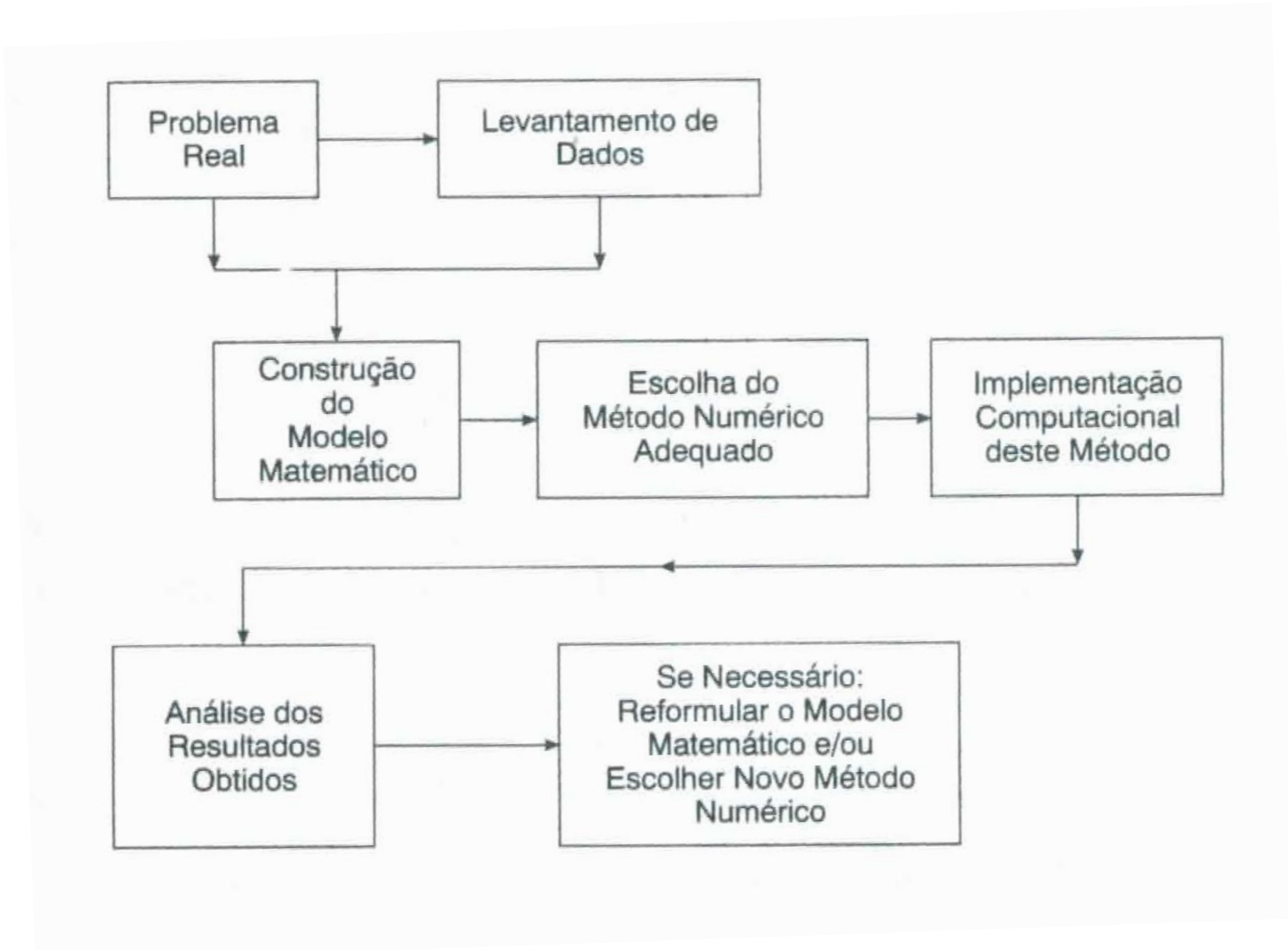
Cálculo Numérico

Prof. Vitor José Petry

Segundo Sem/2023

Noções básicas sobre erros



Noções básicas sobre erros

- **Erros na modelagem**

