

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos


Prof. Andrei Braga



Conteúdo

- Grafos Eulerianos
- Grafos Hamiltonianos
- Exercícios
- Referências

Problema - Vigilância

- Uma empresa de segurança faz rondas de vigilância em uma cidade
 - Cada viatura da empresa é designada para fazer rondas em uma determinada área da cidade
- 

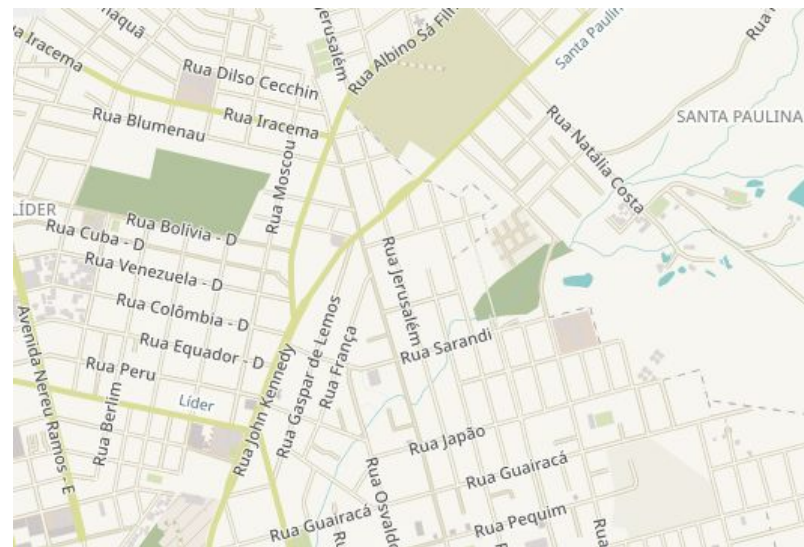


Imagem: www.openstreetmap.org

Problema - Vigilância

- Uma empresa de segurança faz rondas de vigilância em uma cidade
- Cada viatura da empresa é designada para fazer rondas em uma determinada área da cidade
- Durante uma ronda, cada viatura deve sair de um ponto de apoio, passar pelas ruas da área que está sendo vigiada e retornar ao ponto de apoio
- Neste contexto, o problema a seguir é importante

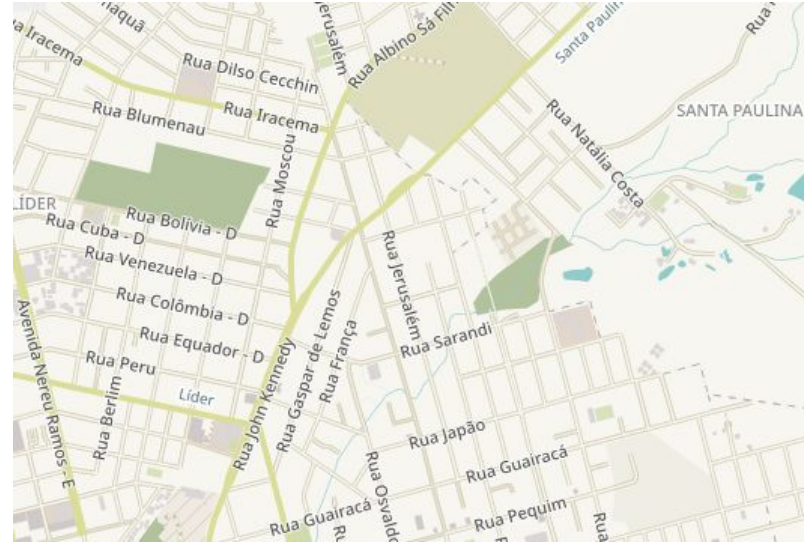


Imagem: www.openstreetmap.org

Problema - Vigilância

- **Problema:** É possível uma viatura fazer a sua ronda passando exatamente uma vez (e não mais de uma vez) por cada rua da área que está sendo vigiada?

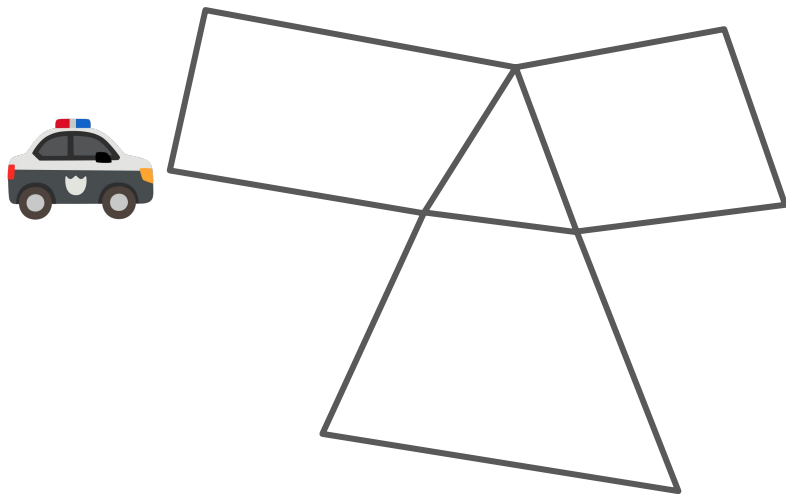


Imagem: www.openstreetmap.org

Problema - Vigilância

- **Problema:** É possível uma viatura fazer a sua ronda passando exatamente uma vez (e não mais de uma vez) por cada rua da área que está sendo vigiada?

