Grafos - Conceitos Básicos

Prof. Andrei Braga

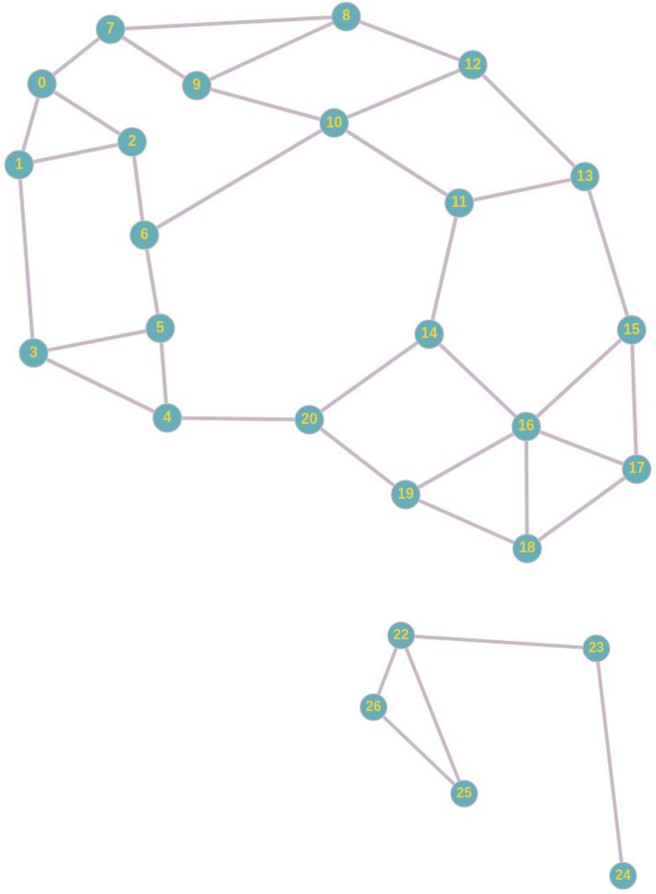
UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

Conteúdo

- Motivação (revisão)
- Conceitos básicos
- Exercícios
- Referências

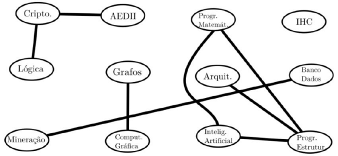
Motivação (Revisão)

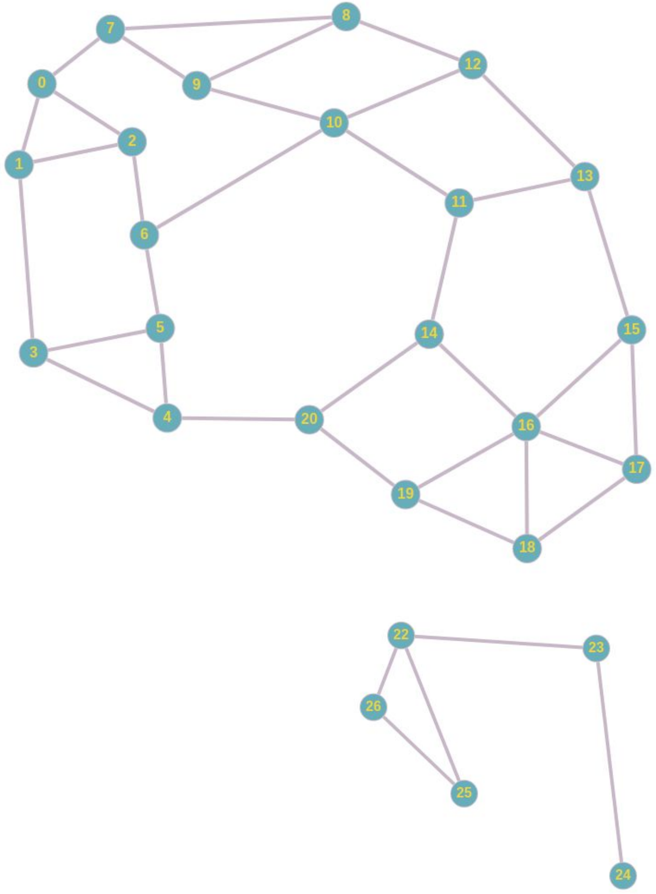
- Muitas aplicações computacionais envolvem
  - Itens (dados ou conjuntos de dados)
  - Conexões entre os itens
- Para modelar situações como estas, usamos uma estrutura matemática (ou uma estrutura de dados) chamada de **grafos**



Motivação (Revisão)

- Exemplos de aplicações:
  - Problemas de roteamento
  - Estudo de redes sociais
  - Problemas de topologia em redes
  - Problemas de alocação

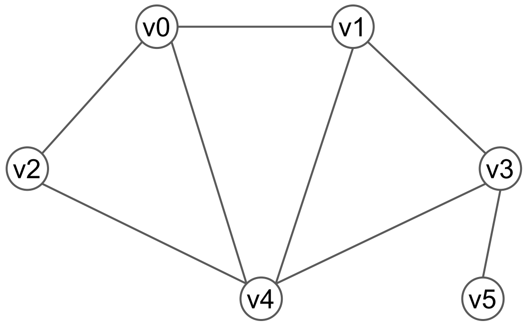




Grafo

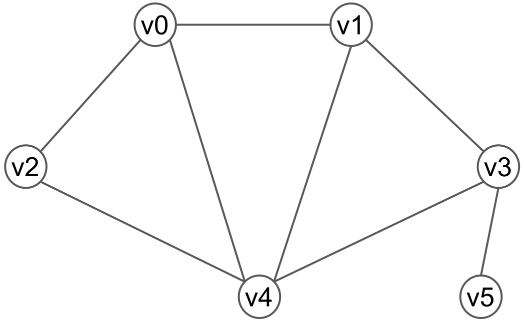
- Um **grafo** G é um par ordenado (V, E) composto por
  - um conjunto de **vértices** V e
  - um conjunto de **arestas** E, sendo cada aresta um conjunto $\{ v_i , v_j \}$ de dois vértices de G
    - note que $\{ v_i , v_j \} = \{ v_j , v_i \}$, ou seja, não consideramos uma direção para a aresta

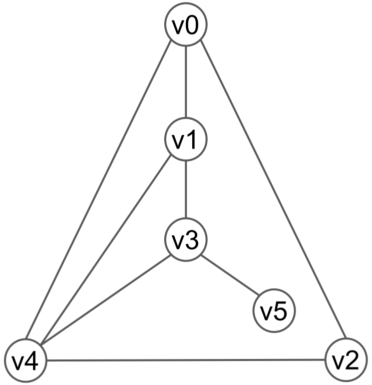
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \},$
      $\{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \},$
      $\{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$



