EXEMPLO 6 Demonstre a fórmula de redução

$$\boxed{7} \qquad \int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

A Equação 7 é chamada de *fórmula de redução* porque o exponente foi reduzido para $n - 1$ e $n - 2$.

onde $n \geqslant 2$ é um inteiro.

SOLUÇÃO Seja

$$u = \operatorname{sen}^{n-1} x \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx$$

Então, $$du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cos x\, dx \qquad v = -\cos x$$

de modo que a integração por partes resulta em

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\, dx$$

Uma vez que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, temos

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\, dx$$

Como no Exemplo 4, nessa equação isolamos a integral desejada, levando o último termo do lado direito para o lado esquerdo. Então, temos

$$n\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

ou $$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

A fórmula de redução $\boxed{7}$ é útil porque usando-a repetidas vezes podemos eventualmente expressar $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ em termos de $\int \operatorname{sen} x\, dx$ (se n for ímpar) ou $\int (\operatorname{sen} x)^0\, dx = \int dx$ (se n for par).

7.1 Exercícios

1–2 Calcule a integral usando a integração por partes com as escolhas de u e dv indicadas.

1. $\int x^2 \ln x\, dx;\quad u = \ln x,\ dv = x^2\, dx$

2. $\int \theta \cos\theta\, d\theta;\quad u = \theta,\ dv = \cos\theta\, d\theta$

3–36 Calcule a integral.

3. $\int x \cos 5x\, dx$

4. $\int xe^{-x}\, dx$

5. $\int re^{r/2}\, dr$

6. $\int t \operatorname{sen} 2t\, dt$

7. $\int (x^2 + 2x)\cos x\, dx$

8. $\int t^2 \operatorname{sen} \beta t\, dt$

9. $\int \ln \sqrt[3]{x}\, dx$

10. $\int \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$

11. $\int \operatorname{arctg} 4t\, dt$

12. $\int p^5 \ln p\, dp$

13. $\int t \sec^2 2t\, dt$

14. $\int s\, 2^s\, ds$

15. $\int (\ln x)^2\, dx$

16. $\int t \operatorname{senh} mt\, dt$

17. $\int e^{2\theta} \operatorname{sen} 3\theta\, d\theta$

18. $\int e^{-\theta} \cos 2\theta\, d\theta$

19. $\int z^3 e^z\, dz$

20. $\int x \operatorname{tg}^2 x\, dx$

21. $\int \dfrac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\, dx$

22. $\int (\operatorname{arcsen} x)^2\, dx$

23. $\int_0^{1/2} x \cos \pi x\, dx$

24. $\int_0^1 (x^2 + 1)\, e^{-x}\, dx$

25. $\int_0^1 t \cosh t\, dt$

26. $\int_4^9 \dfrac{\ln y}{\sqrt{y}}\, dy$

27. $\int_1^3 r^3 \ln r\, dr$

28. $\int_0^{2\pi} t^2 \operatorname{sen} 2t\, dt$

29. $\int_0^1 \dfrac{y}{e^{2y}}\, dy$

30. $\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(1/x)\, dr$

31. $\int_0^{1/2} \cos^{-1} x\, dx$

32. $\int_1^2 \dfrac{(\ln x)^2}{x^3}\, dx$

33. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$

34. $\int_0^1 \dfrac{r^3}{\sqrt{4 + r^2}}\, dr$

35. $\int_1^2 x^4 (\ln x)^2\, dx$

36. $\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t - s)\, ds$

É necessário uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

37–42 Primeiro faça uma substituição e então use integração por partes para calcular a integral.

37. $\int \cos \sqrt{x}\, dx$

38. $\int t^3 e^{-t^2}\, dt$

39. $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\, d\theta$

40. $\int_0^{\pi} e^{\cos t} \operatorname{sen} 2t\, dt$

41. $\int x \ln(1 + x)\, dx$

42. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

43–46 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável, usando o gráfico da função e de sua primitiva (tome $C = 0$).

43. $\int xe^{-2x}\, dx$

44. $\int x^{3/2} \ln x\, dx$

45. $\int x^3 \sqrt{1 + x^2}\, dx$

46. $\int x^2 \operatorname{sen} 2x\, dx$

47. (a) Use a fórmula de redução no Exemplo 6 para mostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) Use a parte (a) e a fórmula de redução para calcular $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

48. (a) Demonstre a fórmula de redução

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$$

(b) Use a parte (a) para calcular $\int \cos^2 x\, dx$.
(c) Use as partes (a) e (b) para calcular $\int \cos^4 x\, dx$.

49. (a) Use a fórmula de redução no Exemplo 6 para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

onde $n \geqslant 2$ é um inteiro.
(b) Use a parte (a) para calcular $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\, dx$ e $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\, dx$.
(c) Use a parte (a) para mostrar que, para as potências ímpares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n + 1)}$$

50. Demonstre que, para as potências pares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n} \frac{\pi}{2}$$

51–54 Use integração por partes para demonstrar a fórmula de redução.

