

Grafos Dirigidos (Digrafos)

Prof. Andrei Braga



Conteúdo

- Motivação
- Grafos dirigidos
- Conceitos básicos de grafos dirigidos
- Referências

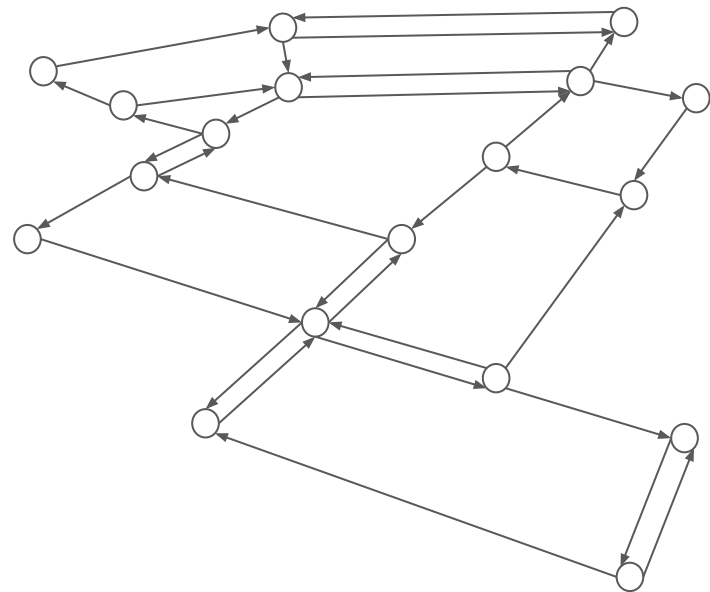
Motivação

- Em várias situações que podemos modelar com grafos, faz sentido considerarmos que as arestas têm uma **direção** (ou **orientação** ou **sentido**)
- Exemplo:
 - Temos um mapa de vias (ruas ou rodovias) e estamos interessados nos caminhos que podemos percorrer neste mapa
 - Uma via que conecta um ponto x a um ponto y pode ter apenas a mão de x para y , apenas a mão de y para x ou ambas as mãos
 - Podemos representar este mapa como um grafo onde cada **aresta** tem uma direção e representa **uma mão de uma via**



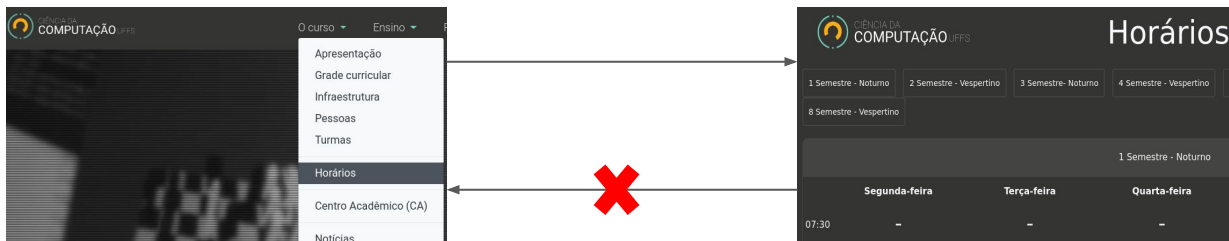
Motivação

- Em várias situações que podemos modelar com grafos, faz sentido considerarmos que as arestas têm uma **direção** (ou **orientação** ou **sentido**)
- Exemplo:
 - Temos um mapa de vias (ruas ou rodovias) e estamos interessados nos caminhos que podemos percorrer neste mapa
 - Uma via que conecta um ponto x a um ponto y pode ter apenas a mão de x para y, apenas a mão de y para x ou ambas as mãos
 - Podemos representar este mapa como um grafo onde cada **aresta** tem uma direção e representa **uma mão de uma via**



Motivação

- Em várias situações que podemos modelar com grafos, faz sentido considerarmos que as arestas têm uma **direção** (ou **orientação** ou **sentido**)
- Exemplo:
 - Temos um conjunto de páginas web e estamos interessados nos links que existem entre estas páginas web
 - Podemos representar esta situação como um grafo onde uma aresta de x para y representa que, na página web x , existe um link para a página web y

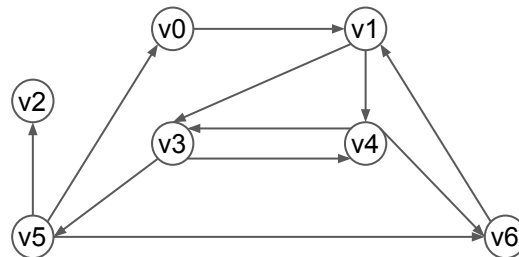


Grafo dirigido – Digrafo

- Um **grafo dirigido** ou **digrafo** G é um par ordenado (V, E) composto por
 - um conjunto de **vértices** V e
 - um conjunto de **arestas** E , sendo cada aresta um par ordenado (v_i, v_j) de vértices de G
 - note que $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$

- Exemplo:

- $G = (V, E)$, onde
 - $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e
 - $E = \{(v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1)\}$

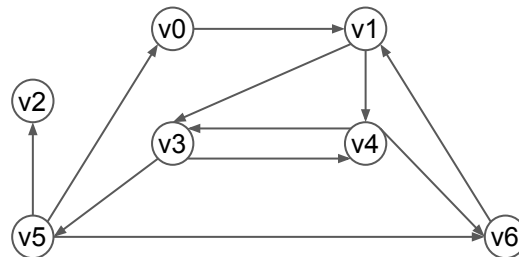


Grafo dirigido – Digrafo

- Um **grafo dirigido** ou **digrafo** G é um par ordenado (V, E) composto por
 - um conjunto de **vértices** V e
 - um conjunto de **arestas** E , sendo cada aresta um par ordenado (v_i, v_j) de vértices de G
 - note que $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$;
 - denominamos v_i a **cauda** da aresta e v_j a **cabeça** da aresta

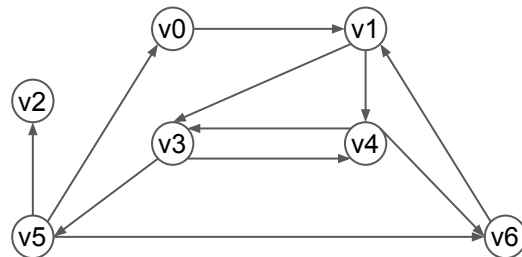
- Exemplo:

- $G = (V, E)$, onde
 - $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e
 - $E = \{(v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1)\}$



Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
 - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
 - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo
- Exemplo:
 - $G = (V, E)$, onde
 - $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e
 - $E = \{(v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1)\}$



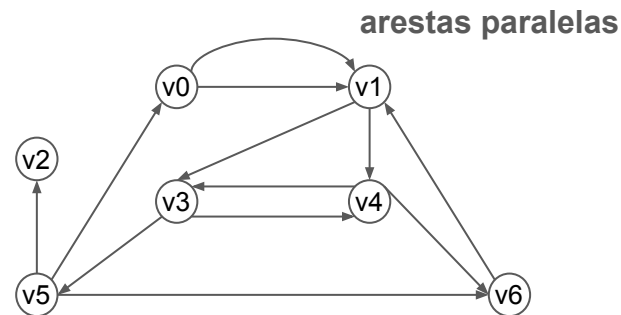
Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:

- não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
- para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

- Exemplo:

- $G = (V, E)$, onde
 - $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e
 - $E = \{(v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1)\}$



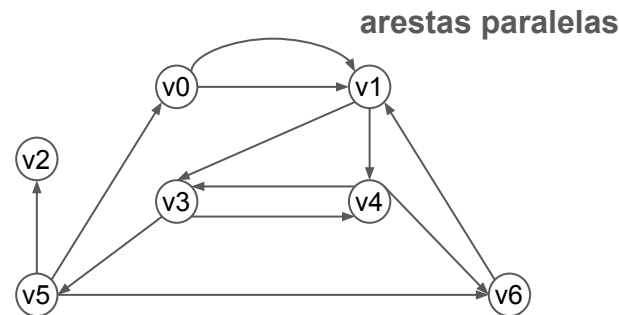
Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:

- não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
- para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

- Exemplo:

- $G = (V, E)$, onde
 - $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e
 - $E = \{(v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1), (v_0, v_1)\}$



Digrafo (simples)

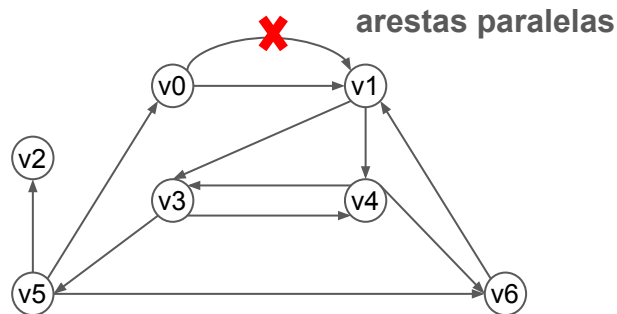
- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:

- não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
- para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

- Exemplo:

