Vetores

23.09.2022

Geometria Analítica

A geometria analítica é uma conexão entre duas áreas da matemática: Geometria e Álgebra.

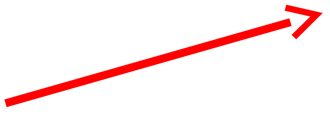
Geometria Analítica

- A eficácia desta conexão cresce com a introdução da noção de vetor.
- A noção de vetor possibilita realizar operações com entidades geométricas.

- Vetores: tratamento geométrico

Vetor

- Vetores são representados por flechas

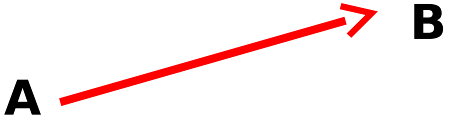


- A seta transmite a ideia de deslocamento

(ou translação).

Vetor

Podemos imaginar um ponto se deslocando de A para B.



O deslocamento é retilíneo, nos dando uma ideia de uma direção associada a uma reta.

- A extremidade da seta nos dá ideia do sentido
- O comprimento da seta nos mostra, segundo uma unidade, a distância entre os pontos A e B.

Vetor

Esta seta que estamos imaginando não é um vetor, mas sim um representante de um vetor.

Vetor

O termo vetor é oriundo do verbo latino vehere (transportar, levar).

No caso específico da matemática, podemos dizer que um vetor é um transportador de três informações: direção, sentido e magnitude.

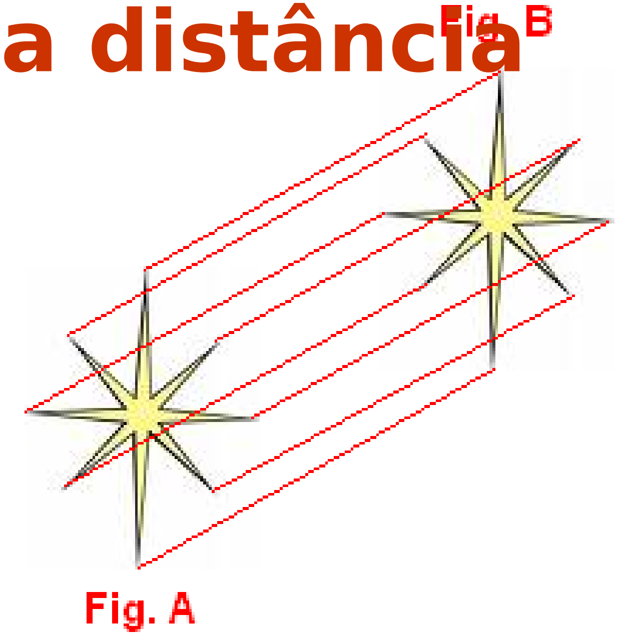
Ou ainda, que um ponto A é transportado (pelo vetor) até um ponto B.

Vetor

- Vetores servem principalmente para deslocar pontos, ou mais precisamente, efetuar translações.
- E deslocando- se cada um dos pontos de uma figura, efetua-se uma translação da figura.

Vetor

- Em baixo, a figura B foi obtida da figura A deslocando todos os seus pontos segundo **a mesma direção**, **o mesmo sentido** e percorrendo **a mesma distância**

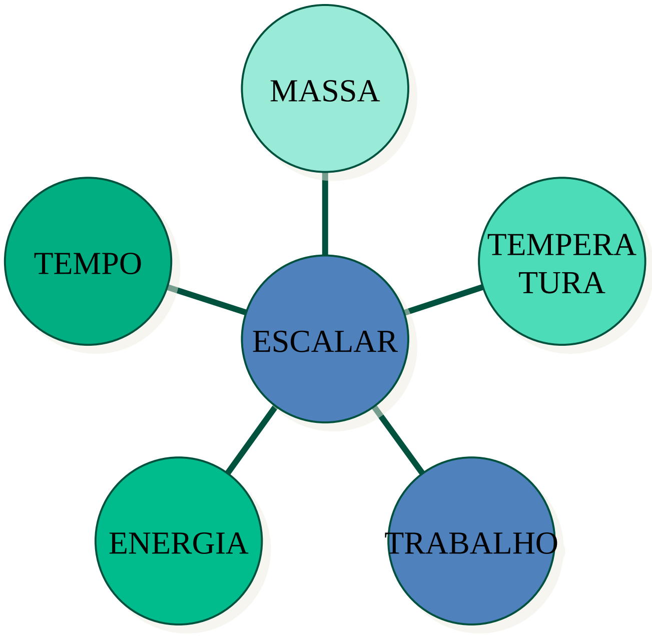


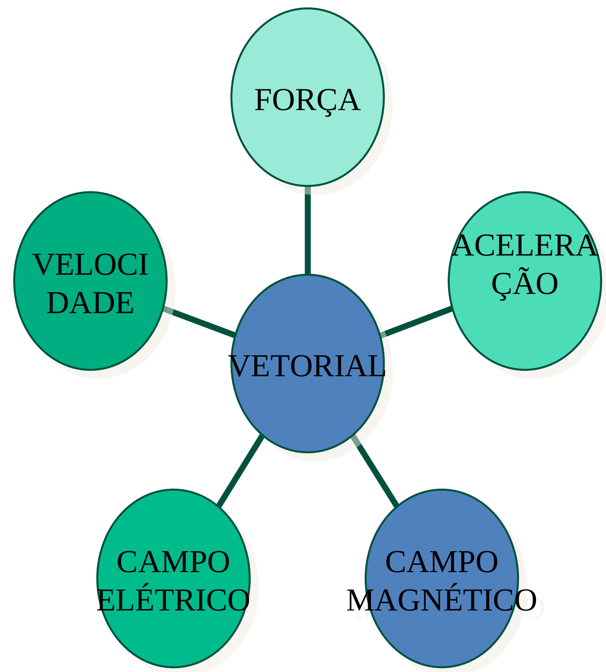
Grandezas Escalares e Grandezas Vetoriais

Grandezas Físicas: Tudo que pode ser medido

Grandezas Vetoriais

Grandezas Escalares



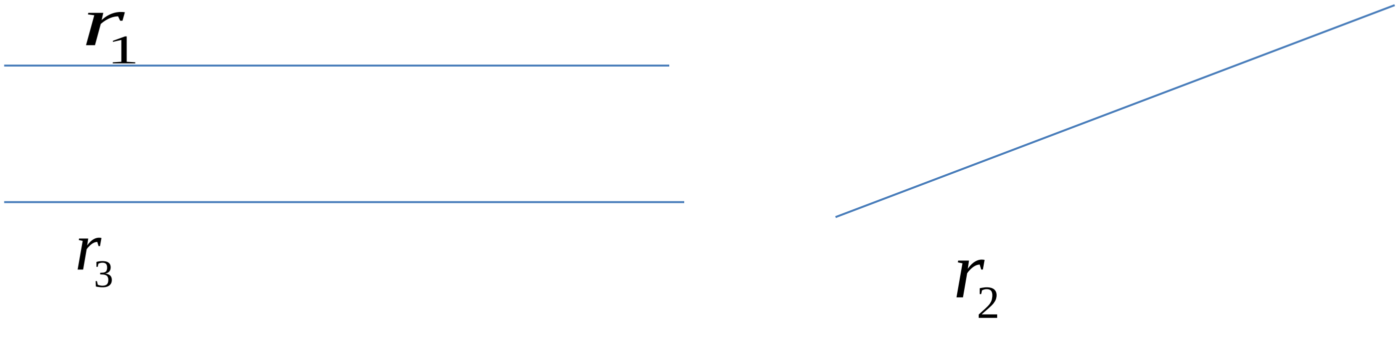


Direção e Sentido

- Direção: determinada pela inclinação da reta. A direção pode ser vertical, horizontal ou oblíqua. Quando a direção é oblíqua, normalmente está associada a um ângulo de referência.

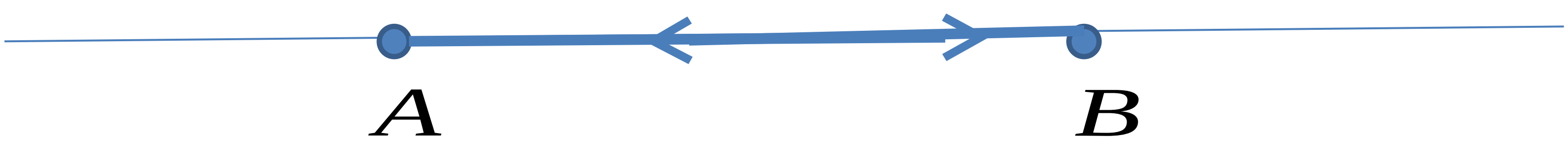
Direção e Sentido

- Retas paralelas tem mesma direção



Direção e Sentido

- Sentido
- Dada uma reta e dois pontos A e B nesta reta, pode-se definir dois sentidos:
- De A para B ou
- De B para A



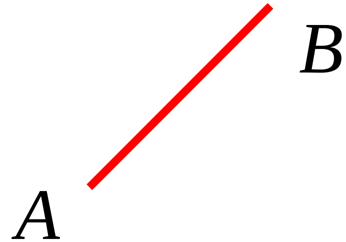
Segmentos Equipolentes

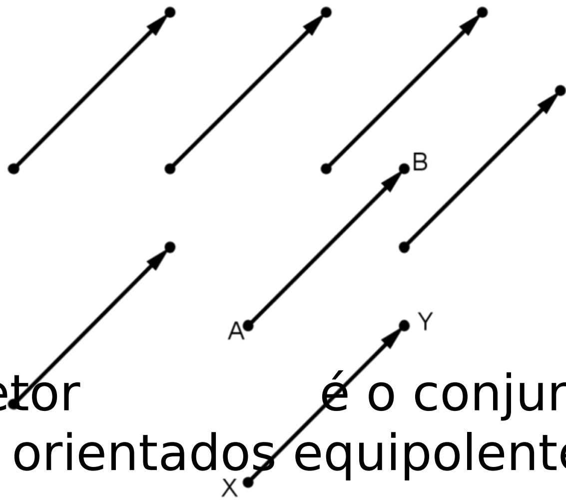
Consideremos segmentos de reta orientados (quando se escolhe um sentido de percurso, considerado positivo) .

