# Busca em Profundidade

Prof. Andrei Braga



#### Conteúdo

- Percorrendo um sistema de passagens
- Busca em profundidade
- Exercícios
- Referências

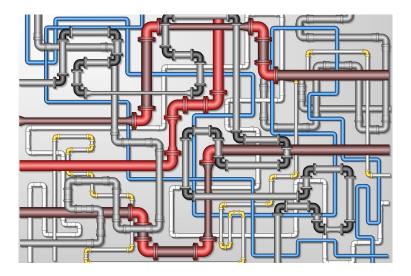
- Em várias situações, temos um sistema de passagens e queremos percorrer de maneira eficiente as junções e extremidades destas passagens
- Exemplo:



- Em várias situações, temos um sistema de passagens e queremos percorrer de maneira eficiente as junções e extremidades destas passagens
- Exemplo:

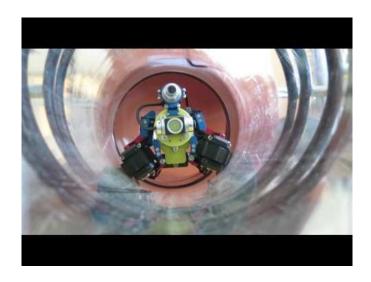


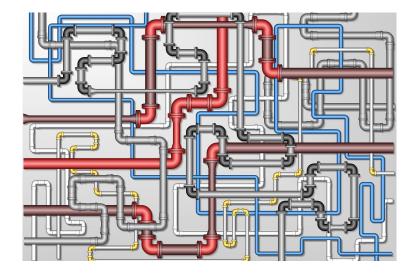
- Em várias situações, temos um sistema de passagens e queremos percorrer de maneira eficiente as junções e extremidades destas passagens
- Exemplo:

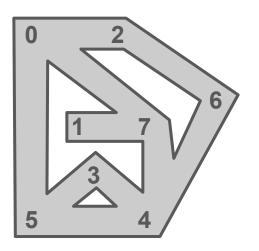


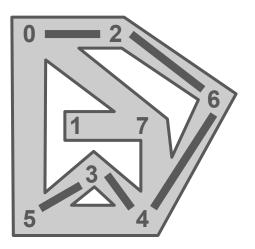
 Em várias situações, temos um sistema de passagens e queremos percorrer de maneira eficiente as junções e extremidades destas passagens

#### Exemplo:





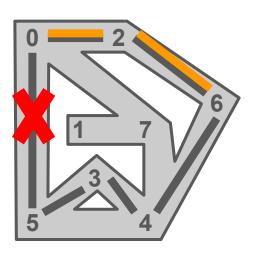




Partindo do 0

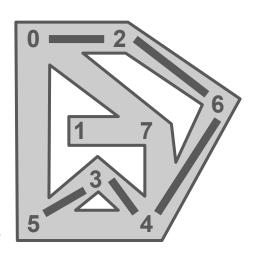
Não vamos visitar novamente pontos já visitados

Para isso, vamos marcar os pontos que vão sendo visitados



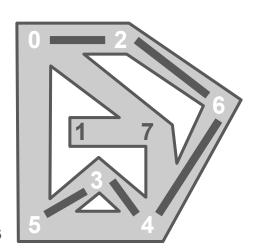
Partindo do 0

Para isso, vamos marcar os pontos que vão sendo visitados



Partindo do 0

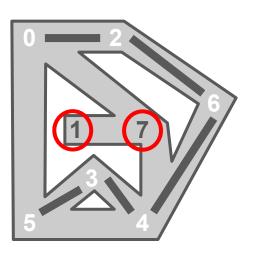
Para isso, vamos marcar os pontos que vão sendo visitados

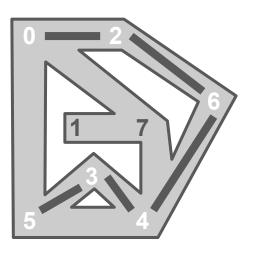


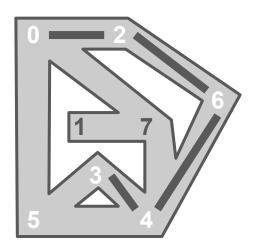
Partindo do 0

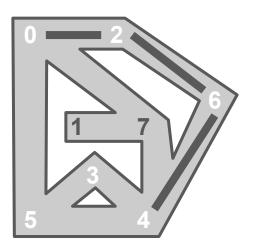
# Ainda podem existir pontos não visitados

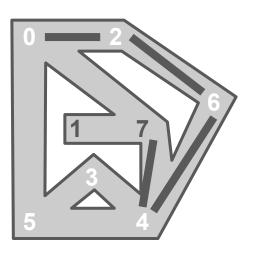
Por isso, vamos retornar ao ponto de onde viemos e tentar visitar pontos ainda não visitados