- **Erros na resolução**

✓truncamento

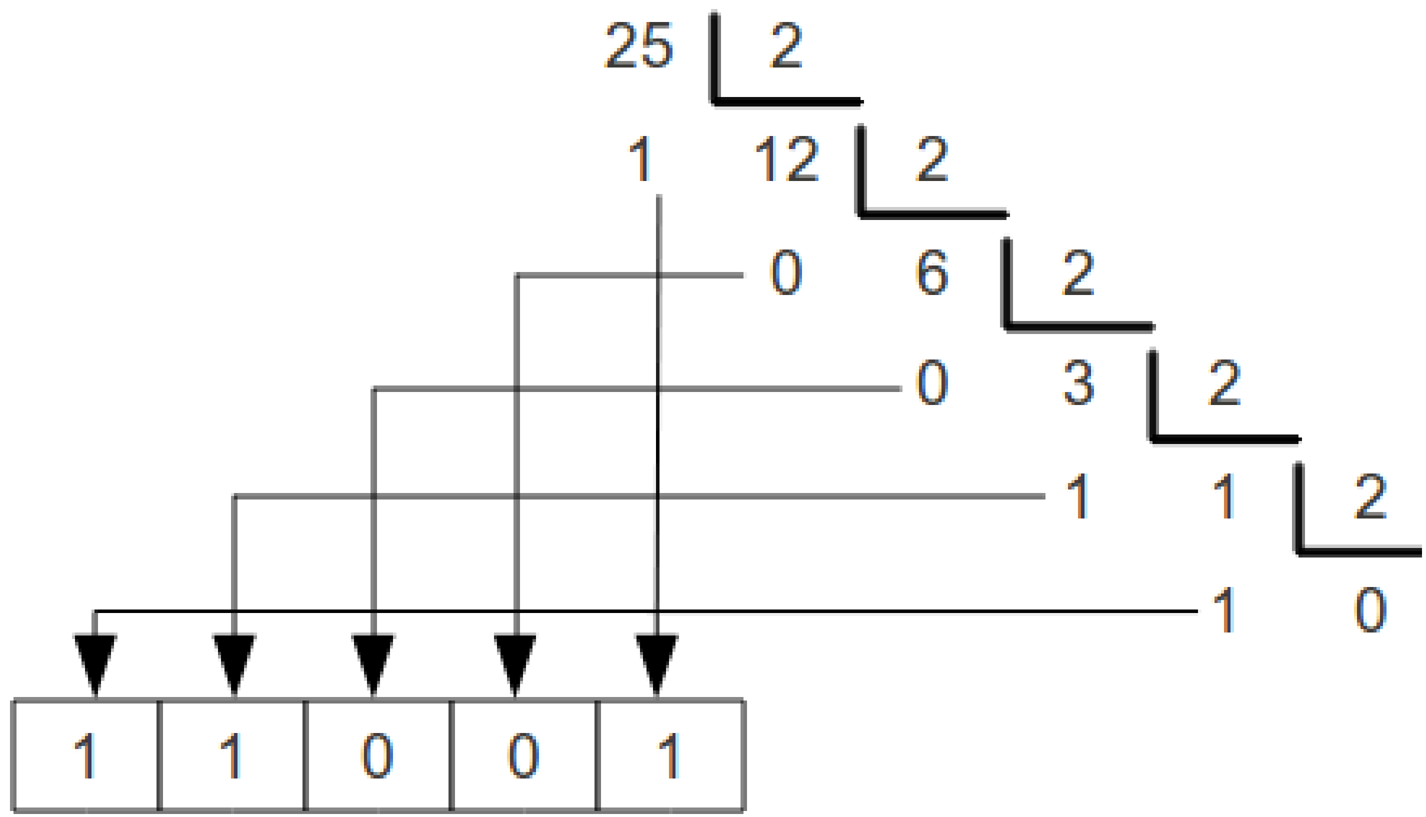
✓Arredondamento

- **Erros absolutos e erros relativos**

Noções básicas sobre erros

Mudança de base:

- Base 2 para base 10;
- Base 10 para base 2 (parte inteira e parte decimal)
- Exemplos


25
2
1
12
2
0
6
2
0
3
2
1
1
2
1
0
1
1
0
0
1

$$8{,}7 \longrightarrow \begin{array}{llll} 8 & \multicolumn{3}{l}{|\,\underline{2\quad}} \\ 0 & 4 & \multicolumn{2}{l}{|\,\underline{2\quad}} \\ & 0 & 2 & |\,\underline{2\quad} \\ & & 0 & 1 \end{array}$$

$$1\,0\,0\,0\,,\,?\,?\,?$$

$$2 \times 0{,}7 = 1{,}4 \longrightarrow 1$$

$$2 \times 0{,}4 = 0{,}8 \longrightarrow 0$$

$$2 \times 0{,}8 = 1{,}6 \longrightarrow 1$$

$$2 \times 0{,}6 = 1{,}2 \longrightarrow 1$$

$$1\,0\,0\,0\,,\,1011$$

$0.0254 \times 2 = 0.0508$
$0.0508 \times 2 = 0.1016$
$0.1016 \times 2 = 0.2032$
$0.2032 \times 2 = 0.4064$
$0.4064 \times 2 = 0.8128$
$0.8128 \times 2 = 1.6256$
$0.6256 \times 2 = 1.2512$
$0.2512 \times 2 = 0.5024$
$0.5024 \times 2 = 1.0048$
$0.0048 \times 2 = 0.0096$
$0.0096 \times 2 = 0.0192$
$0.0192 \times 2 = 0.0384$
$0.0384 \times 2 = 0.0728$
$0.0768 \times 2 = 0.1536$
$0.1526 \times 2 = 0.3072$
$0.3072 \times 2 = 0.6144$
$0.6144 \times 2 = 1.2288$
$0.2288 \times 2 = 0.4576$
$0.4576 \times 2 = 0.9152$
$0.9152 \times 2 = 1.8304$
$0.8304 \times 2 = 1.6608$
$0.6608 \times 2 = 1.3216$
$0.3216 \times 2 = 0.6432$
... *(já temos 23 bits, não vale a pena calcular mais...)*

$$0.0254_{10} \equiv 0.00000110100000000100111010\ldots_2$$

Raízes reais de funções reais

- O que é uma raiz;

Etapas para encontrar as raízes:

- Isolamento de raízes;
- Refinamento de raízes.

Raízes reais de funções reais

Isolamento de raízes

Teorema 1: seja f uma função contínua num intervalo $[a,b]$. Se $f(a).f(b)<0$, então existe pelo menos um ponto no entre a e b que é raiz de f.

Obs.: Sob as hipóteses desse teorema, se f' existir e preservar o sinal em (a,b), então existe única raiz neste intervalo.

Raízes reais de funções reais

- Método Analítico (usa o teorema anterior)
- Método gráfico

Exemplos:

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

$$f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$$

$$f(x) = x.\log(x) - 1$$

Raízes reais de funções reais

Refinamento de raízes

Consiste em obter aproximações cada vez melhores para as raízes. Usa-se para isso métodos iterativos.

