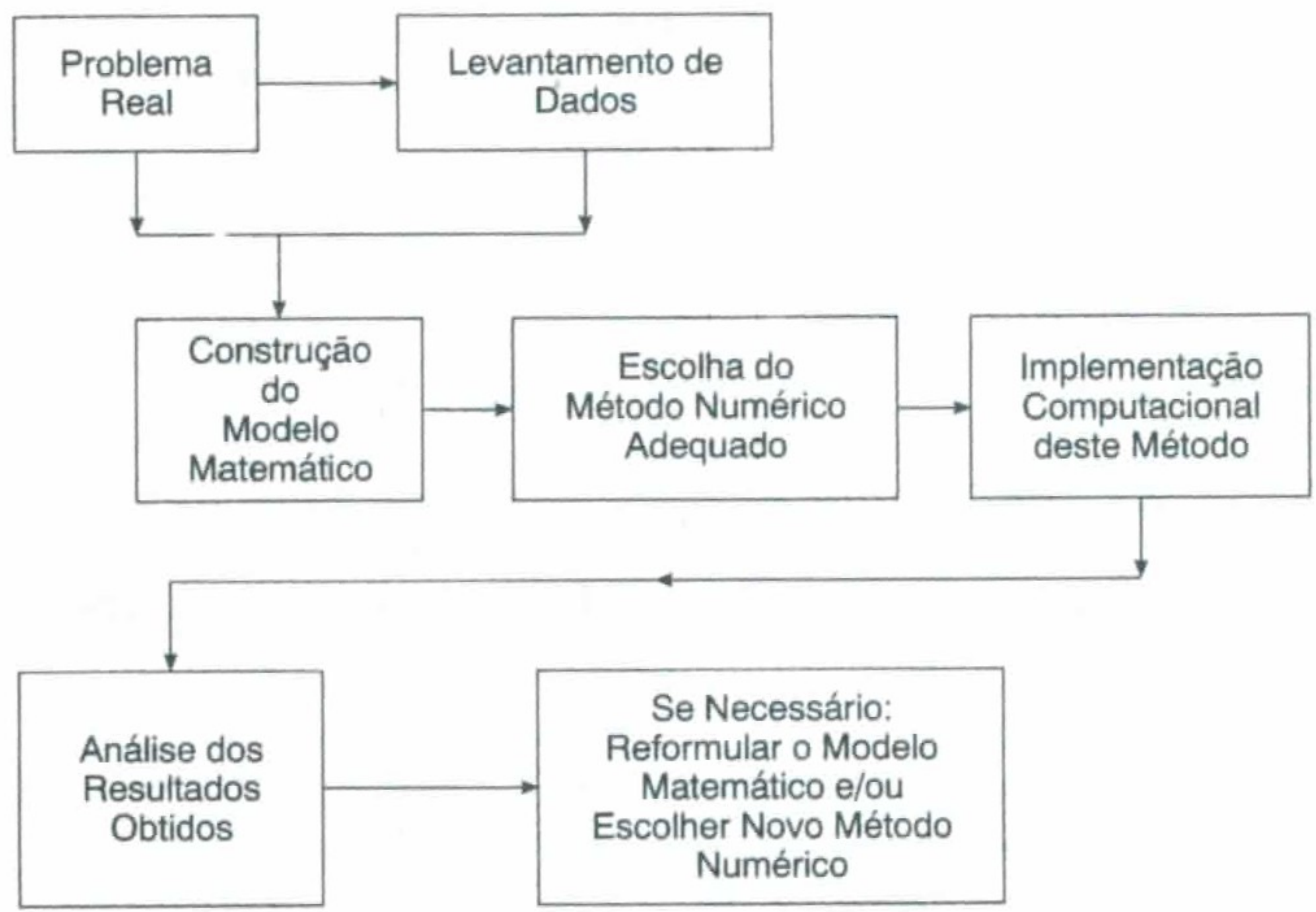
Cálculo Numérico

Prof. Vitor José Petry

Segundo Sem/2023

Noções básicas sobre erros



Noções básicas sobre erros

- **Erros na modelagem**

- **Erros na resolução**

✓ truncamento

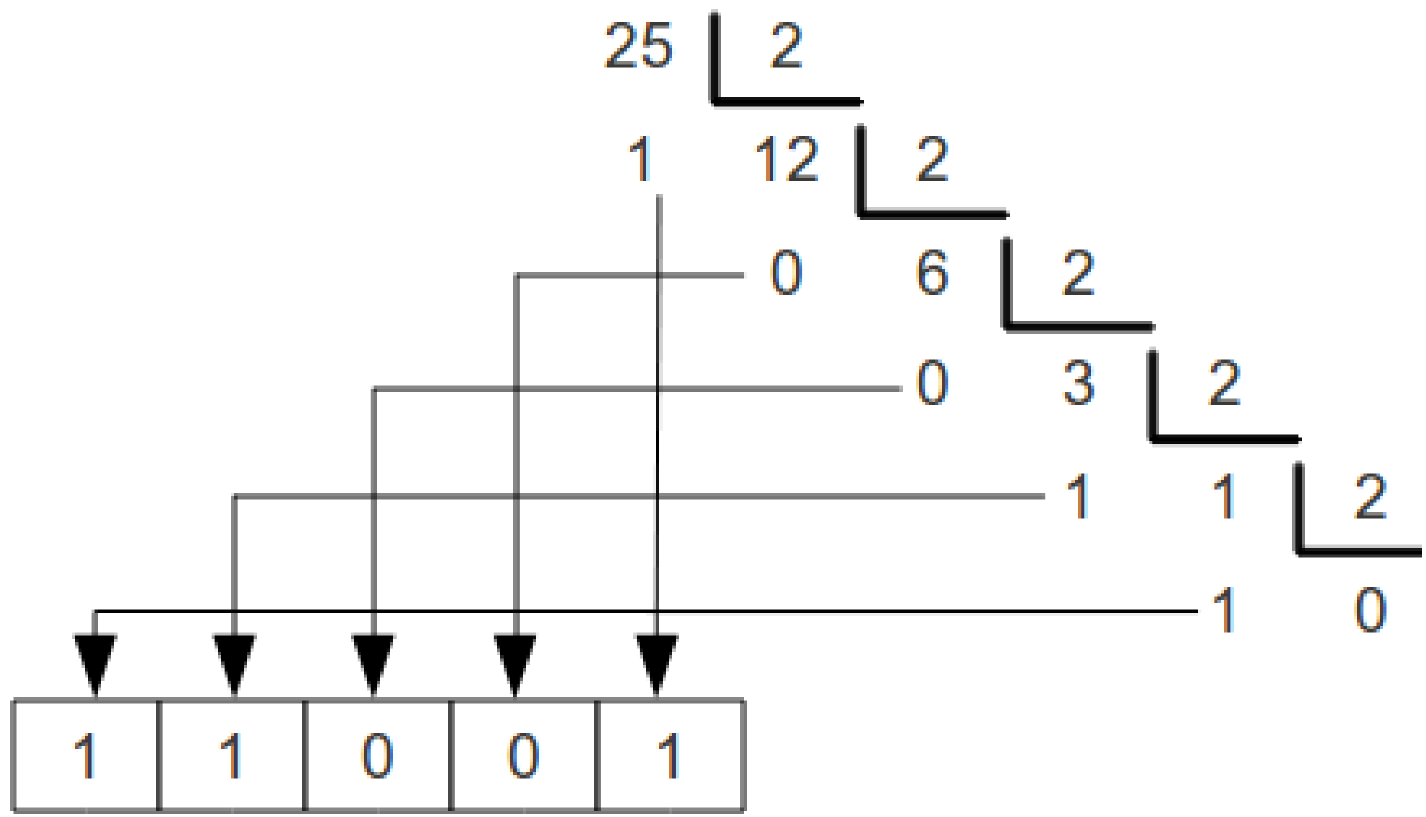
✓ Arredondamento

- **Erros absolutos e erros relativos**

Noções básicas sobre erros

Mudança de base:

- Base 2 para base 10;
- Base 10 para base 2 (parte inteira e parte decimal)
- Exemplos


25 2
1 12 2
0 6 2
0 3 2
1 1 2
1 0
1 1 0 0 1

8,7 $\longrightarrow$ 8 | 2

0   4 | 2

0   2 | 2

0   1

---

1 0 0 0 , ? ? ?