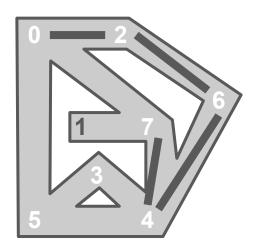


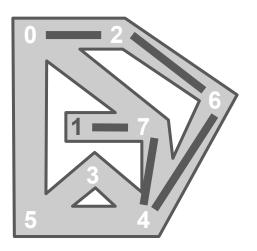


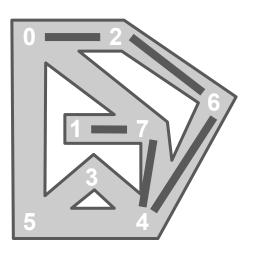


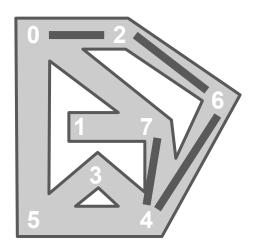


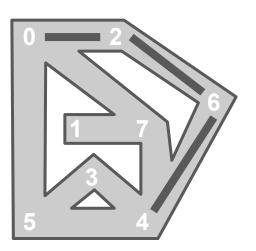


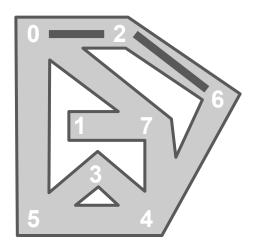


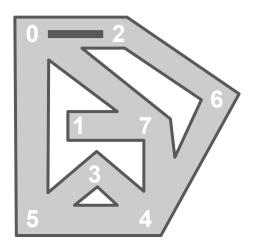


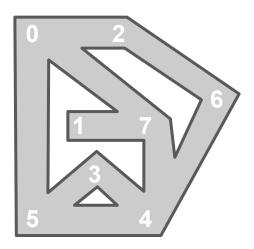




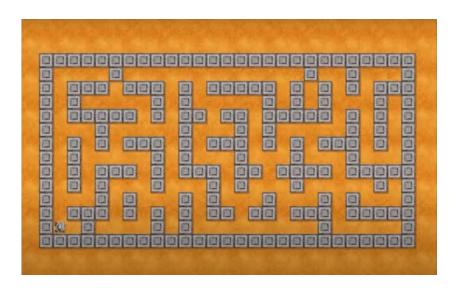






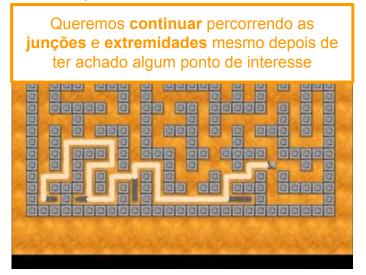


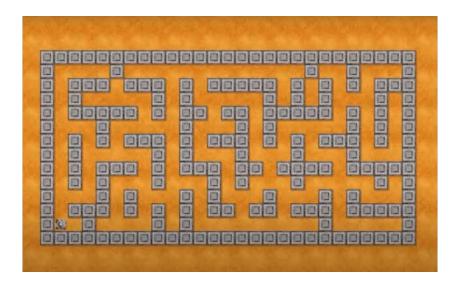
- Em várias situações, temos um sistema de **passagens** e queremos percorrer de maneira eficiente as **junções** e **extremidades** destas passagens
- Exemplo:



 Em várias situações, temos um sistema de passagens e queremos percorrer de maneira eficiente as junções e extremidades destas passagens

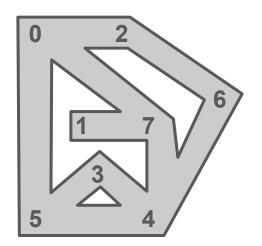
#### Exemplo:

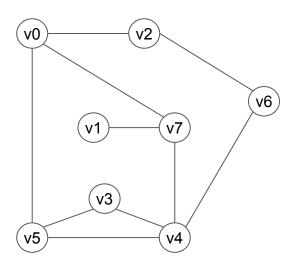




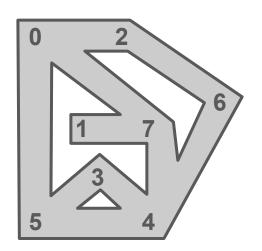
 Vamos representar o sistema de passagens como um grafo: passagens modeladas por arestas; junções e extremidades modeladas por vértices

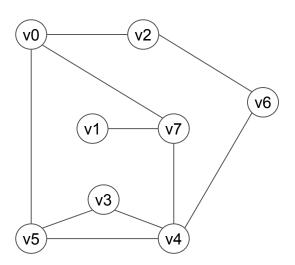
#### Exemplo:





- Vamos representar o sistema de passagens como um grafo: passagens modeladas por arestas; junções e extremidades modeladas por vértices
- Vamos implementar um algoritmo para percorrer os vértices do grafo
- Exemplo:





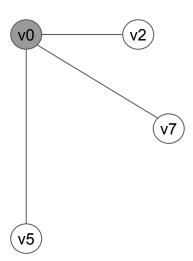
- Como podemos descrever a estratégia vista antes de uma forma geral?
  - $\circ$  Queremos percorrer os vértices do grafo partindo de um vértice especificado; por ex.,  $v_0$



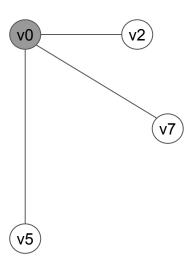
- Como podemos descrever a estratégia vista antes de uma forma geral?
  - $\circ$  Queremos percorrer os vértices do grafo partindo de um vértice especificado; por ex.,  $v_0$
  - 1. Comece em  $v_0$



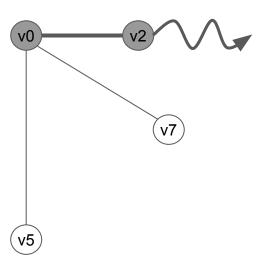
- Como podemos descrever a estratégia vista antes de uma forma geral?
  - Queremos percorrer os vértices do grafo partindo de um vértice especificado; por ex., v<sub>o</sub>
  - 1. Comece em  $v_0$
  - 2. Considere os vizinhos de  $v_0$



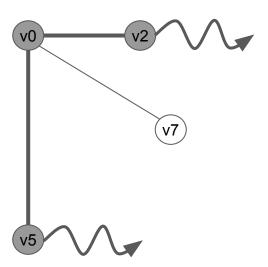
- Como podemos descrever a estratégia vista antes de uma forma geral?
  - $\circ$  Queremos percorrer os vértices do grafo partindo de um vértice especificado; por ex.,  $v_0$
  - 1. Comece em  $v_0$
  - Considere os vizinhos de v<sub>0</sub>
     Observe que, para percorrer os demais vértices do grafo, podemos



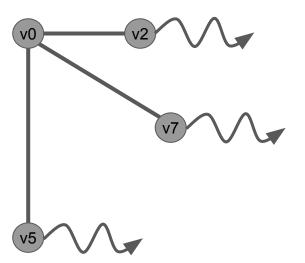
- Como podemos descrever a estratégia vista antes de uma forma geral?
  - Queremos percorrer os vértices do grafo partindo de um vértice especificado; por ex., v<sub>o</sub>
  - 1. Comece em  $v_0$
  - Considere os vizinhos de v<sub>0</sub>
     Observe que, para percorrer os demais vértices do grafo, podemos percorrer os vértices partindo de v<sub>2</sub>



