Disciplina: Probabilidade e Estatística
Curso: Ciência da Computação
Professor: Leandro Bordin

TESTES DE HIPÓTESES

1. INTRODUÇÃO/CONCEITOS INICIAIS

Os testes de hipóteses (ou testes de significância) e a estimação são os dois ramos principais da inferência estatística. Enquanto que o objetivo da estimação é estimar algum parâmetro populacional, **o objetivo dos testes de hipóteses é decidir se determinada afirmação sobre um parâmetro populacional é verdadeira.**

Em um teste de hipótese, inicia-se com um valor suposto (hipotético) de um parâmetro populacional. Depois de coletar uma amostra aleatória, compara-se a estatística da amostra, tal como a média amostral ($\bar{x}$) ou a proporção amostral ($\bar{p}$), com o parâmetro suposto, tal como o média populacional (μ) ou a proporção populacional (p). Então, aceita-se ou rejeita-se o valor hipotético como sendo correto.

Na realização de um teste é necessário formular duas hipóteses básicas. As hipóteses são explicações potenciais (teorias) que procuram levar em conta fatos observados em situações onde existem algumas incógnitas. A primeira delas denomina-se **Hipótese nula (H_0)** e é uma afirmação que diz que o parâmetro populacional é tal como especificado. A segunda é a **Hipótese alternativa (H_1)** que nada mais é que uma afirmação que oferece uma alternativa à alegação feita em H_0 e que somente será verdadeira se a hipótese nula for falsa.

Outro aspecto a ser considerado num teste de hipótese é a necessidade de se especificar o nível de significância a ser utilizado. O **nível de significância (α)** é o padrão estatístico especificado para rejeitar a hipótese nula. Se for especificado um nível de significância de 5%, a hipótese nula é rejeitada somente se o resultado da amostra é tão diferente do valor suposto que uma diferença igual ou maior ocorreria por acaso com uma probabilidade de 5%.

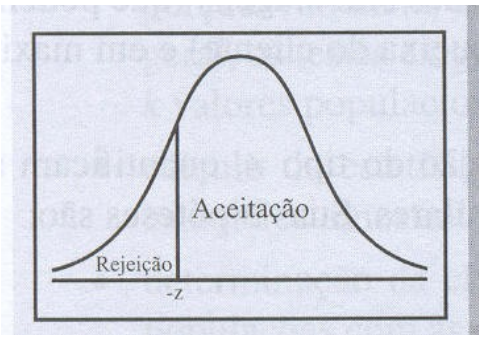
É importante notar que, se for utilizado um nível de significância de 5%, existe uma probabilidade de 5% de rejeitar a hipótese nula sendo a mesma verdadeira. Este é o chamado **Erro Tipo I**. A probabilidade do Erro tipo I é sempre igual ao nível de significância utilizado como padrão para rejeitar a hipótese nula. O **Erro Tipo II** ocorre quando a hipótese nula é aceita sendo a mesma falsa.

	Estados possíveis	
	Hipótese nula (H_0) verdadeira	Hipótese nula (H_0) falsa
Aceitação da hipótese nula (H_0)	Decisão correta	Erro tipo II
Rejeição da hipótese nula (H_0)	Erro tipo I	Decisão correta

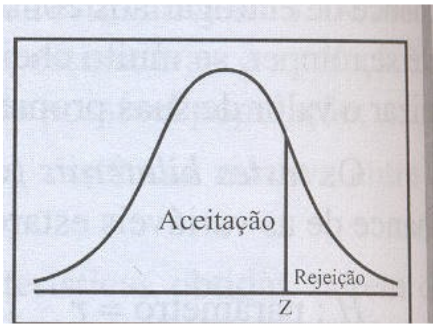
É correto dizer que um teste de hipótese consiste em verificar se uma estatística amostral observada pode razoavelmente provir de uma população com o parâmetro alegado. Logo, o ponto principal de um teste de hipótese é identificar se a diferença entre o valor alegado de um parâmetro populacional e o valor de uma estatística amostral pode ser razoavelmente atribuído à variabilidade amostral ou se a discrepância é demasiado grande para ser atribuída à casualidade. Desta forma é importante identificar a distribuição amostral, pois ela descreverá a variação. Fazendo uso do Teorema do Limite Central, considera-se neste capítulo que a distribuição das médias amostrais e das proporções amostrais se comporta como uma distribuição normal.

