Árvores

Prof. Andrei Braga

UNIVERSIDADE
FEDERAL DA
FRONTEIRA SUL

Conteúdo

Número de componentes conexas e de arestas

- Para um grafo G com 5 vértices, vamos estudar a relação entre o número de componentes conexas de G e o número de arestas de G
- Se G tem 5 componentes conexas, quantas arestas G tem?

Número de componentes conexas e de arestas

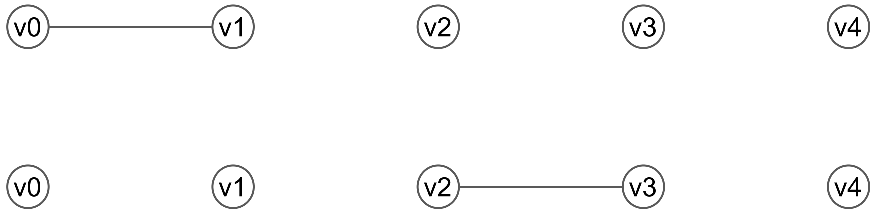
- Para um grafo *G* com 5 vértices, vamos estudar a relação entre o número de componentes conexas de *G* e o número de arestas de *G*
- Se *G* tem 5 componentes conexas, quantas arestas *G* tem? 0 arestas

Número de componentes conexas e de arestas

- Para um grafo G com 5 vértices, vamos estudar a relação entre o número de componentes conexas de G e o número de arestas de G
- Se G tem 4 componentes conexas, quantas arestas G tem?

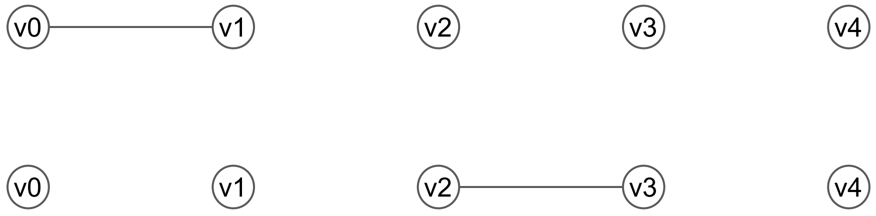
Número de componentes conexas e de arestas

- Para um grafo G com 5 vértices, vamos estudar a relação entre o número de componentes conexas de G e o número de arestas de G
- Se G tem 4 componentes conexas, quantas arestas G tem?



Número de componentes conexas e de arestas

- Para um grafo *G* com 5 vértices, vamos estudar a relação entre o número de componentes conexas de *G* e o número de arestas de *G*
- Se *G* tem 4 componentes conexas, quantas arestas *G* tem? 1 aresta

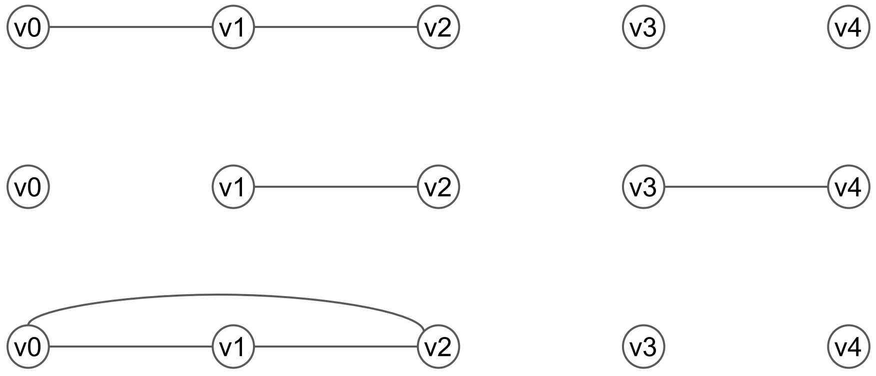


Número de componentes conexas e de arestas

- Para um grafo *G* com 5 vértices, vamos estudar a relação entre o número de componentes conexas de *G* e o número de arestas de *G*
- Se *G* tem 3 componentes conexas, quantas arestas *G* tem?

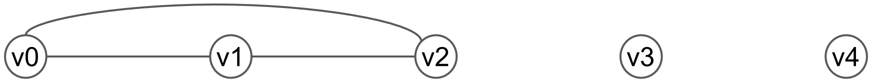
Número de componentes conexas e de arestas

- Para um grafo *G* com 5 vértices, vamos estudar a relação entre o número de componentes conexas de *G* e o número de arestas de *G*
- Se *G* tem 3 componentes conexas, quantas arestas *G* tem?



Número de componentes conexas e de arestas

- Para um grafo *G* com 5 vértices, vamos estudar a relação entre o número de componentes conexas de *G* e o número de arestas de *G*
- Se *G* tem 3 componentes conexas, quantas arestas *G* tem? 2 ou 3 arestas

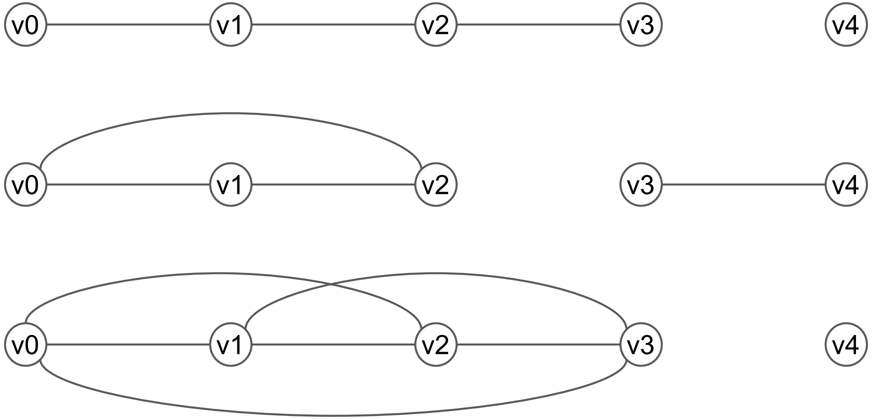


Número de componentes conexas e de arestas

- Para um grafo *G* com 5 vértices, vamos estudar a relação entre o número de componentes conexas de *G* e o número de arestas de *G*
- Se *G* tem 2 componentes conexas, quantas arestas *G* tem?

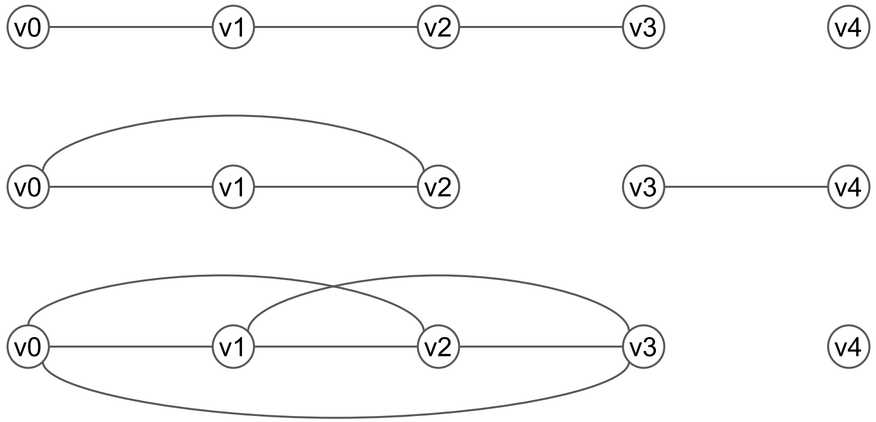
Número de componentes conexas e de arestas

- Para um grafo G com 5 vértices, vamos estudar a relação entre o número de componentes conexas de G e o número de arestas de G
- Se G tem 2 componentes conexas, quantas arestas G tem?



Número de componentes conexas e de arestas

- Para um grafo G com 5 vértices, vamos estudar a relação entre o número de componentes conexas de G e o número de arestas de G
- Se G tem 2 componentes conexas, quantas arestas G tem? 3, 4, 5 ou 6 arestas

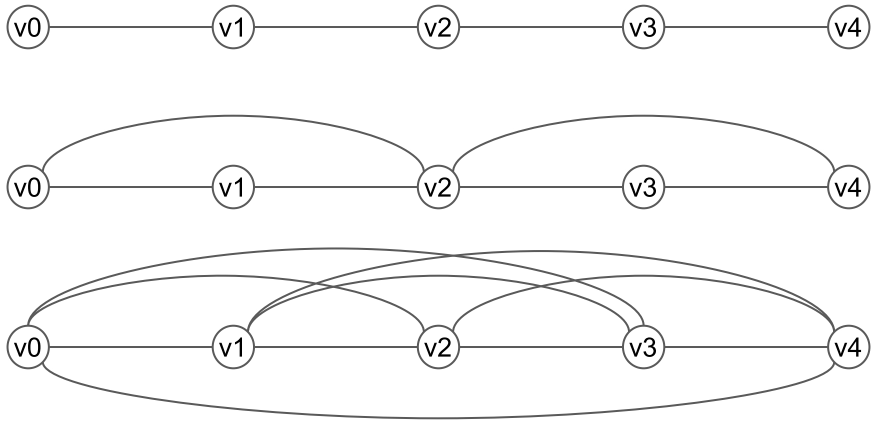


Número de componentes conexas e de arestas

- Para um grafo *G* com 5 vértices, vamos estudar a relação entre o número de componentes conexas de *G* e o número de arestas de *G*
- Se *G* tem 1 componente conexa, quantas arestas *G* tem?

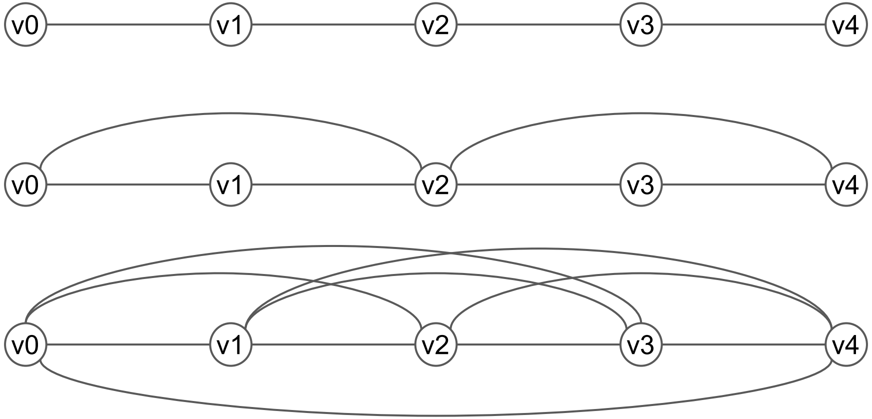
Número de componentes conexas e de arestas

- Para um grafo *G* com 5 vértices, vamos estudar a relação entre o número de componentes conexas de *G* e o número de arestas de *G*
- Se *G* tem 1 componente conexa, quantas arestas *G* tem?



