UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTERIA SUL – UFFS

CÁLCULO I

PROFª. Dra. ELISETE ADRIANA JOSÉ LUIZ

MATERIAL DE APOIO

CÁLCULO I

LIMITES

CHAPECÓ, SC

2022

1 LIMITES

A noção de limite admite várias acepções. Pode tratar-se de uma linha que separa dois territórios, de um extremo a que chega um determinado tempo ou de uma restrição ou limitação. Para a matemática, um limite é uma grandeza fixa à qual se aproximam cada vez mais os termos de uma sequência infinita de grandezas.

Em termos simples, calcular o limite é investigar de que forma uma função $f(x)$ se comporta quando a variável independente x se aproxima de certo número c (que não pertence necessariamente ao domínio de f). Os limites estão presentes em um grande número de situações da vida real. Assim, por exemplo, podemos nos aproximar do zero absoluto, a temperatura T_c na qual não existe nenhuma agitação molecular, mas jamais conseguimos atingi-lo. Os economistas que falam do lucro de um investimento em um mercado ideal e os engenheiros que calculam a eficiência de um motor em condições ideias também estão trabalhando com situações limite.

As duas operações matemáticas fundamentais em Cálculo são a *diferenciação* e a *integração* ou *antidiferenciação.* Essas operações envolvem o cálculo da *derivada* e da *integral definida.* Ambas as operações citadas são fundamentadas na noção de *limite*[1].

1.1 NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE

Exemplos de sucessões numéricas

a) $1, 2, \ 3, 4, 5, 6, \ldots$
b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$
c) $0, 1, -1, -2, -3, \ \ldots$
d) $1, \ \frac{3}{2}, \ 3, \ \frac{5}{4}, \ 5, \ \frac{7}{6}, \ 7, \ldots$

Análise

a) A sequência está indo para o infinito positivo, $+\infty$, o limite tende $+\infty$.
Portanto denota-se $x \to +\infty$

b) A sequência está se aproximando de 1, onde o limite tende a 1.
Portanto denota-se $x \to 1$

c) A sequência está indo para o infinito negativo, onde o limite tende $-\infty$ Portanto denota-se $x \to -\infty$
d) A sequência oscila sem tender para um limite.

ANALISANDO FUNÇÕES

Exemplos: Resolver no quadro junto com professor

1. Examinar os valores da função $y = \frac{x}{x+3}$ quando x se aproxima, do $x = 2$.

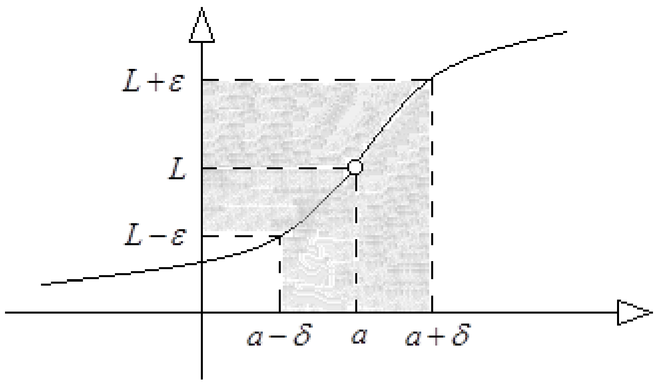
2. Examinar o comportamento da função $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, quando x se aproxima do ponto 3.

3. Avaliar o limite da função $f(x) = \sqrt{x}$ quando x se aproxima de 0.

Definição

Seja $f(x)$ uma função $f: R \to R$, e seja $a \in R$ de modo que exista uma *"vizinhança reduzida"* de a contida no domínio de $f(x)$. O limite dessa função para x tendendo à a é o número real L se, e somente se, para qualquer vizinhança completa de L, existir uma vizinhança reduzida de a. Esta definição é ilustrada esquematicamente pela Figura.

Gráfico da função $f(x)$



Dessa forma o limite de $f(x)$ será escrito como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Se a seguinte afirmativa for verdadeira:

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que, se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Isto significa que os valores da função $f(x)$ tendem a um limite L quando x tende a um número a, se o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e L puder se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de a, mas não igual a a.

Teorema da unicidade

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Assim, se a função f tiver um limite L no número real a, então L será o limite de f em a.

