UNIVERSITAS MULAWARMAN
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PENDIDIKAN MATEMATIKA
BANK SOAL HOTS ALJABAR

Nama : ....

A. Persamaan Kuadrat dan Fungsi Kuadrat

1. Misalkan $f(x)$ fungsi yang memenuhi $f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + 2x + 3$. Tentukan jumlah semua nilai z yang memenuhi $f(3z) = 12$.

2. Persamaan kuadrat $2x^2 + px + 1 = 0$ mempunyai akar-akar α dan β serta titik puncaknya berada di kuadran pertama. Jika $x^2 - 5x + q = 0$ mempunyai akar-akar $\frac{1}{\alpha^2}$ dan $\frac{1}{\beta^2}$, maka tentukan nilai dari $q - p$.

3. Diketahui x_1 dan x_2 akar-akar real persamaan $x^2 + 3x + p = 0$ dengan x_1 dan x_2 kedua-duanya tidak sama dengan nol. Jika $x_1 + x_2$, x_1x_2, dan $x_1^2x_2^2$ merupakan tiga suku pertama barisan aritmetika, maka tentukan nilai dari p.

4. Misalkan a, b dan c adalah tiga bilangan *berbeda*. Jika ketiga bilangan tersebut merupakan bilangan asli satu digit, tentukanlah jumlah terbesar akar-akar persamaan $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) = 0$ yang mungkin.

5. Misalkan p dan q bilangan real sedemikian sehingga persamaan kuadrat $x^2+px+q = 0$ memiliki dua akar berbeda x_1 dan x_2. Asumsikan $|x_1 - x_2| = 1$ dan $|p - q| = 1$. Buktikan bahwa p, q, x_1, x_2 semuanya merupakan bilangan bulat.

6. Parabola $y = ax^2 - 4$ dan $y = 8 - bx^2$ memotong sumbu koordinat pada tepat empat titik. Keempat titik sudut tersebut merupakan titik-titik sudut layang-layang dengan luas 24. Tentukan nilai dari $a + b$.

7. Jika fungsi $f(x)$ terdefinisi pada domain $x \in [0, 2]$ dengan
$$f(x) = |x - 1| + \left|x^2 - 2x\right|,$$
maka tentukanlah nilai minimum dan nilai maksimum dari $f(x)$.

8. Cari semua nilai λ sedemikian sehingga kurva $y = \lambda x^2 + \lambda x + \frac{1}{24}$ dan kurva $x = \lambda y^2 + \lambda y + \frac{1}{24}$ bersinggungan satu sama lain.

9. Misalkan α dan β akar-akar dari persamaan
$$x^2 - 2px + p^2 - 2p - 1 = 0.$$
Cari semua bilangan real p sedemikian sehingga
$$\frac{1}{2}\frac{(\alpha - \beta)^2 - 2}{(\alpha + \beta)^2 + 2}$$
merupakan bilangan bulat.

10. Diketahui p dan q merupakan bilangan prima. Jika persamaan $x^2-px+q=0$ memiliki akar-akar bilangan bulat positif yang berbeda, tentukanlah nilai dari p dan q.

11. Titik A dan B terletak pada parabola $y=4+x-x^2$. Diketahui titik asal O merupakan titik tengah ruas garis AB. Tentukanlah panjang AB.

12. Tinjau persamaan $x^2+px+q=0$. Berapa banyak persamaan demikian yang memiliki akar-akar real jika p dan q hanya boleh dipilih dari himpunan $\{1,2,3,4,5,6\}$?

13. Diberikan persamaan kuadrat $ax^2-bx+c=0$ dengan a, b, dan c semuanya merupakan bilangan asli. Jika persamaan kuadrat tersebut memiliki dua akar berbeda yang berada pada interval $(0,1)$, carilah nilai paling minimum yang mungkin dari abc.

14. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2+x-3=0$, tentukanlah nilai dari $4x_1^2+3x_2^2+2x_1+x_2$.

15. Jika akar-akar persamaan $x^2-45x-8=0$ adalah α dan β, maka tentukanlah nilai dari $\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}$.

