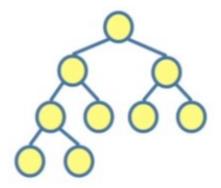
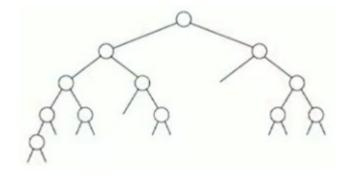
Pesquisa e Ordenação de Dados

Unidade 2.6:



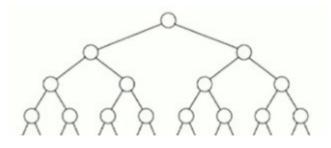
Conceitos

- Árvore binária
 - cada nó pode conter nenhum, 1 ou 2 filhos



Conceitos

- Árvore binária cheia
 - Estritamente binária (todo nó possui 0 ou 2 filhos)
 - Todos os nós folha se encontram no último nível
 - O número total de nós em uma árvore binária cheia de altura h é dado por:
 - $t_n = 2^h 1$
 - A altura da árvore é dada por:
 - $h = log_2(t_n + 1)$

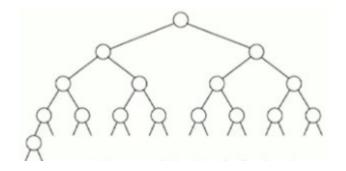


$$t_n = 2^4 - 1 = 15$$

 $h = log_2(15 + 1) = 4$

Conceitos

- Árvore binária completa
 - é uma árvore binária cheia até o penúltimo nível.
 - o último nível pode estar incompleto, mas todos os nós devem estar mais à esquerda possível.
 - a altura é próxima de O(log n).



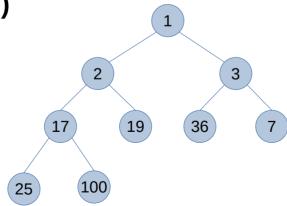
Heap binário

Heap binário

- é uma representação em vetor de uma árvore binária completa onde os elementos (chaves) são dispostos segundo uma relação de ordem parcial
 - Ordem parcial: somente há relação de ordem entre os nós pai e seus filhos; não há relação de ordem entre nós irmãos;
 - As operações de inserção/remoção devem manter a ordem parcial.
- Assim como a árvore binária completa:
 - A árvore está completamente preenchida em todos os níveis, exceto talvez o mais baixo;
 - O nível mais baixo é preenchido a partir da esquerda.

Heap binário

- Heap mínimo: a chave de menor valor se encontra na raiz.
 - Min heap property: para todo nó (exceto a raiz), a chave do pai é menor ou igual à chave dos filhos



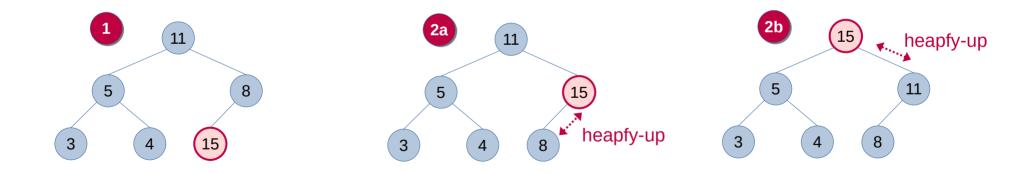
Heap binário

- Heap máximo: a chave de maior valor se encontra na raiz.
 - Max heap property: para todo nó (exceto a raiz), a chave do pai é maior ou igual à chave dos filhos

Inserção:

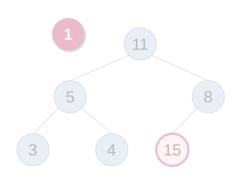
- 1) criar um novo nó folha no último nível, na posição mais à esquerda possível.
- 2) verificar se a nova estrutura satisfaz à relação de ordem parcial do heap (min ou max heap property).
 - 2.a) o novo elemento deve ser comparado com seu pai; se a relação de ordem foi prejudicada, executa-se o processo de subida (*heapfy up* ou *swim flutuar*).
 - 2.b) O processo é repetido até chegar à raiz.
- A complexidade da inserção é O(log n), pois no pior caso, serão feitas tantas trocas quanto a altura da árvore.

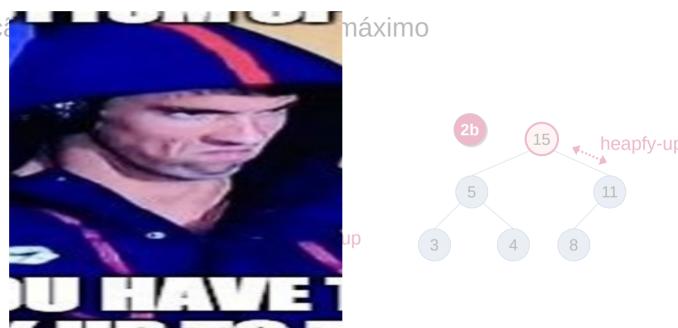
- Inserção
 - Exemplo: inserção do valor 15 em um heap máximo



Inserção

Exemplo: inserçã

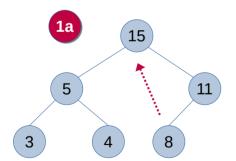


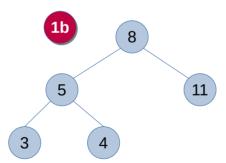


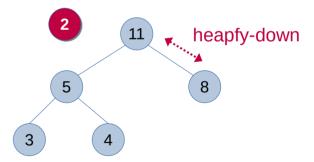
Remoção

- extração a maior (ou menor) chave de um conjunto.
- 1) Substituir o nó raiz (que foi removido) pelo nó que está no último nível, o mais à direita possível.
- 2) Se a ordem parcial do heap foi prejudicada, realizar o processo de heapfy down (ou sink afundar), "descendo" o elemento que está na raiz e trocando-o sucessivamente com seu filho de maior valor (caso do heap máximo), de modo que a relação de ordem seja reestabelecida.
- A complexidade da remoção é O(log n), pois no pior caso, serão feitas tantas trocas quanto a altura da árvore.