Desenho de um grafo

- Um **desenho** de um grafo é uma representação gráfica do grafo onde
  - **pontos** (ou **círculos**) representam os vértices do grafo e
  - **linhas** conectando os pontos (ou círculos) representam as arestas do grafo
- Um desenho nos dá uma intuição sobre a estrutura do grafo, mas devemos usar esta intuição com cautela, porque o grafo é definido independentemente das suas representações gráficas
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

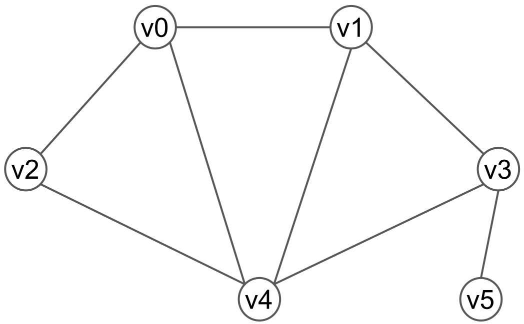




Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
  - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

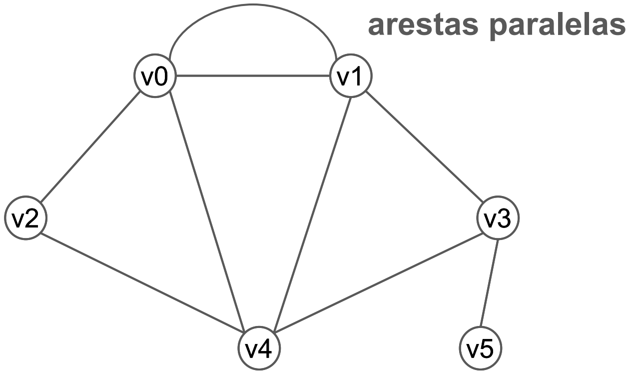
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \},$
      $\{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \},$
      $\{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$



Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
  - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

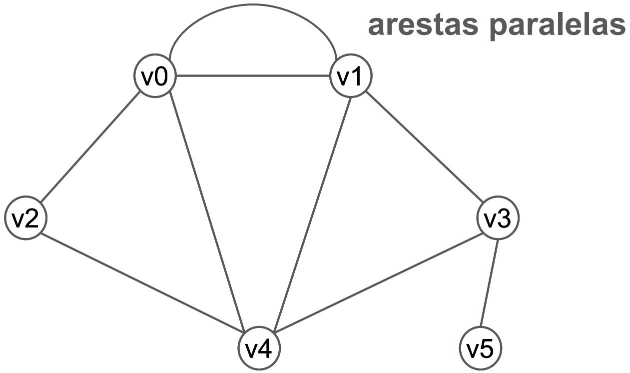
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \},$
      $\{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \},$
      $\{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$



Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
  - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

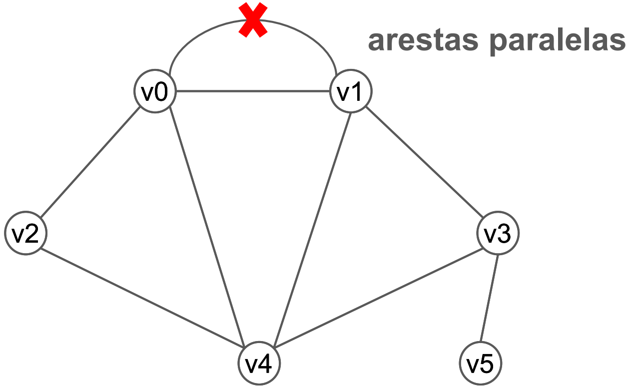
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \}, \boldsymbol{\{ v_0, v_1 \}} \}$



Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
  - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

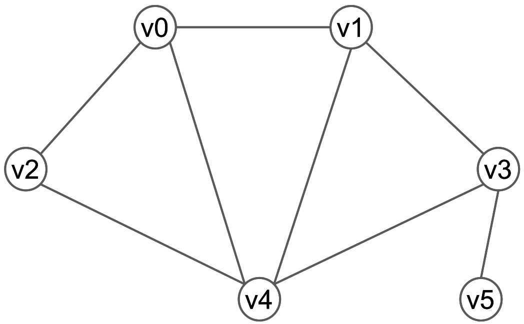
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \},$
      $\{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \},$
      $\{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \}, \cancel{\boldsymbol{\{ v_0, v_1 \}}} \}$



Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
  - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

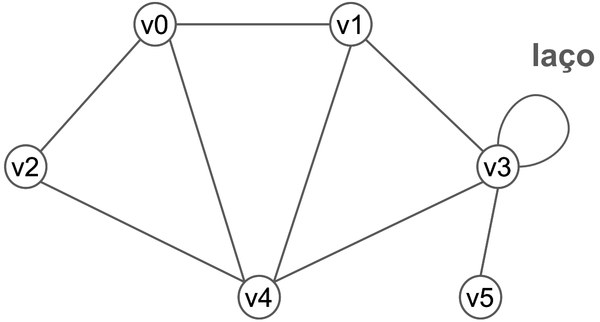
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$



Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
  - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

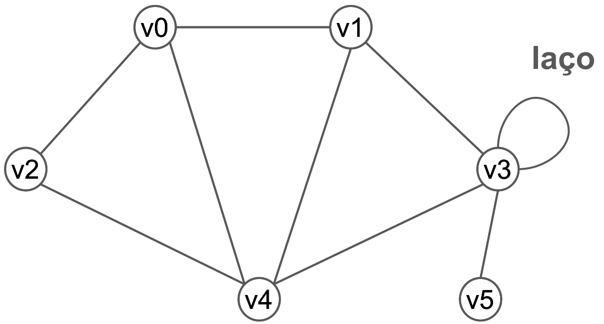
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$



Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
  - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

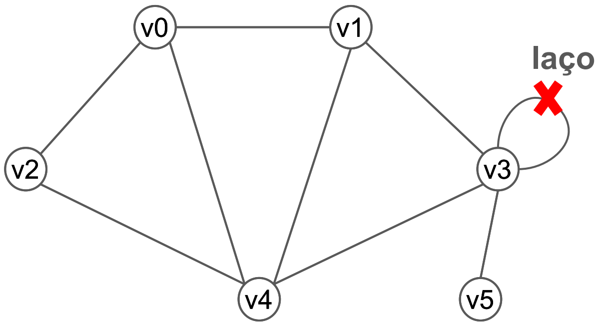
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \},$
      $\{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \},$
      $\{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \}, \boldsymbol{\{ v_3, v_3 \}} \}$



Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
  - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

