Grafos - Conceitos Básicos

Prof. Andrei Braga

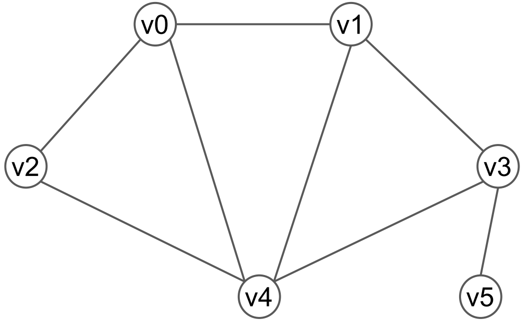
UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL

Conteúdo

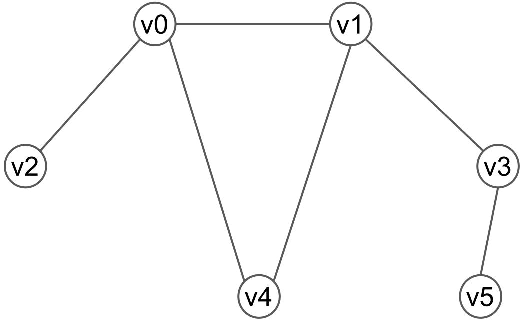
Subgrafo

- Um **subgrafo** de um grafo *G* é um grafo *H* tal que
  - $V(H) \subseteq V(G)$ e
  - $E(H) \subseteq E(G)$
- Exemplo:

G



H



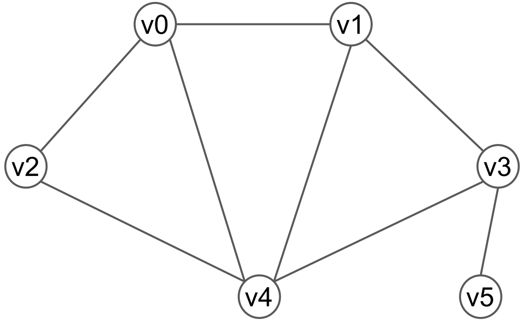
- $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
- $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \},$
  $\{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \},$
  $\{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

- $V(H) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
- $E(H) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \},$
  $\{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \},$
  $\{ v_3, v_5 \} \}$

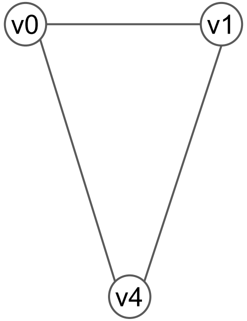
Subgrafo

- Um **subgrafo** de um grafo *G* é um grafo *H* tal que
  - $V(H) \subseteq V(G)$ e
  - $E(H) \subseteq E(G)$
- Exemplo:

G



H



- $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
- $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

- $V(H) = \{ v_0, v_1, v_4 \}$ e
- $E(H) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_4 \} \}$

Subgrafo

- Um **subgrafo** de um grafo G é um grafo H tal que
  - $V(H) \subseteq V(G)$ e
  - $E(H) \subseteq E(G)$

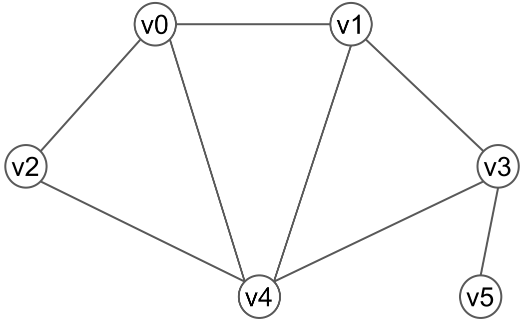
- Usamos as seguintes expressões de forma equivalente:
  - H é um subgrafo de G
  - H está **contido** em G
  - $H \subseteq G$
  - G é um **supergrafo** de H
  - G **contém** H
  - $G \supseteq H$

Subgrafo gerador

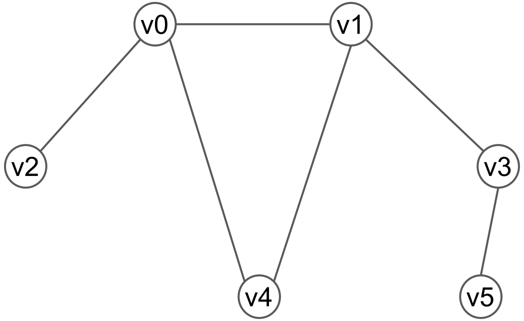
- Um subgrafo *H* de um grafo *G* é **gerador** se $V(H) = V(G)$

- Exemplo:

G



H



  - $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

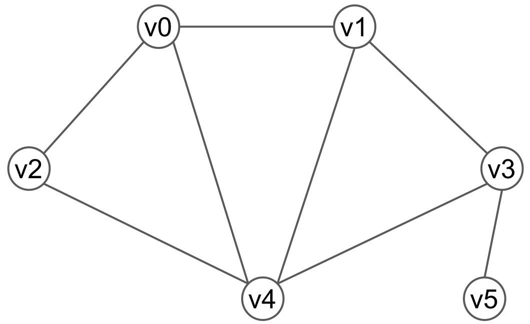
  - $V(H) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(H) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

Subgrafo gerador

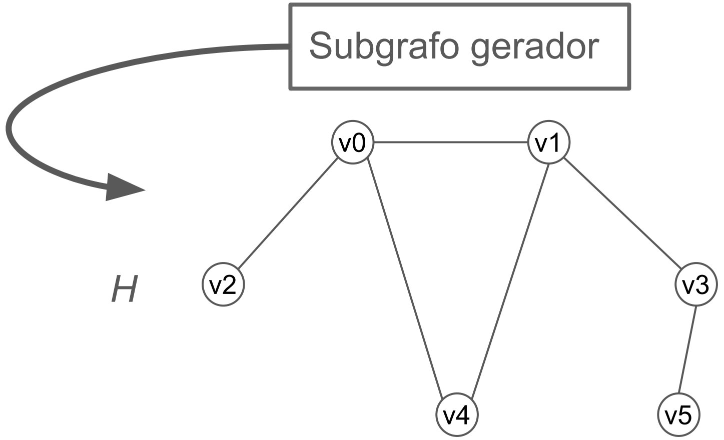
- Um subgrafo *H* de um grafo *G* é **gerador** se $V(H) = V(G)$

- Exemplo:

G



H



  - $\boldsymbol{V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}}$ e
  - $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

