O Teorema 7 está ilustrado na Figura 3. Quando f é positiva e par, a parte (a) diz que a área sob $y = f(x)$ de $-a$ até a é o dobro da área de 0 até a em virtude da simetria. Lembre-se de que uma integral $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser expressa como a área acima do eixo x e abaixo de $y = f(x)$ menos a área abaixo do eixo x e acima da curva. Assim, a parte (b) diz que a integral é 0, pois as áreas se cancelam.

EXEMPLO 10 Uma vez que $f(x) = x^6 + 1$ satisfaz $f(-x) = f(x)$, ela é par, e portanto

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx = 2\int_0^2 (x^6 + 1)\,dx$$
$$= 2\left[\tfrac{1}{7}x^7 + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}$$

EXEMPLO 11 Já que $f(x) = (\operatorname{tg} x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisfaz $f(-x) = -f(x)$, ela é ímpar, e por conseguinte

$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0$$

5.5 Exercícios

1–6 Calcule a integral fazendo a substituição dada.

1. $\int \cos 3x\,dx, \quad u = 3x$

2. $\int x(4 + x^2)^{10}\,dx, \quad u = 4 + x^2$

3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$

4. $\int \frac{dt}{(1 - 6t)^4}, \quad u = 1 - 6t$

5. $\int \cos^3\theta\ \operatorname{sen}\theta\,d\theta, \quad \theta = \cos\theta$

6. $\int \frac{\sec^2(1/x)}{x^2}\,dx, \quad u = 1/x$

7–48 Calcule a integral indefinida.

7. $\int x\operatorname{sen}(x^2)\,dx$

8. $\int x^2 e^{x^3}\,dx$

9. $\int (3x - 2)^{20}\,dx$

10. $\int (3t + 2)^{2{,}4}\,dt$

11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2}\,dx$

12. $\int \sec^2 2\theta\,d\theta$

13. $\int \frac{dx}{5 - 3x}$

14. $\int u\sqrt{1 - u^2}\,du$

15. $\int \operatorname{sen}\pi t\,dt$

16. $\int e^x\operatorname{sen}(e^x)\,dx$

17. $\int \frac{e^u}{(1 - e^u)^2}\,du$

18. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

19. $\int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}}\,dx$

20. $\int \frac{z^2}{z^3 + 1}\,dz$

21. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

22. $\int \cos^4\theta\ \operatorname{sen}\theta\,d\theta$

23. $\int \sec^2\theta\ \operatorname{tg}^3\theta\,d\theta$

24. $\int \sqrt{x}\ \operatorname{sen}(1 + x^{3/2})\,dx$

25. $\int e^x\sqrt{1 + e^x}\,dx$

26. $\int \frac{dx}{ax + b} \quad (a \neq 0)$

27. $\int (x^2 + 1)(x^3 + 3x)^4\,dx$

28. $\int e^{\cos t}\operatorname{sen} t\,dt$

29. $\int 5^t\operatorname{sen}(5^t)\,dt$

30. $\int \frac{\operatorname{tg}^{-1}x}{1 + x^2}\,dx$

31. $\int e^{\operatorname{tg} x}\sec^2 x\,dx$

32. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx$

33. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

34. $\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}\,dx$

35. $\int \sqrt{\operatorname{cotg} x}\ \operatorname{cossec}^2 x\,dx$

36. $\int \frac{2^t}{2^t + 3}\,dt$

37. $\int \operatorname{senh}^2 x\cosh x\,dx$

38. $\int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1 + \operatorname{tg} t}}$

39. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos^2 x}\,dx$

40. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\,dx$

41. $\int \operatorname{cotg} x\,dx$

42. $\int \operatorname{sen} t\ \sec^2(\cos t)\,dt$

43. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\ \operatorname{sen}^{-1}x}$

44. $\int \frac{x}{1 + x^4}\,dx$

45. $\int \frac{1 + x}{1 + x^2}\,dx$

46. $\int x^2\sqrt{2 + x}\,dx$

47. $\int x(2x + 5)^8\,dx$

48. $\int x^3\sqrt{x^2 + 1}\,dx$

49–52 Calcule a integral indefinida. Ilustre e verifique que sua resposta é razoável fazendo o gráfico da função e de sua primitiva (tome $C = 0$).

49. $\int x(x^2 - 1)^3\,dx$

50. $\int \operatorname{tg}^2\theta\ \sec^2\theta\,d\theta$

51. $\int e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$

52. $\int \operatorname{sen} x\cos^4 x\,dx$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

53–73 Avalie a integral definida.

