Lógica y Programación

Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

Antonia M. Chávez, Carmen Graciani, Agustín Riscos

Dpto. Ciencias de la Computacion e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Aplicaciones de la Lógica Proposicional

La Lógica es a los informáticos como la matemática a los arquitectos o físicos.
Es "el cálculo de la informática" (M. Y. Vardi).

- Análisis de las propiedades de los sitemas en su diseño, desarrollo, mantenimiento.
- Planificación: manufactura automática, robótica, programación de vuelos en aerolíneas, ...
- Diseño y verificación de circuitos ...
- Deducción: resolución de problemas SAT
- Resolución de problemas de la vida real: horarios, rutas de transporte planificación de obras, ...

Elementos de una lógica

- Elementos de una lógica:
  - Sintaxis: ¿qué expresiones son fórmulas?
  - Semántica: ¿qué significa que una fórmula F es consecuencia de un conjunto de fórmulas $\mathcal{S}$?: $\mathcal{S} \models F$
  - Cálculo: ¿qué significa que una fórmula F puede deducirse a partir de un conjunto de fórmulas $\mathcal{S}$?: $\mathcal{S} \vdash F$
- Propiedades:
  - Potencia expresiva
  - Adecuación: $\mathcal{S} \vdash F \Longrightarrow \mathcal{S} \models F$
  - Completitud: $\mathcal{S} \models F \Longrightarrow \mathcal{S} \vdash F$
  - Decidibilidad
  - Complejidad

Sintaxis de la lógica proposicional

- Alfabeto proposicional:
  - Símbolos proposicionales: $p, \; p_0, \; p_1, \; \dots, \; q, \; q_0, \; q_1, \; \dots$
  - Constantes: $\bot$, $\top$
  - Conectivas lógicas:

Negación:	$\neg$	Condicional:	$\rightarrow$
Conjunción:	$\wedge$	Equivalencia:	$\leftrightarrow$
Disyunción:	$\vee$		

  - Símbolos auxiliares: (,).

Sintaxis de la lógica proposicional

Dado un conjunto SP de símbolos proposicionales, se puede definir un **lenguaje proposicional** $L(SP)$, que contiene todas las fórmulas posibles según la siguiente definición:

- Una fórmula proposicional es:
  - Un elemento de SP: (Fórmula atómica)
  - Si F y G son fórmulas, entonces: $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ también lo son.
- Ejemplos:
  - $((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$
  - $(p \rightarrow (q \vee (\neg r)))$

Sintaxis de la lógica proposicional

- Metavariables:
  - *SP*: conjunto de símbolos proposicionales
  - *FProp*: conjunto de fórmulas proposicionales
  - Símbolos proposicionales: p, p_0, p_1, ..., q, q_0, q_1, ..., r, ...
  - Fórmulas proposicionales: F, F_0, F_1, ..., G, G_0, G_1, ...
- Eliminación de paréntesis:
  - Paréntesis externos: $(p \to q) \Longrightarrow p \to q$
  - Prioridad: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$

    $(p \vee (\neg q \wedge r)) \to (s \vee t) \quad \Longrightarrow \quad p \vee \neg q \wedge r \to s \vee t$

    $((p \wedge \neg q) \vee r) \to s \quad \Longrightarrow \quad p \wedge \neg q \vee r \to s$
  - Asociatividad: $\wedge$ y $\vee$ asocian por la derecha

    $p \wedge (q \wedge r) \quad \Longrightarrow \quad p \wedge q \wedge r$

Símbolos de una fórmula

- Símbolos proposicionales de una fórmula:

$$
\begin{array}{lcl}
sp(p) & = & \{p\} \\
sp(\neg F) & = & sp(F) \\
sp(F \wedge G) & = & sp(F) \cup sp(G) \\
sp(F \vee G) & = & sp(F) \cup sp(G) \\
sp(F \to G) & = & sp(F) \cup sp(G) \\
sp(F \leftrightarrow G) & = & sp(F) \cup sp(G)
\end{array}
$$

Semántica de la lógica proposicional

- La semántica debe proporcionarnos:
  - Noción de verdad: función de verdad
  - Significado de las fórmulas: especificación
  - Noción de consecuencia lógica: conclusiones
- Valores de verdad: $\perp$ y $\top$ (utilizaremos *False* y *True*)

