Erros na integração numérica

Dada a integral $I = \int_a^b f(x)dx$. Se f é contínua e possui derivadas contínuas, então o erro da aproximação da integra pode ser estimado por:

- Método dos trapézios: $\varepsilon \leq \frac{b-a}{12}.h^2.M_2$
- Método de Simpson: $\varepsilon \leq \frac{b-a}{180}.h^4.M_4$.

Em que $h = x_{i+1} - x_i$ e $M_k = máx\left\{\frac{d^k f(x)}{dx^k}, x \in [a,b]\right\}$.

Equações diferenciais ordinárias (EDO)

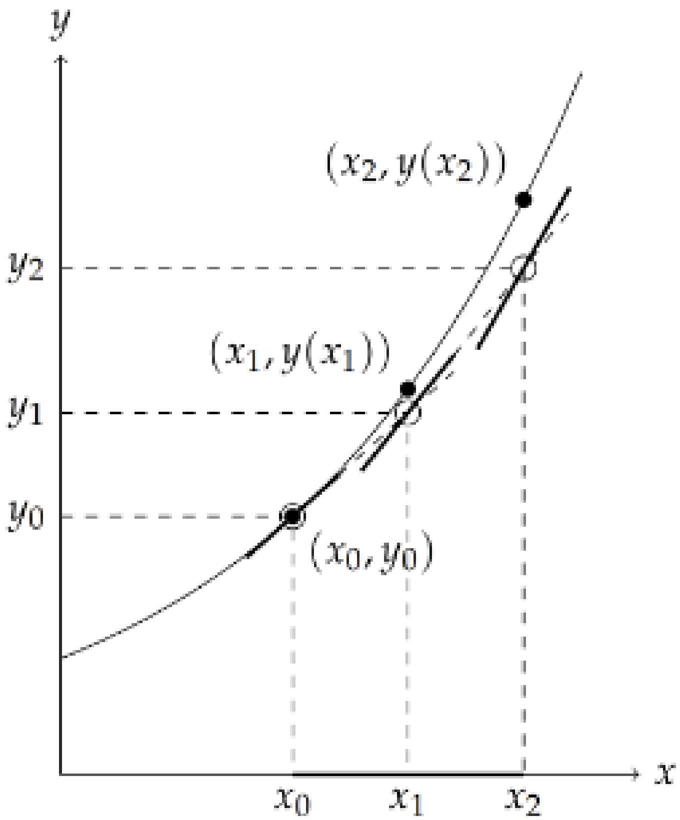
Problema de valor inicial (PVI):

Considere o PVI: $$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Se desejamos resolver este problema em um intervalo $[a, b]$, com $x_0 = a$, podemos particionar o intervalo em n subintervalos de mesmo comprimento $h = \frac{b-a}{n}$, de forma que $a = x_0$, e $b = x_n$, onde $x_i = a + i.h$.

Método de Euler:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [a, b] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Erro de truncamento do método de Euler:

$$\varepsilon_i = \frac{h^2}{2!} y''(\xi) + O(h^3)$$

Com

$$\xi \in [x_{i-1} - x_i]$$

Assim o erro global é da ordem:

$$\boldsymbol{\varepsilon_T} = \left[\frac{h^2}{2!} y''(\xi) + O(h^4)\right] * N = \left[\frac{h^2}{2} y''(\xi) + O(h^3)\right] \frac{b-a}{h} = \boldsymbol{O(h)}$$

Métodos de Runge-Kutta

Objetivo: Resolver o PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad x \in [a, b] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Método de segunda ordem: (Euler melhorado):

Consiste em melhorar a aproximação obtida pelo método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Métodos de Runge-Kutta

Esse melhoramento é obtido ao realizar uma correção na inclinação em um ponto intermediário de forma que:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})]$$

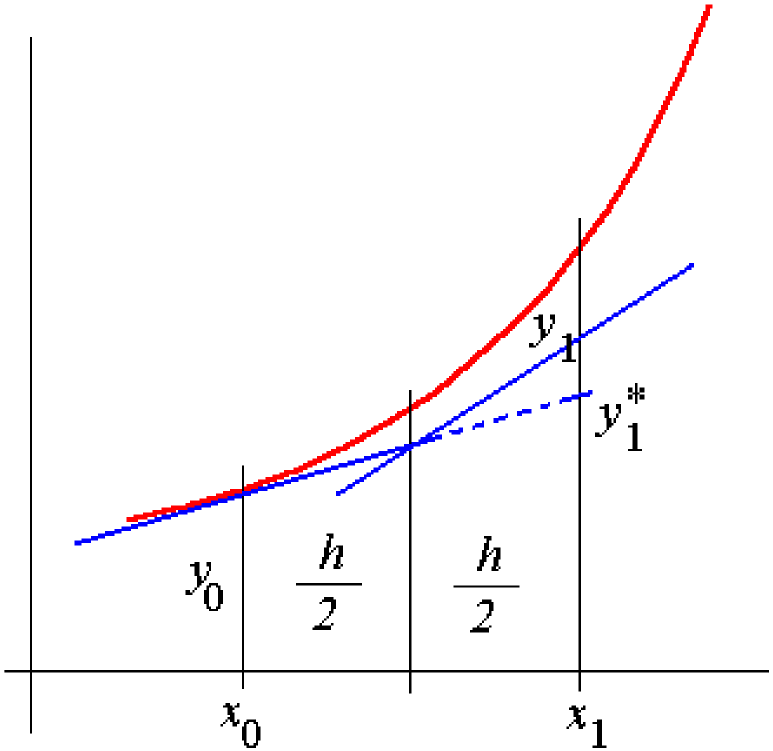
$$y^*_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Ou:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_{i+1}, y_i + k_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$



Métodos de Runge-Kutta

Erro de truncamento:

$$\varepsilon_i = \frac{h^3}{3!} y'''(\xi) + O(h^4)$$

Com

$$\xi \in [x_{i-1} - x_i \,]$$

Assim o erro global é da ordem:

$$\boldsymbol{\varepsilon_T} = \left[\frac{h^3}{3!} y'''(\xi) + O(h^4)\right] * N = \left[\frac{h^3}{3!} y'''(\xi) + O(h^4)\right] \frac{b-a}{h} = \boldsymbol{O(h^2)}$$

Métodos de Runge-Kutta

Método de quarta ordem (Método clássico de Runge-Kutta):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

Métodos de Runge-Kutta

Erro de truncamento:

$$\varepsilon_i = \frac{h^5}{5!} y^{(V)}(\xi) + O(h^6)$$

com

$$\xi \in [x_{i-1} - x_i\ ]$$

Assim o erro global é da ordem:

$$\boldsymbol{\varepsilon_T} = \left[\frac{h^5}{5!} y^{(V)}(\xi) + O(h^6)\right] * N = \left[\frac{h^5}{5!} y^{(V)}(\xi) + O(h^6)\right] \frac{b-a}{h} = \boldsymbol{O(h^4)}$$