51. $\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx$

52. $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$

53. $\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \dfrac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx \quad (n \neq 1)$

54. $\int \sec^n x\, dx = \dfrac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \dfrac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\, dx \quad (n \neq 1)$

55. Use o Exercício 51 para encontrar $\int (\ln x)^3\, dx$.

56. Use o Exercício 52 para encontrar $\int x^4 e^x dx$.

57–58 Encontre a área da região delimitada pelas curvas dadas.

57. $y = x^2 \ln x, \quad y = 4 \ln x$

58. $y = x^2 e^{-x}, \quad y = xe^{-x}$

59–60 Use um gráfico para encontrar as coordenadas aproximadas x dos pontos de intersecção das curvas dadas. A seguir, ache (aproximadamente) a área da região delimitada pelas curvas.

59. $y = \operatorname{arcsen}(\frac{1}{2} x), \quad y = 2 - x^2$

60. $y = x \ln (x + 1), \quad y = 3x - x^2$

61–63 Use o método das cascas cilíndricas para encontrar o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno do eixo especificado.

61. $y = \cos(\pi x/2), \quad y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1;$ em torno do eixo y

62. $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1;$ em torno do eixo y

63. $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 0;$ em torno de $x = 1$

64. Calcule o volume gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas $y = \ln x$, $y = 0$ e $x = 2$ em torno de cada eixo.
(a) o eixo y (b) o eixo x

65. Calcule o valor médio de $f(x) = x \sec^2$ no intervalo $[0, \pi/4]$.

66. Um foguete acelera pela queima do combustível a bordo; assim, sua massa diminui com o tempo. Suponha que a massa inicial do foguete no lançamento (incluindo seu combustível) seja m, o combustível seja consumido a uma taxa r, e os gases de exaustão sejam ejetados a uma velocidade constante v_e (relativa ao foguete). Um modelo para a velocidade do foguete no instante t é dado pela seguinte equação

$$v(t) = -gt - v_e \ln \frac{m - rt}{m},$$

onde g é a aceleração da gravidade e t não é muito grande. Se $g = 9{,}8$ m/s², $m = 30.000$ kg, $r = 160$ kg/s e $v_e = 3.000$ m/s, encontre a altitude do foguete 1 minuto após o lançamento.

67. Uma partícula que se move ao longo de uma reta tem velocidade igual a $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo após t segundos. Qual a distância que essa partícula percorrerá durante os primeiros t segundos?

68. Se $f(0) = g(0) = 0$ e f'' e g'' forem contínuas, mostre que

$$\int_0^a f(x)g''(x)\, dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)\, dx.$$

69. Suponha que $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$ e f'' seja contínua. Encontre o valor de $\int_1^4 x f''(x)\, dx$.

70. (a) Use integração por partes para mostrar que

$$\int f(x)\, dx = x f(x) - \int x f'(x)\, dx$$

(b) Se f e g forem funções inversas e f' for contínua, demonstre que

$$\int_a^b f(x)\, dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\, dy$$

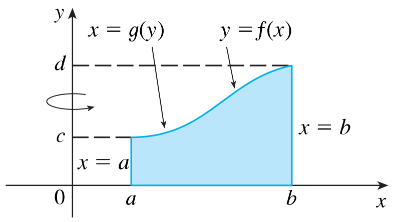
[*Dica*: Use a parte (a) e faça a substituição de $y = f(x)$.]
(c) No caso em que f e g forem funções positivas e $b > a > 0$, desenhe um diagrama para dar uma interpretação geométrica à parte (b).
(d) Use a parte (b) para calcular $\int_1^e \ln x\, dx$.

71. Chegamos à Fórmula 6.3.2, $V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$, utilizando cascas cilíndricas, mas agora podemos usar integração por partes para demonstrá-la usando o método das fatias da Seção 6.2, ao menos para o caso em que f for injetora e, portanto, tiver uma função inversa g. Use a figura para mostrar que

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi [g(y)]^2\,dy$$

Faça a substituição $y = f(x)$ e então use integração por partes na integral resultante para demostrar que

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$



72. Seja $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$.

(a) Mostre que $I_{2n+2} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$.

(b) Use o Exercício 50 para mostrar que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

(c) Use as partes (a) e (b) para mostrar que

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1$$

e deduzir que $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$.

(d) Use a parte (c) e os Exercícios 49 e 50 para mostrar que

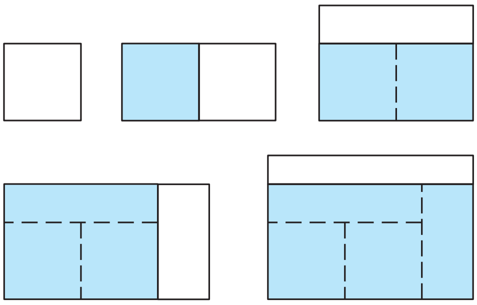
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Essa fórmula geralmente é escrita como um produto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots$$

que é chamado produto de *Wallis*.

(e) Construímos retângulos como a seguir. Comece com um quadrado de área 1 e coloque retângulos de área 1 alternadamente ao lado ou no topo do retângulo anterior (veja a figura). Encontre o limite da relação largura/altura desses retângulos.