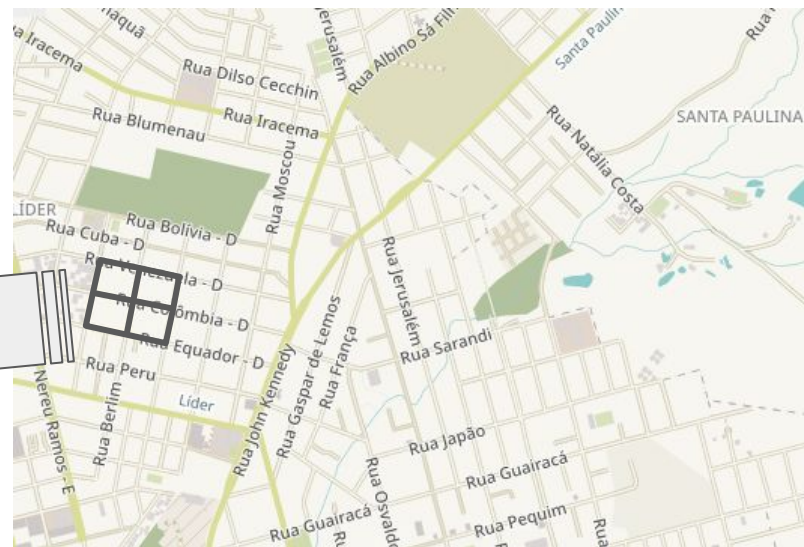
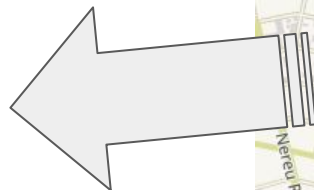
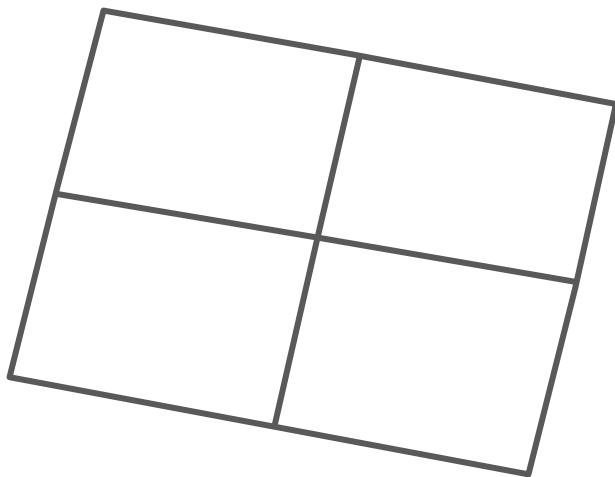
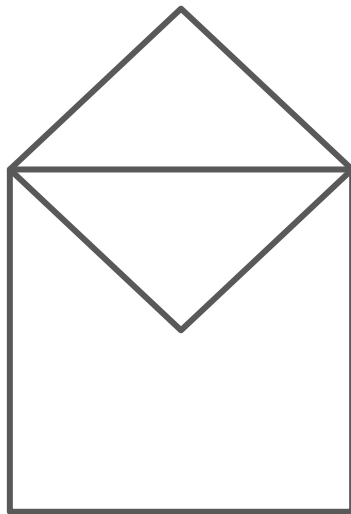


Imagem: www.openstreetmap.org

Problema - Almanaque de desafios 😊

- **Problema:** Dada uma forma geométrica (como a mostrada abaixo), é possível desenhar esta forma sem tirar o lápis do papel, sem traçar uma linha mais de uma vez e terminando o desenho no ponto inicial?



Problema - Pontes de Königsberg

- Problemas como os que acabamos de ver têm sua origem no século 18, com o Problema das Pontes de Königsberg
- Na cidade de Königsberg (atualmente chamada de Kaliningrado, na Rússia), havia sete pontes que cruzavam o Rio Pregel

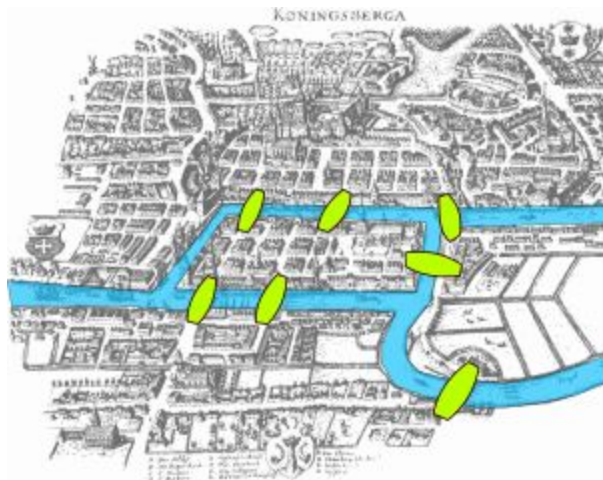


Imagem: [Bogdan Giușcă](#),
[CC BY-SA 3.0](#), via
Wikimedia Commons

Problema - Pontes de Königsberg

- Na cidade de Königsberg (atualmente chamada de Kaliningrado, na Rússia), havia sete pontes que cruzavam o Rio Pregel
- **Problema:** Um morador da cidade se perguntou: É possível partir de um ponto, percorrer cada ponte exatamente uma vez e voltar ao ponto de partida?

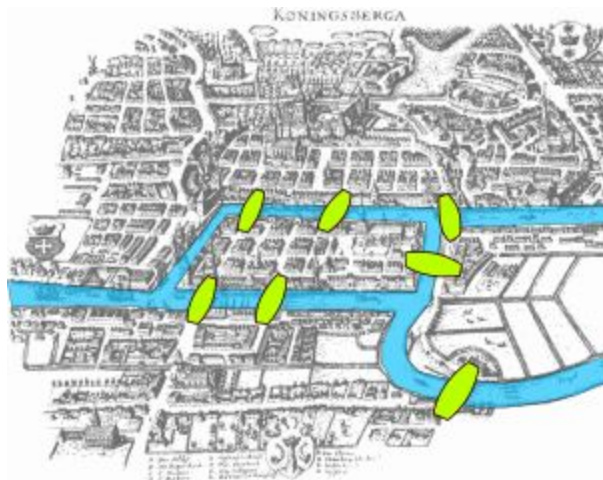


Imagem: [Bogdan Giușcă](#),
[CC BY-SA 3.0](#), via
Wikimedia Commons

Problema - Pontes de Königsberg

- Pelo que se sabe, este tipo de problema foi estudado pela primeira vez pelo matemático L. Euler, em 1736
- Euler modelou o Problema das Pontes de Königsberg como um problema em grafos
- O trabalho de Euler é considerado por muitos como a **origem da Teoria dos Grafos**

Problema - Pontes de Königsberg - Modelagem com grafos

- Cada região de terra (4 regiões) é representada por um vértice
- Cada ponte é representada por uma aresta