- Remoção
 - Exemplo: retirada do nó 15







Busca

- em geral busca-se o elemento raiz
- portanto, o procedimento de busca deve apenas retornar o valor da raiz
- complexidade constante → O(1)

Representação em vetor

 Um heap é representado por meio de um vetor compacto, isto é, onde não há posições vazias.

```
Raiz = 0
Pai(i) = (i-1)/2
Filho_esq(i) = 2i+1
Filho_dir(i) = 2i+2
```

Representação em vetor

- Da mesma forma, dado um vetor, é possível rearranjar seus elementos para que ele se torne um heap
- Heap máximo:
 - enquanto o valor de um filho for maior que o de seu pai: troque os valores de pai e filho e "suba" um passo em direção à raiz.
- Mais precisamente:
 - para todo nó i, enquanto A[pai(i)] < A[i]:
 - troca(A[pai(i)], A[i])
 - i = pai(i)

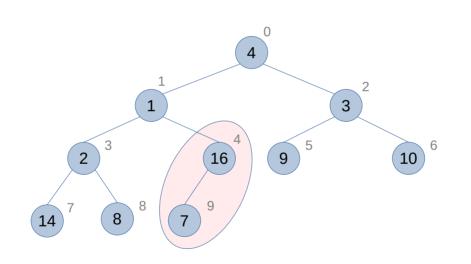
(2) ③ (8) $^{\circ}$ (2)1 9 10 11 12 7 8 9 10 11 12 8 9 10 11 12 8 9 10 11 12 10 11 12 (3) **(**6) 8 9 10 11 12 8 9 10 11 12

2

- É um algoritmo de ordenação desenvolvido em 1964 por Robert Floyd e John Williams
- Trata-se de um método de seleção dos elementos na ordem desejada em uma árvore binária heap
- Consiste em 2 fases:
 - 1: construir um heap máximo através da reorganização dos elementos presentes no vetor inicial;
 - 2: repetidamente remover o maior elemento e posicioná-lo ao final da parte não ordenada do vetor, garantindo que a propriedade *max heap* continue válida para o restante dos elementos não ordenados.

- Fase 1: construção do heap máximo
 - Dado um array, realizar as trocas necessárias para atender à propriedade max heap
 - para toda subárvore, A[pai(i)] >= A[i]
 - Os testes das chaves se iniciam pela última subárvore (nível mais inferior e mais à direita possível), prosseguindo, a partir daí, para as subárvores que a antecedem, até chegar à raiz da árvore.
 - Quando encontramos uma subárvore que viola a condição de max heap, selecionamos seu maior filho e trocamos sua posição com a raiz da subárvore, repetindo o processo para todas as suas subárvores.
 - Os nós folha não precisam ser testados, pois, tomados sozinhos, já são max heap; o último nó que possui filhos estará na posição n/2-1.

Heap Sort Como funciona – Construção do Max Heap (1)



Posições 5, 6, 7, 8 e 9 são folhas, então atendem à propriedade *max-heap*: não são menores do que seus filhos (inexistentes).

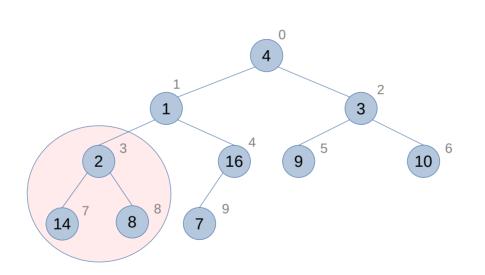
A verificação começará pela subárvore de raiz 4 (10/2-1).

Não é necessário fazer nada, pois o valor do pai (16) é maior do que o de seu único filho (7).

Vetor	inicial	(ordem
aleato	ória)	

4	1	3	2	16	9	10	14	8	7
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Heap Sort Como funciona – Construção do Max Heap (2)

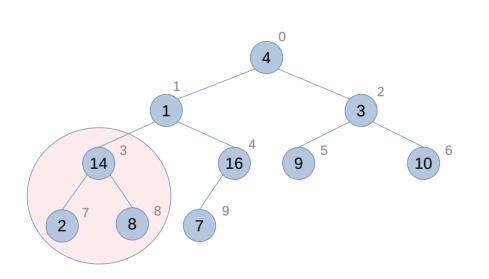


A verificação agora é da subárvore de raiz 3.

O valor da raiz será "afundado": trocará de posição com a de seu maior filho (14).



Heap Sort Como funciona – Construção do Max Heap (3)



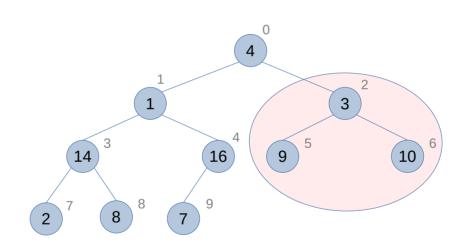
A verificação agora é da subárvore de raiz 3.

