

Modelos de Merton con procesos de difusión con saltos

Angie LLanos, Arturo Camargo

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Maestría en Actuaría y Finanzas, Derivados de renta variable

4 de Julio, 2024

Introducción

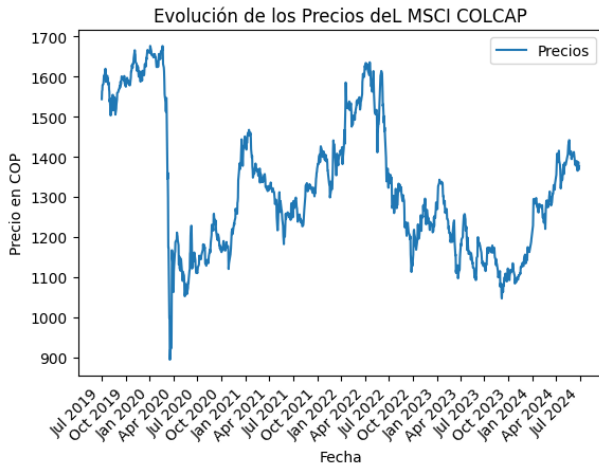


Figura 1. Tendencias de precios en COP, datos del BanRep.

se presentan dos modelos de valuación de opciones

1. El precio de la opción se calcula como la media de los precios de opciones que cubren saltos secuenciales del activo subyacente.
2. El precio de la opción se determina mediante la minimización de la varianza del valor de un portafolio

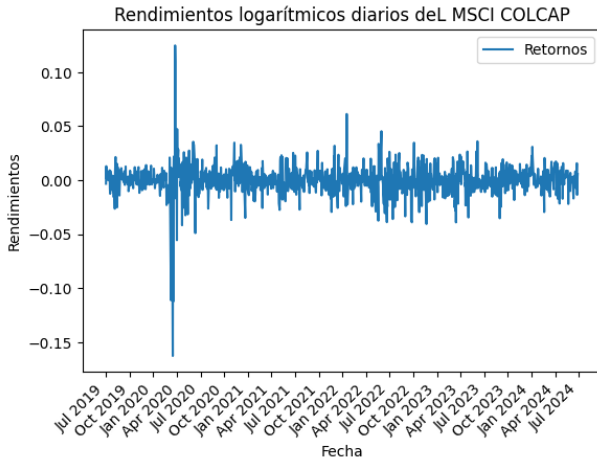


Figura 2. Volatilidad diaria y eventos de mercado, 2019-2024.

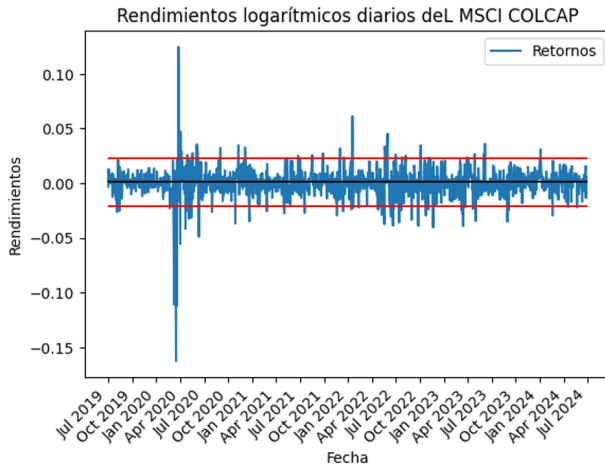


Figura 2. Volatilidad diaria y eventos de mercado, 2019-2024.

Introducción

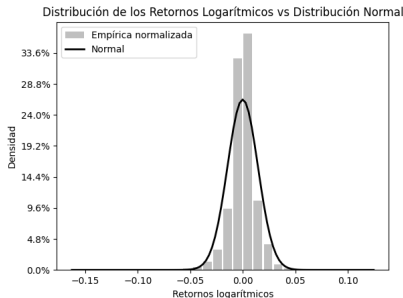


Figura 3. Comparación con la distribución normal, destacando exceso de curtosis.

Prueba de normalidad Shapiro-Wilk con un nivel de significancia $\alpha = 1\%$ el $p - \text{valor} = 1.488e - 35$.