Segmentos orientados com mesma direção, sentido e comprimento são chamados segmentos **equipolentes**.

Vetor

- Segmento orientado AB





- O vetor é o conjunto de todos os segmentos de reta orientados equipolentes a AB
- Notação alternativa

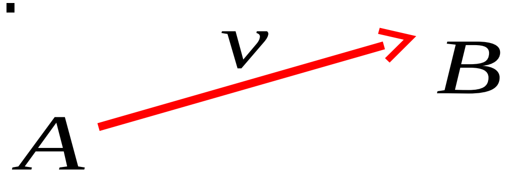
$$v = AB$$

- Notação alternativa

$$v = B - A$$

Vetor

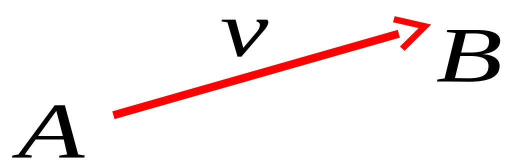
Para citarmos um vetor basta citar (ou desenhar) qualquer um dos seus representantes .



Não esquecer que *AB* e AB são objetos matemáticos distintos.

Vetor

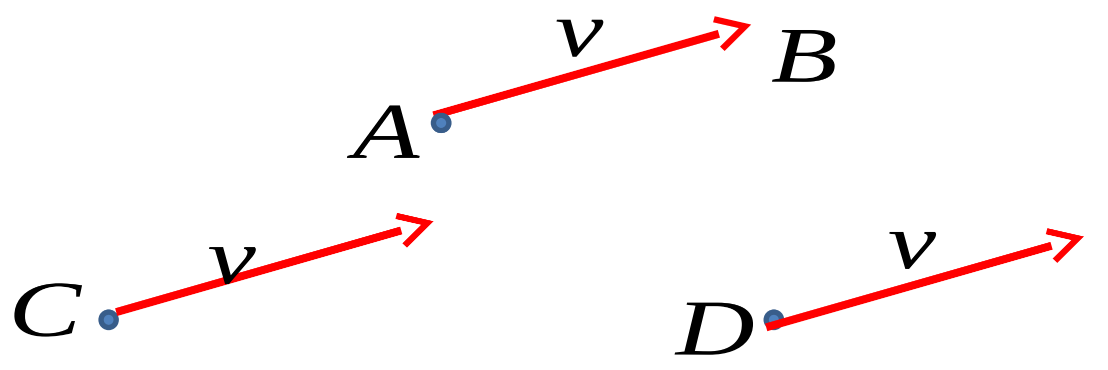
- Quando escrevemos $v = AB$ estamos afirmando que o vetor é determinado pelo segmento AB.



- Porém, qualquer outro segmento de mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido de AB representa o v mesmo vetor

Vetor Livre

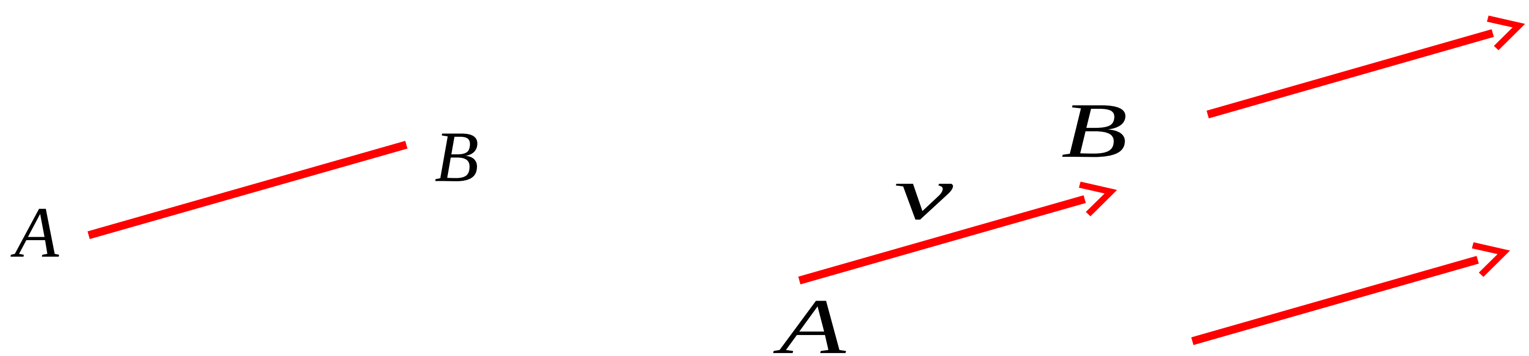
- Assim, cada ponto no espaço pode ser considerado origem de um segmento orientado que é representante do vetor v



- **Vetor livre: o representante pode ter sua origem colocada em qualquer ponto**.

Vetor

Não esquecer que AB e AB são objetos matemáticos distintos.



Vetor : direção, sentido e comprimento

- o comprimento, a direção e o sentido do vetor são o comprimento, a direção e o sentido de qualquer um de seus representantes.

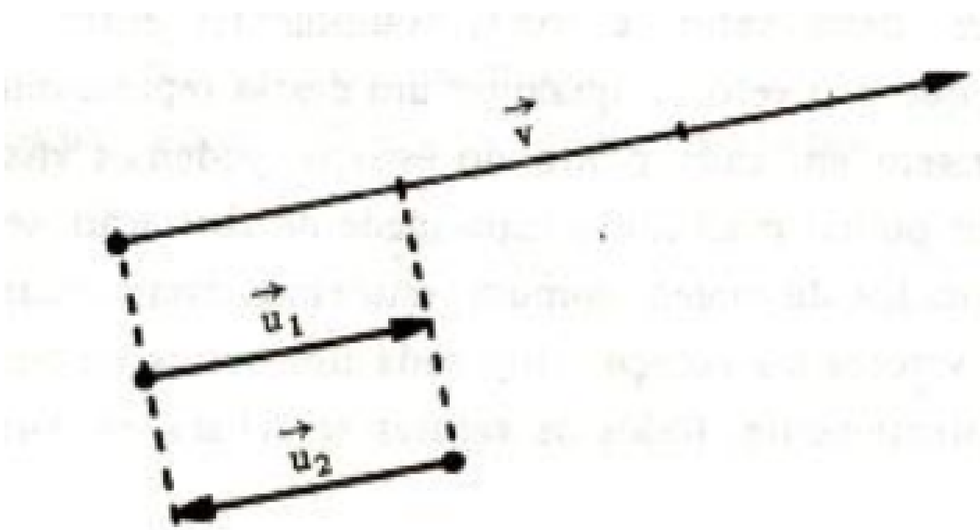
- De um modo geral, conceitos geométricos envolvendo vetores são definidos “ pondo-se a culpa nos representantes”.

Módulo do vetor

O módulo (comprimento) do vetor é o módulo de qualquer um dos seus representantes.

Indica-se módulo de $\vec{v}$ por $|\vec{v}|$:

$$|\vec{v}| = 3$$



Casos Particulares de Vetores

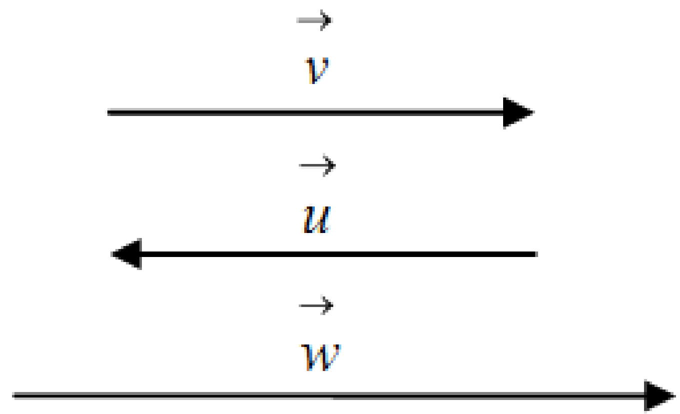
- <u>Vetores Paralelos</u> : Dois vetores u e v são

paralelos se seus representantes tiverem

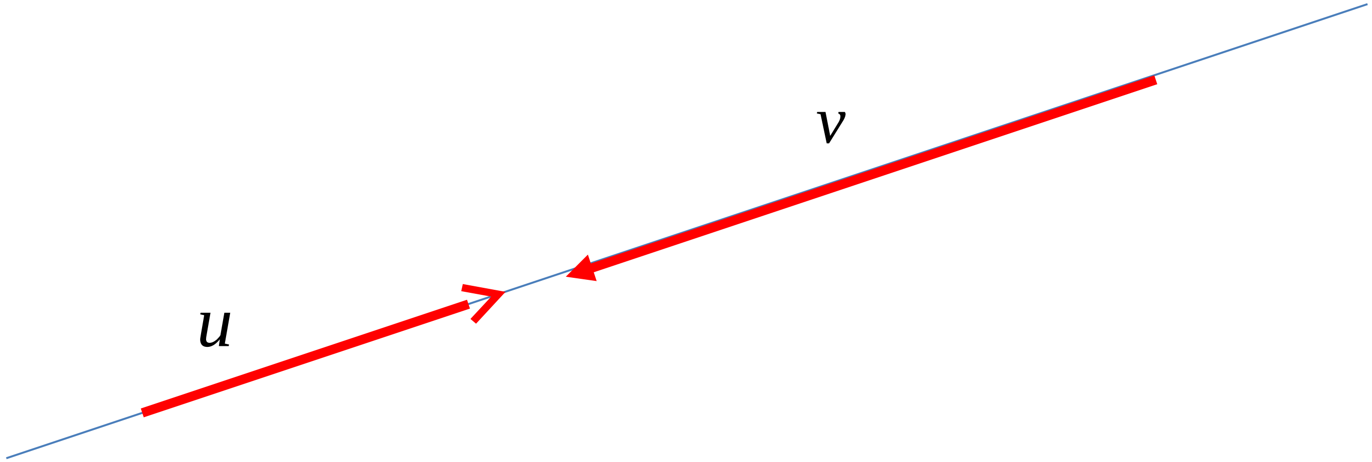
mesma direção.