O valor da raiz será "afundado": trocará de posição com a de seu maior filho (14).

A subárvore de raiz 3 agora obedece à propriedade max-heap.



Heap Sort Como funciona – Construção do Max Heap (4)

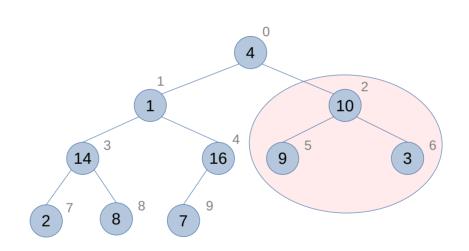


A verificação agora é da subárvore de raiz 2.

O valor da raiz será "afundado": trocará de posição com a de seu maior filho (10).



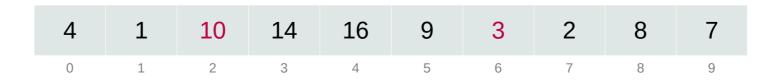
Heap Sort Como funciona – Construção do Max Heap (5)



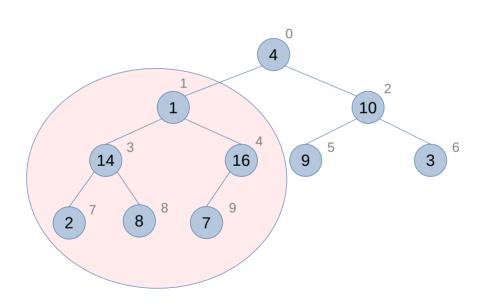
A verificação agora é da subárvore de raiz 2.

O valor da raiz será "afundado": trocará de posição com a de seu maior filho (10).

A subárvore de raiz 2 agora obedece à propriedade max-heap.

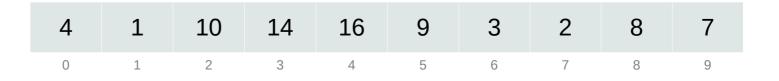


Heap Sort Como funciona – Construção do Max Heap (6)

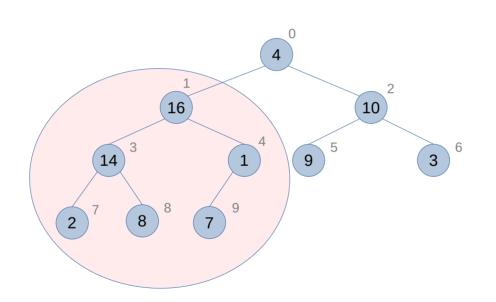


A verificação agora é da subárvore de raiz 1.

O valor da raiz será "afundado": trocará de posição com a de seu maior filho (16).



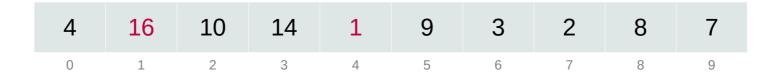
Heap Sort Como funciona – Construção do Max Heap (7)



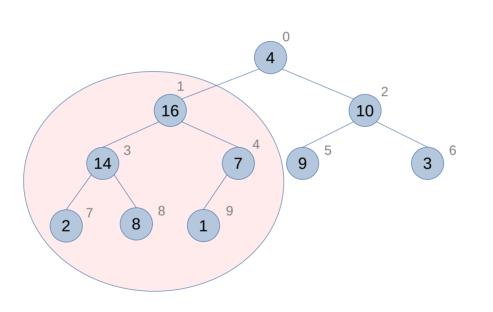
A verificação agora é da subárvore de raiz 1.

O valor da raiz será "afundado": trocará de posição com a de seu maior filho (16).

Com isso, a subárvore de raiz 4 fere a propriedade max heap. O valor 1 trocará então de posição com a de seu maior filho (7).



Heap Sort Como funciona – Construção do Max Heap (8)



A verificação agora é da subárvore de raiz 1.

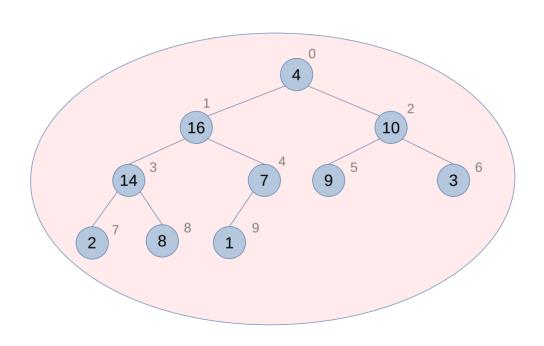
O valor da raiz será "afundado": trocará de posição com a de seu maior filho (16).

Com isso, a subárvore de raiz 4 fere a propriedade max heap. O valor 1 trocará então de posição com a de seu maior filho (7).

A subárvore de raiz 1 agora obedece à propriedade maxheap.

