Metoda Divide et Impera

desparte şi stăpâneşte

Metoda Divide et Impera

- Constă în
  - **împărţirea repetată** a unei probleme de dimensiuni mari în mai multe subprobleme **de acelaşi tip**

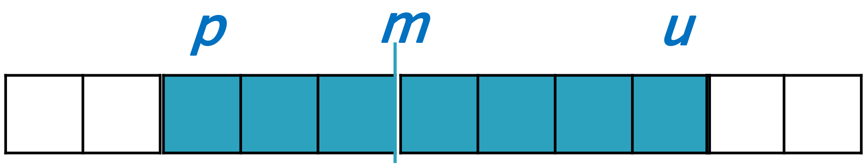
Metoda Divide et Impera

- Constă în
  - **împărţirea repetată** a unei probleme de dimensiuni mari în mai multe subprobleme **de acelaşi tip**
  - **rezolvarea** acestor subprobleme (în acelaşi mod sau prin rezolvare directă, dacă au dimensiune mică)

Metoda Divide et Impera

- Constă în
  - **împărţirea repetată** a unei probleme de dimensiuni mari în mai multe subprobleme **de acelaşi tip**
  - **rezolvarea** acestor subprobleme (în acelaşi mod sau prin rezolvare directă, dacă au dimensiune mică)
  - **combinarea rezultatelor** obţinute pentru a determina rezultatul corespunzător problemei iniţiale.

Schema posibilă

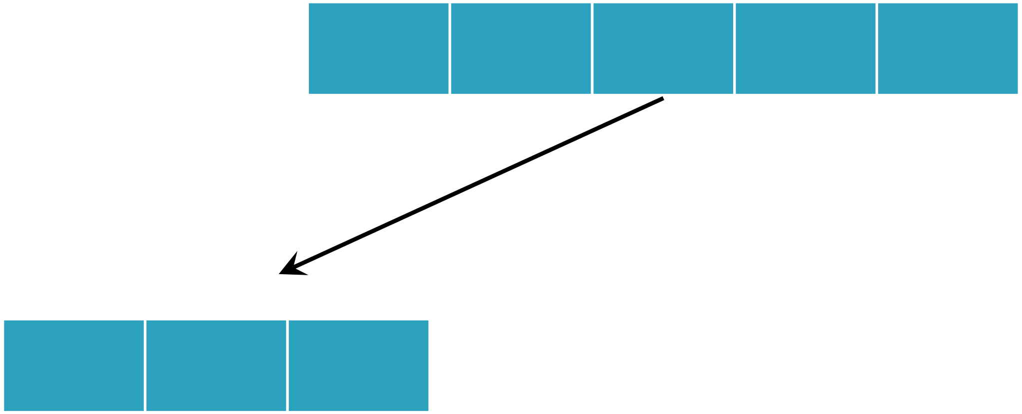



```
function DivImp(p,u)          – pentru a[p..u]
    if u-p<ε
        r ← RezolvaDirect(p,u)
    else
        m ← Pozitie(p,u)  – de obicei mijlocul
        r1 ← DivImp(p,m)
        r2 ← DivImp(m+1,u)
        r ← Combina(r1,r2)
    return r
end
```