16. Misalkan a, b, c, dan d bilangan real taknol. Jika a dan b adalah solusi dari $x^2+cx+d=0$ serta c dan d solusi dari $x^2+ax+b=0$, maka tentukanlah nilai dari $a+b+c+d$.

17. Jika α dan β akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2-2x-5=0$, maka tentukanlah nilai dari $\alpha^4-28\alpha$.

18. Jika p dan q akar-akar dari persamaan $x^2-x+1=0$, tentukanlah nilai dari $p^{2021}+q^{2021}$.

19. Akar-akar persamaan kuadrat $2x^2-7x+2=0$ adalah r dan s. Tentukan hasil dari
$$\frac{r}{(r^2+1)^2}+\frac{s}{(s^2+1)^2}.$$

20. Dua persamaan kuadrat memiliki akar-akar bilangan asli. Persamaan kuadrat yang pertama memiliki akar-akar a dan b, sedangkan persamaan kuadrat yang kedua memiliki akar-akar b dan c dengan $c\neq a$. Jika a, b, dan c merupakan bilangan prima kurang dari 15, ada berapa macam persamaan kuadrat yang memenuhi persyaratan tersebut?

21. Diberikan $f(x)=x^2+4$. Misalkan u dan v adalah bilangan real positif yang memenuhi $f(uv)+f(v-u)=f(u+v)$. Tentukan nilai minimum dari $u+v$.

22. Jika a dan b bilangan bulat sehingga $\sqrt{90+2\sqrt{2021}}$ merupakan solusi persamaan kuadrat $x^2+ax+b=0$, maka tentukanlah nilai dari $a+b$.

23. Tentukan bilangan terbesar x yang kurang dari 1000 sehingga terdapat tepat dua bilangan asli n sehingga $\dfrac{n^2+x}{n+1}$ juga merupakan bilangan asli.

24. Tentukan semua nilai b sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real x, paling tidak salah satu dari fungsi
$$f(x)=x^2+2021x+b \quad \text{atau} \quad g(x)=x^2-2021x+b$$
bernilai positif.

25. Diketahui x_1 dan x_2 adalah dua bilangan bulat berbeda yang merupakan akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2+px+q+1=0$. Jika p dan p^2+q^2 adalah bilangan-bilangan prima, tentukan nilai terbesar yang mungkin dari $x_1^{2021}+x_2^{2021}$.

26. Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ yang didefinisikan pada himpunan bilangan real dengan $b \neq 0$. Jika $f(x)$ definit positif, maka tentukan nilai terkecil yang mungkin untuk $\dfrac{a+c}{b}$.

27. Jika akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ berada dalam interval $[0, 1]$, maka tentukanlah nilai maksimum dari
$$\frac{(2a-b)(a-b)}{a(a-b+c)}.$$

28. Untuk bilangan real t dan bilangan real positif a dan b berlaku
$$2a^2 - 3abt + b^2 = 2a^2 + abt - b^2 = 0.$$
Tentukan nilai t.

29. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi yang memenuhi $f(f(x)) = x^2 - x + 1$ untuk setiap bilangan real x. Hitunglah nilai dari $f(0)$.

30. Jika $f(x)$ adalah fungsi yang terdefinisi pada himpunan bilangan real dan berlaku
$$3\,f(x) - 2\,f(2-x) = x^2 + bx - 9$$
untuk setiap bilangan real x, maka tentukanlah nilai dari $f(2021)$.

31. Diberikan dua fungsi kuadrat berbeda $f(x) = x^2 + ax + b$ dan $g(x) = x^2 + cx + d$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $f(20) + f(21) = g(20) + g(21)$. Tentukan jumlah semua bilangan real x yang memenuhi $f(x) = g(x)$.

32. Untuk bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar dari x; sedangkan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang tidak lebih kecil dari x. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi
$$\lfloor x \rfloor^2 - 3x + \lceil x \rceil = 0.$$

33. Misalkan $a > 0$ dan $0 < r_1 < r_2 < 1$ sehingga $a + ar_1 + ar_2^2 + \cdots$ dan $a + ar_2 + ar_2^2 + \cdots$ merupakan deret geometri tak hingga dengan jumlah berturut-turut r_1 dan r_2. Tentukan nilai dari $r_1 + r_2$.

