MATERIAL DE APOIO

CÁLCULO I

DERIVADAS

1 DERIVADAS

A derivada pode ser interpretada geometricamente como a inclinação de uma curva e fisicamente como taxa de variação. Derivadas podem ser usadas para representar tudo, de flutuações em taxas de juros, á taxa segundo a qual peixes estão morrendo, á taxa de crescimento de um tumor.

O cálculo é a matemática das variações e o instrumento principal para estudar as taxas de variação é um método conhecido como derivação. Algumas de suas aplicações estão especialmente no cálculo de taxas de variação como velocidade, aceleração, produtividade da não de obra e do capital, taxa de crescimento de uma população, taxa de infecção de uma população suscetível durante uma epidemia e muitas outras.

O conhecimento do processo de derivação é importante em virtude das inúmeras áreas de aplicações em diferentes ramos da ciência. Para tanto seu estudo foi desenvolvido ao longo de 2500 anos, com o auxílio de diversos matemáticos. As ideias foram se aperfeiçoando e o que era apenas o estudo da reta tangente, se transformou em uma magnífica e poderosa ferramenta para resolução de problemas. A definição de derivada como é conhecida hoje, deve-se a Cauchy que a apresentou por volta de 1823, como razão de variação infinitesimal, embora Newton e Leibniz, já no século XVII tenham utilizado os fundamentos desse conceito como método para relacionar problemas de quadraturas e tangentes.

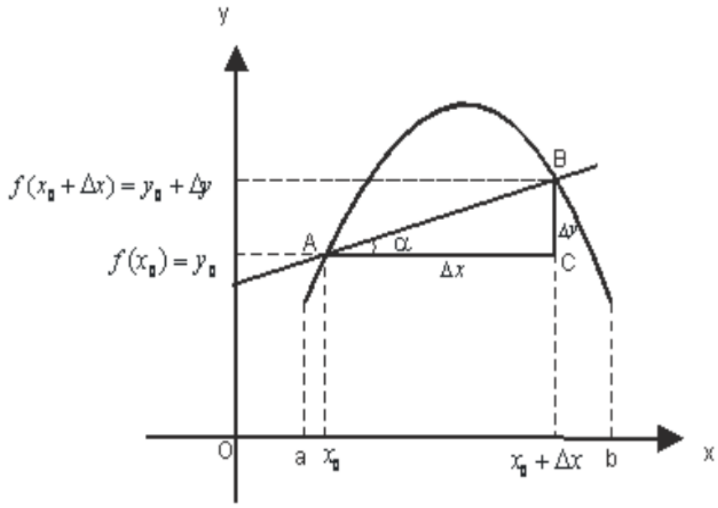
Seja f uma função definida em um intervalo I e x_0 um elemento de I. Chama-se de derivada de f no pontox_0 limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, se existir e for finito. (IEZZI, MURAKAMI, & MACHADO, 1993).

A diferença $\Delta x = x - x_0$ é chamada de acréscimo ou incremento da x relativamente ao ponto x_0. A diferença $\Delta_y = f(x) - f(x_0)$ é o acréscimo ou incremento da função f relativamente ao ponto x_0. O quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ recebe o nome de razão incremental de f relativamente ao ponto x_0.

Para se chegar a uma boa definição de reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto do mesmo, deve-se pensar que essa reta tangente é a reta que melhor aproxima o gráfico a vizinhança desse ponto. Assim, a reta tangente pode ser determinada por seu coeficiente angular e pelo ponto de tangência.

Considere a curva de uma função f contínua onde x_0 e $f(x_0)$ são as coordenadas do ponto A onde se deseja traçar uma reta tangente. Seja agora outro ponto B do gráfico de f, descrito por $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, onde Δx é o deslocamento no eixo das abscissas, ocorrido do ponto A ao ponto B. A reta que passa por A e B é secante à curva $y = f(x)$.

Seja f uma função $y = f(x)$, definida no intervalo (a, b), sendo x_0 e $x_0 + \Delta x$ dois pontos de (a, b), onde Δx nota a variação dos valores de x. O valor da função passa de $f(x_0)$ para $f(x_0 + \Delta x)$ ocorrendo uma variação $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Conforme figura abaixo:



Denomina-se taxa média de variação da função o quociente entre Δy e Δx:

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

onde, f é uma função definida no intervalo (a, b) e $\boldsymbol{x_0}$ um ponto desse intervalo, a função é denominada de derivada da função f no ponto $\boldsymbol{x_0}$, se existir o limite da mesma.