Para a tomada de decisão sobre a hipótese em consideração, a distribuição amostral é dividida em uma região que sugere a aceitação de H_0 e em uma região (**testes unilaterias**) ou em duas regiões (**testes bilaterais**) que sugerem a rejeição de H_0. O teste unilateral é usado quando se está interessado em possíveis desvios somente numa direção a partir do valor hipotético da média (para mais ou para menos). Por sua vez o teste bilateral é utilizado quando se está interessado em desvios em ambas as direções, a partir do valor hipotético da média.

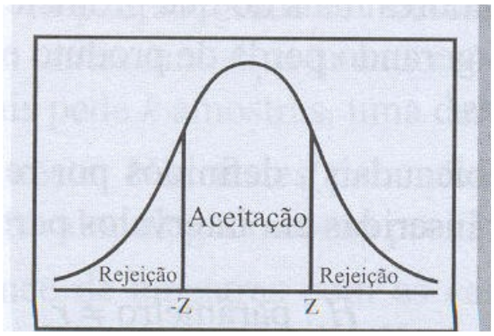
Teste unilateral à esquerda



Teste unilateral à direita



Teste bilateral



OBSERVAÇÃO: a região de rejeição de um teste unilateral encontra-se sempre na cauda que representa apoio à hipótese alternativa.

2. ETAPAS DE UM TESTE DE HIPÓTESE

1ª) Definir as hipóteses do teste: nula (H_0) e alternativa (H_1);

2ª) Fixar um nível de significância (α);

3ª) Calcular o valor da estatística de teste: $z_{teste} = \dfrac{parâmetro da amostra - parâmetro alegado}{desvio padrão da distribuição amostral}$;

4ª) Estabelecer o valor crítico ou valores críticos da estatística de teste:

	Tipo de teste	
	Unilateral	Bilateral
10%	+ 1,28 ou – 1,28	$\pm$ 1,65
5%	+ 1,65 ou – 1,65	$\pm$ 1,96
1%	+ 2,33 ou – 2,33	$\pm$ 2,58

5ª) Comparar o valor da estatística de teste com o valor crítico e tomar decisão: se o valor calculado estiver na região de aceitação, a decisão é a de aceitar H_0; se o valor calculado estiver na região de rejeição, a decisão é a de rejeitar H_0 (e, conseqüentemente, aceitar H_1).

3. TESTES DE HIPÓTESES PARA MÉDIAS

O objetivo dos testes de hipóteses para médias é avaliar afirmações feitas a respeito de médias populacionais. Neste caso, a distribuição normal de probabilidade pode ser utilizada para estimar um valor hipotético da média da população (1) quando n≥30, devido ao teorema do limite central, ou (2) quando n<30, no caso de a população ser normalmente distribuída.

O teste segue os passos enumerados no item 2. O valor da estatística de teste é calculado de acordo com as seguintes expressões:

$$z_{teste} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{Sx}{\sqrt{n}}}$$

sendo:

$\bar{x}$ = média amostral;

μ_0 = média populacional alegada - relativa à hipótese nula (H_0);

sx = desvio padrão amostral;

n = tamanho da amostra.

OBSERVAÇÃO: Quando o tamanho da amostra for superior a 5% do tamanho da população é necessário aplicar o **fator de correção finita** para modificar os desvios padrões das fórmulas. É importante lembrar que o referido fator é expresso da seguinte forma:

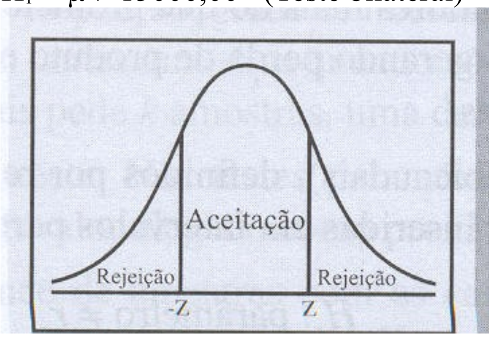
$$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Exemplos:

1. Um representante de um grupo comunitário informa, a uma pessoa que está interessada em estabelecer um centro comercial, que a renda média familiar na área é de R$ 15.000,00. Suponha que, para o tipo de zona em questão, é possível considerar que a renda média familiar tem distribuição aproximadamente normal. Para uma amostra aleatória de n = 15 famílias, a renda familiar foi de $\bar{x}$ = R$ 14.000,00 com um desvio padrão de Sx = R$ 2.000,00. Testar a hipótese nula de que a média populacional seja μ = R$ 15.000,00, utilizando um nível de significância de 5%

n= 15
N = ?
n/N < 5% não precisa de correção.