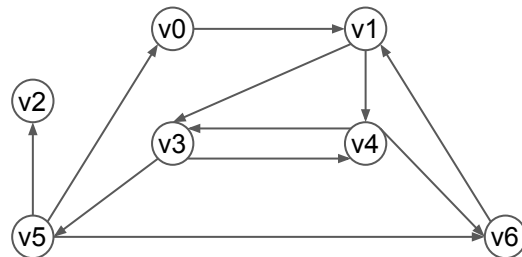
- $G = (V, E)$, onde

- $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e
- $E = \{(v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1), (v_6, v_5)\}$



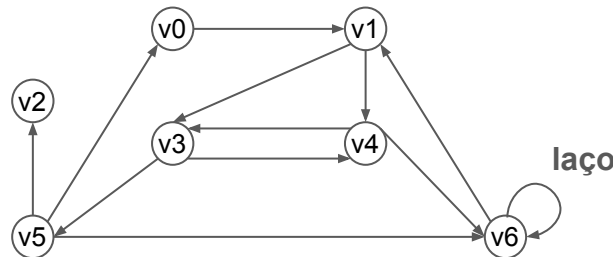
Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
 - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
 - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo
- Exemplo:
 - $G = (V, E)$, onde
 - $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e
 - $E = \{(v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1)\}$



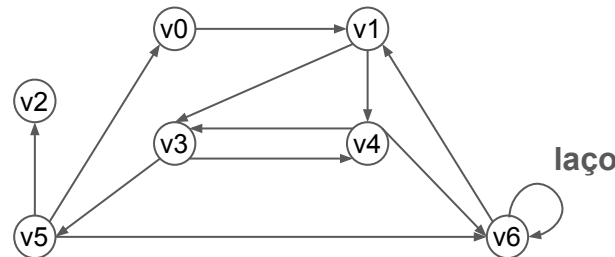
Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
 - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
 - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo
- Exemplo:
 - $G = (V, E)$, onde
 - $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e
 - $E = \{(v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1)\}$



Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
 - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
 - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo
 - Exemplo:
 - $G = (V, E)$, onde
 - $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e
 - $E = \{(v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1), (v_6, v_6)\}$
-
- ```
graph LR; v0((v0)) --> v1((v1)); v1 --> v3((v3)); v1 --> v4((v4)); v3 --> v4; v3 --> v5((v5)); v4 --> v3; v4 --> v6((v6)); v5 --> v0; v5 --> v2((v2)); v5 --> v6; v6 --> v1; v6 --> v6; style v6 stroke-width:2px; linkStyle 10 stroke-width:2px;
```

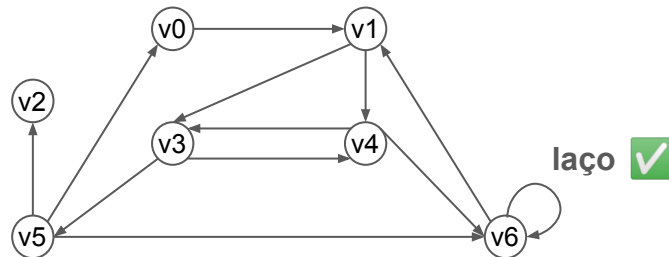


# Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

- Exemplo:

- $G = (V, E)$ , onde
  - $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  e
  - $E = \{(v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1), (v_6, v_6)\}$

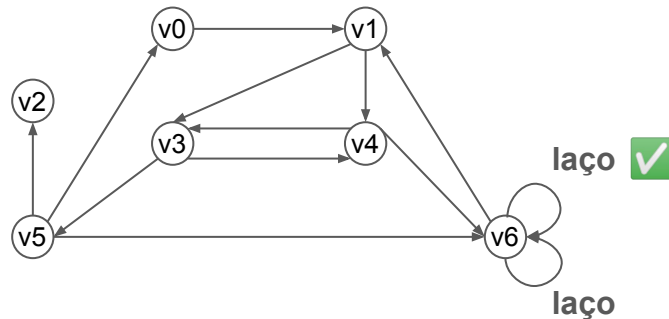


# Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

- Exemplo:

- $G = (V, E)$ , onde
  - $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  e
  - $E = \{(v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1), (v_6, v_6)\}$



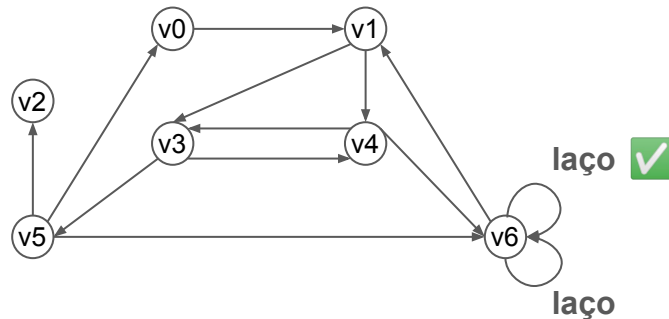


# Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

- Exemplo:

- $G = (V, E)$ , onde
  - $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  e
  - $E = \{(v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1), (v_6, v_6), (v_6, v_5)\}$

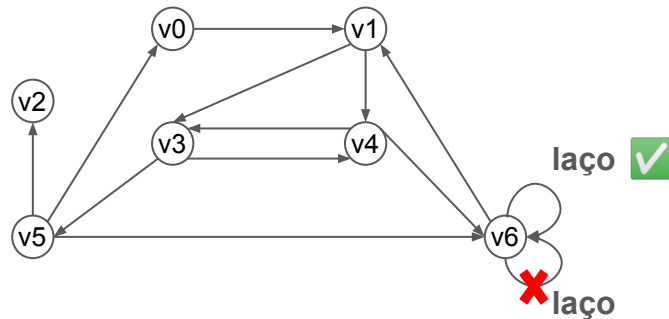


# Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo

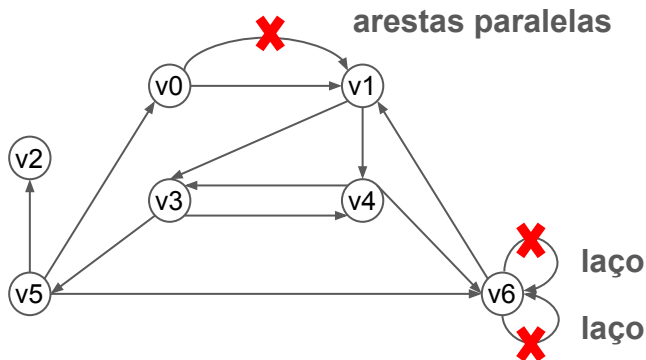
- Exemplo:

- $G = (V, E)$ , onde
  - $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  e
  - $E = \{(v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1), (v_6, v_5), (v_6, v_6), (v_6, v_3)\}$



# Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo
- Para definir um digrafo simples, fazemos uma simplificação adicional: um digrafo é **simples** se não contém arestas paralelas nem laços



# Digrafo (simples)

- Na definição que estamos usando para um digrafo, estamos fazendo duas **simplificações**:
  - não podem existir duas ou mais arestas com a mesma cauda e a mesma cabeça e,
  - para cada vértice, pode existir no máximo uma aresta que conecta o vértice a ele mesmo
- Para definir um digrafo simples, fazemos uma simplificação adicional: um digrafo é **simples** se não contém arestas paralelas nem laços
- A não ser que seja dito o contrário, os digrafos que vamos considerar são simples

# Exercícios

1. Um digrafo (simples) possui no máximo quantas arestas?

# Exercícios

1. Um digrafo (simples) possui no máximo quantas arestas?

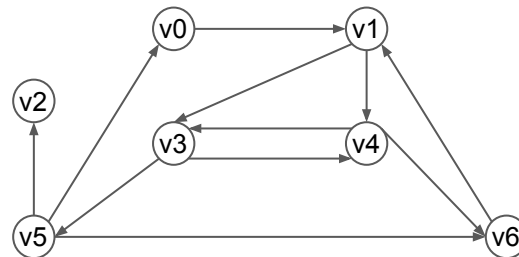
Resposta:

- Para cada vértice, a quantidade máxima de arestas saindo do vértice é  $|V| - 1$ .
- O somatório de todas estas quantidades é  $|V| (|V| - 1)$ .
- (Note que não estamos contando nenhuma aresta mais de uma vez.)
- Portanto,  $G$  possui no máximo  $|V| (|V| - 1)$  arestas.  $\square$

# Ordem e tamanho

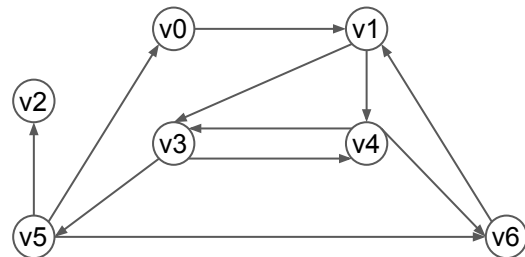
- Dado um digrafo  $G = (V, E)$ , denotamos por
  - $V(G)$  o conjunto de vértices de  $G$ , ou seja,  $V(G) = V$  e
  - $E(G)$  o conjunto de arestas de  $G$ , ou seja,  $E(G) = E$
- Dizemos que
  - a **ordem** de  $G$  é o número de vértices de  $G$ , ou seja,  $|V(G)|$ , e
  - o **tamanho** de  $G$  é o número de arestas de  $G$ , ou seja  $|E(G)|$