7.2 Integrais Trigonométricas

Nesta seção usaremos as identidades trigonométricas para integrar certas combinações de funções trigonométricas. Começaremos com as potências de seno e cosseno.

EXEMPLO 1 Calcule $\int \cos^3 x\,dx$.

SOLUÇÃO A simples substituição de $u = \cos x$ não ajuda, porque assim $du = -\operatorname{sen} x\,dx$. Para integramos potências de cosseno, necessitaríamos de um fator extra $\operatorname{sen} x$. De forma semelhante, uma potência de seno pediria um fator extra $\cos x$. Portanto, aqui podemos separar um fator cosseno e converter o fator $\cos^2 x$ restante em uma expressão envolvendo o seno, usando a identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x$$

Podemos então calcular a integral, substituindo $u = \operatorname{sen} x$, de modo que $du = \cos x\,dx$ e

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x\,dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx\\ &= \int (1 - u^2)\,du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C\\ &= \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C\end{aligned}$$

Em geral, tentamos escrever um integrando envolvendo as potências de seno e cosseno em uma forma onde tenhamos somente um fator seno (e o restante da expressão em termos de cosseno) ou apenas um fator cosseno (e o restante da expressão em termos de seno). A identidade $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ nos permite a interconversão de potências pares de seno e cosseno.

EXEMPLO 2 Encontre $\int \text{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$.

SOLUÇÃO Poderíamos converter $\cos^2 x$ para $1 - \text{sen}^2 x$, mas obteríamos uma expressão em termos de sen x sem nenhum fator extra cos x. Em vez disso, separamos um único fator de seno e reescrevemos o fator $\text{sen}^4 x$ restante em termos de cos x:

$$\text{sen}^5 x \cos^2 x = (\text{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \,\text{sen}\, x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \,\text{sen}\, x$$

A Figura 1 mostra os gráficos do integrando $\text{sen}^5 x \cos^2 x$ no Exemplo 2 e sua integral indefinida (com $C = 0$). Qual é qual?

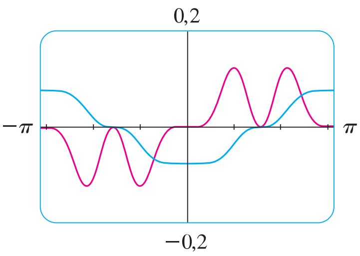


FIGURA 1

Substituindo $u = \cos x$, temos $du = -\text{sen}\, x \, dx$ e, assim,

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}^5 x \cos^2 x \, dx &= \int (\text{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \,\text{sen}\, x \, dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \,\text{sen}\, x \, dx \\
&= \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du \\
&= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C \\
&= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C
\end{aligned}$$

Nos exemplos anteriores, uma potência ímpar de seno ou cosseno nos permitiu separar um único fator e converter a potência par remanescente. Se um integrando contém potências pares tanto para seno como para cosseno, essa estratégia falha. Nesse caso, podemos aproveitar as identidades dos ângulos-metade (veja as Equações 17b e 17a no Apêndice D):

$$\text{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \text{e} \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

O Exemplo 3 mostra que a área da região exposta na Figura 2 é $\pi/2$.

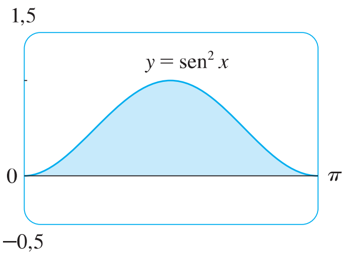


FIGURA 2

EXEMPLO 3 Calcule $\int_0^\pi \text{sen}^2 x \, dx$.

SOLUÇÃO Se escrevermos $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, a integral não é mais simples de calcular. Usando a fórmula do ângulo-metade para $\text{sen}^2 x$, contudo, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \text{sen}^2 x \, dx &= \tfrac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x) \, dx \\
&= \left[\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{2}\text{sen}\, 2x\right)\right]_0^\pi \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{1}{2}\text{sen}\, 2\pi\right) - \tfrac{1}{2}\left(0 - \tfrac{1}{2}\text{sen}\, 0\right) = \tfrac{1}{2}\pi
\end{aligned}$$

Observe que mentalmente fizemos a substituição $u = 2x$ quando integramos cos $2x$. Outro método para se calcular essa integral foi dado no Exercício 47 na Seção 7.1.

EXEMPLO 4 Encontre $\int \text{sen}^4 x \, dx$.

SOLUÇÃO Nós poderíamos calcular essa integral usando a fórmula de redução para $\int \text{sen}^n x \, dx$ (Equação 7.1.7) junto com o Exemplo 3 (como no Exercício 47 na Seção 7.1), entretanto, outro método é escrever $\text{sen}^4 x = (\text{sen}^2 x)^2$ e usar uma fórmula do ângulo-metade:

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}^4 x \, dx &= \int (\text{sen}^2 x)^2 \, dx \\
&= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \tfrac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx
\end{aligned}$$

Como $\cos^2 2x$ ocorre, precisamos usar outra fórmula do ângulo-metade

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$