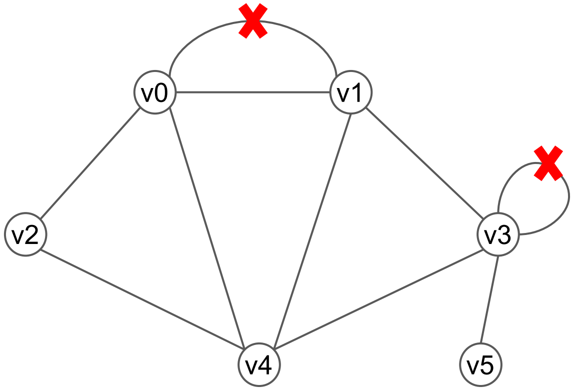
- Exemplo:
  - $G = (V, E)$, onde
    - $V = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
    - $E = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \},$
      $\{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \},$
      $\{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \}, \cancel{\boldsymbol{\{ v_3, v_3 \}}} \}$



Grafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um grafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas conectando um mesmo par de vértices e
  - não podem existir arestas que conectam um vértice a ele mesmo

- Um grafo que não contém arestas paralelas nem laços também é chamado de **grafo simples**



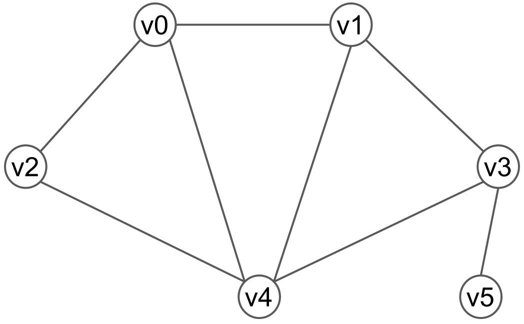
Grafo (simples)

- **Propriedade:** Um grafo (simples) $G = (V, E)$ possui no máximo $|V|\,(|V| - 1) / 2$ arestas.
- Prova:
  - Para cada vértice, a quantidade máxima de arestas conectando o vértice aos outros vértices é $|V| - 1$.
  - O somatório de todas estas quantidades é $|V|\,(|V| - 1)$.
  - Neste somatório, cada aresta é contada duas vezes (como $\{ v_i , v_j \}$ e como $\{ v_j , v_i \}$).
  - Portanto, G possui no máximo $|V|\,(|V| - 1) / 2$ arestas. □

Ordem e tamanho

- Dado um grafo $G = (V, E)$, denotamos por
  - $V(G)$ o conjunto de vértices de G, ou seja, $V(G) = V$ e
  - $E(G)$ o conjunto de arestas de G, ou seja, $E(G) = E$
- Dizemos que
  - a **ordem** de G é o número de vértices de G, ou seja, $|V(G)|$, e
  - o **tamanho** de G é o número de arestas de G, ou seja $|E(G)|$

- Exemplo:
  - A ordem do grafo ao lado é 6 e o seu tamanho é 8

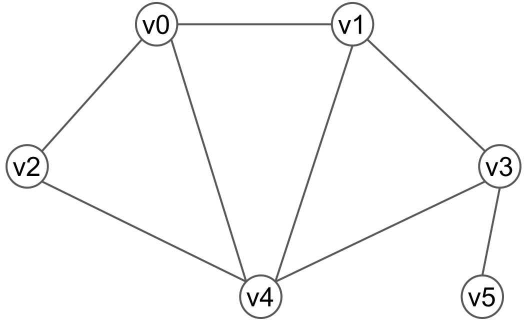


Vizinhança e grau

- Por simplicidade, também denotamos uma aresta $\{ v_i , v_j \}$ como v_iv_j
- Dada uma aresta v_iv_j, os vértices v_i e v_j são os **extremos** desta aresta

- Se v_iv_j é uma aresta de um grafo G, então
  - os vértices v_i e v_j são **vizinhos** ou **adjacentes** em G,
  - v_i é **vizinho** de v_j em G (e vice-versa),
  - v_i é **adjacente** a v_j em G (e vice-versa) e
  - a aresta v_iv_j **incide** em v_i e incide em v_j

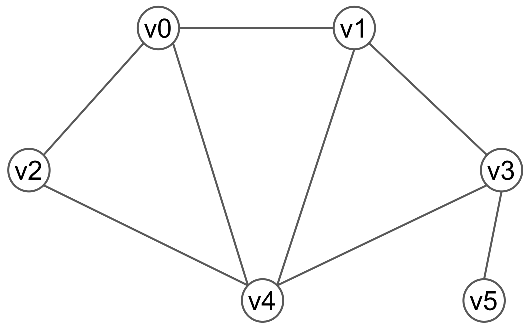
- Exemplo:
  - No grafo ao lado, v_0 é vizinho de (ou adjacente a) v_2 (e vice-versa), os vizinhos de v_3 são v_1, v_4 e v_5 e a aresta v_1v_4 incide em v_1 e em v_4



Vizinhança e grau

- Dado um vértice v_i de um grafo G,
  - a **vizinhança** de v_i em G é o conjunto dos vizinhos de v_i em G e
  - o **grau** de v_i em G é o número de arestas de G incidentes em v_i
- Denotamos por
  - $N_G(v_i)$, ou simplesmente $N(v_i)$, a vizinhança de v_i em G e
  - $d_G(v_i)$, ou simplesmente $d(v_i)$, o grau de v_i em G
- Note que $d_G(v_i) = | N_G(v_i) |$

- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $N(v_0) = \{ v_1, v_2, v_4 \}$ e $N(v_5) = \{ v_3 \}$ e
    - $d(v_0) = 3$, $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 3$, $d(v_4) = 4$ e $d(v_5) = 1$

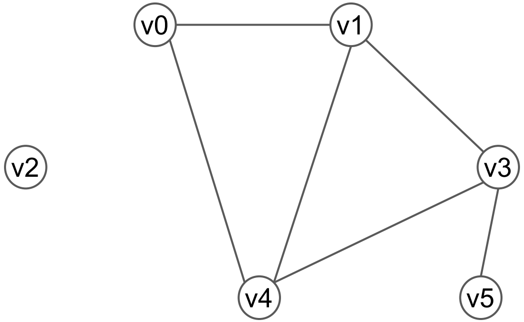


Vizinhança e grau

- Dado um vértice v_i de um grafo G,
  - a **vizinhança** de v_i em G é o conjunto dos vizinhos de v_i em G e
  - o **grau** de v_i em G é o número de arestas de G incidentes em v_i
- Denotamos por
  - $N_G(v_i)$, ou simplesmente $N(v_i)$, a vizinhança de v_i em G e
  - $d_G(v_i)$, ou simplesmente $d(v_i)$, o grau de v_i em G
- Note que $d_G(v_i) = | N_G(v_i) |$

- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $d(v_2) = 0$

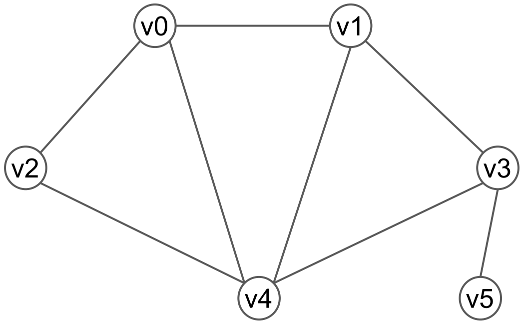
Chamamos de vértice **isolado** um vértice v_i tal que $d(v_i) = 0$



Grau mínimo e máximo

- Dado um grafo G,
  - o **grau mínimo** de G, denotado por $\delta(G)$, é o menor grau de um vértice de G, ou seja, $\delta(G) = \min\{\ d(v_i) : v_i \in V(G)\ \}$
  - o **grau máximo** de G, denotado por $\Delta(G)$, é o maior grau de um vértice de G, ou seja, $\Delta(G) = \max\{\ d(v_i) : v_i \in V(G)\ \}$

- Exemplo:
  - Para o grafo ao lado, $\delta(G) = 1$ e $\Delta(G) = 4$



Exercícios

1. É possível construir um grafo tal que $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3 \}$ e $d(v_0) = 0$, $d(v_1) = 1$, $d(v_2) = 2$ e $d(v_3) = 3$?

Exercícios

2. Prove que, em qualquer grupo de duas ou mais pessoas, sempre existem duas pessoas (podem existir mais de duas) que possuem exatamente o mesmo número de amigos presentes no grupo.

Exercícios

2. Prove que, em qualquer grupo de duas ou mais pessoas, sempre existem duas pessoas (podem existir mais de duas) que possuem exatamente o mesmo número de amigos presentes no grupo.

   Prova:

   - Considere o grafo G que é definido da seguinte maneira:
     - os vértices do grafo correspondem às pessoas do grupo e
     - existe uma aresta entre os vértices v_i e v_j se e somente se as pessoas correspondentes a v_i e v_j são amigas
   - A princípio, existem $|V(G)|$ valores possíveis para o grau de um vértice de G: $0, 1, 2, \ldots, |V(G)| - 1$

Exercícios

2. Prove que, em qualquer grupo de duas ou mais pessoas, sempre existem duas pessoas (podem existir mais de duas) que possuem exatamente o mesmo número de amigos presentes no grupo.

   Prova:

   - No entanto, se existe um vértice de G com grau 0, então não pode existir um vértice de G com grau $|V(G)| - 1$
   - O contrário também vale: se existe um vértice de G com grau $|V(G)| - 1$, então não pode existir um vértice de G com grau 0
   - Portanto, na verdade, existem apenas $|V(G)| - 1$ valores possíveis para o grau de um vértice de G
   - Como existem $|V(G)|$ vértices em G, pelo menos dois dos vértices de G possuem o mesmo grau □

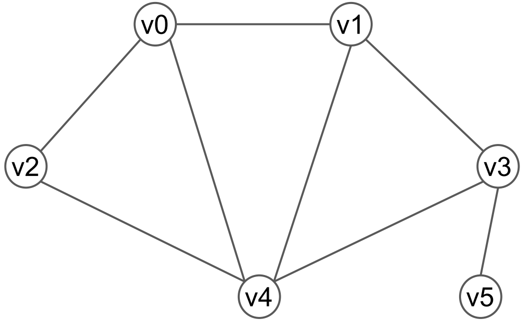
Princípio da casa dos pombos

Igualdade entre grafos

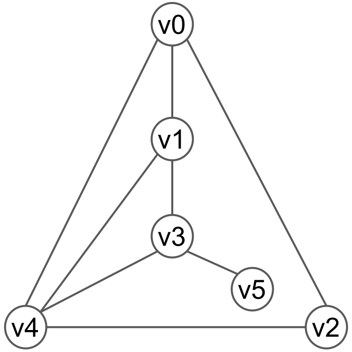
- Dois grafos G_1 e G_2 são **iguais** se
  - $V(G_1) = V(G_2)$ e
  - $E(G_1) = E(G_2)$

- Exemplo:

G_1



G_2



  - $V(G_1) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G_1) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

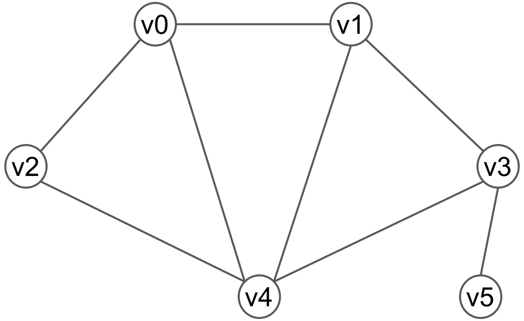
  - $V(G_1) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G_1) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

Isomorfismo

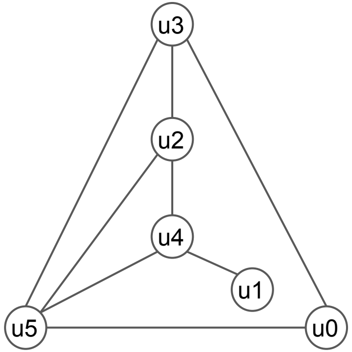
- Dois grafos G_1 e G_2 são **isomorfos** se apresentam estruturas idênticas quando os rótulos de seus vértices são ignorados

- Exemplo:

G_1



G_2



  - $V(G_1) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G_1) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

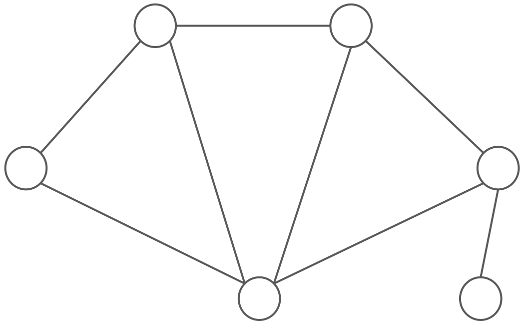
  - $V(G_1) = \{ u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \}$ e
  - $E(G_1) = \{ \{ u_0, u_3 \}, \{ u_0, u_5 \}, \{ u_1, u_4 \}, \{ u_2, u_3 \}, \{ u_2, u_4 \}, \{ u_2, u_5 \}, \{ u_3, u_5 \}, \{ u_4, u_5 \} \}$

