Nome **: Angemydelson Saint Bert**
Matrícula **: 2121101002**
Prof **: Antonio Neri**
Disciplina **: Matemática Discreta**

1) Enunciar e encontrar um exercício sobre o teorema de fermat.

O Pequeno Teorema de Fermat foi formulado pelo advogado francês Pierre de **Fermat** e consiste no seguinte: Se a, p ∈ Z, com p primo e MDC(a, p) = 1, então ap−1 ≡ 1 (mod p). Tal enunciado, atualizando a linguagem, foi declarado em uma carta a Frenicle de Bessy em 18 de outubro de 1640.

Exercício: Prove que se n é ímpar, então n 5 ≡ n (mod 240).

1. Seja p primo maior que 2, provaremos que

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1} = \\ = -1\ (mod\ p)$$

Prova:

Vamos analisar a congruência de cada uma das parcelas do primeiro membro.

$p \nmid 1 \implies p|1^{p-1} - 1$, assim temos que $1 \equiv 1\ (mod\ p)$.

$p \nmid 2 \implies p|2^{p-1} - 1$, assim temos que $2^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$.

$p \nmid 3 \implies p|3^{p-1} - 1$, assim temos que $3^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$.

Assim prosseguindo obtemos similarmente que

$p \nmid (p-1) \implies p|(p-1)^{p-1} - 1$, ou seja $(p-1)^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$.

Portanto, somando congruências, obtemos que

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1} \equiv \\ \equiv (p-1)$$

Dado que, $(p-1) \equiv -1\ (mod\ p)$, segue por transitividade que

$$1^{p-1} + 2^{p-1} + 3^{p-1} + \cdots + (p-1)^{p-1} = \\ = -1\ (mod\ p)$$

■

O pequeno teorema dos restos quadráticos

Teorema dos restos. Se b1 e b2 deixam **restos** r1 e r2 na divisão por a, respectivamente, então: b1 + b2 deixa o mesmo **resto** que r1 + r2 na divisão por a b1b2 deixa o mesmo **resto** que r1r2 na divisão por a.

exercicio

Calcular o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 – x^2 – 3x + 2$ pelo binômio x+1

resolução

Calculando a raiz da equação em que igualamos o binômio a zero:

$x + 1 = 0$

$x = -1$

Calculando o valor de P(-1):

$P(x) = x^3 – x^2 – 3x + 2$

$P(-1) = (-1)^3 – (-1)^2 – 3(-1) + 2$

$P(-1) = -1 – 1 + 3 + 2$

$P(-1) = 3$
Pelo nosso teorema, o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2$ pelo binômio $x + 1$ é exatamente 3.

Teorema de Wilson

Em matemática, o **teorema de Wilson** diz que p é um número primo se e somente se: . P divide $[(P-1)! + 1]$.

Como que O teorema de Wilson afirma que um número natural $p > 1$ é um número primo se e somente se

$$(p - 1)! \equiv -1 \mod p$$

OR $(p - 1)! \equiv (p-1) \mod p$

Exercício e <u>Resolução</u>

$P = 5$
$(p-1)! = 24$
$24 \% 5 = 4$

Se $P = 7$
$(P-1)! = 6! = 720$
$720 \% 7 = 6$

2-

4 -

Mostre que $f = f^{-1}$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

f $\mathbb{R} - 1$ e bijeção, logo,

seja $y = f(x)$

$y = \frac{x+1}{x-1}$, substituindo x por y

$$x = \frac{y+1}{y-1}$$

$x(y-1) = y+1$

$xy - x = y+1$

$xy - y = x+1$

$y(x-1) = x+1$

$y = \frac{x+1}{x-1}$ então $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1} = f(x)$ e

Logo $f = f^{-1}$

__/__/__

a) Mostre que $2^{67} + 3^{34}$ é múltiplo de 17

A gente sabe que $2^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ e $3^{17} \equiv 3 \pmod{17}$

$2^{67} = 2^{64+3} = (2^{16})^4 \cdot 2^3 \equiv 8 \pmod{17}$ e

$3^{34} = (3^{17})^2 \equiv 9 \pmod{17}$.

