

# Modelos de Merton con procesos de difusión con saltos

ANGIE ELOISA LLANOS<sup>a</sup>

## Resumen

Este estudio explora la aplicación de modelos estocásticos que combinan el movimiento Browniano con procesos de Poisson para modelar el comportamiento del índice MSCI COLCAP. Los mercados financieros, particularmente los emergentes como el colombiano, a menudo presentan movimientos extremos y colas pesadas que las distribuciones normales no capturan adecuadamente. En respuesta, este estudio propone un enfoque de valoración de opciones que incluye dos metodologías: una con saltos lognormales y otra mediante minimización de la varianza del valor de un portafolio. Se diseña una implementación en Python, donde se valoran opciones europeas de compra sobre el índice MSCI COLCAP, variando parámetros como la tasa de interés libre de riesgo, la intensidad de los saltos ( $\lambda$ ), y diferentes precios de ejercicio. Este análisis permitirá una comparación detallada de cómo cada parámetro influencia el precio de la opción, proveyendo una herramienta robusta para la gestión de riesgos financieros.

**Palabras clave:** MSCI COLCAP, Modelo de Merton, Movimiento Browniano, Proceso de Poisson, Opciones Europeas, Valoración de Opciones..

---

## 1. Introducción

Los modelos financieros tradicionales a menudo implementan el movimiento Browniano para modelar la evolución continua y aleatoria de los precios de los activos. Sin embargo, en la práctica, los rendimientos de los activos raramente se distribuyen normal, especialmente en mercados con alta volatilidad y movimientos bruscos.

Para abordar estas limitaciones, este estudio introduce un modelo avanzado de valoración de opciones que integra procesos de Poisson, adecuados para capturar las fluctuaciones extremas no predichas por modelos puramente basados en movimiento Browniano.

Al centrarse en el índice MSCI COLCAP, este modelo no solo intenta capturar las anomalías estadísticas de los mercados emergentes, sino que también examina la eficacia de diferentes metodologías de modelado en la valoración de opciones.

El estudio comparará la valoración de opciones utilizando dos enfoques: el primero modela los saltos mediante variables aleatorias lognormal multiplicativas idénticamente distribuidas y el precio de la opción se calcula como la media de los precios de opciones que cubren saltos secuenciales del activo subyacente. En el segundo, el precio de la opción se determina mediante la minimización de la varianza del valor de un portafolio que contiene acciones cuyo precio puede saltar y opciones sobre la misma acción. Este análisis exhaustivo pretende mejorar la comprensión y el manejo del riesgo en entornos volátiles, proporcionando una base sólida para la toma de decisiones financieras.

---

<sup>a</sup>. E-mail: aellanos@unal.edu.co

## 2. Objetivo general:

Diseñar la valoración de una opción call europea sobre el índice MSCI COLCAP con una madurez de 1 año, utilizando modelos de Merton estocásticos que consideran tanto movimientos continuos como discontinuidades en forma de saltos.

### 2.1. Objetivos específicos:

- Obtener y analizar datos históricos del índice MSCI COLCAP para demostrar que sus retornos no se distribuyen normalmente y presentan evidencia de saltos, que pueden ser adecuadamente modelados con una distribución de Poisson.
- Implementar dos metodologías de valoración de opciones: una utilizando variables aleatorias para modelar el tamaño del salto, asumiendo una distribución lognormal y otra por minimización de la varianza.
- Generar tablas comparativas que muestren los precios de las opciones calculados bajo diferentes tasas de interés libre de riesgo, diferentes lambdas (intensidades de salto) y diferentes precios de ejercicio, para ilustrar cómo estos parámetros afectan la valoración de las opciones.

## 3. Metodología

### 3.1. Valoración de Opciones sobre el índice MSCI COLCAP

Esta valoración requiere un modelo que capture las características únicas del mercado colombiano, incluyendo la presencia de saltos y movimientos extremos en los precios, como se muestra en la figura 1.