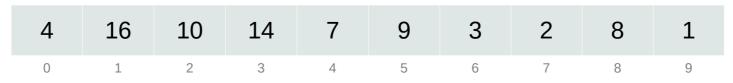
4	16	10	14	7	9	3	2	8	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Heap Sort Como funciona – Construção do Max Heap (9)

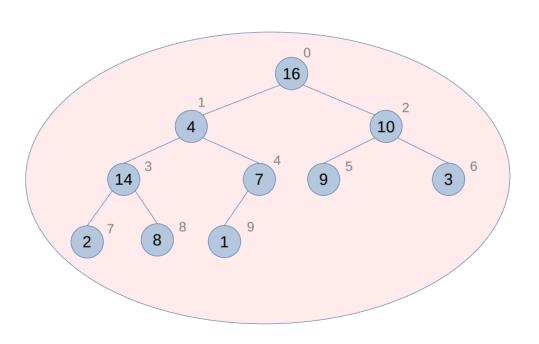


A verificação agora é da árvore de raiz 0.

O valor da raiz será "afundado": trocará de posição com a de seu maior filho (16).



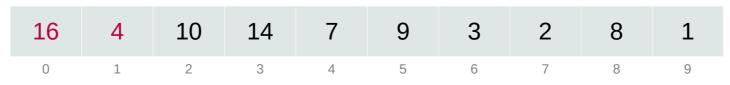
Heap Sort Como funciona – Construção do Max Heap (10)



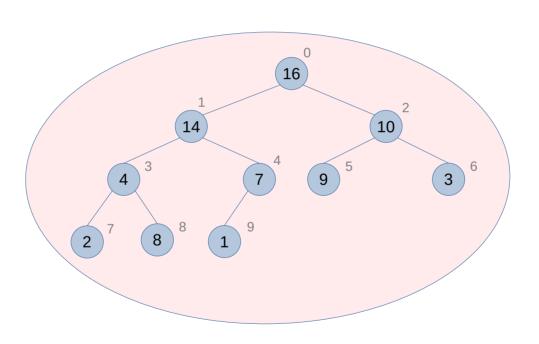
A verificação agora é da árvore de raiz 0.

O valor da raiz será "afundado": trocará de posição com a de seu maior filho (16).

O valor 4 trocará então de posição com a de seu maior filho (14).



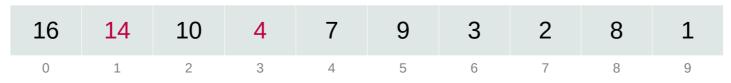
Heap Sort Como funciona – Construção do Max Heap (11)



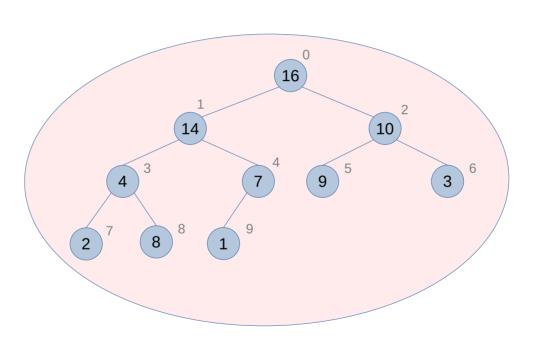
A verificação agora é da árvore de raiz 0.

O valor da raiz será "afundado": trocará de posição com a de seu maior filho (16).

O valor 4 trocará então de posição com a de seu maior filho (14).



Heap Sort Como funciona – Construção do Max Heap (12)



A verificação agora é da árvore de raiz 0.

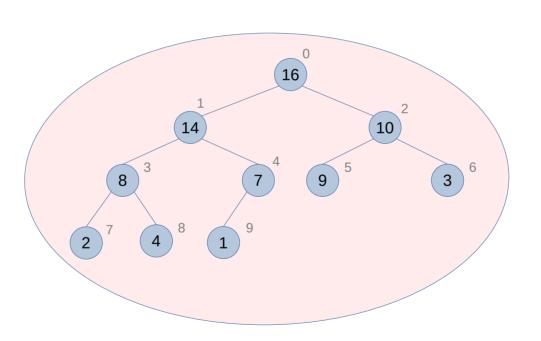
O valor da raiz será "afundado": trocará de posição com a de seu maior filho (16).

O valor 4 trocará então de posição com a de seu maior filho (14).

O valor 4 agora troca com 8.



Heap Sort Como funciona – Construção do Max Heap (13)



A verificação agora é da árvore de raiz 0.

O valor da raiz será "afundado": trocará de posição com a de seu maior filho (16).

O valor 4 trocará então de posição com a de seu maior filho (14).

O valor 4 agora troca com 8.

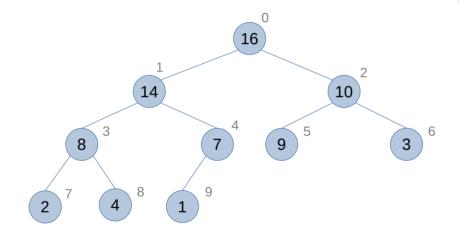
Agora toda a árvore obedece à propriedade max heap.

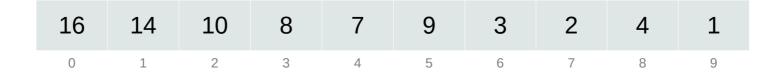


- Fase 2: seleção dos elementos na ordem
 - A partir do heap construído anteriormente, vamos selecionar os elementos na ordem desejada.
 - Se a chave que está na raiz (A[0]) é a maior de todas, então sua posição definitiva correta, na ordem crescente, é na última posição do vetor.
 - Deste modo, trocamos A[0] com o elemento que está na última posição do vetor (A[n-1]).
 - A seguir, reconstruímos o heap para os elementos A[0], ..., A[n-2].
 - O último elemento, que acabou de ser ordenado, ficará de fora.
 - Ou seja, o vetor ficará dividido em um setor ordenado (lado direito) e um setor não ordenado (lado esquerdo).
 - Estes 2 passos (troca do elemento raiz com o último do setor não ordenado e reconstrução do heap para os elementos restantes) são então repetidos para os n-2, n-3, ... elementos, até que reste apenas 1 elemento. A cada passada, o setor ordenado do array aumenta, restando menos elementos não ordenados, até que reste apenas um elemento.