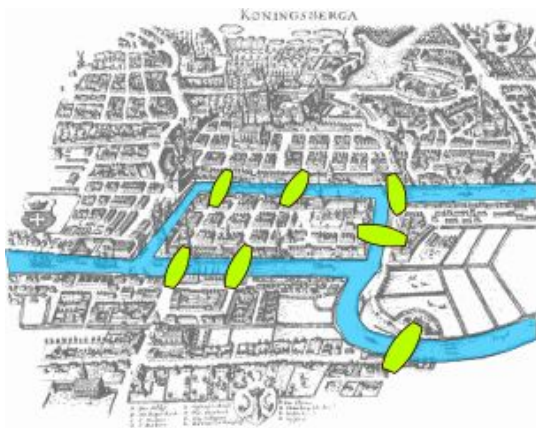


Imagem: [Bogdan Giușcă](#),
[CC BY-SA 3.0](#), via
Wikimedia Commons

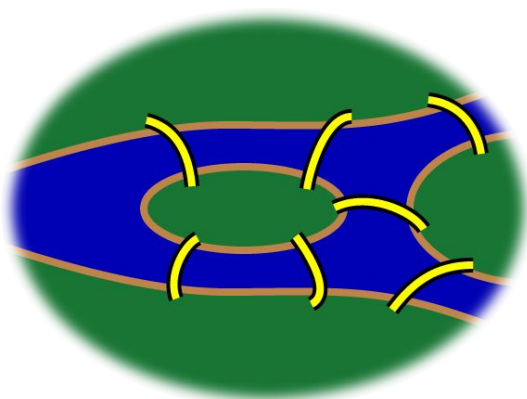


Imagem: [Xiong](#), [CC BY-SA 3.0](#), via Wikimedia
Commons

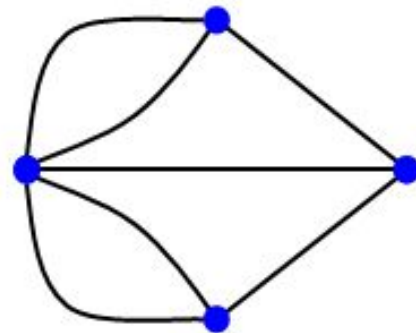
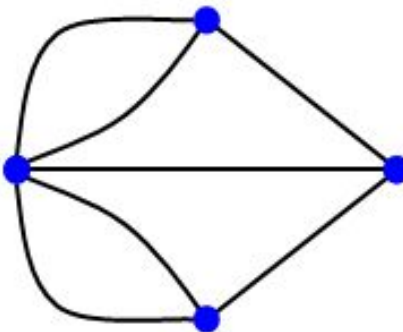


Imagem: [Mark Foskey](#),
[CC BY-SA 3.0](#), via
Wikimedia Commons

Problema - Pontes de Königsberg - Modelagem com grafos

- **Problema:** Seja G o grafo abaixo. Existe uma trilha fechada em G que contém todas as arestas de G ?



Neste caso, temos um grafo com **arestas paralelas**. Em geral, vamos considerar apenas **grafos simples**

Lembre que, em uma trilha, podem existir vértices repetidos, mas não podem existir arestas repetidas

Lembre que uma trilha é fechada se começa e termina no mesmo vértice

Imagem: [Mark Foskey](#),
[CC BY-SA 3.0](#), via
Wikimedia Commons

Problema - Pontes de Königsberg - Modelagem com grafos

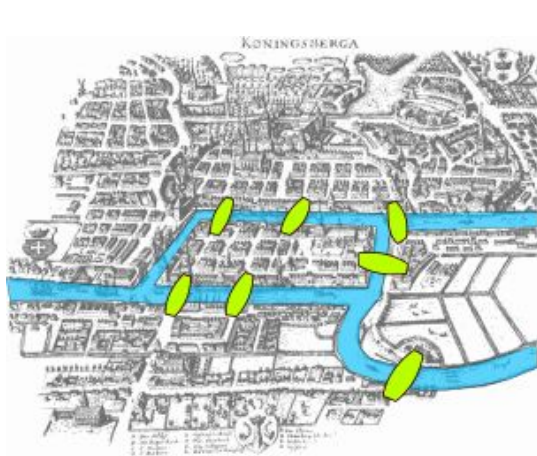


Imagem: [Bogdan Giușcă](#),
[CC BY-SA 3.0](#), via
Wikimedia Commons



Imagem: www.openstreetmap.org

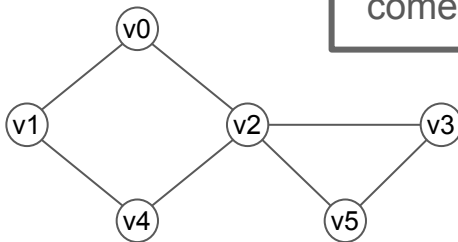
Tour euleriano (Trilha fechada euleriana)

- Dado um grafo G , um **tour euleriano** (uma **trilha fechada euleriana**) em G é uma trilha fechada em G que contém todas as arestas de G

Lembre que, em uma trilha, podem existir vértices repetidos, mas não podem existir arestas repetidas

- Exemplo:

- A sequência $v_2 v_4 v_1 v_0 v_2 v_3 v_5 v_2$ é um tour euleriano no grafo ao lado



Lembre que uma trilha é fechada se começa e termina no mesmo vértice

Tour euleriano (Trilha fechada euleriana)

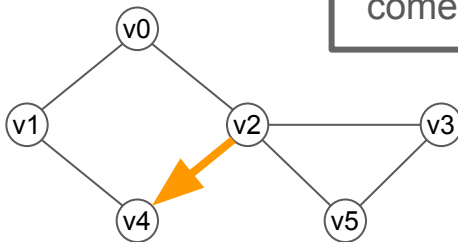
- Dado um grafo G , um **tour euleriano** (uma **trilha fechada euleriana**) em G é uma trilha fechada em G que contém todas as arestas de G

Lembre que, em uma trilha, podem existir vértices repetidos, mas não podem existir arestas repetidas

- Exemplo:

- A sequência $v_2 v_4 v_1 v_0 v_2 v_3 v_5 v_2$ é um tour euleriano no grafo ao lado

Lembre que uma trilha é fechada se começa e termina no mesmo vértice



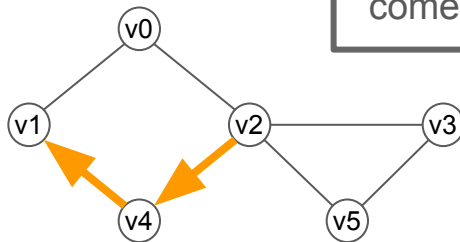
Tour euleriano (Trilha fechada euleriana)

- Dado um grafo G , um **tour euleriano** (uma **trilha fechada euleriana**) em G é uma trilha fechada em G que contém todas as arestas de G

Lembre que, em uma trilha, podem existir vértices repetidos, mas não podem existir arestas repetidas

- Exemplo:

- A sequência $v_2 v_4 v_1 v_0 v_2 v_3 v_5 v_2$ é um tour euleriano no grafo ao lado



Lembre que uma trilha é fechada se começa e termina no mesmo vértice

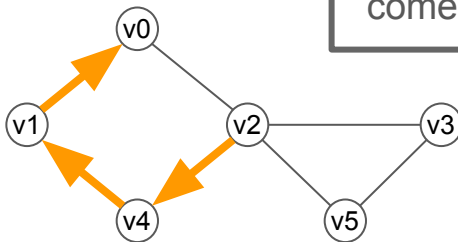
Tour euleriano (Trilha fechada euleriana)

- Dado um grafo G , um **tour euleriano** (uma **trilha fechada euleriana**) em G é uma trilha fechada em G que contém todas as arestas de G

Lembre que, em uma trilha, podem existir vértices repetidos, mas não podem existir arestas repetidas