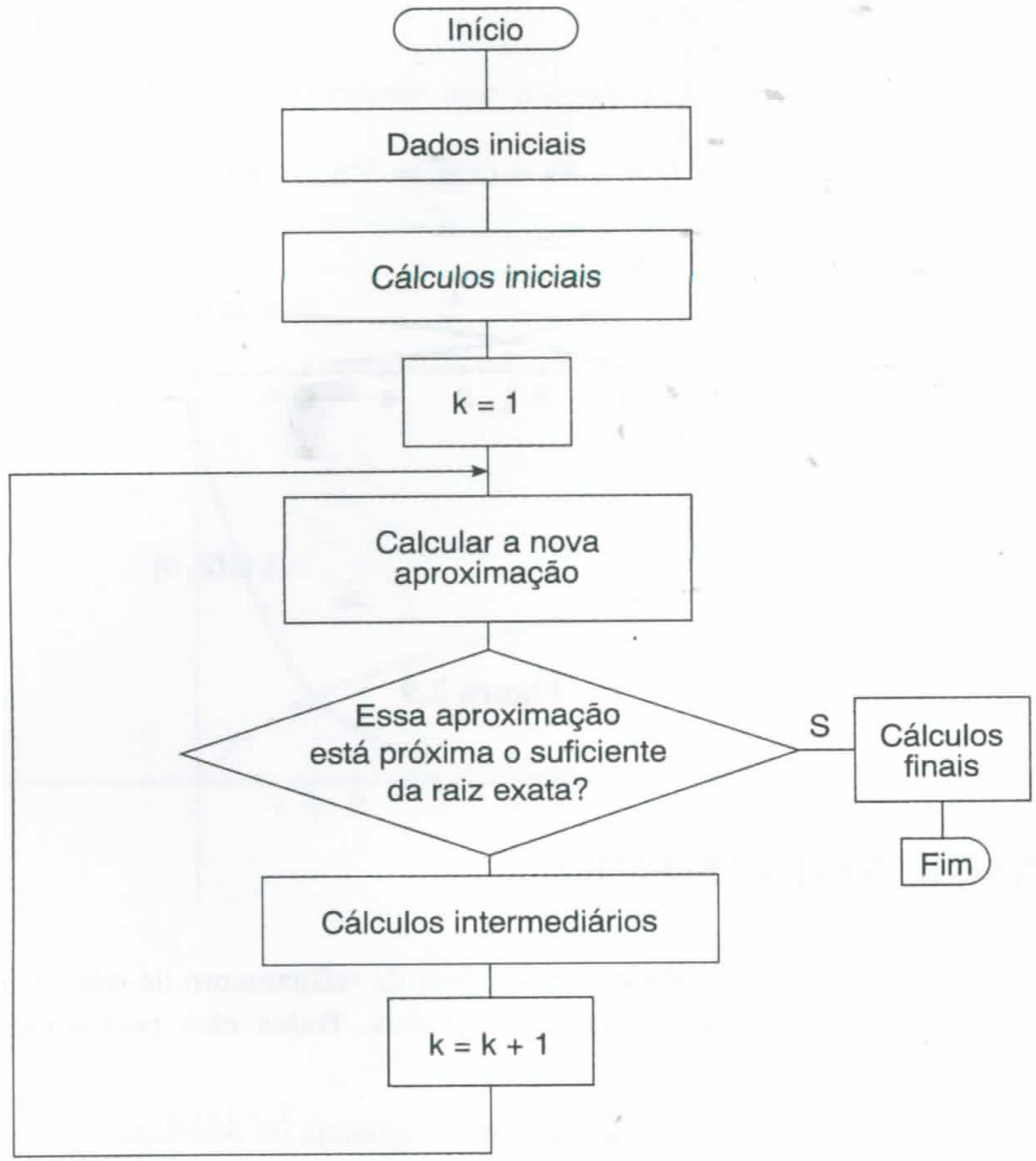
Critérios de parada:

Se x_i é a raiz aproximada da i-ésima iteração e ε a precisão requerida, então pode-se usar como critério de parada uma das opções:

$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$$

$$|f(x_i)| < \varepsilon$$

Esquema para o refinamento de raízes



Raízes reais de funções reais

Método da Bissecção:

- Interpretação do método;
- Exemplos:

$$f(x) = x^3 - 9x + 3, \text{ em } [0,1], \text{ com } \varepsilon = 10^{-3}$$

$$f(x) = x.\log(x) - 1, \text{ em } (2,3), \text{ com } \varepsilon = 10^{-3}$$

Método da Bissecção:

Convergência:

Se ξ é a solução exata e x_i uma aproximação, então:

$$|x_1 - \xi| < \frac{b-a}{2}$$

$$|x_2 - \xi| < \frac{b-a}{2^2}$$

$$\dots$$

$$|x_n - \xi| < \frac{b-a}{2^n}$$

Observe que o método sempre converge, pois $\frac{b-a}{2^n}$ tende a zero quando n tende a infinito.

