elastic Solids and Homogenization”, **Reports on Mathematical Physics**, 40 585-598.
- [5] GOLBACHEV, V.I. and B.E. POBEDRYA (1997): “The effective characteristics of inhomogeneous media”, **J. Appl. Maths. Mechs.**, 61 145-151.
- [6] BAKHALOV, N.S. and G.P. PANASENKO (1989): **Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media**, Kluwer, Dordrecht.