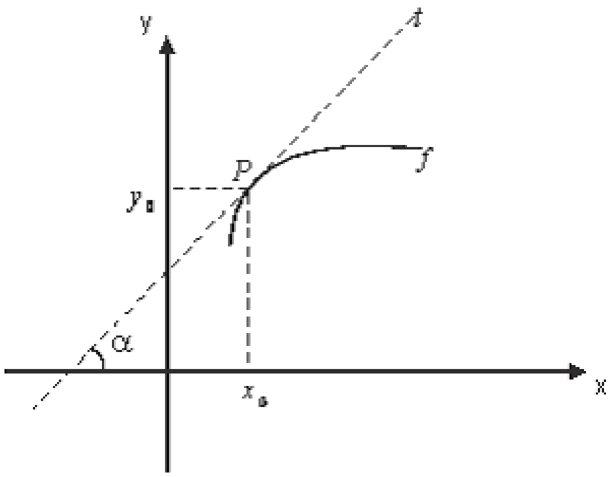
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Este limite é chamado também de taxa de variação instantânea (ou simplesmente, taxa de variação) de y com relação à x no ponto x = x_0.

Interpretação Geométrica da Derivada

Conforme Leithold (1994), importantes problemas de cálculo envolvem a determinação da reta tangente a uma curva sobre um determinado ponto. Em Geometria Plana a reta tangente a um ponto é a reta que tem um único ponto em comum com a circunferência. Sendo a tangente determinada por sua inclinação ao ponto de tangência.

Para Marques (2006) a derivada pode ser compreendida geometricamente como sendo um método para calcular o coeficiente angular da reta tangente. Considerando y = f (x) uma curva e $P(x_0\ , y_0)$ um ponto sobre o gráfico. Se a função for derivável, a mesma é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto P, através do limite $= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\boldsymbol{f(x)- f(x_0)}}{\boldsymbol{x - x_0}}$, quando este existir.



m = tg(α) $e\ y_0 = f(x_0)$

Esboço do limite da reta tangente

Segundo Iezzi (2004), a derivada de uma função f no ponto x_0 é igual ao coeficiente da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0.

Equação da Reta Tangente

Se a função f(x) é continua em x_1, então a reta tangente à curva y = f(x) em P(x_1, y_1) é:

a) A reta que passa por P tendo inclinação:

$$\mathbf{m}(\boldsymbol{x_1}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{f(x_1 + \Delta x) - f(x)}}{\boldsymbol{\Delta x}}$$

ii) Se este limite existir. Neste caso a equação da reta tangente é:

$$\mathbf{y - f(}\boldsymbol{x_1}\mathbf{) = m(x -} \boldsymbol{x_1}\mathbf{)}$$

Exemplos

1. Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1), onde $x_1 = 3$.

2. Encontre a inclinação da reta tangente à curva $f(x) = x^2 - 2x + 1$ no ponto (x_1, y_1). Esboce o gráfico de $y = f(x)$ e da reta tangente em onde $x_1 = 3$.

3. Encontre a equação da reta tangente à curva $f(x) = 2x^2 + 3$ no ponto cuja abscissa é 2. Esboce o gráfico.

4. Encontre a equação da reta tangente à curva $y = x^2 + 4x$ no ponto $x_1 = 1$. Represente graficamente.

Derivada de Uma Função

A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função denotada por $f'(x)$, tal que seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por:

$$\mathbf{f'(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Quando a função é derivável em todos os pontos do domínio de f(x), então ela é dita derivável.

Teorema

Toda função derivável em um ponto é continua neste ponto.

Notações para a derivada

a) f'(x) ou y'

b) dx(f), derivada de f(x) em relação a x.

c) dx(y), derivada de y em relação x.

d) $\frac{dy}{dx}$, derivada de y em relação x.

e) $\frac{dx}{dy}$, derivada de x em relação a y.

Regras de Derivação

O processo de cálculo da derivada é denominado derivação. Assim, a derivação é o processo de derivar uma função f' de uma função f. Se uma função possui uma derivada em x_1, ela será derivável em x_1. Isto é, a função f será derivável em $x_1$se f(x_1) existir.

Uma função será derivável em um intervalo aberto se ela for derivável em todo número no intervalo aberto.

Serão derivadas sem o uso da definição.

A derivada da função Constante

f(x) = c, então f'(x) =o

f(x) =5 f''(x) =0

f(x) = -2 f''(x) =0

Derivada da Potência

$$\boxed{f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad f'(x) = n.x^{n-1}}$$

Exemplo

a) $f(x) = x^5$

b) $y = x$

c) $y = x^1$

Derivada da soma

$$\boxed{\text{Se } f(x) = u + v \text{ ou } y = u + v, \text{ então } y' = u' + v'}$$