- Exemplo:
 - A sequência $v_2 v_4 v_1 v_0 v_2 v_3 v_5 v_2$ é um tour euleriano no grafo ao lado

Lembre que uma trilha é fechada se começa e termina no mesmo vértice



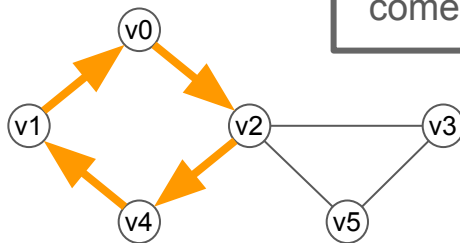
Tour euleriano (Trilha fechada euleriana)

- Dado um grafo G , um **tour euleriano** (uma **trilha fechada euleriana**) em G é uma trilha fechada em G que contém todas as arestas de G

Lembre que, em uma trilha, podem existir vértices repetidos, mas não podem existir arestas repetidas

- Exemplo:

- A sequência $v_2 v_4 v_1 v_0 v_2 v_3 v_5 v_2$ é um tour euleriano no grafo ao lado



Lembre que uma trilha é fechada se começa e termina no mesmo vértice

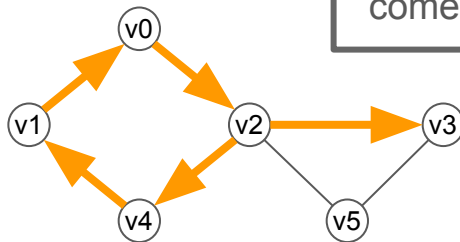
Tour euleriano (Trilha fechada euleriana)

- Dado um grafo G , um **tour euleriano** (uma **trilha fechada euleriana**) em G é uma trilha fechada em G que contém todas as arestas de G

Lembre que, em uma trilha, podem existir vértices repetidos, mas não podem existir arestas repetidas

- Exemplo:

- A sequência $v_2 v_4 v_1 v_0 v_2 v_3 v_5 v_2$ é um tour euleriano no grafo ao lado



Lembre que uma trilha é fechada se começa e termina no mesmo vértice

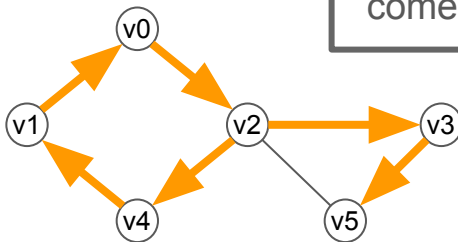
Tour euleriano (Trilha fechada euleriana)

- Dado um grafo G , um **tour euleriano** (uma **trilha fechada euleriana**) em G é uma trilha fechada em G que contém todas as arestas de G

Lembre que, em uma trilha, podem existir vértices repetidos, mas não podem existir arestas repetidas

- Exemplo:

- A sequência $v_2 v_4 v_1 v_0 v_2 v_3 v_5 v_2$ é um tour euleriano no grafo ao lado



Lembre que uma trilha é fechada se começa e termina no mesmo vértice

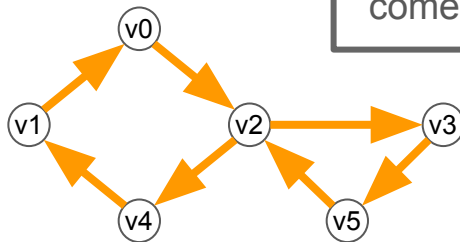
Tour euleriano (Trilha fechada euleriana)

- Dado um grafo G , um **tour euleriano** (uma **trilha fechada euleriana**) em G é uma trilha fechada em G que contém todas as arestas de G

Lembre que, em uma trilha, podem existir vértices repetidos, mas não podem existir arestas repetidas

- Exemplo:

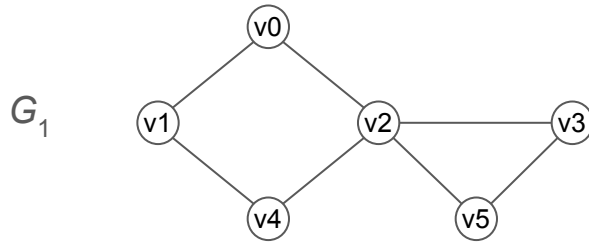
- A sequência $v_2 v_4 v_1 v_0 v_2 v_3 v_5 v_2$ é um tour euleriano no grafo ao lado



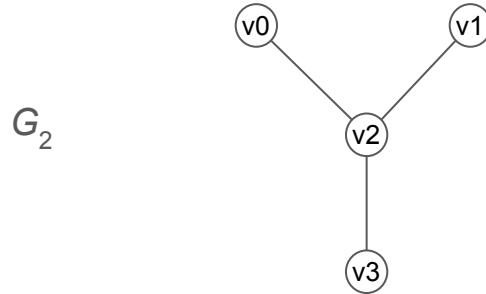
Lembre que uma trilha é fechada se começa e termina no mesmo vértice

Grafo Euleriano

- Um grafo G é **euleriano** se existe um tour euleriano (uma trilha fechada euleriana) em G
- Exemplo:



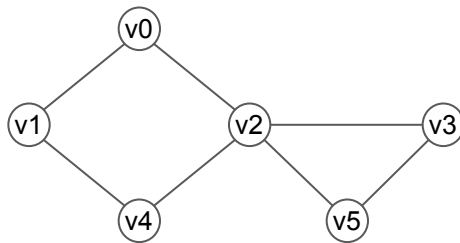
Grafo euleriano



Grafo ~~euleriano~~

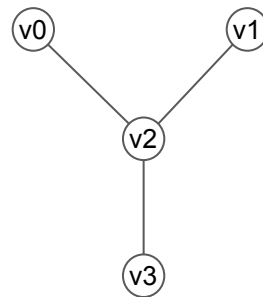
Problema

- **Problema:** Dado um grafo G , existe um tour euleriano em G ? Em outras palavras, o grafo G é euleriano?
- Exemplo:
 - Para o grafo ao lado, a resposta é **sim**
 - A sequência $v_2 v_4 v_1 v_0 v_2 v_3 v_5 v_2$ é um tour euleriano no grafo



Problema

- **Problema:** Dado um grafo G , existe um tour euleriano em G ? Em outras palavras, o grafo G é euleriano?
- Exemplo:
 - Para o grafo ao lado, a resposta é **não**