- Exemplo:
  - A ordem do digrafo ao lado é 7 e o seu tamanho é 11



# Vizinhança e grau

- Por simplicidade, também denotamos uma aresta  $(v_i, v_j)$  como  $v_i v_j$
- Dada uma aresta  $v_i v_j$ , os vértices  $v_i$  e  $v_j$  são os **extremos** desta aresta
- Se  $v_i v_j$  é uma aresta de um digrafo  $G$ , então
  - a aresta  $v_i v_j$  **sai** de  $v_i$  e **entra** em  $v_j$ ,
  - $v_i$  é **vizinho de entrada** de  $v_j$  em  $G$  e
  - $v_j$  é **vizinho de saída** de  $v_i$  em  $G$
- Exemplo:
  - No digrafo ao lado,  $v_1$  é vizinho de saída de  $v_0$  e  $v_0$  é vizinho de entrada de  $v_1$ . Os vizinhos de saída de  $v_5$  são  $v_0$ ,  $v_2$  e  $v_6$ . A aresta  $v_1 v_4$  sai de  $v_1$  e entra em  $v_4$



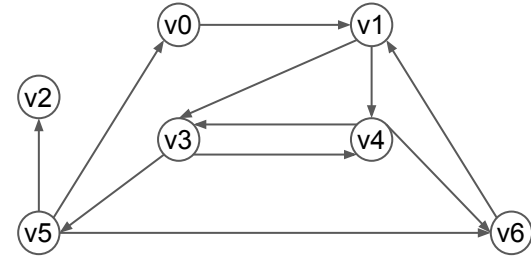


# Vizinhança e grau

- Dado um vértice  $v_i$  de um digrafo  $G$ ,
  - a **vizinhança de saída** de  $v_i$  em  $G$  é o conjunto dos vizinhos de saída de  $v_i$  em  $G$ ,
  - a **vizinhança de entrada** de  $v_i$  em  $G$  é o conjunto dos vizinhos de entrada de  $v_i$  em  $G$ ,
  - o **grau de saída** de  $v_i$  em  $G$  é o número de arestas de  $G$  que saem de  $v_i$  e
  - o **grau de entrada** de  $v_i$  em  $G$  é o número de arestas de  $G$  entram em  $v_i$
- Denotamos por
  - $N_G^+(v_i)$ , ou simplesmente  $N^+(v_i)$ , a vizinhança de saída de  $v_i$  em  $G$ ,
  - $N_G^-(v_i)$ , ou simplesmente  $N^-(v_i)$ , a vizinhança de entrada de  $v_i$  em  $G$ ,
  - $d_G^+(v_i)$ , ou simplesmente  $d^+(v_i)$ , o grau de saída de  $v_i$  em  $G$  e
  - $d_G^-(v_i)$ , ou simplesmente  $d^-(v_i)$ , o grau de entrada de  $v_i$  em  $G$
- Note que  $d_G^+(v_i) = |N_G^+(v_i)|$  e  $d_G^-(v_i) = |N_G^-(v_i)|$

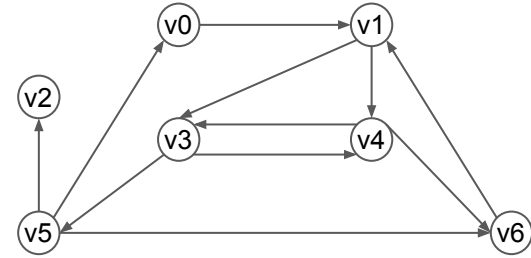
# Vizinhança e grau

- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $N^+(v_0) = \{ \quad \}$  e  $N^-(v_1) = \{ \quad \}$  e
    - $d^+(v_4) = \quad$ ,  $d^-(v_4) = \quad$ ,  $d^+(v_6) = \quad$ ,  $d^-(v_6) = \quad$ ,  
 $d^+(v_2) = \quad$  e  $d^-(v_2) = \quad$



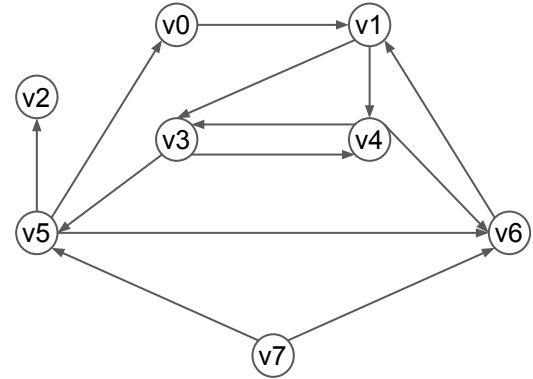
# Vizinhança e grau

- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $N^+(v_0) = \{v_1\}$  e  $N^-(v_1) = \{v_0, v_6\}$  e
    - $d^+(v_4) = 2$ ,  $d^-(v_4) = 2$ ,  $d^+(v_6) = 1$ ,  $d^-(v_6) = 2$ ,  
 $d^+(v_2) = 0$  e  $d^-(v_2) = 1$



# Vizinhança e grau

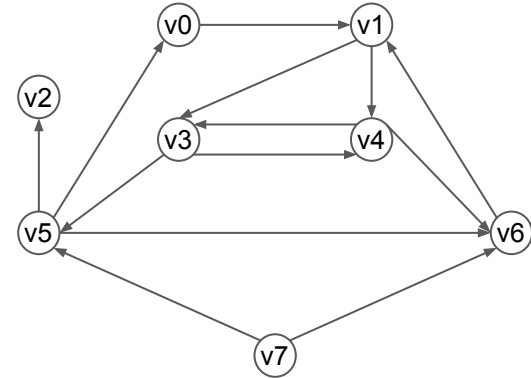
- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $d^-(v_7) =$



# Vizinhança e grau

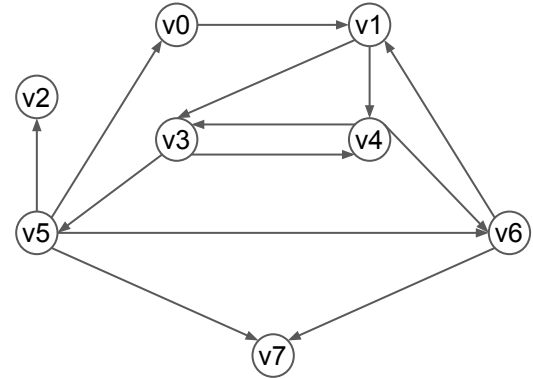
- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $d^-(v_7) = 0$

Chamamos de **fonte** um vértice  $v_i$  tal que  $d^-(v_i) = 0$



# Vizinhança e grau

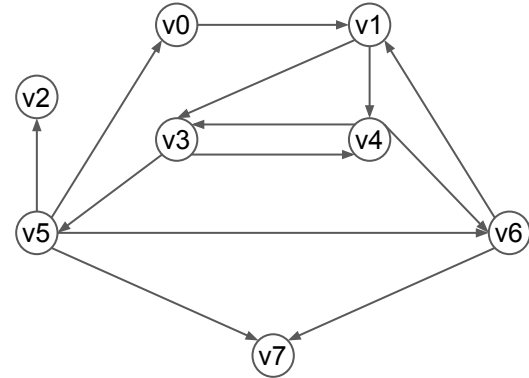
- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $d^+(v_7) =$



# Vizinhança e grau

- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $d^+(v_7) = 0$

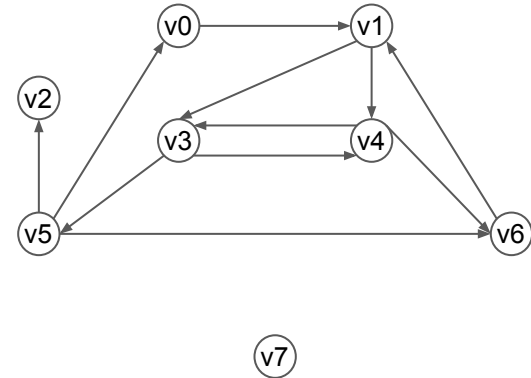
Chamamos de **sorvedouro** um vértice  $v_i$  tal que  $d^+(v_i) = 0$



# Vizinhança e grau

- Exemplo:
  - No grafo ao lado,
    - $d^+(v_7) = 0$  e  $d^-(v_7) = 0$

Chamamos de vértice **isolado** um vértice  $v_i$  tal que  $d^+(v_i) = 0$  e  $d^-(v_i) = 0$



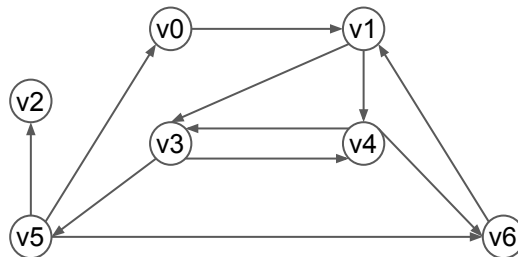


# Grau de saída mínimo e máximo

- Dado um grafo  $G$ ,
  - o **grau de saída mínimo** de  $G$ , denotado por  $\delta^+(G)$ , é o menor grau de saída de um vértice de  $G$ , ou seja,  $\delta^+(G) = \min\{d^+(v_i) : v_i \in V(G)\}$
  - o **grau de saída máximo** de  $G$ , denotado por  $\Delta^+(G)$ , é o maior grau de saída um vértice de  $G$ , ou seja,  $\Delta^+(G) = \max\{d^+(v_i) : v_i \in V(G)\}$