$2 \times 0{,}7 = 1{,}4 \longrightarrow 1$

$2 \times 0{,}4 = 0{,}8 \longrightarrow 0$

$2 \times 0{,}8 = 1{,}6 \longrightarrow 1$

$2 \times 0{,}6 = 1{,}2 \longrightarrow 1$

---

1 0 0 0 , 1011

$$0.0254 \times 2 = 0.0508$$
$$0.0508 \times 2 = 0.1016$$
$$0.1016 \times 2 = 0.2032$$
$$0.2032 \times 2 = 0.4064$$
$$0.4064 \times 2 = 0.8128$$
$$0.8128 \times 2 = 1.6256$$
$$0.6256 \times 2 = 1.2512$$
$$0.2512 \times 2 = 0.5024$$
$$0.5024 \times 2 = 1.0048$$
$$0.0048 \times 2 = 0.0096$$
$$0.0096 \times 2 = 0.0192$$
$$0.0192 \times 2 = 0.0384$$
$$0.0384 \times 2 = 0.0728$$
$$0.0768 \times 2 = 0.1536$$
$$0.1526 \times 2 = 0.3072$$
$$0.3072 \times 2 = 0.6144$$
$$0.6144 \times 2 = 1.2288$$
$$0.2288 \times 2 = 0.4576$$
$$0.4576 \times 2 = 0.9152$$
$$0.9152 \times 2 = 1.8304$$
$$0.8304 \times 2 = 1.6608$$
$$0.6608 \times 2 = 1.3216$$
$$0.3216 \times 2 = 0.6432$$

... *(já temos 23 bits, não vale a pena calcular mais...)*

$$0.0254_{10} \equiv 0.00000110100000000100111010\ldots_2$$

Raízes reais de funções reais

- O que é uma raiz;

Etapas para encontrar as raízes:

- Isolamento de raízes;
- Refinamento de raízes.

Raízes reais de funções reais

Isolamento de raízes

Teorema 1: seja *f* uma função contínua num intervalo *[a,b]*. Se *f(a).f(b)<0*, então existe pelo menos um ponto no entre *a* e *b* que é raiz de *f*.

Obs.: Sob as hipóteses desse teorema, se *f'* existir e preservar o sinal em *(a,b)*,

Raízes reais de funções reais

- Método Analítico (usa o teorema anterior)
- Método gráfico

Exemplos:

Raízes reais de funções reais

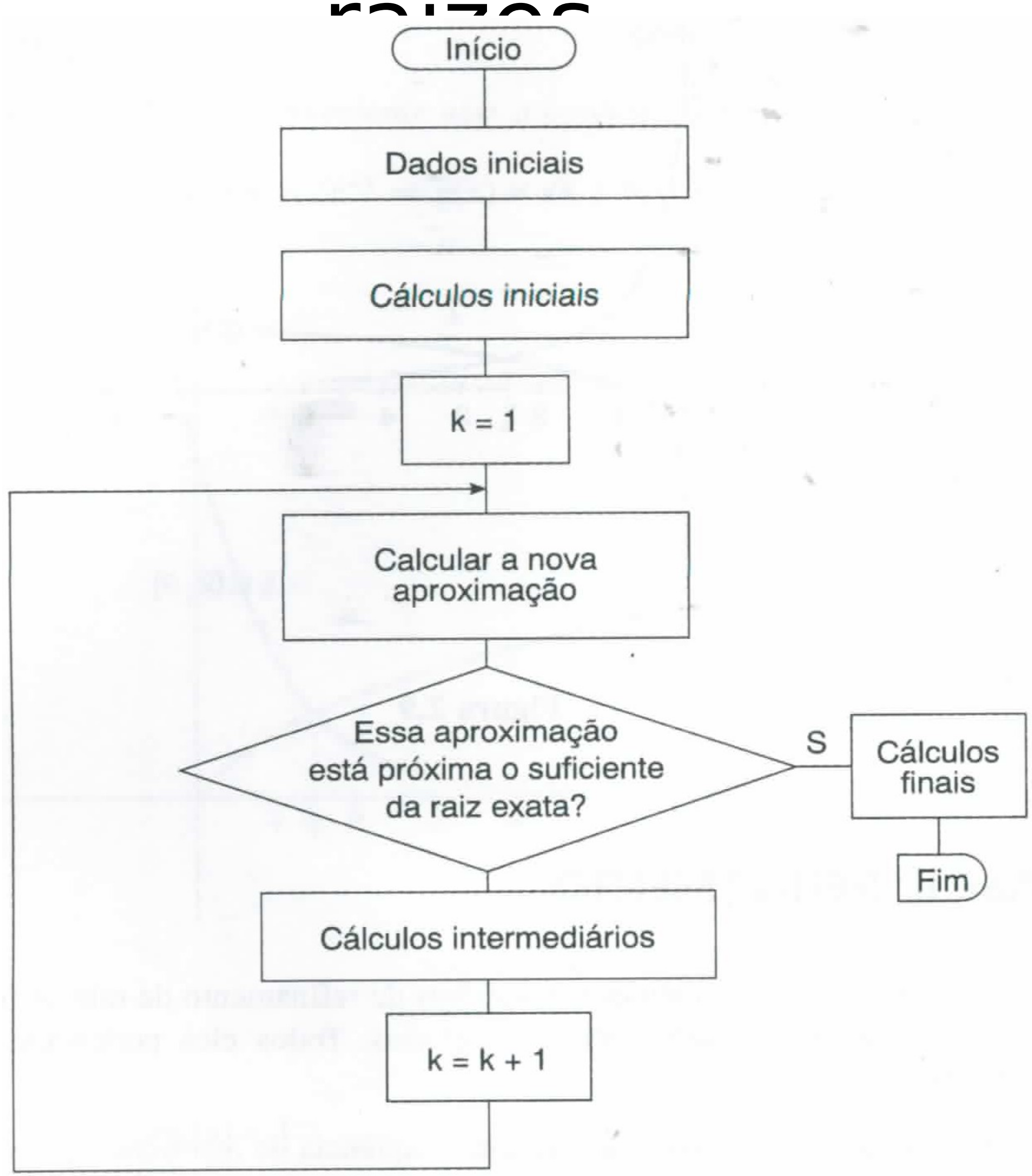
Refinamento de raízes

Consiste em obter aproximações cada vez melhores para as raízes. Usa-se para isso métodos iterativos.

Critérios de parada:

Se é a raiz aproximada da i-ésima iteração e a precisão requerida, então pode-se usar como critério de parada uma das opções:

Esquema para o refinamento de raízes



Raízes reais de funções reais

Método da Bissecção:

- Interpretação do método;
- Exemplos:

, em com

, em , com

Método da Bissecção:

Convergência:

Se é a solução exata e uma aproximação, então:

...

Observe que o método sempre converge, pois tende a zero quando n tende a infinito.

Método da Bissecção:

Convergência:

Assim, ao requerermos uma aproximação ,
estamos solicitando que

Isto fica garantido ao fazermos:

De onde segue que: .

Exercícios:

<u>Livro:</u> RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. Cálculo numérico – aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

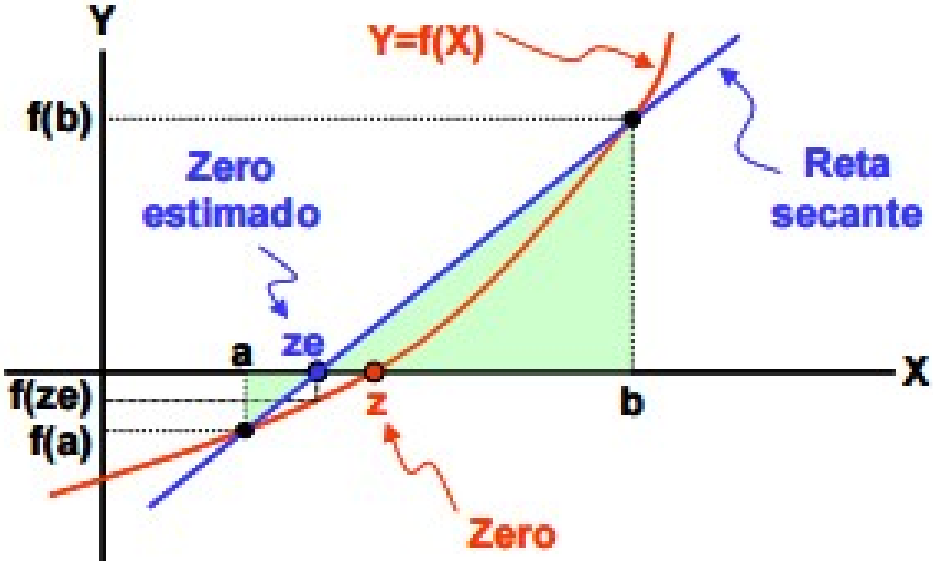
- Páginas 22 a 24: números 1, 2 e 10;
- Páginas 95 a 97: 1, 2, 3 e 11 (neste último, use o método da bissecção ao invés do método solicitado no exercício)
- Faça a implementação computacional do método e verifique os resultados encontrados.

Método da posição falsa:

Seja *f* uma função contínua no intervalo tal que . Supomos que exista única raiz bem .