1.2 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DE LIMITE

Sejam $y = f(x)$ e $z = g(x)$ duas funções para as quais existem os limites:

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ e } \lim_{x \to a} g(x)$$

Neste caso existirão os limites relacionados em seguida, bem como são válidas as propriedades operatórias que envolvem esses limites e que se encontram relacionadas a seguir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

1. Sejam $a, m, n \in IR$ então:

$\lim_{x \to a}(xn + n) = am + n$

Exemplo: Resolver no quadro junto com professor

a) $\lim_{x \to -1} 3x + 4$

b) $\lim_{x \to 0} x^2 + 2x + 2$

2. Se $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existem, e c e um número real qualquer, então:

i) $\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

Exemplo: Resolver no quadro junto com professor

a) $\lim_{x \to 5}[(5x + 4) + (3x^2 - 1)]$

b) $\lim_{x \to 2}[(x^2 + 2) - (x + 1)]$

$\boldsymbol{ii})\ \lim_{x \to a} cf(x) = c\ , \lim_{x \to a} f(x)$

Exemplo: Resolver no quadro junto com professor

a) $\lim_{x \to 0} 7(\sqrt{x} - 2x)$

$\boldsymbol{iii})\ \lim_{x \to a} f(x).g(x) = \lim_{x \to a} f(x).\lim_{x \to a} g(x)$

Exemplo

a) $\lim_{x \to 2}(x+2).(2x-2)$

iv) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, desde que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Exemplo

a) $\lim_{x \to a} \frac{-3+x}{\sqrt{2x-1}}$

$\boldsymbol{v})\ \lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$, para qualquer inteiro positivo.

Exemplo

a) $\lim_{x \to a} (x^3 + 4x^2)^5$

$\boldsymbol{vi})\ \lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$, se $\lim_{x \to a} f(x) > 0$ e n inteiro ou se $\lim_{x \to a} f(x) \leq 0$ n é inteiro positivo impar

Exemplo

a) $\lim_{x \to 0} \sqrt[4]{2x^3 - x}$

$\boldsymbol{vii})\ \lim_{x \to a} ln[f(x)] = \ln[\lim_{x \to a} f(x)]$ se $\lim_{x \to a} f(x) > 0.$

Exemplo

a) $\lim_{x \to 6} \ln(x+4)$

viii) $\lim_{x \to a} cos[f(x)] = cos\left[\lim_{x \to a} f(x)\right]$

ix) $\lim_{x \to a} sen[f(x)] = sen\left[\lim_{x \to a} f(x)\right]$

x) $\lim_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \to a} f(x)}$

LISTA DE EXERCÍCIO_01

1. Avaliar o valor da função dada por y = $\frac{f(x) - f(2)}{x-2}$, quando se aproxima de 2, onde f(x) = $3x^2 + 4$.

2. Dada função y = $\frac{x^2-4}{x+2}$, podemos afirmar que $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-4}{x+2}$ = 1. Mostre graficamente.

3. Calcular os limites das seguintes funções:

a) $\lim_{x \to 4} \left(\frac{1}{2}x+3\right)$ **R: 5**

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ **R: 2**

c) $\lim_{x \to 0} (3-7x-5x^2)$ **R: 3**

d) $\lim_{x \to 3} (3x^2-7x+2)$ **R: 8**

e) $\lim_{x \to -1} (-5x^2+6x^4+2)$ **R: 9**

f) $\lim_{x \to 1/2} (2x+7)$ **R: 8**

g) $\lim_{x \to -1} \left[(x+4)^3 \cdot (x-2)^{-1}\right]$ **R: 27**

h) $\lim_{x \to 0} \left[(x-2)^{10} \cdot (x+4)\right]$ **R: 4096**

i) $\lim_{x \to 2} \frac{x+4}{3x-1}$ **R: 6/5**

j) $\lim_{t \to 2} \frac{t+3}{t+2}$ **R: 5/4**

k) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ **R: 2**

l) $\lim_{t \to 2} \frac{t^2+5t+6}{t+2}$ **R: 5**

m) $\lim_{t \to 2} \frac{t^2-5t+6}{t-2}$ **R: - 1**

n) $\lim_{ts \to 1/2} \frac{s+4}{2s}$ **R: 9/2**

o) $\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{2x+3}$ **R:** $\sqrt[3]{11}$

p) $\lim_{x \to 7} (3x+2)^{2/3}$ **R:** $\sqrt[3]{23^2}$

q) $\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{2x^2 - x}{3x}$ **R:** $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

r) $\lim_{x \to 2} \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{2}}{3x-4}$ **R:** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 LIMITES LATERAIS

Definição

Seja f uma função definida em um determinado intervalo aberto (a, c). Dizemos que um número L é o limite à direita da função f quando x tende para a e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se dado $\Sigma > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \Sigma$, se $0 < x < a + \Sigma$

Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto (d, a). Dizemos que um número L é o limite à esquerda da função f quando x tende para a e escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Se dado $\Sigma > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \Sigma$, se $a - \delta < x < o$.