Número de componentes conexas e de arestas

- Para um grafo *G* com 5 vértices, vamos estudar a relação entre o número de componentes conexas de *G* e o número de arestas de *G*
- Se *G* tem 1 componente conexa, quantas arestas *G* tem? 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 arestas



Número de componentes conexas e de arestas

- Vamos escrever o que descobrimos de uma forma mais geral
- Dado um grafo *G* com 5 vértices,
    - Se *G* tem 5, ou seja, 5 - 0 componentes conexas, então *G* tem pelo menos 0 arestas
    - Se *G* tem 4, ou seja, 5 - 1 componentes conexas, então *G* tem pelo menos 1 aresta
    - Se *G* tem 3, ou seja, 5 - 2 componentes conexas, então *G* tem pelo menos 2 arestas
    - Se *G* tem 2, ou seja, 5 - 3 componentes conexas, então *G* tem pelo menos 3 arestas
    - Se *G* tem 1, ou seja, 5 - 4 componentes conexas, então *G* tem pelo menos 4 arestas

Número de componentes conexas e de arestas

- **Teorema:** Dado um grafo G com n vértices, se G tem n - k componentes conexas, então G tem pelo menos k arestas

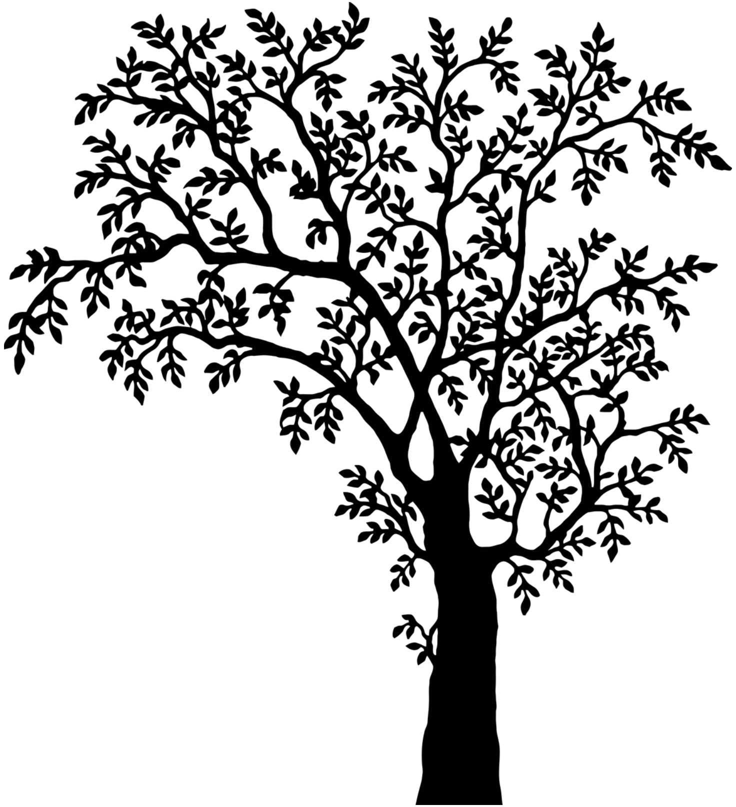
- Um grafo G com n vértices é conexo se G tem 1, ou seja, n - (n - 1) componente conexa
- **Teorema:** Dado um grafo G com n vértices, se G é conexo, então G tem pelo menos n - 1 arestas

Número de componentes conexas e de arestas

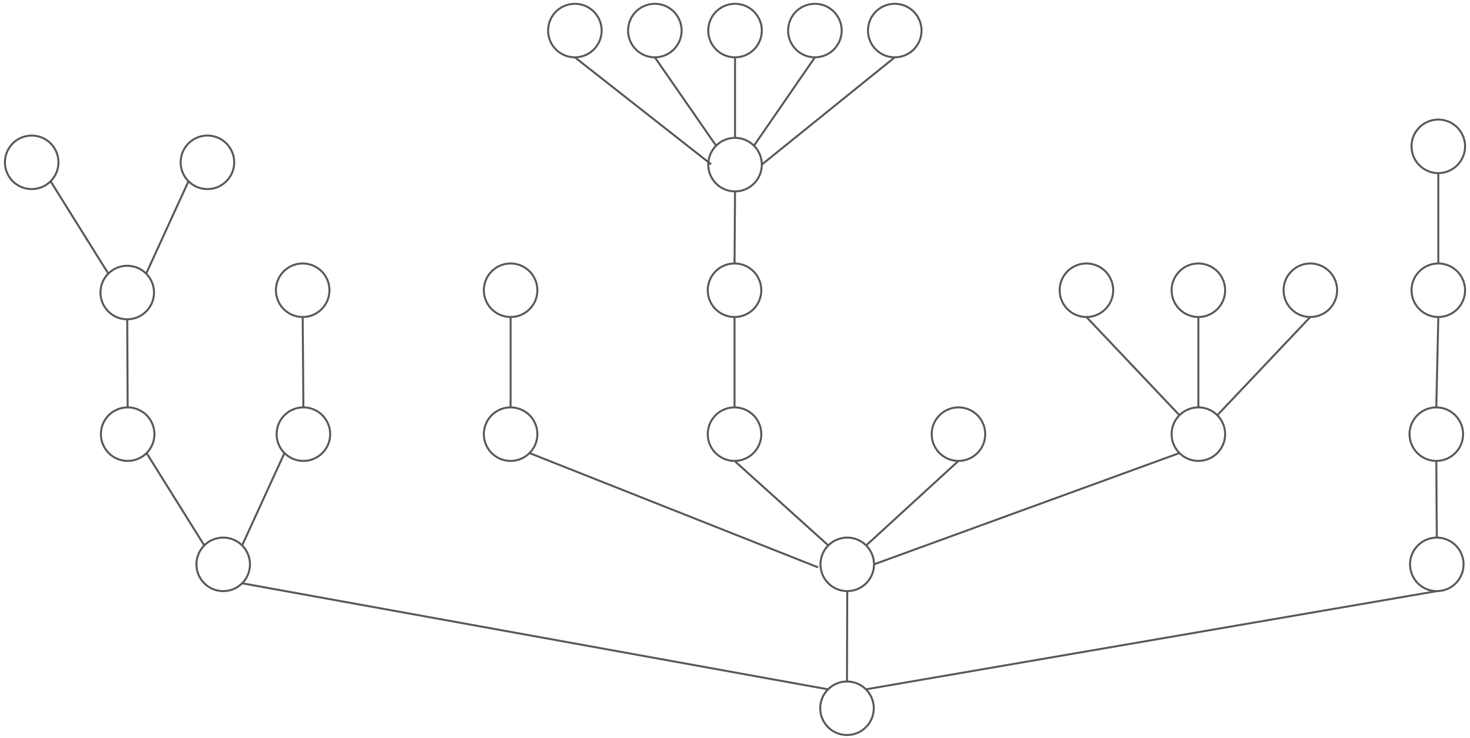
- Vimos que, para ser conexo, um grafo precisa ter um determinado número mínimo de arestas
- **Árvores** são grafos conexos onde este **mínimo é atingido**