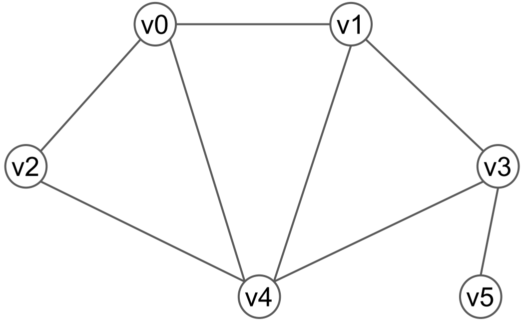
  - $\boldsymbol{V(H) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}}$ e
  - $E(H) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

Subgrafo gerador

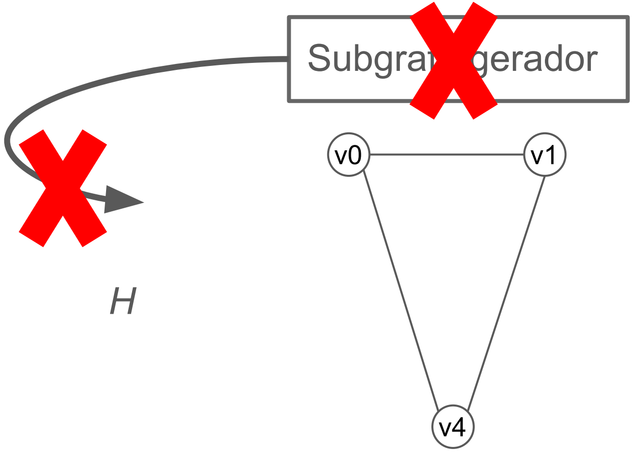
- Um subgrafo *H* de um grafo *G* é **gerador** se $V(H) = V(G)$

- Exemplo:

G



H



  - $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

  - $V(H) = \{ v_0, v_1, v_4 \}$ e
  - $E(H) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_4 \} \}$

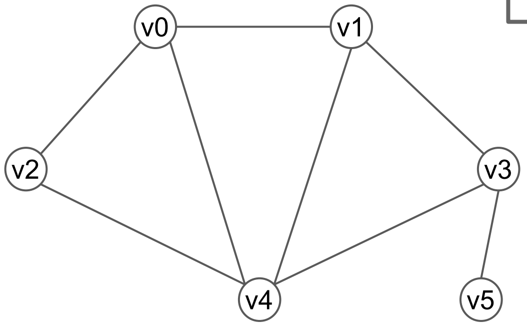
Subgrafo induzido

- Dado um subconjunto *S* de vértices de um grafo *G*, o **subgrafo de *G* induzido por *S*** é o subgrafo *G*[*S*] tal que
  - $V(G[S]) = S$ e
  - $E(G[S])$ consiste em todas as arestas de *G* cujos ambos os extremos estão em *S*

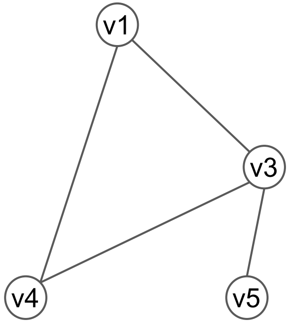
- Exemplo:

$S = \{ v_1, v_3, v_4, v_5 \}$

G



G[*S*]



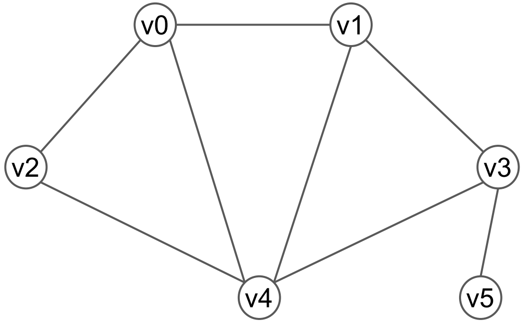
Subgrafo induzido

- Dado um subconjunto *S* de vértices de um grafo *G*, o **subgrafo de *G* induzido por *S*** é o subgrafo *G*[*S*] tal que
  - *V*(*G*[*S*]) = *S* e
  - *E*(*G*[*S*]) consiste em todas as arestas de *G* cujos ambos os extremos estão em *S*

- Exemplo:

$S = \{ v_2, v_3 \}$

G



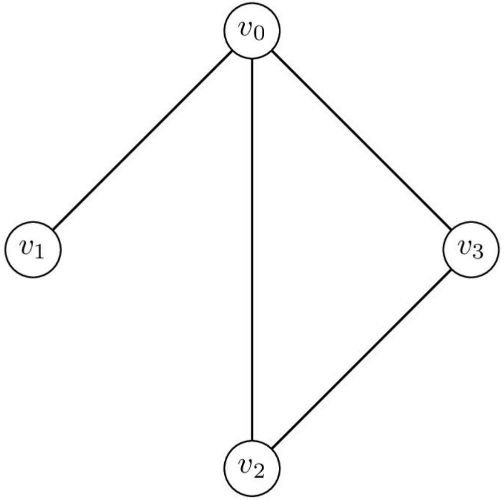
G[*S*]

Exercícios

1. (Ref. 1) Suponha que H é um subgrafo de G. Se $V(H) = V(G)$, é verdade que H é igual a G? Se $E(H) = E(G)$, é verdade que H é igual a G?

