Aluno : **Angemydelson SAINT-BERT**
Prof : **Antonio Marcos Correa Neri**

➢ Álgebra Booleana

Para descrever os circuitos que podem ser construídos pela combinação de portas lógicas, um novo tipo de álgebra é necessário, uma em que as variáveis e funções podem ter apenas valores 0 e 1. Tal álgebra é denominada álgebra booleana, devido ao seu descobridor, o matemático inglês George Boole (1815 - 1864).

Do mesmo modo que existem funções em álgebra "comum", também existem funções na álgebra booleana. Uma função booleana tem uma ou mais variáveis de entrada e fornece somente um resultado que depende apenas dos valores destas variáveis.

Não pare agora... Tem mais depois da publicidade ;)

Como uma função de n variáveis possui apenas 2n conjuntos possíveis de valores de entrada, a função pode ser descrita completamente através de uma tabela de 2n linhas, cada linha mostrando o valor da função para uma combinação diferente dos valores de entrada. Tal tabela é denominada tabela verdade.

A B C 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1

Acima temos a tabela verdade de uma função básica a função AND , ela e um conjunto de funções da álgebra booleana têm implementação eletrônica através de transistores e são conhecidas como portas lógicas.

Um circuito digital é regido pela álgebra de Boole, e com as portas lógicas existentes é possível implementar qualquer função da álgebra booleana. A seguir veremos as principais portas lógica, simbologia e tabela verdade.

-NOT

A função NOT é implementada na conhecida porta inversora.

A B 0 1 1 0 (a)

(b)

(a) tabela verdade, (b) símbolo

-AND

A função AND pode ser definida em linguagem natural como 1 se todas as entradas forem 1 e 0 se apenas uma das entradas for 0.

A B S 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1

-OR

A função OR também pode ser definida em linguagem natural ela é 0 se todas as entradas forem 0 e 1 se existir uma entrada em 1.

A B C 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1

-XOR

A função XOR conhecida como exclusive OR é muito parecido com a OR.

A B C 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1

Temos acima algumas das principais portas lógicas existente, não são as únicas mas as outras portas existentes são combinações destas portas básicas, e todos os circuitos digitais podem ser montados somente com estas portas."

Veja mais em: https://brasilescola.uol.com.br/informatica/algebra-booleana.htm

➢ As regras de inferência

Regras de inferência são regras de transformação sintáticas que podem ser usadas para inferir uma conclusão a partir de uma premissa, para criar um argumento. Um conjunto de regras pode ser usada para inferir qualquer conclusão válida, se esta conclusão for completa. Entretanto nunca se pode inferir uma conclusão inválida, se isto for assegurado. Um completo e seguro conjunto de regras não precisa incluir cada regra da listagem à seguir, já que muitas delas são redundantes, e podem ser provadas com o uso de outras regras.

Regras de Inferência Para Cálculo Proposicional Clássico

Regras para negações

Redução ao absurdo (ou Introdução da Negação)

$$\frac{\varphi \vdash \psi \qquad \varphi \vdash \neg\psi}{\neg\varphi}$$

Redução ao absurdo (Relacionada à lei do terceiro excluído)

$$\frac{\neg\varphi \vdash \psi \qquad \neg\varphi \vdash \neg\psi}{\varphi}$$

Eliminação da negação

$$\frac{\varphi \qquad \neg\varphi}{\psi}$$

Eliminação da dupla negação

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$$

Introdução da dupla negação

$$\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}$$

Regras de inferência para condicionais

Introdução do condicional

$$\frac{\varphi \vdash \psi}{\varphi \rightarrow \psi}$$

Modus ponens (ou Eliminação do condicional)

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \qquad \varphi}{\psi}$$

Modus tollens

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \qquad \neg\psi}{\neg\varphi}$$

Regras para conjunções

Introdução da conjunção

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \psi\end{array}}{\varphi \wedge \psi}$$

Eliminação da conjunção

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

Regras para disjunções

Introdução da disjunção

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$$

$$\frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$$

Eliminação da disjunção

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \vee \psi \\ \varphi \rightarrow \chi \\ \psi \rightarrow \chi\end{array}}{\chi}$$

Silogismo disjuntivo

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \vee \psi \\ \neg\varphi\end{array}}{\psi}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \vee \psi \\ \neg\psi\end{array}}{\varphi}$$

Regras para bicondicionais

Introdução do bicondicional

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \to \psi \\ \psi \to \varphi\end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi}$$

Eliminação do bicondicional

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \leftrightarrow \psi \\ \varphi\end{array}}{\psi}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \leftrightarrow \psi \\ \psi\end{array}}{\varphi}$$

Regras de Inferência para Lógica Clássica de Primeira Ordem

Regras para universais

Introdução do universal

$$\frac{\varphi(\alpha := \beta)}{\forall\alpha\,\varphi}$$

Restrição: β não pode ocorrer livre em $\forall\alpha\,\varphi$ ou em qualquer hipótese vigente.