Árvore

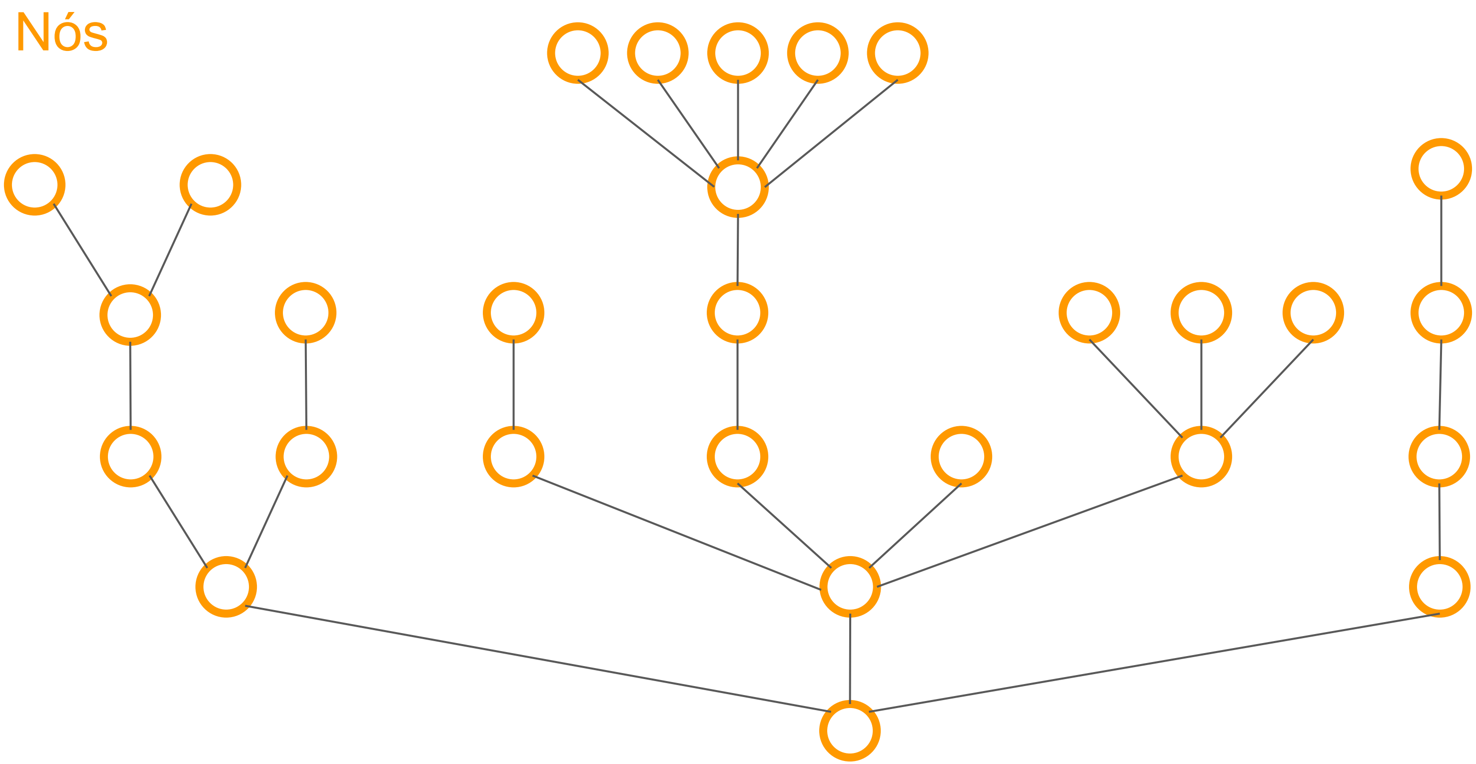
Abstraindo a estrutura de uma árvore



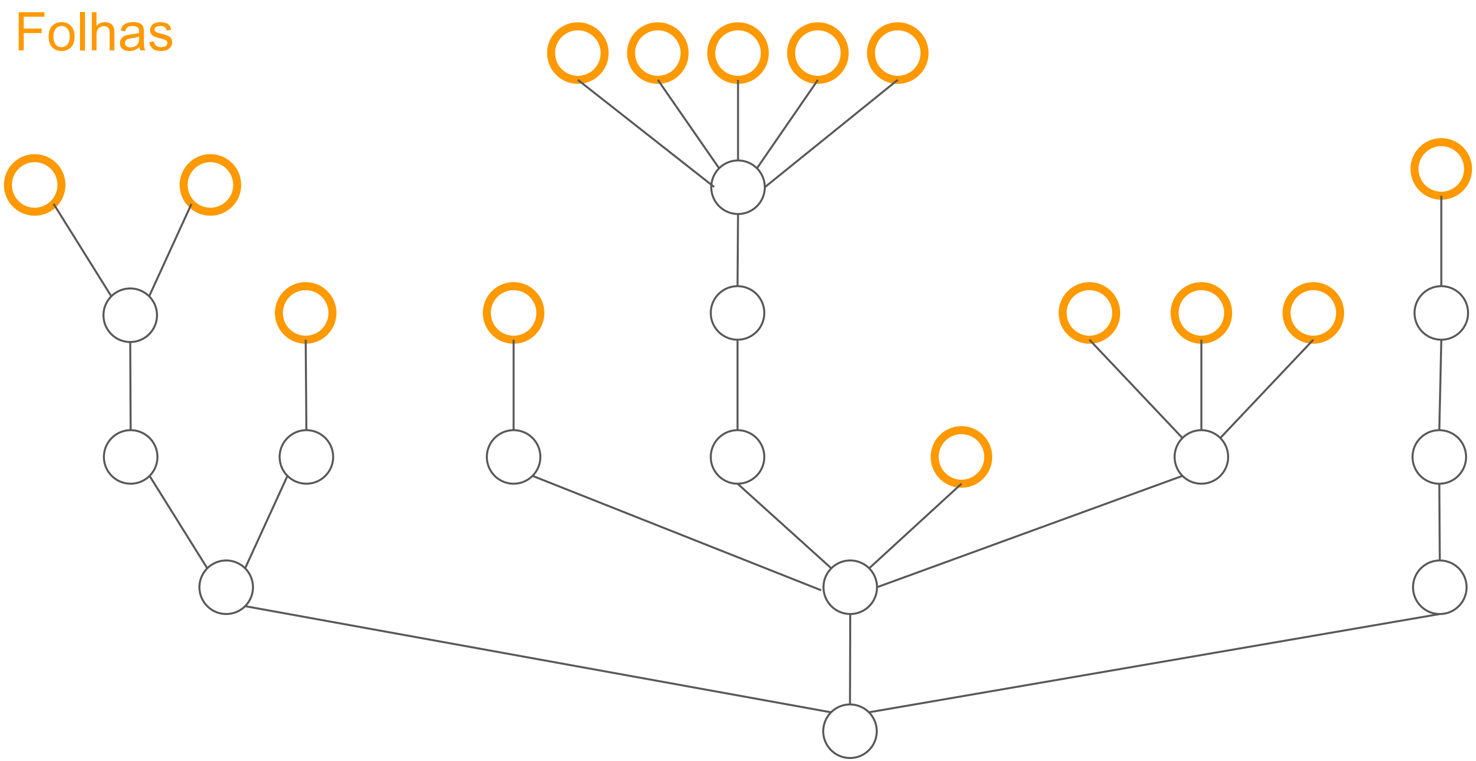
Abstraindo a estrutura de uma árvore



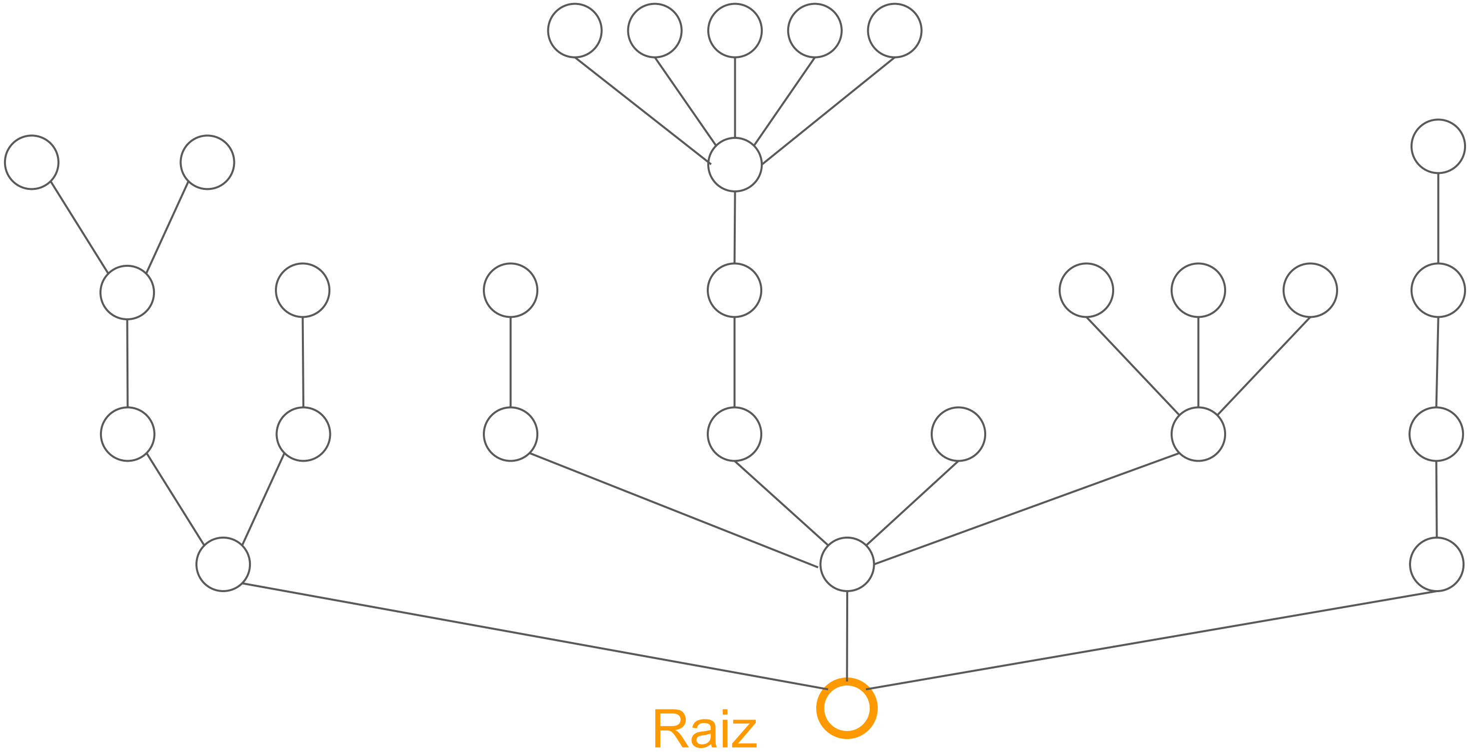
Abstraindo a estrutura de uma árvore



Abstraindo a estrutura de uma árvore

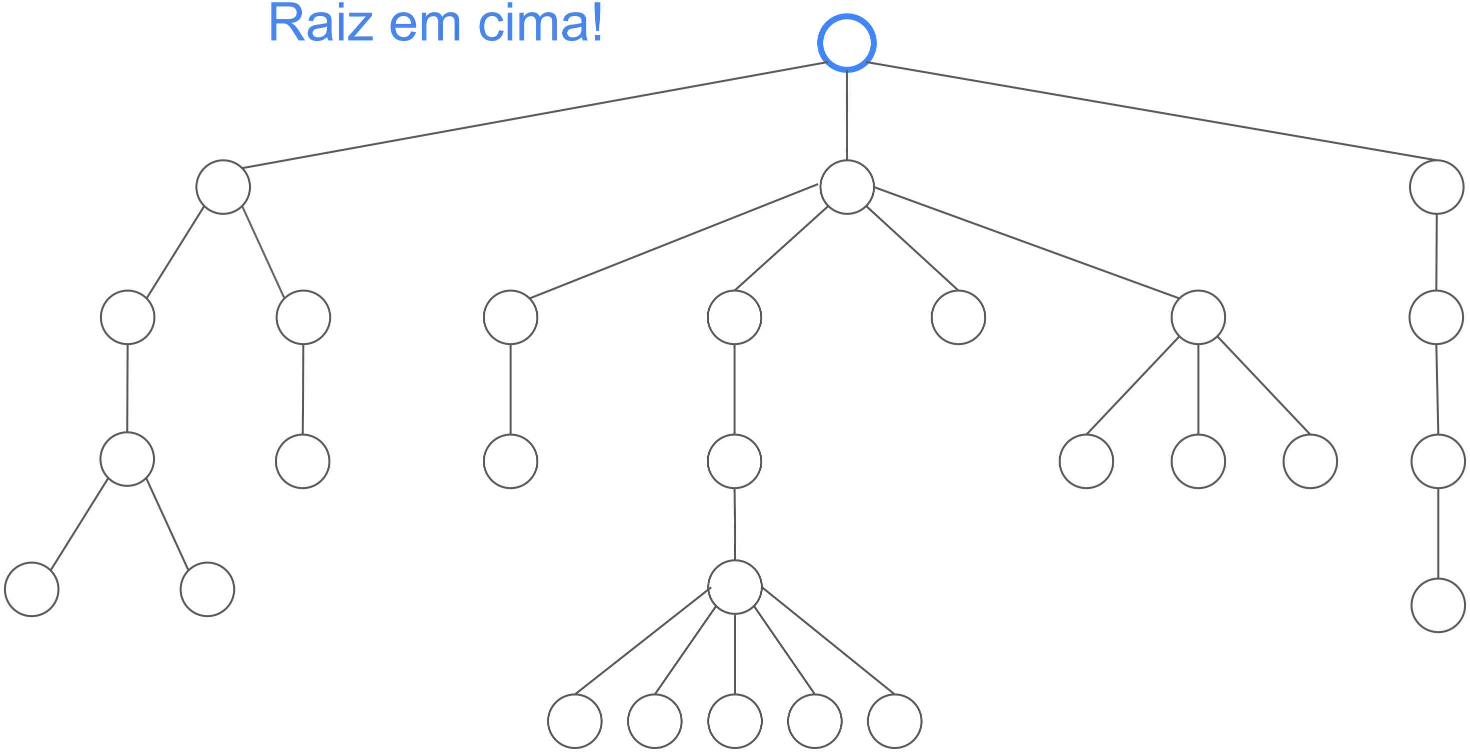