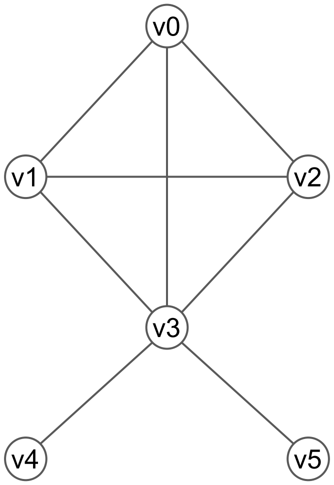
Exercícios

2. Apresente um subgrafo do grafo abaixo que não seja um subgrafo induzido.



Exercícios

3. Determine um subconjunto de vértices *S* do grafo *G* abaixo tal que o subgrafo induzido *G*[*S*] possua 4 arestas.

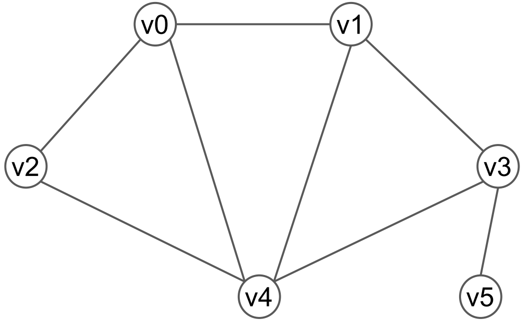


Remoção de arestas

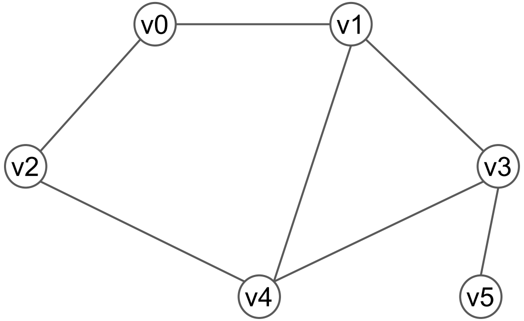
- Dado um grafo G e uma aresta $\{ v_i , v_j \} \in E(G)$, denotamos por $G \setminus \{ v_i , v_j \}$ o grafo obtido pela **remoção da aresta** $\{ v_i , v_j \}$ de G

- Exemplo:

G



$G \setminus \{ v_0, v_4 \}$



  - $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$
  - $V(G \setminus \{ v_0, v_4 \}) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G \setminus \{ v_0, v_4 \}) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

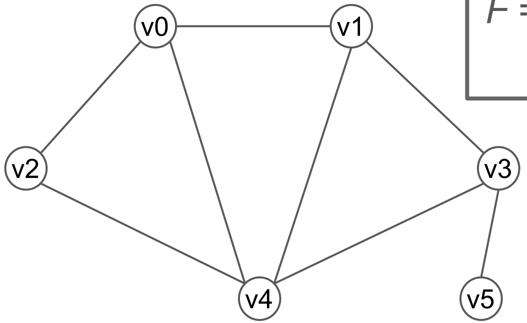
Remoção de arestas

- Dado um grafo G e um subconjunto de arestas $F \subseteq E(G)$, denotamos por $G \setminus F$ o grafo obtido pela **remoção das arestas** em F de G

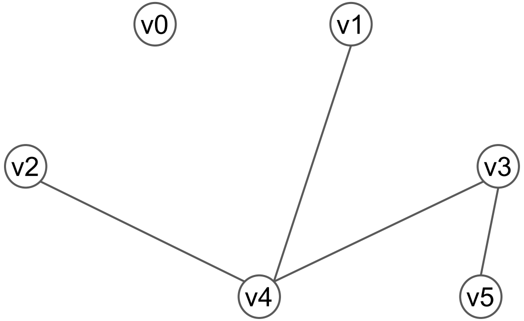
- Exemplo:

$F = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \} \}$

G



$G \setminus F$



  - $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

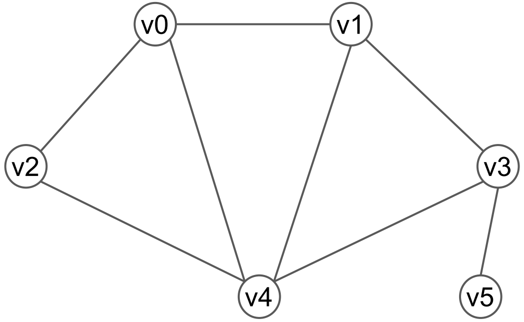
  - $V(G \setminus F) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G \setminus F) = \{ \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

Remoção de vértices

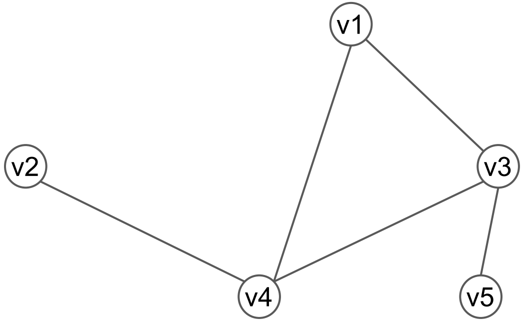
- Dado um grafo G e um vértice $v_i \in V(G)$, denotamos por $G - v_i$ o grafo obtido pela **remoção do vértice** v_i **junto** com **todas as arestas incidentes em v_i** de G

- Exemplo:

G



$G - v_0$



  - $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

  - $V(G - v_0) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G - v_0) = \{ \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

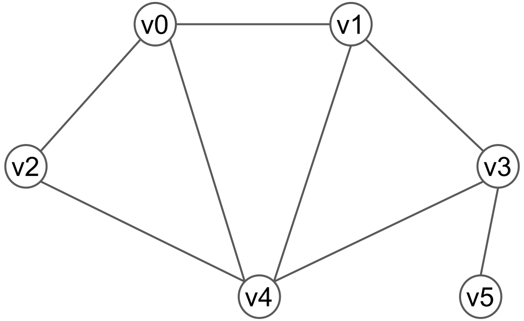
Remoção de vértices

- Dado um grafo G e um subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$, denotamos por $G - S$ o grafo obtido pela **remoção dos vértices** em S **junto** com **todas as arestas incidentes nos vértices** em S de G

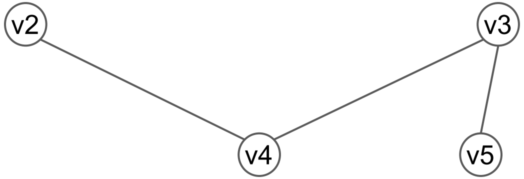
- Exemplo:

$S = \{ v_0, v_1 \}$

G



$G - S$

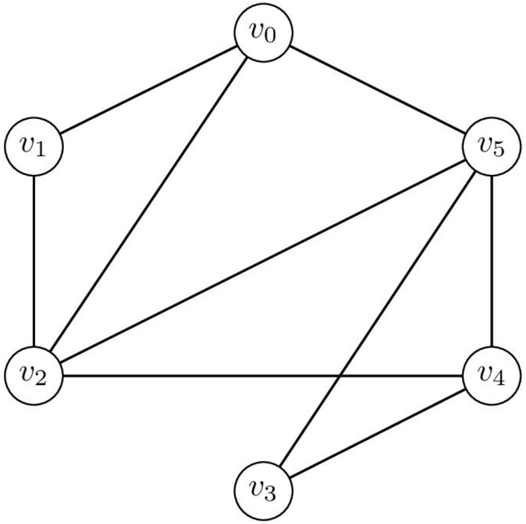


  - $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G) = \{ \{ v_0, v_1 \}, \{ v_0, v_2 \}, \{ v_0, v_4 \}, \{ v_1, v_3 \}, \{ v_1, v_4 \}, \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

  - $V(G - S) = \{ v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ e
  - $E(G - S) = \{ \{ v_2, v_4 \}, \{ v_3, v_4 \}, \{ v_3, v_5 \} \}$

Exercícios

4. Considere o grafo *G* ao lado e responda ao seguinte:
    a. Selecione um vértice *u* de grau mínimo de *G*. A remoção de *u* de *G* aumenta o grau mínimo de *G*?
    b. Selecione um vértice *u* de grau máximo de *G*. A remoção de *u* de *G* diminui o grau máximo de *G*?