Exemplo

a) $f(x) = 3x^4 + 8x + 5$

b) $y = 5x + 3$

c) $y = 6x^2 + 2x - 1$

Derivada do Produto

$$\boxed{\text{Se } y = u.\,v \text{ , então } y' = u'\,.\,v + u\,.\,v'}$$

Exemplo

a) $y = 3x^2(8x^3 + 3)$

b) $(4x^2 + 3)\,.\,(x^2 - 2)$

Derivada do Quociente

Se $y = \frac{u}{v}$, então $y' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Exemplo

a) $y = \frac{2x+2}{2x-3}$

b) $y = \frac{sen\ x}{cos\ x}$

Regra da Cadeia

$f(x) = [g(x)]^n$, então $f'(x) = n[g(x)]^{n-1}.\ g'(x)$

Exemplo

a) $y = (5x^3 + 4x)^3$

b) $y = \sqrt{x^2 + 4}$

Derivadas de Funções Elementares

Derivada da exponencial com base a

Se $y = a^u$ $(a > 0, a \neq 1)$, então $y' = a^u . \ln a . u'$

Exemplo

a) $y = 5^x$

b) $y = 3^{2x^3 + x}$

Derivada da exponencial com base e

Se $y = e^u$, então $y' = e^u . u'$

Exemplo

a) $y = 3e^{-2x + 5}$

b) $y = e^x$

c) $y = 5e^{x^3 + 2x^2}$

Derivada do logaritmo

Se $y = \log_a u$, então $y' = \frac{u'}{u} . \log_a u$

Exemplo

a) $y = \log_2 (x^2 + 3x)$

b) $y = \log_5 (x + 1)^3$

Derivada do ln

Se y = ln u, então $y' = \frac{u'}{u}$

Exemplo

a) y = ln(3 – 2x³)

b) y = ln $\frac{x+2}{3x-1}$

Derivadas das funções trigonométricas

- y = sen u , então y' =cós u . u'
- y = cos u , então y' = - sen u . u'
- y= tg u , então y'= sec² u . u'
- y = cotg u , então y' = - cossec² u . u'
- y = sec u , então y' = sec u . tg u .u'
- y = cossec u , então y' = - cossec u . cotgu . u'

Exemplo

a) y = sem (x²)

b) y = cos$\left(\frac{1}{x}\right)$

c) y = 3tg$\sqrt{x}$ + cotg 3x

d) y = $\frac{\cos x}{1+cotx}$

e) $y = \sec(x^2 + 3x + 7)$

f) $y = \text{cossec}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

LISTA DE EXERCÍCIOS_01

1) Qual a equação da reta tangente à seguinte curva, no ponto indicado.

a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + x + 5$, no ponto x = 0 $R: x + 5$

2) Use a definição de derivada para calcular as derivadas $f'(x)$,

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}$ R: 1/2

b) $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$ R = 10x - 3

c) $f(x) = 4 - \sqrt{x + 3}$ $R = \frac{-1}{2\sqrt{x+3}}$

d) $f(x) = \frac{x + 1}{2 - x}$ $R = \frac{3}{4-4x+x^2}$

3) Calcule as seguintes derivadas

a) $y = x^5$ R: $5x^4$

b) y = x + senx R: 1 + cosx

c) $y = x^3 + x^2$ R: $3x^2 + 2x$

d) y = sen(x) + cos(x) R: cos(x) - sen(x)

e) y = 1 / x R: $- 1 / x^2$

f) y = x.sen(x) R: sen(x) + x.cos(x)

g) y = x + tg(x) R: $1 + \sec^2(x)$

h) $y = 3x^7$ R: $21x^6$

$i)$ y $=\ x^{\pi}$ R: $\pi x^{\pi-1}$

$j)$ y $=\ \dfrac{9x^4}{4}$ R: $9x^3$

$k)$ y $=\ \frac{3}{5}x^{5/3}$ R: $x^{2/3}$

$l)$ y $=\ 2x^2\sqrt{x}$ R: $5x\sqrt{x}$

m) y $=\ 2x^{1/2}$ R: $\frac{1}{\sqrt{x}}$

n) y = $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ R: $\frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$

o) y = $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ R: $\frac{4x}{(x^2-1)^2}$

p) y = $\sqrt{x}\ \ (x-1)$ R: $\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$

q) y $=\ (2x-3)^3$ R:$6(2x-3)^2$

r) y = $(x^2-\ 2)(x^2\ -3x+5)$ R: $4x^3-\ 9x^2\ +6x+6$

s) y = sec 5x

t) y = cos 2x

u) y = cos $\sqrt{1-\ x^2}$

v) y = $3x^2$senx

x) y = ln (6x)

w) y = x^{-5}

y) y = $\frac{tgx}{e^x}$

z) y = $\frac{\ln(2x)}{\cos(5x)}$

4) Dada a função f(x) = 5 – 2x e g(x) $3x^2$ - 1 . Calcule:

a) f \`(1) + g\` (1) R: 6

b) f (2) – f \`(2) R : 1

5) Dada a função f(x) = $\frac{1}{2x-6}$, verificar se existe f \`(3).

