

Examen - Sesiunea Ianuarie-Februarie 2023

9 Februarie 2023



Timpul de rezolvare al problemelor este de 3h. Sunt autorizate doar cele două foi A4 semnate și eventual calculatoare electronice de mână. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Fiecare subiect valorează 10 puncte. Mult succes !

Exercițiul 1

10p

Fie X și Y două variabile aleatoare i.i.d. pozitive și $c > 0$. Pentru fiecare din punctele de mai jos completați cu unul din simbolurile $=$, \leq , \geq sau $?$ (în caz că nu putem decide). Justificați alegerile făcute:

- $\mathbb{E}[\log(X)] \leq \log(\mathbb{E}[X])$
- $\mathbb{E}[\sqrt{X}] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X]}$
- $\mathbb{E}[\sin^2(X)] + \mathbb{E}[\cos^2(X)] = 1$
- $\mathbb{P}(X > c) \leq \frac{\mathbb{E}[X^3]}{c^3}$
- $\mathbb{P}(X \leq Y) = \mathbb{P}(X \geq Y)$
- $\mathbb{P}(|X + Y| > 2) \leq \frac{\mathbb{E}[(X+Y)^4]}{10}$
- $\mathbb{E}[X^Y] \leq \mathbb{E}[X]^{\mathbb{E}[Y]}$
- $\mathbb{P}(X + Y > 10) \leq \mathbb{P}(X > 5 \text{ sau } Y > 5)$
- $\mathbb{E}[\min(X, Y)] = \min \mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$
- $\mathbb{E}[\frac{X}{Y}] = \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}$
- $\mathbb{E}[X^2(X^2 + 1)] = \mathbb{E}[X^2(Y^2 + 1)]$
- $\mathbb{E}[\frac{1}{X}] \leq \frac{1}{\mathbb{E}[X]}$
- $\frac{\mathbb{E}[X^3]}{\mathbb{E}[X^2]} \leq \frac{\mathbb{E}[X^4]}{\mathbb{E}[X^3]}$
- $\mathbb{P}(|X - Y| > 2) \leq \frac{\text{Var}(X)}{2}$

Exercițiul 2

10p

Se consideră variabilele aleatoare independente X și Y având repartițiile:

$$X \sim \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 2 \\ 11a^2 & \frac{4a+3}{16} & \frac{1}{16} \end{array} \right); Y \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{array} \right)$$

Să se determine $a > 0$, repartițiile variabilelor aleatoare $X + Y$, $X - Y$, XY , $X^2 + Y^2$ și să se afle $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$, $\text{Var}(2X - 4Y)$ și $\text{Var}(XY)$.

$\frac{1}{4}$
2 1,09 0,5

Exercițiul 3

10p

Este cunoscut că fiecare dintre cele patru persoane A , B , C sau D spune adevărul doar în unul din trei cazuri. Să presupunem că A face o afirmație iar D spune că C spune că B spune că A a spus adevărul. Care este probabilitatea ca A să fi spus adevărul ?

Exercițiul 4

Densitatea de probabilitate a cuplului de variabile aleatoare (X, Y) este

10p

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{ax^2}{y^3} e^{-\frac{x}{y}}, & x > 0, y \in (0, 1) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}.$$

- Să se determine $a \in \mathbb{R}$. 1p
- Să se determine densitatea marginală a lui Y . 1p
- Să se găsească densitatea variabilei aleatoare $X|Y = y$. 2p
- Scrieți o funcție în \mathbb{R} care să permită trasarea grafică a densității marginale a lui Y și respectiv a densității condiționate $X|Y = y$. 2p
- Să se calculeze $\mathbb{E}[X|Y = y]$ și $\text{Var}(X|Y = y)$. 2p
- Să se calculeze $\mathbb{E}[X]$, $\text{Var}(X)$ și $\mathbb{E}[X^k]$, $k \in \mathbb{N}$. 2p

Exercițiul 5

Un jucător dispune de un zar echilibrat și de o monedă care are probabilitatea $p = 0.82$ să cadă cap (H). Jucătorul lansează la început zarul iar apoi lansează moneda de un număr de ori egal cu rezultatul obținut pe fața superioară a zarului. Presupunând că moneda se lansează de manieră independentă, se cere să se determine:

10p

- Probabilitatea ca numărul de capete să fie 4 știind că numărul de puncte de pe fața superioară a zarului a fost 4. 2p
- Probabilitatea ca numărul de capete obținute să fie 1 sau 5. 2p
- Știind că nu am obținut niciun cap în cursul jocului care este probabilitatea ca rezultatul zarului să fi fost 4? 3p
- Scrieți câte o funcție în \mathbb{R} care să permită calculul empiric al probabilităților de la punctele anterioare. Comentati și explicați codul. 3p