34. Untuk sebarang bilangan real x, simbol $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar daripada x, sedangkan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang tidak lebih kecil dibanding x. Interval $(a, b]$ adalah himpunan semua bilangan real x yang memenuhi
$$\lfloor 2x \rfloor^2 = \lceil x \rceil + 7.$$
Tentukan nilai dari ab.

35. Persamaan kuadrat $x^2 + ax + b + 1 = 0$ dengan a dan b bilangan bulat memiliki akar-akar bilangan asli. Mungkinkah $a^2 + b^2$ merupakan bilangan prima?

36. Diberikan fungsi kuadrat $P(x) = ax^2 + bx + c$ dimana a, b, dan c bilangan real. Jika
$$P(a) = bc, \quad P(b) = ca, \quad \text{dan} \quad P(c) = ab,$$
buktikan bahwa
$$(a-b)(b-c)(a+b+c) = 0.$$

37. Cari semua bilangan asli a, b, dan c sedemikian sehingga akar-akar dari persamaan

$$\begin{cases} x^2 - 2ax + b = 0 \\ x^2 - 2bx + c = 0 \\ x^2 - 2cx + a = 0 \end{cases}$$

semuanya juga merupakan bilangan asli.

38. Apakah terdapat fungsi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga f dan g memenuhi

$$(f \circ g)(x) = x^2 \quad \text{dan} \quad (g \circ f)(x) = x^4$$

untuk setiap bilangan real x?

39. Untuk sebarang bilangan real α, notasi $\lfloor \alpha \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan α, sedangkan $\lceil \alpha \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan α. Tentukan semua solusi bilangan real persamaan $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2021$.

40. Misalkan $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dan asumsikan fungsi kuadrat

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

memiliki akar irasional r. Misalkan juga $u = \dfrac{p}{q}$ bilangan rasional sedemikian sehingga $|u - r| < 1$. Buktikan bahwa

$$\frac{1}{q^2} \le |f(u)| \le K\,|u - r|\,.$$

41. Danu dan Dini sedang bermain suatu permainan. Pada awalnya, Danu memilih tiga bilangan real taknol. Dini kemudian menyusun ketiga bilangan tadi sebagai koefisien persamaan kuadrat

$$\_x^2 + \_x + \_ = 0.$$

Danu memenangkan permainan jika dan hanya jika persamaan yang dihasilkan memiliki dua solusi rasional berbeda.

Siapakah yang memiliki strategi untuk menang?

42. * Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = x^2 + px + q$ dengan p dan q merupakan bilangan bulat. Misalkan a, b, dan c bilangan bulat berbeda sehingga 2^{2020} habis membagi $f(a)$, $f(b)$, dan $f(c)$, tetapi 2^{100} tidak habis membagi $b - a$ dan juga tidak habis membagi $c - a$. Tunjukkan bahwa 2^{1021} habis membagi $b - c$.

43. * Jika a dan b bilangan real sedemikian sehingga persamaan

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

mempunyai minimal satu penyelesaian real, tentukanlah nilai minimum dari $a^2 + b^2$.

44. * Di papan tulis terdapat fungsi kuadrat $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Otto dan Gian bermain menggunakan papan tulis tersebut. Pertama, Otto menuliskan satu buah bilangan real positif di papan. Lalu, Gian melakukan hal yang sama. Kemudian, Otto menuliskan

bilangan real positif ketiga. Sekarang, Gian menang jika Gian dapat mengubah A, B, C menjadi ketiga bilangan yang baru saja ditulis sehingga fungsi kuadrat ini punya akar real. Apakah Gian bisa memastikan kemenangannya? Contohnya, jika Otto menulis 2, Gian menulis 3, lalu Otto menulis 6, Gian menang karena $3x^2 + 6x + 2$ punya akar real.

45. * Misalkan $f(x) = ax^2 + bx + c$, dimana b dan c bilangan real, dan misalkan $M = \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| < 1\}$. Jelas bahwa himpunan M kosong atau terdiri dari beberapa interval buka yang saling lepas. Notasikan jumlah panjang semua intervalnya adalah $[M]$ Buktikan bahwa $[M] \leq 2\sqrt{2}$.