LISTA DE EXERCÍCIOS_02

Nos exercícios de 1 a 22 encontrar a derivada das funções dadas.

1. f(r) = πr^2
2. f(x) = $3x^2 + 6x - 10$
3. f(w) = $aw^2 + b$
4. f(x) = $14 - \frac{1}{2}x^{-3}$
5. f(x) = $(2x + 1)(3x^2 + 6)$
6. f(x) = $(7x - 1)(x + 4)$
7. f(x) = $(3x^5 - 1)(2 - x^4)$
8. f(x) = $\frac{2}{3}(5x-3)^{-1}(5x+3)$
9. f(x) = $(x - 1)(x + 1)$
10. f(s) = $(s^2 - 1)(3s - 1)(5s^3 + 2s)$
11. f(x) = $7(ax^2 + bx + c)$
12. f(u) = $(4u^2 - a)(a - 2u)$
13. f(x) = $\frac{2x+4}{3x-1}$
14. f(t) = $\frac{t-1}{t+1}$
15. f(t) = $\frac{3t^2+5t-1}{t-1}$
16. f(t) = $\frac{2-t^2}{t-2}$
17. f(x) = $\frac{4-x}{5-x^2}$
18. f(x) = $\frac{5x+7}{2x-2}$
19. f(x) = $\frac{x+1}{x+2}(3x^2 + 6x)$
20. f(x) = $\frac{(t-a)^2}{t-b}$
21. f(x) = $\frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^5}$
22. f(x) = $\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{x^6}$
23. Dada função f(t) $3t^2 - 4t + 1$, encontrar f(0) – f'(0).
24. Encontrar a equação da reta tangente à curva y = $\frac{2x+1}{3x-4}$ no ponto de abscissa x = -1.
25. Encontrar a equação da reta tangente à curva y = $(3x^2 - 4x)^2$ no ponto de abscissa x = 2.

Respostas

1) $2\pi r$ 2) $6x + 6$ 3) $2aw$ 4) $\frac{3}{2x^4}$

5) $18x^2 + 6x + 12$ 6) $14x + 27$ 7) $-27x^8 + 30x^4 + 4x^3$

8) $\frac{-20}{(5x-3)^2}$ 9) $2x$ 11) $7(2ax + b)$ 12) $-24u^2 + 8au + 2a$

13) $\frac{-14}{(3x-1)^2}$ 14) $\frac{2}{(t+1)^2}$ 15) $\frac{3t^2-6t-4}{(t-1)^2}$ 16) $\frac{-t^2+4t-2}{-t^2-4t+4}$ 17) $\frac{-x^2+8x-5}{(5-x^2)^2}$

18) $\frac{-24}{(2x-2)^2}$ 19) $\frac{6x^3+27x^2+36x+12}{(x+2)^2}$ 20) $\frac{t^2-2bt-a^2+2ab}{(t-b)^2}$ 21) $\frac{-12}{x^5} - \frac{25}{x^6}$

22) $2x^3 - \frac{12}{x^7}$ 23) $4t + 1$ 24) $11x + 49y + 40$ 25) $x + 64y - 10260$

Regra de L'Hospital

Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo I, exceto possivelmente em um ponto a $\in I$. Suponhamos que g'(x) $\neq 0$ para todo $x \neq a$ em I.

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \;\; e \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \qquad então \;\; \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty \;\; e \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, \qquad então \;\; \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Exemplo

1. Calcular os limites

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{e^x - 1}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+6x}{x^3+7x^2+5x}$

Derivadas de Ordem Superior

Definição:

Seja f uma função derivável.

1. Se a derivada f' é uma função derivável, então sua derivada é chamada derivada segunda de f e é denotada por:

$$(f')' = f''.$$

2. Se f'' é uma função derivável, então sua derivada é chamada derivada terceira de f e é denotada por:

$$(f'')' = f'''.$$

3. Em geral, se a derivada de ordem (n − 1) de f é uma função derivável, sua derivada é chamada derivada n-ésima de f e é denotada por:

$$(f^{(n-1)})' = f^n.$$

Notações: $(f)^0 = f, \quad (f)' = f^1, \quad (f)'' = f^2, \quad (f)''' = f^3$ etc.

Exemplo

1. Encontre as derivadas indicadas

a) $y = 3x^2 + 8x + 1$ para n =3

b) $y = 4x^3 + 5x^2 + x$ para n =3

c) $y = x\,.e^{2x}$ para n = 2

d) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ para n = 2

e) $y = \cos x$ para n = 4

Derivação Implícita

Sempre que temos uma função escrita na forma $y = f(x)$, dizemos que y é uma função explicita de x, pois podemos isolar a variável dependente de um lado e a expressão da função do outro. Porém nem sempre isso é possível ou conveniente e, caso isso ocorra, dizemos que y é uma função implícita de x. Vejamos, por exemplo, a equação $y = 2x^2 - 3$. Observamos que y é uma função explicita de x, pois podemos escrever $y = f(x)$, onde $f(x) = 2x^2 - 3$. Entretanto, a equação $4x^2 - 2y = 6$ define a mesma função, porém de forma implícita.