### 3.2. El lema de Itô para procesos de difusión con saltos de Poisson

El lema de Itô para procesos de difusión con saltos se puede establecer como sigue. Dada la ecuación diferencial estocástica lineal homogénea

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t + \nu dN_t) \quad (1)$$

con  $dN_t$  un proceso estocástico tal que:

$$dN_t = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \lambda dt + o(dt), \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - \lambda dt + o(dt), \end{cases} \quad \text{donde}$$

o  $(dt)/dt \rightarrow 0$  cuando  $dt \rightarrow 0$ .

y  $c = c(S_t, t)$  una función dos veces diferenciable, con segundas derivadas parciales continuas, entonces la diferencial estocástica de  $c(S_t, t)$  está dada por

$$dc = \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t + [c(S_t(1 + \nu), t) - c(S_t, t)] dN_t. \quad (2)$$

Por ejemplo, si  $S_t$  cumple con (1), entonces el rendimiento logarítmico satisface

$$d(\ln S_t) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t + \ln(1 + \nu) dN_t, \quad (3)$$

y, en este caso,

$$S_t = S_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \int_0^t dW_u + \ln(1 + \nu) \int_0^t dN_u \right). \quad (4)$$

De lo anterior, se desprende que el rendimiento logarítmico,  $d \ln(S_t)$ , puede tomar valores positivos y negativos, y el nivel en el precio,  $S_t$ , se mantiene siempre positivo.

### 3.3. Un portafolio con subyacentes que presentan saltos de Poisson

Se analiza la valoración de una opción europea sobre una acción sin dividendos, cuya dinámica está influida por un proceso mixto de difusión con saltos y flujos de información específica. El valor del portafolio en el tiempo  $t$ , que incluye  $\alpha_1$  acciones sin dividendos y  $\alpha_2$  opciones, se describe como:

$$\Pi_t = \alpha_1 S_t + \alpha_2 c(S_t, t) \quad (5)$$

donde  $S_t$  representa el precio del activo subyacente y  $c(S_t, t)$  es el valor de la opción. Los cambios en el valor del portafolio debido a las fluctuaciones del mercado se expresan mediante:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \alpha_1 dS_t + \alpha_2 dc(S_t, t) \\ &= \alpha_1 (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + \nu S_t dN_t) \\ &\quad + \alpha_2 \left[ \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} dW_t \right] \\ &\quad + \alpha_2 [c(S_t(1 + \nu), t) - c(S_t, t)] dN_t. \end{aligned} \quad (6)$$

Reorganizando términos, se obtiene una fórmula que incorpora los efectos de los saltos en la cobertura y en el valor de las opciones.

### 3.4. Valoración con difusión y saltos de Poisson en el subyacente

Aquí se valúa bajo un conjunto de supuestos sobre la distribución asociada al tamaño del salto. Dada la cobertura Delta,  $\alpha_2 = 1$  y  $\alpha_1 = -\partial c / \partial S_t$  y sustituyendo en (6), se cubre una operación de venta en corto del subyacente con una posición larga sobre una opción de compra. Luego  $\mu$  desaparece y el cambio en el valor del portafolio está dado por:

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = \left( \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \left[ c(S_t(1 + \nu), t) - c(S_t, t) - \nu S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} \right] dN_t, \quad (7)$$

Luego, el cambio en el valor del portafolio no se comporta completamente en forma determinista en el instante  $dt$ , ya que existe la posibilidad de que se presenten saltos con una media esperada por unidad de tiempo igual a  $\lambda$ .

Así, la cobertura Delta no es eficiente para administrar el riesgo por un salto en el precio del subyacente, de  $S_t$  a  $S_t(1 + \nu)$ . Si se toma la esperanza de (7) y se iguala al rendimiento libre de riesgo del valor inicial del portafolio, bajo Delta, con una tasa de interés constante,  $r$ , para todos los plazos, a fin de evitar oportunidades de arbitraje libres de riesgo, es decir,

$$\mathbb{E}[d\Pi_t^{(r)} | S_t] = r \left( c(S_t, t) - \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \right) dt. \quad (8)$$

Por simplicidad  $\mathbb{E}[d\Pi^{(r)}|S_t] = \mathbb{E}[d\Pi^{(r)}]$ . Si, además, se utiliza que  $\mathbb{E}[d\Pi^{(\Delta)}] = \mathbb{E}_\nu[\mathbb{E}[d\Pi^{(\Delta)}]]$ , entonces

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} - r c + \lambda \mathbb{E}_\nu [c(S_t(1+\nu), t)] - \lambda c(S_t, t) - \lambda \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \mathbb{E}_\nu [\nu] = 0, \quad (9)$$

con las condiciones de frontera  $c(0, t) = 0$  y  $c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0)$  donde  $K$  es el precio de ejercicio de la opción.