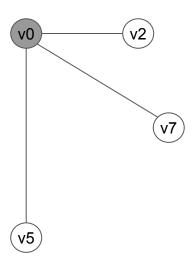
- Como podemos descrever a estratégia vista antes de uma forma geral?
  - $\circ$  Queremos percorrer os vértices do grafo partindo de um vértice especificado; por ex.,  $v_0$
  - 1. Comece em  $v_0$
  - 2. Considere os vizinhos de  $v_0$ Observe que, para
    percorrer os demais
    vértices do grafo, podemos
    percorrer os vértices
    partindo de  $v_2$ ,
    percorrer os vértices
    partindo de  $v_5$



- Como podemos descrever a estratégia vista antes de uma forma geral?
  - $\circ$  Queremos percorrer os vértices do grafo partindo de um vértice especificado; por ex.,  $v_0$
  - 1. Comece em  $v_0$
  - 2. Considere os vizinhos de  $v_0$  Observe que, para percorrer os demais vértices do grafo, podemos percorrer os vértices partindo de  $v_2$ , percorrer os vértices partindo de  $v_5$  e percorrer os vértices partindo de  $v_7$

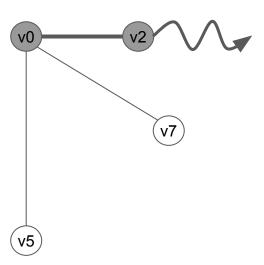


- Como podemos descrever a estratégia vista antes de uma forma geral?
  - $\circ$  Queremos percorrer os vértices do grafo partindo de um vértice especificado; por ex.,  $v_0$
  - 1. Comece em  $v_0$
  - 2. Considere os vizinhos de  $v_0$



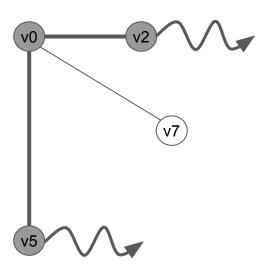
#### Percorrendo um sistema de passagens

- Como podemos descrever a estratégia vista antes de uma forma geral?
  - Queremos percorrer os vértices do grafo partindo de um vértice especificado; por ex., v<sub>o</sub>
  - 1. Comece em  $v_0$
  - 2. Considere os vizinhos de  $v_0$
  - Percorra recursivamente os vértices do grafo partindo de v<sub>2</sub>



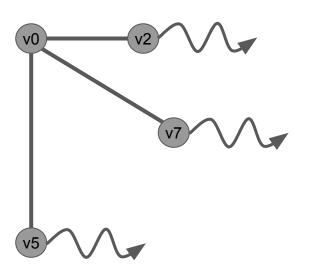
#### Percorrendo um sistema de passagens

- Como podemos descrever a estratégia vista antes de uma forma geral?
  - $\circ$  Queremos percorrer os vértices do grafo partindo de um vértice especificado; por ex.,  $v_0$
  - 1. Comece em  $v_0$
  - 2. Considere os vizinhos de  $v_0$
  - Percorra recursivamente os vértices do grafo partindo de v<sub>2</sub>
  - Percorra recursivamente os vértices do grafo partindo de v<sub>5</sub>



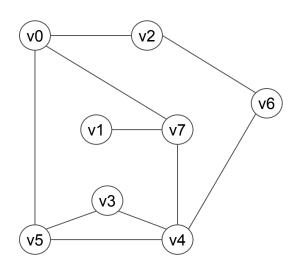
#### Percorrendo um sistema de passagens

- Como podemos descrever a estratégia vista antes de uma forma geral?
  - $\circ$  Queremos percorrer os vértices do grafo partindo de um vértice especificado; por ex.,  $v_0$
  - 1. Comece em  $v_0$
  - 2. Considere os vizinhos de  $v_0$
  - Percorra recursivamente os vértices do grafo partindo de v<sub>2</sub>
  - 4. Percorra recursivamente os vértices do grafo partindo de  $v_5$  e
  - 5. Percorra recursivamente os vértices do grafo partindo de  $v_7$

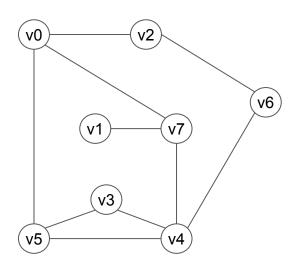


Não queremos visitar novamente vértices já visitados. Por isso, vamos marcar os vértices que vão sendo visitados

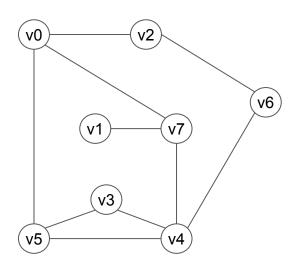
```
void Grafo::percorre(int v) {
```



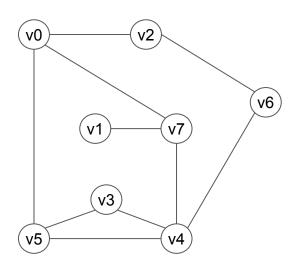
```
void Grafo::percorre(int v) {
    printf("%d\n", v);
```



```
void Grafo::percorre(int v) {
    printf("%d\n", v);
    for (int u = 0; u < num_vertices_; u++)</pre>
        if (matriz_adj_[v][u] != 0)
```

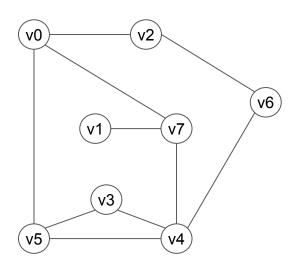


```
void Grafo::percorre(int v) {
    printf("%d\n", v);
    for (int u = 0; u < num_vertices_; u++)</pre>
        if (matriz_adj_[v][u] != 0)
            percorre(u);
```



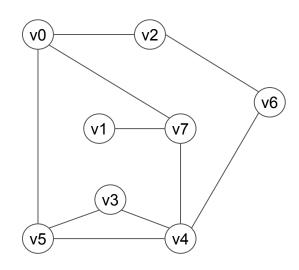
```
// O vetor marcado eh criado e inicializado antes
// do metodo percorre ser chamado
```

```
void Grafo::percorre(int v, int marcado[]) {
    printf("%d\n", v);
    for (int u = 0; u < num_vertices_; u++)</pre>
        if (matriz_adj_[v][u] != 0)
            percorre(u, marcado);
```