Eliminação do universal

$$\frac{\forall\alpha\,\varphi}{\varphi(\alpha := \beta)}$$

Regras para existenciais

Introdução do existencial

$$\frac{\varphi(\alpha := \beta)}{\exists\alpha\,\varphi}$$

A esta regra coloca-se a restrição de que β deve ser substituível por α, em φ.

Eliminação do existencial

$$\frac{\begin{array}{l}\exists\alpha\,\varphi \\ \varphi(\alpha := \beta) \vdash \psi\end{array}}{\psi}$$

Restrição: β não pode ocorrer livre em $\exists\alpha\varphi$, em ψ ou em qualquer hipótese vigente.

Regras de Inferência Derivadas

Por meio das regras de inferência diretas e hipotéticas podemos demonstrar vários raciocínios bastante recorrentes. Estes demonstrados, podem ser usados como regras de inferência diretas. Elas não são necessárias, mas são bastante úteis, to muito mais sucintas.

Agora ampliaremos nossa lista de regras de inferência, além de fazer suas respectivas demonstrações.

Repetição (R)

$\alpha \vdash \alpha$

1.	α	**Premissa**
2.	$\neg\neg\alpha$	**1 DN**
3.	α	**2 DN**

Modus Tollens (MT)

$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$

1.	$\alpha \to \beta$	**Premissa**
2.	$\neg\beta$	**Premissa**
3.	$\quad \alpha$	**Hipótese**
4.	$\quad \beta$	**1,3 MP**
5.	$\quad \beta \wedge \neg\beta$	**2,4 C**
6.	$\neg\alpha$	**3,5 RAA**

Prefixação (PRF)

$\alpha \vdash \beta \to \alpha$

1.	α	**Premissa**
2.	$\quad \beta$	**Hipótese**
3.	$\quad \alpha$	**1 R**
4.	$\beta \to \alpha$	**2,3 RPC**

Contraposição (CT)

Utilizaremos o *Modus Tollens* como regra de inferência.

$\alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$

1.	$\alpha \to \beta$	**Premissa**
2.	$\quad \neg\beta$	**Hipótese**
3.	$\quad \neg\alpha$	**1,2 MT**
4.	$\neg\beta \to \neg\alpha$	**2,3 RPC**

Contradição (CTR)

$\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \beta$

1.	α	**Premissa**
2.	$\neg\alpha$	**Premissa**
3.	$\alpha \vee \beta$	**1 E**
4.	β	**2,3 SD**

Lei de Duns Scotus (DS)

$\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$

1.	$\neg\alpha$	**Premissa**
2.	$\quad \alpha$	**Hipótese**
3.	$\quad \beta$	**1,2 CTR**
4.	$\alpha \to \beta$	**2,3 RPC**

Lei de De Morgan I (DM)

$\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$

01.	$\neg(\alpha \vee \beta)$	**Premissa**
02.	α	**Hipótese**
03.	$\alpha \vee \beta$	**2 E**
04.	$(\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \vee \beta)$	**1,3 C**
05.	$\neg\alpha$	**2,4 RAA**
06.	β	**Hipótese**
07.	$\alpha \vee \beta$	**6 E**
08.	$(\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \vee \beta)$	**1,7 C**
09.	$\neg\beta$	**6,8 RAA**
10.	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	**5,9 C**

Lei de De Morgan II (DM)

$\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$

01.	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	**Premissa**
02.	$\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$	**Hipótese**
03.	$\neg\alpha$	**Hipótese**
04.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	**3 E**
05.	$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$	**5,2 C**
06.	$\neg\neg\alpha$	**3,5 RAA**
07.	α	**6 DN**
08.	$\neg\beta$	**Hipótese**
09.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	**8 E**
10.	$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$	**9,2 C**
11.	$\neg\neg\beta$	**8,10 RAA**
12.	β	**11 DN**
13.	$\alpha \wedge \beta$	**7,12 C**
14.	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta)$	**13,1 C**
15.	$\neg\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$	**2,14 RAA**
16.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	**15 DN**