Método da Bissecção:

Convergência:

Assim, ao requerermos uma aproximação ε, estamos solicitando que

$$|x_n - \xi| < \varepsilon$$

Isto fica garantido ao fazermos:

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$$

De onde segue que: $n > \dfrac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$.

Exercícios:

Livro: RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. Cálculo numérico – aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

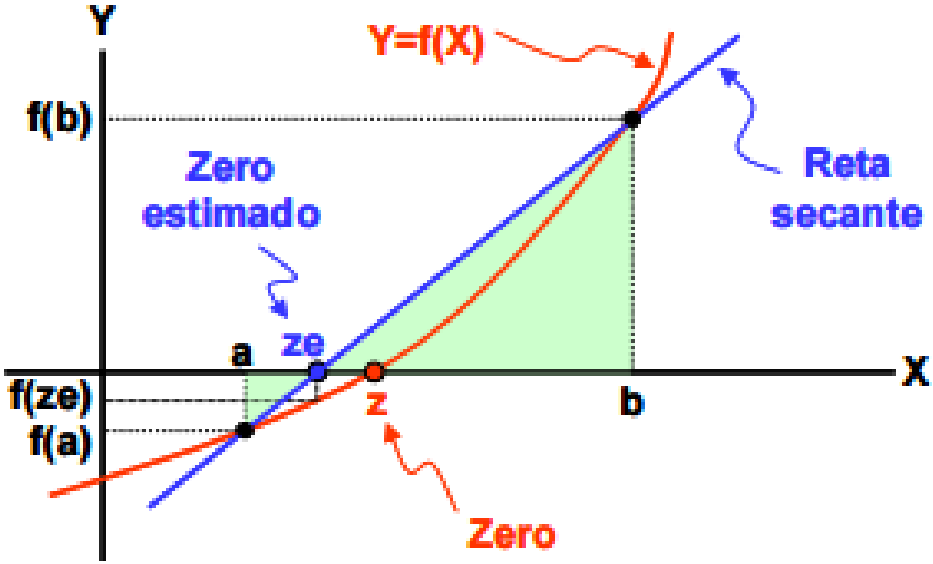
- Páginas 22 a 24: números 1, 2 e 10;
- Páginas 95 a 97: 1, 2, 3 e 11 (neste último, use o método da bissecção ao invés do método solicitado no exercício)
- Faça a implementação computacional do método e verifique os resultados encontrados.

Método da posição falsa:

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ tal que $f(a). f(b) < 0$. Supomos que exista única raiz bem (a, b).

O Método da posição falsa é uma adaptação do método da bissecção e consiste em tomar a média aritmética ponderada entre a e b com "pesos" $|f(b)|$ e $|f(a)|$ respectivamente.

Método da posição falsa:



$$x_1 = \frac{a.|f(b)| + b.|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|}$$

$$= \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Método da posição falsa:

No caso particular em que f'' existe e não muda de sinal no intervalo (a, b), os elementos da sequência de aproximações $\{x_k\}$ encontra-se sempre do mesmo lado da raiz. Assim é possível fixar um dos extremos do intervalo e calcular o outro extremo pelo método iterativo. Este caso particular recebe o nome de ***método das cordas***.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(c)}$$

onde c é o extremo do intervalo $[a, b]$ tal que $f(c).f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Método da posição falsa:

Convergência:

A exemplo do método a bissecção, o método da posição falsa sempre converge.