O Método da posição falsa é uma adaptação do método da bissecção e consiste em tomar a média aritmética ponderada entre a e b com “pesos” e respectivamente.

Método da posição falsa:



Método da posição falsa:

No caso particular em que existe e não muda de sinal no intervalo , os elementos da sequência de aproximações encontra-se sempre do mesmo lado da raiz. Assim é possível fixar um dos extremos do intervalo e calcular o outro extremo pelo método iterativo. Este caso particular recebe o nome de ***método das cordas***.

onde c é o extremo do intervalo tal que para todo .

Método da posição falsa:

Convergência:

A exemplo do método a bissecção, o método da posição falsa sempre converge.

Exemplos:

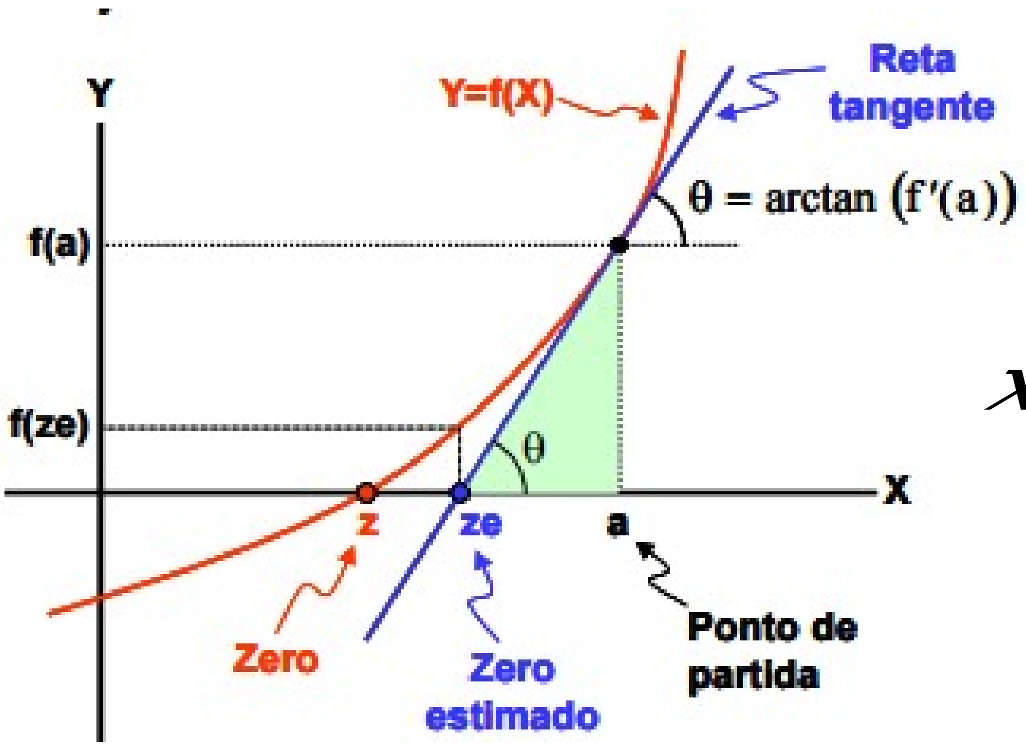
1. , no intervalo com .
2. , em , com .

Método de Newton:

Seja *f* uma função contínua no intervalo tal que . Supomos que exista única raiz em . Sejam e contínuas em .

O método de Newton consiste em aproximar a raiz da função a partir da reta tangente à função a partir de um ponto de partida, chamado de estimativa (ou chute) inicial.

Método de Newton:



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Método de Newton:

Convergência:

É condição suficiente (não necessária) para a convergência do método de Newton que se e forem contínuas e diferentes de zero em tomarmos em , tal que .

Exemplos:

1. , no intervalo com .
2. , em , com .
3. Obtenha uma aproximação para

Método de da Secante:

É obtido pela substituição de no método de Newton pela aproximação

De forma que:

.

Exemplo: pág. 75.

Comparação entre métodos:

- Garantias de convergência;
- Rapidez de convergência e número de iterações;
- Esforço computacional e número de operações realizadas por iteração.

Sugestão de leitura: páginas 77 a 82 do livro texto.

Exercícios:

Livro: RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. Cálculo numérico – aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

Use os métodos estudados para resolver os problemas apresentados nos exercícios elencados abaixo:

Páginas 97 a 99: 11, 12, 15 (métodos de Newton e da posição falsa), 18, 19, 21.

Faça a implementação computacional dos métodos e verifique os resultados encontrados.