Podemos calcular essa integral fatorando $u^2 - 4$ em $(u-2)(u+2)$ e usando as frações parciais ou usando a Fórmula 6 com $a = 2$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx &= 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2-4}\\ &= 2u + 8\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C\\ &= 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C\end{aligned}$$

7.4 Exercícios

1–6 Escreva as formas de decomposição em frações parciais da função (como no Exemplo 7). Não determine os valores numéricos dos coeficientes.

1. (a) $\dfrac{1+6x}{(4x-3)(2x+5)}$ (b) $\dfrac{10}{5x^2-2x^3}$

2. (a) $\dfrac{x}{x^2+x-2}$ (b) $\dfrac{x^2}{x^2+x+2}$

3. (a) $\dfrac{x^4+1}{x^5+4x^3}$ (b) $\dfrac{1}{(x^2+9)^2}$

4. (a) $\dfrac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2+2x+1}$ (b) $\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2+x}$

5. (a) $\dfrac{x^6}{x^2-4}$ (b) $\dfrac{x^4}{(x^2-x+1)(x^2+2)^2}$

6. (a) $\dfrac{t^6+1}{t^6+t^3}$ (b) $\dfrac{x^5+1}{(x^2-x)(x^4+2x^2+1)}$

7–38 Calcule a integral.

7. $\displaystyle\int \frac{x}{x-6}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{r^2}{r+4}\,dr$

9. $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{(t+4)(t-1)}\,dt$

11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1}\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-4}{x^2+5x+6}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{ax}{x^2-bx}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$

15. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3+2x^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}\,dx$

17. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}\,dy$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+16}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x^3+4}{x^2+4}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{ds}{s^2(s-1)^2}$

23. $\displaystyle\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{4x}{x^3+x^2+x+1}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+4}{x^4+3x^2+2}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+13}\,dx$

33. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+3}\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{x^5+x-1}{x^3+1}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$

36. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^5+5x^3+5x}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2}\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+3x-2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

39–52 Faça uma substituição para expressar o integrando como uma função racional e então calcule a integral.

39. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x}$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{x}}$

42. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$

44. $\displaystyle\int_{1/3}^{3} \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$ [*Dica:* Substitua $u = \sqrt[6]{x}$.]

46. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

47. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - 3\cos x}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 t}{\operatorname{tg}^2 t + 3\operatorname{tg} t + 2}\,dt$

50. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+1)}\,dx$

51. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$

52. $\displaystyle\int \frac{\cosh t}{\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{senh}^4 t}\,dt$

53–54 Use integração por partes, juntamente com as técnicas desta seção, para calcular a integral.

53. $\displaystyle\int \ln(x^2-x+2)dx$

54. $\displaystyle\int x\,\operatorname{tg}^{-1} x\,dx$

55. Use um gráfico de $f(x) = 1/(x^2-2x-3)$ para decidir se $\int_0^2 f(x)\,dx$ é positiva ou negativa. Utilize o gráfico para dar uma estimativa aproximada do valor da integral e então use frações parciais para encontrar o valor exato.

56. Calcule

$$\int \frac{1}{x^2+k}\,dx$$

considerando diversos casos para a constante k.

57–58 Calcule a integral completando o quadrado e usando a Fórmula 6.

57. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}$

58. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{4x^2+12x-7}\,dx$

59. O matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897) observou que a substituição $t = \operatorname{tg}(x/2)$ converte qualquer função racional de sen x e cos x em uma função racional ordinária de t.

(a) Se $t = \operatorname{tg}(x/2)$, $-\pi < x < \pi$, esboce um triângulo retângulo ou use as identidades trigonométricas para mostrar que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

(b) Mostre que

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

(c) Mostre que

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

60–63 Use a substituição do Exercício 59 para transformar o integrando em uma função racional de t e então calcule a integral.

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\cos x}$

61. $\displaystyle\int \frac{1}{3\operatorname{sen} x - 4\cos x}\,dx$

62. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x - \cos x}\,dx$

63. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2+\cos x}\,dx$

64–65 Encontre a área da região sob a curva dada de 1 até 2.

64. $y = \dfrac{1}{x^3+x}$

65. $y = \dfrac{x^2+1}{3x-x^2}$

66. Encontre o volume do sólido resultante se a região sob a curva $y = 1/(x^2+3x+2)$ de $x = 0$ a $x = 1$ for girada em torno do: (a) eixo x e (b) eixo y.

67. Um método de retardar o crescimento de uma população de insetos sem usar pesticidas é introduzir na população um número de machos estéreis que cruzam com fêmeas férteis, mas não produzem filhotes. Se P representar o número de fêmeas na população de insetos, S, o número de machos estéreis introduzidos a cada geração e r, a taxa de crescimento populacional natural, então a população de fêmeas está relacionada com o instante t através de

$$t = \int \frac{P+S}{P[(r-1)P-S]}\,dP$$

Suponha que uma população de insetos com 10 000 fêmeas cresça a uma taxa de $r = 0{,}10$ e que 900 machos estéreis sejam adicionados. Calcule a integral para dar uma equação relacionando a população de fêmeas com o tempo. (Observe que a equação resultante não pode ser resolvida explicitamente para P.)

68. Fatore $x^4 + 1$ como uma diferença de quadrados adicionando e subtraindo a mesma quantidade. Use essa fatoração para calcular $\int 1\,(x^4+1)dx$.

SCA **69.** (a) Use um sistema de computação algébrica para encontrar a decomposição em frações parciais da função

$$f(x) = \frac{4x^3+27x^2+5x-32}{30x^5-13x^4+50x^3-286x^2-299x-70}$$

(b) Use parte (a) para encontrar $\int f(x)\,dx$ (manualmente) e compare com o resultado se for usado um SCA para integrar f diretamente. Comente qualquer discrepância.

SCA **70.** (a) Encontre a decomposição em frações parciais da função

$$f(x) = \frac{12x^5-7x^3-13x^2+8}{100x^6-80x^5+116x^4-80x^3+41x^2-20x+4}$$

(b) Use a parte (a) para encontrar $\int f(x)\,dx$ e trace os gráficos de f e de sua integral indefinida na mesma tela.

(c) Use o gráfico de f para descobrir as principais características do gráfico de $\int f(x)\,dx$.

71. Suponha que F, G e Q sejam polinômios e

$$\frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{G(x)}{Q(x)}$$