Método do Cálculo da Função Implícita

Dada uma equação que define y implicitamente como uma função derivável de x, calcula-se y′

Do seguinte modo:

1. Deriva-se ambos os lados da equação em relação a x, termo a termo. Ao fazê-lo, tenha em mente que y é uma função de x e use a regra da cadeia, quando necessário, para derivar as expressões nas quais figure y.

1. O resultado será uma equação onde figura não somente x e y, mas também y′. Expresse y′ em função de x e y.
2. Tal processo é chamado explicitar y′

Exemplo

1) Sabendo que y = f(x) é uma função derivável definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 4$, determinar y ‘ = $\frac{dy}{dx}$.

2) Sabendo que y = f(x) é uma função derivável definida implicitamente pela equação $xy^2 + 2y^3 = x - 2y$, determinar y’.

3) Se f(x) é definida por $x^2y^2 + x \text{ sen } y = o$, determinar y'.

4) Calcular y' das seguintes funções

a) $x^3 + y^3 = a^3$

b) $x^3 + x^2y + y^2 = 0$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

d) $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$

e) $e^y = x + y$

f) $x^2 + \frac{y}{2} - 1$

LISTA DE EXERCÍCIOS_03

Nos exercícios de 1 a 9 calcular as derivadas sucessivas até a ordem n indicada.

1. $y = 3x^4 - 2x;\ \ n = 5$ — $R.\ y^v = 0$
2. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ \ n = 3$ — $R.\ y''' = 6a$
3. $y = 3 - 2x^2 + 4x^5;\quad n = 10$ — $R.\ y^{(10)} = 0$
4. $y = \sqrt{3 - x^2},;\quad n = 2$ — $R.\ y'' = \frac{-3}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}$
5. $y = \frac{1}{x-1};\ \ n = 4$ — $R.\ y^{iv} = \frac{24}{(x-1)^5}$
6. $y = e^{2x+1};\quad n = 3$ — $R.\ y''' = 8e^{2x+1}$
7. $y = \frac{1}{e^x};\quad n = 4$ — $R.\ y^{iv} = \frac{1}{e^x}$
8. $y = \ln 2x;\quad n = 2$ — $R.\ y" = \frac{-1}{x^2}$
9. $y = -2\cos\frac{x}{2};\ \ n = 5$ — $R.\ y^v = \frac{1}{16} sen\frac{x}{2}$

10. calcular $y' = \frac{dy}{dx}$ das seguintes funções definidas implicitamente.

a) $x^2 + y^2 = a^2$ — $R.\ \frac{-x}{y}$

b) $x^3 + x^2y + y^2 = 0$ — $R.\ \frac{-3x^2-2xy}{x^2+2y}$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ — $R. -\sqrt{\frac{y}{x}}$

d) $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$ — $R.\ \frac{1-y^3}{3xy^2 + 4y^3+1}$

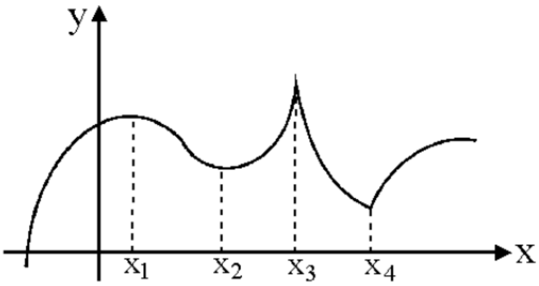
e) $tg\ y = xy$ — $R.\ \frac{y}{sec^2 y - x}$

f) $e^x = x + y$ — $R.\ \frac{1}{e^y - 1}$

MÁXIMOS E MÍNIMOS RELATIVOS

Fermat, em 1963, divulgou um novo método para determinação de tangentes, estudo que levaria aos máximos e mínimos. Em aplicações simples, raramente precisa-se provar que certo valor crítico é um máximo ou um mínimo, porém para ter um embasamento teórico observe as seguintes definições:

A figura abaixo mostra o gráfico de uma função $y = f(x)$, onde assinalamos os pontos de abscissas x_1, x_2, x_3 e x_4.



Esses pontos são chamados pontos extremos da função. Os pontos x_1e x_3 são pontos de máximo relativos (ou local), enquanto que $f(x_1)$ e $f(x_3)$ são valores máximos relativos. Os pontos x_2 e x_4 são chamados pontos de mínimo relativos (ou local), enquanto que $f(x_2)$ e $f(x_4)$ são os valores mínimos relativos. Além disso, observamos que f é crescente para $x < x_1, x \in (x_2, x_3)$ e $x > x_4$, e decrescente para $x \in (x_2, x_3)$ e $x \in (x_3, x_4)$.