46. * Misalkan m dan n bilangan asli. Jika ada tak berhingga banyaknya bilangan bulat k sedemikian sehingga $k^2 + 2kn + m^2$ merupakan bilangan kuadrat sempurna, buktikan bahwa $m = n$.

47. * Asumsikan a, b, c, A, B, C semuanya bilangan real dengan $a \neq 0$ dan $A \neq 0$ sedemikian sehingga
$$\left|ax^2 + bx + c\right| \leq \left|Ax^2 + Bx + C\right|$$
untuk setiap bilangan real x. Buktikan bahwa
$$\left|b^2 - 4ac\right| \leq \left|B^2 - 4AC\right|.$$

48. * Misalkan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah x_1 dan x_2. Buktikan bahwa jika $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, maka
$$\max\{x_1, x_2\} \leq \frac{\max\{|a|, |b|, |c|\}}{|a|} \times \phi.$$

49. * Diberikan sebarang fungsi kuadrat $P(x)$. Jika $P(x)$ definit positif, Apakah $P(x)$ selalu dapat dinyatakan sebagai jumlah tiga fungsi kuadrat
$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x)$$
dengan $P_1(x)$, $P_2(x)$, dan $P_3(x)$ memiliki koefisien utama positif dan diskriminan nol serta akar (real kembar) dari ketiga fungsi kuadrat tersebut berbeda?

50. ** Tentukan semua fungsi kuadrat dengan koefisien bulat $P(x)$ sehingga untuk setiap bilangan asli a, b, dan c yang merupakan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku, berlaku $P(a)$, $P(b)$, dan $P(c)$ juga merupakan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku.

    Catatan: Jika c sisi miring, $P(c)$ tidak harus merupakan sisi miring.

51. ** Misalkan $\lfloor x \rfloor$ dinotasikan sebagai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x. Apakah terdapat fungsi kuadrat $f(x)$ yang memenuhi $f(\lfloor x \rfloor) = \lfloor f(x) \rfloor$?

52. ** Pada suatu permainan Andi dan komputer melangkah secara bergantian. Awalnya komputer menampilkan suatu polinom $x^2 + mx + n$ dengan $m, n \in \mathbb{Z}$ yang tidak memiliki akar real. Andi kemudian memulai permainan tersebut. Pada setiap gilirannya, Andi mengganti polinom $x^2 + ax + b$ yang muncul di layar dengan salah satu dari

$x^2 + (a+b)\,x + b$ atau $x^2 + ax + (a+b)$. Andi hanya boleh memilih polinom pengganti yang akar-akarnya real. Sedangkan komputer pada setiap gilirannya menukar koefisien x dan konstanta dari polinom yang dipilih Andi. Andi akan kalah jika dia tidak bisa melakukan langkahnya. Tentukan semua pasangan (m, n) agar Andi pasti kalah.

53. *** Misalkan a dan b bilangan bulat positif sedemikian sehingga $ab+1$ membagi a^2+b^2. Apakah $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ selalu merupakan kuadrat dari suatu bilangan bulat?

54. *** Misalkan a dan b bilangan bulat positif sedemikian sehingga $4ab-1$ membagi $(4a^2-1)^2$. Buktikan bahwa $a = b$.

B. Pertidaksamaan

1. Jika $1 < a < 2$, maka tentukan semua nilai x yang memenuhi pertidaksamaan
$$\frac{-x^2+2ax-6}{x^2+3x} \leq 0.$$
2. Tentukan semua nilai a agar pertidaksamaan
$$\sqrt{2x^2-x+14} \geq \sqrt{x^2-ax+10}$$
bernilai benar untuk semua bilangan real x.
3. Tentukan luas daerah pada bidang koordinat yang memenuhi $|x|+|y| \leq 2$.
4. Tentukan himpunan penyelesaian x yang memenuhi pertidaksamaan
$$4-3x \leq x^2-4x \leq 2+6x \leq 5.$$
5. Tentukan himpunan semua bilangan real x yang bukan merupakan penyelesaian dari
$$\frac{1}{x+1} < 1+\sqrt{x^2}.$$
6. Jika a dan b bilangan real positif, buktikan bahwa
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$
dengan kesamaan tercapai jika dan hanya jika $a = b$.
7. Himpunan S beranggotakan semua bilangan bulat tak negatif x yang memenuhi
$$\frac{x^2-2ax+a^2}{x^2-3x-4} < 0.$$
Berapakah nilai a sehingga hasil penjumlahan semua anggota S minimum?
8. Tentukan semua nilai k sehingga pertidaksamaan
$$0 < \frac{x^2+kx+1}{x^2+x+1} < 2$$
bernilai benar untuk setiap bilangan real x.
9. Misalkan k bilangan real sedemikian sehingga pertidaksamaan
$$\sqrt{x-3}+\sqrt{6-x} \geq k$$
mempunyai solusi real x. Tentukan nilai maksimum untuk k.
10. Tentukan nilai p sehingga pertidaksamaan $3x-p > \dfrac{x-1}{5}+\dfrac{px}{2}$ dipenuhi oleh $x < -3$.
11. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $x^4+\dfrac{1}{x^4} \leq 2$.