- Exemplo:

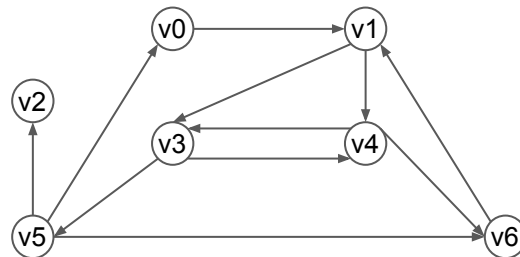
- Para o grafo ao lado,  $\delta^+(G) =$  e  $\Delta^+(G) =$



# Grau de saída mínimo e máximo

- Dado um grafo  $G$ ,
  - o **grau de saída mínimo** de  $G$ , denotado por  $\delta^+(G)$ , é o menor grau de saída de um vértice de  $G$ , ou seja,  $\delta^+(G) = \min\{d^+(v_i) : v_i \in V(G)\}$
  - o **grau de saída máximo** de  $G$ , denotado por  $\Delta^+(G)$ , é o maior grau de saída um vértice de  $G$ , ou seja,  $\Delta^+(G) = \max\{d^+(v_i) : v_i \in V(G)\}$

- Exemplo:
  - Para o grafo ao lado,  $\delta^+(G) = 0$  e  $\Delta^+(G) = 3$

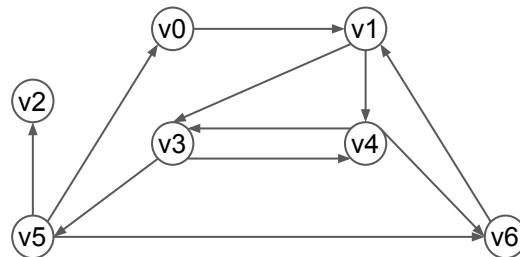


# Grau de entrada mínimo e máximo

- Dado um grafo  $G$ ,
  - o **grau de entrada mínimo** de  $G$ , denotado por  $\delta^-(G)$ , é o menor grau de entrada de um vértice de  $G$ , ou seja,  $\delta^-(G) = \min\{d^-(v_i) : v_i \in V(G)\}$
  - o **grau de entrada máximo** de  $G$ , denotado por  $\Delta^-(G)$ , é o maior grau de entrada um vértice de  $G$ , ou seja,  $\Delta^-(G) = \max\{d^-(v_i) : v_i \in V(G)\}$

- Exemplo:

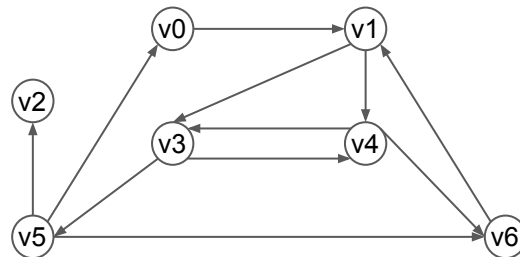
- Para o grafo ao lado,  $\delta^-(G) =$  e  $\Delta^-(G) =$



# Grau de entrada mínimo e máximo

- Dado um grafo  $G$ ,
  - o **grau de entrada mínimo** de  $G$ , denotado por  $\delta^-(G)$ , é o menor grau de entrada de um vértice de  $G$ , ou seja,  $\delta^-(G) = \min\{d^-(v_i) : v_i \in V(G)\}$
  - o **grau de entrada máximo** de  $G$ , denotado por  $\Delta^-(G)$ , é o maior grau de entrada um vértice de  $G$ , ou seja,  $\Delta^-(G) = \max\{d^-(v_i) : v_i \in V(G)\}$

- Exemplo:
  - Para o grafo ao lado,  $\delta^-(G) = 1$  e  $\Delta^-(G) = 2$



# Exercícios

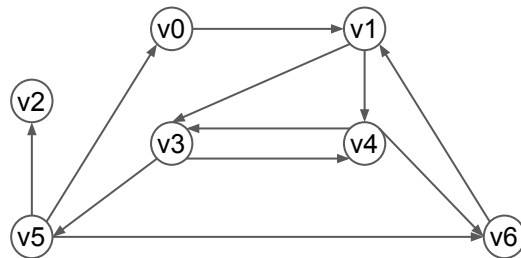
2. É possível construir um digrafo tal que  $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2 \}$  e  $d^+(v_0) = 1, d^-(v_0) = 1; d^+(v_1) = 1, d^-(v_1) = 2;$  e  $d^+(v_2) = 2, d^-(v_2) = 2$  ?

# Digrafo (simples)

- **Propriedade:** Para um digrafo (simples)  $G = (V, E)$ ,  
 $\sum_{v \in V(G)} d^+(v) = \sum_{v \in V(G)} d^-(v) = |E|$ .

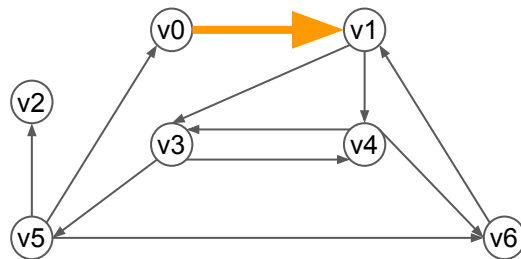
# Passeio

- Um **passeio** em um digrafo  $G$  é uma sequência de vértices  $v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_k}$  de  $G$  tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em  $G$  do seu antecessor
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_6 v_1 v_4 v_3$  é um passeio no digrafo ao lado



# Passeio

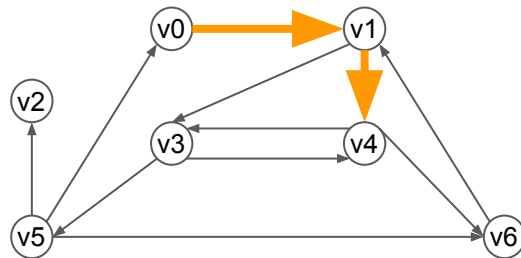
- Um **passeio** em um digrafo  $G$  é uma sequência de vértices  $v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_k}$  de  $G$  tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em  $G$  do seu antecessor
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_6 v_1 v_4 v_3$  é um passeio no digrafo ao lado





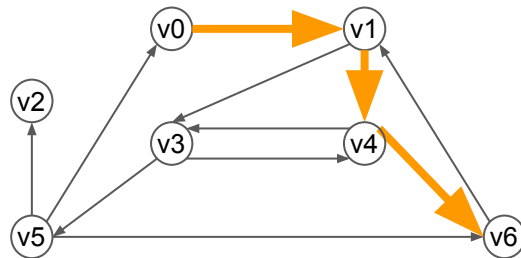
# Passeio

- Um **passeio** em um digrafo  $G$  é uma sequência de vértices  $v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_k}$  de  $G$  tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em  $G$  do seu antecessor
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_6 v_1 v_4 v_3$  é um passeio no digrafo ao lado



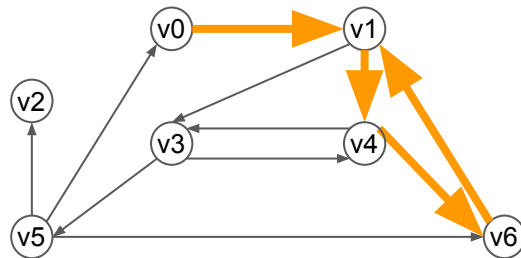
# Passeio

- Um **passeio** em um digrafo  $G$  é uma sequência de vértices  $v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_k}$  de  $G$  tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em  $G$  do seu antecessor
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_6 v_1 v_4 v_3$  é um passeio no digrafo ao lado



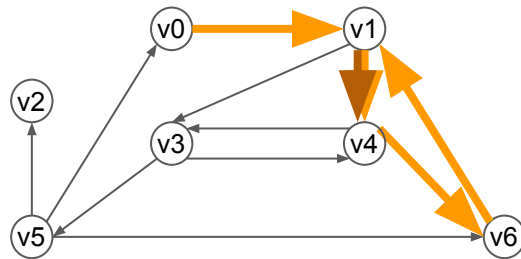
# Passeio

- Um **passeio** em um digrafo  $G$  é uma sequência de vértices  $v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_k}$  de  $G$  tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em  $G$  do seu antecessor
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_6 v_1 v_4 v_3$  é um passeio no digrafo ao lado



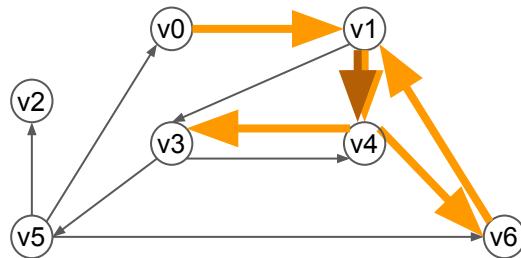
# Passeio

- Um **passeio** em um digrafo  $G$  é uma sequência de vértices  $v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_k}$  de  $G$  tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em  $G$  do seu antecessor
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_6 v_1 v_4 v_3$  é um passeio no digrafo ao lado