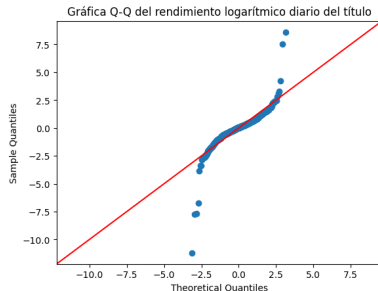


Figura 4. Desviaciones respecto a la normal, reflejando colas pesadas.

Objetivo general

Objetivo general

Diseñar la valoración de una opción call europea sobre el índice MSCI COLCAP con una madurez de 1 año, utilizando modelos de Merton estocásticos que consideran tanto movimientos continuos como discontinuidades en forma de saltos.

Objetivos Especificos

- Obtener y analizar datos históricos del índice MSCI COLCAP para demostrar que sus retornos no se distribuyen normalmente y presentan evidencia de saltos.
- Exponer dos metodologías de valoración de opciones: una utilizando variables aleatorias para modelar el tamaño del salto, asumiendo una distribución lognormal y otra por minimización de la varianza.
- Generar tablas comparativas que muestren los precios de las opciones calculados bajo diferentes tasas de interés libre de riesgo, diferentes lambdas (intensidades de salto) y diferentes precios de ejercicio, para ilustrar cómo estos parámetros afectan la valoración de las opciones.

El lema de Itô para procesos de difusión con saltos de Poisson

Dada la ecuación diferencial estocástica lineal homogénea

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + \nu S_t dN_t, \quad (1)$$

con dN_t un proceso estocástico tal que:

$$dN_t = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \lambda dt + o(dt), \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - \lambda dt + o(dt), \end{cases}.$$

en donde $o(dt)/dt \rightarrow 0$ cuando $dt \rightarrow 0$.

El lema de Itô para procesos de difusión con saltos de Poisson

Ahora, sea $c = c(S_t, t)$ una función dos veces diferenciable, con segundas derivadas parciales continuas, entonces la diferencial estocástica de $c(S_t, t)$ está dada por

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t \\ + [c(S_t(1 + \nu), t) - c(S_t, t)] dN_t. (2)$$

Un portafolio con subyacentes que presentan saltos de Poisson

El valor del portafolio en el tiempo t , que incluye α_1 acciones sin dividendos y α_2 opciones, se describe como:

$$\Pi_t = \alpha_1 S_t + \alpha_2 c(S_t, t) \quad (3)$$

Los cambios en el valor del portafolio debido a las fluctuaciones del mercado se expresan mediante:

$$d\Pi_t = \alpha_1 dS_t + \alpha_2 dc(S_t, t) \quad (4)$$

Valoración con difusión y saltos de Poisson en el subyacente

Dada la cobertura Delta,

$\alpha_2 = 1$, es decir, comprar 1 opción

y

$\alpha_1 = -\partial c / \partial S_t$, es decir, vender α_1 acciones

y sustituyendo en (4), μ desaparece y el cambio en el valor del portafolio está dado por:

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) dt + \left[c(S_t(1 + \nu), t) - c(S_t, t) - \nu S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} \right] dN_t, (5)$$

Valoración con difusión y saltos de Poisson en el subyacente

Si se toma la esperanza de (5) y se iguala al rendimiento libre de riesgo del valor inicial del portafolio, a fin de evitar oportunidades de arbitraje libres de riesgo, es decir,

$$\mathbb{E}[d\Pi^{(r)}|S_t] = r \left(c(S_t, t) - \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \right) dt. \quad (6)$$

Si además, $\mathbb{E}[d\Pi^{(\Delta)}] = \mathbb{E}_\nu[\mathbb{E}[d\Pi^{(\Delta)}]]$, entonces

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} - r c + \lambda \mathbb{E}_\nu [c(S_t(1 + \nu), t)] - \lambda c(S_t, t) - \lambda \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \mathbb{E}_\nu [\nu] = 0, \quad (7)$$

con condiciones de frontera $c(0, t) = 0$ y $c(S_T, T) = \max(S_T - K, 0)$.