Abstraindo a estrutura de uma árvore



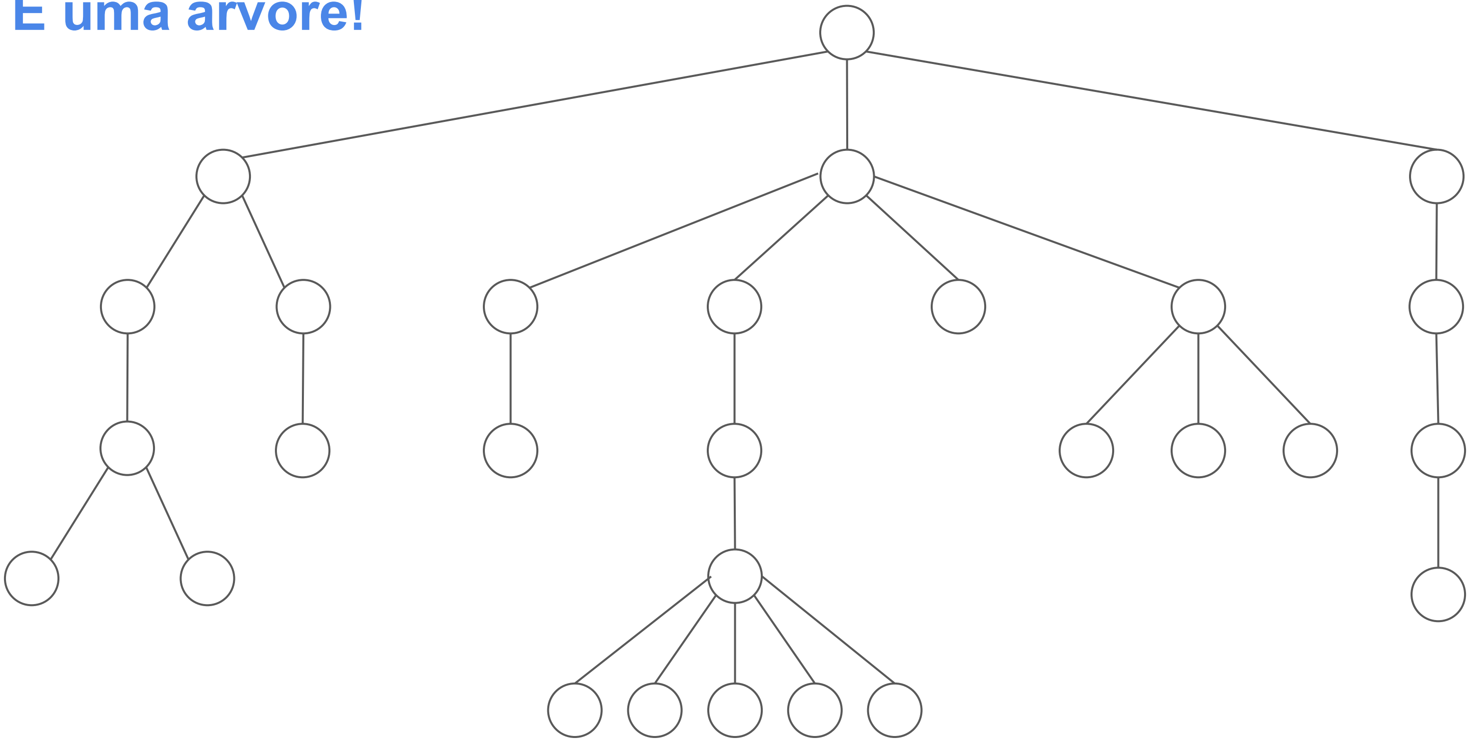
Abstraindo a estrutura de uma árvore

Raiz em cima!



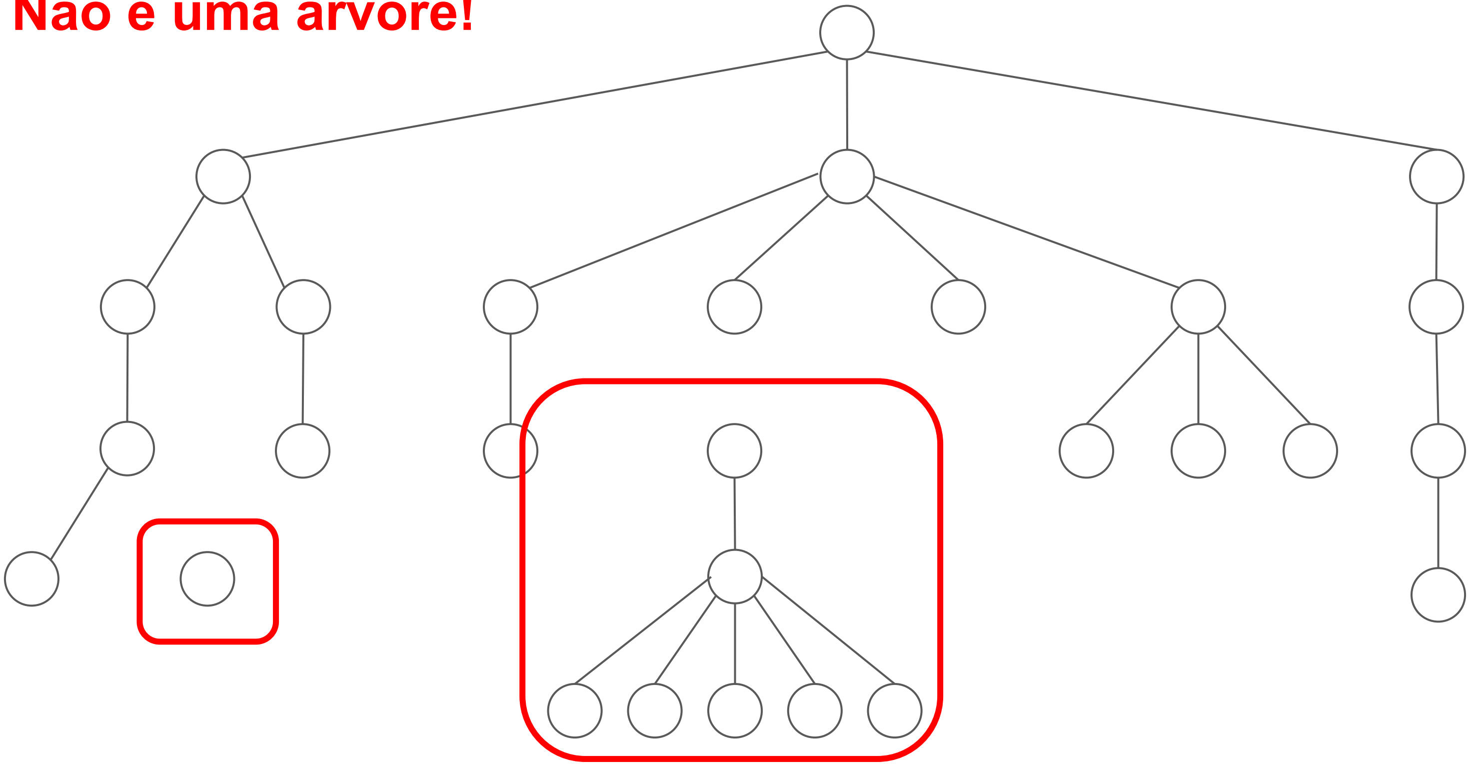
Árvore - grafo conexo

É uma árvore!



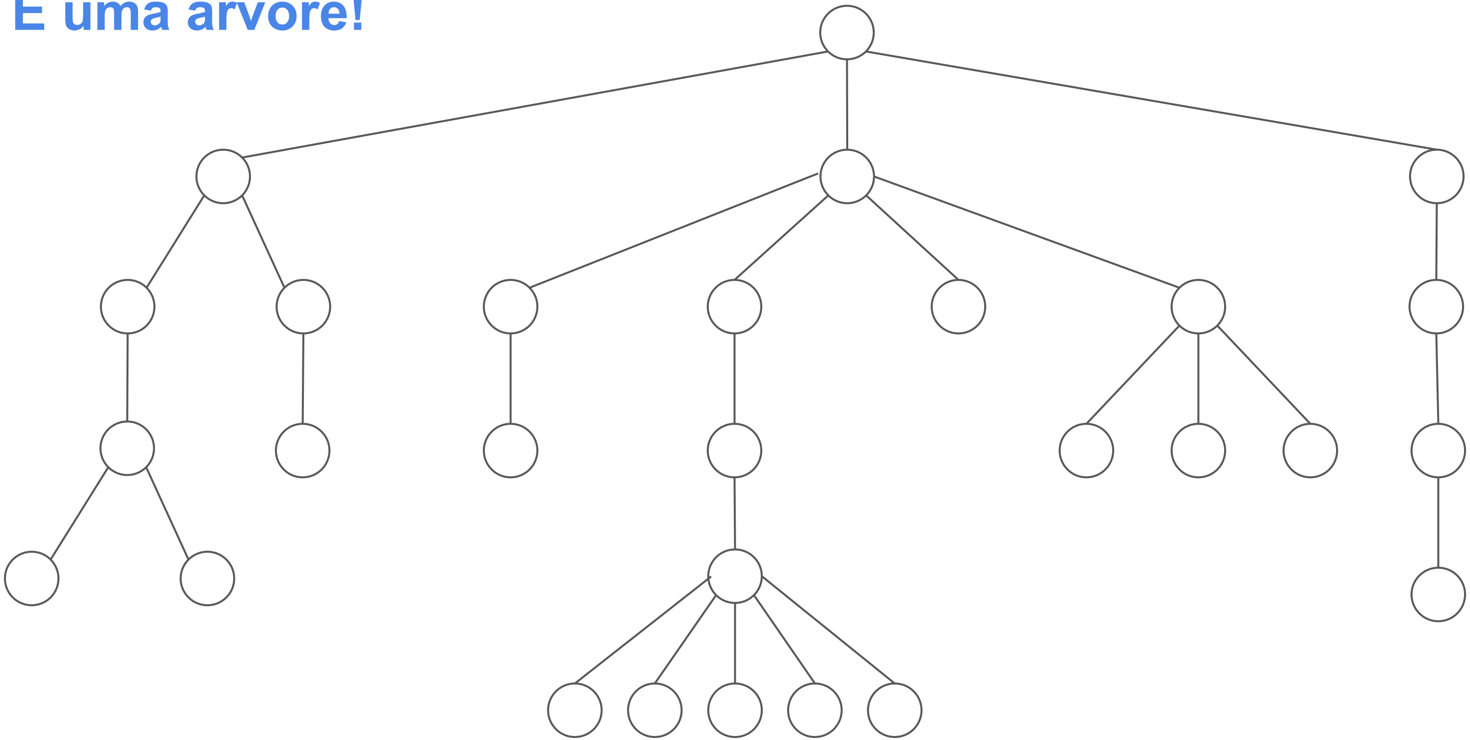
Árvore - grafo conexo

Não é uma árvore!