12. Misalkan $p = 2x - 1 + (1-2x)^2 + (2x-1)^3 + (1-2x)^4 + \cdots$. Tentukan semua nilai x yang memenuhi $p < 2$.

13. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan
$$|3 - |x-3|| \leq 3 - 2\sqrt{x}.$$

14. Jika nilai maksimum $x+y$ pada himpunan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+3y \leq 6, 3x+y \leq a\}$ adalah 4, tentukanlah nilai a.

15. Cari semua bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan
$$\sqrt{\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}} > \frac{1}{2}$$

16. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan
$$|x+1| + \left|\frac{19}{x-1}\right| \leq \frac{20-x^2}{1-x}.$$

17. * Fungsi bernilai real $f(x)$ dan $g(x)$ masing-masing didefinisikan sebagai
$$f(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor - a} \quad \text{dan} \quad g(x) = \sqrt{x^2 - \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a}}}$$
dengan a bilangan bulat positif. Diketahui $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Jika domain $(g \circ f)(x)$ adalah $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{7}{2} \leq x < 4\right\}$, tentukanlah banyaknya nilai a yang memenuhi.

18. * Carilah semua bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan
$$\frac{x^2-21}{x^2-20} + \frac{x^2+22}{x^2+21} \geq \frac{x^2-22}{x^2-21} + \frac{x^2+21}{x^2+20}.$$

19. * Diketahui n bilangan real $x_1, x_2, \ldots, x_n$ memenuhi $|x_i| < 1$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ dan
$$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = 2021 + |x_1 + x_2 + \cdots + x_n|.$$
Tentukanlah nilai minimum dari n.

20. * Untuk sebarang bilangan real x, definisikan $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Tentukan banyaknya bilangan asli $n \leq 1.000.000$ sehingga
$$\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor < \frac{1}{2021}.$$

21. * Misalkan M dan m berturut-turut merupakan nilai a terbesar dan nilai a terkecil sedemikian sehingga berlaku
$$\left|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}\right| \leq 1$$
untuk setiap $x \in [0,1]$. Tentukan nilai dari $M - m$.

22. ** Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan

$$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2} < 2x + 9.$$

23. ** Misalkan a, b, dan c adalah bilangan-bilangan real yang nilai mutlaknya tidak lebih besar dari 1. Buktikan bahwa