Definição

Uma função f tem um máximo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que f(c) ≥ f(x), ∀ x ∈ I ∩ D(f). Analogamente, f tem um mínimo relativo em c, se existe um intervalo I contendo c tal que f(c) ≤ (x), ∀ x ∈ I ∩ D(f).

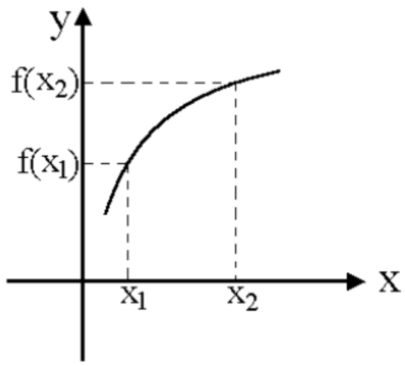
Seja f uma função definida em um intervalo I:

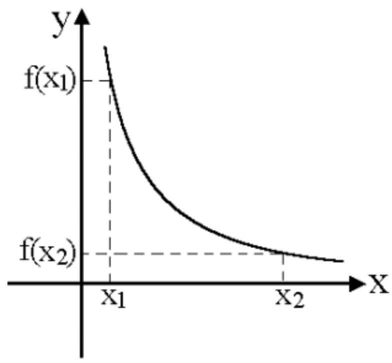
(i) f é **crescente** nesse intervalo se, para quaisquer

$x_1,\ x_2$∈ I tais que $x_1 < x_2 \rightarrow\ f(x_1) \leq f(x_2)$;

(ii) fé **decrescente** nesse intervalo se, para quaisquer

$x_1,\ x_2$ ∈ I tais que $x_1 < x_2 \rightarrow\ f(x_1) \geq f(x_2)$;





Pontos Críticos

Calcule-se a primeira derivada f'(x) = 0 e determina o valor de x

Exemplo

1. Determinar os pontos onde f(x) é crescente ou decrescente, máximos e mínimos, ponto de inflexão e ponto critico, representando graficamente.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

b) $f(x) = x^3 + 1$

c) $f(x) = 3x^4 - 12x$

d) $y = x^2 - 5x + 7$

2) Uma caixa sem tampa, de base quadrada , deve ser construída de forma que o seu volume seja 2500m³. O material da base vai custar R$ 1200,00 por m² e o material dos lados R$ 980,00 por m². Encontre as dimensões da caixa de modo que o custo do material seja mínimo.

LISTA DE EXERCÍCIOS_04

1. Determinar os pontos onde f(x) é crescente ou decrescente, máximos e mínimos, ponto de inflexão e ponto critico.

a) $f(x) = x^2 - x + 5$

b) $f(x) = x^2 - 4x - 1$

c) $f(x) = x^3 - x^2 - x$

d) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$

e) $f(x) = \frac{1}{2} x^3 - 3x^2 + 6x$

f) $f(x) = \frac{1}{4} x^4 - x^3 + x^2$

g) $f(x) = 1/5\ x^5 - 5/3\ x^3 + 4x + 1$

PROBLEMAS DE MAXIMIZAÇÃO E MINIMIZAÇÃO

1) Um galpão deve ser construído tendo uma área retangular de $12100m^2$. A prefeitura exige que exista um espaço livre de 25m na frente, 20m atrás e 12m em cada lado. Encontre as dimensões do lote que tenha a área mínima na qual possa ser construído esse galpão.

2) Um terreno retangular deve ser cercado de 2 formas. Dois lados opostos devem receber cercas reforçadas que custa R$ 3,00 o metro, enquanto os outros dois lados restantes recebem uma cerca padrão de R$ 2,00 o metro. Qual a maior área que pode ser cercada com R$ 6000,00?

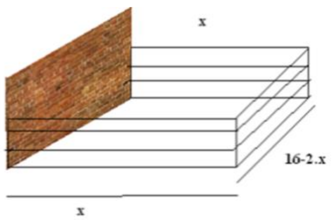
3) Um arame de 60 cm de comprimento deve ser utilizado para cercar duas áreas, uma retangular e outra quadrada, de forma que o retângulo tenha maior área possível. Sabendo que as duas figuras juntas formam um retângulo maior. Quais seriam as medidas do retângulo e do quadrado para que o retângulo tenha área máxima?

4) Uma lata cilíndrica sem tampa superior tem volume 5 cm^3. Determine as dimensões da lata, de modo que a quantidade de material para sua fabricação seja mínima.