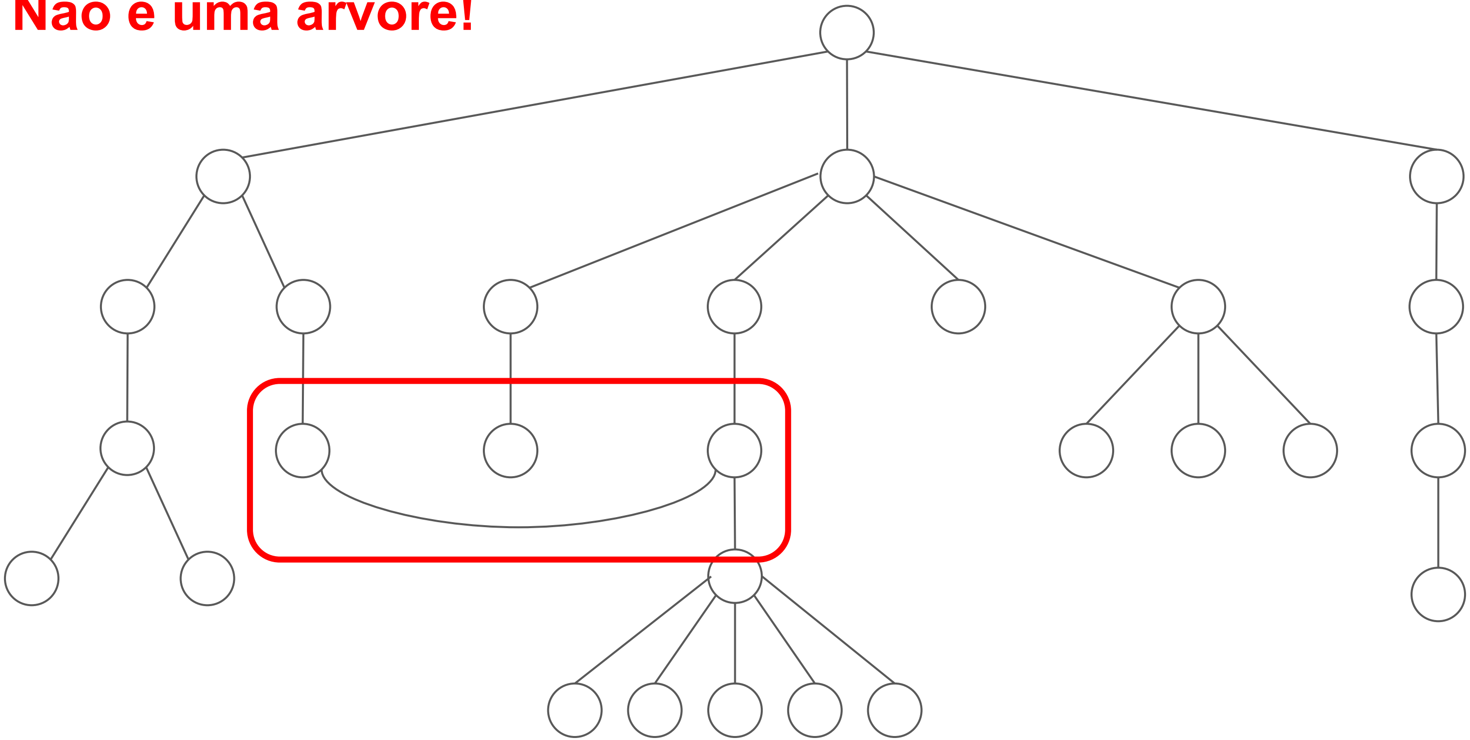
Árvore - grafo acíclico

É uma árvore!

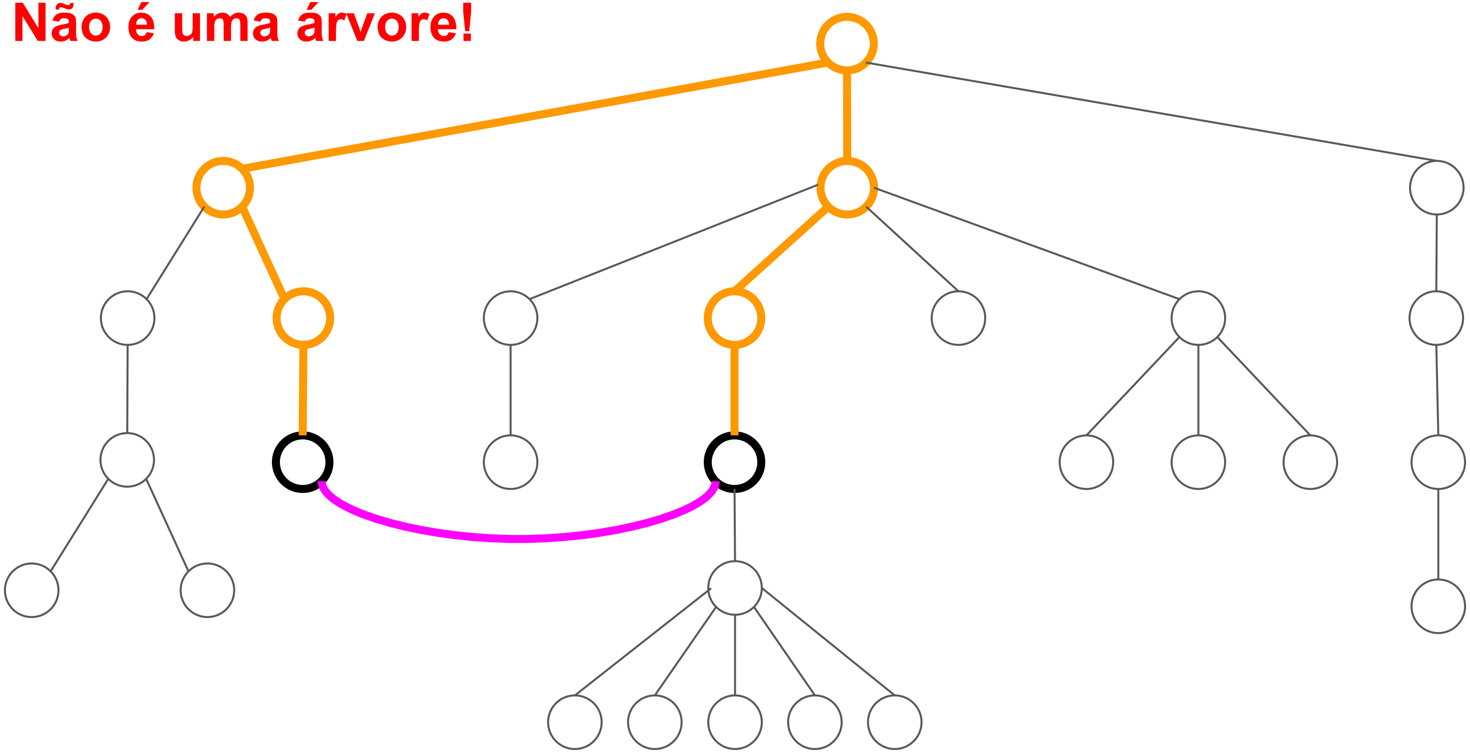


Árvore - grafo acíclico

Não é uma árvore!



Árvore - grafo acíclico

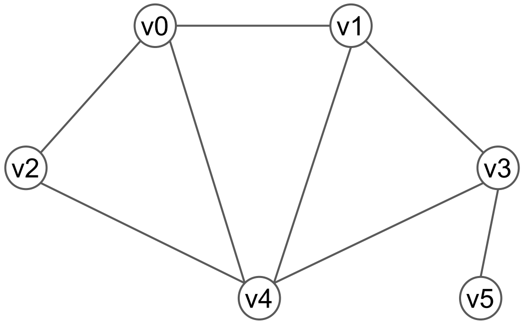


Grafo acíclico

- Um grafo é **acíclico** se não possui ciclos

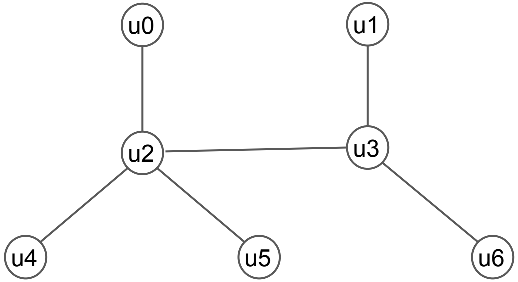
- Exemplo:

G_1



~~Grafo acíclico~~

G_2



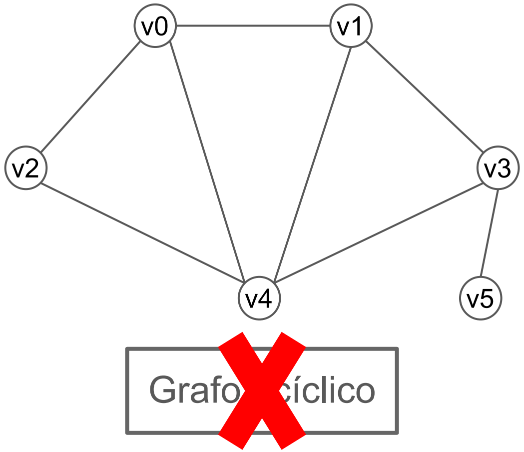
Grafo acíclico

Grafo acíclico

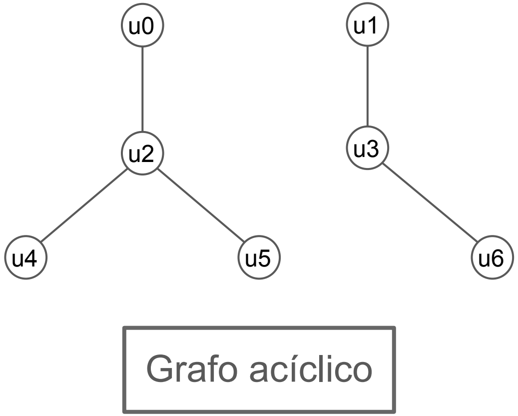
- Um grafo é **acíclico** se não possui ciclos