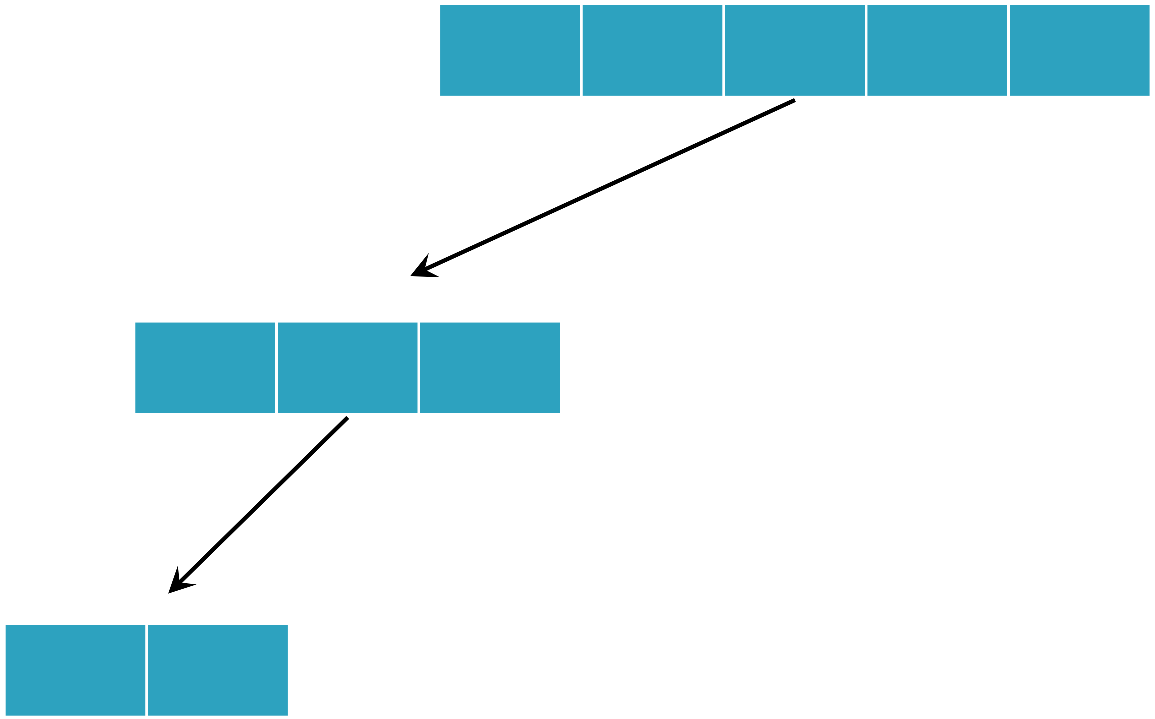
- **Apel:** `DivImp(1,n)`

Metoda Divide et Impera