$$\sqrt{|a-b|} + \sqrt{|b-c|} + \sqrt{|c-a|} \leq 2 + \sqrt{2}.$$

C. Eksponen dan Logaritma

1. Tentukan kali semua nilai x yang memenuhi persamaan ${}^{3}\log\left(x^{2+{}^{3}\log(x)}\right) = 15$.
2. Jika $A^{2x} = 2$, maka tentukan nilai dari $\dfrac{A^{5x} - A^{-5x}}{A^{3x} + A^{-3x}}$.
3. Tentukan jumlah semua bilangan bulat positif yang memenuhi $x^{\sqrt{x}} > \left(\sqrt{x}\right)^{x}$.
4. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari $25^{2x} - 5^{2x+1} - 2 \cdot 5^{2x+3} + a = 0$, dimana $x_1 + x_2 = {}^{25}\log 2$, maka tentukanlah nilai dari a.
5. Diketahui x dan y bilangan real dengan $x > 1$ dan $y > 0$. Jika
$$xy = x^{y} \quad \text{dan} \quad \frac{x}{y} = x^{5y},$$
maka tentukan nilai dari $x^2 + 3y$.
6. Tentukan hasil perkalian dari nilai-nilai x yang memenuhi
$$\frac{x^2}{10000} = \frac{10000}{x^{2\log(x)-8}}.$$
7. Untuk setiap bilangan real positif a, tentukan nilai dari
$$\frac{1}{a^{-2021}+1} + \frac{1}{a^{-2020}+1} + \cdots + \frac{1}{a^{2020}+1} + \frac{1}{a^{2021}+1}.$$
8. Tentukan nilai dari $\dfrac{1}{1 + x^{b-a} + x^{c-a}} + \dfrac{1}{1 + x^{a-b} + x^{c-b}} + \dfrac{1}{1 + x^{b-c} + x^{a-c}}$.
9. Tentukan nilai dari $\left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{b+c-a} \cdot \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{c+a-b} \cdot \left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{a+b-c}$.
10. Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari fungsi $f(x) = (-1)^{x}$.
11. Tentukan semua bilangan real x yang merupakan solusi dari persamaan
$$3^{\frac{1}{2} + {}^{3}\log(\cos(x) - \sin(x))} + 2^{{}^{2}\log(\cos(x) + \sin(x))} = \sqrt{2}.$$
12. Tentukan nilai dari $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} - \sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$.
13. Tentukan nilai dari $\displaystyle\sum_{n=1}^{2020^{2^{2021}}-1} \left(\prod_{m=1}^{2021} \left(\sqrt[2^m]{n} + \sqrt[2^m]{n+1}\right)\right)^{-1}$.
14. Diketahui $f(n) = {}^{2}\log 3 \cdot {}^{2}\log 4 \cdot {}^{2}\log 5 \cdots {}^{n-1}\log n$.
    (a) Tentukanlah nilai dari
    $$\sum_{k=2}^{2021} f\left(2^k\right).$$
    (b) Jika a_1 dan a_2 penyelesaian persamaan $f(a) + f(a^2) + \cdots + f(a^9) = f(a)\,f(a^5)$, maka tentukan nilai dari $a_1 a_2$.

15. Misalkan x dan y bilangan bulat positif dan

$$A = \sqrt{\log(x)}, \quad B = \sqrt{\log(y)},$$
$$C = \log(\sqrt{x}), \quad D = \log\left(\sqrt{y}\right).$$

Jika diketahui bahwa A, B, C, dan D semuanya bulat dan $A+B+C+D=8$, maka tentukan nilai dari xy.

16. Misalkan $x, y, z > 1$ dan $w > 0$. Jika ${}^{x}\log(w) = 4$, ${}^{y}\log(w) = 5$, dan ${}^{xyz}\log(w) = 2$, maka tentukanlah nilai dari ${}^{z}\log(w)$.

17. Terdapat dua kesalahan pada tabel logaritma dibawah.

$\log 0{,}021$	$2a+b+c-3$
$\log 0{,}27$	$6a-3b-2$
$\log 1{,}5$	$3a-b+c$
$\log 2{,}8$	$1-2a+2b-c$
$\log 3$	$2a-b$
$\log 5$	$a+c$
$\log 6$	$1+a-b-c$
$\log 7$	$2\,(a+c)$
$\log 8$	$3-3a-3c$
$\log 9$	$4a-2b$
$\log 14$	$1-a+2b$

Benarkanlah kesalahan tersebut.

18. Untuk setiap bilangan real taknegatif x, buktikan bahwa ${}^{4}\log(4^x+1) > {}^{9}\log(9^x+2^x)$.

19. Diberikan persamaan kuadrat $x^2+ax-a+3=0$ dengan $a \in \mathbb{R}$. Agar $y = {}^{\frac{x}{2}}\log 2021$ bernilai real, tentukan semua nilai a yang memenuhi.

20. Misalkan a, b, c, d, e adalah bilangan-bilangan bulat sedemikian sehingga $2^a 3^b 4^c 5^d 6^e$ juga merupakan bilangan bulat. Diketahui bahwa nilai mutlak dari a, b, c, d, e tidak lebih dari 2021. Tentukan nilai terkecil yang mungkin dari $a+b+c+d+e$.