Isomorfismo

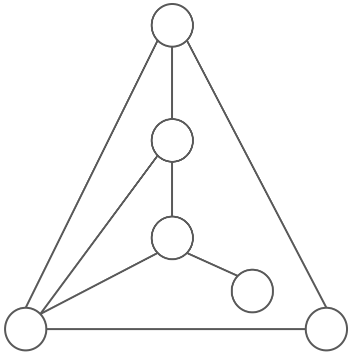
- Dois grafos G_1 e G_2 são **isomorfos** se apresentam estruturas idênticas quando os rótulos de seus vértices são ignorados

- Exemplo:

G_1



G_2

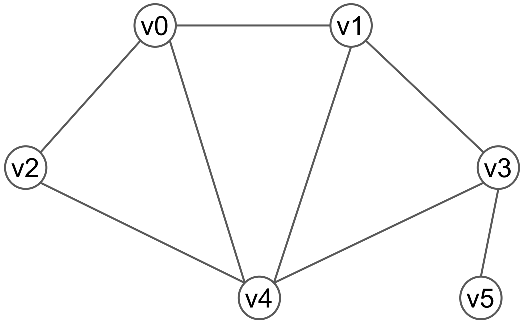


Isomorfismo

- Dois grafos G_1 e G_2 são **isomorfos** se existe uma função bijetiva $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que $v_i v_j$ é uma aresta de G_1 se e somente se $f(v_i)f(v_j)$ é uma aresta de G_2

- Exemplo:

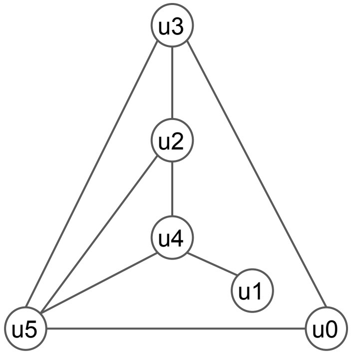
G_1



função f :

- $v_0 \rightarrow u_3$
- $v_1 \rightarrow u_2$
- $v_2 \rightarrow u_0$
- $v_3 \rightarrow u_4$
- $v_4 \rightarrow u_5$
- $v_5 \rightarrow u_1$

G_2



👏👏👏

Isomorfismo

- Dois grafos G_1 e G_2 são **isomorfos** se existe uma função bijetiva $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que $v_i v_j$ é uma aresta de G_1 se e somente se $f(v_i)f(v_j)$ é uma aresta de G_2

- Determinar se dois grafos são isomorfos ou não é um **problema difícil**!

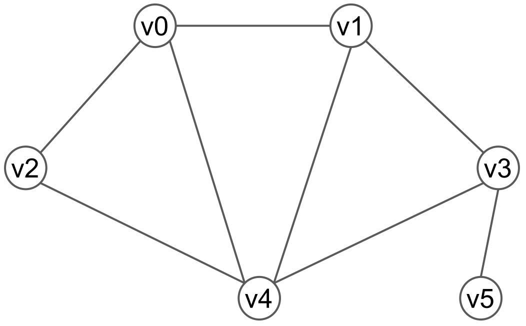
Exercícios

3. Mostre que os grafos G_1 e G_2 definidos a seguir são isomorfos.
   $V(G_1)$ ={ a, b, c, d, e }, $E(G_1)$={ { a, b }, { a, c }, { a, e }, { b, d }, { b, e }, { c, d } }
   $V(G_2)$ ={ v, w, x, y, z }, $E(G_2)$={ { v, x }, { v, y }, { w, x }, { w, z }, { x, y }, { y, z } }

Passeio

- Um **passeio** em um grafo *G* é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de *G* tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em *G* do seu antecessor

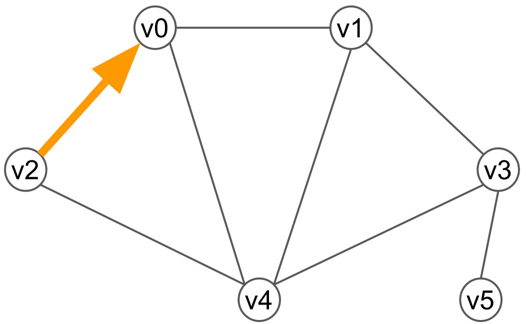
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_0v_4v_1v_0v_4v_3$ é um passeio no grafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um grafo *G* é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de *G* tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em *G* do seu antecessor

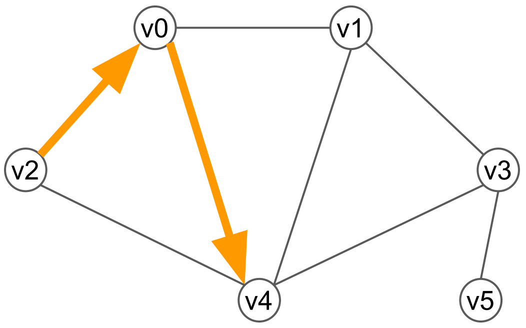
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_0v_4v_1v_0v_4v_3$ é um passeio no grafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um grafo G é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de G tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em G do seu antecessor

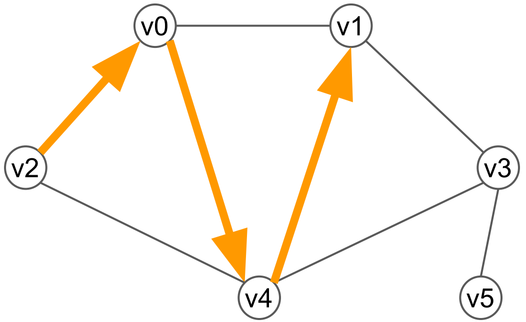
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_0v_4v_1v_0v_4v_3$ é um passeio no grafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um grafo *G* é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\dots v_{ik}$ de *G* tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em *G* do seu antecessor

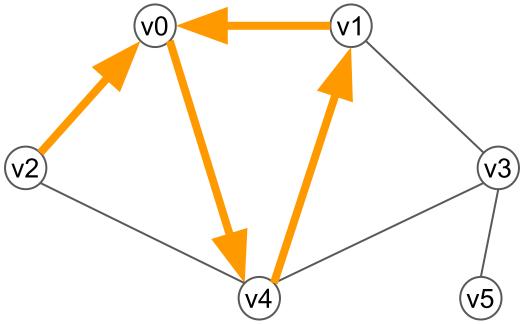
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_0v_4v_1v_0v_4v_3$ é um passeio no grafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um grafo *G* é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de *G* tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em *G* do seu antecessor