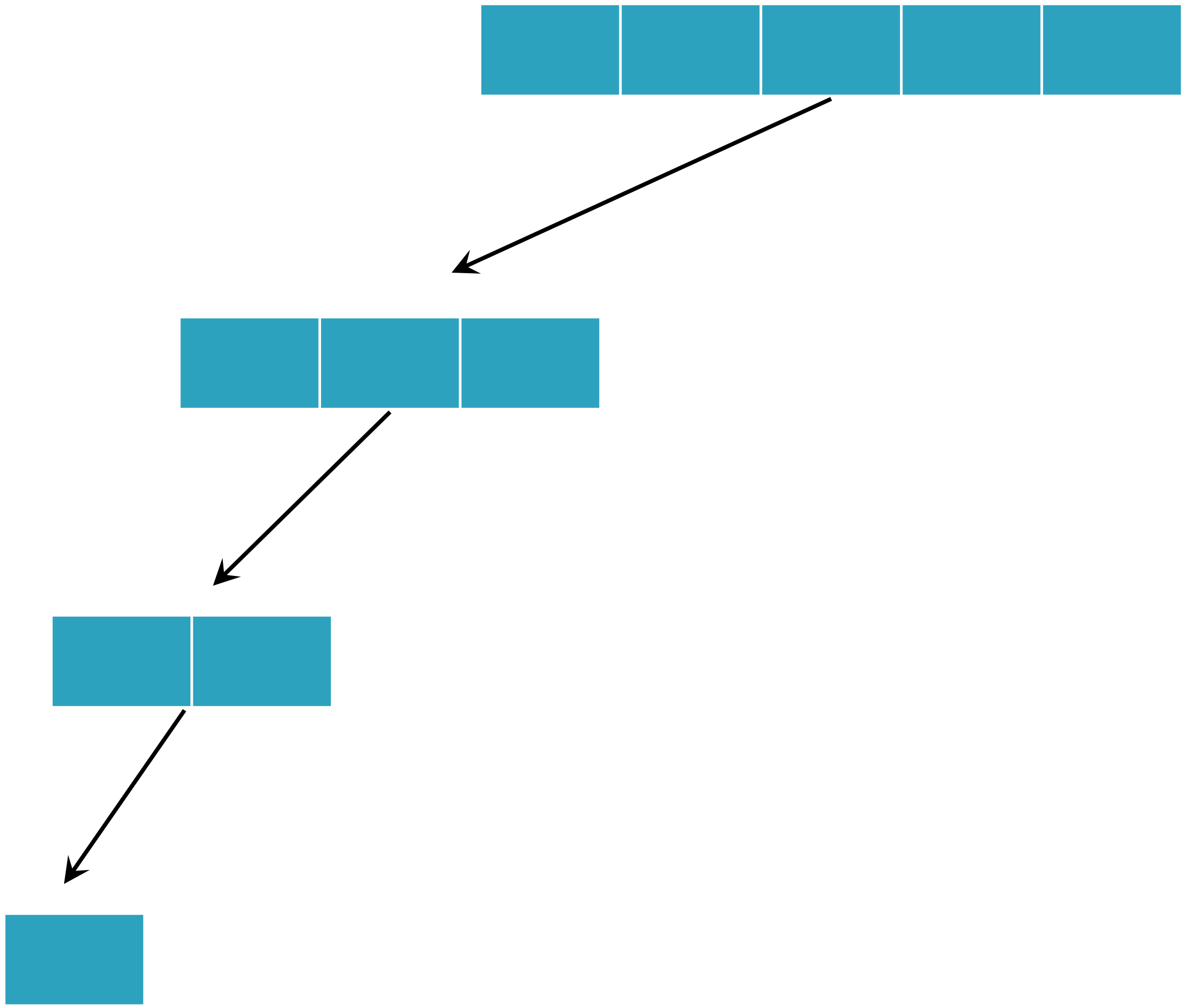
Metoda Divide et Impera