Fórmula de Merton para valoración de opciones

Una posibilidad para determinar $c(S_t, t)$, a partir de (7), es definir una sucesión de variables aleatorias Y_n que tienen la misma distribución que el producto de n variables independientes e idénticamente distribuidas a $\nu + 1$, definiendo:

$$Y_0 = 1$$

$$Y_1 = \nu_1 + 1,$$

$$Y_2 = (\nu_1 + 1)(\nu_2 + 1),$$

$$\vdots$$

$$Y_n = \prod_{k=1}^n (\nu_k + 1),$$

$$\vdots$$

Fórmula de Merton para valoración de opciones

Así, la solución de la ecuación (7) con las condiciones de frontera, está dada por

$$c(S_t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(T-t)} (\lambda(T-t))^n}{n!} \mathbb{E}_{Y_n} \left[c_{BS}(S_t Y_n e^{-\lambda \mathbb{E}_v[\nu](T-t)}, t; \sigma^2, r) \right], \quad (8)$$

donde $c_{BS}(\cdot)$ es la solución básica de Black-Scholes.

Fórmula de Merton para valuación de opciones cuando el tamaño del salto es lognormal

Suponga que $Y = \ln(X - a) \sim N(\nu, \delta^2)$, $X > a$, entonces $X = a + e^Y$. La función de densidad de X satisface:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta(x-a)} \exp\left(-\frac{(\ln(x-a)-\nu)^2}{2\delta^2}\right) & \text{si } x > a, \\ 0 & \text{si } x \leq a. \end{cases}$$

En este caso,

$$\begin{aligned} E_X[X] &= a + e^{\nu + \frac{1}{2}\delta^2}, & E_X[\ln(X - a)] &= \nu, \\ \text{Var}_X[X] &= e^{2\nu + \delta^2}(e^{\delta^2} - 1) & \text{y} & \quad \text{Var}_X[\ln(X - a)] = \delta^2. \end{aligned}$$

Fórmula de Merton para valuación de opciones cuando el tamaño del salto es lognormal

En el caso particular de que ν tenga distribución lognormal con media $-1 + e^\gamma$, es decir,

$$1 + E_\nu[\nu] = e^\gamma, \quad \text{ó} \quad \gamma = \ln(1 + E_\nu[\nu]),$$

y si

$$\text{Var}_\nu[\ln(\nu + 1)] = \delta^2,$$

entonces Y_n se distribuye lognormal con $\text{Var}_{Y_n}[\ln(Y_n)] = n\delta^2$ y $E_{Y_n}[Y_n] = e^{n\gamma} = \exp(n \ln(1 + E_\nu[\nu]))$, entonces el precio de la opción está dado por:

$$c(S_t, t; T) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda'(T-t)} \frac{(\lambda'(T-t))^n}{n!} c_{\text{BS}}(S_t, t; \sigma_n^2, r_n, T), \quad (9)$$

donde

$$\lambda' = \lambda(1 + E_\nu[\nu]), \quad \sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{T-t} \quad y$$
$$r_n = r - \lambda E_\nu[\nu] + \frac{n \ln(1 + E_\nu[\nu])}{T-t}$$

Otra posibilidad para cubrir la difusión y los saltos, a partir de la ecuación (4) , tanto como sea posible, es fijar $\alpha_2 = 1$ (cubrir con una opción el riesgo) y, posteriormente, obtener α_1 (número de acciones) de tal manera que se minimice la varianza del cambio en el valor en el portafolio. En virtud de (4) , el cambio en el valor del portafolio tomando en cuenta sólo los factores de riesgo, con α_1 arbitraria, es:

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & \frac{\partial c}{\partial t} dt + \left(\alpha_1 + \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \mu S_t dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} dt \\ & + \left(\alpha_1 + \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t + [c(S_t(1 + \nu), t) - c(S_t, t) + \alpha_1 \nu S_t] dN_t \end{aligned}$$