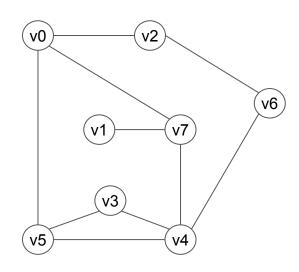
```
// O vetor marcado eh criado e inicializado antes
// do metodo percorre ser chamado
```

```
void Grafo::percorre(int v, int marcado[]) {
    printf("%d\n", v);
    marcado[v] = 1;
    for (int u = 0; u < num_vertices_; u++)</pre>
        if (matriz_adj_[v][u] != 0)
            if (marcado[u] == 0)
                percorre(u, marcado);
```



```
// O vetor marcado eh criado e inicializado antes
// do metodo percorre ser chamado
```

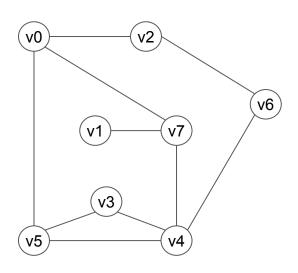
```
void Grafo::percorre(int v, int marcado[]) {
    printf("%d\n", v);
    marcado[v] = 1;
    for (int u = 0; u < num_vertices_; u++)</pre>
        if (matriz_adj_[v][u] != 0)
            if (marcado[u] == 0)
                percorre(u, marcado);
```



O processo de percorrer um grafo também é chamado de **busca** 

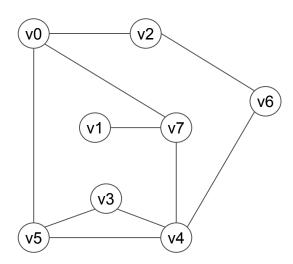
```
// O vetor marcado eh criado e inicializado antes
// do metodo busca ser chamado
```

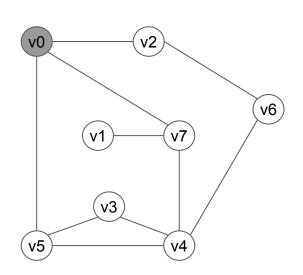
```
void Grafo::busca(int v, int marcado[]) {
    printf("%d\n", v);
    marcado[v] = 1;
    for (int u = 0; u < num_vertices_; u++)</pre>
        if (matriz_adj_[v][u] != 0)
            if (marcado[u] == 0)
                busca(u, marcado);
```



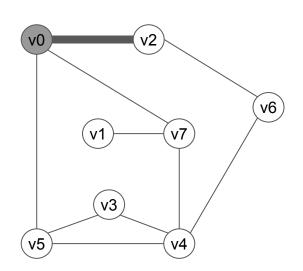
O processo de percorrer um grafo também é chamado de **busca** 

- Vamos construir um grafo *H* que representa a dinâmica da busca realizada
  - Quando o vértice inicial da busca é visitado, o adicionamos a H
  - Quando um novo vértice v é visitado, se chegamos a v através da aresta wv,
     então adicionamos a H a aresta wv e o vértice v