53. $\int_0^1 \cos(\pi t/2)\, dt$

54. $\int_0^1 (3t - 1)^{50}\, dt$

55. $\int_0^1 \sqrt[3]{1 + 7x}\, dx$

56. $\int_0^3 \dfrac{dx}{5x + 1}$

57. $\int_0^\pi \sec^2(t/4)\, dt$

58. $\int_{1/6}^{1/2} \operatorname{cossec} \pi t \ \operatorname{cotg} \pi t\, dt$

59. $\int_1^2 \dfrac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

60. $\int_0^1 x e^{-x^2}\, dx$

61. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4 \operatorname{tg} x)\, dx$

62. $\int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\, dx$

63. $\int_0^{13} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(1 + 2x)^2}}$

64. $\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

65. $\int_0^a x\sqrt{x^2 + a^2}\, dx \quad (a > 0)$

66. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \operatorname{sen} x\, dx$

67. $\int_1^2 x\sqrt{x - 1}\, dx$

68. $\int_0^4 \dfrac{x}{\sqrt{1 + 2x}}\, dx$

69. $\int_e^{e^4} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

70. $\int_0^{1/2} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

71. $\int_0^1 \dfrac{e^z + 1}{e^z + z}\, dz$

72. $\int_0^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi t/T - \alpha)\, dt$

73. $\int_0^1 \dfrac{dx}{(1 + \sqrt{x})^4}$

74. Verifique que $f(x) = \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}$ é uma função ímpar e use este fato para mostrar que

$$0 \leqslant \int_{-2}^{3} \operatorname{sen} \sqrt[3]{x}\, dx \leqslant 1.$$

75–76 Use um gráfico para dar uma estimativa grosseira da área da região que está sob a curva dada. Encontre a seguir a área exata.

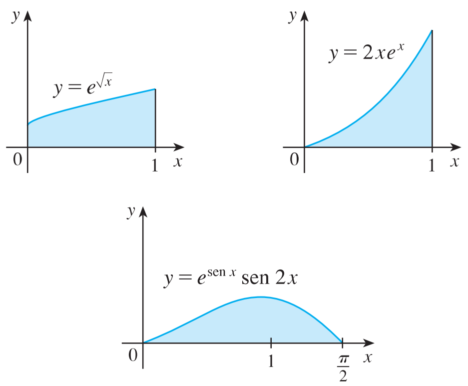
75. $y = \sqrt{2x + 1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

76. $y = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

77. Calcule $\int_{-2}^{2} (x + 3)\sqrt{4 - x^2}\, dx$ escrevendo-a como uma soma de duas integrais e interpretando uma dessas integrais em termos de uma área.

78. Calcule $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^4}\, dx$ fazendo uma substituição e interpretando a integral resultante em termos de uma área.

79. Quais das seguintes áreas são iguais? Por quê?



80. Um modelo para a taxa de metabolismo basal, em kcal/h, de um homem jovem é $R(t) = 85 - 0{,}18 \cos(\pi t/12)$, em que t é o tempo em horas medido a partir de 5 horas da manhã. Qual é o metabolismo basal total deste homem, $\int_0^{24} R(t)\, dt$, em um período de 24 horas?

81. Um tanque de armazenamento de petróleo sofre uma ruptura em $t = 0$ e o petróleo vaza do tanque a uma taxa de $r(t) = 100e^{-0{,}01t}$ litros por minuto. Quanto petróleo vazou na primeira hora?

82. Uma população de bactérias tem inicialmente 400 bactérias e cresce a uma taxa de $r(t) = (450{,}268)e^{1{,}12567t}$ bactérias por hora. Quantas bactérias existirão após 3 horas?

83. A respiração é cíclica e o ciclo completo respiratório desde o início da inalação até o fim da expiração demora cerca de 5 s. A taxa máxima de fluxo de ar nos pulmões é de cerca de 0,5 L/s. Isso explica, em partes, porque a função $f(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\pi t/5)$ tem sido frequentemente utilizada para modelar a taxa de fluxo de ar nos pulmões. Use esse modelo para encontrar o volume de ar inalado nos pulmões no instante t.

84. A Alabama Instruments Company preparou uma linha de montagem para fabricar uma nova calculadora. A taxa de produção dessas calculadoras após t semanas é

$$\frac{dx}{dt} = 5\,000\left(1 - \frac{100}{(t + 10)^2}\right) \text{calculadoras}/\textit{semana}.$$

(Observe que a produção tende a 5 000 por semana à medida que passa o tempo, mas a produção inicial é baixa, pois os trabalhadores não estão familiarizados com as novas técnicas.) Encontre o número de calculadoras produzidas no começo da terceira semana até o fim da quarta semana.

85. Se f for contínua e $\int_0^4 f(x)\, dx = 10$, calcule $\int_0^2 f(2x)\, dx$.

86. Se f for contínua e $\int_0^9 f(x)\, dx = 4$, calcule $\int_0^3 x f(x^2)\, dx$.

87. Se f for contínua em $\mathbb{R}$, demonstre que

$$\int_a^b f(-x)\, dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\, dx.$$

Para o caso onde $f(x) \geqslant 0$ e $0 < a < b$, faça um diagrama para interpretar geometricamente essa equação como uma igualdade de áreas.

88. Se f for contínua em $\mathbb{R}$, demonstre que

$$\int_a^b f(x + c)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\, dx.$$

Para o caso onde $f(x) \geqslant 0$, faça um diagrama para interpretar geometricamente essa equação como uma igualdade de áreas.

89. Se a e b forem números positivos, mostre que

$$\int_0^1 x^a(1 - x)^b\, dx = \int_0^1 x^b(1 - x)^a\, dx.$$

90. Se f é contínua em $[0, \pi]$, use a substituição $u = \pi - x$ para demonstrar que

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\, dx.$$

91. Use o Exercício 90 para calcular a integral

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

92. (a) Se f é contínua, mostre que

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x)\, dx.$$

(b) Use a parte (a) para calcular $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$ e $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\, dx$.