Exemplo

1. Calcular os limites laterais se possível.

a) $\lim_{x \to 3} 1 + \sqrt{x - 3}$

b) $\lim_{x \to 0} \begin{cases} -\frac{|x|}{x}, se\ x \neq 0 \\ 1, se\ x = 0 \end{cases}$

c) Seja $f(x) = |x|$, quando x se aproxima de o.

Teorema

Se f é definida em um intervalo aberto a, exceto possivelmente no ponto a, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x \to a^+} f(x) = L\ e\ \lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Exemplo

1. Determinar $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim_{x \to 2^-} f(x)\ e\ \lim_{x \to 2} f(x)$ da função se existir.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, para\ x < 2 \\ 2, \quad paa\ x = 2 \\ 9 - x^2, para\ x > 2 \end{cases}$$

2.1 INDETERMINAÇÃO

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 + \infty, \quad 0^2, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

Observação: Neste caso faz-se necessário organizar o limite.

Exemplo

a) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3-3x+2}{x^2-4}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{X+2}-\sqrt{2}}{x}$

2.2 LIMITES NO INFINITO

Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(a, +\infty)$. Escrevemos,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

quando o número L satisfaz a seguinte condição:

Para qualquer $\Sigma > 0$, exite $A > 0 \; tal \; que \; |f(x) - L| < \Sigma$ sempre que $x > A$.

Definição

Seja f definido em $(-\infty, b)$. Escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Se L satisfaz a seguinte condição:

Para $\forall \; \Sigma > 0$, existe $B < 0$ tal que $|f(x) - L| < \Sigma$ sempre que $x < B$.

Teorema

Se n é um número inteiro positivo, então:

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Exemplo

1. Calcular os limites

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-5}{x+8}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3x+5}{4x^5-2}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2-5}}$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x+2}$

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5-x^3}{8x+2}$

f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4+3x^2+2x+1}{4-x^4}$

2.3 LIMITES INFINITOS

Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo um ponto a exceto possivelmente em $x = a$ dizemos que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \text{ ou analogamente } \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Teorema

Se n é um número inteiro positivo qualquer então:

i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

ii) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} \begin{cases} +\infty, se\ n\ é\ par \\ -\infty, se\ n\ é\ impar \end{cases}$

Exemplo

1. Calcular os limites

a) $\lim_{x\to 0} x^3 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^2}$

c) $\lim_{x\to -1} \frac{5x+2}{|x+1|}$

LISTA DE EXERCÍCIO_02

1. Calcule, caso existam, os limites abaixo

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{3x^2+3x-6}{x^2+2x-3}$

b) $\lim_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{3x^2+2x-1}{9x^2-1}$

c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-x}$

d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2-x^2}-1}{x-1}$

e) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{5x^3-2}}{7x}$

f) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3x^7-x^{10}}{5x^{15}-x^{10}}$

g) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{5x}{\sqrt[4]{5x^4+3}}$

h) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{6x^3+5x^2-7x+3}{4x^3-5x+1}$

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{|x|}$

j) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{2\sqrt{x}-2}{x^2-2x+1}$

k) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-8x+7}{1-x}$

l) $\lim_{x\to \frac{2}{3}^+} \dfrac{5}{3x-2}$

m) $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{|x^2-4|}$

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$

0) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-3x+1}{5x^2-3}$

p) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8x^2+12x}{x-2}$

q) $\lim\limits_{x\to 2}$ f(x) sendo f(x) = $\begin{cases} \dfrac{1}{2-5x}, se \;\; x>2 \\ \sqrt[3]{x-3}, se \;\; x\leq 2 \end{cases}$

r) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \;\; sendo \;\; f(x) = \begin{cases} 5x+1, se \;\; x<0 \\ 7 \;\;\; , se \;\; x=0 \\ 1-3x, se \;\; x>0 \end{cases}$

RESPOSTAS

1. a) 9/4 b) 2/3 c) 2 d) –1 e) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{7}$ **f) 0 g)** $-\dfrac{5}{\sqrt[4]{5}}$ **h) 3/2 i) 0 j) +** ∞ **k) 6 l)** $+\infty$ **m) –1 n) NE o) 1/5 p) – 8 q) NE r) 1**

2. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 6^+} \dfrac{4}{x-6} =$ b) $\lim\limits_{x\to 6^-} \dfrac{4}{x-6} =$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3}{1-x} =$ d) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3}{1-x} =$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+5}{x} =$ f) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x+5}{x} =$

g) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{x-1} =$ h) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{x-1} =$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-1}{x^2} =$ j) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{x^2} =$