Indica-se $u \, // \, v$

Na figura $u \, // \, v \, // \, w$



Casos Particulares de Vetores



$u \,//\, v$

Casos Particulares de Vetores

- Vetores Iguais : Dois vetores u e v são

  iguais se e somente se tiverem mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.

  Indica-se $u = v$

Casos Particulares de Vetores

- Vetor nulo: Os segmentos orientados com origem coincidente com a extremidade determinam o vetor nulo.

  Indica-se

$$0 \quad ou \quad AA$$

* Como o vetor nulo não possui direção e sentido definidos, é considerado paralelo a qualquer vetor.

*

$$\left| 0 \right| = 0$$

Casos Particulares de Vetores

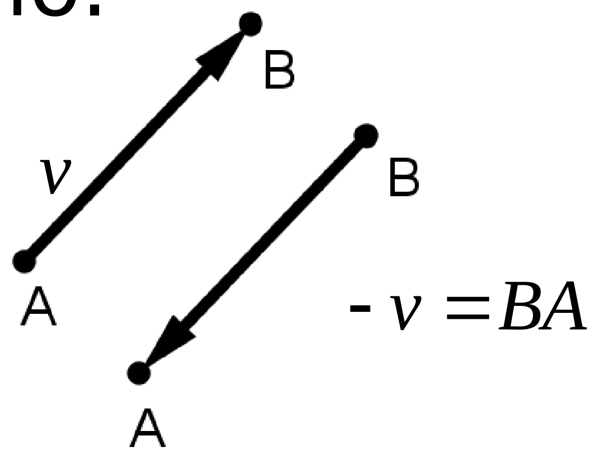
- Vetor oposto: A cada vetor $\vec{v}$ não – nulo, corresponde um vetor $-\vec{v}$ oposto

De mesma direção e comprimento de

Mas com sentido contrário.

$v = AB$ $\qquad$ $-v = BA$

Se $\qquad$ então



Casos Particulares de Vetores

- Vetor unitário: Um vetor $\vec{v}$ é unitário se é tem comprimento (módulo) 1.

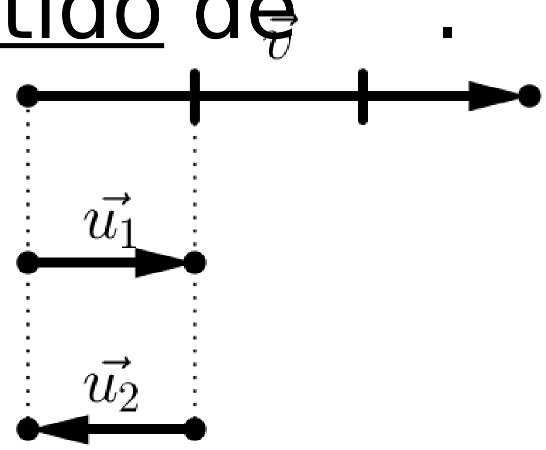
$$\left| \vec{v} \right| = 1$$

Casos Particulares de Vetores

- **Versor** de um vetor não nulo é o <u>vetor unitário</u> de <u>mesma direção</u> e <u>mesmo sentido</u> de .

Casos Particulares de Vetores

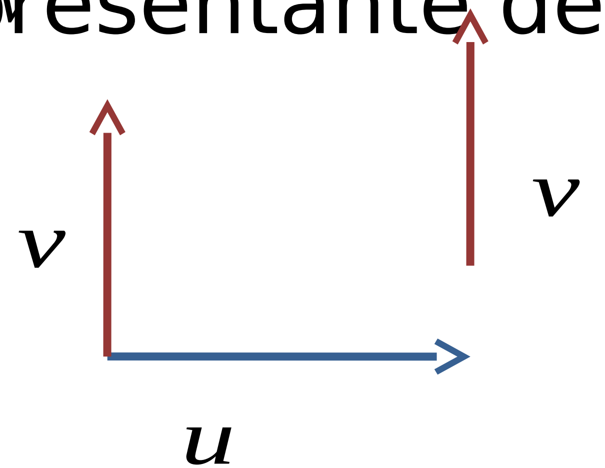
- **Versor** de um vetor não nulo v é o <u>vetor unitário</u> de <u>mesma direção</u> e <u>mesmo sentido</u> de v.



u_1 e u_2 são ambos vetores unitários. Mas somente u_1 é o versor de v.

Casos Particulares de Vetores

- <u>Vetores ortogonais</u>: dois vetores u e v são ortogonais se algum representante de u formar um ângulo reto com um representante de v
- Indica-se $u \perp v$



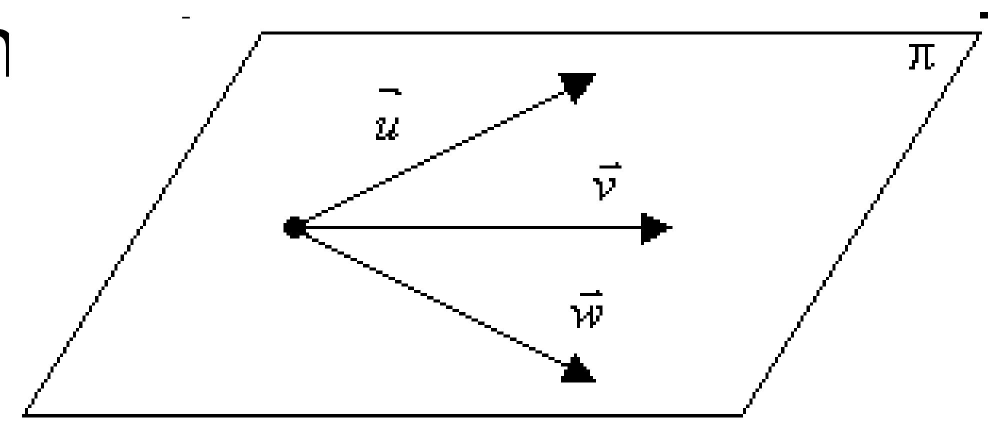
Considera-se o vetor nulo ortogonal a qualquer vetor.

Casos Particulares de Vetores

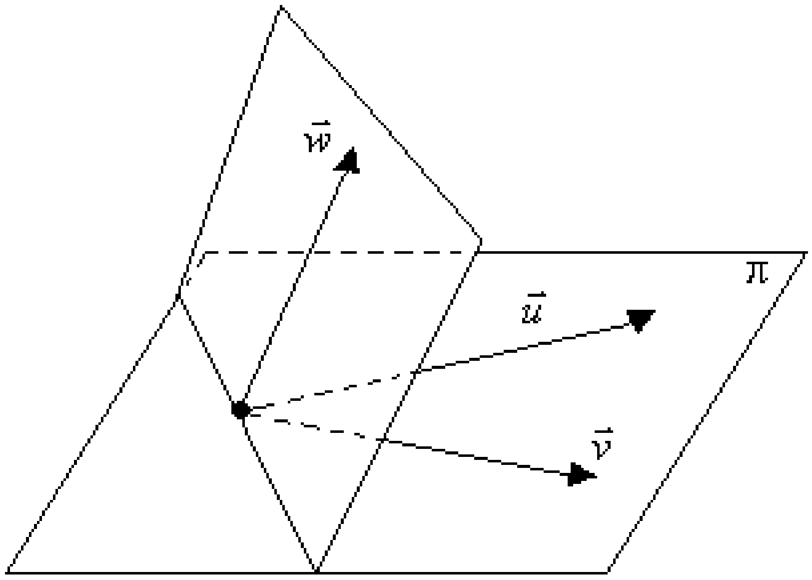
- <u>Vetores coplanares</u>: Dois ou mais vetores

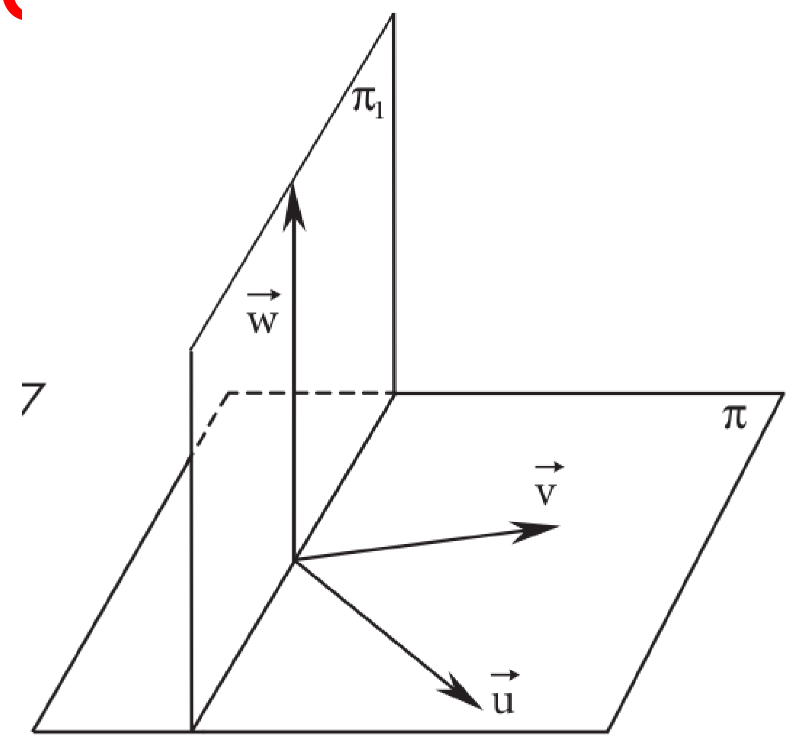
São coplanares se possuem representantes

Perten … ano.