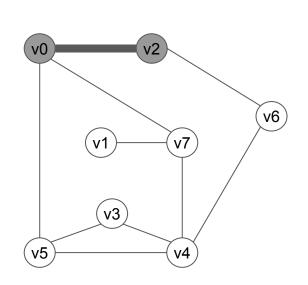


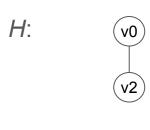


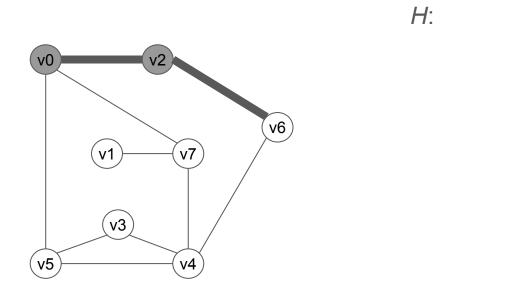


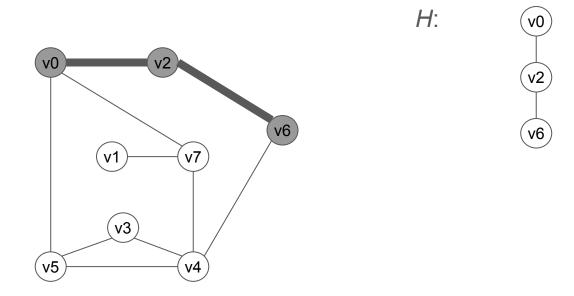


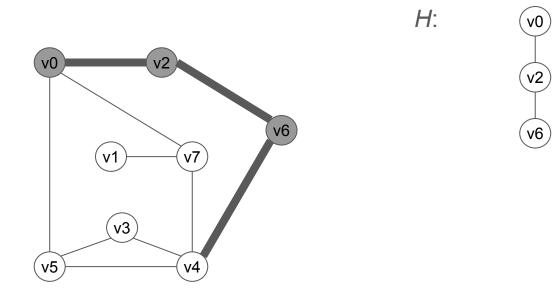


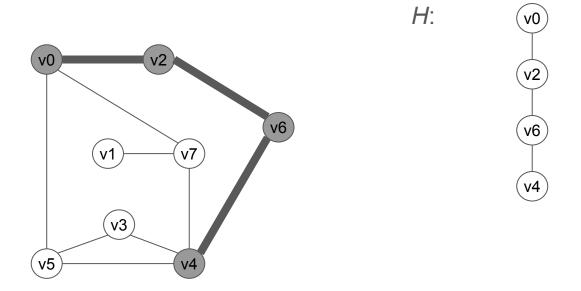


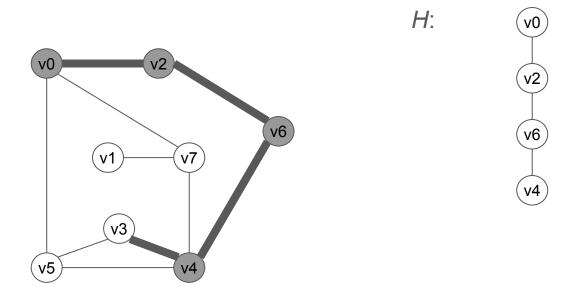


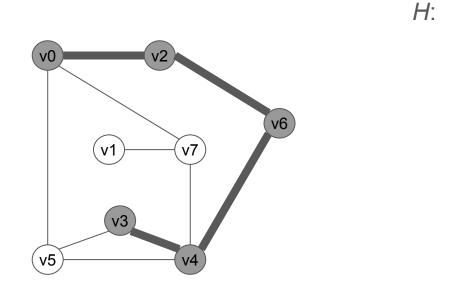


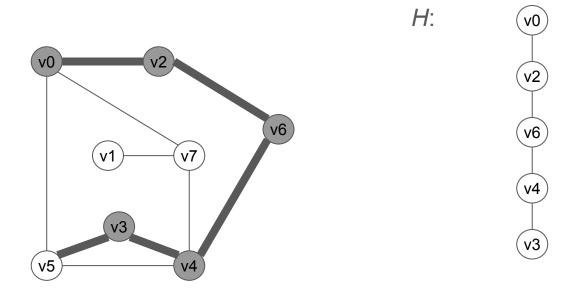


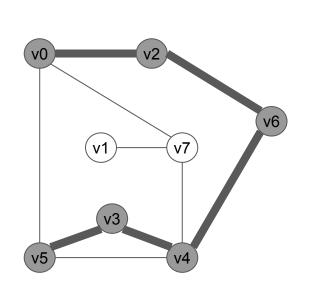


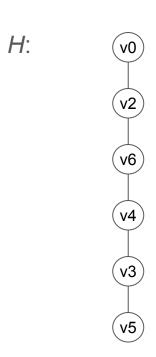


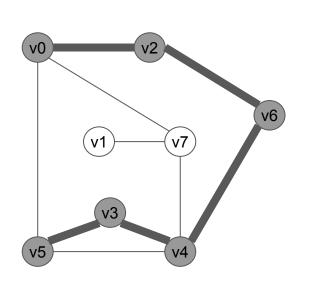


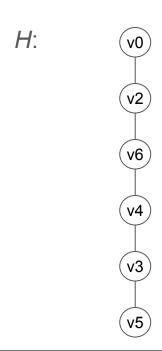




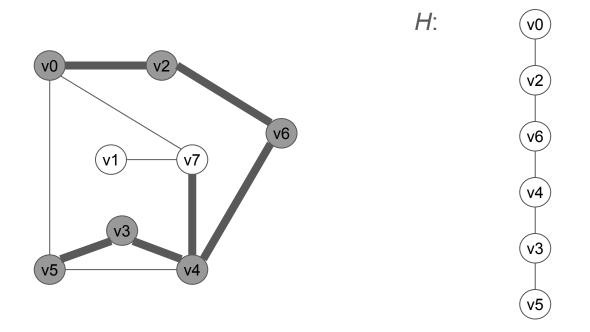


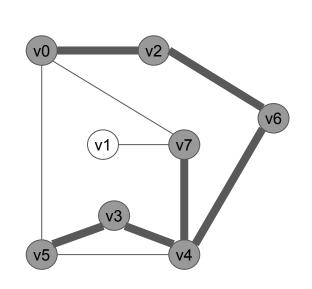


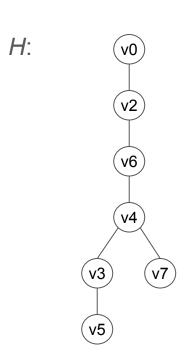


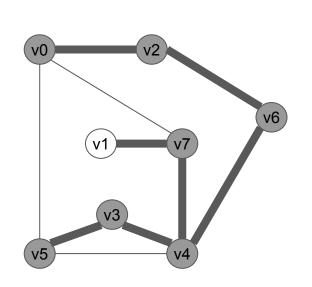


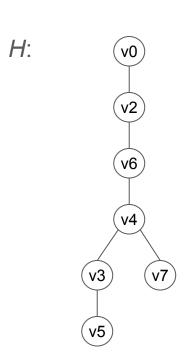
A busca segue em **profundidade** até não ser mais possível, para depois retornar

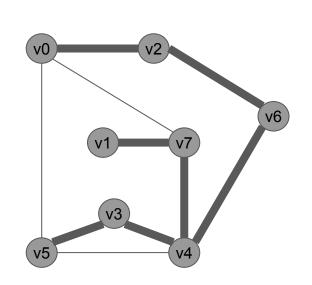


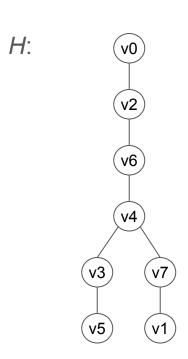


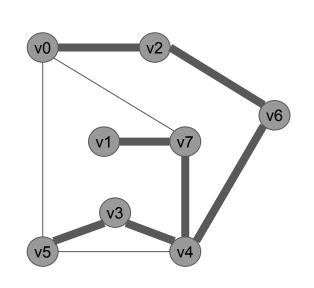


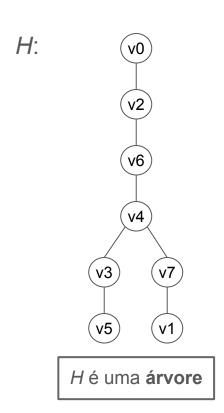






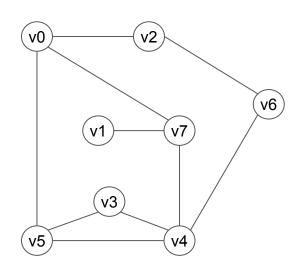






```
// O vetor marcado eh criado e inicializado antes
// do metodo busca ser chamado
```

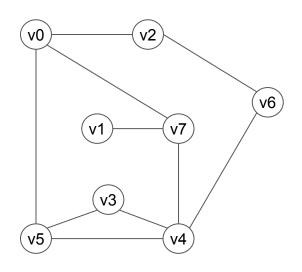
```
void Grafo::busca(int v, int marcado[]) {
    printf("%d\n", v);
    marcado[v] = 1;
    for (int u = 0; u < num_vertices_; u++)</pre>
        if (matriz_adj_[v][u] != 0)
            if (marcado[u] == 0)
                busca(u, marcado);
```



