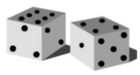
UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

Campus Chapecó

Teoria da Probabilidade

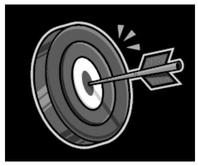
Disciplina: Probabilidade e Estatística
Curso: Ciência da Computação
Professor: Leandro Bordin

✓ Recapitulando...



✓ Definição de estatística

✓ **A estatística está interessada nos métodos científicos para coleta, organização, resumo, apresentação e análise de dados, bem como na obtenção de conclusões válidas e na tomada de decisões razoáveis baseadas em tais análises**



✓ Recapitulando...

✓ Ramos da estatística

✓ **Estatística Descritiva – compreende o manejo de dados com a intenção de resumí-los ou descrevê-los por meio de tabelas e gráficos; engloba a organização, o resumo e a simplificação de informações que podem ser muito complexas**

✓ **Inferência Estatística – refere-se ao processo de generalização a partir de resultados particulares (amostra); como essa inferência pode não ser absolutamente certa, a probabilidade é muitas vezes usada no estabelecimento das conclusões**

✓ Recapitulando...

✓ Ramos da estatística

✓ **Probabilidade – proporciona uma base racional para lidar com situações influenciadas por fatores relacionados com o acaso, assim como estimar erros**

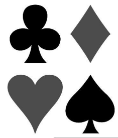
Tem-se, então, três áreas entrelaçadas de interesse para a estatística: a descrição e resumo de dados, a análise e interpretação de dados amostrais e a probabilidade

OBJETO DE ESTUDO DA AULA

✓ História da probabilidade

✓ **A história da teoria das probabilidades teve início com os jogos de cartas, dados e de roleta**

✓ **Esse é o motivo da grande existência de exemplos de jogos de azar no estudo da probabilidade**



Pierre Simon Laplace é considerado o fundador da teoria das probabilidades

✓ História da probabilidade

✓ **Independente de qual seja a aplicação em particular, a utilização da probabilidade indica a existência de um grau de incerteza, um elemento do acaso, quanto à ocorrência ou não de um evento futuro**

✓ **A teoria da probabilidade permite que se calcule a chance de ocorrência de um número (evento) em um experimento aleatório**

✓ **Experimento aleatório**

✓ **É aquele experimento que quando repetido em iguais condições, podem fornecer resultados diferentes, ou seja, são resultados explicados ao acaso**

✓ **Conceitos básicos**

✓ **Espaço amostral (S)**

✓ **É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Ex:**

✓ **1) Lançar uma moeda**

✓ **2) Lançar um dado**

✓ **3) Lançar duas moedas**

✓ **Conceitos básicos**

✓ **Espaço amostral (S)**

✓ **É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Ex:**

✓ **1) Lançar uma moeda – S = {K,C} sendo K = cara; C = coroa**

✓ **2) Lançar um dado – S = {1,2,3,4,5,6}**

✓ **3) Lançar duas moedas – S = {KK, KC, CC, CK}**

✓ **Conceitos básicos**

✓ **Espaço amostral (S)**

✓ **4) Lançar dois dados**

✓ **Conceitos básicos**

✓ **Espaço amostral (S)**

✓ **4) Lançar dois dados**

$$S=\begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{pmatrix}$$

✓ **Conceitos básicos**

✓ **Evento (E)**

✓ **São os resultados de um experimento; um evento, também, pode ser definido como qualquer subconjunto do espaço amostral. Ex:**

1) Experimento: Lançar um dado

S = {1,2,3,4,5,6}

E = ocorrência de números pares

✓ Conceitos básicos

✓ Evento (E)

✓ **São os resultados de um experimento; um evento, também, pode ser definido como qualquer subconjunto do espaço amostral. Ex:**

1) Experimento: Lançar um dado

S = {1,2,3,4,5,6}

E = ocorrência de números pares = {2,4,6}

✓ Conceitos básicos

✓ Evento (E)

1) Experimento: Lançar dois dados

$$S=\begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{pmatrix}$$

E = soma sete =

✓ Conceitos básicos

✓ Evento (E)