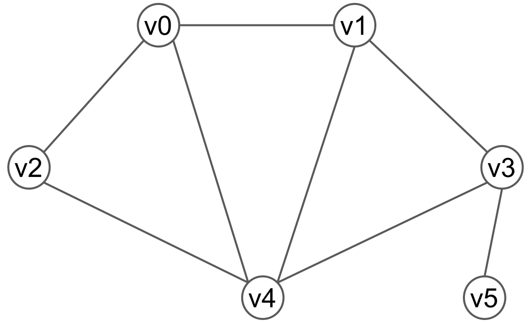


Conexidade

- Um grafo G é **conexo** se, para todo par de vértices v_i , v_j de G, existe um caminho em G entre v_i e v_j (ou seja, um caminho em G cujos extremos são v_i e v_j); G é **desconexo** caso contrário

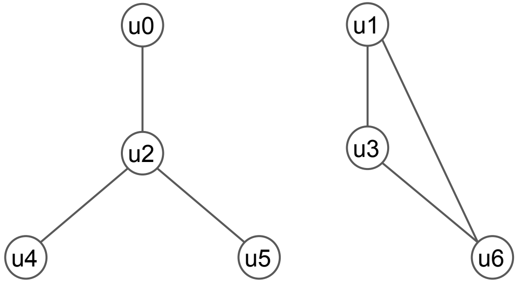
- Exemplo:

G_1



Grafo conexo

G_2



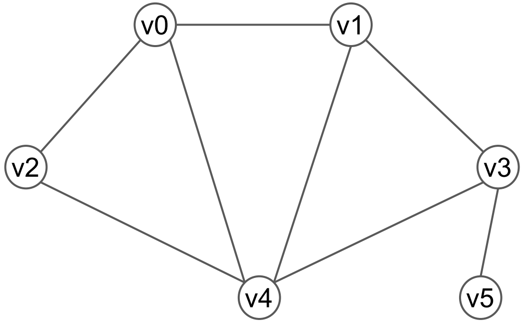
Grafo desconexo

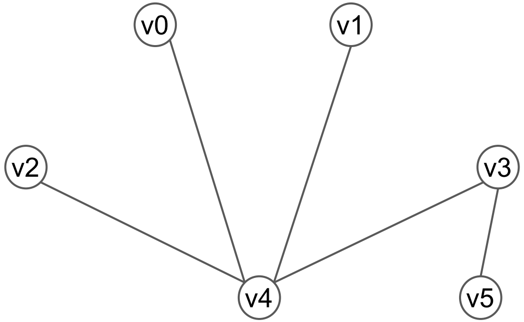
Subgrafo conexo

- Um **subgrafo conexo** de um grafo *G* é um subgrafo de *G* que é conexo

- Exemplo:

G





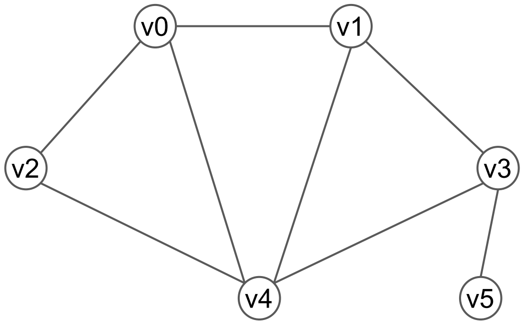
Subgrafo conexo

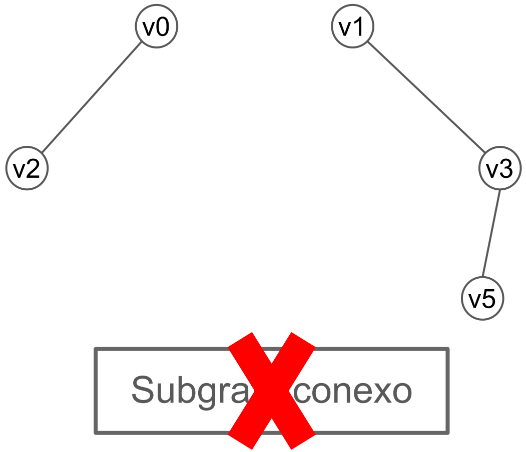
Subgrafo conexo

- Um **subgrafo conexo** de um grafo *G* é um subgrafo de *G* que é conexo

- Exemplo:

G

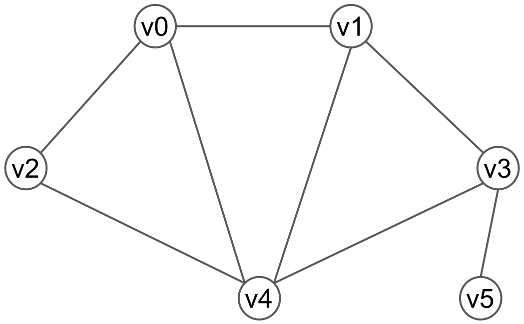


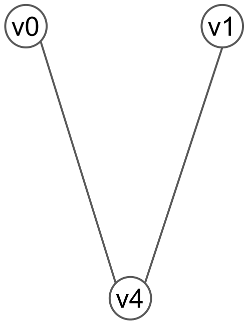


Subgrafo conexo

- Um **subgrafo conexo** de um grafo *G* é um subgrafo de *G* que é conexo
- Exemplo:

G





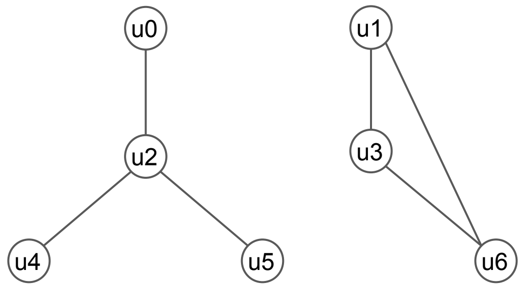
Subgrafo conexo

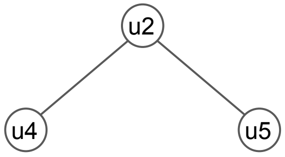
Subgrafo conexo maximal

- Um **subgrafo conexo maximal** de um grafo *G* é um subgrafo conexo de *G* que não está contido em outro subgrafo conexo de *G*