21. Bentuk logaritma $\sqrt{{}^{2}\log 6 + {}^{3}\log 6}$ dapat ditulis menjadi $\sqrt{{}^{a}\log b} + \sqrt{{}^{c}\log d}$. Tentukan jumlah semua nilai $abcd$ yang mungkin.

22. Cari semua bilangan real x yang memenuhi

$$\frac{8^x+27^x}{12^x+18^x} = \frac{7}{6}.$$

23. Diketahui n merupakan bilangan asli. Jika himpunan penyelesaian dari

$$\sqrt[n]{x^{x^2}} \le x^{\sqrt[n]{x^2}}$$

adalah $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 < x \le \sqrt[5]{216}\right\}$, maka tentukanlah nilai n.

24. Tentukan semua pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2.$$

25. Cari semua bilangan real x yang memenuhi

$$20^x + 21^x + 22^x = 23^x + 24^x.$$

26. Diberikan $3\,{}^{x}\log(3y) = 3\,{}^{3x}\log(27z) = {}^{3xy}\log(81yz) \neq 0$ untuk setiap bilangan real positif x, y, dan z. Tentukan nilai dari x^5y^4z.

27. Misalkan $f(x) = \dfrac{2}{4^x + 2}$ untuk setiap bilangan real x. Carilah nilai dari

$$f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + \cdots + f\left(\frac{2019}{2021}\right) + f\left(\frac{2020}{2021}\right).$$

28. Cari semua bilangan real x yang memenuhi persamaan

$$2^x + 3^x - 4^x + 6^x - 9^x = 1.$$

29. Tentukan semua pasangan bilangan asli (m, n) yang memenuhi persamaan

$$3^m = 10 - {}^2\log n.$$

30. Buktikan bahwa

$$16 < \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}} < 17.$$

31. Misalkan $0 < a < 1$. Cari semua bilangan real positif x sedemikian sehingga $x^{a^x} = a^{x^a}$.

32. Cari semua bilangan real x yang memenuhi persamaan

$$2\left(2^x - 1\right)x^2 + \left(2^{x^2} - 2\right)x = 2^{x+1} - 2.$$

33. * Misalkan a bilangan irasional. Misalkan juga n bilangan bulat yang lebih besar daripada 1. Buktikan bahwa

$$\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(a - \sqrt{a^2 - 1}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

34. * Cari semua solusi real x yang memenuhi persamaan

$$2^x + 3^x + 6^x = x^2.$$

35. * Cari semua tripel bilangan rasional (a, b, c) sedemikian sehingga

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

36. * Untuk bilangan real x, simbol $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar daripada x dan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang tidak lebih kecil daripada x. Tentukan semua bilangan bulat tak negatif k sedemikian sehingga dapat ditemukan bilangan real positif tak bulat x yang memenuhi

$$\lfloor x + k \rfloor^{\lfloor x+k \rfloor} = \lceil x \rceil^{\lfloor x \rfloor} + \lfloor x \rfloor^{\lceil x \rceil}.$$

37. * Diketahui $p_0 = 1$ dan p_i bilangan prima ke-i, untuk $i = 1, 2, \ldots$; yaitu $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots$. Bilangan prima p_i dikatakan *sederhana* jika

$$p_i^{n^2} > p_{i-1}\,(n!)^4$$

untuk semua bilangan bulat positif n. Tentukan semua bilangan prima yang sederhana.

38. ** Bilangan real a, b, c, d memenuhi $a \geq b \geq c \geq d > 0$ dan $a+b+c+d = 1$. Buktikan bahwa

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a b^b c^c d^d < 1.$$

39. ** Untuk setiap bilangan real x, $\lfloor x \rfloor$ dinotasikan sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Diberikan barisan $(u_n)_{n\geq 0}$ yang memenuhi $u_{n+1} = u_n\left(u_{n-1}^2 - 2\right)$ untuk setiap bilangan bulat positif n. Jika $u_0 = 2$ dan $u_1 = \dfrac{5}{2}$, buktikan bahwa

$$3 \cdot {}^2\log(\lfloor u_n \rfloor) = 2^n - (-1)^n\,.$$