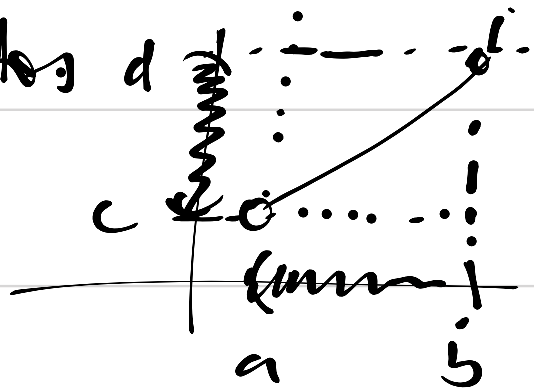
Para provar que o intervalo (a,b) é equipotente ao intervalo (c,d):

a) Procurar uma candidata a bijeção

b) provar que esta candidata é de fato bijeção.

PARTE a) Vamos usar a "reta" que passa por dois pontos



$$y = mx + n$$

$$m = \frac{d-c}{b-a} \cdot x + n$$

$$c = \left(\frac{d-c}{b-a}\right) \cdot a + n$$

$$n = c - \left(\frac{d-c}{b-a}\right) \cdot a$$

$$n = \frac{c(b-a) - (d-c)a}{b-a} = \frac{cb - \cancel{ca} - da + \cancel{ca}}{b-a}$$

$$n = \frac{cb - da}{b-a}.$$ Aí $y = mx + n$ se torna

$$y = \left(\frac{d-c}{b-a}\right)x + \frac{cb-da}{b-a} = \frac{(d-c)x + (cb-da)}{b-a}$$

Esta é a "regra" que deve servir.

$$f(x) = \frac{(d-c)\,x + (cb-da)}{b-a}$$

Mas é preciso verificar se esta função está bem definida.

$$\boxed{\begin{aligned} f : (a,b) &\longrightarrow (c,d) \\ x &\longmapsto \frac{d-c}{b-a}x + \frac{cb-da}{b-a} \end{aligned}}$$

Já que ainda não está claro que "se $a<x<b$ então $\left(\frac{d-c}{b-a}x + \frac{cb-da}{b-a}\right) \in (c,d)$" é frase verdadeira.

Vejamos: se $x \in (a,b)$ então precisamos testar se

① $\boxed{\frac{d-c}{b-a}x + \frac{cb-da}{b-a} < d}$ e ② $\boxed{c < \frac{d-c}{b-a}x + \frac{cb-da}{b-a}}$

Vejamos 1. Basta, na verdade, estudar o sinal de $\boxed{\frac{d-c}{b-a} \cdot x + \frac{cb-da}{b-a} - d}$ que deve ser negativo.

$$\frac{(d-c)x + cb - da - d(b-a)}{b-a} =$$

$$\frac{dx - cx + cb - \cancel{da} - db + \cancel{da}}{b-a} = \frac{(d-c)x - (d-c)b}{b-a} =$$

$$\frac{(d-c)(x-b)}{b-a}.$$ Lembre que $d-c>0$ e que $(b-a)>0$.

Como $x<b$ por hipótese, $x-b<0$.

Então $\frac{d-c}{b-a}(x-b) < 0$ como queríamos.

Agora, de maneira similar, você completa a parte 2 da página 3.

Agora que temos uma função candidata a bijeção, provemos de fato que

$$f : (a,b) \longrightarrow (c,d)$$

$$x \longmapsto \frac{d-c}{b-a}x + \frac{(cb-da)}{b-a} \quad \text{é bijeção.}$$

<u>f é injetora</u>: $f(k) = f(h) \Rightarrow$

$$\cancel{\frac{d-c}{b-a}} \cdot k + \cancel{\frac{cb-da}{b-a}} = \cancel{\frac{d-c}{b-a}} \cdot h + \cancel{\frac{cb-da}{b-a}} \Rightarrow k = h$$

<u>f é sobrejetora</u>: seja $y \in (c,d)$. Precisamos procurar $x \in (a,b)$ tal que $f(x) = y$.

Ora, podemos supor que se existe tal x, então

$$y = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{(bc-da)}{b-a} \Rightarrow$$

$$y(b-a) = (d-c)x + (bc-da) \Rightarrow$$

$$y(b-a) - (bc-da) = (d-c)x \Rightarrow$$

$$x(d-c) = y(b-a) + (da-bc) \Rightarrow$$

$$x = \frac{y(b-a)}{d-c} + \frac{da-bc}{d-c}$$

e este x deve funcionar. MAS...

quem garante que este x calculado pertence mesmo ao intervalo (a,b)? Precisamos antes garantir que ~~x~~ $c<y<d$ então

$$a < y\frac{(b-a)}{d-c} + \frac{da-bc}{d-c} < b.$$

São dois testes parecidos com o que fizemos anteriormente: façamos o

1.º

$$y\frac{(b-a)}{d-c} + \frac{da-bc}{d-c} - a = \frac{y(b-a)+\cancel{da}-bc-\cancel{ad}+ac}{d-c}$$

$$= \frac{y(b-a)-c(b-a)}{d-c} = \frac{(b-a)}{d-c}(y-c),$$

Como $\frac{b-a}{d-c}>0$ e como $y>c$ então

$$\frac{y(b-a)}{d-c} + \frac{da-bc}{d-c} - a > 0.$$

Logo $a < y\frac{(b-a)}{d-c} + \frac{da-bc}{d-c}$ como queríamos.

Agora, você mostra de maneira análoga que

se $y < b$ então

$$y\frac{(b-a)}{d-c} + \frac{da-bc}{d-c} < b$$

.

Pra terminar, já que temos um x candidato

a fazer $f(x) = y$ ser verdadeiro, precisamos testá-lo.

Ora, se $$x = \frac{y(b-a)}{d-c} + \frac{da-bc}{d-c}$$ então

$$f(x) = \left(\frac{\cancel{d-c}}{b-a}\right) \cdot \left(\frac{y(b-a)}{\cancel{d-c}} + \frac{da-bc}{\cancel{d-c}}\right) + \frac{cb-da}{b-a} =$$

$$\frac{y(\cancel{b-a}) + \cancel{da} - \cancel{bc} + \cancel{cb} - \cancel{da}}{\cancel{b-a}} = y$$ como queríamos!

Ufa! ficou provado que

(a,b) é equipotente à (c,d).