RESPOSTAS

a. ∞ **b. -** ∞ **c. -** ∞ **d.** ∞ **e.** ∞ **f. -** ∞ **g.**∞ **h. -** ∞ **i. -** ∞ **j.-** ∞

3. Encontre o valor do limite:

a) $\lim_{x\to -2}(x^2+2x-1)=$

b) $\lim_{y\to -1}(y^3-2y^2+3y-4)=$

c) $\lim_{t\to 2}\dfrac{t^2-5}{2t^3+6}=$

d) $\lim_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{x^2-3x+4}=$

e) $\lim_{y\to -2}\dfrac{y^3+8}{y+2}=$

f) $\lim_{s\to 1}\dfrac{s^3-1}{s-1}=$

g) $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-x-12}=$

h) $\lim_{r\to 1}\sqrt{\dfrac{8r+1}{r+3}}=$

i) $\lim_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^2+3x+4}{x^3+1}}=$

j) $\lim_{y\to -3}\sqrt{\dfrac{y^2-9}{2y^2+7y+3}}=$

k) $\lim_{t\to \frac{3}{2}}\sqrt{\dfrac{8t^3-27}{4t^2-9}}=$

l) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=$

m) $\lim_{t\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-t}}{t}=$

n) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x+1}=$

o) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}=$

p) $\lim_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}=$

RESPOSTAS

a)7 **b) -10** **c)** $-\frac{1}{22}$ **d)** $-\frac{1}{8}$ **e) 12** **f) 3** **g)** $\frac{1}{7}$ **h)** $\frac{3}{2}$ **i)** $\frac{\sqrt{14}}{3}$ **j)** $\frac{1}{5}\sqrt{30}$

k) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **l)** $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ **m)** $\frac{1}{4}$ **n)- 4** **o) -15** **p)** $\frac{11}{17}$

4. Calcule os seguintes limites indeterminados:

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} =$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{2x^2 - x} =$

i) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} =$

b) $\lim_{x \to -7} \frac{49 - x^2}{7 + x} =$

f) $\lim_{x \to -7} \frac{49 + 14x + x^2}{7 + x} =$

j) $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 2} =$

c) $\lim_{x \to 5} \frac{5 - x}{25 - x^2} =$

g) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} =$

l) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} =$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - 3x} =$

h) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} =$

m) $\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} =$

5. Se $f(x) = x^2 + 5x - 3$ mostre que $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

6. Se $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ mostre que $\lim_{x \to 2} g(x) = 4$, mas que g(2) não está definida.

RESPOSTAS

a) 6 b) 14 c) 1/10 d) -1/3 e) 0 f) 0 g) 0 h) -2 i) 1 j) -1 l) 0 m) ¼

LISTA DE EXERCÍCIO_03

1. Mostre que $\lim_{x\to 1} \frac{x - x^2}{1 - x^2} = 1$

2. Mostre que $\lim_{x\to 0^-} \left(x + \frac{x}{|x|}\right) = -1$ e $\lim_{x\to 0^+} \left(x + \frac{x}{|x|}\right) = 1$.

3. Calcule, caso existam, os limites abaixo

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}$ Resp: - 3/4

b) $\lim_{x\to 3} \frac{5x^2 - 8x - 13}{x^2 - 5}$. Resp: 2

c) $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$. Resp: 11/4

d) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3 + 1}{x^3 - 2x^2}$ Resp: 2

e) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - 2}{2x^3}$ Resp: 3/2

f) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ Resp: 2

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$ Resp: $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

h) $\lim_{x\to 3} f(x)$ sendo $f(x) = \begin{cases} x - 1, se\ x \leq 3 \\ 3x - 7, se\ x > 3 \end{cases}$ Resp: 2

i) $\lim_{t \to 2} \frac{t^2 - 5t + 6}{t - 2}$ **R: - 1**

j) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ **R: 2**

k) $\lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1}}$

l) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 25} - 5}{x}$

4. Avaliar o valor da função dada por y = $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$, quando se aproxima de 2, onde f(x) = 3x² + 5x -1 . Resp: 17

5. Calcule os limites laterais:

a) $\lim_{x \to 6^+} \frac{4}{x - 6} =$ Resp: ∞

b) $\lim_{x \to 6^-} \frac{4}{x - 6} =$ Resp: - ∞

6. Mostre que $\lim_{x \to 0} \left(x + \frac{x}{|x|} \right)$ não existe.

7. Seja $f(x) = \frac{1}{x + 1}, x \neq -1$. Determine $\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.