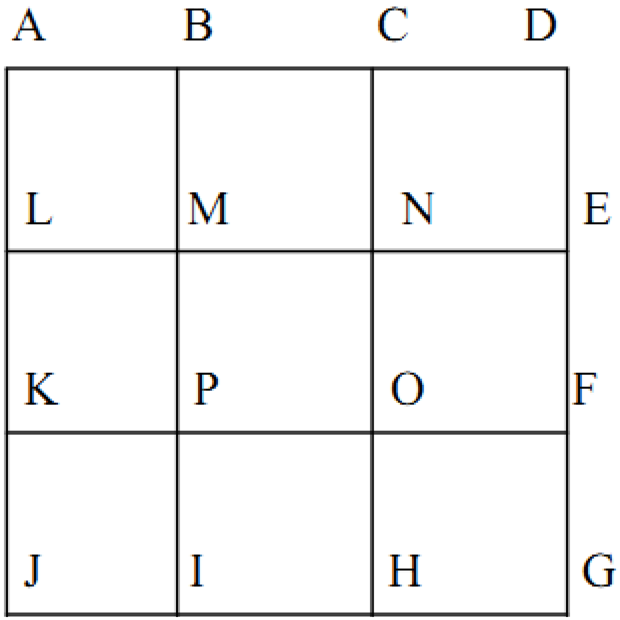
Casos Particulares de Vetores





Os três vetores representados não são coplanares.

Exemplos



a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OF}$ ( )

b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PH}$ ( )

c) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OP}$ ( )

d) $\overrightarrow{BL} = -\overrightarrow{MC}$ ( )

e) $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{ED}$ ( )

f) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{MG}$ ( )

g) $\overrightarrow{JO} \mathbin{//} \overrightarrow{LD}$ ( )

h) $\overrightarrow{AJ} \mathbin{//} \overrightarrow{FG}$ ( )

i) $\overrightarrow{AC} \mathbin{//} \overrightarrow{HI}$ ( )

j) $\overrightarrow{CO} \mathbin{//} \overrightarrow{GI}$ ( )

k) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EG}$ ( )

l) $\overrightarrow{PE} \perp \overrightarrow{EC}$ ( )

m) $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{NB}$ ( )

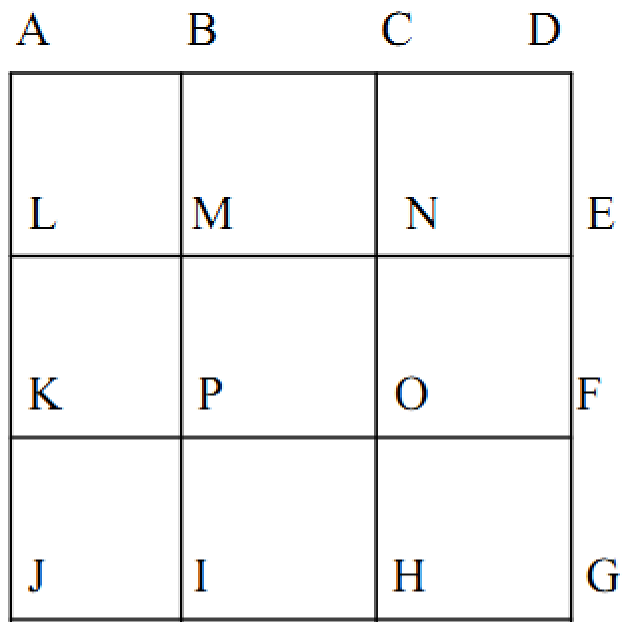
n) $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BL}$ ( )

o) $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{FP}\right|$ ( )

p) $\left|\overrightarrow{IF}\right| = \left|\overrightarrow{MF}\right|$ ( )

q) $\left|\overrightarrow{AJ}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$ ( )

r) $\left|\overrightarrow{AO}\right| = 2\left|\overrightarrow{NP}\right|$ ( )



a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OF}$ ( )

b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PH}$ ( )

c) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OP}$ ( )

d) $\overrightarrow{BL} = -\overrightarrow{MC}$ ( )

e) $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{ED}$ ( )

f) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{MG}$ ( )

g) $\overrightarrow{JO} \,//\, \overrightarrow{LD}$ ( )

h) $\overrightarrow{AJ} \,//\, \overrightarrow{FG}$ ( )

i) $\overrightarrow{AC} \,//\, \overrightarrow{HI}$ ( )

j) $\overrightarrow{CO} \,//\, \overrightarrow{GI}$ ( )

k) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EG}$ ( )

l) $\overrightarrow{PE} \perp \overrightarrow{EC}$ ( )

m) $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{NB}$ ( )

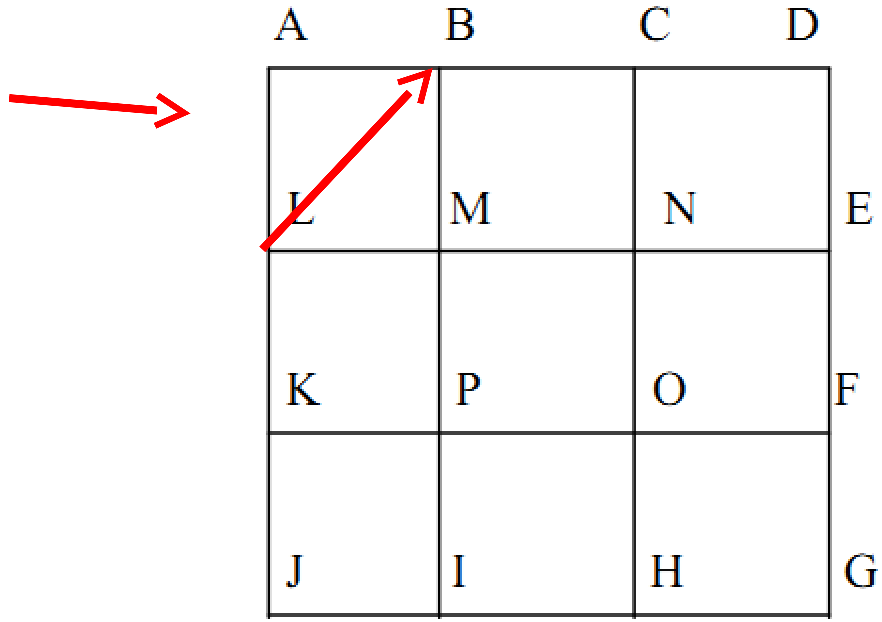
n) $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BL}$ ( )

o) $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{FP}\right|$ ( )

p) $\left|\overrightarrow{IF}\right| = \left|\overrightarrow{MF}\right|$ ( )

q) $\left|\overrightarrow{AJ}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$ ( )

r) $\left|\overrightarrow{AO}\right| = 2\left|\overrightarrow{NP}\right|$ ( )



g) $\overrightarrow{JO} // \overrightarrow{LD}$ (V)

h) $\overrightarrow{AJ} // \overrightarrow{FG}$ (V)

i) $\overrightarrow{AC} // \overrightarrow{HI}$ (V)

j) $\overrightarrow{CO} // \overrightarrow{GI}$ (V)

k) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EG}$ (V)

l) $\overrightarrow{PE} \perp \overrightarrow{EC}$ (V)

m) $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{NB}$ (V)

n) $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BL}$ (V)

o) $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{FP}\right|$ (V)

p) $\left|\overrightarrow{IF}\right| = \left|\overrightarrow{MF}\right|$ (V)

q) $\left|\overrightarrow{AJ}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$ (V)

r) $\left|\overrightarrow{AO}\right| = 2\left|\overrightarrow{NP}\right|$ (V)

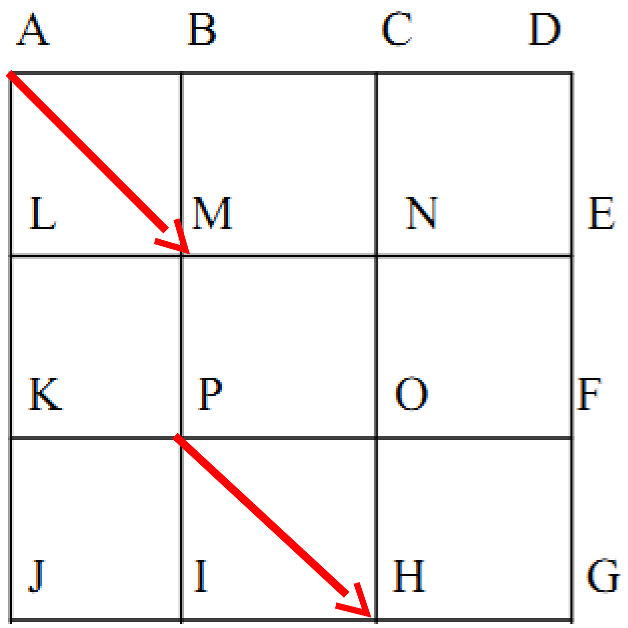


Figura 1

m) $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{NB}$ (V)

n) $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BL}$ (V)

o) $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{FP}\right|$ (V)

p) $\left|\overrightarrow{IF}\right| = \left|\overrightarrow{MF}\right|$ (V)

q) $\left|\overrightarrow{AJ}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$ (V)