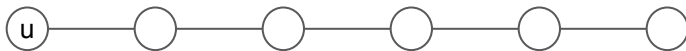


Propriedades de um grafo euleriano

- **Teorema:** Seja G um grafo sem vértices isolados ou com apenas 1 vértice. Se G é um grafo euleriano, então G é conexo e todos os vértices de G têm grau par
- **Prova:**
 - Se existe um tour euleriano em G , como G não tem vértices isolados ou tem apenas 1 vértice, então este tour contém todos os vértices de G
 - A partir deste tour, podemos formar um caminho entre qualquer par de vértices de G
 - Logo, G é conexo
 - Quando percorremos um tour euleriano em G , para cada vértice v de G , entramos em v por uma aresta e saímos de v por outra aresta
 - Desta forma, o grau de v é múltiplo de 2, ou seja, é par
 - Portanto, todos os vértices de G têm grau par \square

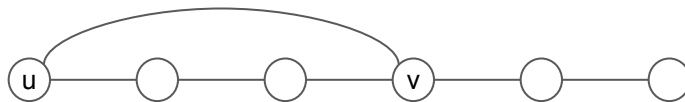
Propriedades de um grafo euleriano

- **Lema:** Dado um grafo G , se $\delta(G) \geq 2$ (o grau mínimo de G é maior ou igual a 2), então G contém um ciclo
- **Ideia da prova:**
 - Podemos construir um ciclo a partir de um caminho maximal (que não está contido em outro caminho)



Propriedades de um grafo euleriano

- **Lema:** Dado um grafo G , se $\delta(G) \geq 2$ (o grau mínimo de G é maior ou igual a 2), então G contém um ciclo
- **Ideia da prova:**
 - Podemos construir um ciclo a partir de um caminho maximal (que não está contido em outro caminho)



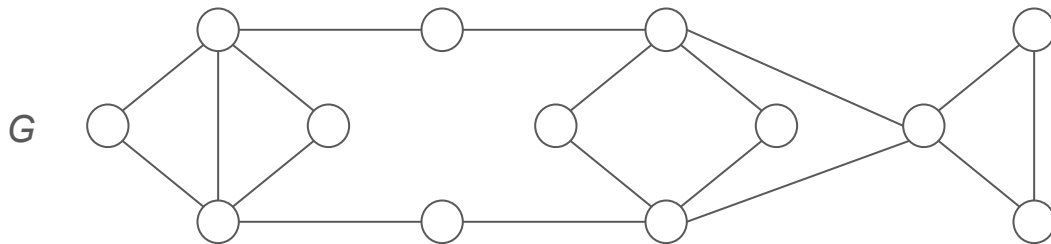
□

Propriedades de um grafo euleriano

- **Teorema:** Se G é um grafo conexo e todos os vértices de G têm grau par, então G é euleriano
- **Ideia da prova:**
 - Podemos fazer uma prova por indução no número de arestas de G
 - Base da indução:
 - Se G não tem arestas, uma sequência consistindo de apenas um vértice é um tour euleriano
 - Passo da indução:
 - Se G tem pelo menos uma aresta, então todo vértice de G tem grau pelo menos 2
 - Pelo lema anterior, G tem um ciclo C

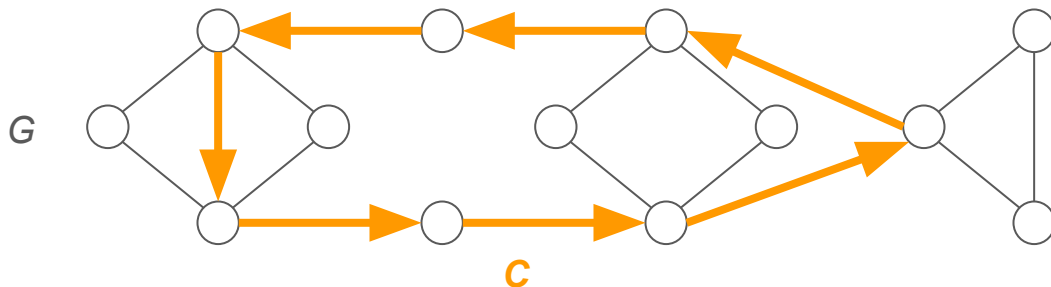
Propriedades de um grafo euleriano

- **Teorema:** Se G é um grafo conexo e todos os vértices de G têm grau par, então G é euleriano
- **Ideia da prova:**
 - Passo da indução:
 - Pelo lema anterior, G tem um ciclo C



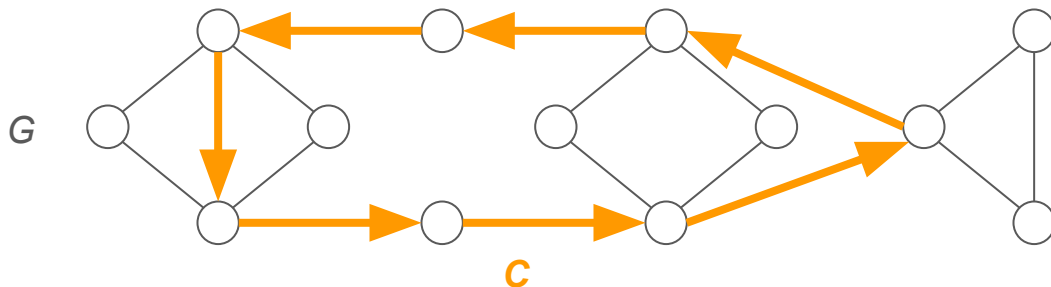
Propriedades de um grafo euleriano

- **Teorema:** Se G é um grafo conexo e todos os vértices de G têm grau par, então G é euleriano
- **Ideia da prova:**
 - Passo da indução:
 - Pelo lema anterior, G tem um ciclo C



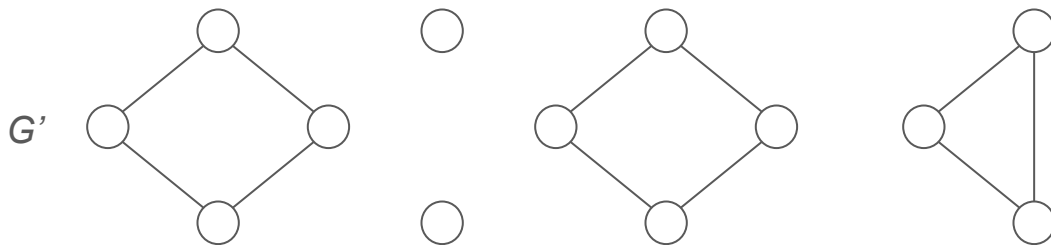
Propriedades de um grafo euleriano

- **Teorema:** Se G é um grafo conexo e todos os vértices de G têm grau par, então G é euleriano
- **Ideia da prova:**
 - Passo da indução:
 - Seja G' o grafo obtido de G com a remoção das arestas de C



