EXEMPLO 9 Calcule $\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\, dx$.

SOLUÇÃO Essa integral poderia ser calculada utilizando integração por partes, mas é mais fácil usar a identidade na Equação 2(a) como a seguir:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\, dx &= \int \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen} 9x]\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int (-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 9x\right) + C\end{aligned}$$

7.2 Exercícios

1–49 Calcule a integral.

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\, dx$
2. $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^3 x\, dx$
3. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7 \theta \cos^5 \theta\, d\theta$
4. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\, dx$
5. $\int \operatorname{sen}^2(\pi x)\cos^5(\pi x)\, dx$
6. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta\, d\theta$
8. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(\tfrac{1}{3}\theta)\, d\theta$
9. $\int_0^{\pi} \cos^4(2t)\, dt$
10. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t\, dt$
11. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$
12. $\int_0^{\pi/2} (2 - \operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta$
13. $\int t \operatorname{sen}^2 t\, dt$
14. $\int \cos\theta \cos^5(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta$
15. $\int \dfrac{\cos^5 \alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}\alpha}}\, d\alpha$
16. $\int x \operatorname{sen}^3 x\, dx$
17. $\int \cos^2 x \operatorname{tg}^3 x\, dx$
18. $\int \operatorname{cotg}^5 \theta \operatorname{sen}^4 \theta\, d\theta$
19. $\int \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\, dx$
20. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} 2x\, dx$
21. $\int \operatorname{tg} x \sec^3 x\, dx$
22. $\int \operatorname{tg}^2 \theta \sec^4 \theta\, d\theta$
23. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$
24. $\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)\, dx$
25. $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x\, dx$
26. $\int_0^{\pi/4} \sec^4 \theta \operatorname{tg}^4 \theta\, d\theta$
27. $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x\, dx$
28. $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^3 x\, dx$
29. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec x\, dx$
30. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^4 t\, dt$
31. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$
32. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec x\, dx$
33. $\int x \sec x \operatorname{tg} x\, dx$
34. $\int \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^3 \phi}\, d\phi$
35. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^2 x\, dx$
36. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^3 x\, dx$
37. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^5 \phi \operatorname{cossec}^3 \phi\, d\phi$
38. $\int \operatorname{cossec}^4 x \operatorname{cotg}^6 x\, dx$
39. $\int \operatorname{cossec} x\, dx$
40. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{cossec}^3 x\, dx$
41. $\int \operatorname{sen} 8x \cos 5x\, dx$
42. $\int \cos \pi x \cos 4\pi x\, dx$
43. $\int \operatorname{sen} 5\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta$
44. $\int \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x}\, dx$
45. $\int_0^{\pi/6} \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx$
46. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 - \cos 4\theta}\, d\theta$
47. $\int \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sec^2 x}\, dx$
48. $\int \dfrac{dx}{\cos x - 1}$
49. $\int x \operatorname{tg}^2 x\, dx$

50. Se $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^6 x \sec x\, dx = I$, expresse o valor de $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^8 x \sec x\, dx$ em termos de I.

51–54 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique se sua resposta é razoável colocando em um gráfico o integrando e sua primitiva (tome $C = 0$).

51. $\int x \operatorname{sen}^2(x^2)\, dx$
52. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x\, dx$
53. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 6x\, dx$
54. $\int \sec^4 \dfrac{x}{2}\, dx$

55. Encontre o valor médio da função $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$.

56. Calcule $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$ por quatro métodos:
(a) a substituição $u = \cos x$,
(b) a substituição $u = \operatorname{sen} x$,
(c) a identidade $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
(d) integração por partes
Explique os aspectos diferentes de suas respostas.

57–58 Encontre a área da região delimitada pelas curvas dadas.

57. $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = \cos^2 x$, $-\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/4$

58. $y = \operatorname{sen}^3 x$, $y = \cos^3 x$, $\pi/4 \leqslant x \leqslant 5\pi/4$

É necessário uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

59–60 Use um gráfico do integrando para conjecturar o valor da integral. Então, utilize os métodos desta seção para demonstrar que sua conjectura está correta.

59. $\int_0^{2\pi} \cos^3 x\, dx$

60. $\int_0^2 \operatorname{sen} 2\pi x \cos 5\pi x\, dx$

61–64 Encontre o volume obtido pela rotação da região delimitada pelas curvas dadas em torno dos eixos especificados.

61. $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$; em torno do eixo x

62. $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; em torno do eixo x

63. $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$; em torno do $y = 1$

64. $y = \sec x$, $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/3$; em torno do $y = -1$

65. Uma partícula se move em linha reta com função velocidade $v(t) = \operatorname{sen} \omega t \cos^2 \omega t$. Encontre sua função posição $s = f(t)$ se $f(0) = 0$.

66. A eletricidade doméstica é fornecida na forma de corrente alternada que varia de 155 V a -155 V com uma frequência de 60 ciclos por segundo (Hz). A voltagem então é dada pela seguinte equação:

$$E(t) = 155 \operatorname{sen}(120\pi t)$$

onde t é o tempo em segundos. Os voltímetros leem a voltagem RMS (raiz da média quadrática), que é a raiz quadrada do valor médio de $[E(t)]^2$ em um ciclo.

(a) Calcule a voltagem RMS da corrente doméstica.

(b) Muitos fornos elétricos requerem a voltagem RMS de 220 V. Encontre a amplitude A correspondente necessária para a voltagem $E(t) = A \operatorname{sen}(120\pi t)$.

67–69 Demonstre a fórmula, onde m e n são inteiros positivos.

67. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = 0$

68. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$

69. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \pi & \text{se } m = n \end{cases}$

70. Uma *série de Fourier finita* é dada pela soma

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen} nx \\ &= a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_N \operatorname{sen} Nx \end{aligned}$$

Mostre que o m-ésimo coeficiente a_m é dado pela fórmula

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\, dx$$

7.3 Substituição Trigonométrica

Para encontrar a área de um círculo ou uma elipse, uma integral da forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ aparece, onde $a > 0$. Se ela fosse $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, a substituição $u = a^2 - x^2$ poderia ser eficaz, mas, como está, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ dx é mais difícil. Se mudarmos a variável de x para θ pela substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$, então a identidade $1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ permitirá que nos livremos da raiz, porque

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a\,|\cos\theta|$$

Observe a diferença entre a substituição $u = a^2 - x^2$ (na qual a nova variável é uma função da antiga) e a substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$ (a variável antiga é uma função da nova).

Em geral, podemos fazer uma substituição da forma $x = g(t)$, usando a Regra da Substituição ao contrário. Para simplificarmos nossos cálculos, presumimos que g tenha uma função inversa, isto é, g é injetora. Nesse caso, se substituirmos u por x e x por t na Regra de Substituição (Equação 5.5.4), obteremos

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))g'(t)\, dt$$

Esse tipo de substituição é chamado de *substituição inversa*.

Podemos fazer a substituição inversa $x = a \operatorname{sen} \theta$ desde que esta defina uma função injetora. Isso pode ser conseguido pela restrição de θ no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Na tabela a seguir listamos as substituições trigonométricas que são eficazes para as expressões radicais dadas em razão de certas identidades trigonométricas. Em cada caso, a restrição de θ é imposta para assegurar que a função que define a substituição seja injetora. (Estes são os mesmos intervalos usados na Seção 1.6 na definição de funções inversas.)