Legendas

- DN - Dupla Negação
- SD - Sislogismo Disjuntivo
- C - Conjunção
- S - Separação
- E - Expansão
- MP - Modus Ponens
- BC - Bicondicionais para bicondicionais
- RAA - Redução ao absurdo
- RPC - Regra de prova condicional

Tabela: Regras de Inferência

As regras acima podem ser colocadas na seguinte tabela. [1] A coluna de "Tautologias" mostra como interpreta

Regras de Inferência	Tautologias	Nomes
$\begin{array}{r} p \\ p \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$	$((p \land (p \to q)) \to q$	Modus ponens
$\begin{array}{r} \neg q \\ p \to q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$	$((\neg q \land (p \to q)) \to \neg p$	Modus tollens
$\begin{array}{r} (p \lor q) \lor r \\ \hline \therefore p \lor (q \lor r) \end{array}$	$((p \lor q) \lor r) \to (p \lor (q \lor r))$	Associativa
$\begin{array}{r} p \land q \\ \hline \therefore q \land p \end{array}$	$(p \land q) \to (q \land p)$	Comutativa
$\begin{array}{r} p \to q \\ q \to p \\ \hline \therefore p \leftrightarrow q \end{array}$	$((p \to q) \land (q \to p)) \to (p \leftrightarrow q)$	Introdução do bicondicional
$\begin{array}{r} (p \land q) \to r \\ \hline \therefore p \to (q \to r) \end{array}$	$((p \land q) \to r) \to (p \to (q \to r))$	Exportação
$\begin{array}{r} p \to q \\ \hline \therefore \neg q \to \neg p \end{array}$	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	Transposição da contrapositiva
$\begin{array}{r} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$	$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$	Silogismo hipotético
$\begin{array}{r} p \to q \\ \hline \therefore \neg p \lor q \end{array}$	$(p \to q) \to (\neg p \lor q)$	Implicação material
$\begin{array}{r} (p \lor q) \land r \\ \hline \therefore (p \land r) \lor (q \land r) \end{array}$	$((p \lor q) \land r) \to ((p \land r) \lor (q \land r))$	Distributiva
$\begin{array}{r} p \to q \\ \hline \therefore p \to (p \land q) \end{array}$	$p \to (p \land q)$	Absorção
$\begin{array}{r} p \lor q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$	$((p \lor q) \land \neg p) \to q$	Silogismo disjuntivo
$\begin{array}{r} p \\ \hline \therefore p \lor q \end{array}$	$p \to (p \lor q)$	Introdução da disjunção
$\begin{array}{r} p \land q \\ \hline \therefore p \end{array}$	$(p \land q) \to p$	Eliminação da conjunção

$\dfrac{p \wedge q}{\therefore p}$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	Eliminação da conjunção
$\dfrac{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}}{\therefore p \wedge q}$	$((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$	Introdução da conjunção
$\dfrac{p}{\therefore \neg\neg p}$	$p \rightarrow (\neg\neg p)$	Dupla negação
$\dfrac{p \vee p}{\therefore p}$	$(p \vee p) \rightarrow p$	Simplificação da disjunção
$\dfrac{\begin{matrix} p \vee q \\ \neg p \vee r \end{matrix}}{\therefore q \vee r}$	$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$	Resolução

Todas as regras usam operadores lógicos básicos. A tabela completa de "operadores lógicos" é mostrada por uma tabela verdade, dando valoração verdade a todas as possíveis (16) funções verdade para 2 variáveis booleanas (p,q):

p	*q*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T	**T**	F	F	F	F	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	**F**	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T
F	**T**	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	**F**	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T

➢ Levantar as nomenclaturas “Condiçaõ necessária para os condicionais.”

Por definição, uma condição suficiente é a antecedente de uma condicional, e uma condição necessária é a consequente de uma condicional. As definições são as seguintes:

Def. 1) P é a condição suficiente de Q se, e só se, a condicional indicativa “Se P, então Q” for verdadeira.

Def. 2) Q é a condição necessária de P se, e só se, a condicional indicativa “Se P, então Q” for verdadeira.

Exemplos

1) Se estiver Sol, vou à praia.

Exo - Se $A_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$, me convença que
$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{0\}$

Seja $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Então $x \in A_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Em particular, $x \in A_{i_0}$. Logo, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \subseteq A_{i_0}$

então

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{0\}$$