1) Experimento: Lançar dois dados

$$S=\begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{pmatrix}$$

E = soma sete = {(1,6) (6,1) (2,5) (5,2) (3,4) (4,3)}

✓ Noção intuitiva de probabilidade

✓ **Suponha que um evento possa ocorrer de *h* maneiras diferentes, em um total de *n* modos possíveis, igualmente prováveis**

✓ **Então, a probabilidade de ocorrência do evento (denominada sucesso) é definida por:**

$$p=P(E)=\frac{h}{n}$$

sendo:
h = número de casos favoráveis a um acontecimento
n = número total de casos possíveis

✓ Noção intuitiva de probabilidade

$$p=P(E)=\frac{h}{n}$$

$$P(E)=\frac{número\_de\_casos\_favoráveis\_n(E)}{número\_de\_casos\_possíveis\_n(S)}$$

✓ Noção intuitiva de probabilidade

$$P(E)=\frac{número\_de\_casos\_favoráveis\_n(E)}{número\_de\_casos\_possíveis\_n(S)}$$

Para utilizar a probabilidade é preciso conhecer o número total de resultados possíveis de um experimento; em geral empregam-se técnicas de contagem para calcular esse número, as quais são estudadas na Análise Combinatória (princípio fundamental da contagem, arranjo, permutação e combinação)

✓ Noção intuitiva de probabilidade

✓ **A probabilidade de não ocorrência do evento (denominada insucesso) é definida por:**

$$q = P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

✓ Axiomas de probabilidade

✓ **Para todo evento A contido no espaço amostral (S)**
$0 \leq P(A) \geq 1$

✓ **O espaço amostral tem probabilidade 1**
P(S) = 1

✓ **Disso decorre:**

$P(E) + P(\bar{E}) = 1$

$P(\Phi) = 0$

Os teoremas de base das probabilidades podem ser demonstrados a partir dos axiomas das probabilidades e da teoria dos conjuntos

✓ Exemplos

1. No lançamento de um dado qual a probabilidade de:

a) ocorrer o nº 3; P(3) = 1/6 = 16,67%

b) ocorrer o nº 4 ou 5; P(4ou5) = 2/6 = 33,33%

c) não ocorrer o nº 3; $P(\overline{3})$ = 100% - 16,67 = 83,33%
$P(\overline{3})$ = 5/6 = 83,33%

d) não ocorrer o nº 4 ou 5; $P(\overline{4ou5})$ = 100 – 33,33 =66,67%
$P(\overline{4ou5})$ = 4/6 = 66,67%

✓ Exemplos

2. No lançamento de dois dados qual a probabilidade de ocorrer:

a) soma 7; P(soma7) = 6/36 = 16,67%

b) soma 5. P(soma 5) = 4/36 = 11,11%

Soma 5

Soma 7

$$S=\begin{pmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \cancel{(1,4)} & (1,5) & \cancel{(1,6)} \\ (2,1) & (2,2) & \cancel{(2,3)} & (2,4) & \cancel{(2,5)} & (2,6) \\ (3,1) & \cancel{(3,2)} & (3,3) & \cancel{(3,4)} & (3,5) & (3,6) \\ \cancel{(4,1)} & (4,2) & \cancel{(4,3)} & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & \cancel{(5,2)} & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ \cancel{(6,1)} & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{pmatrix}$$

✓ Exemplos

3. Uma carta é retirada de um baralho (52 cartas). Qual a probabilidade desta carta:

a) ser Rei;

b) ser As;

c) não ser Rei;

d) não ser As.

4. Uma caixa é composta de 5 bolas brancas, 8 pretas e 7 azuis. Uma bola é retirada. Qual a probabilidade dela:

a) ser azul;

b) não ser branca.

✓ Exemplos

5. Em um lote de 12 peças, 4 são defeituosas. Considerando a retirada aleatória de uma peça, determinar a probabilidade de a peça retirada:

a) ser defeituosa;

b) não ser defeituosa.

6. 8 casais participam de uma reunião. Escolhendo 2 pessoas aleatoriamente qual a probabilidade de que sejam casados?