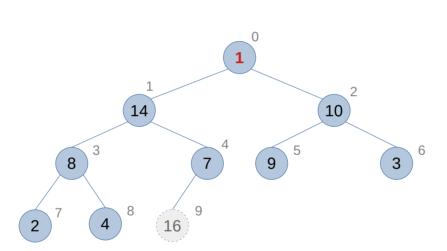
Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (1)

O maior elemento (16) trocará de posição com o último (1)





Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (2)



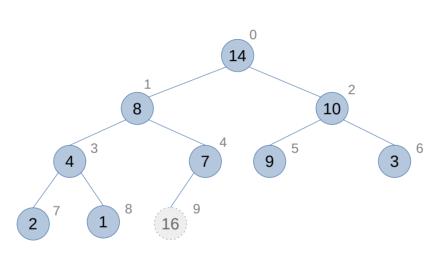
O maior elemento (16) trocará de posição com o último (1)

O valor 16 agora integra o setor ordenado e não será mais movimentado.

A árvore resultante não é mais um max heap e, portanto, deverá ser reorganizada (desconsiderando a posição 9).



Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (3)



O maior elemento (16) trocará de posição com o último (1)

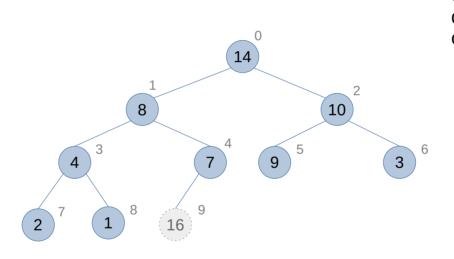
O valor 16 agora integra o setor ordenado e não será mais movimentado.

A árvore resultante não é mais um max heap e, portanto, deverá ser reorganizada (desconsiderando a posição 9).

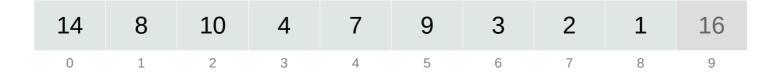
A árvore agora voltou a ser um max heap.



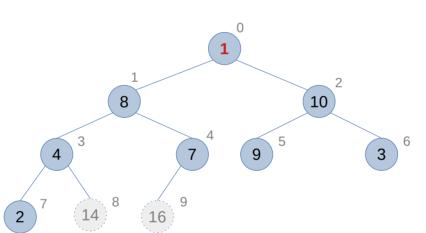
Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (4)



O maior elemento (14) trocará de posição com o último não ordenado (1)



Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (5)



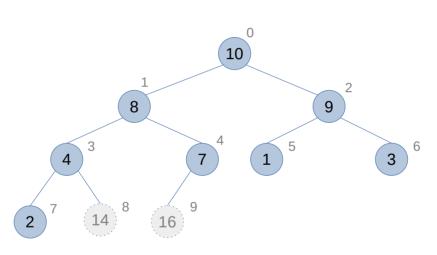
O maior elemento (14) trocará de posição com o último não ordenado (1).

O valor 14 agora integra o setor ordenado e não será mais movimentado.

A árvore resultante não é mais um max heap e, portanto, deverá ser reorganizada (desconsiderando as posições 8 e 9).

1	8	10	4	7	9	3	2	14	16
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

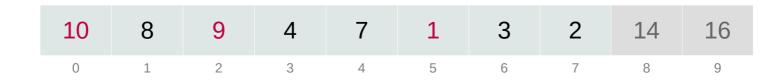
Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (6)



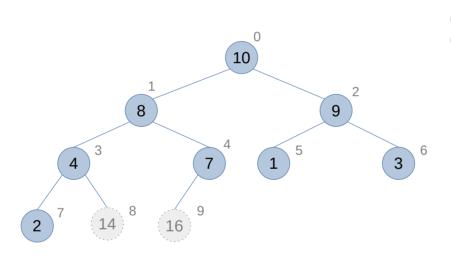
O maior elemento (14) trocará de posição com o último não ordenado (1).

O valor 14 agora integra o setor ordenado e não será mais movimentado.

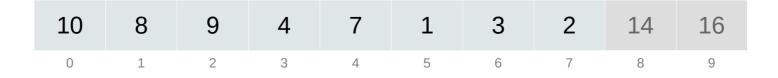
A árvore resultante não é mais um max heap e, portanto, deverá ser reorganizada (desconsiderando as posições 8 e 9).



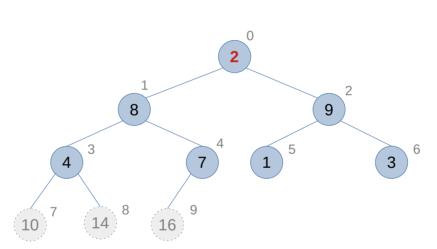
Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (7)



O maior elemento (10) trocará de posição com o último não ordenado (2).