- Exemplo:

G_1



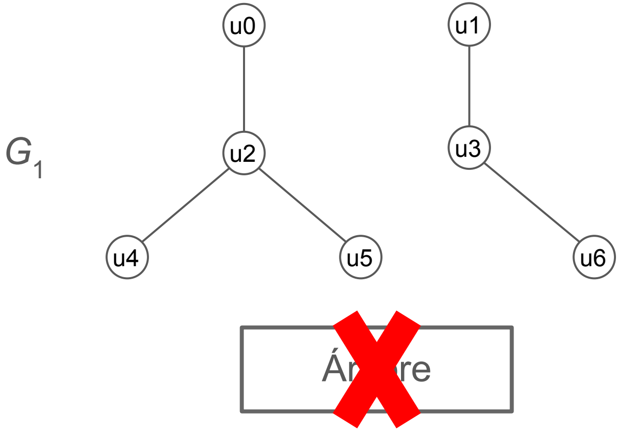
G_2

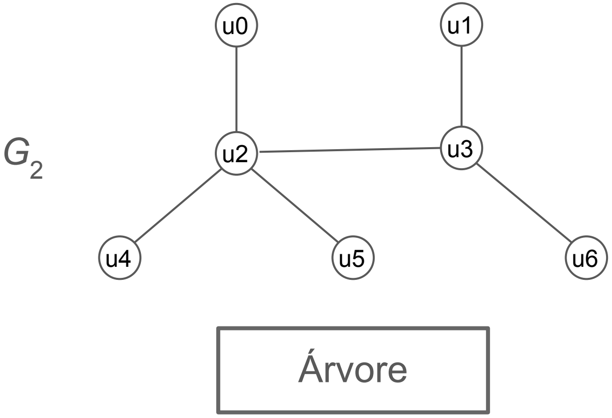


Árvore

- Uma **árvore** é um grafo conexo acíclico

- Exemplo:





Propriedades de uma árvore

- **Teorema:** Dado um grafo *G* com *n* vértices, as seguintes afirmações são equivalentes:
  1. *G* é uma árvore;
  2. *G* é conexo e possui *n* - 1 arestas;
  3. *G* é acíclico e possui *n* - 1 arestas;
  4. Existe exatamente um caminho entre quaisquer dois vértices de *G*;
  5. *G* é conexo, mas a remoção de qualquer aresta de *G* torna *G* desconexo;
  6. *G* é acíclico, mas a inserção de qualquer aresta em *G* faz com que *G* tenha um ciclo.

Exercícios

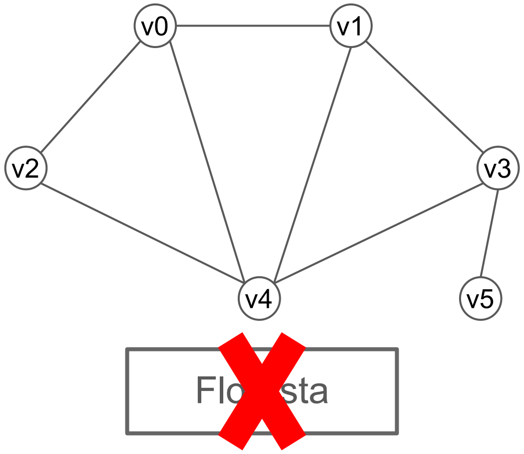
1. Considere o teorema do slide anterior e prove o seguinte:
    a. A Afirmação 1 implica a Afirmação 6;
    b. A Afirmação 6 implica a Afirmação 1.

Floresta

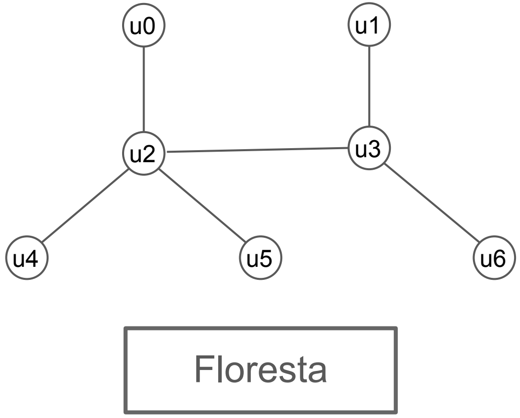
- Uma **floresta** é um grafo ~~conexo~~ acíclico

- Exemplo:

G_1



G_2

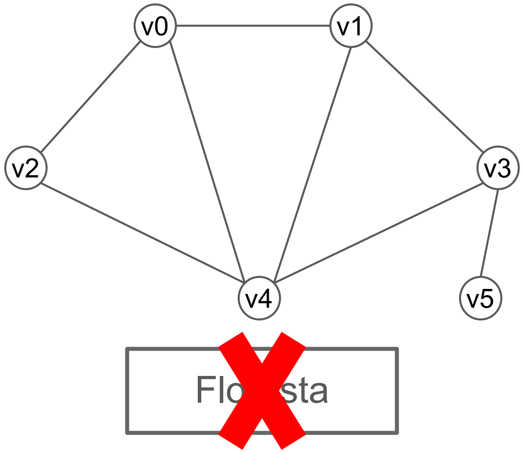


Floresta

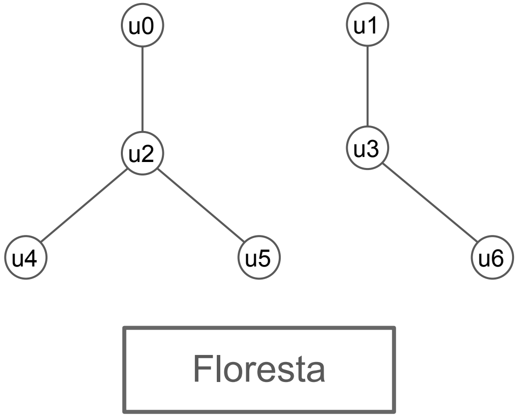
- Uma **floresta** é um grafo ~~conexo~~ acíclico

- Exemplo:

G_1



G_2



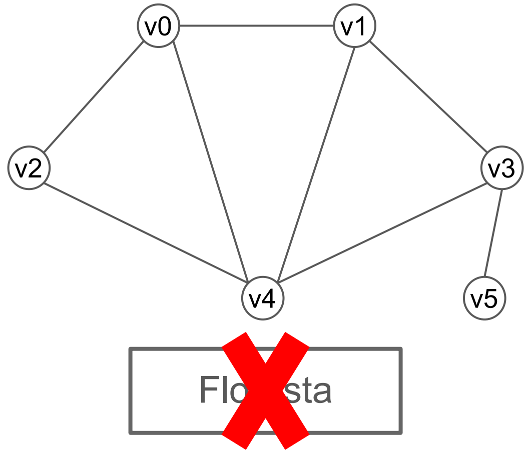
Floresta

- Uma **floresta** é um grafo ~~conexo~~ acíclico

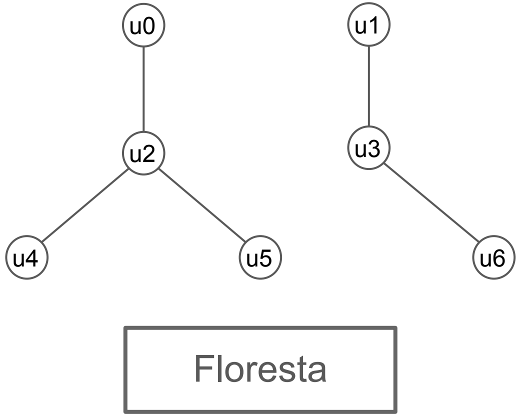
- Exemplo:

> As **componentes conexas** de uma floresta são **árvores**
> 🌳🌳🌳 🌳

G_1



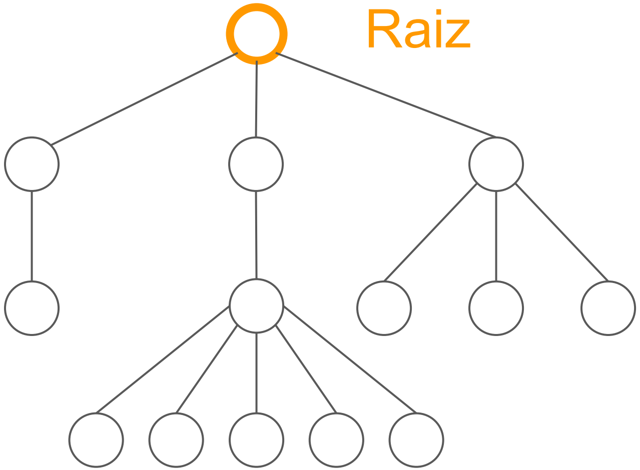
G_2



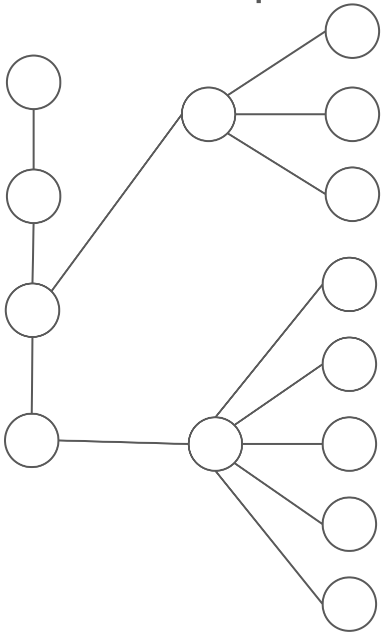
Árvore enraizada

- Uma **árvore enraizada** é uma árvore em que um dos vértices é especificado como a raiz

- Exemplo:

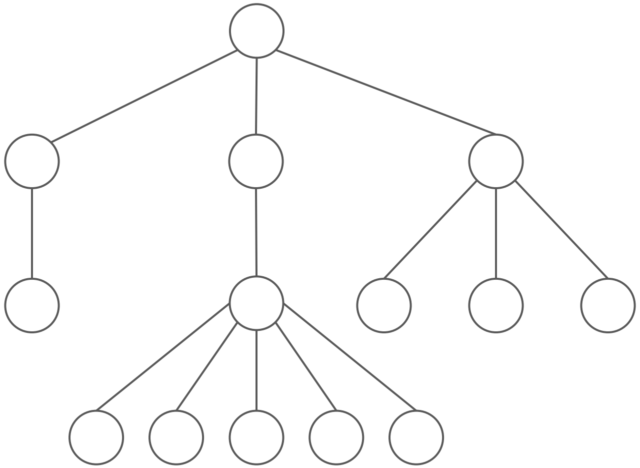


Árvore enraizada



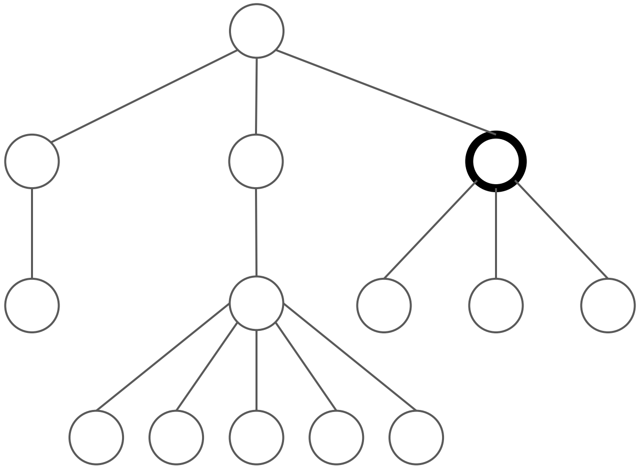
Árvore não enraizada

Árvore enraizada - terminologia



Árvore enraizada - terminologia

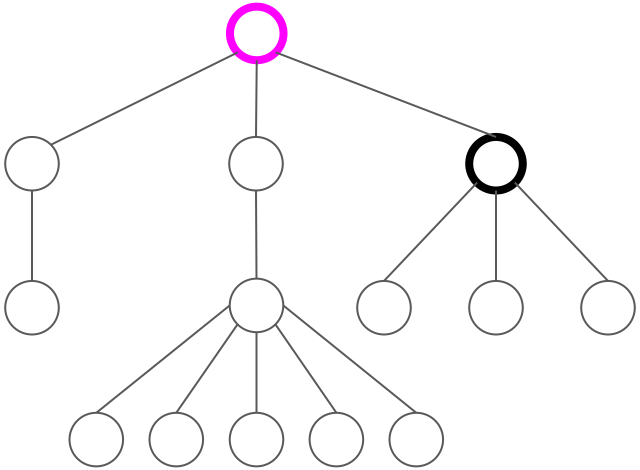
Nó (ou
vértice)



Árvore enraizada - terminologia

Pai

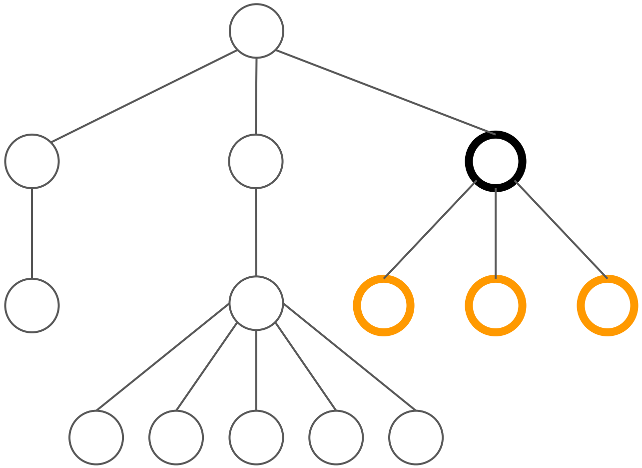
Nó (ou vértice)



Árvore enraizada - terminologia

Nó (ou vértice)

Filhos

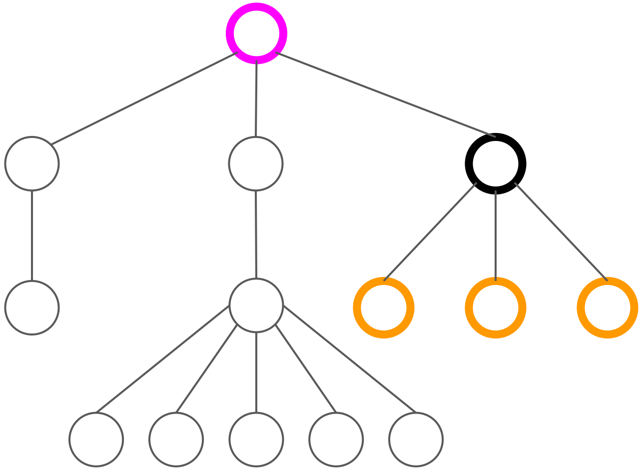


Árvore enraizada - terminologia

Pai

Nó (ou vértice)

Filhos



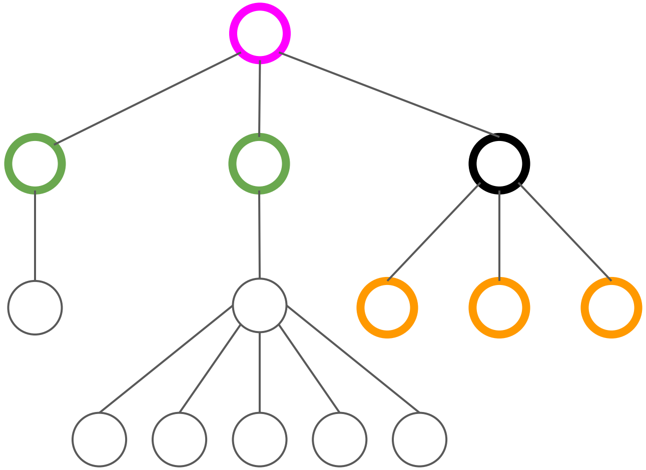
Árvore enraizada - terminologia

Pai

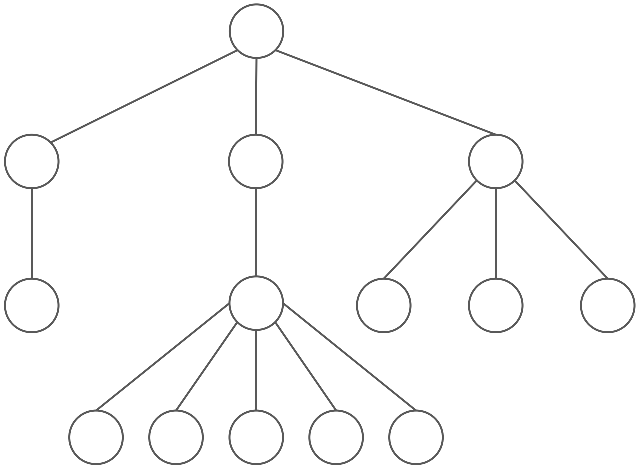
Nó (ou vértice)

Irmãos

Filhos

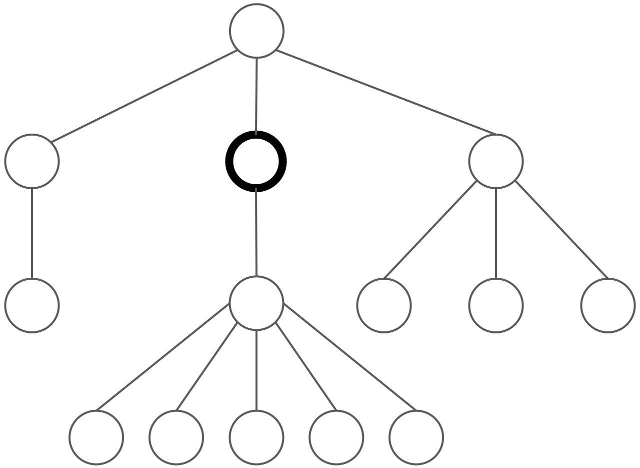


Árvore enraizada - terminologia



Árvore enraizada - terminologia

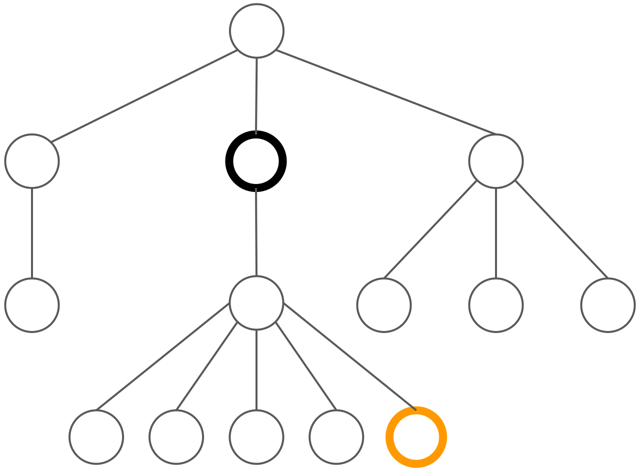
Nó (ou vértice)



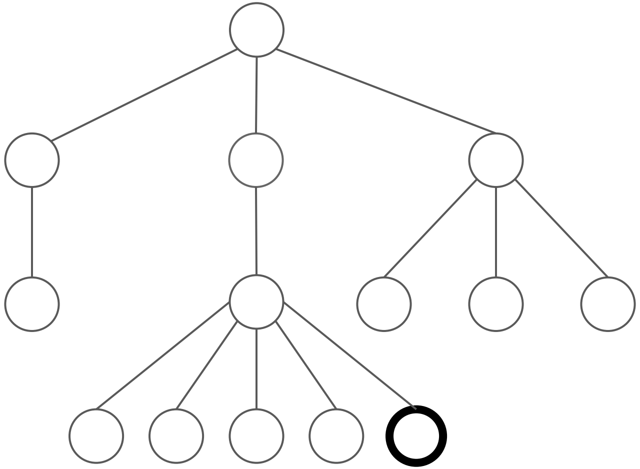
Árvore enraizada - terminologia

Nó (ou vértice)