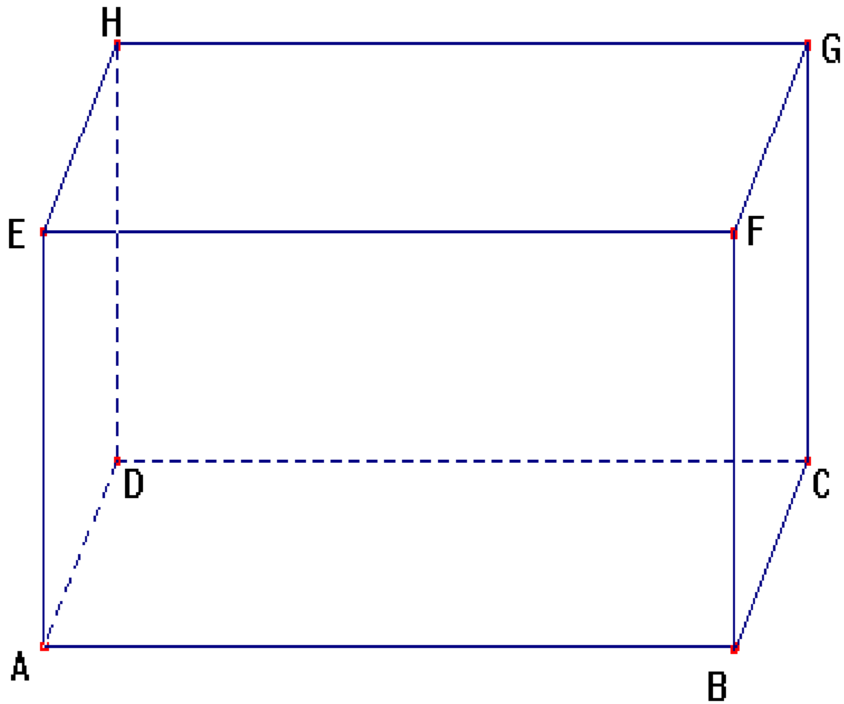
r) $\left|\overrightarrow{AO}\right| = 2\left|\overrightarrow{NP}\right|$ (V)

Respostas a) V, b) V, c) F, d) V, e) V, f) V,

g) F, h) V, i) V, j) F, k) V, l) F, m) V,

n) V, o) V, p) V, q) F, r) V.

Exemplo:

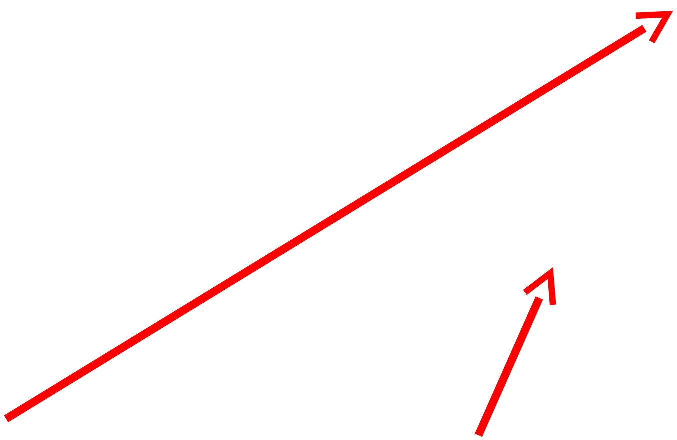


$$a)\ \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$$

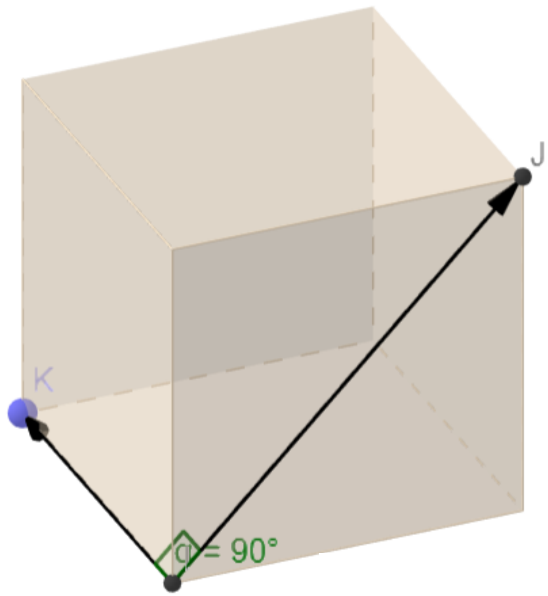
$$b)\ \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{HG}$$

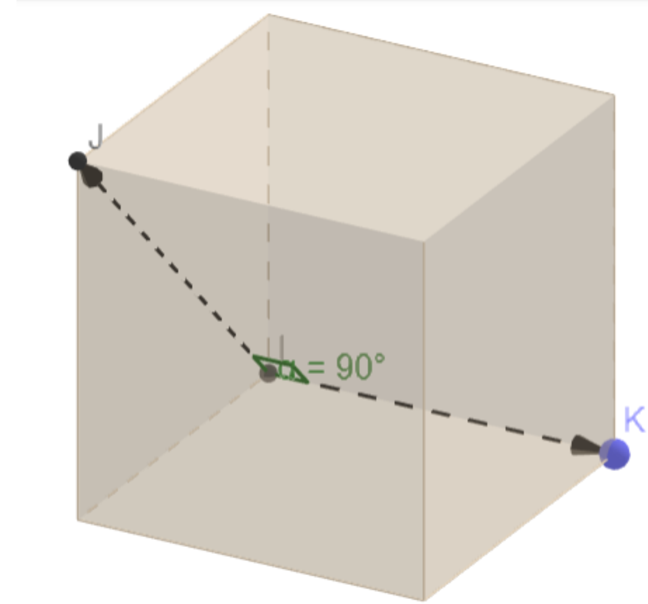
$$c)\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG}$$

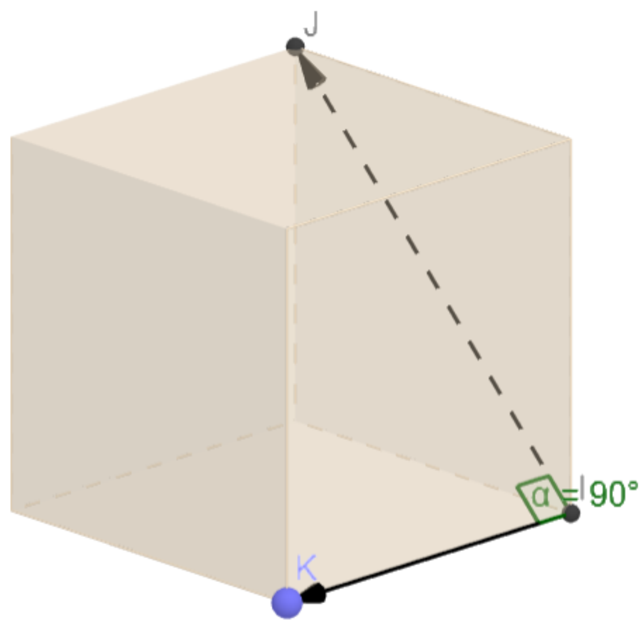
$$d)\ \overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{BC}$$

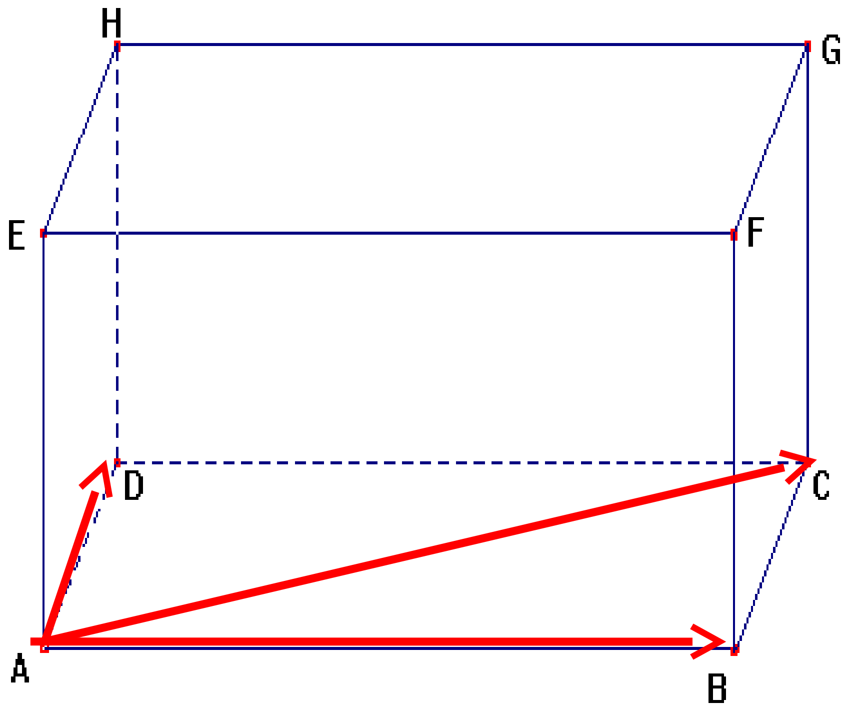


Exemplo:







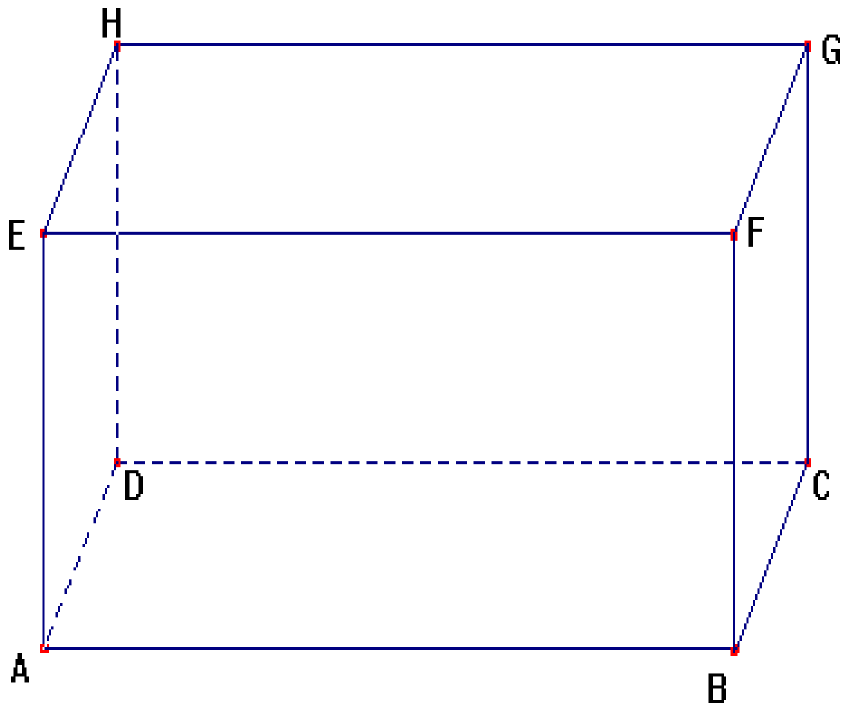


$e)\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{HF}\right|$

$f)\ |\ \overrightarrow{AG}\ |=|\ \overrightarrow{DF}\ |$

$g)\overrightarrow{BG}\ //\ \overrightarrow{ED}$

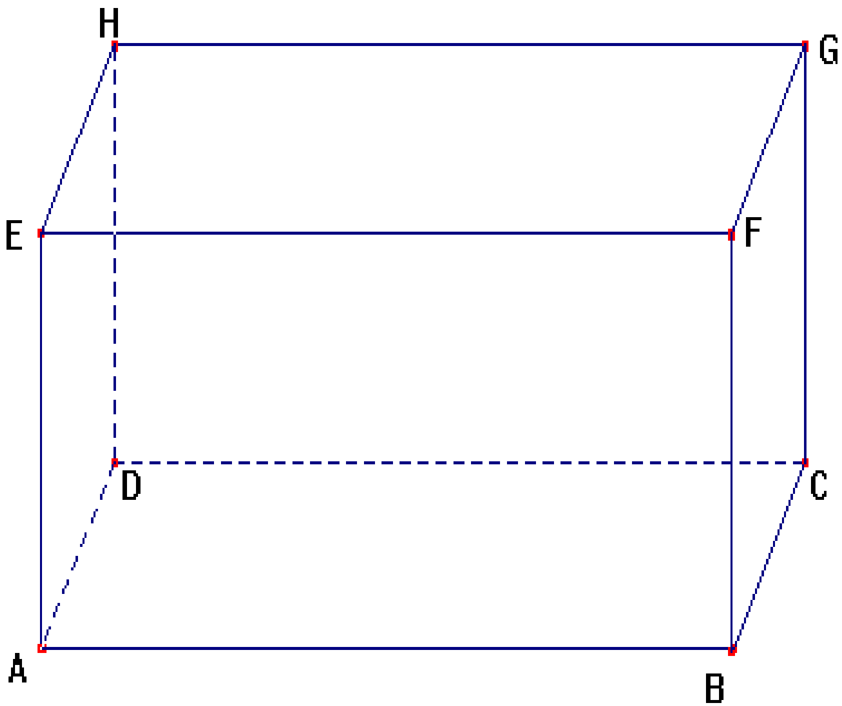
$h)\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ *são coplanares*



$i)\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FG}$ e $\overrightarrow{EG}$ *são coplanares*

k) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{FG}$ são coplanares

m) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{CF}$ são coplanares



$j)\ \overrightarrow{EG}, \overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{\mathrm{HF}}$ *são coplanares*

l) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BG}$ e $\overrightarrow{CF}$ são coplanares

$n)\ \overrightarrow{AE}$ é ortogonal ao plano ABC

o) $\overrightarrow{AB}$ é ortogonal ao plano BCG

$p)\ \overrightarrow{DC}$ é paralelo ao plano HEF

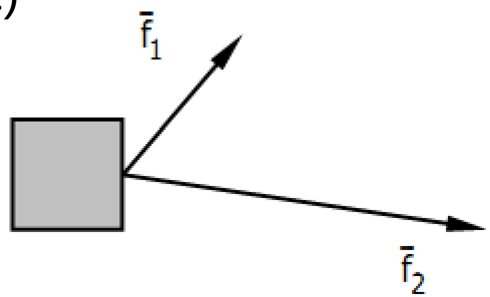
Operações com Vetores

Adição de Vetores

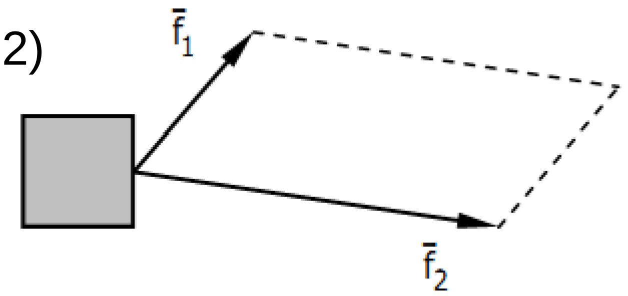
Vetores com direções diferentes (não paralelos):

Regra do paralelogramo: Devem ter origem comum

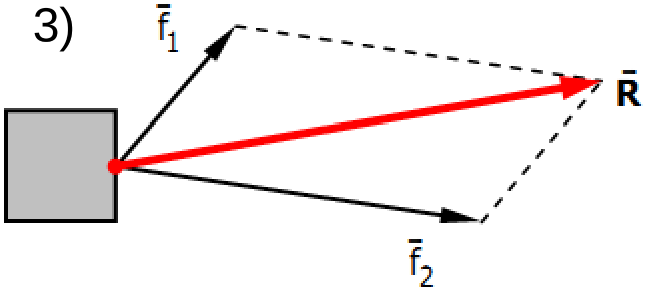
1)



2)

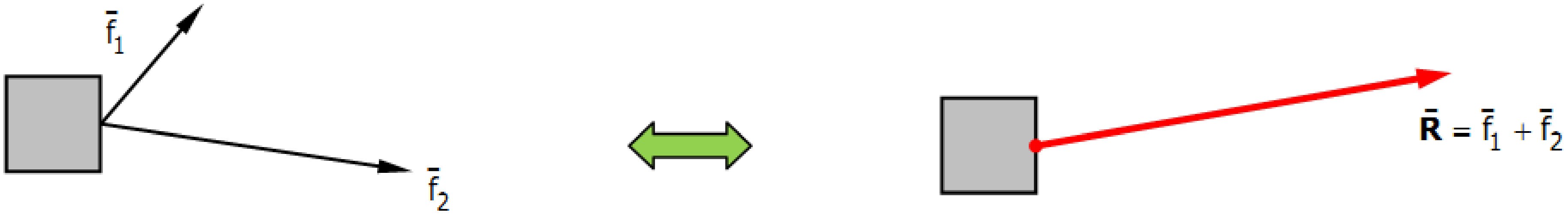


3)



Adição de Vetores

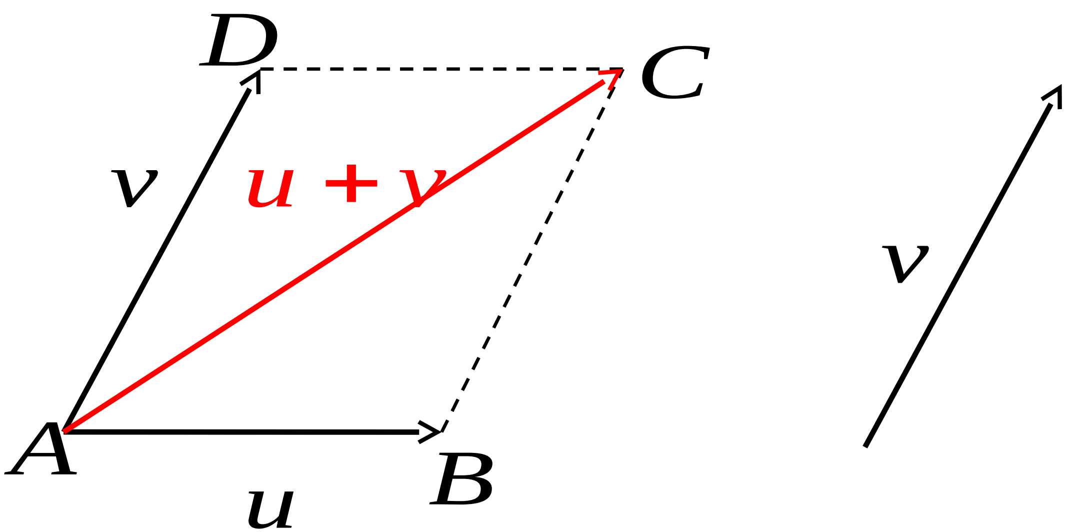
O vetor resultante executa o mesmo trabalho dos vetores que o resultaram.



Adição de Vetores

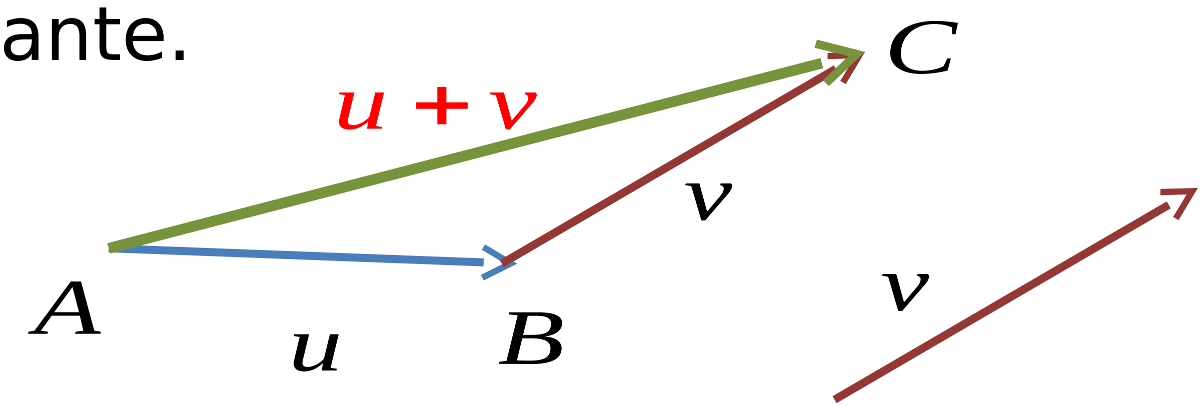
Regra do paralelogramo

Deve-se escolher representantes de u e v, respectivamente *AB* e *AD*, com origem em *A* e construir um paralelogramo *ABCD*.