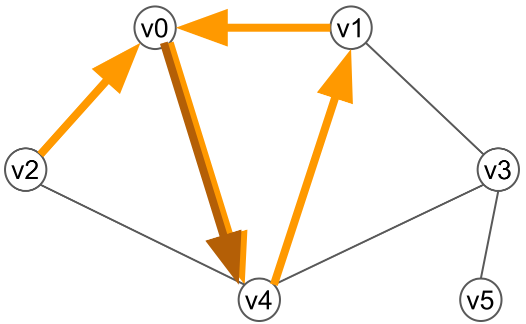
- Exemplo:
    - A sequência $v_2v_0v_4v_1v_0v_4v_3$ é um passeio no grafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um grafo G é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de G tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em G do seu antecessor

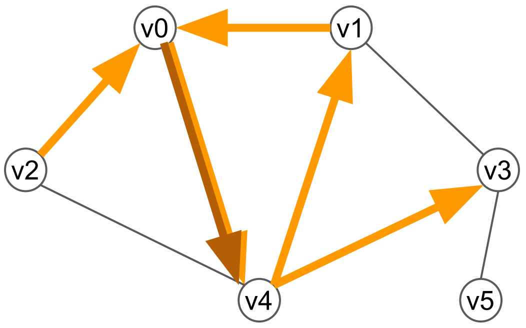
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_0v_4v_1v_0v_4v_3$ é um passeio no grafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um grafo *G* é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de *G* tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em *G* do seu antecessor

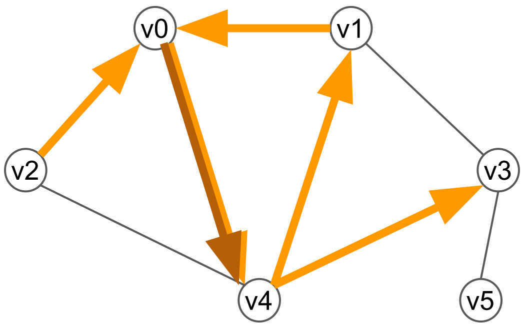
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_0v_4v_1v_0v_4v_3$ é um passeio no grafo ao lado



Passeio

- Um **passeio** em um grafo G é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de G tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em G do seu antecessor

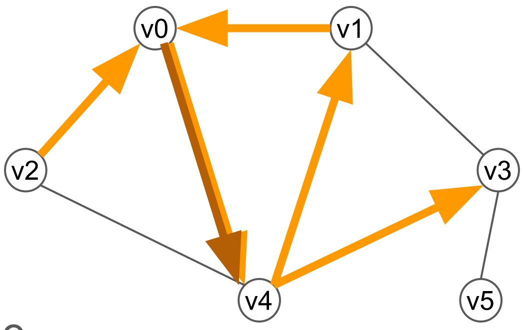
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_0v_4v_1v_0v_4v_3$ é um passeio no grafo ao lado



- Em um passeio, especificamos os vértices, mas as arestas envolvidas também estão implicitamente especificadas
- Por isso, podemos nos referir às **arestas de um passeio**

Passeio

- Um **passeio** em um grafo *G* é uma sequência de vértices $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik}$ de *G* tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho em *G* do seu antecessor

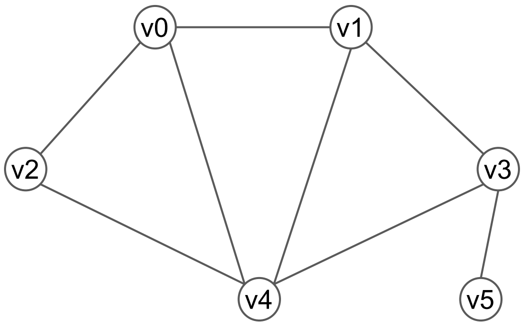


- Dado um passeio $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik-1}v_{ik}$, dizemos que
  - v_{i0} e v_{ik} são os **extremos** do passeio;
  - $v_{i1}, \ldots, v_{ik-1}$ são os **vértices internos** do passeio;
  - o **comprimento** do passeio é *k*, ou seja, a quantidade de arestas percorridas;
  - o passeio é **par** se o seu comprimento é par e é **ímpar** caso contrário e
  - o passeio é **fechado** se $v_{i0} = v_{ik}$ e é **aberto** caso contrário

Trilha

- Uma **trilha** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

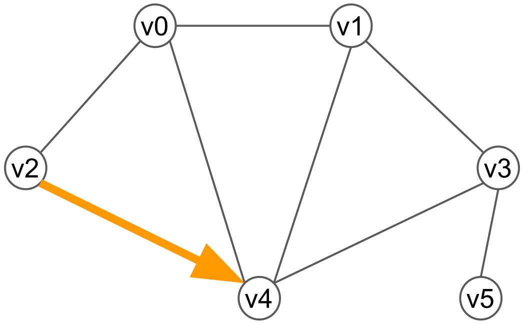
- Exemplo:
  - A sequência $v_2 v_4 v_1 v_0 v_4 v_3$ é uma trilha no grafo ao lado



Trilha

- Uma **trilha** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

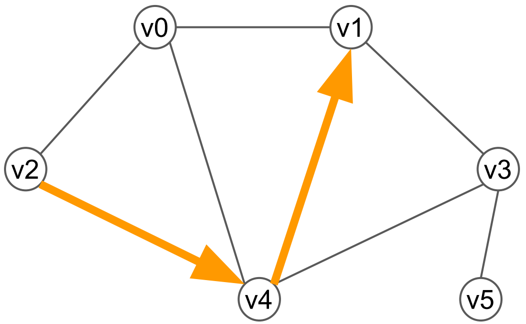
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_4v_1v_0v_4v_3$ é uma trilha no grafo ao lado



Trilha

- Uma **trilha** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

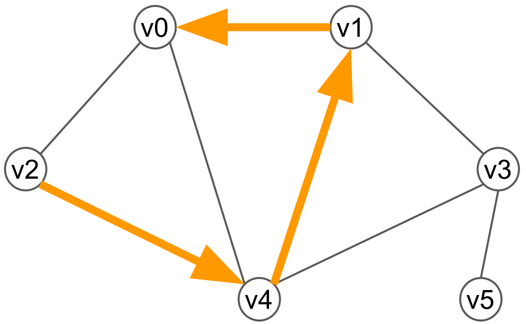
- Exemplo:
    - A sequência $v_2v_4v_1v_0v_4v_3$ é uma trilha no grafo ao lado



Trilha

- Uma **trilha** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

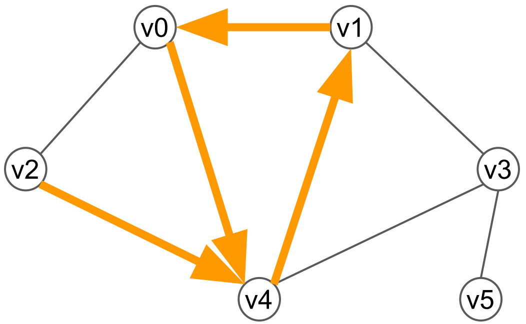
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_4v_1v_0v_4v_3$ é uma trilha no grafo ao lado