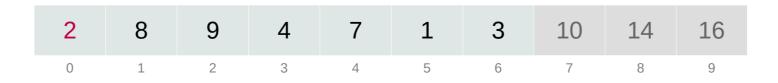
Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (8)



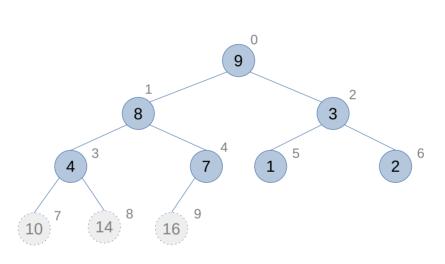
O maior elemento (10) trocará de posição com o último não ordenado (2).

O valor 10 agora integra o setor ordenado e não será mais movimentado.

A árvore resultante não é mais um max heap e, portanto, deverá ser reorganizada (desconsiderando as posições 7 a 9).



Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (9)



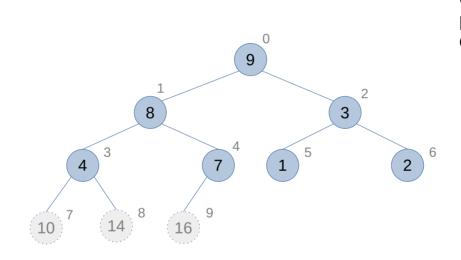
O maior elemento (10) trocará de posição com o último não ordenado (2).

O valor 10 agora integra o setor ordenado e não será mais movimentado.

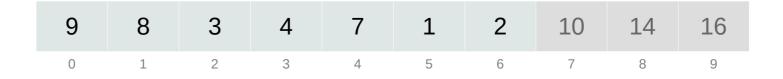
A árvore resultante não é mais um max heap e, portanto, deverá ser reorganizada (desconsiderando as posições 7 a 9).



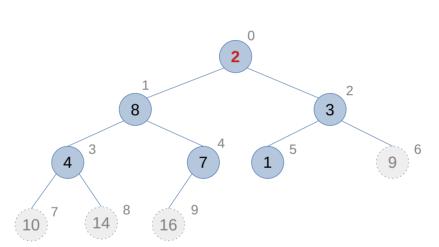
Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (10)



O maior elemento (9) trocará de posição com o último não ordenado (2).



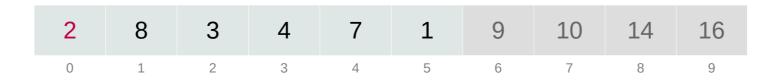
Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (11)



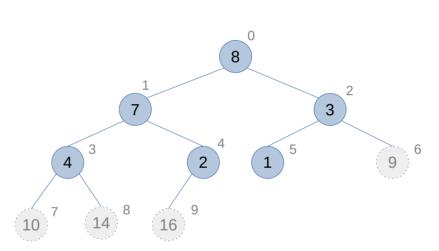
O maior elemento (9) trocará de posição com o último não ordenado (2).

O valor 9 agora integra o setor ordenado e não será mais movimentado.

A árvore resultante não é mais um max heap e, portanto, deverá ser reorganizada (desconsiderando as posições 6 a 9).



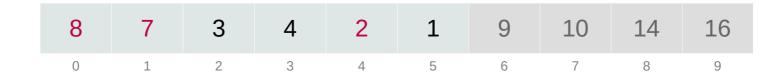
Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (12)



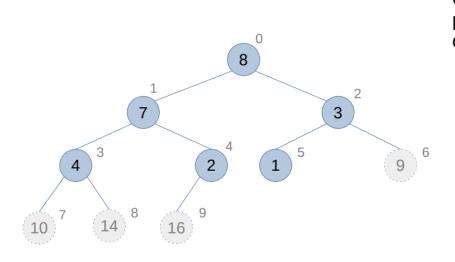
O maior elemento (9) trocará de posição com o último não ordenado (2).

O valor 9 agora integra o setor ordenado e não será mais movimentado.

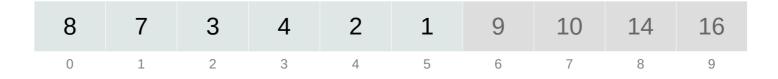
A árvore resultante não é mais um max heap e, portanto, deverá ser reorganizada (desconsiderando as posições 6 a 9).



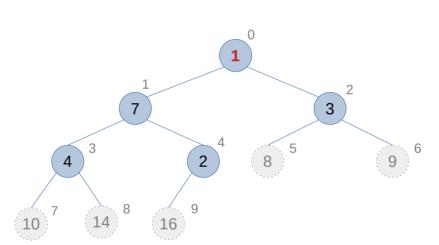
Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (13)



O maior elemento (8) trocará de posição com o último não ordenado (1).



Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (14)



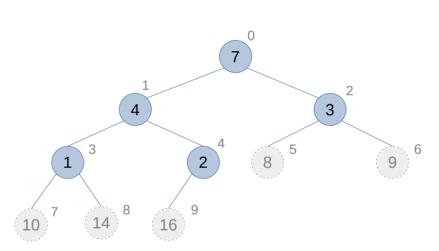
O maior elemento (8) trocará de posição com o último não ordenado (1).

O valor 8 agora integra o setor ordenado e não será mais movimentado.

A árvore resultante não é mais um max heap e, portanto, deverá ser reorganizada (desconsiderando as posições 5 a 9).