### 3.5. Fórmula de Merton para valoración de opciones

Una posibilidad para determinar  $c(S_t, t)$ , a partir de (9), consiste en definir una sucesión de variables aleatorias  $Y_n$  que tienen la misma distribución que el producto de  $n$  variables independientes e idénticamente distribuidas a  $\nu + 1$ , definiendo  $Y_0 = 1$ . Es decir, si  $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas a  $\nu$ , se definen:

$$\begin{aligned} Y_0 &= 1 \\ Y_1 &= \nu_1 + 1, \\ Y_2 &= (\nu_1 + 1)(\nu_2 + 1), \\ &\vdots \\ Y_n &= \prod_{k=1}^n (\nu_k + 1), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Así, la solución de la ecuación (9) con las condiciones de frontera, está dada por

$$c(S_t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} (\lambda(T-t))^n}{n!} \mathbb{E}_{Y_n} \left[ c_{BS}(S_t Y_n e^{-\lambda \mathbb{E}_\nu [\nu](T-t)}, t; \sigma^2, r) \right], \quad (10)$$

donde  $c_{BS}(\cdot)$  es la solución básica de Black-Scholes.

### 3.6. Fórmula de Merton para valuación de opciones cuando el tamaño del salto es lognormal

Suponga que  $Y = \ln(X - a) \sim N(\nu, \delta^2)$ ,  $X > a$ , entonces  $X = a + e^Y$ . La función de densidad de  $X$  satisface:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta(x-a)} \exp\left(-\frac{(\ln(x-a)-\nu)^2}{2\delta^2}\right) & \text{si } x > a, \\ 0 & \text{si } x \leq a. \end{cases}$$

En este caso,

$$\begin{aligned} E_X[X] &= a + e^{\nu + \frac{1}{2}\delta^2}, & E_X[\ln(X - a)] &= \nu, \\ \text{Var}_X[X] &= e^{2\nu + \delta^2}(e^{\delta^2} - 1) & \text{y} & \quad \text{Var}_X[\ln(X - a)] = \delta^2. \end{aligned}$$

En el caso particular de que  $\nu$  tenga distribución lognormal con media  $-1 + e^\gamma$ , es decir,

$$1 + E_v[\nu] = e^\gamma, \quad \text{ó} \quad \gamma = \ln(1 + E_v[\nu]),$$

y si

$$\text{Var}_v[\ln(\nu + 1)] = \delta^2,$$

entonces  $Y_n$  se distribuye también lognormal con  $E_{Y_n}[Y_n] = e^{n\gamma} = \exp(n \ln(1 + E_v[\nu]))$  y  $\text{Var}_{Y_n}[\ln(Y_n)] = n\delta^2$ , entonces el precio de la opción está dado por:

$$c(S_t, t; T) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda'(T-t)} \frac{(\lambda'(T-t))^n}{n!} c_{BS}(S_t, t; \sigma_n^2, r_n, T), \quad (11)$$

donde

$$\lambda' = \lambda(1 + E_v[\nu]),$$

$$\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{T-t}$$

y

$$r_n = r - \lambda E_v[\nu] + \frac{n \ln(1 + E_v[\nu])}{T-t},$$

donde, el principio de valoración de una opción, en equilibrio, no se modifica, es decir, la prima de la opción es igual al valor presente del pago esperado. En este caso,

$$d_1^{(n)} = \frac{\ln(S_t/K) - \lambda E_v[\nu](T-t) + n \ln(1 + E_v[\nu]) + r(T-t)}{\sqrt{(\sigma^2 + (n\delta^2/(T-t)))(T-t)}} + \sqrt{(\sigma^2 + (n\delta^2/(T-t)))(T-t)}$$

ya que

$$\text{Var}[\ln(S_T Y_n)] = \text{Var}_{S_T}[\ln(S_T)] + \text{Var}_{Y_n}[\ln(Y_n)] = \sigma^2(T-t) + n\delta^2.$$

Además,

$$d_2^{(n)} = d_1^{(n)} - \sqrt{(\sigma^2 + (n\delta^2/(T-t)))(T-t)}.$$

Esta ecuación (11) permite, para  $n$  suficientemente grande, calcular soluciones aproximadas en forma sencilla.