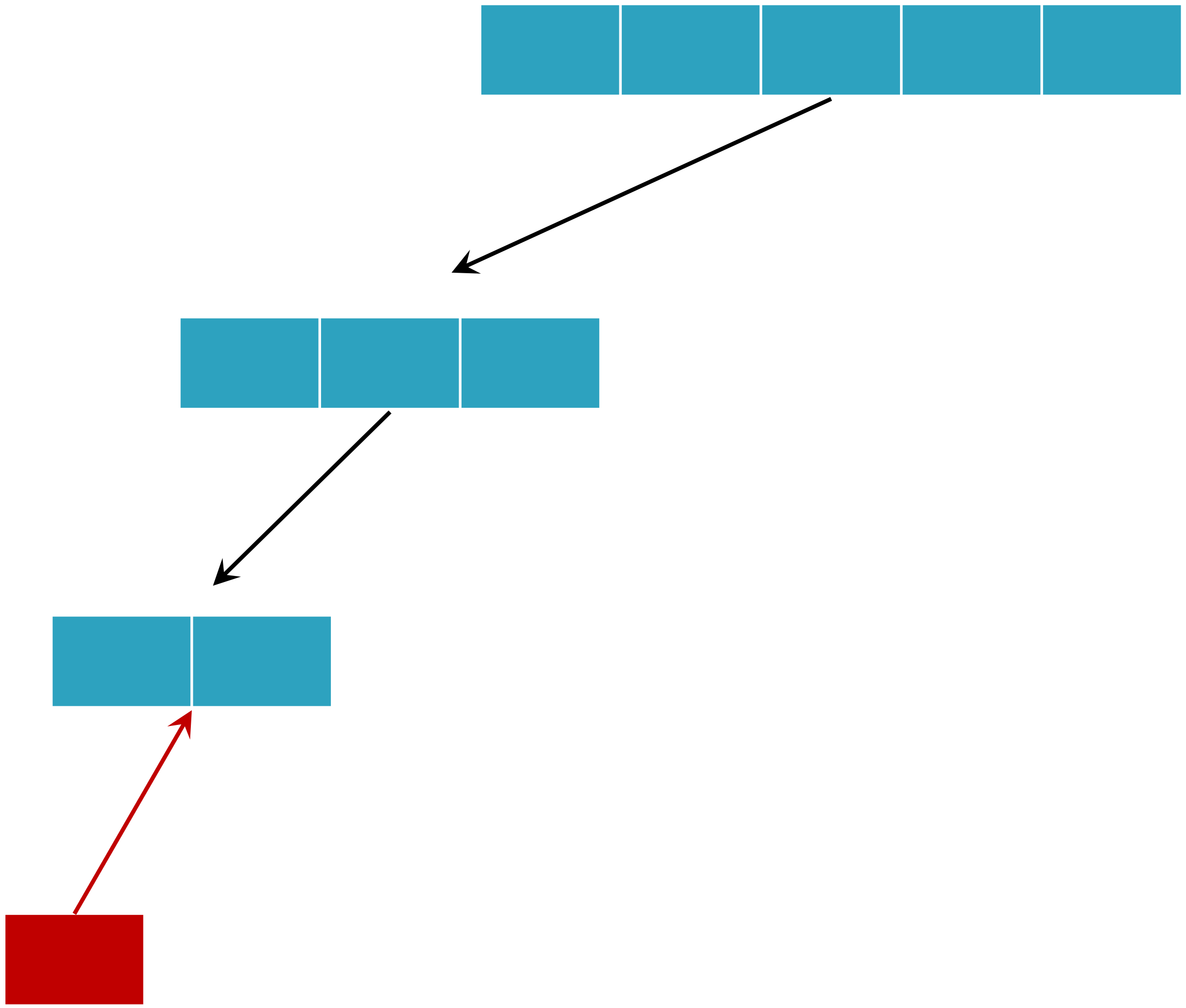
Metoda Divide et Impera



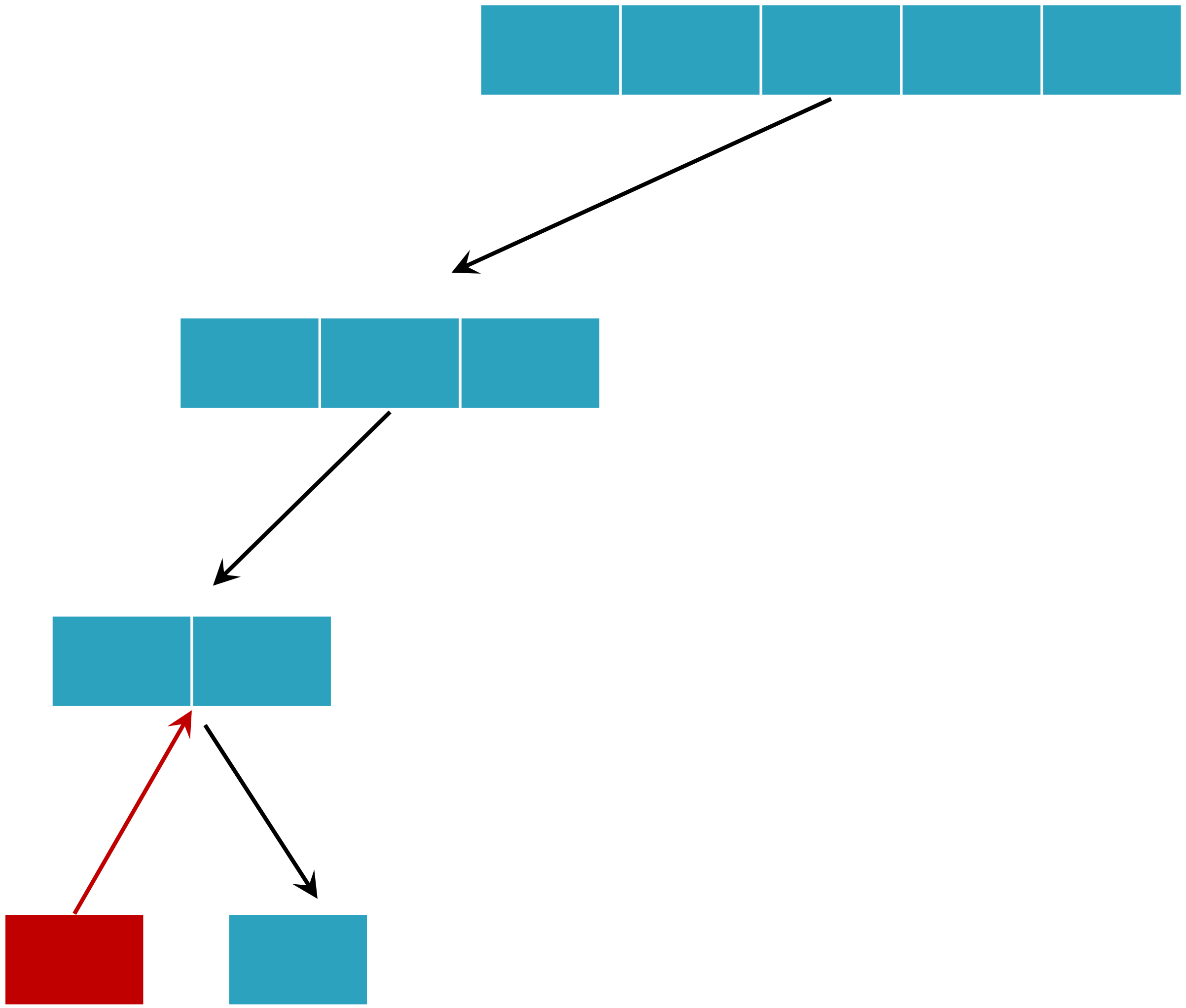