Semántica de la lógica proposicional

- Funciones de verdad
  - $fv_\neg : \{False, True\} \to \{False, True\}$
    $$fv_\neg(i) = \begin{cases} True & \text{si} \quad i = False \\ False & \text{si} \quad i = True \end{cases}$$
  - $fv_\wedge : \{False, True\}^2 \to \{False, True\}$
    $$fv_\wedge(i,j) = \begin{cases} True & \text{si} \quad i = j = True \\ False & \text{en otro caso} \end{cases}$$
  - $fv_\vee : \{False, True\}^2 \to \{False, True\}$
    $$fv_\vee(i,j) = \begin{cases} False & \text{si} \quad i = j = False \\ True & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Semántica de la lógica proposicional

- Funciones de verdad
  - $fv_{\rightarrow} : \{False, True\}^2 \longrightarrow \{False, True\}$
    $$fv_{\rightarrow}(i,j) = \begin{cases} False & \text{si} \quad i = True \text{ y } j = False \\ True & \text{en otro caso} \end{cases}$$
  - $fv_{\leftrightarrow} : \{False, True\}^2 \longrightarrow \{False, True\}$
    $$fv_{\leftrightarrow}(i,j) = \begin{cases} True & \text{si} \quad i = j \\ False & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Semántica de la lógica proposicional

- Interpretación:
  - Una interpretación I es un conjunto de símbolos proposicionales
- *Interpretaciones*: Conjunto de todas las interpretaciones
- $sig : FProp \times Interpretaciones \longrightarrow \{False, True\}$
  - $sig(p, I) = \begin{cases} True & \text{si} \quad p \in I \\ False & \text{en otro caso} \end{cases}$
  - $sig(\neg F, I) = fv_{\neg}(sig(F, I))$
  - $sig(F \land G, I) = fv_{\land}(sig(F, I), sig(G, I))$
  - $sig(F \lor G, I) = fv_{\lor}(sig(F, I), sig(G, I))$
  - $sig(F \rightarrow G, I) = fv_{\rightarrow}(sig(F, I), sig(G, I))$
  - $sig(F \leftrightarrow G, I) = fv_{\leftrightarrow}(sig(F, I), sig(G, I))$

Semántica de la lógica proposicional

- Ejemplo: $$\begin{array}{rcl} F & = & (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \\ I & = & \{p, r\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
sig(F, I) & = & sig((p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), I) \\
& = & fv_{\wedge}(sig(p \vee q, I), sig(\neg q \vee r, I)) \\
& = & fv_{\wedge}(sig(p \vee q, I), sig(\neg q \vee r, I)) \\
& = & fv_{\wedge}(fv_{\vee}(sig(p, I), sig(q, I)), \\
& & \qquad fv_{\vee}(sig(\neg q, I), sig(r, I))) \\
& = & fv_{\wedge}(fv_{\vee}(True, False), fv_{\vee}(fv_{\neg}(sig(q, I)), True)) \\
& = & fv_{\wedge}(True, fv_{\vee}(fv_{\neg}(False), True)) \\
& = & fv_{\wedge}(True, fv_{\vee}(True, True)) \\
& = & fv_{\wedge}(True, True) \\
& = & True
\end{array}$$

Semántica de la lógica proposicional

- $I = \{p, r\}$

$$
\begin{array}{lccccccc}
F = & (p & \vee & q) & \wedge & (\neg q & \vee & r) \\
 & (True & \vee & False) & \wedge & (\neg False & \vee & True) \\
 & & True & & \wedge & (True & \vee & True) \\
 & & True & & \wedge & & True & \\
 & & & & True & & &
\end{array}
$$

- $I = \{r\}$

$$
\begin{array}{lccccccc}
F = & (p & \vee & q) & \wedge & (\neg q & \vee & r) \\
 & (False & \vee & False) & \wedge & (\neg False & \vee & True) \\
 & & False & & \wedge & (True & \vee & True) \\
 & & False & & \wedge & & True & \\
 & & & & False & & &
\end{array}
$$

Modelos y contramodelos

- $interpretaciones(F) = \{I \in Interpretaciones : I \subseteq sp(F)\}$
- $|interpretaciones(F)| = 2^{|sp(F)|}$
- Modelo
  - I es modelo de $F \iff sig(F, I) = True$
  - Representación: $I \models F$
  - Ejemplo: $\{p, r\} \models (p \lor q) \land (\neg q \lor r)$
- Contramodelo
  - I es contramodelo de $F \iff sig(F, I) = False$
  - Representación: $I \not\models F$
  - Ejemplo: $\{r\} \not\models (p \lor q) \land (\neg q \lor r)$
- Modelos de una fórmula
  - $modelos(F) = \{I \in interpretaciones(F) : I \models F\}$