Cobertura con varianza Mínima

La varianza de este cambio, la cual mide el riesgo en el portafolio, está dada por:

$$\text{Var}[d\Pi_t|S_t] = \text{Var}_v[E[d\Pi_t]|v] + E_v[\text{Var}[d\Pi_t]|v] \quad (10)$$

$$= \left(\alpha_1 + \frac{\partial c}{\partial S_t} \right)^2 \sigma^2 S_t^2 dt + \lambda E_v \left[(c(S_t(1+v), t) - c(S_t, t) + \alpha_1 v S_t)^2 \right] dt, \quad (11)$$

ya que $(dt)^2 = 0$. Por simplicidad, $\text{Var}[d\Pi_t|S_t] = \text{Var}[d\Pi_t]$. Luego:

$$\frac{\partial \text{Var}[d\Pi_t]}{\partial \alpha_1} = 2 \left(\alpha_1 + \frac{\partial c}{\partial S_t} \right) \sigma^2 S_t^2 dt + 2 S_t \lambda E_v [v(c(S_t(1+v), t) - c(S_t, t) + \alpha_1 v S_t)] dt$$

y

$$\frac{\partial^2 \text{Var}[d\Pi_t]}{\partial \alpha_1^2} = 2 \sigma^2 S_t^2 dt + 2 S_t^2 \lambda E_v [v^2] dt > 0$$

Cobertura con varianza Mínima

Esta última condición, suficiente, asegura la existencia de un mínimo. Por lo tanto, el valor de α_1 que minimiza (11), el cual se obtiene de $\partial \text{Var}[d\Pi_t]/\partial \alpha_1 = 0$, satisface:

$$\alpha_1 = - \frac{\lambda E_v [v(c(S_t(1+v), t) - c(S_t, t))] + \sigma^2 S_t \frac{\partial c}{\partial S_t}}{\lambda S_t E_v[v^2] + \sigma^2 S_t} \quad (12)$$

Si se valúa la opción en términos de la esperanza sobre la mejor estrategia de cobertura. Se obtiene:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{\lambda E_v(v^2) + \sigma^2} (\mu + \lambda E_v(v) - r) \right) - rc \quad (13)$$

$$+ \lambda E_v \left[(c(S_t(1+v), t) - c(S_t, t)) \left(1 - \frac{v}{\lambda E_v(v^2) + \sigma^2} (\mu + \lambda E_v(v) - r) \right) \right] = 0 \quad (14)$$

Método	Opciones (α_2)	Acciones (α_1)	Precio opción
1	1	$-\frac{\partial c}{\partial S_t}$	ecu. (9)
2	1	ecu. (12)	ecu. (14)
2	0	0	0
2	1	ecu. (*)	ecu. (**)

Table: Valores de las opciones acorde a la cobertura

$$(*) \quad \alpha_1 = - \frac{E_v [v(c(S_t(1+v), t) - c(S_t, t))]}{S_t E_v[v^2]}$$

$$(**) \quad 0 = \frac{\partial c}{\partial S_t} + \mu S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} - rc + \lambda E_v \left[(c(S_t(1+v), t) - c(S_t, t)) \left(1 - \frac{v}{\lambda E_v(v^2)} (\mu + \lambda E_v(v) - r) \right) \right]$$

Modelamiento en Python

A continuación se muestra en Python, la simulación de un proceso de Merton de saltos para los siguientes parámetros del modelo de la tabla 34.1 del libro guía, para un total de 10 trayectorias del proceso estocástico:

- $S_0 = 42$ Precio inicial
- $r = 0.11$ tasa libre de riesgo
- $\sigma = 0.13$ volatilidad
- $\lambda = 0.1$ intensidad de los saltos
- $\mu = 0.01$ media de los saltos
- $\delta = 0.2$ desviación estándar de los saltos
- $T = 1.0$ tiempo final
- $N = 100$ número de pasos en la discretización temporal
- $M = 10$ número de trayectorias a simular

Simulación y resultados

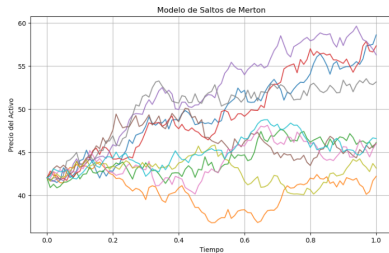


Figura 5. Simulación con $n = 10$ trayectorias.