### 3.7. Cobertura con varianza Mínima

Otra posibilidad para cubrir la difusión y los saltos, a partir de la ecuación (6), tanto como sea posible, es fijar  $\alpha_2 = 1$  (cubrir con una opción el riesgo) y, posteriormente, obtener  $\alpha_1$  (número de acciones) de tal manera que se minimice la varianza del cambio en el valor en el portafolio. En virtud de (6), el cambio en el valor del portafolio tomando en cuenta sólo los factores de riesgo, con  $\alpha_1$  arbitraria, es:

$$d\Pi_t = \frac{\partial c}{\partial t} dt + \left( \alpha_1 + \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \mu S_t dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} dt + \left( \alpha_1 + \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t + [c(S_t(1+v), t) - c(S_t, t) + \alpha_1 v S_t] dN_t$$

La varianza de este cambio, la cual mide el riesgo en el portafolio, está dada por:

$$\text{Var}[d\Pi_t | S_t] = \text{Var}_v[E[d\Pi_t] | v] + E_v[\text{Var}[d\Pi_t] | v] \quad (12)$$

$$= \left( \alpha_1 + \frac{\partial c}{\partial S_t} \right)^2 \sigma^2 S_t^2 dt + \lambda E_v [(c(S_t(1+v), t) - c(S_t, t) + \alpha_1 v S_t)^2] dt, \quad (13)$$

ya que  $(dt)^2 = 0$ . Por simplicidad,  $\text{Var}[d\Pi_t | S_t] = \text{Var}[d\Pi_t]$ . Luego:

$$\frac{\partial \text{Var}[d\Pi_t]}{\partial \alpha_1} = 2 \left( \alpha_1 + \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \sigma^2 S_t^2 dt + 2 S_t \lambda E_v [v(c(S_t(1+v), t) - c(S_t, t) + \alpha_1 v S_t)] dt$$

y

$$\frac{\partial^2 \text{Var}[d\Pi_t]}{\partial \alpha_1^2} = 2 \sigma^2 S_t^2 dt + 2 S_t^2 \lambda E_v [v^2] dt > 0$$

Esta última condición, suficiente, asegura la existencia de un mínimo. Por lo tanto, el valor de  $\alpha_1$  que minimiza (13), el cual se obtiene de  $\partial \text{Var}[d\Pi_t]/\partial \alpha_1 = 0$ , satisface:

$$\alpha_1 = - \frac{\lambda E_v [v(c(S_t(1+v), t) - c(S_t, t))] + \sigma^2 S_t \frac{\partial c}{\partial S_t}}{\lambda S_t E_v[v^2] + \sigma^2 S_t} \quad (14)$$

Si se valúa la opción en términos de la esperanza sobre la mejor estrategia de cobertura. Es decir, si en (6) se sustituye  $\alpha_1$  y se calcula  $E[d\Pi_t]$  para igualarse con el retorno libre de riesgo del portafolio inicial con una tasa de interés constante a todos los plazos, se llega a que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} \left( \mu - \frac{\sigma^2}{\lambda E_v(v^2) + \sigma^2} (\mu + \lambda E_v(v) - r) \right) - rc \\ + \lambda E_v \left[ (c(S_t(1+v), t) - c(S_t, t)) \left( 1 - \frac{v}{\lambda E_v(v^2) + \sigma^2} (\mu + \lambda E_v(v) - r) \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Cuando  $\lambda = 0$ , se obtiene, de nuevo, la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.

Finalmente, Observe, por último, que en el caso extremo cuando no existe difusión, es decir, si  $\sigma = 0$ , entonces  $dS_t = \mu S_t dt + v S_t dN_t$ , y (34.22) se transforma en

$$\text{Var}[d\Pi_t|S_t] = \lambda E_v [(c(S_t(1+v), t) - c(S_t, t) + \alpha_1 v S_t)^2] dt \quad (16)$$

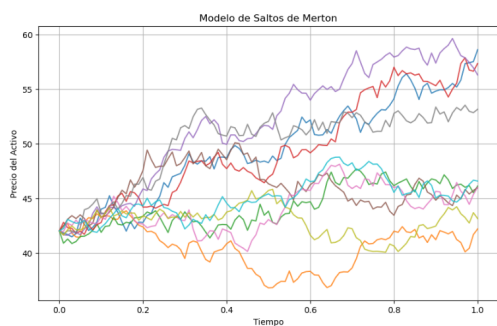
### 3.8. Modelamiento en Python

Anexo a este documento se encuentra el código utilizado y una explicación más detallada del proceso de simulación.