✓ Álgebra da probabilidade

✓ **Eventos independentes - dois ou mais eventos são independentes se a ocorrência de um não influencia a ocorrência do(s) outro(s).**

✓ **Eventos dependentes - dois ou mais eventos são dependentes se a ocorrência de um influencia a ocorrência do(s) outro(s)**

✓ **Eventos mutuamente exclusivos - são eventos que não podem ocorrer simultaneamente (não tem elemento em comum)**

✓ Álgebra da probabilidade

✓ **Regra da adição de eventos (A U B)**

✓ **Eventos mutuamente exclusivos**

P(A **ou** B) = P(A U B) = P(A) + P(B)

✓ **Eventos não mutuamente exclusivos**

P(A **ou** B) = P(AUB) = P(A) + P(B) – P(A∩B)

✓ Álgebra da probabilidade

✓ **Regra da adição de eventos (A U B)**

✓ **Exemplos**

1. As probabilidades de um consumidor classificar um novo produto como muito ruim, ruim, razoável, bom, muito bom ou excelente são, respectivamente: 6%, 13%, 17%, 32%, 22% e 10%. Qual a probabilidade do novo produto ser classificado como

a) muito ruim, ruim, razoável ou bom

b) bom, muito bom ou excelente

✓ Álgebra da probabilidade

✓ **Regra da adição de eventos (A U B)**

✓ **Exemplos**

1. As probabilidades de um consumidor classificar um novo produto como muito ruim, ruim, razoável, bom, muito bom ou excelente são, respectivamente: 6%, 13%, 17%, 32%, 22% e 10%. Qual a probabilidade do novo produto ser classificado como

a) muito ruim, ruim, razoável ou bom

P( ) = 6%+13%+17%+32% = 68%

b) bom, muito bom ou excelente

P( ) = 32%+22%+10% = 64%

✓ Álgebra da probabilidade

✓ **Regra da adição de eventos (A U B)**

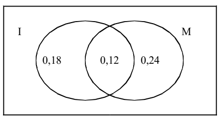
✓ **Exemplos**

2. O diagrama abaixo refere-se à procura de emprego de um recém graduado de uma escola de Administração. As letras I e M denotam a aceitação de um emprego oferecido por uma corretora de investimentos ou por uma empresa especializada em Marketing. Determinar:

a) P(I);

b) P(M);

c) P(I U M).

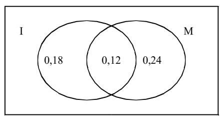


✓ Álgebra da probabilidade

✓ **Regra da adição de eventos (A U B)**

✓ **Exemplos**

2.



a) P(I) = 0,18+0,12 = 30%

b) P(M) = 0,24+0,12 = 36%

c) P(I U M) = P(I) + P(M) – P(I∩M)
= 0,30 + 0,36 – 0,12 = 54%

P(I U M) = 0,18+0,12+0,24 = 54%

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Probabilidade condicional

Se A e B são dois eventos, a probabilidade de B ocorrer depois de A ter acontecido é definida por P(B|A) ou por P(B dado A), e é denominada probabilidade condicional

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Probabilidade condicional

✓ Exemplos

1. Numa certa cidade, 40% da população tem cabelos castanhos, 25% olhos castanhos e 15% olhos e cabelos castanhos. Uma pessoa da cidade é escolhida aleatoriamente.

a) Se ela tem cabelos castanhos, determinar a probabilidade de ter também olhos castanhos;

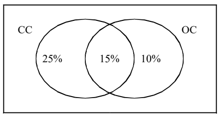
b) Se ela tem olhos castanhos, determinar a probabilidade não ter cabelos castanhos

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Probabilidade condicional

✓ Exemplos

1.



a) Se ela tem cabelos castanhos, determinar a probabilidade de ter também olhos castanhos

$P(OC|CC) = \frac{P(OC\cap CC)}{P(CC)} = \frac{0,15}{0,40} = 37,5\%$

b) Se ela tem olhos castanhos, determinar a probabilidade não ter cabelos castanhos

$P(\overline{CC}|OC) = \frac{10}{25} = 40\%$

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Probabilidade condicional

✓ Exemplos

2. Há 80 candidatos à uma franquia de fast-food. Alguns deles têm diploma de curso superior, outros não. Alguns já têm experiência anterior no ramo, outros não. Os dados são:

	Com curso superior	Sem curso superior
Com experiência	24	36
Sem experiência	12	8

...

