$a = 6, b = 8$

Flutur Angelica - Costela
141

Examen

1. Flutur => $a = 6$
Angelica - Costela => $b = 8$

2. nr. permutări impare de ordin 5 din grupul de permutări S_9

Ordinul unei permutări este cel mai mic multiplu dintre lungimile ciclurilor, dacă ordinul este 5, atunci ciclurile trebuie să aibă lungimile 1 sau 5 și cel puțin unul să fie 5. Suma lungimilor ciclurilor trebuie să fie 9. Asta înseamnă că avem un singur caz:

- 5 1 1 1 1

Asadar, σ rearanjează 9 $(=m)$ elemente și are 5 cicli $(=k)$ în descompunere

$9+5 = 14$. Asadar σ e pară => nu există permutări cu proprietatea cerută.

Flutur Angelica - Costela

4. $8^{14^{6^6}} \equiv ? \pmod{37}$

Observăm că 37 este număr prim $\overset{T.F.}{\Longrightarrow} 8^{36} \equiv 1 \pmod{37}$

Este suficient să determinăm $14^{6^6} \equiv ? \pmod{36}$

$(14, 36) \neq 1$

Vom observa repetițiile lui 14 în $\langle \hat{14} \rangle \subset \mathbb{Z}_{36}$

$\hat{14}^1 = \hat{14}$

$\hat{14}^2 = \hat{16}$

$\hat{14}^3 = \hat{8}$

$\hat{14}^4 = \hat{4}$

$\hat{14}^5 = \hat{20}$

$\hat{14}^6 = \hat{28}$

$\hat{14}^7 = \hat{32}$

$\hat{14}^8 = \hat{16}$

$\vdots$

Este clar că $6^6 \neq 1$; $6^6 = 46656$

Vrem să verificăm $46655 \equiv ? \pmod{6}$

(fără $\hat{14}^1$) 5

Deci $14^{6^6} \equiv ? \pmod{36} \Leftrightarrow 14^{6^6} \equiv 32 \pmod{36}$

$32 \equiv 8 \pmod{12}$

În $\mathbb{Z}_{37}$

$\hat{8}^1 = \hat{8}$

$\hat{8}^2 = \hat{27}$

$\hat{8}^3 = \hat{31}$

$\cancel{\hat{8}^4 = \hat{26}}$

$\hat{8}^4 = \hat{26}$

$\hat{8}^5 = \hat{23}$

$\hat{8}^6 = \hat{36}$

$\hat{8}^7 = \hat{29}$

$\hat{8}^8 = \hat{10}$

$\hat{8}^9 = \hat{6}$

$\hat{8}^{10} = \hat{11}$

$\hat{8}^{11} = \hat{14}$

$\hat{8}^{12} = \hat{1}$

$\hat{8}^{13} = \hat{8}$

$\vdots$

$\Rightarrow 8^{14^{6^6}} \equiv 10 \pmod{37}$

$a=6$, $b=8$

Flutur Angelica - Costela

141

8. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x-2, & x \le -2 \\ -4x-3, & x\in(-2,1) \\ -x^2+4x-9, & x \ge 1 \end{cases}$$

---+

f injectivă pe $(-2, 12]$?

$f^{-1}((-6,8])$

---#

Considerăm $f_3(x)=-x^2+4x-9$ funcție de gradul II, coef. termenului dominant negativ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) \Rightarrow V\left(\frac{-4}{-2}, \frac{-(-20)}{-4}\right) \Rightarrow V(2,-5)$$

Deci pentru $x\in[1,2]$ $f_3(x)$ este strict crescătoare

$f_3(1)=-6$

x	1		2 (x_{max})		3
$f_3(x)$	-6	$\nearrow$	-5	$\searrow$	-6

Dorim să verificăm dacă $\exists\, x_0 \in(-2,1)$ a.î. $f_2(x_0)\in[-6,-5]$

Pp $f_2(x)=-6 \Leftrightarrow -4x-3=-6 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}\in(-2,1)$

Cum $f(1)=f\left(\frac{3}{4}\right)$, dar $1\neq\frac{3}{4} \Rightarrow f$ nu e injectivă pe intervalul $(-2,12]$.