Tablas de verdad

- Comprobación de todas las interpretaciones

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$
True	*True*	*True*	*True*	*True*	*True*
True	*True*	*False*	*True*	*False*	*True*
True	*False*	*True*	*False*	*True*	*True*
True	*False*	*False*	*False*	*True*	*True*
False	*True*	*True*	*True*	*True*	*True*
False	*True*	*False*	*True*	*False*	*True*
False	*False*	*True*	*True*	*True*	*True*
False	*False*	*False*	*True*	*True*	*True*

Validez y satisfactibilidad

- Fórmulas válidas o tautologías
  - F es válida $\iff$ toda interpretación de F es modelo de F
  - Representación: $\models F$
  - Ejemplos: $\models (p \rightarrow p)$, $\models (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$, $\not\models (p \rightarrow q)$
- Fórmulas satisfacibles
  - F es satisfacible $\iff$ tiene algún modelo
  - F es insatisfacible $\iff$ no tiene ningún modelo
  - Ejemplos:
    $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$ es satisfacible
    $(p \wedge (\neg p))$ no es satisfacible
    $(p \wedge (\neg p))$ es insatisfacible
    $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$ no es insatisfacible

Validez y satisfactibilidad

- Problema de la satisfacibilidad: Dada F determinar si es satisfacible
- Problema de la validez: Dada F determinar si es válida
- Relaciones entre validez y satisfacibilidad
  - F es válida $\iff \neg F$ es insatisfacible
  - F es válida $\Rightarrow F$ es satisfacible
  - F es satisfacible $\not\Rightarrow \neg F$ es insatisfacible
- El problema de la satisfacibilidad es NP–completo

Conjuntos de fórmulas

- Símbolos proposicionales de un conjunto de fórmulas
  - $sp(\mathcal{S}) = \bigcup\{sp(F) : F \in \mathcal{S}\}$
  - Ejemplo: $sp(\{p \land q \rightarrow r, p \rightarrow s\}) = \{p, q, r, s\}$
- Interpretaciones de un conjunto de fórmulas
  - $interpretaciones(\mathcal{S}) = \{I \in Interpretaciones : I \subseteq sp(\mathcal{S})\}$
- Modelos de un conjunto de fórmulas
  - I es modelo de $\mathcal{S} \iff$ para toda F de $\mathcal{S}$, $I \models F$
  - Representación $I \models \mathcal{S}$
  - Ejemplo: $\{p, r\} \models \{(p \lor q) \land ((\neg q) \lor r), q \rightarrow r\}$
- Contramodelo de un conjunto de fórmulas
  - I es contramodelo de $\mathcal{S} \iff$ para alguna F de $\mathcal{S}$, $I \not\models F$
  - Representación $I \not\models \mathcal{S}$
  - Ejemplo: $\{p, r\} \not\models \{(p \lor q) \land ((\neg q) \lor r), r \rightarrow q\}$

Conjuntos de fórmulas

- Modelos de un conjunto de fórmulas
  - $modelos(\mathcal{S}) = \{I \in interpretaciones(\mathcal{S}) : I \models S\}$
- Conjuntos consistentes e inconsistentes de fórmulas
  - $\mathcal{S}$ es consistente $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{S}$ tiene algún modelo
  - $\mathcal{S}$ es inconsistente $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{S}$ no tiene ningún modelo
  - Ejemplos:
    $\{(p \lor q) \land ((\neg q) \lor r), p \rightarrow r\}$ es consistente
    $\{(p \lor q) \land ((\neg q) \lor r), p \rightarrow r, \neg r\}$ no es consistente
    $\{(p \lor q) \land ((\neg q) \lor r), p \rightarrow r, \neg r\}$ es inconsistente
    $\{(p \lor q) \land ((\neg q) \lor r), p \rightarrow r\}$ no es inconsistente