Metoda Divide et Impera



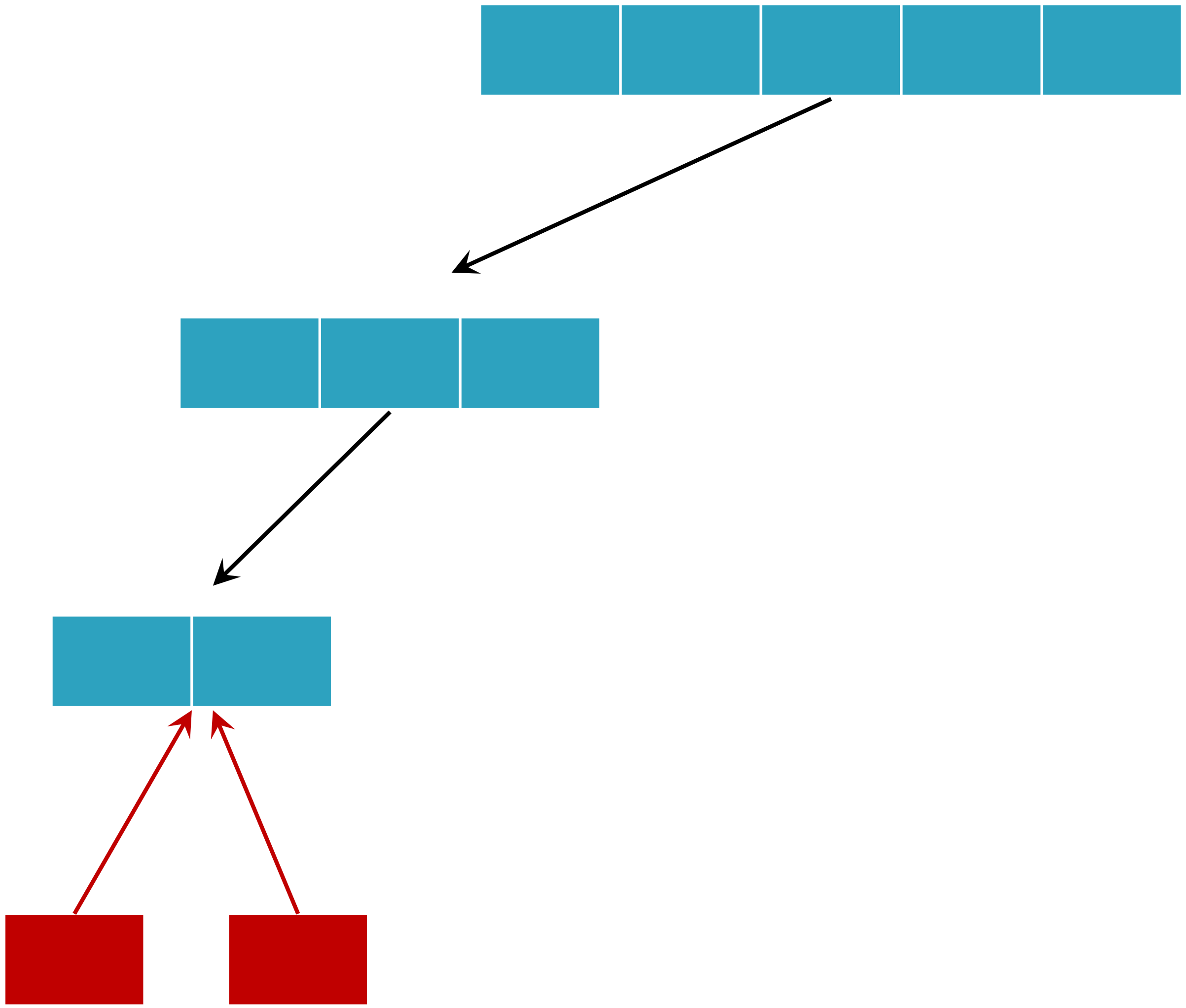