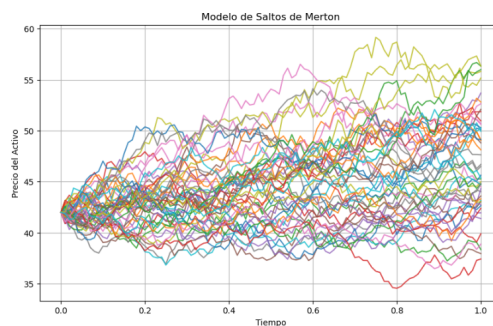
#### 3.8.1. Simulación del Modelo de Saltos de Merton

A continuación se muestra en Python, la simulación de un proceso de Merton de saltos para los siguientes parámetros del modelo de la tabla 34.1 del libro guía, para un total de 10 trayectorias del proceso estocástico:

- $S_0 = 42$  Precio inicial
- $r = 0.11$  Tasa libre de riesgo
- $\sigma = 0.13$  Volatilidad
- $\lambda = 0.1$  Intensidad de los saltos
- $\mu = 0.01$  Media de los saltos
- $\delta = 0.2$  Desviación estándar de los saltos
- $T = 1.0$  Tiempo final
- $N = 100$  Número de pasos en la discretización temporal
- $M = 10$  Número de trayectorias a simular



**Figura 5.** Simulación con  $n = 10$  trayectorias.



**Figura 6.** Simulación con  $n = 50$  trayectorias.

Se observa como a las distintas trayectorias presentan saltos significativos en su comportamiento a lo largo del tiempo, para los distintos números de simulaciones.

### 3.8.2. Aplicación del Modelo de Saltos de Merton

La información corresponde a variaciones de los precios de las empresas más líquidas de BVC condensadas en el índice MSCI COLCAP con historia de 5 años (06/2019 - 06/2024), representando un total de **1219** días de valoración. (fuente: [BVC-MSCI-COLCAP](#)). Se observa:

- \* Estabilidad al rededor de \$1600 entre 06/2019 y 01/2020 aprox., lo cual sugería un periodo de relativa calma en el mercado, sin grandes perturbaciones que afectaran los precios de las acciones que componen el índice.

- \* Caída abrupta de \$1600 a \$900 entre 01/2020 y 04/2020 aprox., lo cual puede atribuirse al impacto de la pandemia de COVID-19, esto debido al pánico entre inversores y la contracción económica.

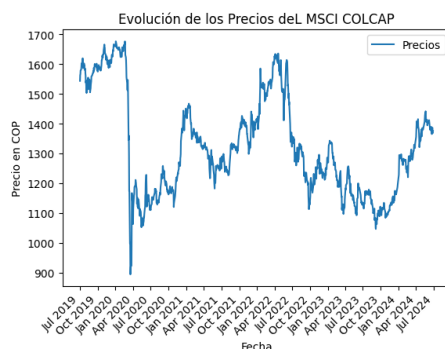
- \* Recuperación de \$1100 a \$1480 entre 04/2020 y 01/2021 aprox., los mercados se adaptan a la nueva realidad, influyendo las medidas de estímulo económico y la reapertura gradual de las economías. Podría estar relacionado con distribución de vacunas, lo que generó optimismo en los mercados.

- \* Media estabilidad entre \$1200 y \$1440 entre 01/2021 y 07/2021 aprox., pausa en la recuperación, posible aparición de variantes y posibles factores económicos y políticos.

- \* Recuperación de \$1200 a \$1600 entre 07/2021 y 04/2022 aprox., mejora en las condiciones económicas, mayor confianza en los mercados.

- \* Caída de \$1600 a \$1050 entre 04/2022 y 10/2023 aprox. con leves intentos de recuperación, pudo ser por factores globales como aumento de la inflación, cambios en políticas monetarias (aumentos en las tasas de interés), o tensiones geopolíticas en los mercados emergentes.

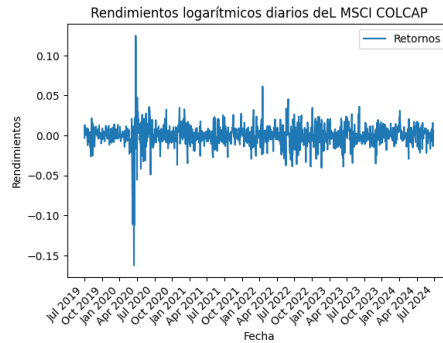
- \* Recuperación creciente de \$1050 a \$1400 entre 10/2023 y 06/2024 aprox., podría estar impulsada por una mejora en a situación económica global, recuperación en precios de materias primas, y mayor confianza en estabilidad política y económica del país.



**Figura 1.** Tendencias de precios en COP, datos del BanRep.

Esto refleja la volatilidad del índice y sus problemas de recuperación, dependiendo de efectos mundiales, políticas gubernamentales y situación económica de las empresas que le componen.