# Passeio

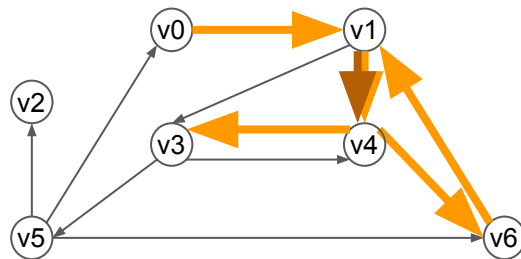
- Um **passeio** em um digrafo  $G$  é uma sequência de vértices  $v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_k}$  de  $G$  tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em  $G$  do seu antecessor
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_6 v_1 v_4 v_3$  é um passeio no digrafo ao lado



# Passeio

- Um **passeio** em um digrafo  $G$  é uma sequência de vértices  $v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_k}$  de  $G$  tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em  $G$  do seu antecessor

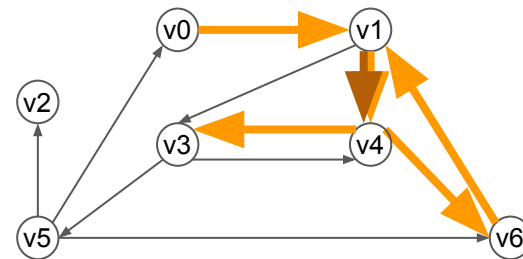
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_6 v_1 v_4 v_3$  é um passeio no digrafo ao lado



- Em um passeio, especificamos os vértices, mas as arestas envolvidas também estão implicitamente especificadas
- Por isso, podemos nos referir às **arestas de um passeio**

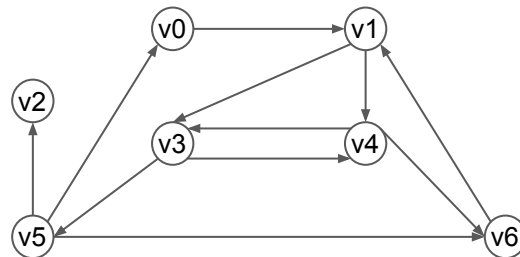
# Passeio

- Um **passeio** em um digrafo  $G$  é uma sequência de vértices  $v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_k}$  de  $G$  tal que, com exceção do primeiro vértice, cada vértice da sequência é vizinho de saída em  $G$  do seu antecessor
- Chamamos um passeio  $v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_{k-1}} v_{i_k}$  de um  $v_{i_0} v_{i_k}$ -passeio e dizemos que
  - $v_{i_0}$  e  $v_{i_k}$  são os **extremos** do passeio;
  - $v_{i_0}$  é a **origem** do passeio e  $v_{i_k}$  é o **destino** do passeio;
  - $v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}$  são os **vértices internos** do passeio;
  - o **comprimento** do passeio é  $k$ , ou seja, a quantidade de arestas percorridas;
  - o passeio é **par** se o seu comprimento é par e é **ímpar** caso contrário e
  - o passeio é **fechado** se  $v_{i_0} = v_{i_k}$  e é **aberto** caso contrário



# Trilha

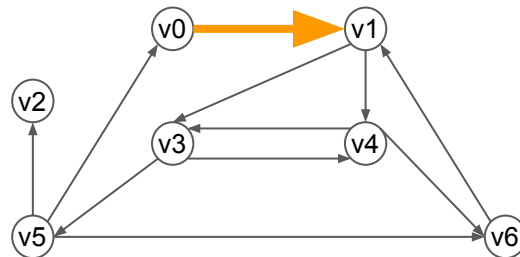
- Uma **trilha** em um digrafo  $G$  é um passeio em  $G$  onde não existem arestas repetidas
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_6 v_1 v_3$  é uma trilha no digrafo ao lado





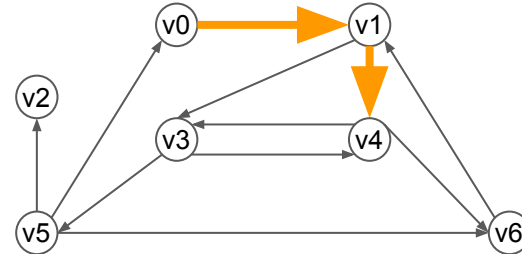
# Trilha

- Uma **trilha** em um digrafo  $G$  é um passeio em  $G$  onde não existem arestas repetidas
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_6 v_1 v_3$  é uma trilha no digrafo ao lado



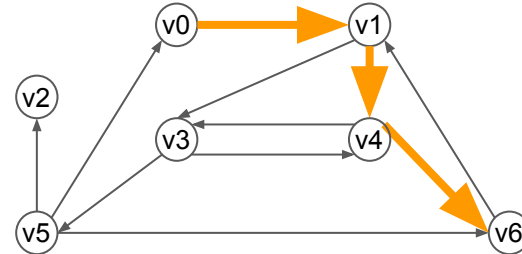
# Trilha

- Uma **trilha** em um digrafo  $G$  é um passeio em  $G$  onde não existem arestas repetidas
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_6 v_1 v_3$  é uma trilha no digrafo ao lado



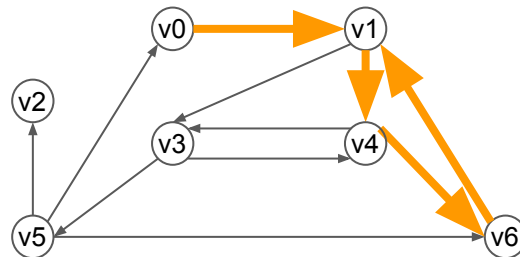
# Trilha

- Uma **trilha** em um digrafo  $G$  é um passeio em  $G$  onde não existem arestas repetidas
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_6 v_1 v_3$  é uma trilha no digrafo ao lado



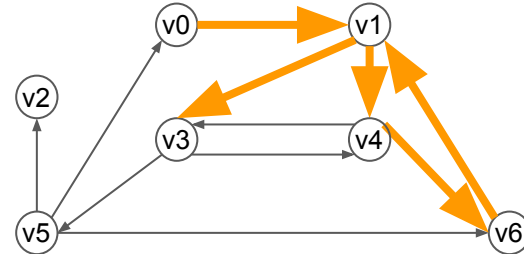
# Trilha

- Uma **trilha** em um digrafo  $G$  é um passeio em  $G$  onde não existem arestas repetidas
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_6 v_1 v_3$  é uma trilha no digrafo ao lado



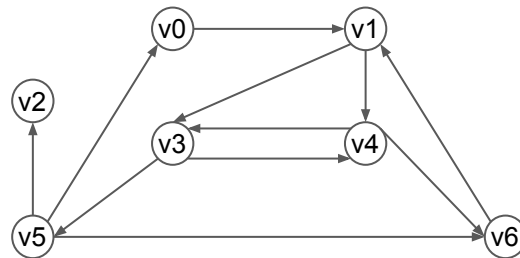
# Trilha

- Uma **trilha** em um digrafo  $G$  é um passeio em  $G$  onde não existem arestas repetidas
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_6 v_1 v_3$  é uma trilha no digrafo ao lado



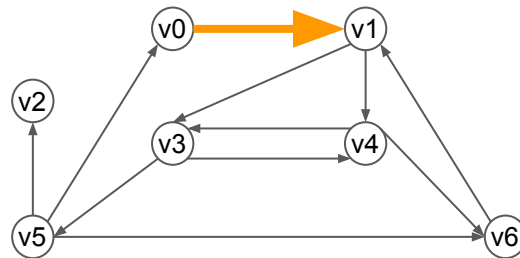
# Caminho

- Um **caminho** em um digrafo  $G$  é um passeio em  $G$  onde não existem vértices repetidos
  - Podemos notar que todo caminho é uma trilha
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_3$  é um caminho no digrafo ao lado



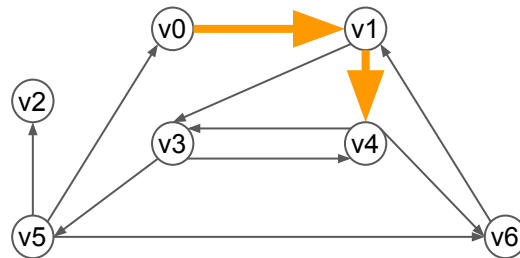
# Caminho

- Um **caminho** em um digrafo  $G$  é um passeio em  $G$  onde não existem vértices repetidos
  - Podemos notar que todo caminho é uma trilha
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_3$  é um caminho no digrafo ao lado



# Caminho

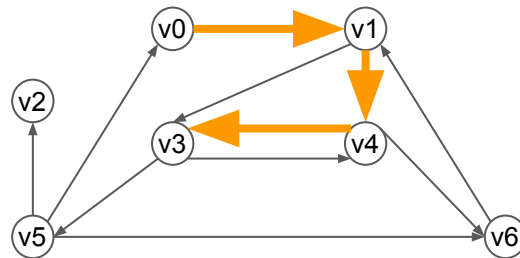
- Um **caminho** em um digrafo  $G$  é um passeio em  $G$  onde não existem vértices repetidos
  - Podemos notar que todo caminho é uma trilha
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_3$  é um caminho no digrafo ao lado