5) Quadrados iguais são cortados de cada canto de um pedaço retangular de cartolina, medindo 8 cm de largura e 15 cm de comprimento. Uma caixa sem tampa é construída virando os lados para cima. Determine o comprimento dos lados dos quadrados que devem ser cortados para a produção de uma caixa de volume máximo.

6) Um tanque cônico de aço, sem tampa, tem capacidade de $1000m^3$. Determine as dimensões do tanque que minimiza a quantidade de aço usada na sua fabricação.

7) Um agricultor precisa construir um galinheiro de forma retangular utilizando-se de uma tela de 16m. Sabendo que ele vai usar um muro como fundo do galinheiro, determine as dimensões do mesmo para que sua dimensão seja máxima. Conforme figura.

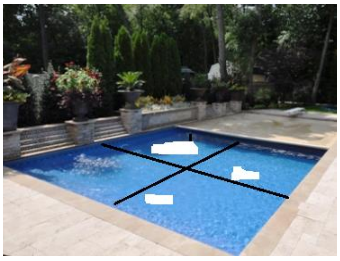


8) Um empresário deseja lançar um novo suco em lata no mercado. Para isso, foi feito um contrato com uma indústria de embalagens, que deve fabricar recipientes cilíndricos em alumínio com capacidade de 800 cm^3. Qual deve ser a medida R do raio da base e a medida H da altura de cada um desses recipientes cilíndricos de modo que a quantidade de alumínio utilizada para sua fabricação seja mínima?

9) Carlos precisa fazer um reservatório de água (espécie de tanque) feito com tijolo e cimento revestido de cerâmica, sem tampa, tendo na base um retângulo com comprimento igual ao triplo da largura. Calcule as dimensões que permitem a máxima economia de material para produzir o reservatório de volume de 36 m^3.

10) Uma dona de casa deseja construir, uma pequena horta de formato retangular em seu quintal. Porém, ela possui apenas 20m de tela para cercá-la. Quais deverão ser as medidas dos lados do retângulo, para que o máximo de espaço seja aproveitado?

11) Deseja-se construir uma piscina com formato quadrangular com capacidade de 32 m^3 de água. Determinar as dimensões da piscina para que seja mínimo o consumo de material utilizado no seu revestimento interno.



APLICAÇÃO DAS DERIVADAS

Pode parecer que alguns conteúdos matemáticos não têm aplicação clara e imediata nos problemas cotidianos, o que talvez crie certo desapontamento. Mas, na verdade, a aplicação ocorre como resultado da evolução e desenvolvimento desses conceitos.

O mesmo acontece com o cálculo de derivadas que tem importância especial em virtude das inúmeras aplicações em vários campos das ciências, tais como: problemas da física, biologia, química, modelagem matemática, arquitetura, geologia, engenharia e economia.

O estudo da derivada apresenta diversas aplicações práticas, ela é constantemente aplicada em muitos problemas que envolvem o dia-a-dia do ser humano,

Em diversas áreas encontramos problemas que serão resolvidos utilizando a derivada como uma taxa de variação. A análise do comportamento das funções será feita detalhadamente, usando definições e teoremas que envolvem derivadas.

Taxa de Variação

Toda derivada pode ser interpretada como uma taxa de variação. Dada uma função y =f(x), quando a variável independente varia de x a x + Δx, correspondente a variação y será

$\Delta y = f(c + \Delta x) - f(x)$. O quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, representa a taxa de variação de y em relação a x.

A derivada

f\` (x) = $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+ \Delta x)- f(x)}{\Delta x}$,

é a taxa instantânea ou simplesmente a taxa de variação de y em relação a x.

- quando se refere a taxa de variação média calcula-se pela seguinte fórmula

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- quando se refere a taxa de variação, razão, calcula-se pela derivada $\frac{dx}{\mathrm{dy}} = f(x)$

Exemplo

1. Sabendo que a área de um quadrado é função de seu lado. Determinar:

a) a taxa de variação média da área de um quadrado em relação ao lado quando este varia de 2,5 a 3m.

b) a taxa de variação da área em relação ao lado quando este mede 4m.

2. Uma cidade X é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia de epidemia) é, aproximadamente, dado por: $f(t) = 64t - \frac{t^3}{3}$.

a) Qual a razão da expansão da epidemia no tempo t = 5?

b) Qual a razão da expansão da epidemia no tempo t = 8?

c) Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no sétimo dia?

3. Analistas de produção verificam que uma montadora x, o número de peças produzidas nas primeiras t horas diárias de trabalho é dado por: $f(t) = \begin{cases} 50(t^2 + t), para\ 0 \leq t \leq 4 \\ 200(t+1), para\ 4 \leq t \leq 8 \end{cases}$

a) Qual a razão de produção (em unidades por hora) após 3 horas de trabalho? E após 7 horas?

b) Quantas peças são produzidas na 8° hora de trabalho?