Adição de Vetores

Regra do Polígono: Considere u e v dois vetores, com representantes dados pelos segmentos orientados *AB* e *BC*, respectivamente. A soma de u com v, denotada por $u+v$, é o vetor que tem o segmento orientado *AC* como representante.



Adição de Vetores

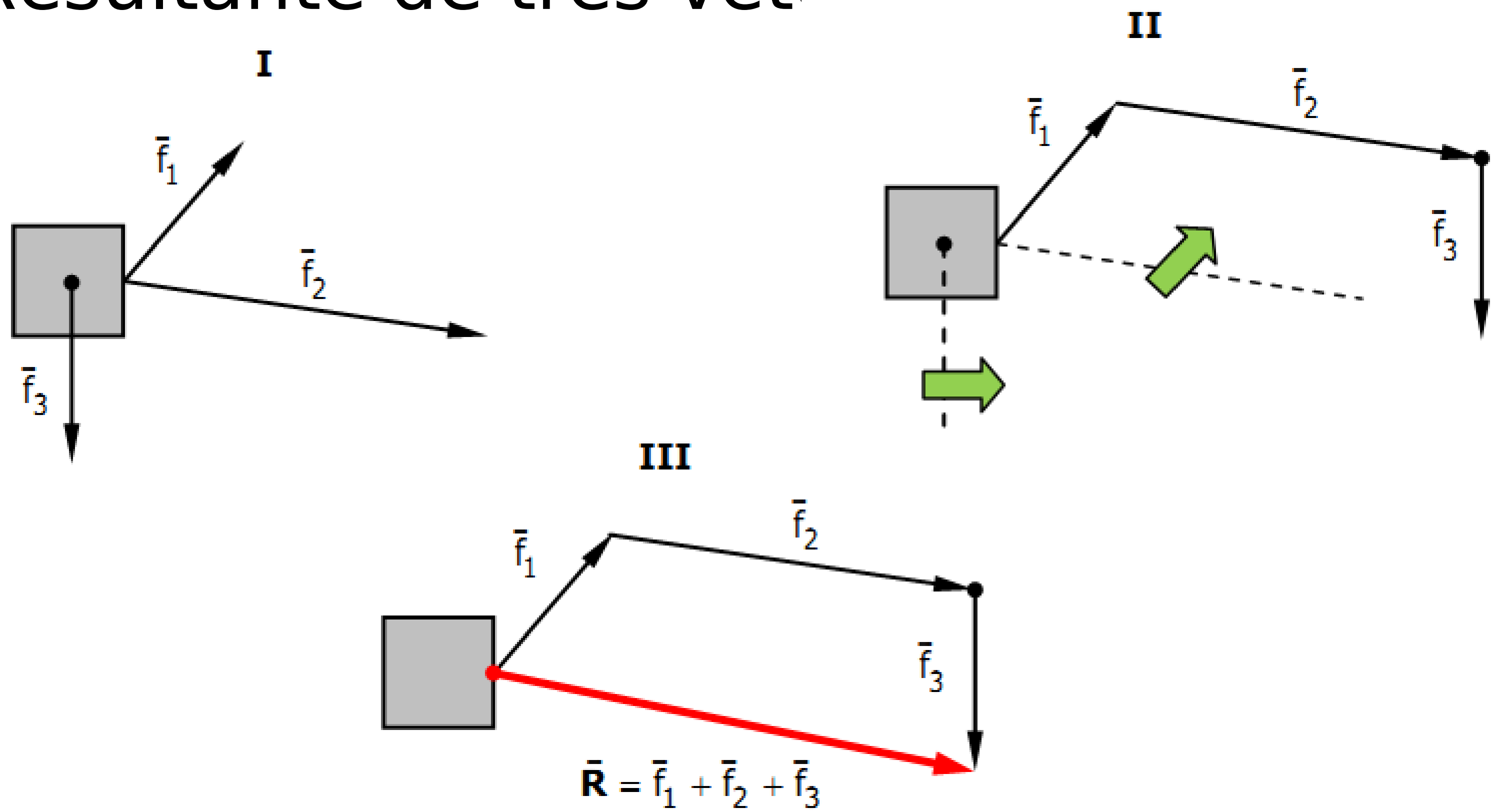
Para adicionarmos dois vetores pelo método do polígono translada-se um dos vetores colocando sua origem na extremidade do outro vetor formando um "caminho".

O vetor resultante terá sua origem comum ao primeiro vetor e sua extremidade comum à extremidade do último vetor.

O resultante fecha um polígono com os vetores somados.

Adição de Vetores

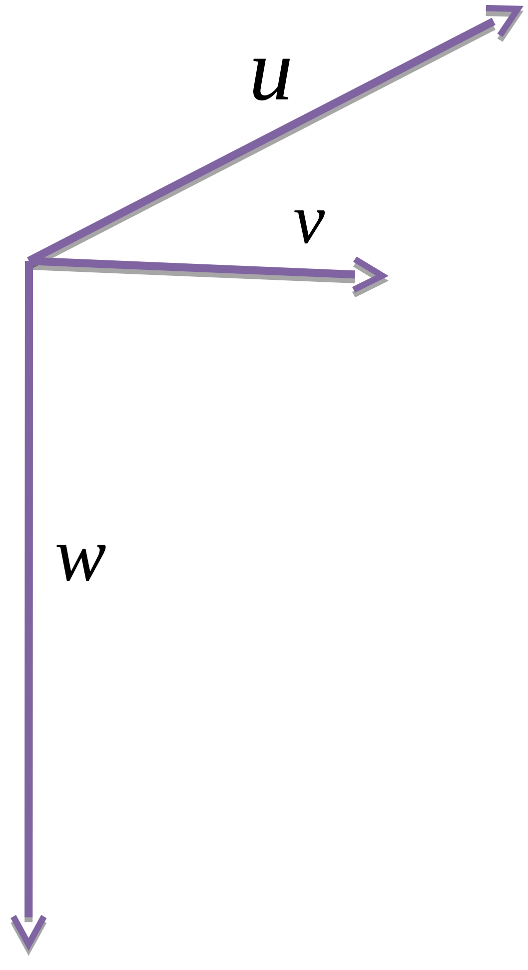
Resultante de três vetores:



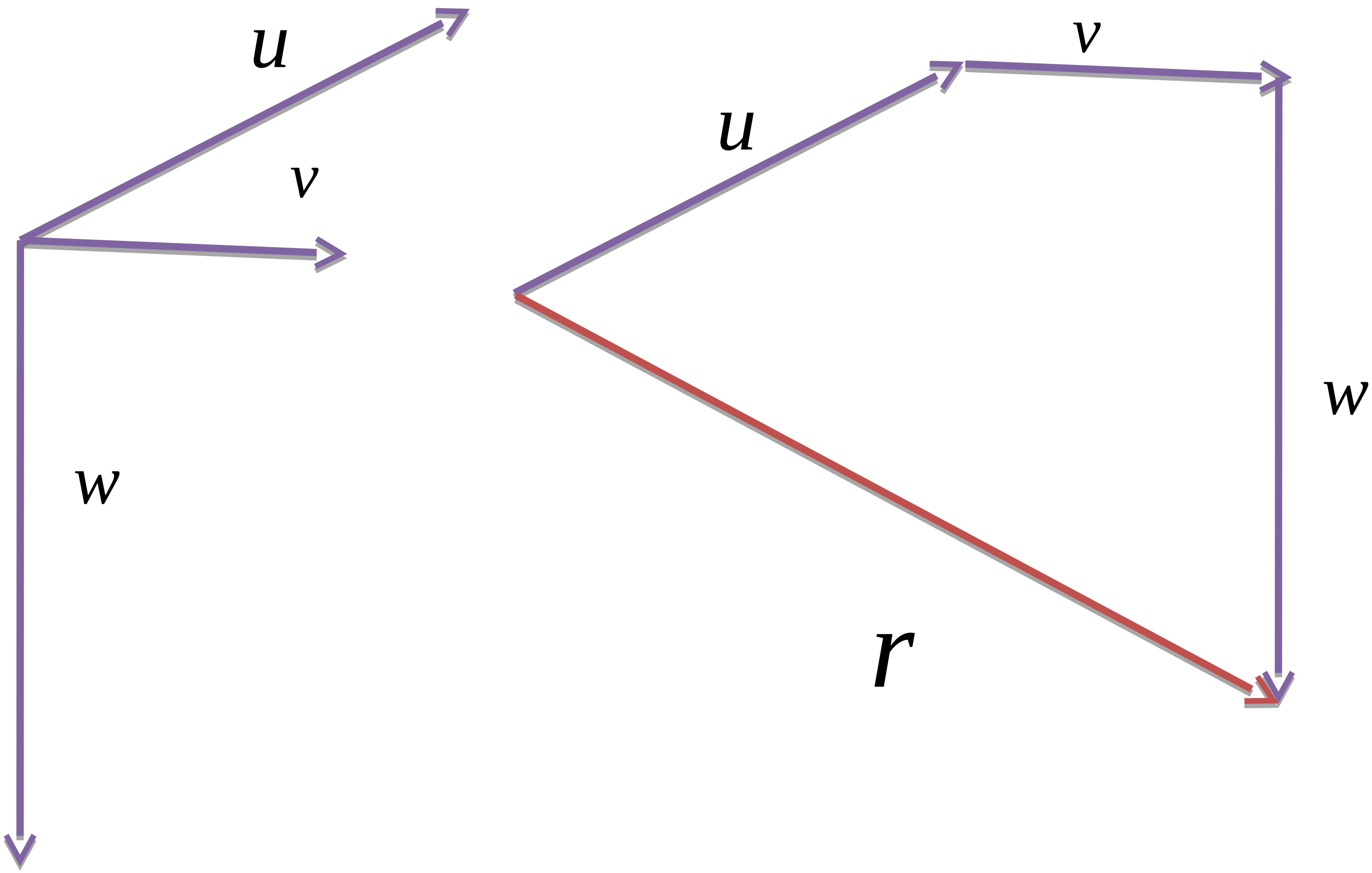
Adição de Vetores

- O método do paralelogramo se aplica apenas no caso de soma de dois vetores.
- Já o método do polígono se aplicada a uma quantidade finita qualquer de vetores numa única operação.