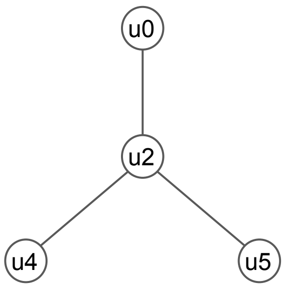
- Exemplo:

G





~~Subgrafo conexo maximal~~



Subgrafo conexo maximal

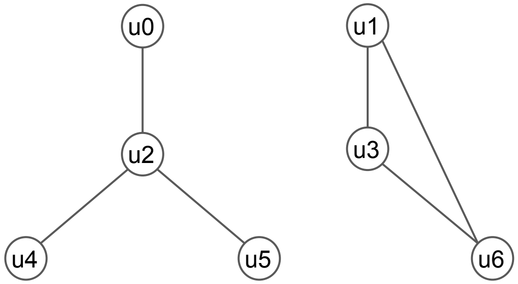
Componentes conexas

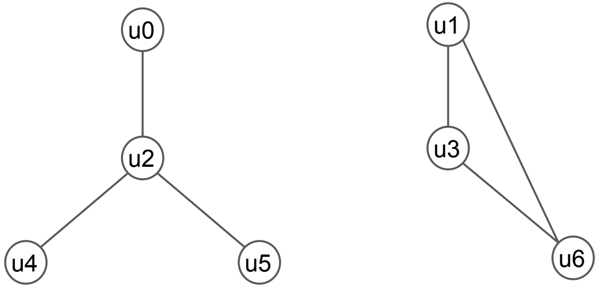
- As **componentes conexas** (ou apenas **componentes**) de um grafo *G* são os subgrafos conexos maximais de *G*
- Denotamos por *c*(*G*) o número de componentes conexas de *G*

- Exemplo:

Componentes conexas de *G*

G





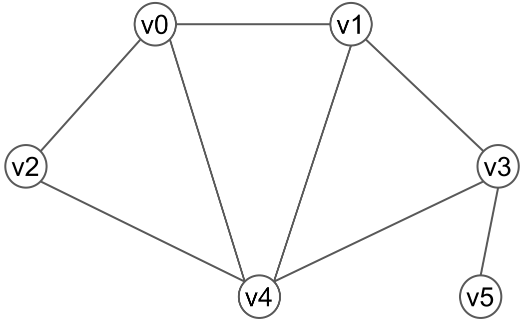
$c(G) = 2$

Componentes conexas

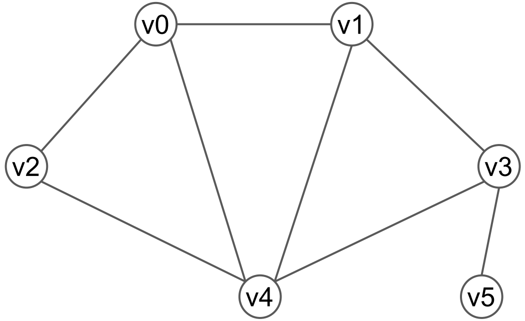
- As **componentes conexas** (ou apenas **componentes**) de um grafo *G* são os subgrafos conexos maximais de *G*
- Denotamos por *c*(*G*) o número de componentes conexas de *G*

- Exemplo:

G



Componentes conexas de *G*



c(*G*) = 1

Componentes conexas

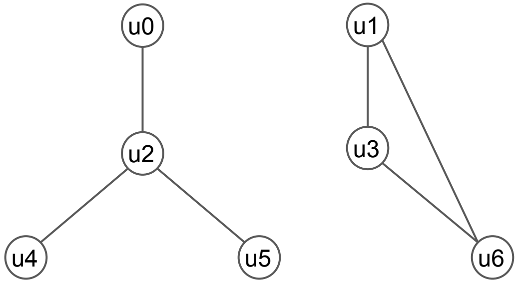
- As **componentes conexas** (ou apenas **componentes**) de um grafo G são os subgrafos conexos maximais de G
- Denotamos por $c(G)$ o número de componentes conexas de G

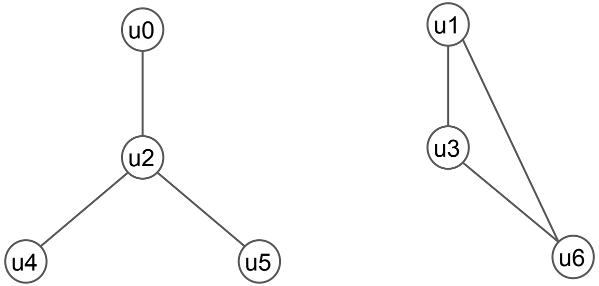
- Um **grafo conexo** (com pelo menos um vértice) tem exatamente **uma componente**

Componentes conexas

- Observações:
  - Componentes conexas distintas **não** possuem vértices em comum
  - Ao adicionar uma aresta cujos extremos estejam em duas componentes conexas distintas, fazemos com que estas componentes **passem a ser uma só**
  - Dado um caminho $v_{i0}v_{i1}\ldots v_{ik-1}v_{ik}$, todos os vértices v_{i0}, v_{i1}, …, v_{ik-1}, v_{ik} pertencem à **mesma componente** conexa

G

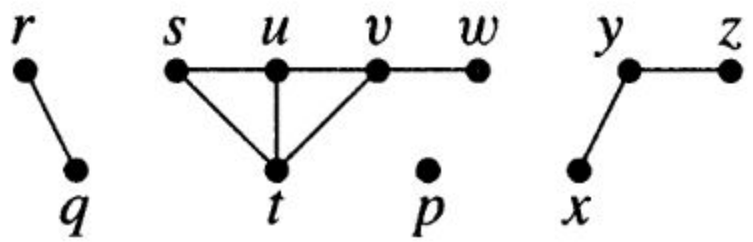




Componentes conexas de *G*

Exercícios

5. Indique as componentes conexas do grafo abaixo.



Exercícios

6. Considere um grafo G que consiste exatamente em um caminho e que tem pelo menos 1 aresta. Suponha que uma aresta de G foi removida. Prove que o grafo resultante possui 2 componentes conexas.

