

Teorema de Bayes

Disciplina: Probabilidade e Estatística
Curso: Ciência da Computação
Professor: Leandro Bordin

✓ Teorema de Bayes

✓ Conceituação

Na Teoria da Probabilidade vimos que a informação muitas vezes é apresentada em forma de probabilidade condicional

A Probabilidade Condicional nos fornece a probabilidade de um evento dada uma condição

✓ Teorema de Bayes

✓ Conceituação

Pode ser que estejamos interessados em investigar, depois que o evento resultou num resultado, qual a probabilidade de uma certa condição estar presente

Esse tipo de problema é tratado usando o importante resultado conhecido como Teorema de Bayes

✓ Teorema de Bayes

✓ Conceituação

O Teorema de Bayes mostra a relação entre uma probabilidade condicional e a sua inversa; por exemplo, a probabilidade de uma hipótese dada a observação de uma evidência e a probabilidade da evidência dada pela hipótese

✓ Teorema de Bayes

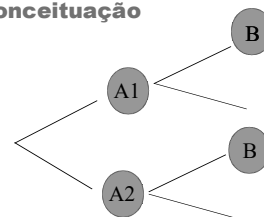
✓ Conceituação

Esse teorema representa uma das primeiras tentativas de modelar de forma matemática a inferência estatística, feita por Thomas Bayes

Isso porque o Teorema de Bayes é uma técnica utilizada para revisar estimativas probabilísticas iniciais com base em dados amostrais

✓ Teorema de Bayes

✓ Conceituação

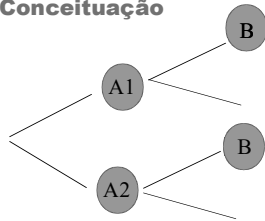


$$\rightarrow P(A1|B) = \frac{P(A1) \cdot P(B|A1)}{P(A1) \cdot P(B|A1) + P(A2) \cdot P(B|A2)}$$

$$\rightarrow P(A2|B) = \frac{P(A2) \cdot P(B|A2)}{P(A1) \cdot P(B|A1) + P(A2) \cdot P(B|A2)}$$

✓ Teorema de Bayes

✓ Conceituação



Generalizando:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

Teorema da Probabilidade Total

✓ Teorema de Bayes

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

O teorema apresentado permite determinar as probabilidades dos vários eventos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ que podem ser a causa da ocorrência do evento B

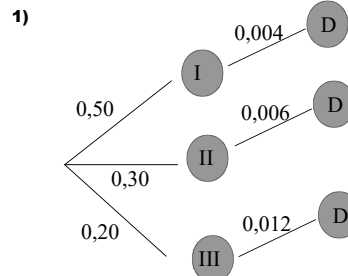
Devido a isto, o teorema de Bayes é também conhecido como Teorema da probabilidade das causas

✓ Exemplos

1) Em uma fábrica de monitores para computador, as linhas de montagem I, II e III respondem respectivamente por 50, 30 e 20 por cento da produção. Alguns monitores saem destas linhas com defeitos. A porcentagem de monitores defeituosos é de 0,4%, 0,6% e 1,2% respectivamente para as linhas I, II e III. Para evitar que os monitores defeituosos saiam da empresa e cheguem ao mercado, o controle de qualidade realiza inspeções individuais em todos os monitores fabricados e os que apresentam algum defeito são enviados para uma linha especial de recuperação. Neste contexto, determinar a probabilidade:

- de um monitor defeituoso encontrado na inspeção final ter sido produzido na linha de produção I;
- de um monitor não defeituoso encontrado na inspeção final ter sido produzido na linha de produção I.

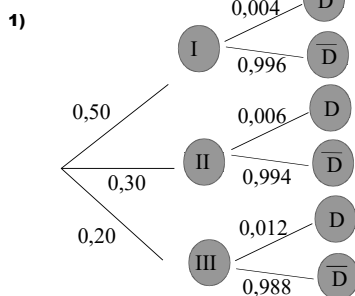
✓ Exemplos



a) de um monitor defeituoso encontrado na inspeção final ter sido produzido na linha de produção I;

$$P(I|D) = \frac{0,50 \cdot 0,004}{0,50 \cdot 0,004 + 0,30 \cdot 0,006 + 0,20 \cdot 0,012} = 32,26\%$$

✓ Exemplos



a) de um monitor não defeituoso encontrado na inspeção final ter sido produzido na linha de produção I;

$$P(I|\bar{D}) = \frac{0,50 \cdot 0,996}{0,50 \cdot 0,996 + 0,30 \cdot 0,994 + 0,20 \cdot 0,988} = 50,11\%$$