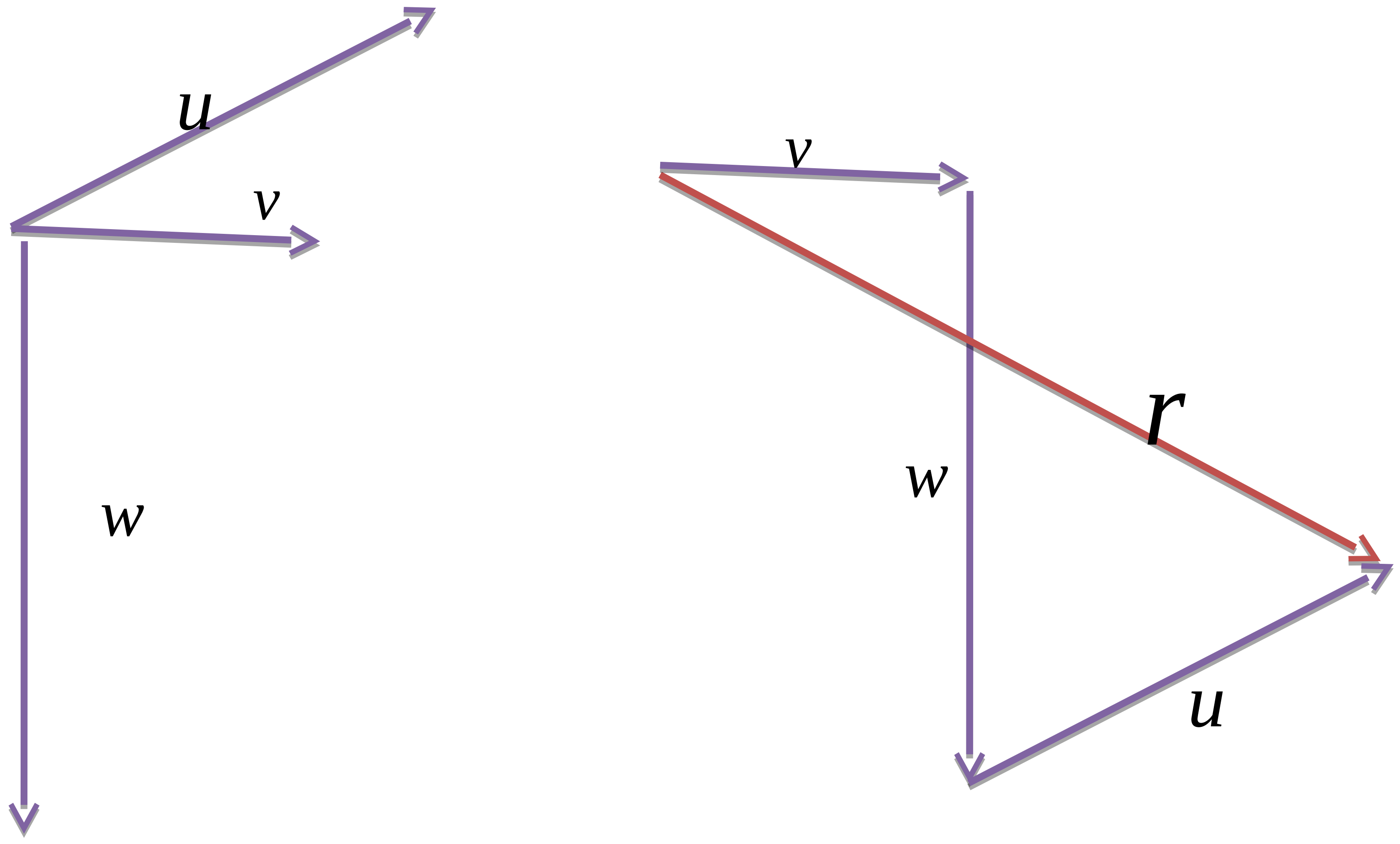
QUAL É O VETOR RESULTANTE DO SISTEMA DE VETORES ABAIXO?



QUAL É O VETOR RESULTANTE DO SISTEMA DE VETORES ABAIXO?

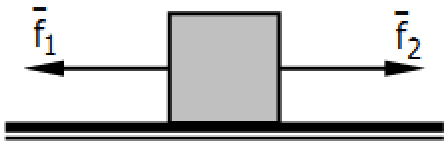


QUAL É O VETOR RESULTANTE DO SISTEMA DE VETORES ABAIXO?



Adição de Vetores

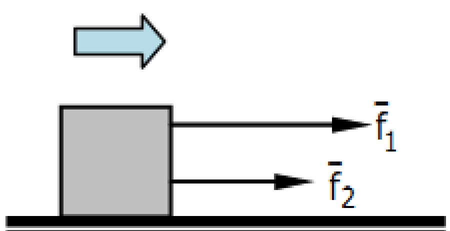
Vetores com mesma direção.



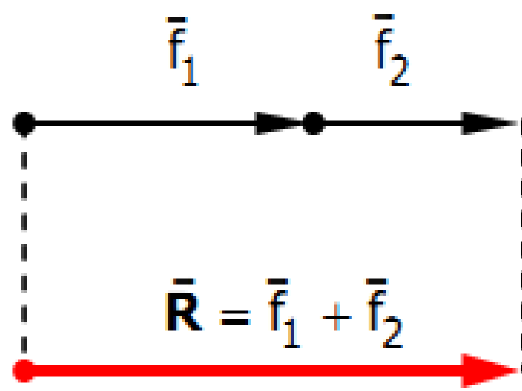
$|\vec{f}_1| = 100\,N$ e $|\vec{f}_2| = 100\,N$

$$\vec{R} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0} \quad \therefore \quad |\vec{R}| = 0\,N$$

Quando somamos dois ou mais vetores temos como resultado um novo vetor, chamado vetor soma ou resultante.

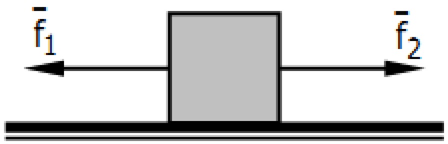


$|\vec{f}_1| = 120\,N$ e $|\vec{f}_2| = 100\,N$



Adição de Vetores

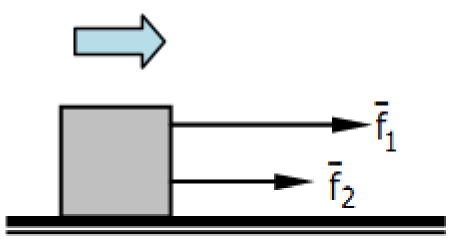
Caso 1: Vetores com mesma direção.



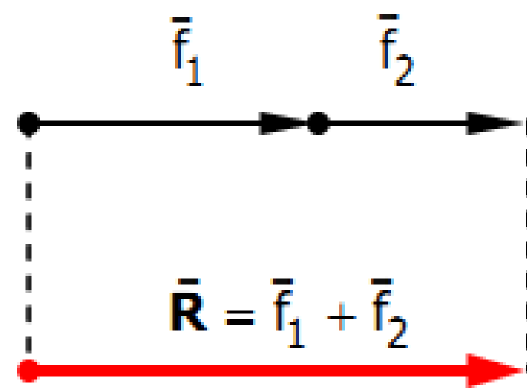
$|\,\bar{f}_1\,| = 100\,N$ e $|\,\bar{f}_2\,| = 100\,N$

$\bar{R} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 = \bar{0} \quad \therefore \quad |\,\bar{R}\,| = 0\,N$

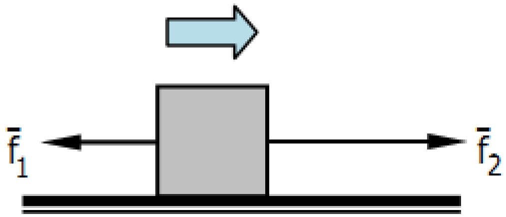
Quando somamos dois ou mais vetores temos como resultado um novo vetor, chamado vetor soma ou resultante.



$|\,\bar{f}_1\,| = 120\,N$ e $|\,\bar{f}_2\,| = 100\,N$

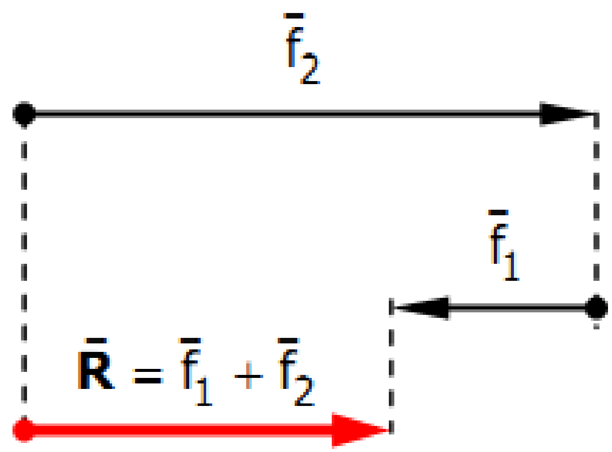


Adição de Vetores



$\bar{R} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 \quad \therefore \quad |\bar{R}| = 70N$

$|\bar{f}_1| = 50N$ e $|\bar{f}_2| = 120N$



Operações Com Vetores

Propriedades (Adição):

Sejam u, v e w vetores quaisquer. Valem:

1) $(u+v)+w = u+(v+w)$

(Associativa)

2) $u+v = v+u$ (Comutativa)

3) $u+0 = 0+u = u$ (Elemento Neutro)

4) Existe $-u$, tal que $u+(-u) = (-u)+u = 0$

(Elemento Oposto)