Exercícios

7. Considere um grafo G que consiste exatamente em um ciclo. Suponha que uma aresta de G foi removida. Prove que o grafo resultante possui 1 componente conexa.

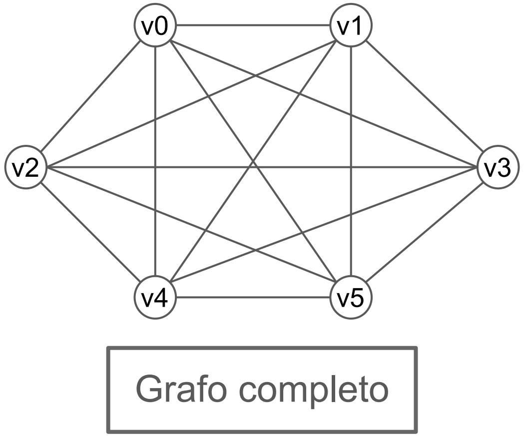
Grafo completo

- Um grafo G é **completo** se, para todo par de vértices v_i, v_j de G, existe uma **aresta** em G entre v_i e v_j

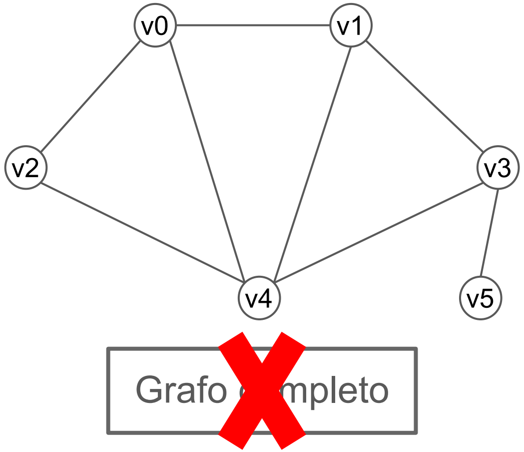
Grafo completo ≠ Grafo conexo

- Exemplo:

G_1



G_2

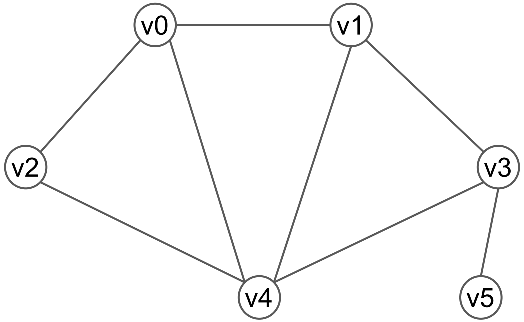


Complemento de um grafo

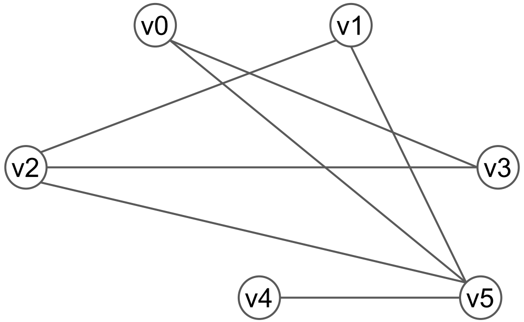
- Dado um grafo G, o **complemento de G** é o grafo $\overline{G}$ tal que
  - $V(\overline{G}) = V(G)$ e
  - $v_i v_j \in E(\overline{G})$ se e somente se $v_i v_j \notin E(G)$

- Exemplo:

G



$\overline{G}$

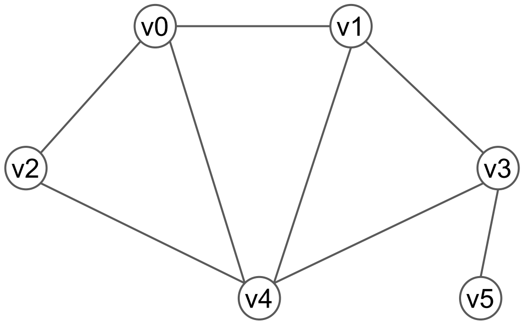


Clique

- Um conjunto de vértices S de um grafo G é uma **clique** se, para todo par de vértices v_i , v_j em S, existe uma aresta em G entre v_i e v_j

- Exemplo:

G



$S = \{ v_0, v_1, v_4 \}$

Clique

$S = \{ v_0, v_1, v_2, v_4 \}$

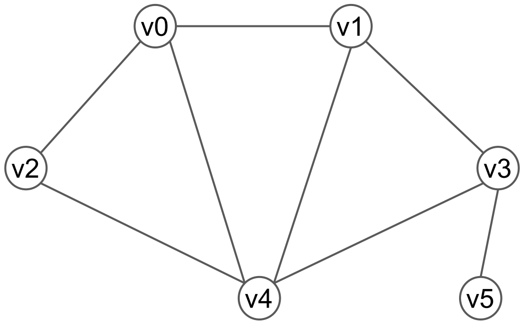
~~Clique~~

Conjunto independente

- Um conjunto de vértices S de um grafo G é um **conjunto independente** se, para todo par de vértices v_i , v_j em S, **não** existe uma aresta em G entre v_i e v_j

- Exemplo:

G



$S = \{ v_1, v_2, v_5 \}$

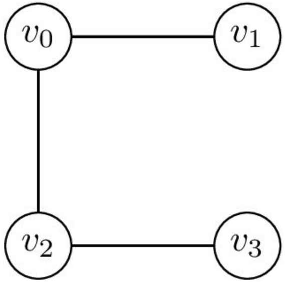
Conjunto independente

$S = \{ v_1, v_2, v_3 \}$

~~Conjunto independente~~

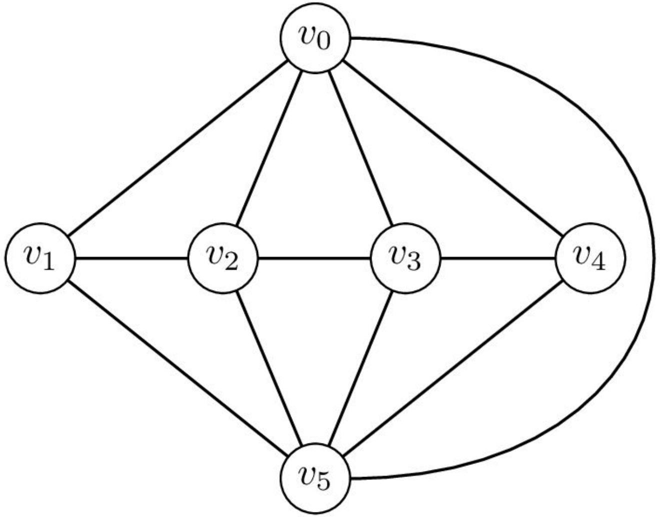
Exercícios

8. Mostre que o grafo G abaixo e o seu complemento $\overline{G}$ são isomorfos.



Exercícios

9. Apresente uma clique de tamanho máximo e um conjunto independente de tamanho máximo do grafo abaixo.

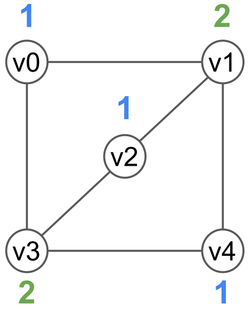


Grafo bipartido

- Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos não-vazios de vértices V_1 e V_2 tal que V_1 e V_2 são conjuntos independentes