Seguidamente, se observa la serie de los retornos o rendimientos logarítmicos, los cuales generalmente son analizados a partir de modelos de volatilidad GARCH-ARCH. A menudo, se asume que los rendimientos de los índices siguen una distribución lognormal o normal, suponiendo un movimiento geométrico Browniano en los precios de los activos. Sin embargo, los datos empíricos muestran que los rendimientos del índice MSCI COLCAP exhiben un exceso de curtosis y sesgo que no se ajustan a estas distribuciones teóricas simplistas.



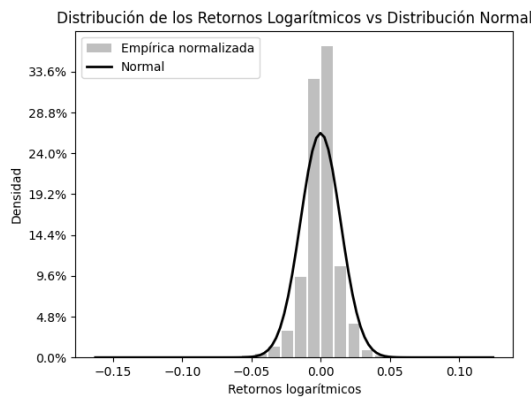
**Figura 2.** Volatilidad diaria y eventos de mercado, 2019-2024.

Los anteriores rendimientos logarítmicos diarios oscilan alrededor de cero con algunos picos significativos en ambas direcciones. Estos picos podrían indicar los días con movimientos de precios anormalmente altos o bajos, posiblemente debidos a noticias del mercado o cambios económicos y la pandemia que fue de alto impacto llegando a rendimientos de  $-15\%$  y  $10\%$ .

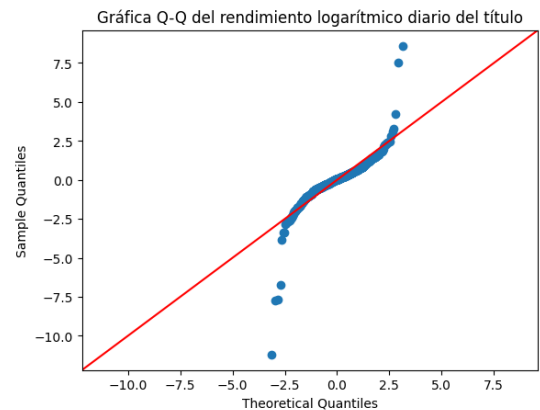
### 3.8.3. Análisis Empírico de Rendimientos

Como complemento, en la Figura 3, la distribución empírica de los retornos logarítmicos revela una curtosis más pronunciada en comparación con la distribución normal teórica, lo que indica un pico más agudo y colas más pesadas. Esta observación sugiere una mayor probabilidad de ocurrencia de eventos extremos, comparada con lo que la distribución normal podría predecir.

La Figura 4, una gráfica Q-Q, proporciona una visualización directa de cómo los datos empíricos se desvían de la línea teórica en los extremos de la distribución. Los puntos que se desplazan lejos de la línea roja indican que los retornos extremos son más probables y más variables que lo que se podría esperar bajo la suposición de normalidad.



**Figura 3.** Comparación con la distribución normal, destacando exceso de curtosis.



**Figura 4.** Desviaciones respecto a la normal, reflejando colas pesadas.



### 3.8.4. Modelamiento Saltos de Merton

Para la valoración de la opción de compra, se utiliza el modelo de saltos de Merton, extendido del modelo Black-Scholes, que incorpora tanto un proceso de difusión continua como saltos discretos para capturar mejor las fluctuaciones extremas en los precios de mercado. La dinámica del índice MSCI COLCAP se modela según la siguiente ecuación estocástica:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t + \nu dN_t) \quad (1)$$

donde:

- $dS_t$ : Representa el cambio diferencial en el precio del índice en el tiempo  $t$ .
- $S_t$ : Es el precio del índice en el tiempo  $t$ .
- $\mu$ : La tasa de retorno esperada del índice.
- $dt$ : El incremento infinitesimal en el tiempo.
- $\sigma$ : La volatilidad de los retornos del índice.
- $dW_t$ : Incremento del movimiento Browniano, que aporta la componente de difusión.
- $\nu$ : La magnitud del salto.
- $dN_t$ : Incremento en el proceso de Poisson que cuenta el número de saltos.