Hipóteses
$H_0 - \mu = 15000,00$
$H_1 - \mu \neq 15000,00$ (Teste bilateral)



$\alpha = 5\%$
$Z_{crítico} = +- 1,96$

Zteste

$$z_{teste} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{Sx}{\sqrt{n}}}$$

$$z_{teste} = \frac{14000 - 15000}{\frac{2000}{\sqrt{15}}}$$

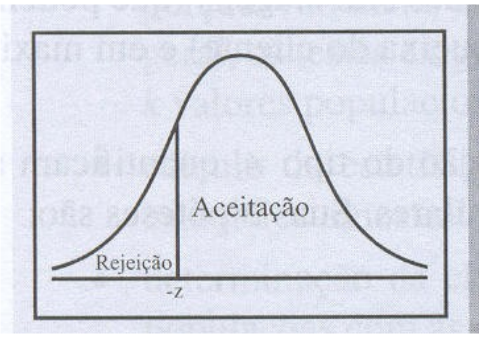
$z_{teste} = -1,94$ (área de aceitação de H_0)

Aceita-se H_0 = com um nível de significância de 5% é possível dizer que a renda média das famílias da região de estudo é igual a 1500,00 (R$)

2. Uma agência de empregos alega que os candidatos por ela colocados no mercado de trabalho nos últimos seis meses têm salários de, no mínimo, μ = R$ 9.000,00 anuais, em média. Uma agência governamental extraiu uma amostra aleatória de n = 50 empregados daquele grupo e encontrou um salário médio de $\overline{x}$ = R$ 8.000,00, com desvio padrão de Sx = R$ 1.000,00. Testar a afirmação da agência contra a alternativa de que o salário médio é inferior a R$ 9.000,00 anuais, com um nível de significância de 1%.

n= 50
N = ?
n/N < 5% não precisa de correção.

Hipóteses
$H_0 - \mu >= 9000,00$
$H_1 - \mu < 9000,00$ (Teste unilateral a esquerda)



$\alpha = 1\%$
$Z_{crítico} = - 2,33$

Zteste

$$z_{teste} = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{Sx}{\sqrt{n}}}$$

$$z_{teste} = \frac{8000 - 9000}{\frac{1000}{\sqrt{50}}}$$

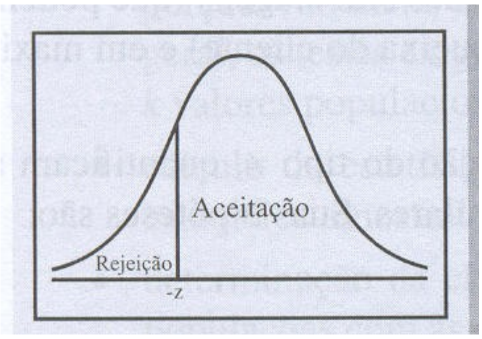
$z_{teste} = -7,07$ (área de rejeição de H_0)

Rejeita-se Ho = com um nível de significância de 5% é possível afirmar que a média dos salários não é >= 9000,00 (R$)

3. Um analista de mercados coleta informações em uma amostra aleatória de 100 clientes, dos 400 que compraram durante um sábado promocional numa determinada loja. As 100 pessoas gastaram uma média de $\bar{x}$ = R$ 24,57 com um desvio padrão Sx = R$ 6,60. Antes de ver os resultados da amostra, o gerente havia afirmado que a média das compras de todos os clientes teria sido de, no mínimo, R$ 25,00. Pode-se rejeitar a afirmação do gerente utilizando um nível de significância de 5%?

n= 100
N = 400
n/N – 100/400 = 25% > 5% precisa de correção.

Hipóteses
$H_0 - \mu >= 25,00$
$H_1 - \mu < 25,00$ (Teste unilateral a esquerda)



$\alpha = 5\%$
$Z_{crítico} = - 1,65$

$$z_{teste} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{Sx}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

$$z_{teste} = \frac{24,57 - 25}{\frac{6,60}{\sqrt{100}}\sqrt{\frac{400-100}{400-1}}}$$

$z_{teste} = -0,75$ (área de aceitação de H_0)

Aceita-se H_0 = a média de compras de todos os clientes (população) é no mínimo 25,00 (R$)

4. TESTES DE HIPÓTESES PARA PROPORÇÕES

O objetivo dos testes de hipóteses para proporções é avaliar afirmações sobre a proporção (ou porcentagem) de uma população. Os testes se baseiam na premissa de que uma proporção amostral (isto é, *x* ocorrências em *n* observações, ou *x/n*) será igual à verdadeira proporção populacional, a menos da variabilidade amostral.