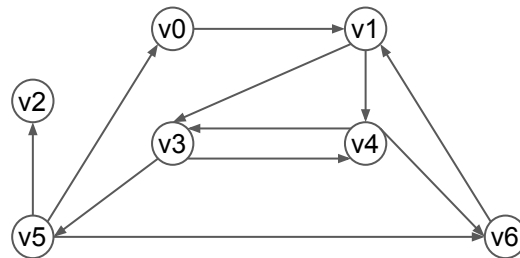
# Caminho

- Um **caminho** em um digrafo  $G$  é um passeio em  $G$  onde não existem vértices repetidos
  - Podemos notar que todo caminho é uma trilha
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_3$  é um caminho no digrafo ao lado



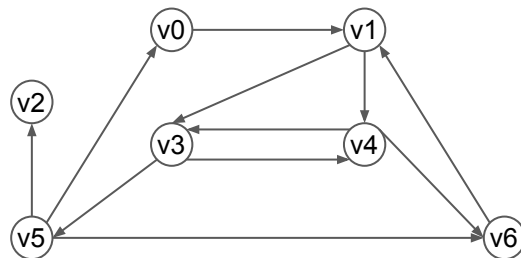
# Caminho

- Um **caminho** em um digrafo  $G$  é um passeio em  $G$  onde não existem vértices repetidos
  - Podemos notar que todo caminho é uma trilha
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_6$   
**não** é um caminho no digrafo ao lado



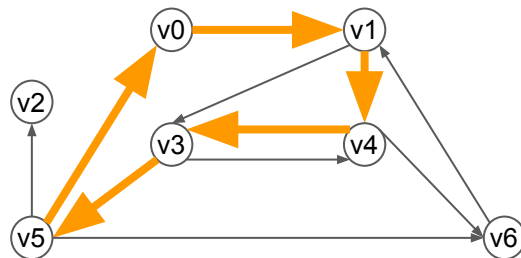
# Ciclo

- Um **ciclo** em um digrafo  $G$  é um passeio fechado em  $G$ , com comprimento maior ou igual a 1 e onde não existem vértices internos repetidos
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_3 v_5 v_0$  é um ciclo no digrafo ao lado



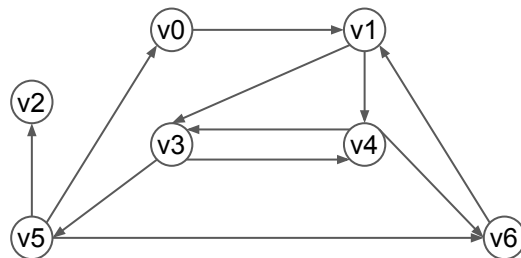
# Ciclo

- Um **ciclo** em um digrafo  $G$  é um passeio fechado em  $G$ , com comprimento maior ou igual a 1 e onde não existem vértices internos repetidos
- Exemplo:
  - A sequência  $v_0 v_1 v_4 v_3 v_5 v_0$  é um ciclo no digrafo ao lado



# Ciclo

- Um **ciclo** em um digrafo  $G$  é um passeio fechado em  $G$ , com comprimento maior ou igual a 1 e onde não existem vértices internos repetidos
- Exemplo:
  - A sequência  $v_1 v_4 v_3 v_1$   
**não** é um ciclo no digrafo ao lado

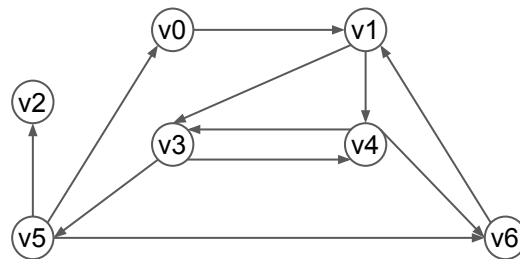


# Distância

- A **distância** de um vértice  $v_i$  para um vértice  $v_j$  em um digrafo  $G$ , denotada por  $d(v_i, v_j)$ , é
  - o menor comprimento de um  $v_i v_j$ -caminho em  $G$  ou
  - $\infty$  (infinita) caso não exista um  $v_i v_j$ -caminho em  $G$
- Note que, em geral,  $d(v_i, v_j) \neq d(v_j, v_i)$

- Exemplo:

- No digrafo ao lado,
  - $d(v_0, v_4) =$  e  $d(v_4, v_0) =$  ,
  - $d(v_5, v_6) =$  e  $d(v_6, v_5) =$  ,
  - $d(v_4, v_4) =$  e
  - $d(v_3, v_2) =$  e  $d(v_2, v_3) =$

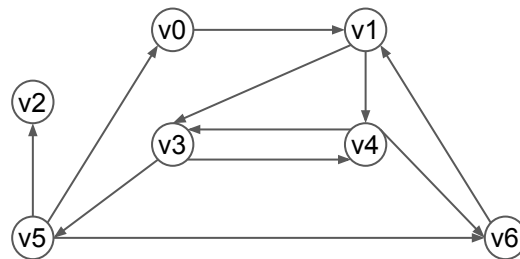


# Distância

- A **distância** de um vértice  $v_i$  para um vértice  $v_j$  em um digrafo  $G$ , denotada por  $d(v_i, v_j)$ , é
  - o menor comprimento de um  $v_i v_j$ -caminho em  $G$  ou
  - $\infty$  (infinita) caso não exista um  $v_i v_j$ -caminho em  $G$
- Note que, em geral,  $d(v_i, v_j) \neq d(v_j, v_i)$

- Exemplo:

- No digrafo ao lado,
  - $d(v_0, v_4) = 2$  e  $d(v_4, v_0) = 3$ ,
  - $d(v_5, v_6) = 1$  e  $d(v_6, v_5) = 3$ ,
  - $d(v_4, v_4) = 0$  e
  - $d(v_3, v_2) = 2$  e  $d(v_2, v_3) = \infty$

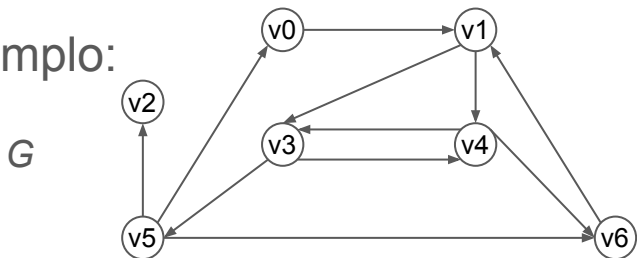


# Subgrafo

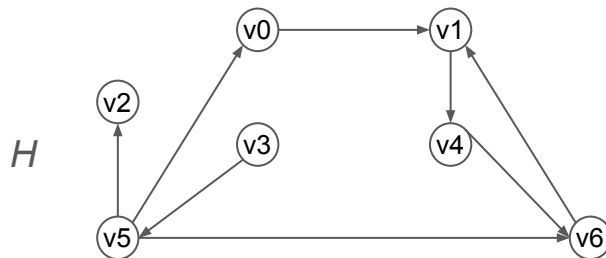
- Um **subgrafo** de um digrafo  $G$  é um digrafo  $H$  tal que

- $V(H) \subseteq V(G)$  e
- $E(H) \subseteq E(G)$

- Exemplo:



- $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$  e
- $E(G) = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_3), (v_3, v_5), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_6), (v_6, v_1), (v_6, v_5), (v_2, v_5) \}$



- $V(H) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$  e
- $E(H) = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_6), (v_6, v_1), (v_2, v_5) \}$

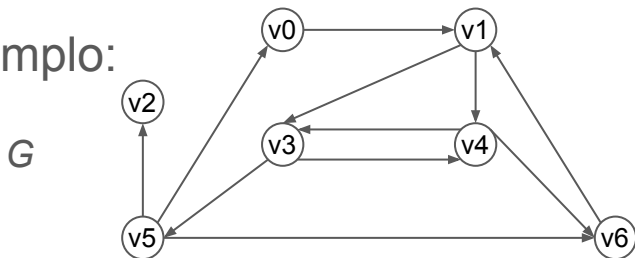


# Subgrafo

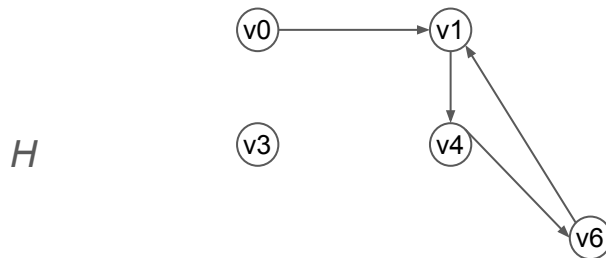
- Um **subgrafo** de um digrafo  $G$  é um digrafo  $H$  tal que

- $V(H) \subseteq V(G)$  e
- $E(H) \subseteq E(G)$

- Exemplo:



- $V(G) = \{ v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$  e
- $E(G) = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1) \}$



- $V(H) = \{ v_0, v_1, v_3, v_4, v_6 \}$  e
- $E(H) = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_4), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_6, v_1) \}$