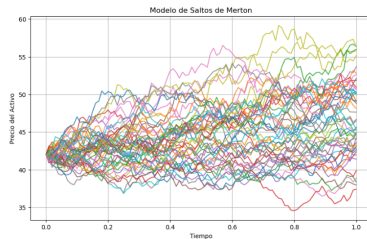


Figura 6. Simulación con $n = 50$ trayectorias.

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t + \nu dN_t) \quad (1)$$

donde:

- dS_t : Representa el cambio diferencial en el precio del índice en el tiempo t .
- S_t : Es el precio del índice en el tiempo t .
- μ : La tasa de retorno esperada del índice.
- dt : El incremento infinitesimal en el tiempo.
- σ : La volatilidad de los retornos del índice.
- dW_t : Incremento del movimiento Browniano, que aporta la componente de difusión.
- ν : La magnitud del salto.
- dN_t : Incremento en el proceso de Poisson que cuenta el número de saltos.

Estimación de parámetros μ , σ y λ

* μ y σ : A partir de históricos del índice, excluyendo los días con saltos.

* **Salto**: valor fuera de la franja

$$[\mu_t - z\sigma_t, \mu_t + z\sigma_t],$$

$z = 1.4$, estimado con prueba de normalidad *Shapiro-Wilk*.

El intervalo para el MSCI COLCAP a 5 años es:

$$[-0.020431; 0.020237].$$

Resultados MSCI COLCAP

Por lo tanto, se presentan 112 días con saltos de 1219 en total, para los cuales, veamos los 5 de ellos más altos y los 5 más bajos:

Fecha	Precios	Retornos
2020-03-25	1046.18	0.124697
2020-03-26	1167.04	0.109325
2022-01-17	1522.21	0.061203
2020-04-02	1114.43	0.047220
2022-05-31	1603.23	0.045244

Table: Saltos más altos

Fecha	Precios	Retornos
2020-03-16	997.78	-0.162903
2020-03-18	894.03	-0.112516
2020-03-09	1344.60	-0.111260
2020-03-12	1174.31	-0.098185
2020-04-01	1063.03	-0.055637

Table: Saltos más bajos

Resultados MSCI COLCAP

Saltos y λ :

Fecha	Días con saltos	Mean longitud	desviación
2019-2020	30	0.048628	0.038528
2020-2021	16	0.026652	0.005810
2021-2022	25	0.029805	0.009100
2022-2023	32	0.027509	0.006400
2023-2024	9	0.025448	0.005221

Table: Resumen de los saltos

Saltos Promedio	22.4
Salto promedio Entero	22
λ Promedio	0.088
Magnitud del Salto promedio	0.033391
Std	0.040191

Table: Métricas para la frecuencia y magnitud del salto

1. Parámetros del modelo:

```
S0 = 1376.64      # Precio inicial del índice
T = 1.0           # Tiempo hasta la madurez (en años)
t = 0.0           # Tiempo actual
tau = T - t       # Tiempo de madurez
new_mu = 0.00035  # Retorno esperado (sin saltos)
new_std = 0.0083  # Volatilidad de los retornos (sin saltos)
v_mean = 0.033    # Media de los saltos
v_std = 0.04019   # Desviación estándar de los saltos

# Parámetros variables para medir sensibilidad
lambda_values = [9, 22, 32]      # Tasa de llegada de saltos
K_values = [1400, 1425, 1450]    # Precio de ejercicio
r_values = [0.04, 0.045, 0.05]  # Tasa libre de riesgo
```

Resultados MSCI COLCAP

Strike	Lambda	Risk-Free Rate	Option Price
1400	9.0	0.040	32.11
1400	9.0	0.045	38.73
1400	9.0	0.050	45.33
1400	22.0	0.040	31.77
1400	22.0	0.045	38.43
1400	22.0	0.050	45.07
1400	32.0	0.040	31.70
1400	32.0	0.045	38.37
1400	32.0	0.050	45.02

Table: Precios de la opción call europea con $T=1$.