A busca segue em **profundidade** até não ser mais possível, para depois retornar

```
// O vetor marcado eh criado e inicializado antes
// do metodo busca_prof ser chamado
```

```
void Grafo::busca_prof(int v, int marcado[]) {
    printf("%d\n", v);
    marcado[v] = 1;
    for (int u = 0; u < num_vertices_; u++)</pre>
        if (matriz_adj_[v][u] != 0)
            if (marcado[u] == 0)
                busca_prof(u, marcado);
```



A busca segue em **profundidade** até não ser mais possível, para depois retornar

#### Busca em um grafo

- A estratégia de busca em um grafo vista nos slides anteriores é conhecida como o algoritmo de busca em profundidade
- Ao realizar uma busca em um grafo, conseguimos visitar todo vértice w do grafo tal que existe um caminho entre o vértice inicial da busca e w
- Em outras palavras, conseguimos visitar todos os vértices da componente conexa do grafo que contém o vértice inicial da busca
- Se o grafo é conexo, então conseguimos visitar todos os seus vértices

#### Exercícios

1. Usando o algoritmo de busca em profundidade, como podemos verificar se um grafo é conexo?

#### Exercícios

1. Usando o algoritmo de busca em profundidade, como podemos verificar se um grafo é conexo?

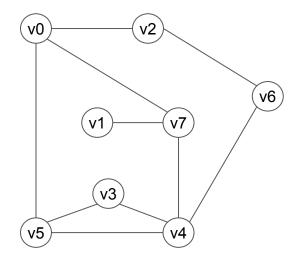
Podemos realizar a busca e em seguida verificar se algum vértice do grafo não foi marcado como visitado

A solução descrita acima é mais eficiente que a solução comentada anteriormente para resolver o mesmo problema

#### Busca em um grafo

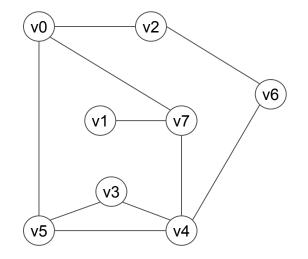
- Considere agora o seguinte objetivo:
   Dado um grafo, queremos determinar um caminho de comprimento mínimo entre um certo vértice e cada um dos vértices do grafo
- Podemos atingir este objetivo através de uma estratégia de busca chamada busca em largura
- Para este objetivo, o algoritmo de busca em profundidade não é útil, pois a estratégia utilizada não tem relação com calcular caminhos de comprimento mínimo
- Antes de entender como funciona uma busca em largura, vamos examinar uma maneira alternativa de implementar uma busca em profundidade

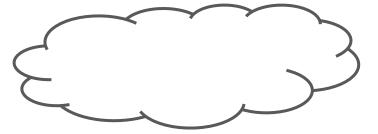
- Estratégia geral:
  - 1. Enquanto existe vértice a ser visitado:
  - 2. Visita o próximo vértice
  - 3. Para todo vizinho do vértice:
  - 4. Se o vizinho ainda não foi visitado
  - 5. Agenda vizinho para visitação



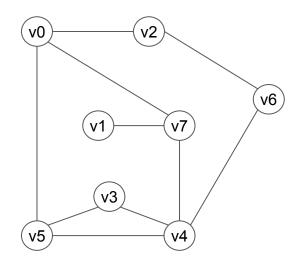
 A estratégia acima pode ser implementada com o uso de uma estrutura de dados

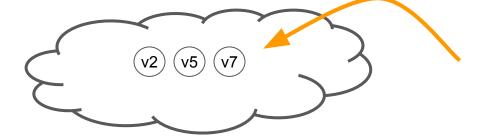
- Estratégia geral:
  - 1. Enquanto existe vértice a ser visitado:
  - 2. Visita o próximo vértice
  - 3. Para todo vizinho do vértice:
  - 4. Se o vizinho ainda não foi visitado
  - 5. Agenda vizinho para visitação



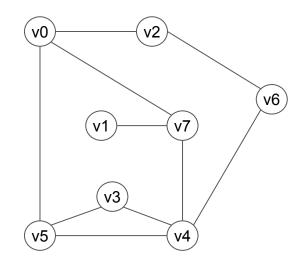


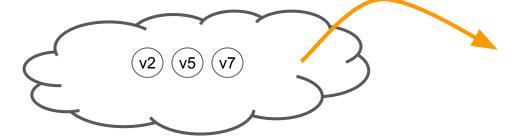
- Estratégia geral:
  - 1. Enquanto existe vértice a ser visitado:
  - 2. Visita o próximo vértice
  - 3. Para todo vizinho do vértice:
  - 4. Se o vizinho ainda não foi visitado
  - 5. Agenda vizinho para visitação



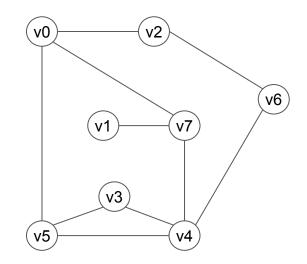


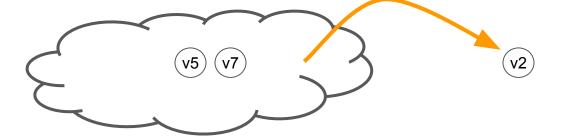
- Estratégia geral:
  - 1. Enquanto existe vértice a ser visitado:
  - 2. Visita o próximo vértice
  - 3. Para todo vizinho do vértice:
  - 4. Se o vizinho ainda não foi visitado
  - 5. Agenda vizinho para visitação



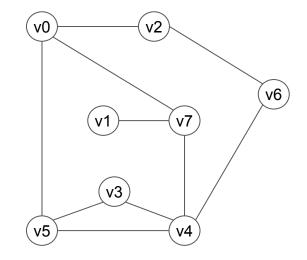


- Estratégia geral:
  - 1. Enquanto existe vértice a ser visitado:
  - Visita o próximo vértice
  - 3. Para todo vizinho do vértice:
  - 4. Se o vizinho ainda não foi visitado
  - 5. Agenda vizinho para visitação





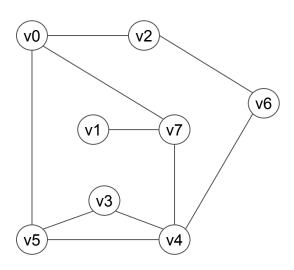
- Estratégia geral:
  - Enquanto existe vértice a ser visitado:
  - 2. Visita o próximo vértice
  - 3. Para todo vizinho do vértice:
  - 4. Se o vizinho ainda não foi visitado
  - 5. Agenda vizinho para visitação