✓ Exemplos

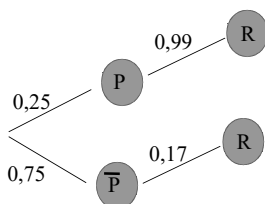
2) Em uma cidade onde carros têm que ser avaliados para controle de emissão de poluentes, 25% de todos os carros testados emitem quantidades excessivas de poluentes. No entanto, o teste não é perfeito e pode indicar resultados errados. Desta forma, carros que emitem excesso de poluentes podem não ser detectados pelo teste e carros que não emitem excesso de poluentes podem ser considerados erroneamente fora do padrão de emissão. Quando efetivamente testados, 99% dos carros fora do padrão são detectados e 17% dos carros em bom estado são considerados fora do padrão por erro do teste. Neste contexto pergunta-se:

a) Qual é a probabilidade de que um carro reprovado pelo teste emita realmente excesso de poluentes?

b) Qual é a probabilidade de que um carro reprovado pelo teste esteja dentro das normas?

✓ Exercícios

2)

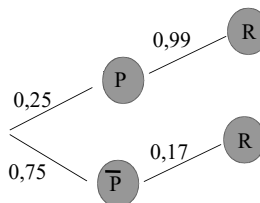


a) Qual é a probabilidade de que um carro reprovado pelo teste emita realmente excesso de poluentes

$$P(P|R) = \frac{0,25 \cdot 0,99}{0,25 \cdot 0,99 + 0,75 \cdot 0,17} = 66\%$$

✓ Exercícios

2)



b) Qual é a probabilidade de que um carro reprovado pelo teste esteja dentro das normas?

$$P(\bar{P}|R) = \frac{0,75 \cdot 0,17}{0,25 \cdot 0,99 + 0,75 \cdot 0,17} = 34\%$$

✓ Exercícios

3) As máquinas A e B são responsáveis por 60% e 40%, respectivamente, da produção de uma empresa. Os índices de peças defeituosas na produção destas máquinas valem 3% e 7%, respectivamente

a) Se uma peça defeituosa foi selecionada da produção desta empresa, qual é a probabilidade de que tenha sido produzida pela máquina B? (R.: 60,87%)

b) Se uma peça não defeituosa foi selecionada da produção desta empresa, qual a probabilidade de que tenha sido produzida pela máquina A? (R.: 61,01%)

✓ Exercícios

4) Um técnico em aparelhos elétricos faz consertos em domicílio e deve consertar um ferro elétrico na casa de um cliente. Ele avalia que o defeito deve estar na tomada do força da área de serviço, no cabo de força de alimentação ou na resistência do ferro. Por experiência, ele sabe que as probabilidades do defeito estar na tomada, no cabo ou na resistência são de 20%, 50% e 30%, respectivamente. Pensando em termos de ferramentas e peças de reposição do estoque que ele carrega, ele imagina que se o defeito for na tomada a probabilidade de conserto é de 95%. Se for no cabo de força é de 70% e se for na resistência é de 20%.

a) Qual a probabilidade de o técnico consertar o ferro no local com os seus recursos? (R.: 60%)

b) Qual a probabilidade do defeito ter sido no cabo de força, se o técnico conseguiu realizar o conserto? (R.: 58,33%)

c) O técnico chama o cliente e apresenta o ferro consertado. Perguntado do defeito, ele diz que teve que trocar a resistência (conserto mais caro). Qual a probabilidade de ele estar sendo sincero? (R.: 10%)

✓ Exercícios

5) Ambientalistas de uma ONG, após um levantamento de dados, constataram, em uma cidade, a existência de três indústrias: I, II, III. Cada indústria participa com 40%, 35%, 25%, respectivamente, da produção industrial da cidade. A proporção de gases poluentes lançados na atmosfera é de 2% pela indústria I, 1% pela indústria II e 3% pela indústria III. Uma análise da emissão de gases poluentes ou de partículas sólidas na atmosfera é realizada ao acaso nesta cidade, o que permitiu aos ambientalistas verificar a existência de poluição atmosférica

a) Qual a probabilidade dos gases considerados poluentes terem sido lançados pela indústria II? (R.: 18,42%)

b) Qual a probabilidade dos gases considerados poluentes terem sido lançados pela indústria I ou III? (R.: 81,58%)

✓ Exercícios

6) Os arquivos da polícia revelam, que, das vítimas de acidente automobilístico que utilizam cinto de segurança, apenas 10% sofrem ferimentos graves, enquanto que essa incidência é de 50% entre as vítimas que não utilizam cinto de segurança. Estima-se em 60% a porcentagem dos motoristas que usam o cinto. A polícia acaba de ser chamada para investigar um acidente em que houve um indivíduo gravemente ferido. a) Calcular a probabilidade dele estar usando o cinto de segurança no momento do acidente (r.: 23,08%). b) A pessoa que dirigia o outro carro não sofreu ferimentos graves. Calcular a probabilidade desta estar usando o cinto no momento do acidente (R.: 72,97%).