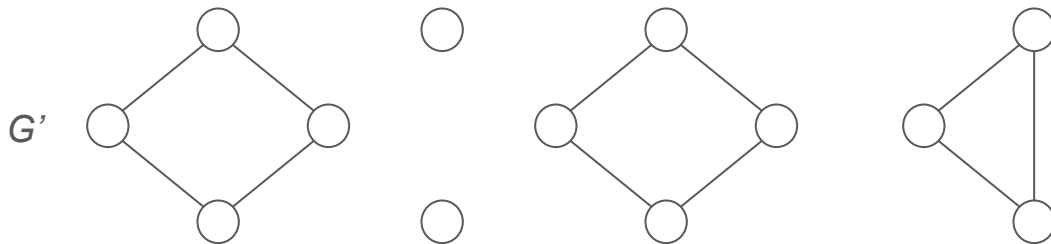
Propriedades de um grafo euleriano

- **Teorema:** Se G é um grafo conexo e todos os vértices de G têm grau par, então G é euleriano
- **Ideia da prova:**
 - Passo da indução:
 - Seja G' o grafo obtido de G com a remoção das arestas de C



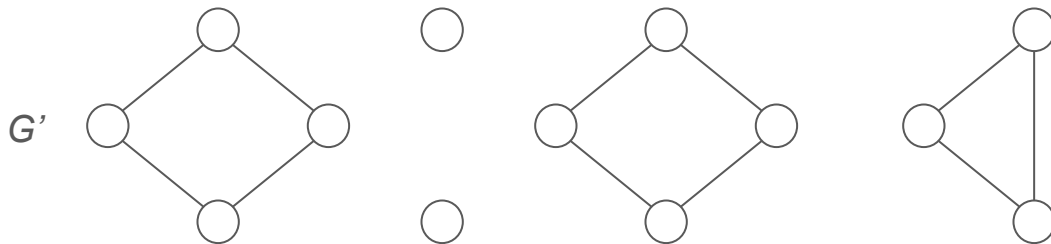
Propriedades de um grafo euleriano

- **Teorema:** Se G é um grafo conexo e todos os vértices de G têm grau par, então G é euleriano
- **Ideia da prova:**
 - Passo da indução:
 - Cada componente conexa de G' é um grafo que tem menos arestas que G , é conexo e cujos todos os vértices têm grau par



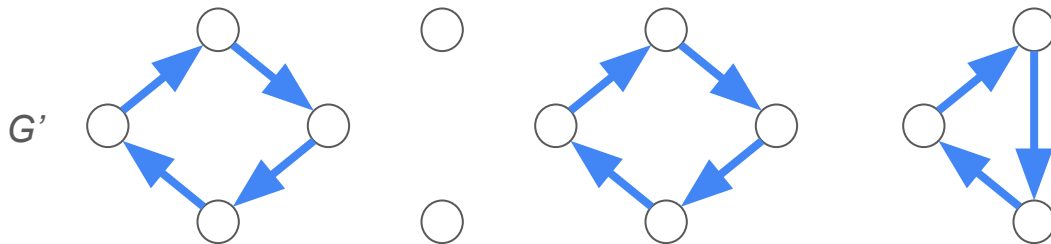
Propriedades de um grafo euleriano

- **Teorema:** Se G é um grafo conexo e todos os vértices de G têm grau par, então G é euleriano
- **Ideia da prova:**
 - Passo da indução:
 - Pela hipótese de indução, cada componente conexa de G' é um grafo euleriano e, sendo assim, contém um tour euleriano



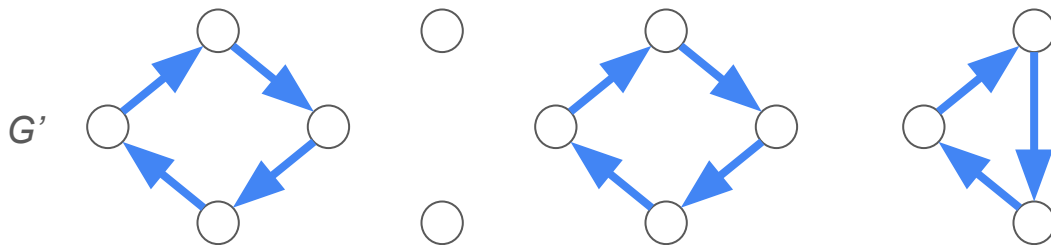
Propriedades de um grafo euleriano

- **Teorema:** Se G é um grafo conexo e todos os vértices de G têm grau par, então G é euleriano
- **Ideia da prova:**
 - Passo da indução:
 - Pela hipótese de indução, cada componente conexa de G' é um grafo euleriano e, sendo assim, contém um tour euleriano



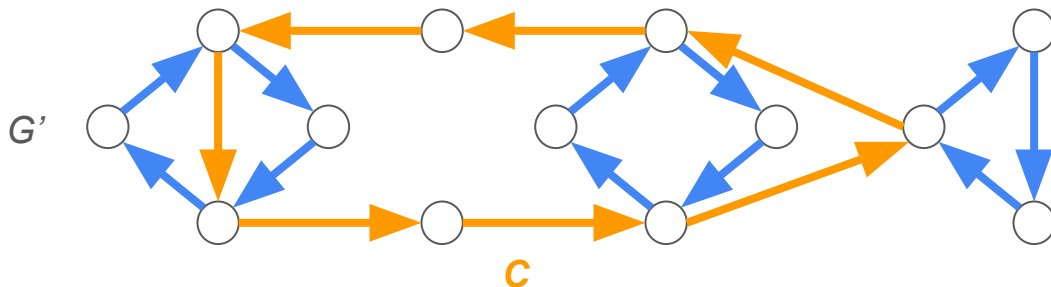
Propriedades de um grafo euleriano

- **Teorema:** Se G é um grafo conexo e todos os vértices de G têm grau par, então G é euleriano
- **Ideia da prova:**
 - Passo da indução:
 - Podemos combinar estes tours eulerianos com o ciclo C para formar um tour euleriano de G



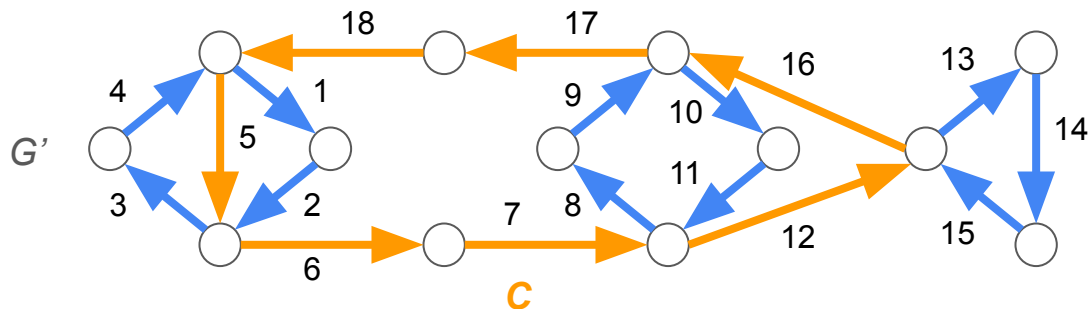
Propriedades de um grafo euleriano

- **Teorema:** Se G é um grafo conexo e todos os vértices de G têm grau par, então G é euleriano
- **Ideia da prova:**
 - Passo da indução:
 - Podemos combinar estes tours eulerianos com o ciclo C para formar um tour euleriano de G