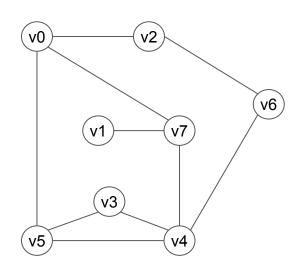


- Considerando a estratégia geral descrita no slide anterior, o que podemos dizer da lógica através da qual os vértices são visitados no algoritmo de busca em profundidade?
  - É uma lógica de pilha
- Vamos implementar este algoritmo usando explicitamente uma pilha

```
void Grafo::busca_prof(int v) {
    // Criacao e inicializacao do vetor marcado
    while () {
        printf("%d\n", w);
        marcado[w] = 1;
        for (int u = 0; u < num_vertices_; u++)</pre>
            if (matriz_adj_[w][u] != 0)
                 if (marcado[u] == 0)
```

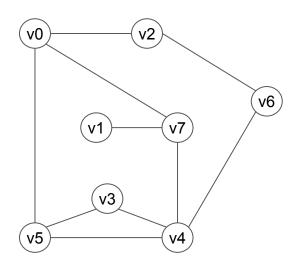


```
void Grafo::busca_prof(int v) {
    // Criacao e inicializacao do vetor marcado
    stack<int> pilha;
    pilha.push(v);
    while (!pilha.empty()) {
        int w = pilha.top();
        pilha.pop();
        printf("%d\n", w);
        marcado[w] = 1:
        for (int u = 0; u < num_vertices_; u++)</pre>
            if (matriz_adj_[w][u] != 0)
                if (marcado[u] == 0)
                     pilha.push(u);
```



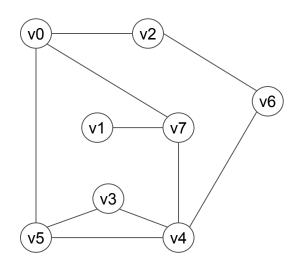
Nesta implementação, o percurso realizado pode ser diferente do realizado na versão recursiva

```
void Grafo::busca_prof(int v) {
    // Criacao e inicialização do vetor marcado
    stack<int> pilha;
    pilha.push(v);
    while (!pilha.empty()) {
        int w = pilha.top();
        pilha.pop();
        printf("%d\n", w);
        marcado[w] = 1:
        for (int u = (num\_vertices\_ - 1); u >= 0; u --)
            if (matriz_adj_[w][u] != 0)
                if (marcado[u] == 0)
                    pilha.push(u);
```

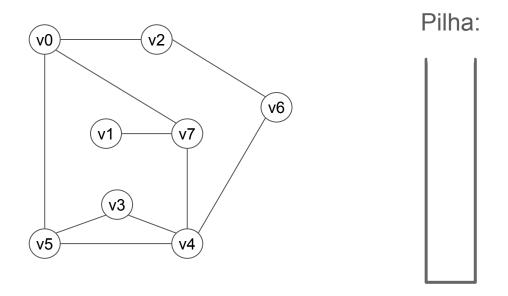


Com a alteração destacada, obtemos o **mesmo percurso** realizado na **versão recursiva** 

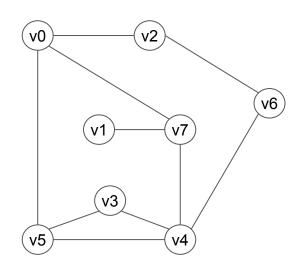
```
void Grafo::busca_prof(int v) {
   // Criacao e inicialização do vetor marcado
    stack<int> pilha;
    pilha.push(v);
    while (!pilha.empty()) {
        int w = pilha.top();
        pilha.pop();
        printf("%d\n", w);
        marcado[w] = 1;
        for (int u = (num\_vertices\_ - 1); u >= 0; u--)
            if (matriz_adj_[w][u] != 0)
                if (marcado[u] == 0)
                    pilha.push(u);
```



