Demostración Simpson 3/8

Angie Chiquillo, Santiago Guataquira

September 2023

Para demostrar la formula de Simpson 3/8 se parte del hecho de que se tiene que dividir el intervalos en subintervalos con distancia h, igual para cada intervalo y 4 puntos a escoger. Al ser cuatro puntos estos generaran 3 divisiones por lo que se busca hacer una aproximación con un polinomio de grado 3. Este polinomio se puede expresar como una sumatoria de los f(x) por los polinomios de Lagrange, quedando de la siguiente manera

$$\int_{x0}^{x3} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_3} \sum_{i=0}^{3} f(x_k)L(x_k) \tag{1}$$

por ende la integral en terminos de los polinomios de lagrange quedaría

$$f(x_0)\int_{x_0}^{x_3} L_0 dx + f(x_1)\int_{x_0}^{x_3} L_1 dx + f(x_2)\int_{x_0}^{x_3} L_2 dx + f(x_3)\int_{x_0}^{x_3} L_3 dx \tag{2}$$

Ahora debemos enontrar el polinomio de Lagrange debemos enontrar los polinomios de lagrange desde L_0 hasta L_3. Estos polinomios son

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \tag{3}$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \tag{4}$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \tag{5}$$

$$L_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \tag{6}$$

Estas ecucaiones las podemos simplificar al recordar que los intervalos presentan una distnacia h entre puntos por ende las ecuiones se pueden reescribir de la siguienten manera

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{-6h^3} \tag{7}$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{2h^3} \tag{8}$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{-2h^3} \tag{9}$$

$$L_3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6h^3} \tag{10}$$

Ahora lo que vamos a hacer es un cambio de variable, todo esto con el fin de fácilitar los calculos que se van a hacer a continuación. Para realizar este cambio de variable vamos a partir del hecho de que cualquier x_n se puede escribir como x_0+th donde h es la distancia del intervalo y te es una variable. Asumiendo esto podemos reescribir las diferencias de los denominadores de la siguiente manera

$$x - x_0 = th \tag{11}$$

$$x - x_1 = h(t-1) \tag{12}$$

$$x - x_2 = h(t-2) \tag{13}$$

$$x - x_3 = h(t-3) \tag{14}$$

Usando estas equivalencias, reemplazando en las ecuaciones (7,8,9,10) y simplificando obtenemos las siguientes ecuaciones

$$L_0 = \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{-6} \tag{15}$$

$$L_1 = \frac{t(t-2)(t-3)}{2} \tag{16}$$

$$L_2 = \frac{t(t-1)(t-3)}{-2} \tag{17}$$

$$L_3 = \frac{t(t-1)(t-2)}{6} \tag{18}$$

Este cambio de variables tambien nos ayuda a encontrar los limites de integración. Sabemos que la integral se va a evaluar de x_0 a x_3, anterior mente habiamos dicho que cualquier x_n se puede escribir como $x_0 + th$, entonces tenemos que $x_0 = x_0 + th$ por ende t=0 y por otro lado tenemos que $x_3 = x_0 + th$ y que $x_3 - x_0$ se puede escribir como $3h$ por ende tenemos que t=3 así que los indices de integración serán (0,3). Asi mismo podemos podemos reemplazar dx por h dt. Una vez enontrados tanto los limites de integración como el dt y con lo hecho anteriormente podemos reescribir la formula 2 de la siguiente manera

$$-\frac{f(x_0)h}{6}\int_0^3 (t-1)(t-2)(t-3)dt + \frac{f(x_1)h}{2}\int_0^3 t(t-2)(t-3)dt$$
$$-\frac{f(x_2)h}{2}\int_0^3 t(t-1)(t-3)dt + \frac{f(x_0)h}{6}\int_0^3 t(t-1)(t-2)dt$$

Esta integral si bien es larga se puede resolver ya que se cuenta con los limites de integración. Una vez se resuelve nos queda la siguiente expresión

$$f(x_0)\frac{3h}{8} + f(x_1)\frac{9h}{8} + f(x_2)\frac{9h}{8} + f(x_3)\frac{3h}{8} \tag{19}$$

Finalmente fatorizamos 3h/8 de la formula y nos queda

$$\int_{x0}^{x3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)) \tag{20}$$

Podemos comprobar que efetivamente esta es la formula del metodo de simpson 3/8 por lo que hemos demostrado este metodo