O teste segue os passos enumerados no item 2. O valor da estatística de teste é calculado de acordo com a expressão a seguir, lembrando que, ao contrário da técnica usada na estimação, onde a proporção amostral foi introduzida na fórmula, o valor de "p" usado para calcular o desvio padrão se baseia no valor indicado em H_0 (e não na proporção amostral). Assim:

$$z_{teste} = \frac{\overline{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \; ;$$

sendo:
$\overline{p}$ = proporção amostral;
p_0 = proporção populacional alegada - relativa à hipótese nula (H_0);
n = tamanho da amostra.

OBSERVAÇÃO: Quando o tamanho da amostra for superior a 5% do tamanho da população é necessário aplicar o **fator de correção finita** para modificar os desvios padrões das fórmulas. O mesmo é expresso da seguinte forma:

$$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Exemplos:

1. Um jornal afirma que aproximadamente 25% dos adultos em sua área de circulação são analfabetos segundo os padrões governamentais. Testar essa afirmação contra a alternativa de que a verdadeira porcentagem não é de 25%, usando a probabilidade de 5% de um erro tipo I. Uma amostra de 740 pessoas indica que apenas 20% seriam considerados analfabetos segundo os mesmos padrões.

n= 740

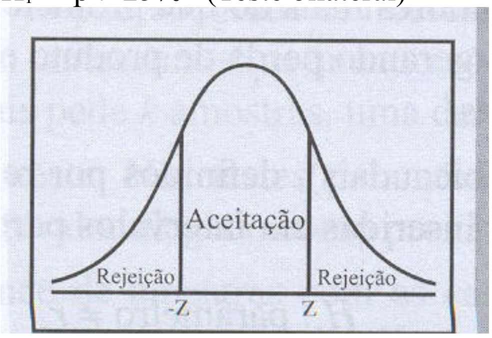
N = ?

n/N < 5% não precisa de correção.

Hipóteses

$H_0 - \; p = 25\%$

$H_1 - \; p \neq 25\%$ (Teste bilateral)



$\alpha = 5\%$

$Z_{crítico} = $ +- 1,96

Zteste

$$z_{teste} = \frac{\overline{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

$$z_{teste} = \frac{0{,}20 - 0{,}25}{\sqrt{\frac{0{,}25(1-0{,}25)}{740}}}$$

$z_{teste} = -3{,}14$ (área de rejeição de H_0)

Rejeita-se H_0 = a porcentagem de adultos analfabetos é diferente de 25%

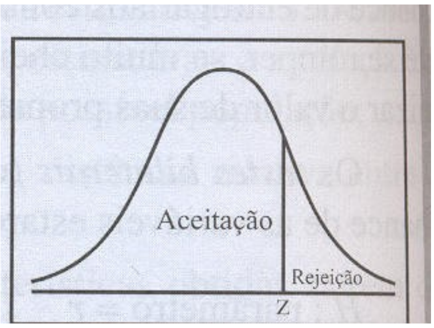
2. Um fabricante afirma que não mais do que 5% das peças produzidas diariamente na linha de produção de sua fábrica sejam defeituosas. Para uma amostra aleatória de 100 peças, em 10 foi encontrado algum tipo de defeito. Testar a afirmação do fabricante utilizando um nível de significância de 1%.

n= 100
N = ?
n/N < 5% não precisa de correção.

x= 10

p = x/n = 10/100 = 10%

Hipóteses
$H_0 -$ p <= 5%
$H_1 -$ p > 5%   (Teste unilateral a direita)



$\alpha = 1\%$
$Z_{crítico} = +\ 2{,}33$

Zteste

$$z_{teste} = \frac{\overline{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

$$z_{teste} = \frac{0{,}10 - 0{,}05}{\sqrt{\frac{0{,}05(1-0{,}05)}{100}}}$$

$z_{teste} = 2{,}29$ (área de aceitação de H_0)

Aceita-se H_0 = a proporção de peças defeituosas na linha de produção é <= 5%

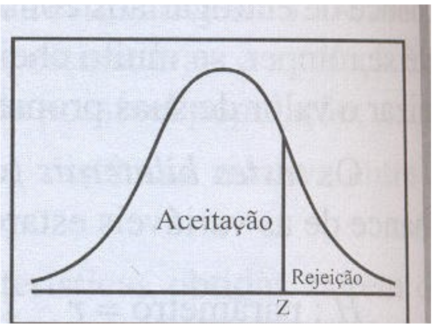
3. Um fabricante afirma que a porcentagem de embalagens, com seu produto, que não foram suficientemente cheias não é superior a 3%. Uma pesquisa aleatória acusou 4 embalagens mal cheias em 50. Se amostra foi extraída de uma remessa de 400 embalagens, testar com um nível de significância de 5% se a evidência amostral contraria a alegação do fabricante.