Exemplos:

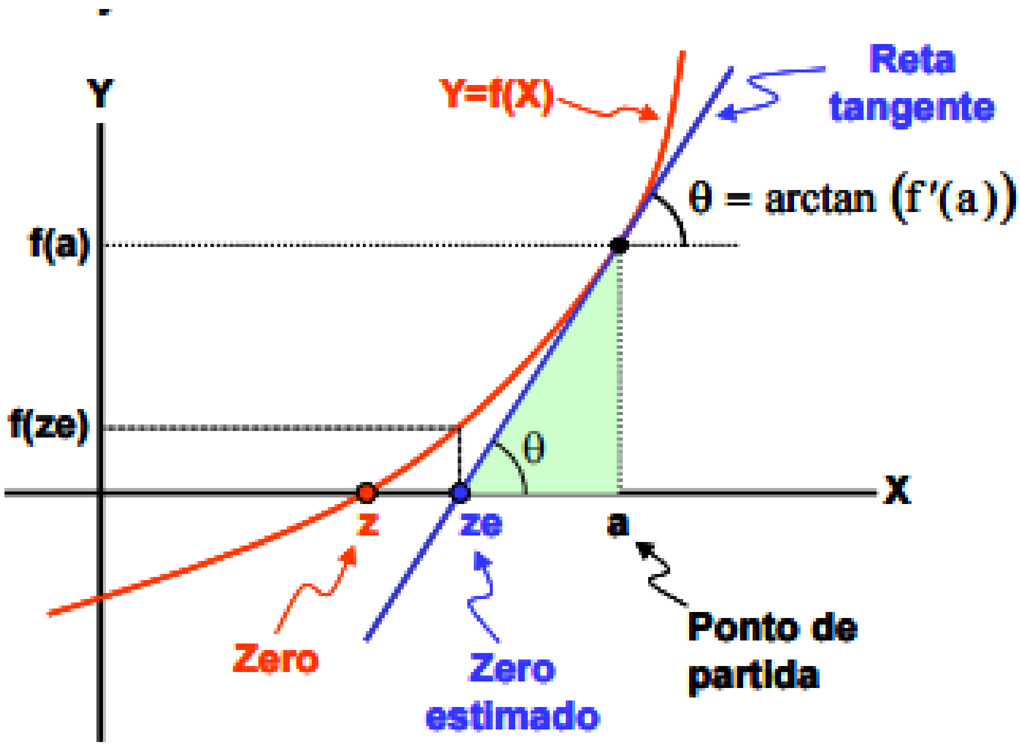
1. $f(x) = x^3 - 9x + 3$, no intervalo $[0, 1]$ com $\varepsilon = 5.10^{-4}$.
2. $f(x) = x.\log(x) - 1$, em $(2,3)$, com $\varepsilon = 10^{-3}$.

Método de Newton:

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ tal que $f(a).f(b) < 0$. Supomos que exista única raiz bem (a, b). Sejam f' e f'' contínuas em (a, b).

O método de Newton consiste em aproximar a raiz da função partir da reta tangente á função a partir de um ponto de partida, chamado de estimativa (ou chute) inicial.

Método de Newton:



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Método de Newton:

Convergência:

É condição suficiente (não necessária) para a convergência do método de Newton que se f' e f'' forem contínuas e diferentes de zero em (a, b) tomarmos x_0 em $[a, b]$, tal que $f(x_0).f''(x_0) > 0$.

Exemplos:

1. $f(x) = x^3 - 9x + 3$, no intervalo $[0, 1]$ com $\varepsilon = 5.10^{-4}$.
2. $f(x) = x.\log(x) - 1$, em $(2,3)$, com $\varepsilon = 10^{-3}$.

Comparação entre métodos:

- Garantias de convergência;
- Rapidez de convergência e número de iterações;
- Esforço computacional e número de operações realizadas por iteração.

Sugestão de leitura: páginas 77 a 82 do livro texto.

Exercícios:

<u>Livro:</u> RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. Cálculo numérico – aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

Use os métodos estudados para resolver os problemas apresentados nos exercícios elencados abaixo:

Páginas 97 a 99: 11, 12, 15 (métodos de Newton e da posição falsa), 18, 19, 21.

Faça a implementação computacional dos métodos e verifique os resultados encontrados.