### Estimación de parámetros $\mu$ , $\sigma$ y $\lambda$

Para los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ : Estos se calculan usando datos históricos del índice, excluyendo los días que experimentaron saltos. En este análisis, se consideran la media y la volatilidad de los retornos históricos para proporcionar una aproximación relevante a los últimos 5 años. Se considera que un salto se da cuando está fuera de la franja  $[\mu_t - z\sigma_t, \mu_t + z\sigma_t]$ , donde  $z = 1.4$ , estimado usando prueba de normalidad *Shapiro-Wilk*,  $\mu_t$  y  $\sigma_t$  son la media y la varianza respectivamente de los retornos relativos a todos los días del histórico. Es decir, los valores que no se consideran saltos están en el intervalo:

$$[-0.020431; 0.020237].$$

Por lo tanto, se presentan 112 días con saltos de 1219 en total, para los cuales, veamos los 5 de ellos más altos y los 5 más bajos:

Fecha	Precios	Retornos
2020-03-25	1046.18	0.124697
2020-03-26	1167.04	0.109325
2022-01-17	1522.21	0.061203
2020-04-02	1114.43	0.047220
2022-05-31	1603.23	0.045244

TABLA 1: Saltos más altos

Fecha	Precios	Retornos
2020-03-16	997.78	-0.162903
2020-03-18	894.03	-0.112516
2020-03-09	1344.60	-0.111260
2020-03-12	1174.31	-0.098185
2020-04-01	1063.03	-0.055637

TABLA 2: Saltos más bajos

Salto y  $\lambda$ : Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores para los saltos, se calcula la cantidad media anual de estos saltos para establecer  $\lambda$ .

Fecha	Días con saltos	Mean longitud	desviación
2019-2020	30	0.048628	0.038528
2020-2021	16	0.026652	0.005810
2021-2022	25	0.029805	0.009100
2022-2023	32	0.027509	0.006400
2023-2024	9	0.025448	0.005221

TABLA 3: Resumen de los saltos

La estimación de la intensidad del número de saltos viene dada por los siguientes valores de los datos que superan los umbrales.

Salto Promedio	22.4
Salto Promedio Entero	22
$\lambda$ Promedio	0.088
Magnitud del salto promedio	0.033391
Desviación	0.040191

TABLA 4: Métricas para la frecuencia y magnitud del salto

Rango de  $\nu$ : El valor de  $\nu$  se establece entre  $z$  desviaciones estándar por encima y por debajo de la media, reflejando los movimientos extremos hacia arriba y hacia abajo respectivamente, de la tabla 4 se deduce que el valor  $E_v[\nu] = 0.033391$  y  $Var_v[\nu] = 0.040191$ .

### 1. Parámetros del modelo:

```

S0 = 1376.64      # Precio inicial del índice
T = 1.0           # Tiempo hasta la madurez (en años)
t = 0.0           # Tiempo actual
tau = T - t       # Tiempo de madurez
new_mu = 0.00035  # Tasa de retorno esperada (último año y sin saltos)
new_std = 0.0083  # Volatilidad de los retornos del subyacente (último año y sin saltos)
v_mean = 0.033    # Media de los saltos
v_std = 0.04019   # Desviación estándar de los saltos

# Parámetros variables para medir sensibilidad
lambda_values = [9, 22, 32]      # Tasa de llegada de saltos
K_values = [1400, 1425, 1450]    # Precio de ejercicio
r_values = [0.04, 0.045, 0.05]  # Tasa libre de riesgo

```

### 2. Valoración de las opciones call europeas:

Dado el precio inicial en  $t = 0$  del índice MSCI COLCAP  $S_0 = \$1376.64$ , se generan los precios de la opción call europea que madura en 1 año para diferentes precios de ejercicio o strike ( $K$ ), parámetros lambda ( $\lambda$ ) y tasa libre de riesgo ( $r$ ).