Descendente



Árvore enraizada - terminologia

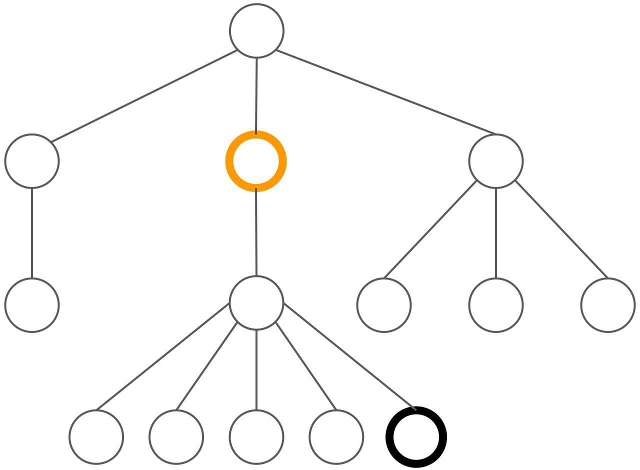


Nó (ou vértice)

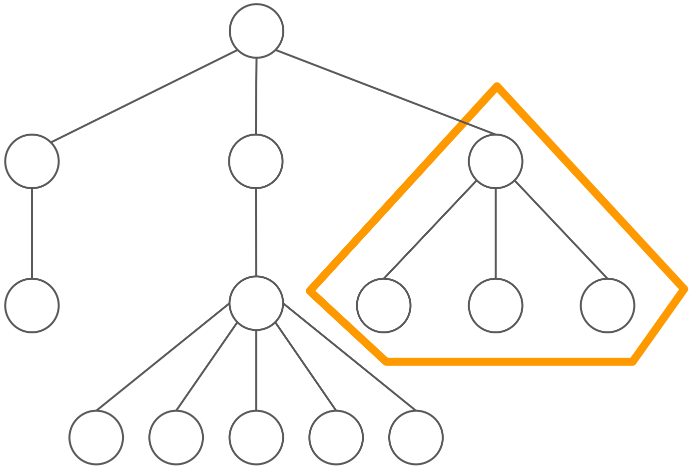
Árvore enraizada - terminologia

Ancestral

Nó (ou vértice)

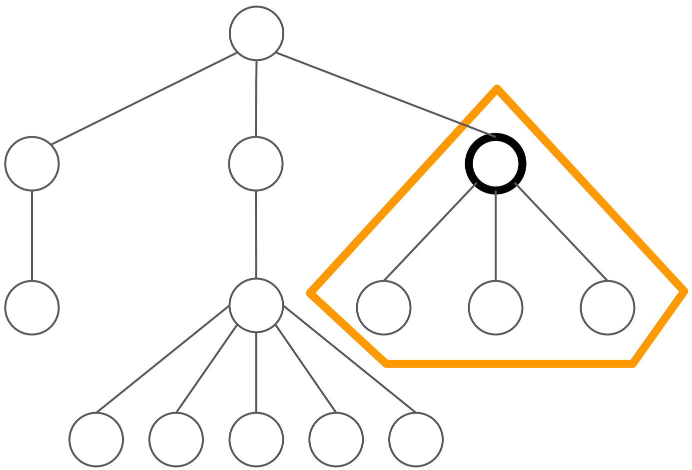


Árvore enraizada - terminologia



Subárvore

Árvore enraizada - terminologia



Raiz da subárvore

Subárvore

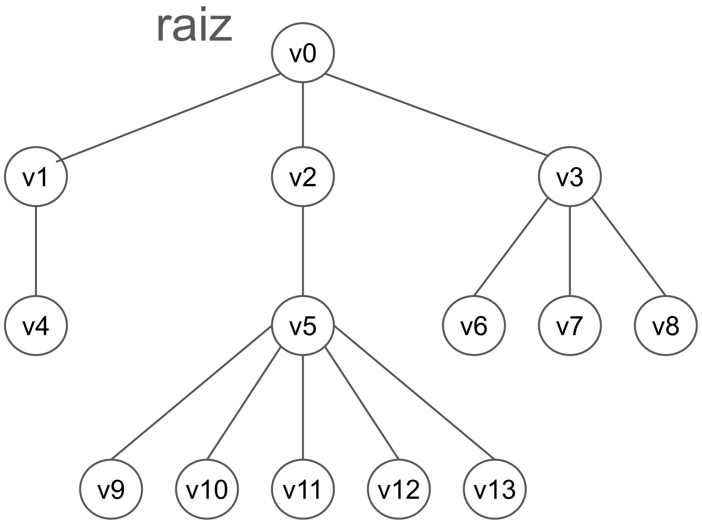
Representação computacional de uma árvore

- Uma árvore é um grafo e, portanto, pode ser representada como uma matriz de adjacências ou listas de adjacência ou de outra forma usual de representar um grafo
- Além disso, uma árvore pode ser representada como uma estrutura mais simples

Representação computacional de uma árvore

- Dada uma árvore com raiz *r*, se a última aresta do caminho entre o vértice *r* e um vértice *v* na árvore é a aresta *uv*, então dizemos que *u* é o **pai** de *v* e *v* é um **filho** de *u*

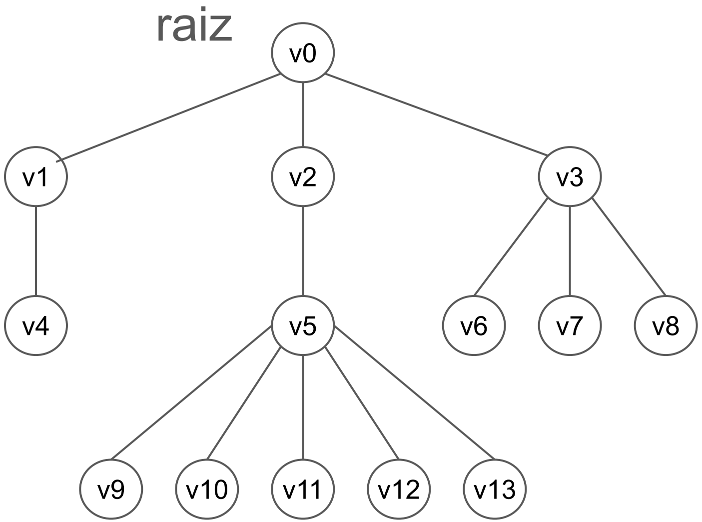
- Exemplo:
  - v2 é de v0
  - v5 é de v10
  - v13 é de v5
  - v6 é de v7



Representação computacional de uma árvore

- Dada uma árvore com raiz *r*, se a última aresta do caminho entre o vértice *r* e um vértice *v* na árvore é a aresta *uv*, então dizemos que *u* é o **pai** de *v* e *v* é um **filho** de *u*

- Exemplo:
  - v2 é filho de v0
  - v5 é pai de v10
  - v13 é filho de v5
  - v6 não é pai de v7 (v6 é **irmão** de v7)

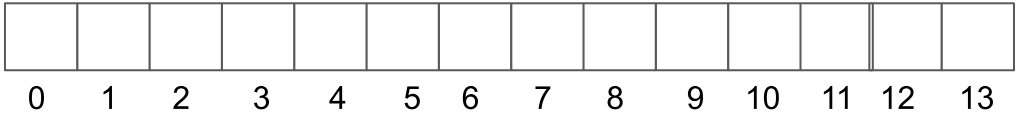


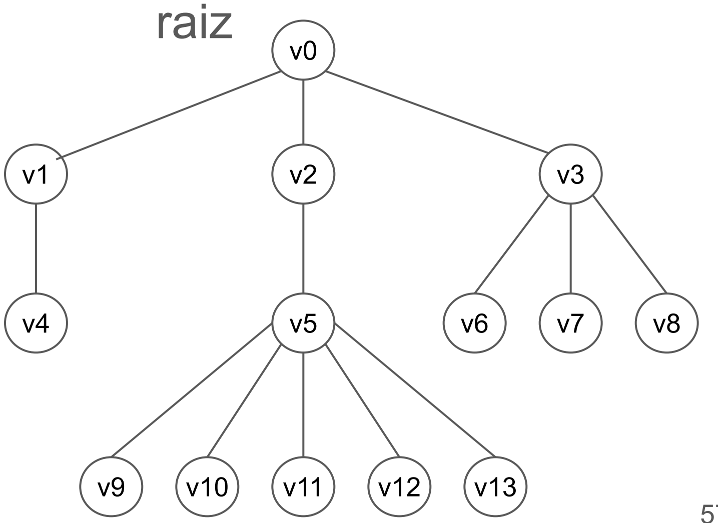
Representação computacional de uma árvore

- Podemos representar uma árvore *G* com raiz *r* como um **vetor** *pai* de |*V*(*G*)| elementos, com índices 0, 1, …, |*V*(*G*)| - 1, tal que
  - *pai*[*i*] é igual ao pai do vértice *i* em *G* caso *i* ≠ *r* e
  - *pai*[*r*] = -1

- Exemplo:

pai

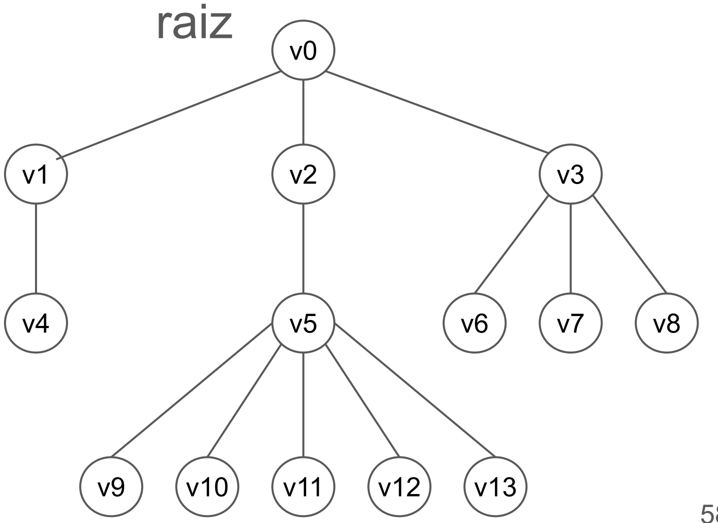




Representação computacional de uma árvore

- Podemos representar uma árvore *G* com raiz *r* como um **vetor** *pai* de |*V*(*G*)| elementos, com índices 0, 1, …, |*V*(*G*)| - 1, tal que
  - *pai*[*i*] é igual ao pai do vértice *i* em *G* caso *i* ≠ *r* e
  - *pai*[*r*] = -1

- Exemplo:



pai

-1	0	0	0	1	2	3	3	3	5	5	5	5	5
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Referências

- Esta apresentação é baseada nos seguintes materiais:

1. Apêndice B.5 do livro
   Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C. Introduction to Algorithms. 3rd. ed. MIT Press, 2009.
2. Capítulo 17 do livro
   Sedgewick, R. Algorithms in C++ – Part 5. Graph Algorithms. 3rd. ed. Addison-Wesley, 2002.