A próxima propriedade de integrais diz que, se integrarmos a função constante $f(x, y) = 1$ sobre uma região D, obteremos a área de D:

10 $$\iint_D 1\, dA = A(D)$$

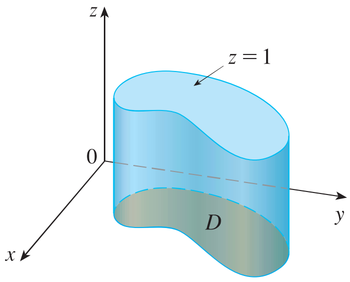


FIGURA 19
Cilindro com base D e altura 1

A Figura 19 ilustra por que a Equação 10 é verdadeira: um cilindro sólido, cuja base é D e a altura é 1, tem volume $A(D) \cdot 1 = A(D)$, mas sabemos que também podemos escrever seu volume como $\iint_D 1\, dA$.

Finalmente, podemos combinar as Propriedades 7, 8 e 10 para demonstrar a seguinte propriedade. (Veja o Exercício 61.)

11 Se $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ para todo (x, y) em D, então

$$mA(D) \leqslant \iint_D f(x, y)\, dA \leqslant MA(D)$$

EXEMPLO 6 Utilize a Propriedade 11 para estimar a integral $\iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 2.

SOLUÇÃO Como $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant \cos y \leqslant 1$, temos $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \cos y \leqslant 1$ e, portanto,

$$e^{-1} \leqslant e^{\operatorname{sen} x \cos y} \leqslant e^1 = e$$

Assim, usando $m = e^{-1} = 1/e$, $M = e$ e $A(D) = \pi(2)^2$ na Propriedade 11, obtemos

$$\frac{4\pi}{e} \leqslant \iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA \leqslant 4\pi e$$

15.3 Exercícios

1–6 Calcule a integral iterada.

1. $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xy^2\, dx\, dy$
2. $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^2 (x - y)\, dy\, dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1 + 2y)\, dy\, dx$
4. $\displaystyle\int_0^2 \int_y^{2y} xy\, dx\, dy$
5. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{s^2} \cos(s^3)\, dt\, ds$
6. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{v} \sqrt{1 - v^2}\, du\, dv$

7–10 Calcule a integral dupla.

7. $\displaystyle\iint_D y^2\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1, -y - 2 \leqslant x \leqslant y\}$
8. $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^5 + 1}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$
9. $\displaystyle\iint_D x\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{sen} x\}$
10. $\displaystyle\iint_D x^3\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant e,\ 0 \leqslant y \leqslant \ln x\}$

11. Desenhe um exemplo de uma região que seja
    (a) do tipo I, mas não do tipo II
    (b) do tipo II, mas não do tipo I
12. Desenhe um exemplo de uma região que seja
    (a) tanto do tipo I quanto do tipo II
    (b) nem do tipo I nem do tipo II

13–14 Expresse D como a região do tipo I e também como uma região do tipo II. Em seguida, calcule a integral dupla de duas maneiras.

13. $\displaystyle\iint_D x\, dA$, D é limitada pelas retas $y = x$, $y = 0$, $x = 1$
14. $\displaystyle\iint_D xy\, dA$, D é limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 3x$

15–16 Defina as integrais iteradas para ambas as ordens de integração. Então, calcule a integral dupla usando a ordem mais fácil e explique por que ela é mais fácil.

15. $\displaystyle\iint_D y\, dA$, D é limitada por $y = x - 2$, $x = y^2$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador
SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

16. $\displaystyle\iint_D y^2 e^{xy}\, dA$, D é limitada por $y = x$, $y = 4$, $x = 0$

17–22 Calcule a integral dupla.

17. $\displaystyle\iint_D x \cos y\, dA$, D é limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$

18. $\displaystyle\iint_D (x^2 + 2y)\, dA$, D é limitada por $y = x$, $y = x^3$, $x \geqslant 0$

19. $\displaystyle\iint_D y^2\, dA$, D é a região triangular com vértices (0, 1), (1, 2), (4, 1)

20. $\displaystyle\iint_D xy^2\, dA$, D é limitada por $x = 0$ e $x = \sqrt{1 - y^2}$

21. $\displaystyle\iint_D (2x - y)\, dA$, D é limitada pelo círculo de centro na origem e raio 2

22. $\displaystyle\iint_D 2xy\, dA$, D é a região triangular com vértices (0, 0), (1, 2) e (0, 3)

23–32 Determine o volume do sólido dado.