1	7	3	4	2	8	9	10	14	16
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

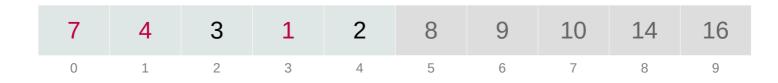
Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (15)



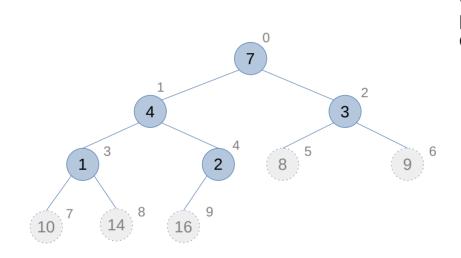
O maior elemento (8) trocará de posição com o último não ordenado (1).

O valor 8 agora integra o setor ordenado e não será mais movimentado.

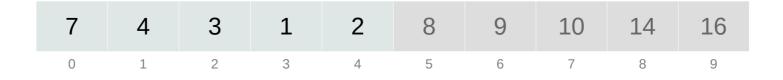
A árvore resultante não é mais um max heap e, portanto, deverá ser reorganizada (desconsiderando as posições 5 a 9).



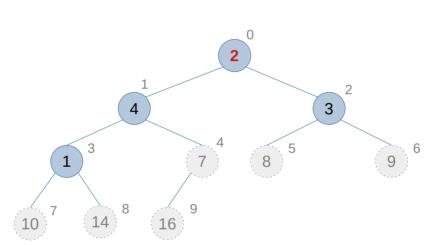
Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (16)



O maior elemento (7) trocará de posição com o último não ordenado (2).



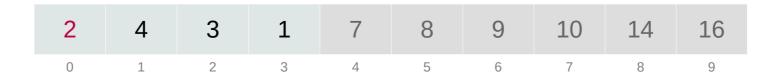
Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (17)



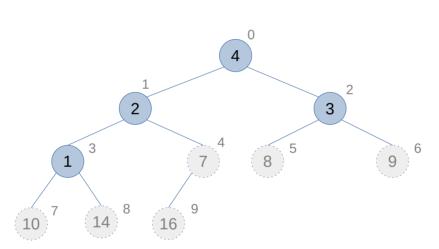
O maior elemento (7) trocará de posição com o último não ordenado (2).

O valor 7 agora integra o setor ordenado e não será mais movimentado.

A árvore resultante não é mais um max heap e, portanto, deverá ser reorganizada (desconsiderando as posições 4 a 9).



Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (18)



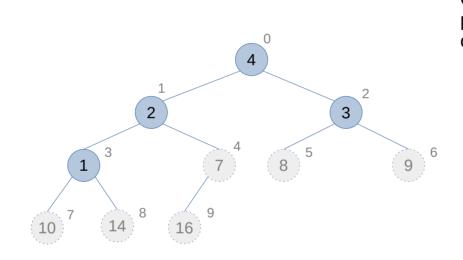
O maior elemento (7) trocará de posição com o último não ordenado (2).

O valor 7 agora integra o setor ordenado e não será mais movimentado.

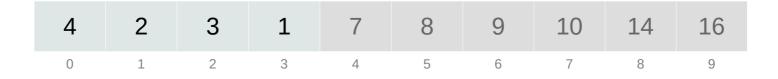
A árvore resultante não é mais um max heap e, portanto, deverá ser reorganizada (desconsiderando as posições 4 a 9).



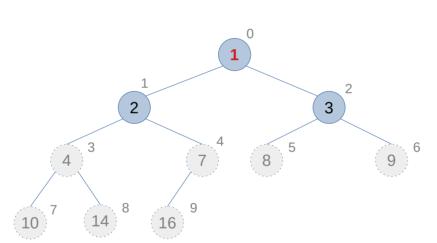
Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (19)



O maior elemento (4) trocará de posição com o último não ordenado (1).



Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (20)



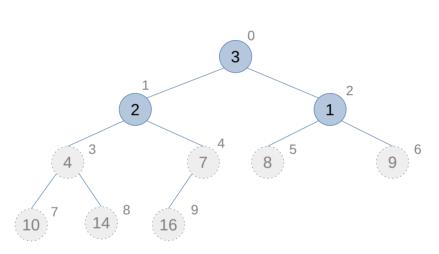
O maior elemento (4) trocará de posição com o último não ordenado (1).

O valor 4 agora integra o setor ordenado e não será mais movimentado.

A árvore resultante não é mais um max heap e, portanto, deverá ser reorganizada (desconsiderando as posições 3 a 9).

1	2	3	4	7	8	9	10	14	16
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (21)



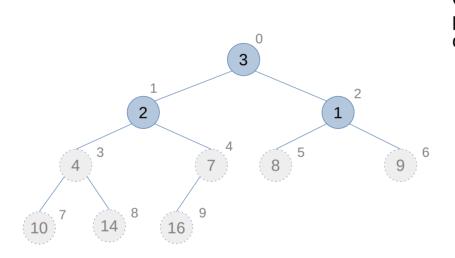
O maior elemento (4) trocará de posição com o último não ordenado (1).

O valor 4 agora integra o setor ordenado e não será mais movimentado.

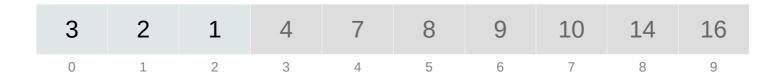
A árvore resultante não é mais um max heap e, portanto, deverá ser reorganizada (desconsiderando as posições 3 a 9).