- Exemplo:

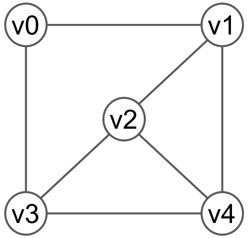
G



V_1 = { v0, v2, v4 } é um conjunto independente
V_2 = { v1, v3 } é um conjunto independente

Grafo bipartido

G



Não é possível particionar $V(G)$ em dois conjuntos independentes V_1 e V_2

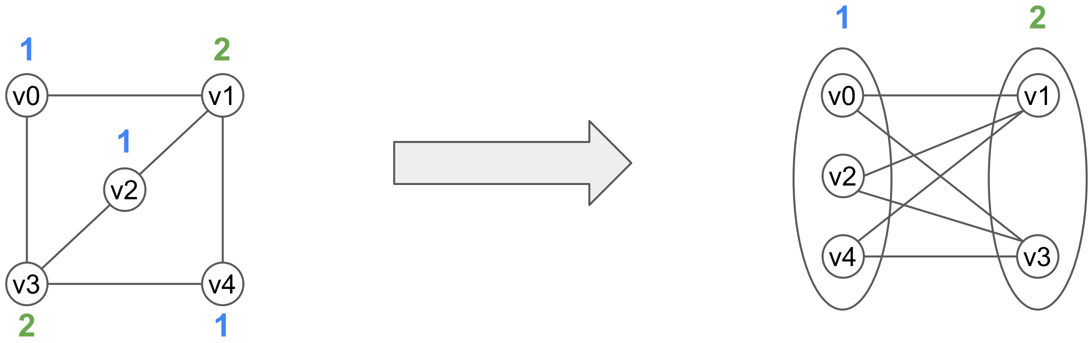
~~Grafo bipartido~~

Grafo bipartido

- Um grafo *G* é **bipartido** se *V*(*G*) pode ser particionado em dois conjuntos não-vazios de vértices V_1 e V_2 tal que V_1 e V_2 são conjuntos independentes

- Exemplo:

G

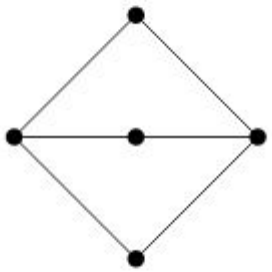


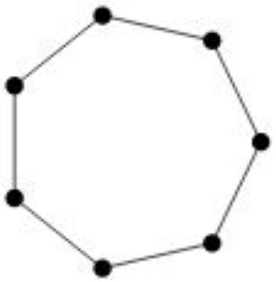
V_1 = { v0, v2, v4 } é um conjunto independente
V_2 = { v1, v3 } é um conjunto independente

Grafo bipartido

Exercícios

10. Para cada grafo abaixo, diga se o grafo é bipartido ou não.





Exercícios

11. Indique todas as afirmações corretas sobre o grafo *G* ao lado:

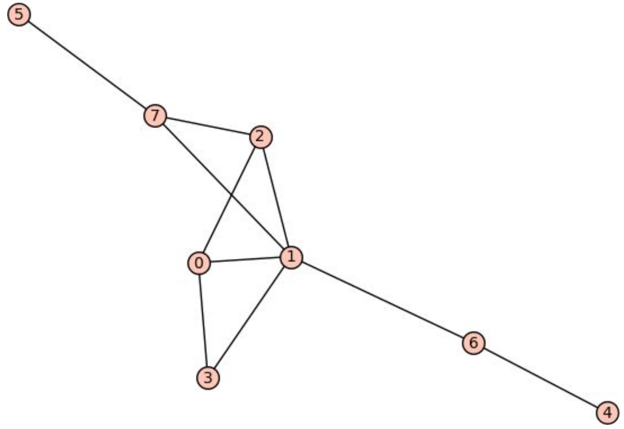
    a. O grafo *H* tal que *V*(*H*) = { 1, 2, 5, 7 } e *E*(*H*) = { { 2, 7 }, { 1, 2 }, { 5, 7 } } é um subgrafo de *G*.

    b. O grafo *H* tal que *V*(*H*) = ∅ e *E*(*H*) = ∅, é um subgrafo de *G*.

    c. O grafo H tal que *V*(*H*) = { 0, 2, 5, 6 } e *E*(*H*) = { { 2, 5 }, { 2, 6 } } é um subgrafo de *G*.

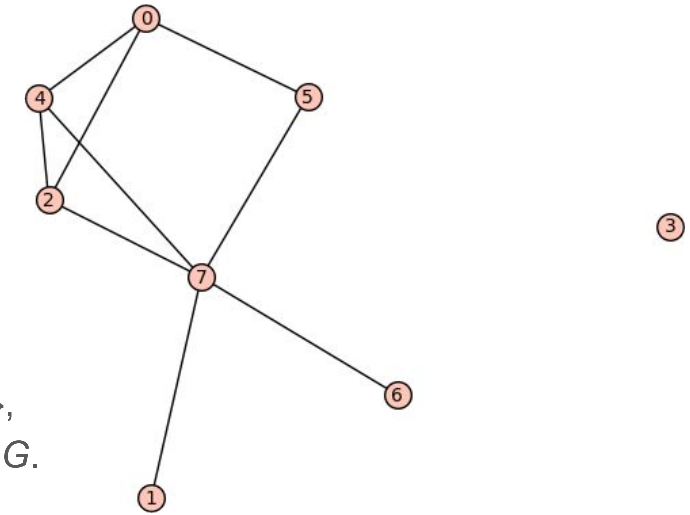
    d. O grafo *G* – 0 (ou seja, o grafo obtido pela remoção do vértice 0 de *G*) tem 7 arestas.

    e. O grafo *G* – 0 (ou seja, o grafo obtido pela remoção do vértice 0 de *G*) é desconexo.



