

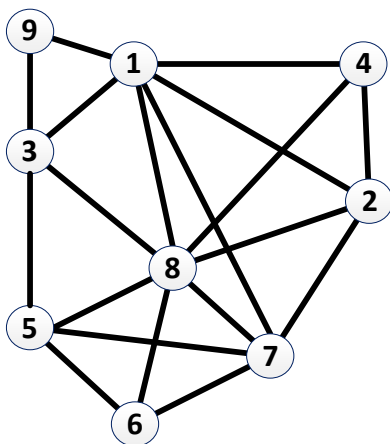
1. (1p) Asociați muchiilor grafului obținut din $K_{3,3}$ prin eliminarea unei muchii ponderile 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 astfel încât graful obținut să aibă cel puțin doi arbori parțiali de cost minim. Justificați alegerea făcută.

2. (1p) Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate pentru un graf neorientat conex (neponderat) cu $n > 3$ vârfuri și m muchii care conține cel puțin un ciclu? Justificați (complexitatea algoritmilor studiați se presupune cunoscută, nu trebuie demonstrată în justificare)

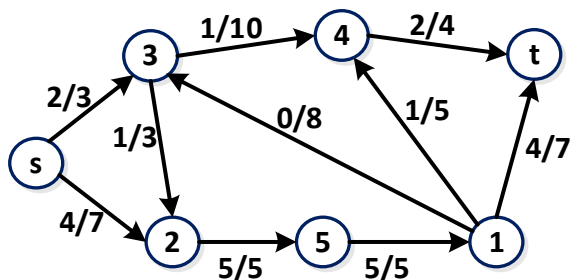
- a) Putem determina distanța de la nodul 1 la celelalte noduri în $O(m)$
- b) Putem determina câte un drum minim de la 1 la celelalte noduri în $O(m)$
- c) Putem detecta existența unui ciclu în G folosind parcurgerea în lățime
- d) $m > n$

3. (1p) a) Fie G un graf neorientat conex cu gradul maxim al unui vârf 7. Care este numărul maxim de culori folosite de algoritmul Greedy de colorare a vârfurilor lui G prezentat la curs, dacă vârfurile sunt ordonate folosind strategia Smallest First? Justificați.

b) Exemplificați (cu explicații) algoritmul Greedy de colorare cu vârfurile ordonate folosind strategia Smallest First pentru graful următor.



4. (1,5p) Definiți noțiunile de flux, tăietură minimă și lanț nesaturat/drum de creștere. Ilustrați pașii algoritmului Ford-Fulkerson pentru rețeaua din figura următoare (unde pe un arc e sunt trecute valorile $f(e)/c(e)$ reprezentând flux/capacitate), pornind de la fluxul indicat și alegând la fiecare pas un s-t lanț f-nesaturat de lungime minimă (algoritmul Edmonds-Karp). Indicați o tăietură (s-t tăietură) minimă în rețeaua (se vor indica vârfurile din bipartiție, arcele directe, arcele inverse). Mai există și o altă s-t tăietură minimă în această rețea? Justificați răspunsurile



5. (2p) a) Descrieți algoritmul Floyd-Warshall pentru determinarea de distanțe într-un graf orientat ponderat cu n vârfuri, detaliind următoarea schemă (se vor respecta numele variabilelor din schemă):

Inițializarea matricelor D de distanțe și P de predecesori

pentru $i \leftarrow 1, n$ execută

 pentru $u \leftarrow 1, n$ execută

 pentru $v \leftarrow 1, n$ execută

b) Presupunem că $n > 3$. Ce reprezintă valoarea $D[u][v]$ după încheierea execuției pasului la care $i=2$ (ce semnifică)?

c) La finalul execuției pseudocodului de mai sus pentru un graf cu 8 vârfuri se obțin matricele următoare:

$D =$

0	2	3	7	4	8	-1	9
∞	0	1	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞
0	2	3	-1	-4	0	-9	1
3	5	6	2	-1	3	-6	4
-1	1	2	-2	-5	-1	-10	0
8	10	11	7	4	8	-1	9
-3	-1	0	-4	-7	-3	-12	-2

$P =$

0	1	2	5	7	4	8	6
2	0	2	0	0	0	0	0
0	3	0	0	0	0	0	0
4	1	2	5	7	4	8	6
4	1	2	5	7	4	8	6
4	1	2	5	7	4	8	6
4	1	2	5	7	4	8	6
4	1	2	5	7	4	8	6

Adăugați în pseudocod instrucțiunile necesare pentru ca algoritmul să testeze existența unui circuit cu cost negativ în graf, și, în caz afirmativ, să afișeze unul, și ilustrați-le pentru graful dat ca exemplu (cu explicații).

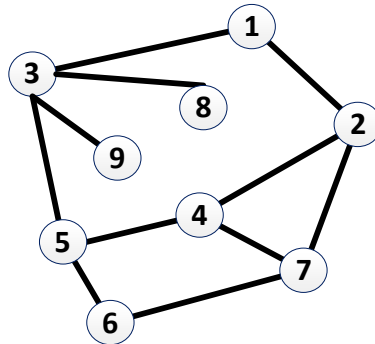
6. (1p) Este corect următorul algoritm de determinare a unui arbore parțial de cost minim al unui graf conex ponderat $G = (V, E, w)$? Justificați (fără a apela în justificare la modul de funcționare al altor algoritmi; rezultatele folosite trebuie demonstrate și trebuie explicat modul în care se folosesc)

$T = (V, E = \emptyset)$ - inițial V conține toate vârfurile și nu conține nicio muchie

cat timp T nu e conex

1. Alege o componentă conexă C al lui T cu număr maxim de vârfuri
2. Alege o muchie de cost minim e cu o extremitate în C și cealaltă nu și adaugă e la T

7. (1,5p).a) Indicați fețele hărții următoare și gradul fiecărei fețe.



b) Fie $M=(V, E, F)$ o hartă conexă cu $n>3$ vârfuri și m muchii în care lungimea minimă a unui ciclu este 4. Arătați că gradul mediu al vârfurilor verifică relația:

$$\frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v) \leq 4 - \frac{8}{n}$$

și există în M cel puțin un vârf de grad mai mic sau egal cu 3.