A Figura 5 mostra os gráficos do integrando no Exemplo 7 e de sua integral indefinida (com $C = 0$). Qual é qual?

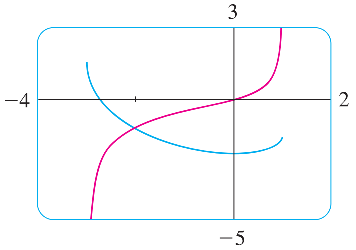


FIGURA 5

Isso sugere que façamos a substituição $u = x + 1$. Então $du = dx$ e $x = u - 1$, de modo que

$$\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx = \int \frac{u - 1}{\sqrt{4 - u^2}}\, du$$

Agora substituímos $u = 2 \operatorname{sen} \theta$, obtendo $du = 2 \cos \theta \, d\theta$ e $\sqrt{4 - u^2} = 2 \cos \theta$, de forma que

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}\, dx &= \int \frac{2 \operatorname{sen} \theta - 1}{2 \cos \theta}\, 2 \cos \theta \, d\theta \\ &= \int (2 \operatorname{sen} \theta - 1)\, d\theta \\ &= -2 \cos \theta - \theta + C \\ &= -\sqrt{4 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\ &= -\sqrt{3 - 2x - x^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C\end{aligned}$$

7.3 Exercícios

1–3 Calcule a integral usando a substituição trigonométrica indicada. Esboce e coloque legendas no triângulo retângulo associado.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}\, dx; \quad x = 3 \sec \theta$

2. $\displaystyle\int x^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx; \quad x = 3 \operatorname{sen} \theta$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}}\, dx; \quad x = 3 \operatorname{tg} \theta$

4–30 Calcule a integral.

4. $\displaystyle\int_0^1 x^3 \sqrt{1 - x^2}\, dx$

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t^3\sqrt{t^2 - 1}}\, dt$

6. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}\, dx$

7. $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}}; \quad a > 0$

8. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2 - 16}}$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$

10. $\displaystyle\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2 + 2}}\, dt$

11. $\displaystyle\int \sqrt{1 - 4x^2}\, dx$

12. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{5 - u^2}}$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3}\, dx$

14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

15. $\displaystyle\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

16. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dx}{x^5\sqrt{9x^2 - 1}}$

17. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 7}}\, dx$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{[(ax)^2 - b^2]^{3/2}}$

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}\, dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$

21. $\displaystyle\int_0^{0,6} \frac{x^2}{\sqrt{9 - 25x^2}}\, dx$

22. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1}\, dx$

23. $\displaystyle\int \sqrt{5 + 4x - x^2}\, dx$

24. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$

25. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(3 + 4x - 4x^2)^{3/2}}\, dx$

27. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + 2x}\, dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 2x + 2)^2}\, dx$

29. $\displaystyle\int x \sqrt{1 - x^4}\, dx$

30. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}}\, dt$

31. (a) Use substituição trigonométrica para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C.$$

(b) Use a substituição hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$ para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Essas fórmulas estão interligadas pela Fórmula 3.11.3.

32. Calcule

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\, dx$$

É necessário uma calculadora gráfica ou computador

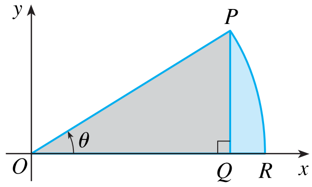
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

(a) por substituição trigonométrica.
(b) por substituição hiperbólica $x = a$ senh t.

33. Encontre o valor médio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}/x$, $1 \leqslant x \leqslant 7$.

34. Encontre a área da região delimitada pela hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$ e a reta $x = 3$.

35. Demonstre a fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ para a área de um setor circular com raio r e ângulo central θ. [*Dica*: Suponha que $0 < \theta < \pi/2$ e coloque o centro do círculo na origem, assim ele terá a equação $x^2 + y^2 = r^2$. Então A é a soma da área do triângulo POQ e a área da região PQR na figura.]



36. Calcule a integral

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - 2}}$$

Coloque em um gráfico o integrando e a integral indefinida e verifique se sua resposta é razoável.

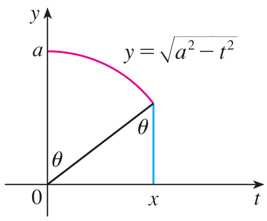
37. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região delimitada pelas curvas $y = 9/(x^2 + 9)$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 3$.

38. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $x = 1$ da região sob a curva $y = x\sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

39. (a) Use substituição trigonométrica para verificar que

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - t^2}\, dt = \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}^{-1}(x/a) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

(b) Use a figura para dar interpretações geométricas de ambos os termos no lado direito da equação na parte (a).



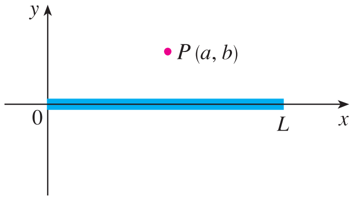
40. A parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide o disco $x^2 + y^2 \leqslant 8$ em duas partes. Encontre as áreas de ambas as partes.

41. Um toro é gerado pela rotação do círculo $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ ao redor do eixo x. Ache o volume delimitado pelo toro.

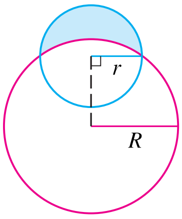
42. Uma barra carregada de comprimento L produz um campo elétrico no ponto $P(a, b)$ dado por

$$E(P) = \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + b^2)^{3/2}}\, dx$$

em que λ é a densidade de carga por unidade de comprimento da barra e ε_0, a permissividade do vácuo (veja a figura). Calcule a integral para determinar uma expressão para o campo elétrico $E(P)$.



43. Encontre a área da região em forma de *lua crescente* delimitada pelos arcos dos círculos de raios r e R. (Veja a figura.)



44. Um tanque de armazenamento de água tem a forma de um cilindro com diâmetro de 10 m. Ele está montado de forma que as secções transversais circulares são verticais. Se a profundidade da água é 7 m, qual a porcentagem da capacidade total usada?