Nume și prenume: ______________ Nota: ______________

Examen

2 Februarie 2019

Timp de lucru 3h. Toate documentele, calculatoarele electronice de mână, computerele personale sau telefoanele mobile (doar în mod avion) sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Aveți subiecte fiecare valorând 10 puncte. Mult succes !

Exercițiul 1

10p

Se consideră variabilele aleatoare independente X și Y având repartițiile:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 11a^2 & \frac{4a+3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}; \; Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$\frac{11}{16}$ $\frac{7}{6}$ $\frac{1}{16}$

Să se determine $a > 0$, repartițiile variabilelor aleatoare $X+Y$, $X-Y$, XY, X^2+Y^2 și să se afle $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $Var(X)$, $Var(Y)$, $Var(2X-4Y)$ și $Var(XY)$.

Exercițiul 2

10p

Fie X și Y două variabile aleatoare cu repartițiile date de

$$X \sim \begin{pmatrix} -1.5 & -1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \text{ și } Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \text{ cu } p_1, p_2 \in (0,1).$$

a) Aflați p_1 și p_2 știind că $\mathbb{P}(X=-1.5, Y=2) = 0.45$ și $\mathbb{E}[Y|X=-1] = 3$.

b) Considerând valorile lui p_1 și p_2 aflate anterior, calculați coeficientul de corelație al lui X și Y.

Exercițiul 3

10p

Două companii concurente produc un smartphone care este identic din punct de vedere al aspectului. Smartphone-ul produs de compania A are o durată de viață repartizată $\mathcal{E}(\lambda_0)$ iar cel produs de compania B are o durată de viață repartizată $\mathcal{E}(\lambda_1)$, cu $\lambda_0 < \lambda_1$. Știm că Ionel a primit un astfel de telefon și că șansa ca acesta să fi fost produs de compania A este p_0 și de compania B este $p_1 = 1 - p_0$.

1. Determinați densitatea, funcția de repartiție și media duratei de viață a telefonului lui Ionel.
2. Determinați repartiția condiționată a variabilei care descrie compania producătoare știind că durata de viață a telefonului a fost t. Ce se întâmplă când $t \to \infty$?

Exercițiul 4

10p

Micuțului Ionel îi plac foarte mult bomboanele și păstrează mereu în buzunare câteva. Astfel în buzunarul stâng are 5 bomboane cu gust de portocale și 3 cu gust de căpșuni iar în buzunarul din dreapta are 4 bomboane cu gust de portocale și 2 cu gust de căpșuni. Fiind indecis din care buzunar să aleagă o bomboană, DOGARU IULIA 2 februarie 2019

el aruncă o monedă (echilibrată) și dacă aceasta pică cu fața cap atunci el alege buzunarul din stânga și în caz contrar pe cel din dreapta.

1. Care este probabilitatea ca după două aruncări cu banul el să fi mâncat două bomboane cu aceeași aromă ?
2. Ionel ajunge acasă și își golește buzunarele pe masă. Mama sa observă că pe masă se află 7 bomboane cu aromă de protocale și 5 cu aromă de căpșuni. Știind procedura pe care o folosește fiul său, care este secvența de rezultate cea mai probabilă a celor două aruncări cu banul.
3. În ziua următoare, Ionel constată că a rămas doar cu 7 bomboane, toate cu aromă de portocale. Pune 5 dintre ele în buzunarul stâng și 2 în cel drept și se duce să cumpere bomboane cu aromă de căpșuni. Știind că va pune bomboanele cu aromă de căpșuni în buzunarul drept, câte trebuie să cumpere pentru ca la următoarea aruncare cu banul să aibă aproape aceeași șansă să extragă o bomboană cu aromă de portocale sau una cu aromă de căpșuni?

Exercițiul 5

10p

Fie X și Y două variabile aleatoare cu densitatea comună

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} axy + by^2, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}.$$

1. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ știind că $ab = 3$.
2. Determinați funcțiile de repartiție, media, varianța lui X și Y și coeficientul de corelație $\rho(X,Y)$.
3. Determinați densitățile condiționate $f_{X|Y}(x|y)$ și respectiv $f_{Y|X}(y|x)$.
4. Scrieți o funcție în R care să permită trasarea grafică a densităților marginale, a funcțiilor de repartiție corespunzătoare și respectiv a densităților condiționate.
5. Calculați $\mathbb{P}((X,Y) \in [0, 0.5]^2)$ și $\mathbb{P}(X < Y)$.
6. Determinați repartițiile variabilelor $\mathbb{E}[X|Y]$ și $Var(X|Y)$ și verificați dacă are loc relația

$$Var(X) = \mathbb{E}[Var(X|Y)] + Var(\mathbb{E}[X|Y]).$$

Exercițiul 6

10p

Fie X și Y două variabile aleatoare i.i.d. pozitive și $c > 0$. Pentru fiecare din punctele de mai jos completați cu unul din simbolurile $=, \leq, \geq$ sau ? (în caz că nu putem decide). Argumentați alegerile făcute:

aceeași ex ca la $\sqrt{\ }$

1. $\mathbb{E}[\log(X)]$ $>$ $\log(\mathbb{E}[X])$
2. $\mathbb{E}[X]$ $\geq$ $\sqrt{\mathbb{E}[X]}$
3. $\mathbb{E}[\sin^2(X)] + \mathbb{E}[\cos^2(X)]$ ... 1
4. $\mathbb{P}(X > c)$ ... $\frac{\mathbb{E}[X^3]}{c^3}$
5. $\mathbb{P}(X \leq Y)$ ... $\mathbb{P}(X \geq Y)$

depinde și de $P(x)P(y)$

6. $\mathbb{P}(X + Y > 10)$ $>$ $\mathbb{P}(X > 5$ sau $Y > 5)$ $Y>5$
7. $\mathbb{E}[\min(X,Y)]$ ... $\min \mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$ ← cu $\leq$ e m...
8. $\mathbb{E}[\frac{X}{Y}]$ $\geq$ $\frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}$ nu știm nimic de Y
9. $\mathbb{E}[X^2(X^2+1)]$? $\mathbb{E}[X^2(Y^2+1)]$ ← E mai mic dec... mai mare? Dz...
10. $\mathbb{E}[\frac{1}{X}]$? $\frac{1}{\mathbb{E}[X]}$

de vreme ce $\sqrt{\ }$ e definit $\Rightarrow E$ e poz. Deci notând $X = E[X] \Rightarrow X \geq \sqrt{X}$, $X > 0$

$E = X \cdot P(x)$ | $E \geq 0$, $E < 1$? Nu. X poate fi 1000

$0 \leq P(y) < 1$

$E[\frac{X}{Y}] = \cancel{\frac{X \cdot P(x)}{Y \cdot P(y)}}\ \frac{X}{Y} \cdot P(x) \cdot P(y)$

$\frac{E(X)}{E(Y)} = \frac{P(x) \cdot X}{P(y) \cdot y}$

$\Rightarrow E[\frac{X}{Y}] >$ ~~dar dacă ... 0,05 ... 0,5~~

, X poate fi mic