Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS - Chapecó, SC

Curso de Ciência da computação

1^o Prova Cálculo numérico (2^o Sem/2023)

Prof.: Vitor José Petry

Aluno:

Instruções: A prova é individual e sem consulta. É permitido o uso de calculadora, desde que não tenha recursos gráficos e nem possibilidade de armazenar textos e/ou arquivos. Não é permitido o uso de celular. Na solução de questões com métodos iterativos, trabalhe sempre com quatro ou mais casas decimais.

1. Considere a função $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

   a. (1,0 pt.) Mostre que as três raízes de f, estão respectivamente nos intervalos: $\xi_1 \in [-2, -1]$, $\xi_2 \in [0, 1]$ e $\xi_3 \in [1, 2]$.

   b. (1,0 pt.) Use o método de Newton para encontrar ξ_1 com precisão $\epsilon < 10^{-2}$. Escolha para x_0 o extremo do intervalo de forma que $f(x_0).f''(x_0) > 0$.

   c. (1,0 pt.) Use o método da secante para encontrar ξ_3 com precisão $\epsilon < 10^{-2}$. Para a obtenção de x_0 e x_1, aplique duas vezes o método da bissecção.

2. (2,0 pts.) Use o método de Gauss para resolver o sistema linear

$$\begin{cases} 3x & +2y & +z & = & 5 \\ x & +y & +2z & = & 3 \\ 2x & +3y & -2z & = & -1 \end{cases}$$

3. (2,0 pts.) Reescreva o sistema linear dado de forma a garantir a convergência dos métodos iterativos estudados. Justifique as alterações efetuadas. Em seguida, resolva o sistema usando o método de Gauss-Seidel com precisão de 5.10^{-2} e chute inicial $X_0 = [1\ 1\ 1]^t$.

$$\begin{cases} x & +2y & +4z & = & 7 \\ x & -4y & +z & = & -2 \\ 5x & -2y & +z & = & 3 \end{cases}$$

4. Para um determinado dia, prevê-se que às 8 horas a temperatura seja de 18^oC, às 12 horas de 23^oC, às 16 horas de 26^oC e às 20 horas de 21^oC.

   a. (1,5 pts.) Usando interpolação de Lagrange (com polinômio de 3^o), obtenha a previsão da temperatura para as 11 horas e 30 minutos do mesmo dia.

   b. (1,5 pts.) Usando interpolação com diferenças finitas (com polinômio de 3^o), obtenha a previsão da temperatura para as 17 horas do mesmo dia.

Boa Prova!!

1) a)

$f(-2) = -1$
$f(-1) = 3$ $\Big\}$ Assim existe raiz $\rho_1 \in [-2,-1)$

pois $f(-2) \cdot f(-1) = -3 < 0$

$f(0) = 1$
$f(1) = -1$ $\Big\} \Rightarrow f(0) \cdot f(-1) = -1 < 0 \Rightarrow \exists \rho_2 \in [0, 1]$

$f(1) = -1$
$f(2) = 3$ $\Big\} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) = -3 < 0 \Rightarrow \exists \rho_3 \in [1, 2]$

---

b) $f(x) = x^3 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x$

$f''(-2) = -12 \Rightarrow f(-2) \cdot f''(-2) = -1 \cdot (-12) > 0$

com $f''(x) < 0 \ \forall x \in (-2,-1)$

Assim $x_0 = -2$ garante a convergência do método.

$x_1 = -1{,}88889$ erro $= 0{,}1111$

$x_2 = -1{,}87945$ erro $= 0{,}009 = 0{,}9 \cdot 10^{-2} = 9 \cdot 10^{-3}$

---

c) $x_0 = 1{,}5$ e $x_1 = 1{,}75$

$x_2 = 1{,}5253$ e $\varepsilon = 0{,}22$

$x_3 = 1{,}5307$ e $\varepsilon = 0{,}0054 = 5{,}4 \cdot 10^{-3}$

2)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

$m_{21} = \frac{1}{3} \Rightarrow L_2 = L_2 - \frac{1}{3} L_1$

$m_{31} = \frac{2}{3} \Rightarrow L_3 = L_3 - \frac{2}{3} L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{1}{3} & 5/3 & 4/3 \\ 0 & 5/3 & -8/3 & -13/3 \end{array}\right]$$