# Subgrafo

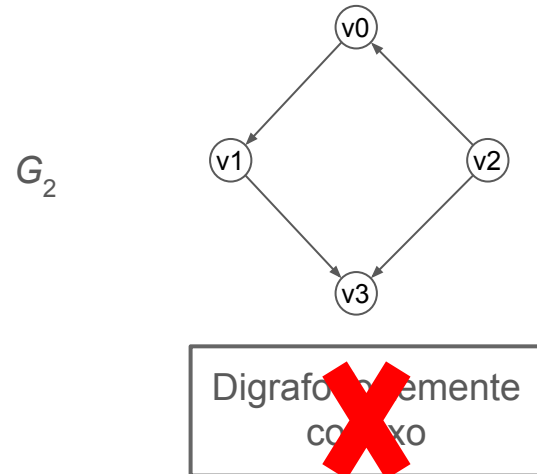
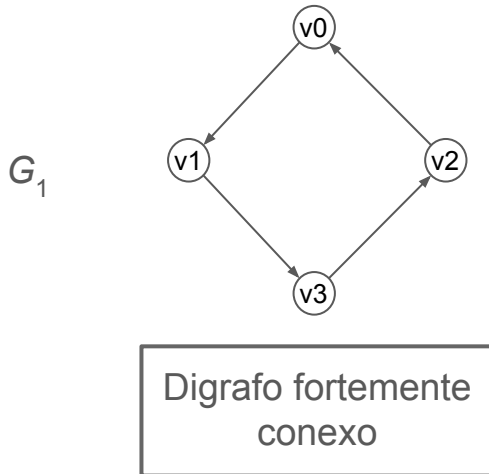
- Um **subgrafo** de um digrafo  $G$  é um digrafo  $H$  tal que
  - $V(H) \subseteq V(G)$  e
  - $E(H) \subseteq E(G)$
- Usamos as seguintes expressões de forma equivalente:
  - $H$  é um subgrafo de  $G$
  - $H$  está **contido** em  $G$
  - $H \subseteq G$
  - $G$  é um **supergrafo** de  $H$
  - $G$  **contém**  $H$
  - $G \supseteq H$

# Subgrafo gerador e induzido

- Um subgrafo  $H$  de um digrafo  $G$  é **gerador** se  $V(H) = V(G)$
- Dado um subconjunto  $S$  de vértices de um digrafo  $G$ , o **subgrafo de  $G$  induzido por  $S$**  é o subgrafo  $G[S]$  tal que
  - $V(G[S]) = S$
  - $E(G[S])$  consiste em todas as arestas de  $G$  cujos ambos os extremos estão em  $S$

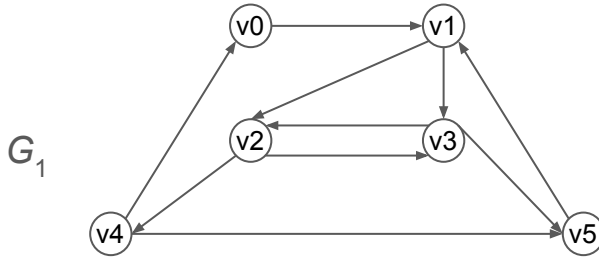
# Conexidade (forte)

- Um digrafo  $G$  é **fortemente conexo** se, para todo par de vértices  $v_i, v_j$  de  $G$ , existe em  $G$  um  $v_i v_j$ -caminho (um caminho cuja origem é  $v_i$  e cujo destino é  $v_j$ ) e um  $v_j v_i$ -caminho (um caminho cuja origem é  $v_j$  e cujo destino é  $v_i$ )
- Exemplo:

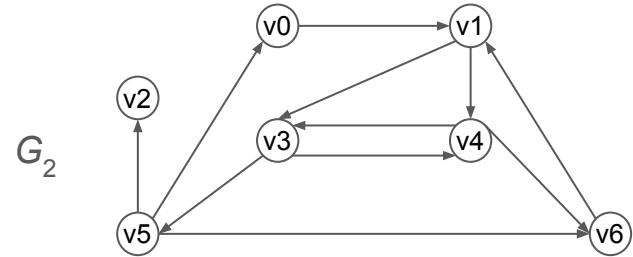


# Conexidade (forte)

- Um digrafo  $G$  é **fortemente conexo** se, para todo par de vértices  $v_i, v_j$  de  $G$ , existe em  $G$  um  $v_i v_j$ -caminho (um caminho cuja origem é  $v_i$  e cujo destino é  $v_j$ ) e um  $v_j v_i$ -caminho (um caminho cuja origem é  $v_j$  e cujo destino é  $v_i$ )
- Exemplo:



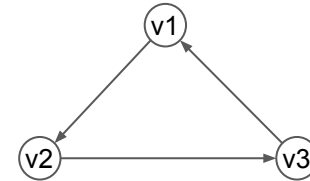
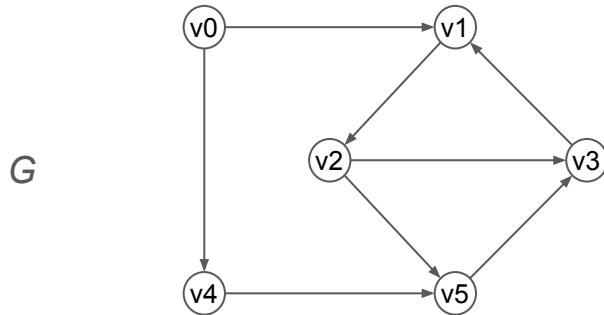
Digrafo fortemente  
conexo



Digrafo ~~fortemente~~  
~~conexo~~

# Conexidade (forte)

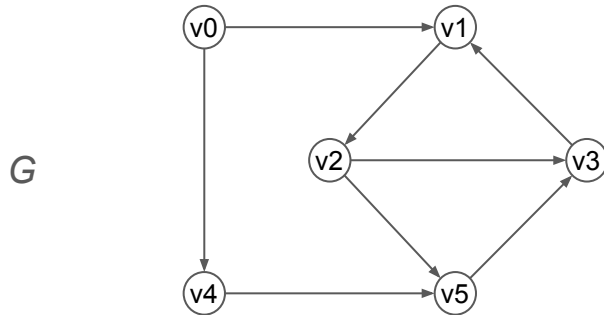
- Um **subgrafo fortemente conexo** de um digrafo  $G$  é um subgrafo de  $G$  que é fortemente conexo
- Exemplo:



Subgrafo  
fortemente conexo

# Conexidade (forte)

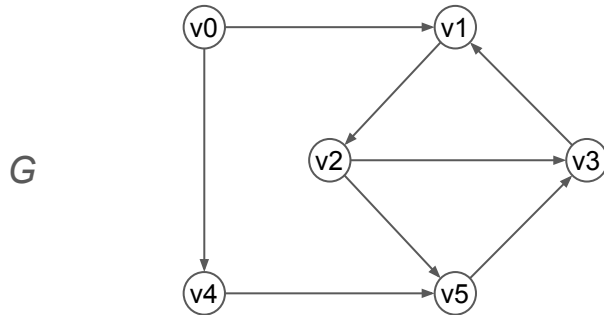
- Um **subgrafo fortemente conexo** de um digrafo  $G$  é um subgrafo de  $G$  que é fortemente conexo
- Exemplo:



Subgrafo  
fortemente conexo

# Conexidade (forte)

- Um **subgrafo fortemente conexo** de um digrafo  $G$  é um subgrafo de  $G$  que é fortemente conexo
- Exemplo:



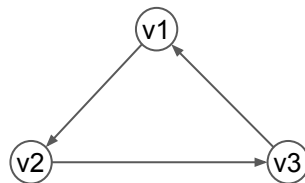
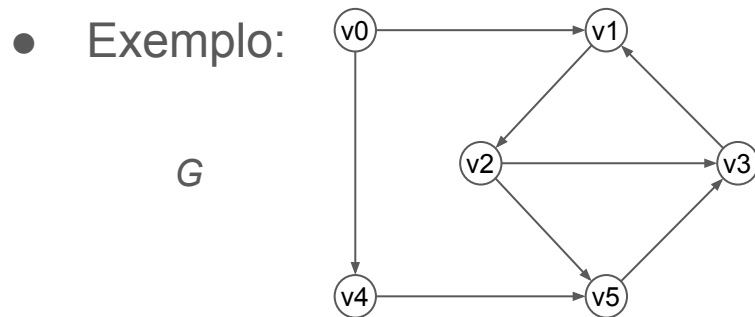
Subgrafo  
fortemente conexo



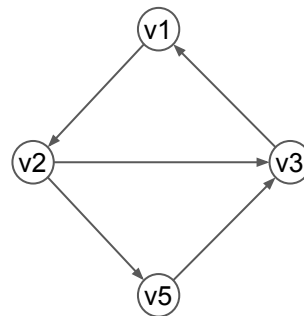


# Conexidade (forte)

- Um **subgrafo fortemente conexo maximal** de um digrafo  $G$  é um subgrafo fortemente conexo de  $G$  que não está contido em outro subgrafo fortemente conexo de  $G$