E $2^{67} + 3^{34} \equiv 8 + 9 \equiv 0 \pmod{17}$

Isso quer dizer que $2^{67} + 3^{34}$ é múltiplo de 17

b) Encontre k, onde k é o resto da divisão de $P(x) = 5N^2 - 4kN + 2$ por $2N - 6$

$2N - 6 \Rightarrow N = 3$

$P(3) = 5N^2 - 4kN + 2$

$5 \cdot 3^2 - 4k \cdot 3 + 2 - 5 = 0$

$45 - 3 - 4k3 = 0$

$-4k3 = -42$

$12k = 42 \Rightarrow k = 7/2$

Sendo A e B conjuntos elementos de $P(\ )$
e a relação de equipotência sendo simétrica é
uma relação de equivalência
R é relação de equipotencia então
$A R A$ onde $A \in P(\mathcal{U})$;
A é equipotente a A, se isso é verdade então
$A R B \equiv B R A$ onde $A, B \in P(\mathcal{U})$
Como que A é equipotente a B, podemos dizer que B
é equipotente a B.

Quando temos injeção

$\varphi(N_1) = \varphi(N_2)$

como φ é bijeção $N_1 = N_2$

para se sobrejeção

$y = (\varphi(x))$

φ é bijeção logo $x = y$ e é sobrejetora

6).?

a) A relação $\approx$ é de equivalência pois $\forall a, b, c, d, e, f \in A$, $A = \mathbb{Z}$

$(a, a) \sim (a, a) \Leftrightarrow aa = a.a$ Logo a relação reflexiva.

$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow cb = da$

$\Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$. Logo essa relação é simétrica.

$(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$ assim $ad = bc$ e

$ad = bc \Rightarrow adf = bcf \Rightarrow (af)d = b(cf) \Rightarrow$

$(af)d = b(de) \Rightarrow (af)d = (be)d$.

Como que $d \neq 0$ então: $af = be$, ou seja

$(a, b) \sim (e, f)$ logo $\approx$ é relação de equivalência.

A gente pode dizer então que

Para cada elemento (m, n) pertencente a $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^*)$

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow mb = na \Leftrightarrow (m, n) = (a, b)$$

Assim:

a) $(0, 2) \rightarrow \frac{0}{2} = 0$

b) $(2, 2) \rightarrow \frac{2}{2} = 1$

c) $(2, 1) \Rightarrow \frac{2}{1} = 2$

d) $(1, 2) \Rightarrow \frac{1}{2}$

7.

3

a) Para que temos relação de equivalência, a relação passo ser reflexiva, simetria e transitiva

1- $\forall a \in A$, $(a,a) \sim (a,a)$ e $a+a = a+a$

2. $\forall a, b, c, d \in A$ $(a,b) \sim (c,d)$ a final $a+d = c+b$

e é equivalente a $c+b = a+d$, logo temos $(c,d) \sim (a,b)$

3- Se $(a,b) \sim (c,d)$ então $a+d = c+b$ e $(c,d) \sim (e,f)$ então $c+f = e+d$. Assim $(a+d)+c+f = (c+b)+(e+d)$ e também tem $(a+f)+(c+d) = (e+b)+(c+d)$.

Logo a gente tem $(a+b) = (e+f)$, ou seja $(a+b) \sim (e+f)$.

Então essa relação é um relação de equivalência

b $(2,2) \Rightarrow 2-2 \to 0$

c $(2,0) \Rightarrow 2-(0) \Rightarrow 2$

d) $(0,2) \Rightarrow 0-(2) = -2$

4 -

Mostre que $f = f^{-1}$

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

f $\mathbb{R} - 1$ é bijeção, logo,

seja $y = f(x)$

$y = \frac{x+1}{x-1}$, substituindo x por y

$x = \frac{y+1}{y-1}$

$x(y-1) = y+1$

$xy - x = y+1$

$xy - y = x+1$

$y(x-1) = x+1$

$y = \frac{x+1}{x-1}$ então $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1} = f(x)$ e

Logo $f = f^{-1}$