Consecuencia lógica

- F es consecuencia lógica de $\mathcal{S} \Longleftrightarrow$ para toda interpretación $I \in interpretaciones(\mathcal{S} \cup \{F\})$, si $I \models \mathcal{S}$ entonces $I \models F$
- Representación: $\mathcal{S} \models F$
- Ejemplos:
  $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$
  $\{p\} \not\models p \wedge q$
  $\{p\} \not\models \neg r$
- Las siguientes condiciones son equivalentes:
  - $\{F_1, ..., F_n\} \models G$
  - $\models (F_1 \wedge ... \wedge F_n) \rightarrow G$
  - $\{F_1, ..., F_n, \neg G\}$ es inconsistente

Ejercicios

- Sean $\mathcal{S} = \{p \rightarrow (q \rightarrow \neg r), p \vee s, (\neg q \wedge r) \rightarrow s\}$ y $F = s \vee \neg r$. Se pide comprobar que $\mathcal{S} \models F$ mediante la definición de consecuencia lógica.
- Sean $\mathcal{S} = \{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, (\neg p \vee r), q \rightarrow \neg r\}$ y $F = r \rightarrow s$. Se pide comprobar que $\mathcal{S} \models F$ mediante la definición de consecuencia lógica.
- Sean $\mathcal{S} = \{a \rightarrow \neg b, \neg a \rightarrow (c \vee b), b \rightarrow (d \wedge a), d \rightarrow \neg c\}$ y $F = a \vee \neg d$. Se pide comprobar que $\mathcal{S} \models F$ mediante la definición de consecuencia lógica.
- Sean $\mathcal{S} = \{a \rightarrow \neg b, \neg b \rightarrow (c \vee d), c \rightarrow \neg d, d \rightarrow (b \wedge \neg a)\}$ y $F = b \vee \neg d$. Se pide comprobar que $\mathcal{S} \models F$ mediante la definición de consecuencia lógica.

- Sean $\mathcal{S} = \{p \rightarrow (q \rightarrow \neg r), p \vee s, (\neg q \wedge r) \rightarrow s\}$ y $F = s \vee \neg r$. Se pide comprobar que $\mathcal{S} \models F$ mediante la definición de consecuencia lógica.

p	q	r	s	$\{p \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$	$p \vee s$	$(\neg q \wedge r) \rightarrow s\}$	$s \vee \neg r$

Ejercicios

- Sean $\mathcal{S} = \{p \rightarrow (q \rightarrow \neg r), p \vee s, (\neg q \wedge r) \rightarrow s\}$ y $F = s \vee \neg r$. Se pide comprobar que $\mathcal{S} \models F$ mediante la definición de consecuencia lógica. $(False = 0,\ True = 1)$

p	q	r	s	$\{p \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$	$p \vee s$	$(\neg q \wedge r) \rightarrow s\}$	$s \vee \neg r$

Ejercicios

- Sean $\mathcal{S} = \{p \to (q \to \neg r), p \vee s, (\neg q \wedge r) \to s\}$ y $F = s \vee \neg r$. Se pide comprobar que $\mathcal{S} \models F$ mediante la definición de consecuencia lógica. $(False = 0,\ True = 1)$

p	q	r	s	$\{p \to (q \to \neg r)$	$p \vee s$	$(\neg q \wedge r) \to s\}$	$s \vee \neg r$
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1

Ejercicios

- Sean $\mathcal{S} = \{p \rightarrow (q \rightarrow \neg r), p \vee s, (\neg q \wedge r) \rightarrow s\}$ y $F = s \vee \neg r$. Se pide comprobar que $\mathcal{S} \models F$ mediante la definición de consecuencia lógica. $(False = 0,\ True = 1)$

p	q	r	s	$\{p \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$	$p \vee s$	$(\neg q \wedge r) \rightarrow s\}$	$s \vee \neg r$
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1	1

Referencias

- Chang, C.L. y Lee, R.C.T *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*. (Academic Press, 1973)
  - Cap. 2: "The propositional logic"
- Genesereth, M.R. *Computational Logic*
  - Cap. 2: "Propositional logic"
- Nilsson, N.J. *Inteligencia artificial (Una nueva síntesis)*. (McGraw–Hill, 2000)
  - Cap. 13: "El cálculo proposicional"
- Russell, S. y Norvig, P. *Inteligencia artificial (un enfoque moderno)*. (Prentice Hall Hispanoamericana, 1996)
  - Cap. 6.4: "Lógica propositiva: un tipo de lógica muy sencillo"