Metoda Divide et Impera



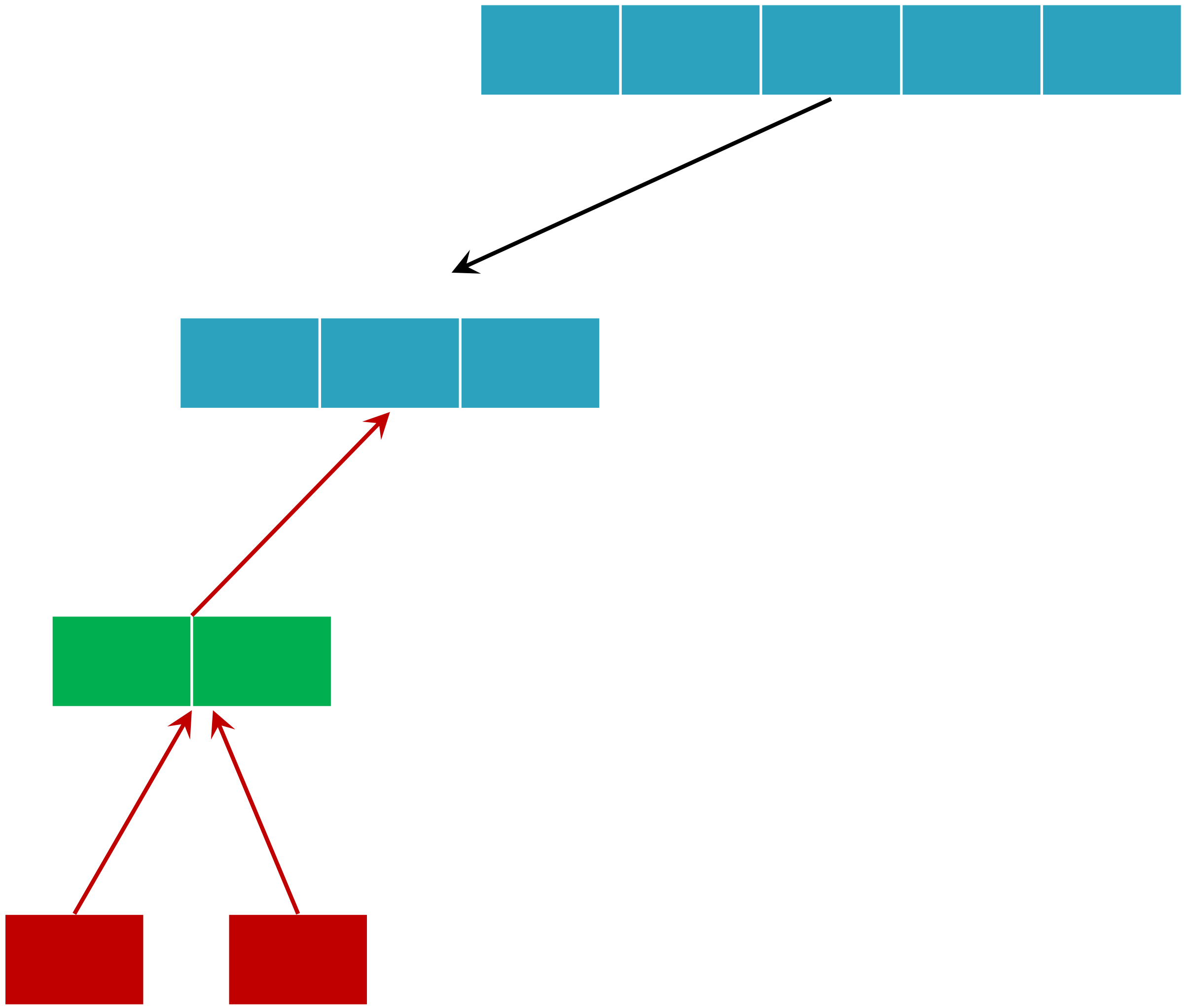