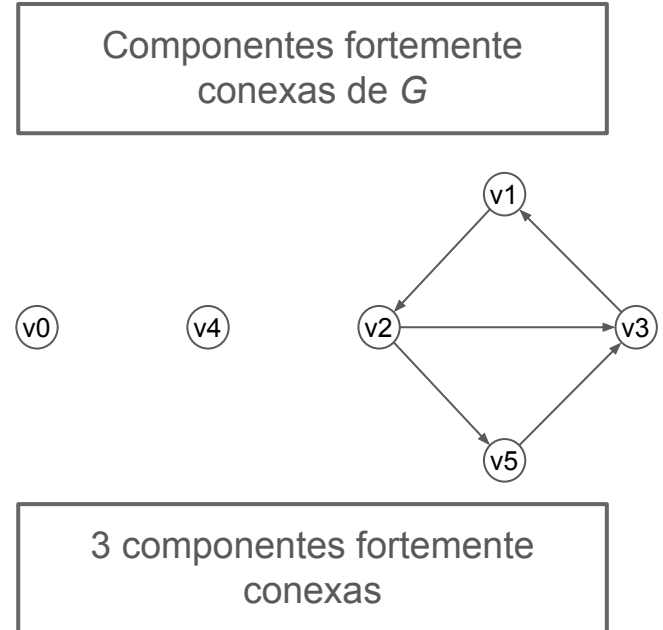
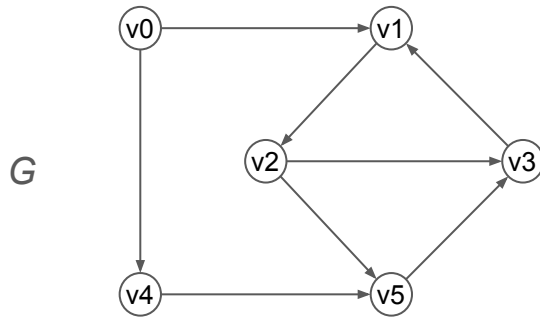
Subgrafo  
fortemente conexo  
maximal



Subgrafo  
fortemente conexo  
maximal

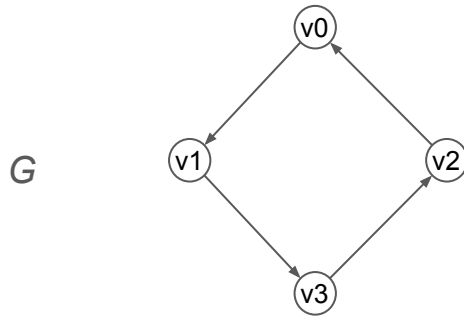
# Conexidade (forte)

- As **componentes fortemente conexas** de um digrafo  $G$  são os subgrafos fortemente conexos maximais de  $G$
- Exemplo:

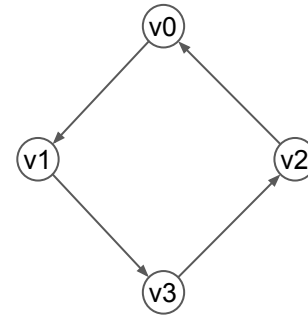


# Conexidade (forte)

- As **componentes fortemente conexas** de um digrafo  $G$  são os subgrafos fortemente conexos maximais de  $G$
- Exemplo:



Componentes fortemente  
conexas de  $G$



1 componente fortemente  
conexa

# Conexidade (forte)

- As **componentes fortemente conexas** de um digrafo  $G$  são os subgrafos fortemente conexos maximais de  $G$
- Um **grafo fortemente conexo** (com pelo menos um vértice) tem exatamente **uma componente fortemente conexa**

# Conexidade (forte)

- Vimos anteriormente um algoritmo para determinar as componentes conexas de um grafo não-dirigido  $G$
- Como podemos fazer para determinar as componentes fortemente conexas de um digrafo  $G$ ?

# Conexidade (forte)

- Como podemos fazer para determinar as componentes fortemente conexas de um digrafo  $G$ ?
- Ideia:
  1. Faça  $i = 0$
  2. Enquanto houver vértices não visitados no digrafo  $G$ :
  3. Realize uma busca em profundidade no digrafo  $G$  começando por um vértice não visitado; quando um vértice  $v$  e seus vizinhos de saída tiverem sido visitados, faça  $fin(v) = i$  e  $i = i + 1$
  4. Construa o digrafo  $G'$  dado pelo digrafo  $G$  com as direções das arestas de  $G$  invertidas
  5. Enquanto houver vértices não visitados no digrafo  $G'$ :
  6. Realize uma busca em profundidade no digrafo  $G'$  começando por um vértice não visitado  $v$  para o qual  $fin(v)$  seja máximo
- Cada busca em profundidade realizada nos Passos 5-6 determina uma componente fortemente conexa do digrafo  $G$

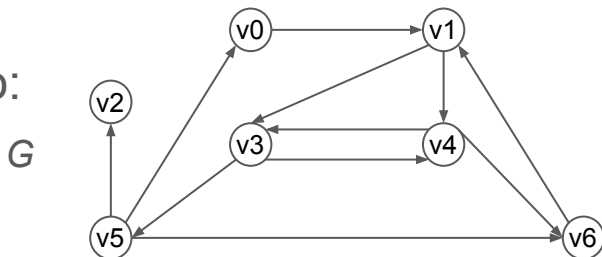
# Conexidade (forte)

- Como podemos fazer para determinar as componentes fortemente conexas de um digrafo  $G$ ?
- Ver
  - a Seção 22.5 do livro  
Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C. Introduction to Algorithms. 3rd. ed. MIT Press, 2009.
  - a Seção 19.8 do livro  
Sedgewick, R. Algorithms in C++ – Part 5. Graph Algorithms. 3rd. ed. Addison-Wesley, 2002.

# Grafo subjacente

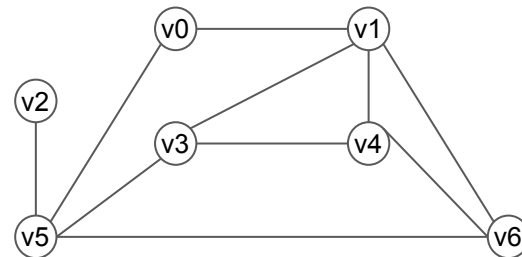
- O **grafo subjacente** de um digrafo  $G$  é o grafo obtido
  - removendo os laços de  $G$  e
  - transformando cada aresta restante de  $G$  de um par ordenado para um conjunto de dois vértices

- Exemplo:



- $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  e
- $E(G) = \{ (v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_0), (v_5, v_2), (v_5, v_6), (v_6, v_1) \}$

Grafo subjacente de  $G$

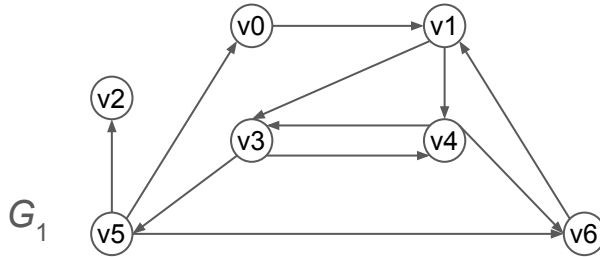


- $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  e
- $E = \{ \{v_0, v_1\}, \{v_0, v_5\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\} \}$

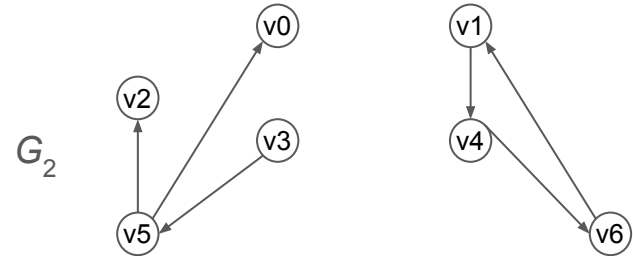


# Conexidade (fraca)

- Um digrafo  $G$  é **(fracamente) conexo** se o seu grafo subjacente é conexo;  $G$  é **desconexo** caso contrário
- Exemplo:



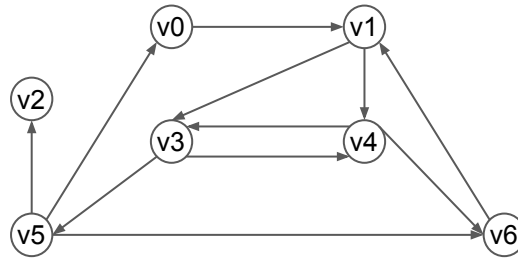
Digrafo conexo



Digrafo desconexo

# Exercícios

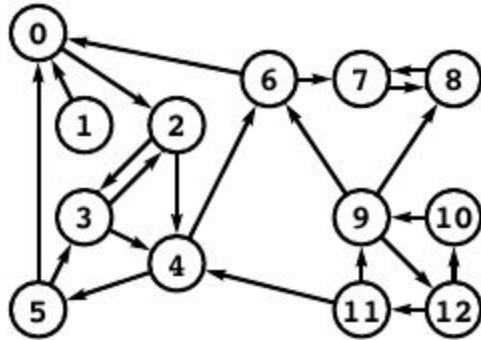
3. Quais são as componentes fortemente conexas do digrafo abaixo?



# Exercícios

4. Responda às seguintes questões:

- O digrafo abaixo é fortemente conexo?
- Caso o digrafo abaixo não seja fortemente conexo, quais são as suas componentes fortemente conexas?



# Exercícios

5. Considere o Problema H da [Primeira Fase](#) da Maratona de Programação 2022. Como podemos usar o conceito de componentes fortemente conexas de um digrafo na resolução deste problema?

# Referências

- Um tratamento mais detalhado dos conceitos básicos definidos nesta apresentação pode ser encontrado em qualquer uma das referências básicas e complementares da disciplina