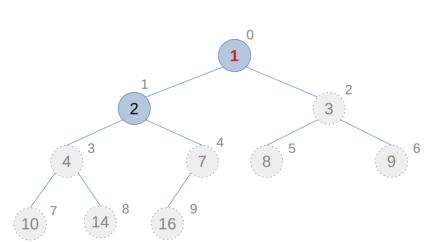
Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (22)



O maior elemento (3) trocará de posição com o último não ordenado (1).



Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (23)



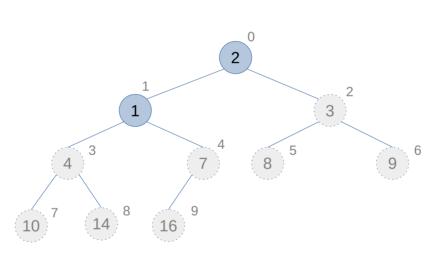
O maior elemento (3) trocará de posição com o último não ordenado (1).

O valor 3 agora integra o setor ordenado e não será mais movimentado.

A árvore resultante não é mais um max heap e, portanto, deverá ser reorganizada (desconsiderando as posições 2 a 9).

1	2	3	4	7	8	9	10	14	16
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (24)



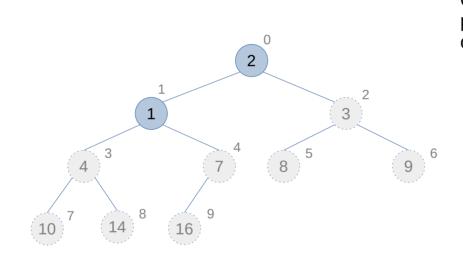
O maior elemento (3) trocará de posição com o último não ordenado (1).

O valor 3 agora integra o setor ordenado e não será mais movimentado.

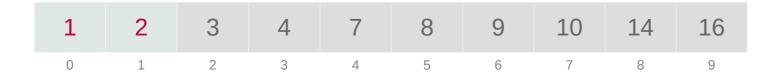
A árvore resultante não é mais um max heap e, portanto, deverá ser reorganizada (desconsiderando as posições 2 a 9).



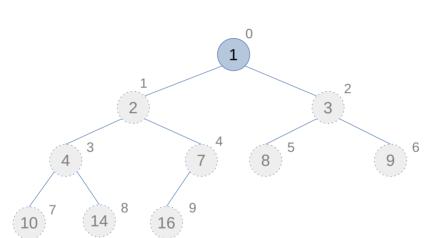
Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (25)



O maior elemento (2) trocará de posição com o último não ordenado (1).



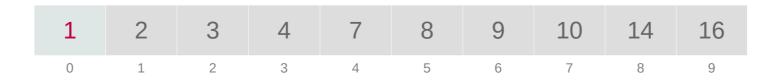
Heap Sort Como funciona – Seleção de elementos na ordem (26)



O maior elemento (2) trocará de posição com o último não ordenado (1).

O valor 2 agora integra o setor ordenado e não será mais movimentado.

Restou apenas 1 elemento, portanto, a ordenação está concluída.



Heap Sort Implementação

O algoritmo será implementado em duas partes:

heapSort

- Função principal que será chamada pelos demais programas
- Responsável por criar a estrutura heap a partir dos dados presentes no vetor (fase 1), bem como pela remoção do maior elemento (e seu posicionamento ao final do setor não ordenado) e por chamar a reconstrução do heap (fase 2)
- Recebe como parâmetro o vetor e seu tamanho

criaHeap

- Função auxiliar responsável por verificar e garantir a propriedade max heap para uma subárvore
- Recebe como parâmetro o vetor, a posição da raiz da subárvore que está sendo tratada e a posição final do segmento

Heap Sort Implementação

```
função heapSort(A[], n)
                                             Para todas as subárvores com filhos, da última para a primeira
inicio
  para k de n/2-1 ate 0 faca /* fase 1: constrói o heap máximo */
     criaHeap(A, k, n) -
                                                Organiza o heap daquela subárvore
  fimPara
  para k de n-1 ate 1 faca /* fase 2: extrai o maior, posiciona-o e reconstrói o heap máximo */
     troca(A[0], A[k])
                                                   Reorganiza o heap deixando os já ordenados de fora
     criaHeap(A, 0, k)
  fimPara
fim
```

Heap Sort Implementação

```
função criaHeap(A[], i, n)
inicio
  maior ← i
  left \leftarrow 2 * i + 1 /* filho da esquerda de i */
                                                          Filho da esquerda existe e é maior do
  right ← 2 * i + 2 /* filho da direita de i */
                                                                           que o pai
  se left < n E A[left] > A[i] então
    maior ← left
  fimSe
                                                                 Filho da direita existe e é maior do que
  se right < n E A[right] > A[maior] então
                                                                     o pai ou que o filho da esquerda
    maior ← right
  fimSe
                                            Raiz não é o maior valor; troca
                                                    com o maior filho
  se major != i então
    troca(A[i], A[maior])
    criaHeap(A, maior, n)
                                            Aplica recursivamente para as
  fimSe
                                                        subárvores
fim
```

Heap Sort Análise

- A complexidade do Heap Sort, em qualquer caso, é sempre O(n log n).
 - Fase de construção do heap: número linear de comparações e trocas
 - Fase de ordenação: N operações de heapfy down, sendo que a altura é de no máximo log N
- O(n log n) no pior caso → vantagem sobre o Quick Sort
- In place → vantagem sobre o Merge Sort
- Não estável