n= 50
N = 400
n/N = 50/400 = 12,5% > 5% precisa de correção.

x= 4

p = x/n = 4/50 = 8%

Hipóteses
H_0 – p <= 3%
H_1 – p > 3% (Teste unilateral a direita)



α = 5%
$Z_{crítico}$ = + 1,65

Zteste

$$z_{teste} = \frac{\overline{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

$$z_{teste} = \frac{0,08-0,03}{\sqrt{\frac{0,03(1-0,03)}{50}}\sqrt{\frac{40}{4(}}}$$

$z_{teste} = 2,21$ (área de rejeição de H_0)

Rejeita-se H_0 = A proporção de embalagens mal cheias é superior a 3%

5. RESUMO DE FÓRMULAS

Fórmulas para cálculo da variável de teste (z_{teste})		
	População	
	Infinita	Finita ($n \supseteq 5\%N$)
Testes para médias		
	$z_{teste} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{sx}{\sqrt{n}}}$	$z_{teste} = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{sx}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}}$
Testes para proporções	$z_{teste} = \dfrac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$z_{teste} = \dfrac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}}$

6. EXERCÍCIOS

1. A empresa X vende um produto que alega ser eficiente (ou ser válido) pelo prazo de 4.000 horas no mínimo. Uma análise de 9 itens escolhidos aleatoriamente acusou uma média de eficiência de 3.800 horas, com um desvio padrão de 600 horas. Supondo que a variável é normalmente distribuída, testar a alegação da companhia usando um nível de significância de 1%. (R.: Zteste = -1,0 = aceita Ho)

2. O valor médio das vendas por estabelecimento varejista, durante o último ano, de um particular produto, foi de R$ 3.425,00, com um desvio padrão de R$ 200,00, para uma amostra de 25 estabelecimentos. Com base em dados de vendas de produtos similares, pressupõe-se que a distribuição das vendas seja normal. Supondo que tenha sido afirmado que o verdadeiro valor das vendas por estabelecimento seja no mínimo de R$ 3.500,00, testar esta afirmação usando um nível de significância de (a) 5% (R.: Zteste = -1,875 = rejeita Ho) e (b) 1%. (R.: Zteste = -1,875 = aceita Ho)

3. Um carregamento de 100 máquinas com defeitos foi recebido em um departamento de conserto de máquinas. Para uma amostra aleatória de 10 máquinas, o tempo médio necessário para o conserto foi de 85 minutos, com um desvio padrão de 15 minutos. Testar a hipótese de que o tempo médio de conserto de todas as máquinas (ou seja, da população estatística) seja de 100 minutos, usando um nível de significância de 10% e baseando-se na suposição de que a distribuição do tempo de conserto é aproximadamente normal. (R.: Zteste = -3,31 = rejeita Ho)

4. Um comprador, ao receber de um fornecedor um grande lote de peças, decidiu inspecionar 200 delas. Segundo o fornecedor, a proporção de peças defeituosas no lote não é superior a 4%. Se esta afirmação for verdadeira, com um nível de significância de 5%, o comprador aceitará o lote, caso contrário irá devolvê-lo. Qual será a decisão do comprador se, na amostra, foram encontradas 11 peças defeituosas? (R.: Zteste = 1,08 = aceita Ho = compra o lote de peças)

5. Um fabricante garante que, pelo menos 95% do equipamento que forneceu para um cliente está de acordo com as especificações. O exame de uma amostra de 200 unidades desse

equipamento revelou 91% dos equipamentos não apresentavam nenhum tipo de defeito. Testar a afirmativa do fabricante usando um nível de significância de (a) 5% (R.: Zteste = -2,60 = rejeita Ho) e (b) 1% (R.: Zteste = -2,60 = rejeita Ho).

6. Um fabricante afirma que uma remessa de 1500 de peças contém menos de 1% de defeituosas. Numa amostra aleatória de 200 peças, foram descartadas 5 unidades, uma vez que apresentavam algum tipo de defeito. Testar a afirmação do fabricante utilizando um nível de significância de 5%. (R.: Zteste = 2,29 = rejeita Ho)