23. Abaixo do plano $x - 2y + z = 1$ e acima da região limitada por $x + y = 1$ e $x^2 + y = 1$

24. Abaixo da superfície $z = 2x + y^2$ e acima da região limitada por $x = y^2$ e $x = y^3$

25. Abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo e vértices (1, 1), (4, 1) e (1, 2)

26. Limitado pelo paraboloide $z = x^2 + 3y^2$ e pelos planos $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, $z = 0$

27. Limitado pelos planos coordenados e pelo plano $3x + 2y + z = 6$

28. Limitado pelos planos $z = x$, $y = x$, $x + y = 2$ e $z = 0$

29. Limitado pelos cilindros $z = x^2$, $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 4$

30. Limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$ no primeiro octante

31. Limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ no primeiro octante

32. Limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$

33. Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para estimar a coordenada x dos pontos de intersecção da curva $y = x^4$ e $y = 3x - x^2$. Se D é a região limitada por essas curvas, estime $\iint_D x\, dA$.

34. Encontre o volume aproximado do sólido no primeiro octante limitado pelos planos $y = x$, $z = 0$ e $z = x$ e pelo cilindro $y = \cos x$. (Utilize uma ferramenta gráfica para estimar os pontos de intersecção.)

35–36 Determine o volume do sólido por subtração de dois volumes.

35. O sólido limitado pelos cilindros parabólicos $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$ e pelos planos $x + y + z = 2$, $2x + 2y - z + 10 = 0$

36. O sólido limitado pelo paraboloide cilíndrico $y = x^2$ e pelos planos $z = 3y$, $z = 2 + y$

37–38 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

37. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx$

38. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - x)\, dy\, dx$

39–42 Use um sistema de computação algébrica para determinar o volume exato do sólido.

SCA **39.** Abaixo da superfície $z = x^2y^4 + xy^2$ e acima da região limitada pelas curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 + x$ para $x \geqslant 0$

40. Entre os paraboloides $z = 2x^2 + y^2$ e $z = 8 - x^2 - 2y^2$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

41. Limitado por $z = 1 - x^2 - y^2$ e $z = 0$

42. Limitado por $z = x^2 + y^2$ e $z = 2y$

43–48 Esboce a região de integração e mude a ordem de integração.

43. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y f(x, y)\, dy\, dx$

44. $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^4 f(x, y)\, dy\, dx$

45. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} f(x, y)\, dy\, dx$

46. $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-2}} f(x, y)\, dx\, dy$

47. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y)\, dy\, dx$

48. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\operatorname{arctg} x}^{\pi/4} f(x, y)\, dy\, dx$

49–54 Calcule a integral trocando a ordem de integração.

49. $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$

50. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\, dx\, dy$

51. $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1}\, dy\, dx$

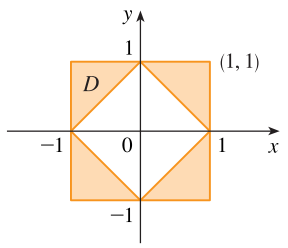
52. $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y}\, dy\, dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx\, dy$

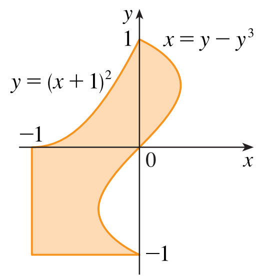
54. $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\, dx\, dy$

55–56 Expresse D como a união de regiões do tipo I ou do tipo II e calcule a integral.

55. $\displaystyle\iint_D x^2\, dA$



52. $\displaystyle\iint_D y\, dA$



57–58 Use a Propriedade 8 para estimar o valor da integral.

57. $\displaystyle\iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2}\, dA$, Q é o quarto de círculo com centro na origem e raio $\frac{1}{2}$ no primeiro quadrante

58. $\displaystyle\iint_T \operatorname{sen}^4(x + y)\, dA$, T é o triângulo limitado pelas retas $y = 0$, $y = 2x$ e $x = 1$

59–60 Encontre o valor médio de f na região D

59. $f(x, y) = xy$, D é o triângulo com vértices, (0, 0), (1, 0) e (1, 3)

60. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$, D é limitada pelas curvas $y = 0$, $y = x^2$ e $x = 1$

61. Demonstre a Propriedade 11.

62. No cálculo de uma integral dupla sobre uma região D, obtivemos uma soma de integrais iteradas como a que segue:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y)\, dx\, dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y)\, dx\, dy$$

Esboce a região D e expresse a integral dupla como uma integral iterada com ordem de integração contrária.