Flutur Angelica - Costela

Trebuie să găsim toți x cu proprietatea că

$f(x) \in (-6, 8]$

• pornim de la $x_3 \in [1, +\infty)$, $f_3(x) = -x^2+4x-9$.
punctul de maxim al funcției îl reprezintă vârful parabolei $V(2,-5) \Rightarrow y_{3\,max} = -5$

Cum $f_3(1) = -6$ și pe $[1,2)$ f_3 e strict crescătoare $\Rightarrow$
$\Rightarrow x \in (1,2)$

Cum $f_3(3) = -6$ și pe $[2,3)$ f_3 e strict descrescătoare $\Rightarrow$
$\Rightarrow x \in [2,3)$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (1,3)$ (1)

• $x_2 \in (-2, 1)$, respectiv $f_2(x) = -4x-3$
funcție de gradul I, strict descrescătoare (coeficientul termenului dominant negativ)

x	-2		$\frac{3}{4}$		1
$f_2(x)$	5	$\searrow\ \searrow\ \searrow\ \searrow$	-6	$\searrow$	-7

$\Rightarrow$

Rezolvăm $f_2(x) = -6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow x \in \left(-2, \frac{3}{4}\right)$ (2)

Flutur Angelica - Costela

- $x_1 \in (-\infty, -2]$, respectiv $f_1(x) = x^2 + 4x - 2$

funcție de gradul al II-lea cu minim global în vf. parabolei (coeficientul termenului dominant pozitiv)

Rezolvăm ecuația $f_1(x) = 8$

$$f_1(x) = x^2 + 4x - 2 = 8 \Rightarrow x_1 = -2 - \sqrt{14}$$
$$x_2 = \sqrt{14} - 2 \notin (-\infty, -2]$$

$$f_1(x) = -6 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 2 = -6 \Rightarrow x_1 = x_2 = -2$$
(vârful, punct de minim)

Deci $x_1 \in (-\infty, -2]$ descrie doar o semiparabolă pentru $f_1(x)$ pe $(-\infty, -2]$, $f_1(x)$ funcție strict descrescătoare $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$x \in [-2$~~, $x \in [-2-\sqrt{14}, -2)$ (3)

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow$ ~~f^{-1}~~

$$\Rightarrow f^{-1}((-6, 8]) = [-2-\sqrt{14}, -2) \cup \left(-2, \frac{3}{4}\right) \cup (1, 3)$$

Flutur Angelica - Costela

9.

$a = 6$
$b = 8$
$c = 14$
$d = 48 + 64 + 1 = 113$

$(14, 113X) \trianglelefteq \mathbb{Z}[x]$
$\overset{\shortparallel}{i}$

$i = \{14a + 113X \cdot b \mid a, b \in \mathbb{Z}[x]\}$

Dacă $x^3 - 4x + 6 \in i$, atunci ar exista un $t \in \mathbb{Z}$

pt care $14 \cdot t = 6$ Fals

$\Rightarrow x^3 - 4x + 6 \notin i$

$$\frac{\mathbb{Z}[x]}{(14, 113X)} \overset{①}{\approx} \frac{\mathbb{Z}[x]/(14)}{(14, 113X)/(14)} \approx \frac{\mathbb{Z}_{14}[x]}{(\hat{x})} \approx \mathbb{Z}_{14}$$

La ① am folosit teorema I de izomorfism:

Dacă A inel, $i, J \trianglelefteq A$ cu $i \subseteq J$.

Atunci $\frac{A/i}{J/i} \overset{\varphi}{\approx} A/J$

$\varphi(\hat{\bar{x}}) = \tilde{x}$ unde $x \in A$
"$\wedge$" = clasă în A/i
"$-$" clasă în J/i
"$\sim$" clasă în J

În cazul meu, $A = \mathbb{Z}[x]$, $i = (14)$, $J = (14, 113X)$

Flutur Angelica - Costela

10. $\begin{cases} 7x \equiv 6 \pmod 8 \\ 8x \equiv 5 \pmod 9 \\ 8x \equiv 9 \pmod{17} \end{cases}$

Simplificăm sistemul

$7x \equiv 6 \pmod 8$

Căutăm un element a.î. $7 \cdot \bar{a}^{-1} = 1$

Simplificarea sistemului în $\mathbb{Z}_8$ $\bar{a}^{-1} = 7$

$8x \equiv 5 \pmod 9$

$a^{-1} = 8$

$8x \equiv 9 \pmod{17}$

$a^{-1} = 15$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 2 \pmod 8 \\ x \equiv 4 \pmod 9 \\ x \equiv 16 \pmod{17} \end{cases}$

$x = 17K + 16 \ \forall K \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 17K + 16 \equiv 4 \pmod 9$

$\Leftrightarrow 17K \equiv 6 \pmod 9) \,|\cdot 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow K \equiv 3 \pmod 9$

$\Rightarrow K = 9j + 3, \forall j \in \mathbb{Z}$

$x = 17(9j+3) + 16$

$x = 153j + 67$

$153j + 67 \equiv 2 \pmod 8 \Leftrightarrow 153j \equiv 7 \pmod 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow j \equiv 7 \pmod 8$

$\Rightarrow j = 8i + 7 \ \forall i \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 153(8i+7) + 67 \Leftrightarrow x = 1224K + 1138$