Trilha

- Uma **trilha** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

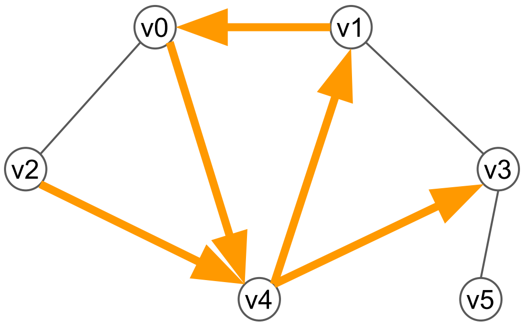
- Exemplo:
    - A sequência $v_2v_4v_1v_0v_4v_3$ é uma trilha no grafo ao lado



Trilha

- Uma **trilha** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem arestas repetidas

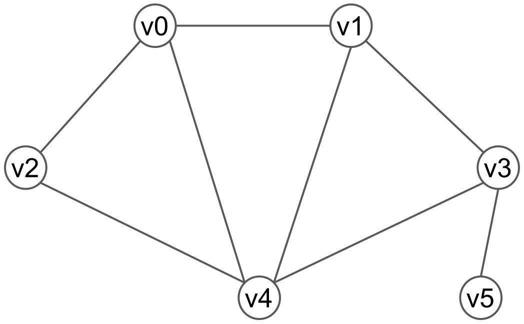
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_4v_1v_0v_4v_3$ é uma trilha no grafo ao lado



Caminho

- Um **caminho** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem vértices repetidos
  - Podemos notar que todo caminho é uma trilha

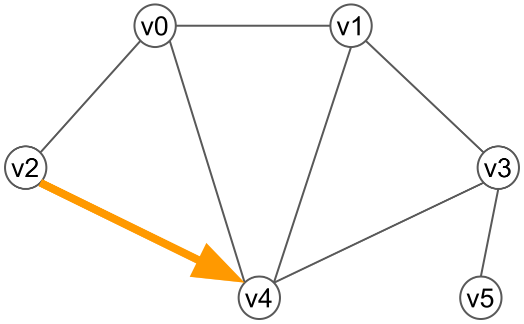
- Exemplo:
  - A sequência $v_2 v_4 v_0 v_1 v_3$ é um caminho no grafo ao lado



Caminho

- Um **caminho** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem vértices repetidos
  - Podemos notar que todo caminho é uma trilha

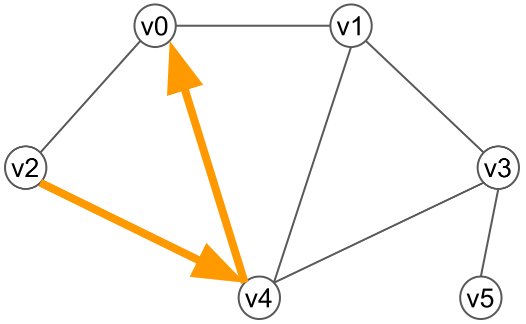
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_4v_0v_1v_3$ é um caminho no grafo ao lado



Caminho

- Um **caminho** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem vértices repetidos
  - Podemos notar que todo caminho é uma trilha

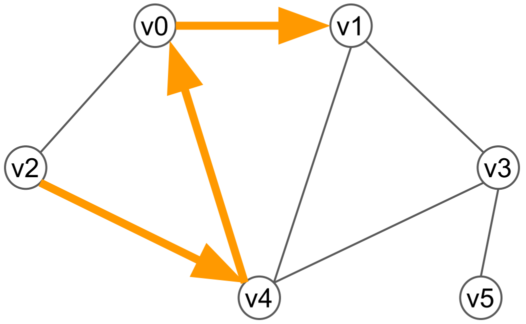
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_4v_0v_1v_3$ é um caminho no grafo ao lado



Caminho

- Um **caminho** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem vértices repetidos
    - Podemos notar que todo caminho é uma trilha

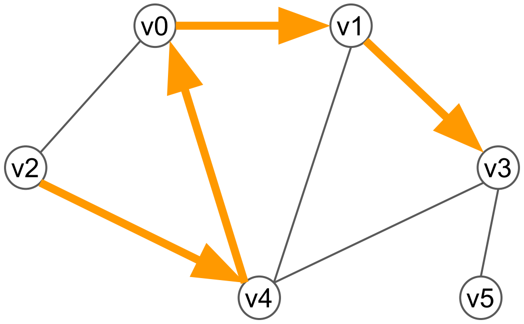
- Exemplo:
    - A sequência $v_2 v_4 v_0 v_1 v_3$ é um caminho no grafo ao lado



Caminho

- Um **caminho** em um grafo *G* é um passeio em *G* onde não existem vértices repetidos
    - Podemos notar que todo caminho é uma trilha

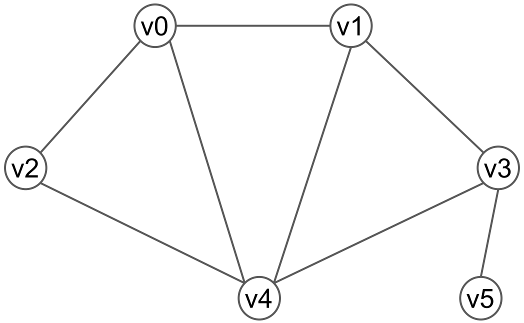
- Exemplo:
    - A sequência $v_2v_4v_0v_1v_3$ é um caminho no grafo ao lado



Ciclo

- Um **ciclo** em um grafo *G* é um passeio fechado em *G*, com comprimento maior ou igual a 3 e onde não existem vértices internos repetidos

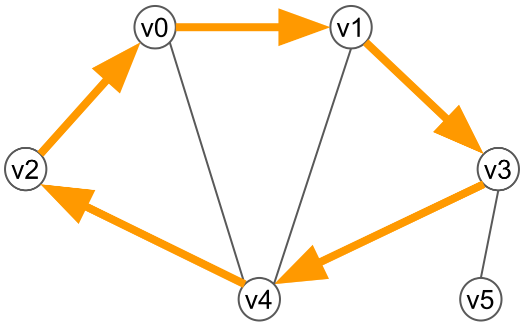
- Exemplo:
  - A sequência $v_2v_0v_1v_3v_4v_2$ é um ciclo no grafo ao lado



Ciclo

- Um **ciclo** em um grafo *G* é um passeio fechado em *G*, com comprimento maior ou igual a 3 e onde não existem vértices internos repetidos