Nesta implementação, um vértice pode ser **visitado mais de uma vez!** 



#### Partindo do **v0**

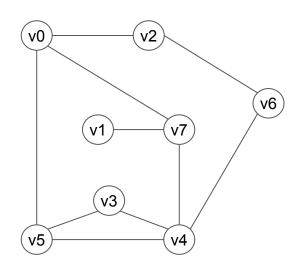






85

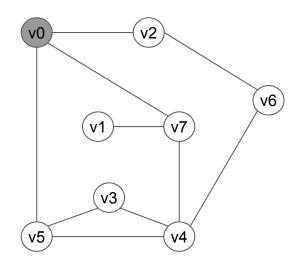
#### Partindo do **v0**







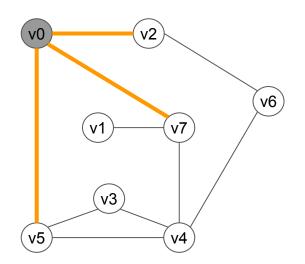
Partindo do **v0** 





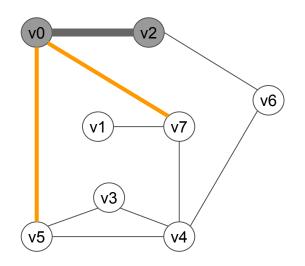


Partindo do **v0** 





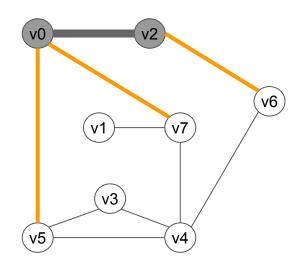
#### Partindo do **v0**





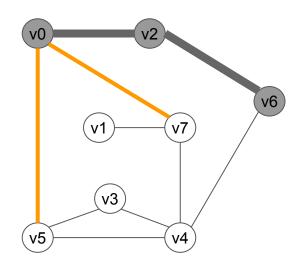


Partindo do **v0** 



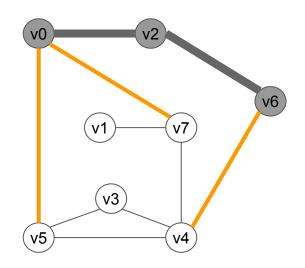


Partindo do **v0** 



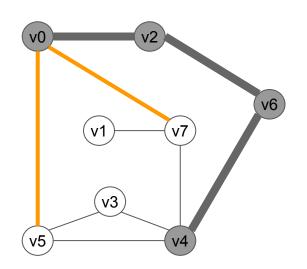


Partindo do **v0** 



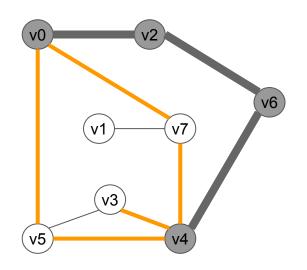


Partindo do **v0** 



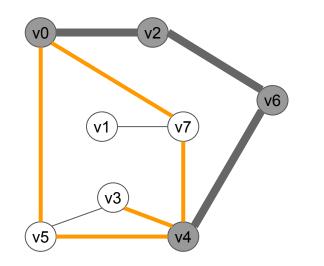


Partindo do **v0** 





Partindo do **v0** 

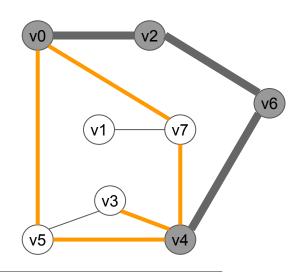


Pilha:



Se não alterarmos a implementação, os vértices **v5** e **v7** vão ser **visitados mais de uma vez!** 

Partindo do **v0** 



Pilha:

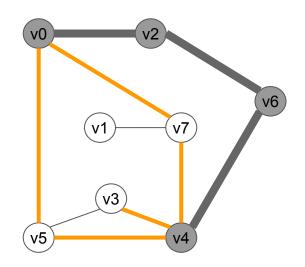
v3 v5 v7 v5 v7

Podemos tratar deste problema em dois momentos:

- Quando vamos inserir um vértice na pilha
- Quando vamos remover um vértice da pilha

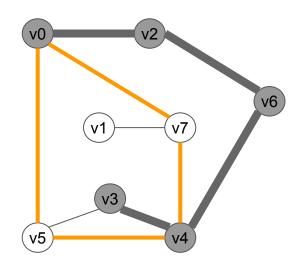
Se não alterarmos a implementação, os vértices **v5** e **v7** vão ser **visitados mais de uma vez!** 

#### Partindo do **v0**



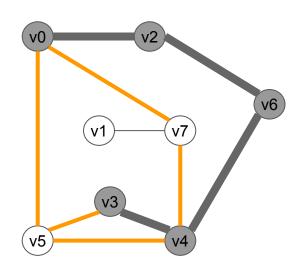


#### Partindo do **v0**



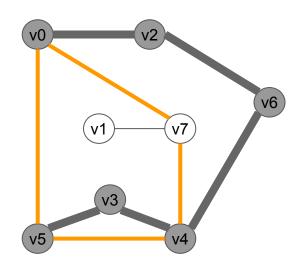


Partindo do **v0** 



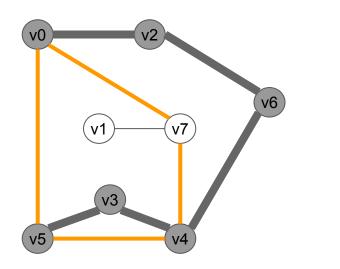


#### Partindo do **v0**





Partindo do **v0** 

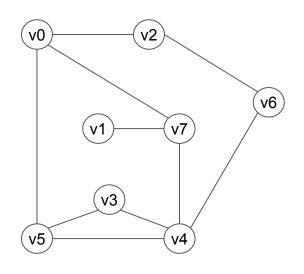


Pilha:

v5 v7 v5 v7

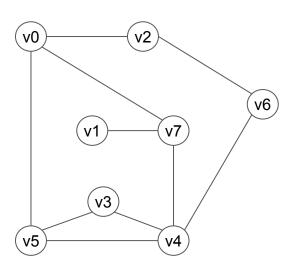
A **última vez** que v5 entra na pilha corresponde ao **momento correto** em que queremos visitá-lo (o mesmo vale para v7)

```
void Grafo::busca_prof(int v) {
   // Criacao e inicialização do vetor marcado
    stack<int> pilha;
    pilha.push(v);
    while (!pilha.empty()) {
        int w = pilha.top();
        pilha.pop();
        printf("%d\n", w);
        marcado[w] = 1;
        for (int u = (num\_vertices\_ - 1); u >= 0; u--)
            if (matriz_adj_[w][u] != 0)
                if (marcado[u] == 0)
                    pilha.push(u);
```



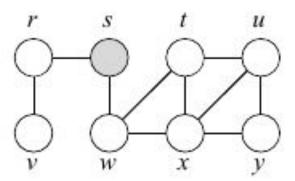
Nesta implementação, um vértice pode ser **visitado mais de uma vez!** 

```
void Grafo::busca_prof(int v) {
    // Criacao e inicialização do vetor marcado
    stack<int> pilha;
    pilha.push(v);
    while (!pilha.empty()) {
        int w = pilha.top();
        pilha.pop();
        if (marcado[w] == 0) {
            printf("%d\n", w);
            marcado[w] = 1;
            for (int u = (num\_vertices\_ - 1); u >= 0; u -- )
                if (matriz_adj_[w][u] != 0)
                    if (marcado[u] == 0)
                        pilha.push(u);
```



#### Exercícios

- 2. Execute o algoritmo de busca em profundidade para o grafo abaixo, iniciando pelo vértice destacado, e faça o seguinte:
  - a. Indique as impressões realizadas;
  - b. Desenhe a árvore que representa a dinâmica da busca.



#### Exercícios

3. Usando o algoritmo de busca em profundidade, como podemos verificar se um grafo é acíclico?

#### Exercícios

4. Descreva um algoritmo para determinar o número de componentes conexas de um grafo e os vértices de cada componente.

#### Referências

- Esta apresentação é baseada nos seguintes materiais:
  - Capítulo 22 do livro
     Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C. Introduction to Algorithms.
     3rd. ed. MIT Press, 2009.
  - Capítulo 18 do livro
     Sedgewick, R. Algorithms in C++ Part 5. Graph Algorithms. 3rd. ed.
     Addison-Wesley, 2002.