Exercícios

12. Indique todas as afirmações corretas sobre o grafo G ao lado:
    a. O grafo H tal que $V(H) = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ e $E(H) = \{ \{ 0, 4 \}, \{ 0, 5 \}, \{ 2, 7 \}, \{ 1, 7 \}, \{ 6, 7 \} \}$ é um subgrafo gerador de G.
    b. O grafo H do item anterior tem 3 componentes conexas.
    c. G é um grafo conexo.
    d. O grafo H tal que $V(H) = \{ 0, 2, 4 \}$ e $E(H) = \{ \{ 0, 2 \}, \{ 0, 4 \}, \{ 2, 4 \} \}$ é um subgrafo conexo maximal de G.
    e. O grafo H tal que $V(H) = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ e $E(H) = \varnothing$ é um subgrafo gerador de G.
    f. Se a aresta $\{ 1, 3 \}$ existisse em G, então G seria conexo.



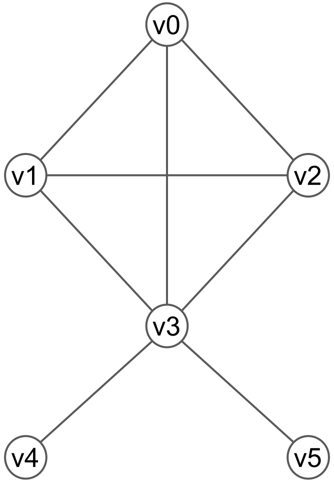
Referências

- Um tratamento mais detalhado dos conceitos básicos definidos nesta apresentação pode ser encontrado em qualquer uma das referências básicas e complementares da disciplina
- Esta apresentação é baseada nos seguintes materiais:

1. Livro
   Feofiloff, P. Exercícios de Teoria dos Grafos. 2013. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios/texto/ETG.pdf

Exercícios – Solução

3. Determine um subconjunto de vértices *S* do grafo *G* abaixo tal que o subgrafo induzido *G*[*S*] possua 4 arestas.



Solução: Qualquer subconjunto *S* formado por v3, 2 vértices entre v0, v1 e v2 e 1 vértice entre v4 e v5.

Exercícios – Solução

11. Indique todas as afirmações corretas sobre o grafo G ao lado:

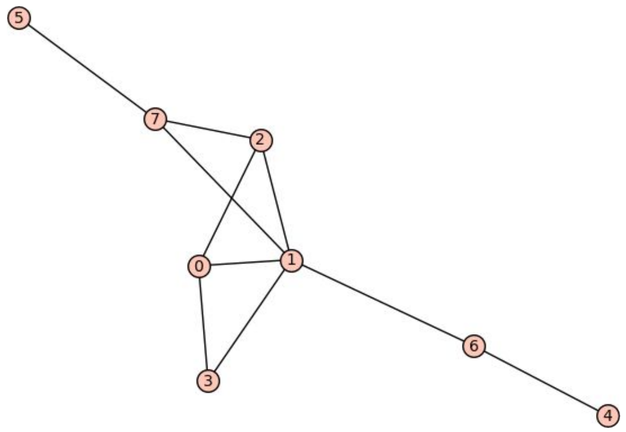
    a. O grafo H tal que $V(H) = \{ 1, 2, 5, 7 \}$ e $E(H) = \{ \{ 2, 7 \}, \{ 1, 2 \}, \{ 5, 7 \} \}$ é um subgrafo de G.

    b. O grafo H tal que $V(H) = \varnothing$ e $E(H) = \varnothing$, é um subgrafo de G.

    c. O grafo H tal que $V(H) = \{ 0, 2, 5, 6 \}$ e $E(H) = \{ \{ 2, 5 \}, \{ 2, 6 \} \}$ é um subgrafo de G.

    d. O grafo $G - 0$ (ou seja, o grafo obtido pela remoção do vértice 0 de G) tem 7 arestas.

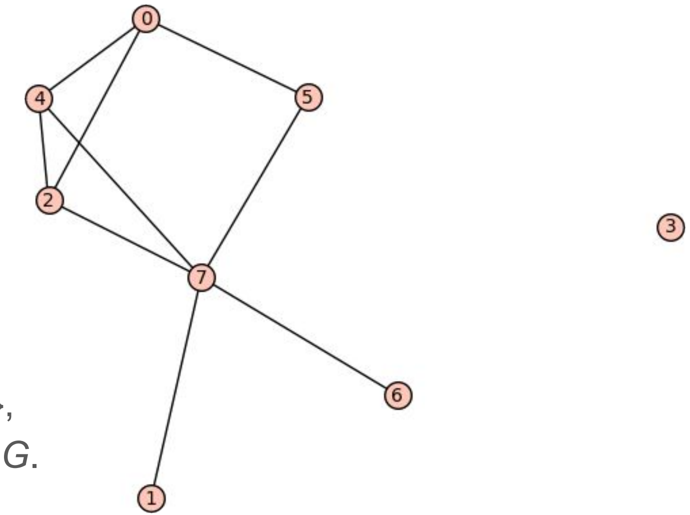
    e. O grafo $G - 0$ (ou seja, o grafo obtido pela remoção do vértice 0 de G) é desconexo.



Solução: As afirmações *a*, *b*, e *d* são todas as afirmações corretas.

Exercícios – Solução

12. Indique todas as afirmações corretas sobre o grafo *G* ao lado:
    a. O grafo *H* tal que *V*(*H*) = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 } e *E*(*H*) = { { 0, 4 }, { 0, 5 }, { 2, 7 }, { 1, 7 }, { 6, 7 } } é um subgrafo gerador de *G*.
    b. O grafo *H* do item anterior tem 3 componentes conexas.
    c. *G* é um grafo conexo.
    d. O grafo *H* tal que *V*(*H*) = { 0, 2, 4 } e *E*(*H*) = { { 0, 2 }, { 0, 4 }, { 2, 4 } } é um subgrafo conexo maximal de *G*.
    e. O grafo *H* tal que *V*(*H*) = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 } e *E*(*H*) = ∅ é um subgrafo gerador de *G*.
    f. Se a aresta { 1, 3 } existisse em *G*, então *G* seria conexo.



Solução: As afirmações *a*, *b*, *e* e *f* são todas as afirmações corretas.