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Probabilidade condicional

✓ Exemplos

2.

... Se a ordem em que os candidatos são entrevistados é aleatória, G é o evento "o primeiro entrevistado tem curso superior" e E é o evento "o primeiro candidato tem experiência anterior", determinar as seguintes probabilidades:

a) $P(G)$;
b) $P(E)$;
c) $P(\overline{E})$;
d) $P(E\cap G)$;
e) $P(E\cup G)$;
f) $P(E|G)$;
g) $P(\overline{E}|\overline{G})$;
h) $P(\overline{G}|\overline{E})$.

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Probabilidade condicional

✓ Exemplos

	G	$\overline{G}$	
E	24	36	$\sum$=60
$\overline{E}$	12	8	$\sum$=20
	$\sum$=36	$\sum$=44	

a) $P(G)$; = 36/80 = 45%
b) $P(E)$;
c) $P(\overline{E})$;
d) $P(E\cap G)$;
e) $P(E\cup G)$;
f) $P(E|G)$; = 24/36 = 66,67%
g) $P(\overline{E}|\overline{G})$;
h) $P(\overline{G}|\overline{E})$.

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Multiplicação de eventos

✓ **Eventos independentes**

$$P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$$

✓ **Eventos dependentes**

$$P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(B) \,.\, P(A|B)$$

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Multiplicação de eventos

✓ **Exemplos**

1. Determinar a probabilidade de se obter 2 caras em duas jogadas de uma moeda.

P(cara e cara) = ½ . ½ = ¼ = 25%

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Multiplicação de eventos

✓ **Exemplos**

2. Determinar a probabilidade de se obter dois Reis em seguida quando se extraem duas cartas de um baralho comum de 52 cartas, se:
a) a 1ª carta é reposta no baralho antes da extração da 2ª;

P(rei e rei) = 4/52 . 4/52 = 16/2704 = 0,59%

b) a 1ª carta extraída não é reposta antes da extração da 2ª

P(rei e rei) = 4/52 . 3/51 = 12/2652 = 0,45%

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Multiplicação de eventos

✓ **Exemplos**

3. Se há 0,70 de probabilidade de uma pessoa entrevistada em um shopping ser contra o rezoneamento de certo quarteirão para desenvolvimento industrial, determinar a probabilidade de as 3 primeiras pessoas entrevistadas serem contra, mas a 4ª ser a favor.

P( ) = 0,70 . 0,70 . 0,70 . 0,30 = 10,29%

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Multiplicação de eventos

✓ **Exemplos**

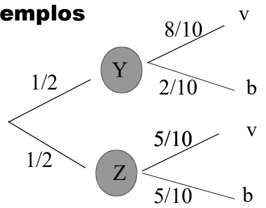
4. Suponha duas caixas, Y e Z, com fichas. A primeira contém 8 fichas vermelhas e 2 brancas. A segunda contém 5 vermelhas e 5 brancas. Determinar a probabilidade de escolher:
a) uma ficha vermelha na urna Y
b) uma ficha vermelha

✓ Álgebra da probabilidade

✓ Multiplicação de eventos

✓ **Exemplos**

4.



a) uma ficha vermelha na urna Y
P(v∩Y) = P(Y) . P(v|Y) = (1/2) . (8/10) = 40%

b) uma ficha vermelha
P(v) = (1/2) . (8/10) + (1/2) . (5/10) = 65%
e ou e

✓ **Álgebra da probabilidade**

✓ **Resumo**

$$p = P(E) = \frac{h}{n}$$

ou = +

e = x

✓ **Exercícios**

1. Descrever o espaço amostral do experimento "Lançamento simultâneo de 2 moedas e 1 dado" e expressar o evento "aparecem duas caras e um número par".