Propriedades de um grafo euleriano

- **Teorema:** Se G é um grafo conexo e todos os vértices de G têm grau par, então G é euleriano
- **Ideia da prova:**
 - Passo da indução:
 - Podemos combinar estes tours eulerianos com o ciclo C para formar um tour euleriano de G



Propriedades de um grafo euleriano

- **Teorema:** Seja G um grafo sem vértices isolados ou com apenas 1 vértice. G é um grafo euleriano se e somente se G é conexo e todos os vértices de G têm grau par
- **Prova:**
 - Consequência direta dos dois teoremas anteriores \square

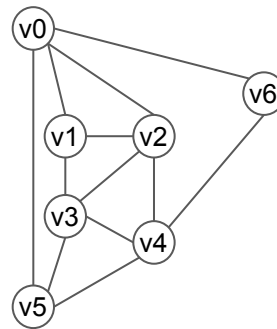
Problema

- **Problema:** Dado um grafo G , existe um tour euleriano em G ? Em outras palavras, o grafo G é euleriano?
- Estratégia para resolver o problema:
 1. Enquanto G tiver pelo menos 2 vértices e tiver um vértice isolado, remover um vértice isolado de G
 2. Testar se G é conexo
 3. Testar se todos os vértices de G têm grau par
- Estratégia para construir um tour euleriano (caso G seja euleriano):

Usar uma ideia semelhante à da prova do teorema onde construímos um tour euleriano (uma explicação detalhada é dada na Ref. 1)

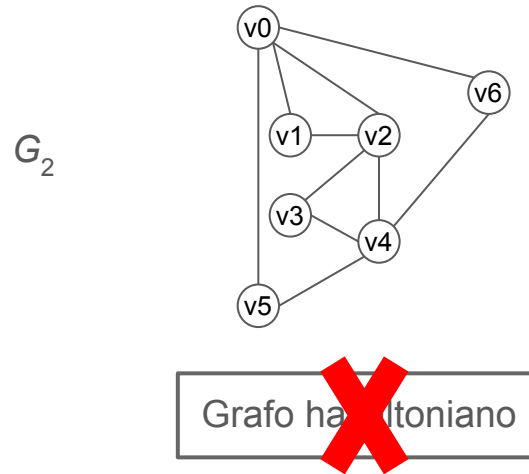
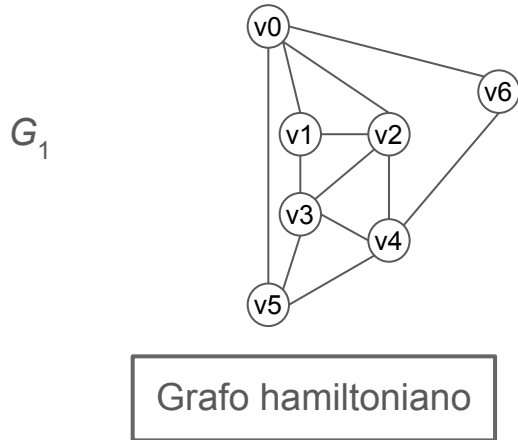
Ciclo Hamiltoniano

- Dado um grafo G , um **ciclo hamiltoniano** em G é um ciclo que contém todos os vértices de G
- Exemplo:
 - A sequência $v_0 v_6 v_4 v_2 v_1 v_3 v_5 v_0$ é um ciclo hamiltoniano no grafo ao lado



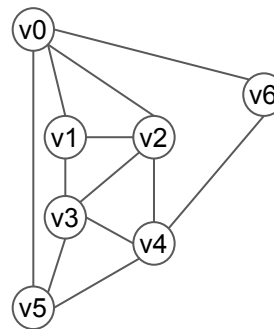
Grafo Hamiltoniano

- Um grafo G é **hamiltoniano** se existe um ciclo hamiltoniano em G
- Exemplo:



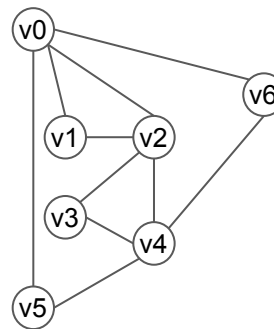
Problema

- **Problema:** Dado um grafo G , existe um ciclo hamiltoniano em G ? Em outras palavras, o grafo G é hamiltoniano?
- Exemplo:
 - Para o grafo ao lado, a resposta é **sim**
 - A sequência $v_0 v_6 v_4 v_2 v_1 v_3 v_5 v_0$ é ciclo hamiltoniano no grafo



Problema

- **Problema:** Dado um grafo G , existe um ciclo hamiltoniano em G ? Em outras palavras, o grafo G é hamiltoniano?
- Exemplo:
 - Para o grafo ao lado, a resposta é **não**

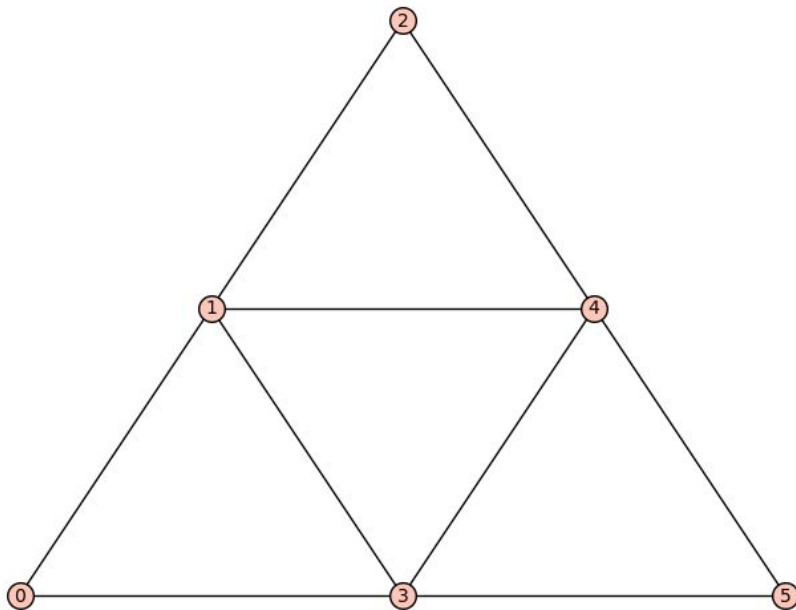


Problema

- **Problema:** Dado um grafo G , existe um ciclo hamiltoniano em G ? Em outras palavras, o grafo G é hamiltoniano?
- Ao contrário do problema anterior, não se conhece um algoritmo *eficiente* para resolver este problema
- Este problema é NP-completo
- Isto quer dizer que, se conseguirmos desenvolver um algoritmo *eficiente* para resolver este problema, por consequência vamos ter um algoritmo *eficiente* para resolver muitos problemas difíceis