Resultados MSCI COLCAP

Strike	Lambda	Risk-Free Rate	Option Price
1425	9.0	0.040	11.26
1425	9.0	0.045	16.10
1425	9.0	0.050	22.06
1425	22.0	0.040	10.08
1425	22.0	0.045	15.42
1425	22.0	0.050	21.62
1425	32.0	0.040	9.82
1425	32.0	0.045	15.26
1425	32.0	0.050	21.51

Table: Precios de la opción call europea con $T=1$.

Resultados MSCI COLCAP

Strike	Lambda	Risk-Free Rate	Option Price
1450	9.0	0.040	4.74
1450	9.0	0.045	5.51
1450	9.0	0.050	6.90
1450	22.0	0.040	2.20
1450	22.0	0.045	3.03
1450	22.0	0.050	4.79
1450	32.0	0.040	1.64
1450	32.0	0.045	2.49
1450	32.0	0.050	4.34

Table: Precios de la opción call europea con $T=1$.

Resultados MSCI COLCAP

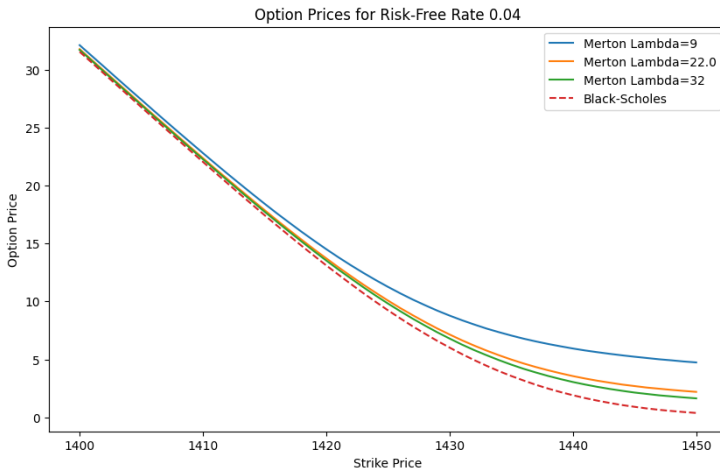


Figura 7. Relación precio de la opción con el Strike K a una tasa libre de riesgo fija en 4%.

Resultados MSCI COLCAP

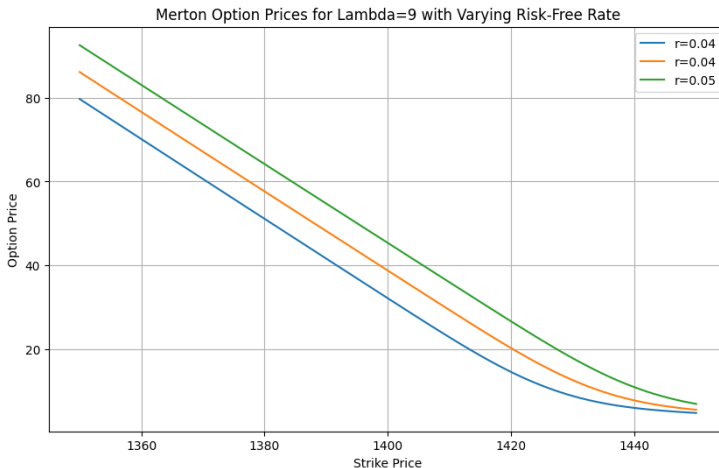


Figura 8. Relación precio de la opción con el Strike K a una tasa libre de riesgo variable.

- Sensibilidad a los Parámetros: El modelo de Merton muestra una mayor **sensibilidad** a los cambios en las **tasas de interés** comparado con el modelo de Black-Scholes.
- Aplicabilidad de Modelos: En entornos donde se **esperan grandes movimientos** de precios (por ejemplo, mercados altamente volátiles o con eventos de noticias significativos).
- Elección del Modelo Adecuado: La elección debería basarse en la naturaleza del activo subyacente y las expectativas del mercado. Si se **esperan saltos o shocks de precios**, el modelo de Merton puede ser más apropiado.

- Venegas Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos: Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre* (2nd ed.). Cengage Learning Editores.
- Merton Robert, C. (1976) *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous* Journal of financial Economics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.
- Fuente de datos: [BVC-MSCI-COLCAP](#)
- Consultar código y documento: [Repositorio](#)