$m_{32} = \frac{5/3}{1/3} = 5 \Rightarrow L_3 = L_3 - 5 \cdot L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1/3 & 5/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \end{array}\right]$$

$-11z = -11 \Rightarrow \boxed{z = 1}$

$\frac{1}{3}y + \frac{5}{3}z = \frac{4}{3} \Rightarrow y + 5z = 4$

$y = 4 - 5 \cdot 1 = -1$

$\boxed{y = -1}$

$3x + 2y + z = 5$

$x = \frac{5 - 2y - z}{3} = \frac{5 - 2\cdot(-1) - 1}{3} = \frac{6}{3} = 2$

$\boxed{x = 2}$

Assim: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{cases} 5x - 2y + z = 3 \\ x - 4y + z = -2 \\ x + 2y + 4z = 7 \end{cases}$

Assim o valor absoluto do elemento da diagonal principal em cada linha é maior do que a soma dos valores absolutos dos demais elementos das respectivas linhas.

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^{n+1} = \frac{3 + 2y^n - z^n}{5}$$

$$y^{n+1} = \frac{-2 - x^{n+1} - z^n}{-4} = \frac{2 + x + z}{4}$$

$$z^{n+1} = \frac{7 - x^{n+1} - 2y^{n+1}}{4}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,95 \\ 0,1075 \end{bmatrix} ; \quad Erro = \begin{bmatrix} -0,2 \\ -0,05 \\ 0,075 \end{bmatrix} \quad res = \begin{bmatrix} 0,175 \\ 0,075 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0,765 \\ 0,96 \\ 1,07875 \end{bmatrix} ; \quad Erro = \begin{bmatrix} -0,035 \\ 0,01 \\ 0,00375 \end{bmatrix} ; \quad res = \begin{bmatrix} -0,01625 \\ 0,00375 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = 3,5 \cdot 10^{-2} < 5 \cdot 10^{-2}$$

4a

$P_0(8, 18)$

$P_1(12, 23)$

$P_2(16, 26)$

$P_3(20, 21)$

$$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-12)(x-16)(x-20)}{(8-12)(8-16)(8-20)} \Rightarrow L_0(11,5) \approx 0,0498$$

$$L_1(x) = \frac{(x-8)(x-16)(x-20)}{(12-8)(12-16)(12-20)} \Rightarrow L_1(11,5) \approx 1,0459$$

$$L_2(x) = \frac{(x-8)(x-12)(x-20)}{(16-8)(16-12)(16-20)} \Rightarrow L_2(11,5) \approx -0,1162$$

$$L_3(x) = \frac{(x-8)(x-12)(x-16)}{(20-8)(20-12)(20-16)} \Rightarrow L_3(11,5) \approx 0,0205$$

$$P(11,5) \approx 18 \cdot 0,0498 + 23 \cdot 1,0459 + 26 \cdot (-0,1162) + 21 \cdot (0,0205)$$

$$= \underline{22,3614^{\circ}}$$

4.b

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	8	18	5	-2	-6
1	12	23	3	-8	
2	16	26	-5		
3	20	21			

$h = 4$

$x_0 = 8$

$x = 17$

$$z = \frac{x - x_0}{h} = \frac{17-8}{4}$$

$z = 9/4$

$$z - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$

$$z - 2 = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$$

$$P(17) = y_0 + \Delta y_0 \cdot z + \frac{\Delta^2 y_0}{2}(z) \cdot (z-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{6} \cdot z \cdot (z-1) \cdot (z-2)$$

$$= 18 + 5 \cdot \frac{9}{4} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{4} - \frac{\cancel{6}}{\cancel{6}} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= 18 + \frac{45}{4} - \frac{45}{16} - \frac{45}{64} = \frac{1647}{64} \approx \underline{25,7343^{\circ}}$$