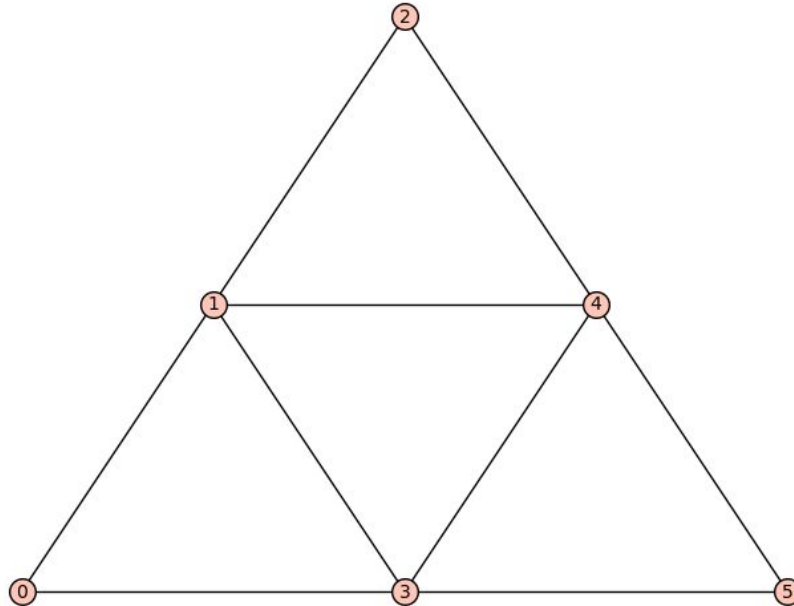
Exercícios

1. O grafo abaixo é euleriano? Se sim, apresente um tour euleriano. Se não, explique por que o grafo não é euleriano.



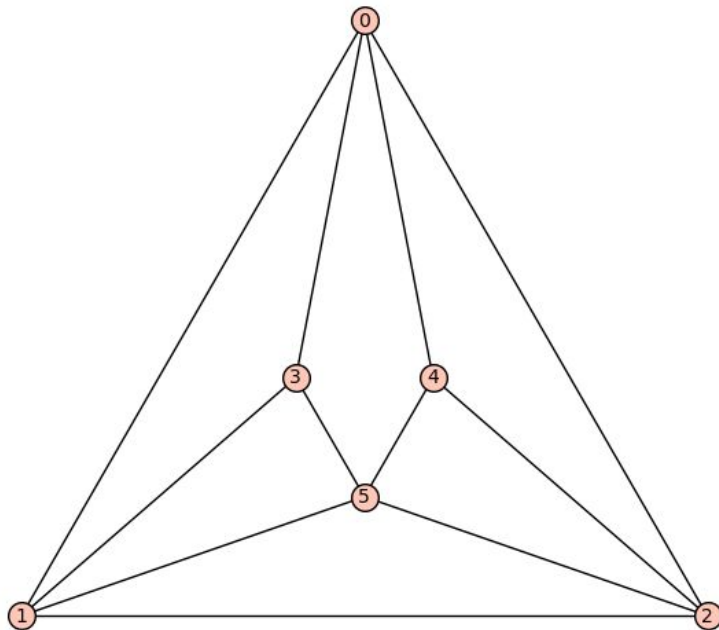
Exercícios

2. O grafo abaixo é hamiltoniano? Se sim, apresente um ciclo hamiltoniano.



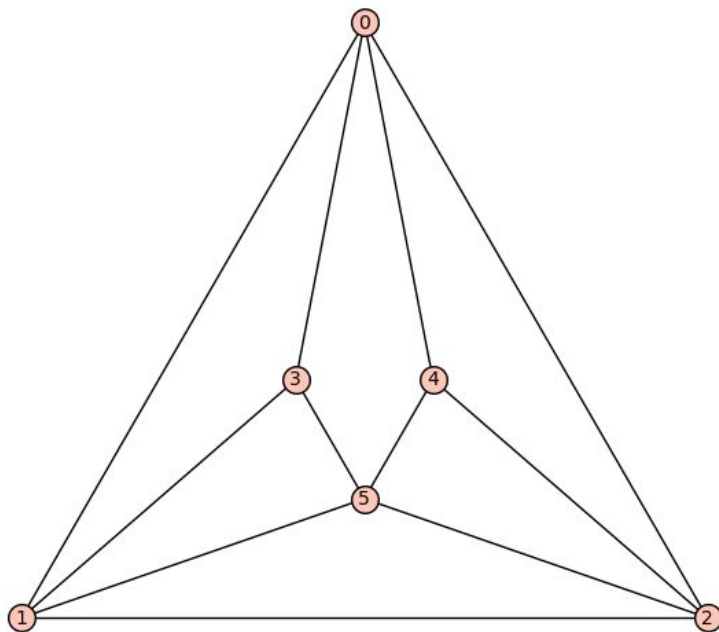
Exercícios

3. O grafo abaixo é euleriano? Se sim, apresente um tour euleriano. Se não, explique por que o grafo não é euleriano.



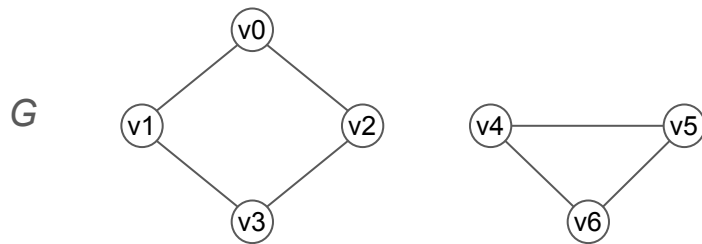
Exercícios

4. O grafo abaixo é hamiltoniano? Se sim, apresente um ciclo hamiltoniano.



Exercícios

5. Qual é o menor número de arestas que podemos adicionar ao grafo G abaixo para torná-lo um grafo euleriano?



Referências

- Esta apresentação é baseada nos seguintes materiais:
 1. Capítulo 17 do livro
Sedgewick, R. Algorithms in C++ – Part 5. Graph Algorithms. 3rd. ed.
Addison-Wesley, 2002.