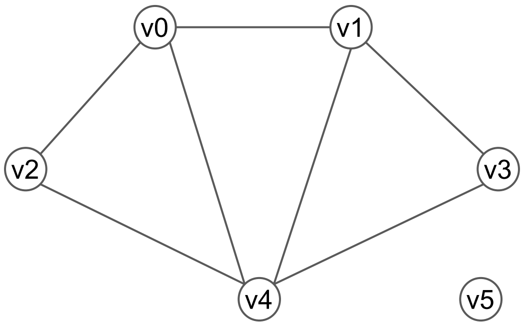
- Exemplo:
  - A sequência $v_2 v_0 v_1 v_3 v_4 v_2$ é um ciclo no grafo ao lado



Distância

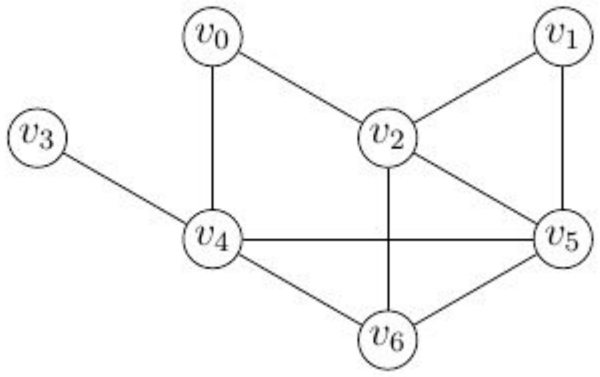
- A **distância** entre dois vértices v_i e v_j em G, denotada por $d(v_i, v_j)$ é
  - o menor comprimento de um caminho entre v_i e v_j em G ou
  - ∞ (infinita) caso não exista um caminho entre v_i e v_j em G

- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $d(v_2, v_3) = 2$,
    - $d(v_0, v_1) = 1$,
    - $d(v_4, v_4) = 0$ e
    - $d(v_1, v_5) = \infty$



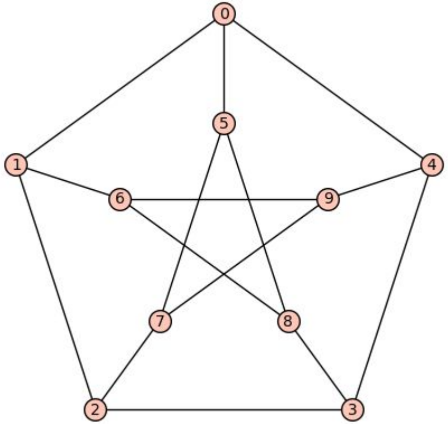
Exercícios

4. Indique todas as afirmações corretas sobre o grafo ao lado:
    a. O comprimento máximo de um caminho entre v_0 e v_1 é 5.
    b. A distância entre v_0 e v_1 é 5.
    c. A sequência $v_3 v_4 v_0 v_2 v_6 v_4 v_3$ é um ciclo.



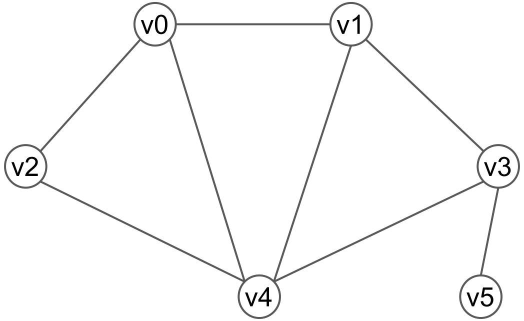
Exercícios

5. Indique todas as afirmações corretas sobre o grafo *G* ao lado:
    a. $N(0) = \{ 1, 3, 5 \}$.
    b. *G* contém 5 vértices de grau 2 e 5 vértices de grau 3.
    c. $d(5) = \delta(G)$.
    d. A sequência de vértices 0 1 2 7 5 0 é uma trilha de *G*.
    e. $\delta(G) = \Delta(G)$.



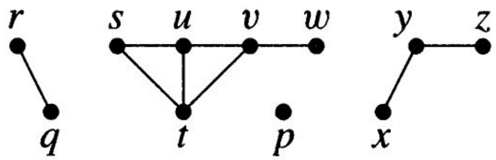
Exercícios

6. Descreva todos os caminhos entre os vértices v_2 e v_3 no grafo abaixo:



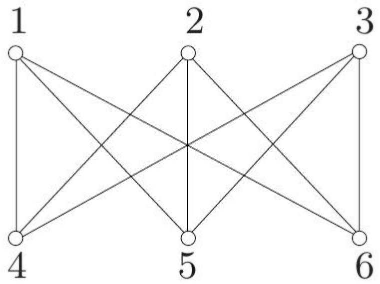
Exercícios

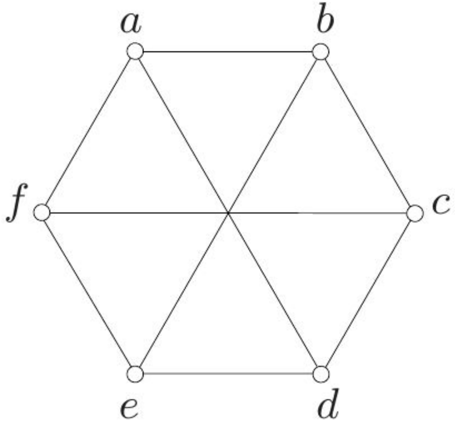
7. Indique todas as afirmações corretas sobre o grafo *G* ao lado:
   a. $d(s, p) = 3$.
   b. $d(t, p) = \infty$.
   c. *G* contém 3 vértices isolados.
   d. A ordem de *G* é 11.
   e. O tamanho de *G* é 8.



Exercícios

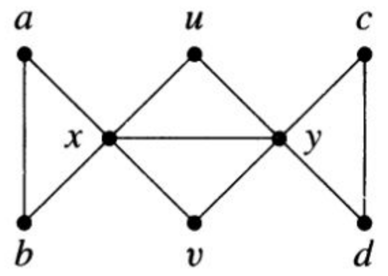
8. Mostre que os grafos abaixo são isomorfos.





Exercícios

9. Responda às seguintes perguntas sobre o grafo *G* abaixo:
    - A sequência de vértices *a x a x u y c d y v x b a* é um passeio aberto em *G*?
    - A sequência de vértices *a x u y c d y v x b a* é um trilha em *G*?
    - Quais são os ciclos em *G*?



Exercícios

10. Prove que todo passeio entre dois vértices v_i e v_j contém um caminho entre v_i e v_j.

Referências

- Um tratamento mais detalhado dos conceitos básicos definidos nesta apresentação pode ser encontrado em qualquer uma das referências básicas e complementares da disciplina