2.1 Usando la teoría desarrollada en 3.6

Strike	Salto	Risk-Free Rate	Merton Option Price	B-S Option Price
1400	9.0	0.040	32.11	31.54
1400	9.0	0.045	38.73	38.24
1400	9.0	0.050	45.33	44.92
1400	22.0	0.040	31.77	31.54
1400	22.0	0.045	38.43	38.24
1400	22.0	0.050	45.07	44.92
1400	32.0	0.040	31.70	31.54
1400	32.0	0.045	38.37	38.24
1400	32.0	0.050	45.02	44.92
1425	9.0	0.040	11.26	9.24
1425	9.0	0.045	16.10	14.29
1425	9.0	0.050	22.06	21.27
1425	22.0	0.040	10.08	9.24
1425	22.0	0.045	15.42	14.29
1425	22.0	0.050	21.62	21.27
1425	32.0	0.040	9.82	9.24
1425	32.0	0.045	15.26	14.29
1425	32.0	0.050	21.51	21.27
1450	9.0	0.040	4.74	0.38
1450	9.0	0.045	5.51	1.28
1450	9.0	0.050	6.90	3.34
1450	22.0	0.040	2.20	0.38
1450	22.0	0.045	3.03	1.28
1450	22.0	0.050	4.79	3.34
1450	32.0	0.040	1.64	0.38
1450	32.0	0.045	2.49	1.28
1450	32.0	0.050	4.34	3.34

TABLA 5: Precios de la opción call europea con T=1.

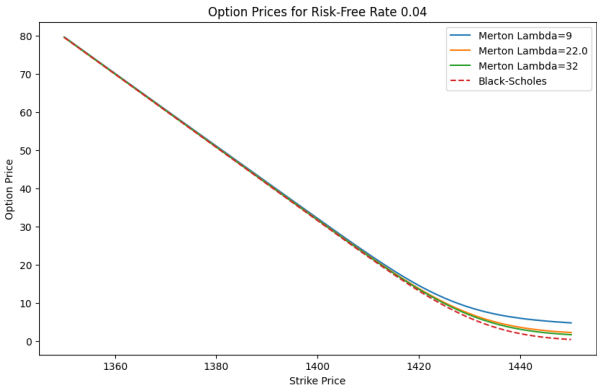


Figura 5. Comportamiento del precio de la opción vs. precio Strike con tasa libre de riesgo 4 %.

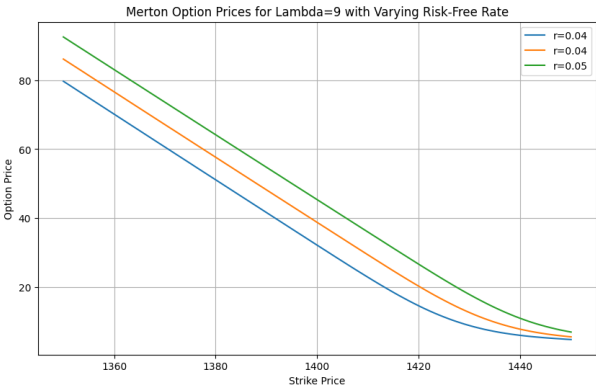


Figura 6. Comportamiento del precio de la opción vs. precio Strike variando la tasa libre de riesgo.

## Conclusiones

### Sensibilidad a los Parámetros:

- A mayor cantidad de saltos, menor el precio de la opción. Esto se debe al aumento del riesgo y la incertidumbre, ya que los saltos representan eventos inesperados que pueden afectar negativamente el valor del activo subyacente.
- A mayor tasa libre de riesgo, menor el precio de la opción. Esto se debe a que el valor presente de los flujos de caja futuros disminuye con una tasa de descuento más alta.
- A mayor precio de ejercicio (strike), menor el precio de la opción, ya que se reduce la probabilidad de que la opción termine "in the money" (es decir, que el precio del activo subyacente sea favorable para el titular de la opción).

### Aplicabilidad de Modelos:

- Los modelos de Merton son más aplicables cuando la frecuencia de los saltos no es tan alta, ya que con una mayor frecuencia, los precios de las opciones tienden a aproximarse más a los predichos por el modelo de Black-Scholes.
- El modelo presenta limitaciones debido que:
  - ◊  $\mu$ ,  $\sigma$  y  $\lambda$  son constantes, restringiendo así su aplicabilidad al asumir que estos parámetros se mantendrán constantes en futuras estimaciones.
  - ◊ No hay costos de transacción, lo cual no refleja la realidad del mercado donde siempre existen ciertos costos asociados a las operaciones.
  - ◊ No hay pagos de dividendos durante el periodo de cobertura, poco realista ya que muchos activos subyacentes generan dividendos que afectan el precio de las opciones.
  - ◊ La tasa de interés libre de riesgo es constante para todos los plazos, lo cual es una simplificación, ya que en la práctica, las tasas de interés pueden variar a lo largo del tiempo y afectar la valoración de las opciones.

## Bibliografía

- Venegas Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos: Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre* (2nd ed.). Cengage Learning Editores.
- Merton Robert, C. (1976) *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous* Journal of financial Economics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.