4. Um reservatório de água está sendo esvaziado para limpeza. A quantidade de água no reservatório, em litros, t horas após o escoamento ter começado é dado por: $V = 50\,(80 - t)^2$. Determinar:

a) A taxa de variação média do volume de água no reservatório durante as 10 primeiras horas de escoamento.

b) A taxa de variação do volume de água no reservatório após 8 horas de escoamento.

c) A quantidade de água que sai do reservatório nas 5 primeiras horas de escoamento.

5. Um quadrado de lado l está se expandindo segundo a equação $l = 2 + t^2$, onde a variável t representa o tempo. Determinar a taxa de variação da área desse quadrado no tempo t = 2.

6. O raio de uma circunferência cresce à razão de 21 cm/s. Qual a taxa de crescimento do comprimento da circunferência em relação ao tempo?

7. No instante t =0 um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição no instante t é dada por $S(t) = 16t - t^2$. Determinar:

a) a velocidade média do corpo no intervalo de tempo [2,4]

b) a velocidade do corpo no instante t =2

c) a aceleração média no intervalo [0,4]

d) a aceleração no instante t = 4

LISTA DE EXERCÍCIOS_05

1. Suponha que um corpo em movimento retilíneo tenha função horária definida por $s(t) = 12t - 2t^2$ e no instante t= 0 ele inicia o movimento. Considere o espaço medido em metros eo tempo em segundos. Determine:

a) a velocidade média do corpo no intervalo [1,3] **R: 4m/s**

b) a velocidade do corpo no instante t =1 **R: 8m/s**

c) a aceleração média do corpo no intervalo [1,3] **R: - 4m/s**

d) a aceleração do corpo no instante t =1 **R: - 4 m/s**

2. Suponha que um óleo derramado através da ruptura do tanque de um navio se espalhe em forma circular cujo raio cresce a uma taxa de 2m/h. com que velocidade a área do derramamento está crescendo no instante em que o raio atingir 60m? **R: 240pi m²/h**

3. Sabemos que a área de um quadrado e função de seu lado. Determinar:

a) a taxa de variação media da área de um quadrado em relação ao lado quando este varia de 2,5 a 3m. **R: 5,5**

b) a taxa de variação da área em relação ao lado quando este mede 4m. R: 8m²

4. Numa granja experimentas, constatou-se que uma ave em desenvolvimento pesa em gramas

$$W(t) = \begin{cases} 20 + \frac{1}{2}(t + 4)^2, 0 \le t \le 60 \\ 24,4t + 604, 60 \le t \le 90 \end{cases}$$

Onde te é medido em dias.

a) Qual a razão de aumento do peso da ave quando t = 50? **R: 54 gramas/dia**

b) Quando a ave aumentará no 51 dias? **R: 54,5 grama/dia**

c) Qual a razão de aumento do peso quando t = 80? **R: 24,4**

5. Uma peça de carne foi colocada num freezer no instante t = 0. Após t horas, sua temperatura, em graus centígrados, é dada por:

$$T(t) = 30 - 5t + \frac{4}{t+1}, 0 \le t \le 5$$

Qual a velocidade de redução de sua temperatura após 2horas. **R: - 5,444**

6. O tronco de uma árvore tem *formato cilíndrico* cujo diâmetro cresce à razão de $\frac{1}{4}$ cm/ano e sua altura cresce à razão de 1 m/ano (metros). Determine a taxa de variação do volume do tronco quando o diâmetro é 3 cm e sua altura é 50 m. R: 2100pi cm^3/ano

7. Um empresário estima que quando x unidades de certo produto são vendidas, a receita bruta associada ao produto é dada por $C = 0{,}5x^2 + 3x - 2$ milhares de reais. Qual é a taxa de variação da receita quando 3 unidades estão sendo vendidas? Interprete o resultado obtido. **R: 6 mil reais / unidade**

8. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual à três vezes a altura. Quando a altura do monte é de 1,2m, a taxa de variação com que a areia despejada é de 0, 081m^3/min. Qual a taxa de variação da altura do monte neste instante?

R: 0,025 pi m/min

9. No decorrer de uma experiência, derrama-se um líquido sobre uma superfície plana de vidro. Se o líquido vertido recobre uma região circular e o raio desta região aumenta uniformemente, qual será a taxa de crescimento da área ocupada pelo líquido, em relação à variação do raio, quando o raio for igual a 5 *cm* ? **R: 10π *cm²/r*.**

10. Um tanque tem a forma de um cone invertido com 16 m de altura e uma base com 4 m de raio. A água "flui" no tanque a uma taxa de 2 m^3/min. Com que velocidade o nível da água estará se elevando quando sua profundidade for de 5 m? **R: 32/25pi m/min ou 1,28pi m/min**