2. Escolhendo ao acaso uma letra da palavra ESTATISTICA, qual a probabilidade de a letra escolhida ser:
a) E; R.: 9,09%
b) A; R.: 18,18%
c) T. R.: 27,27%

✓ **Exercícios**

3. No lançamento de um dado 3 vezes, qual a probabilidade de ocorrer:
a) o número 2 nas 3 vezes; R.: 0,46%
b) um número impar nas 3 vezes. R.: 12,5%

4. Uma moeda é viciada de modo que as caras são três vezes mais prováveis de aparecer do que as coroas. Encontrar:
a) P(cara); R.: 75%
b) P(coroa). R.: 25%

✓ **Exercícios**

5. Um dado é viciado de modo que cada número par tem duas vezes mais probabilidade de aparecer do que qualquer número impar. Determinar a probabilidade de ocorrer:
a) um número par; R.: 66,67%
b) um número ímpar. R.:33,33%

6. Lança-se dois dados. Se a soma dos números é 6, qual a probabilidade de ter ocorrido o número 2 em um dos dados? R.: 40%

✓ **Exercícios**

7. São dadas duas urnas. A urna A contém 5 bolas vermelhas, 3 brancas e 8 azuis. A urna B contém 3 bolas vermelhas e 5 brancas. Lança-se um dado não viciado: se aparecer 3 ou 6, uma bola é escolhida de B, caso contrário uma bola é escolhida de A. Determinar a probabilidade de:
a) uma bola vermelha ser escolhida; R.: 33,33%
b) uma bola branca ser escolhida; R.: 33,33%
c) uma bola azul ser escolhida. R.: 33,33%

✓ **Exercícios**

8. As falhas de diferentes máquinas são independentes umas das outras. Se há quatro máquinas e se suas respectivas probabilidades de falha são 1%, 2%, 5% e 10% em um determinado dia, calcular a probabilidade de:
a) todas falharem em um determinado dia; R.: 0,0001%
b) nenhuma falhar. R.: 82,95%

✓ Exercícios

9. Uma fábrica tem um processo de inspeção com 4 etapas. A probabilidade de uma peça defeituosa passar numa etapa de inspeção sem ser detectada é de 20%. a) Determinar a probabilidade de uma peça defeituosa passar pelas 4 etapas de inspeção sem ser detectada. (R.: 0,16%). b) Qual seria sua resposta se fosse acrescentada uma quinta etapa de inspeção com 50% de probabilidade de detectar peças defeituosas (R.: 0,08%).

✓ Exercícios

10. Se 3 lotes de peças contém cada um 10% de peças defeituosas, qual a probabilidade de um inspetor não encontrar nenhuma peça defeituosa ao inspecionar uma peça de cada um dos 3 lotes? R.: 72,9%

✓ Exercícios

11. Leia a tirinha abaixo

http://www.meninomaluquinho.com.br/PaginaTirinha/default.asp

Lúcio está certo: desde o dia 07/07/2007, existem dois grupos de 7 Maravilhas do Mundo: as 7 do Mundo Antigo e as 7 do Mundo Moderno e nenhuma pertence a ambos os conjuntos. Suponha que se escolham, aleatoriamente, duas entre essas 14 Maravilhas. Determine a probabilidade de ambas estarem em um mesmo grupo.

✓ Exercícios

12. O jogo de dominó é composto de peças retangulares formadas pela junção de dois quadrados. Em cada quadrado há a indicação de um número, representado por uma certa quantidade de bolinhas, que variam de nenhuma a seis. O número total de combinações possíveis é de 28 peças. Se pegarmos uma peça qualquer, qual a probabilidade dela possuir ao menos um 3 ou 4 na sua face?

✓ Exercícios

13. Em uma escola de idiomas com 2000 alunos, 500 alunos fazem o curso de inglês, 300 fazem o curso de espanhol e 200 cursam ambos os cursos. a) Selecionando-se um estudante do curso de inglês, qual a probabilidade dele também estar cursando o curso de espanhol? (R.: 40%) b) Selecionando-se um estudante do curso de espanhol qual a probabilidade dele não estar cursando inglês (R.: 33,33%)?

✓ Exercícios

14. Dos 10 alunos de uma turma, 3 têm olhos azuis. Se 2 alunos são escolhidos ao acaso, determinar a probabilidade de:
a) ambos terem olhos azuis; R.: 6,67%
b) nenhum ter olhos azuis. R.: 46,67%