Metoda Divide et Impera



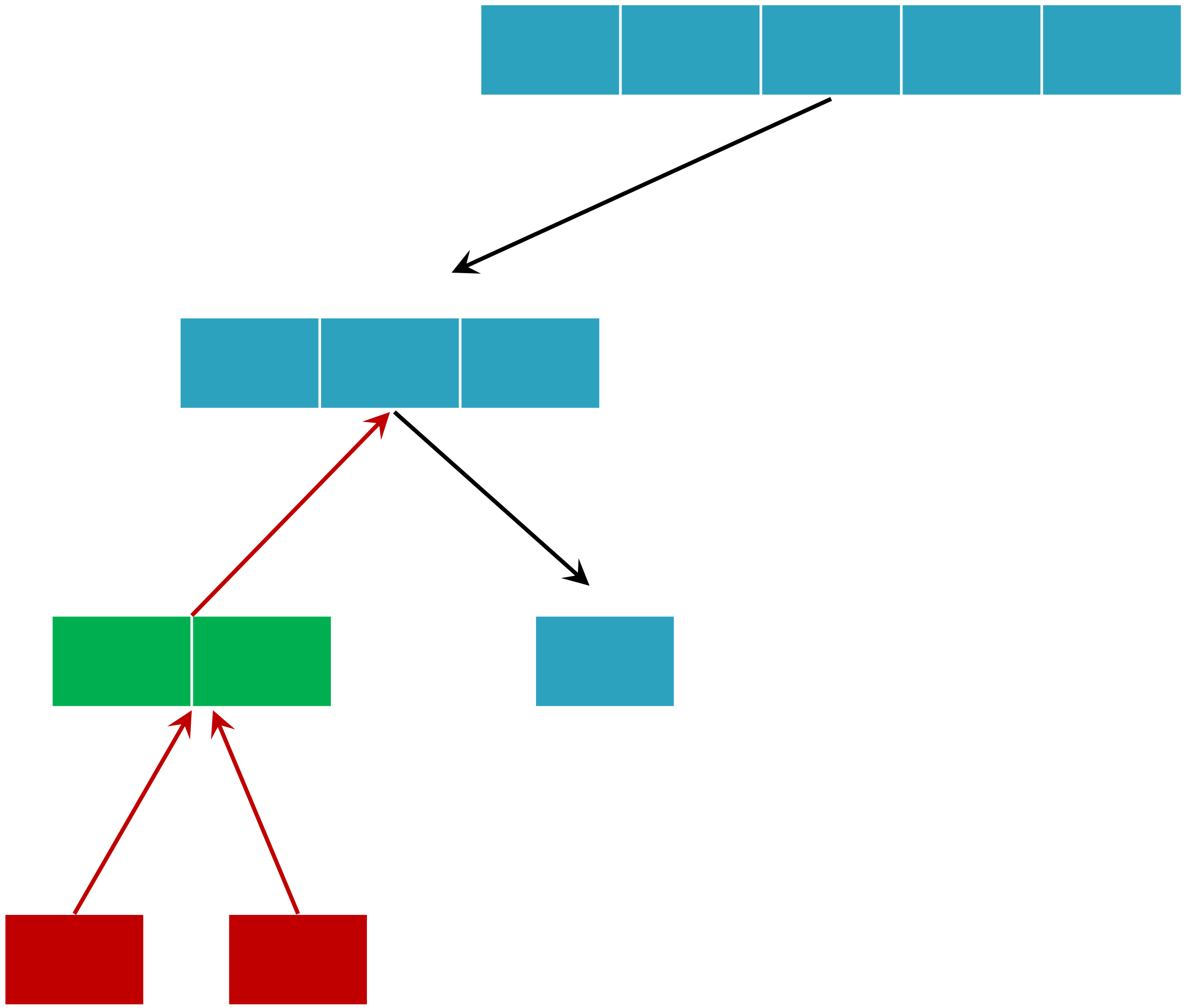
Metoda Divide et Impera



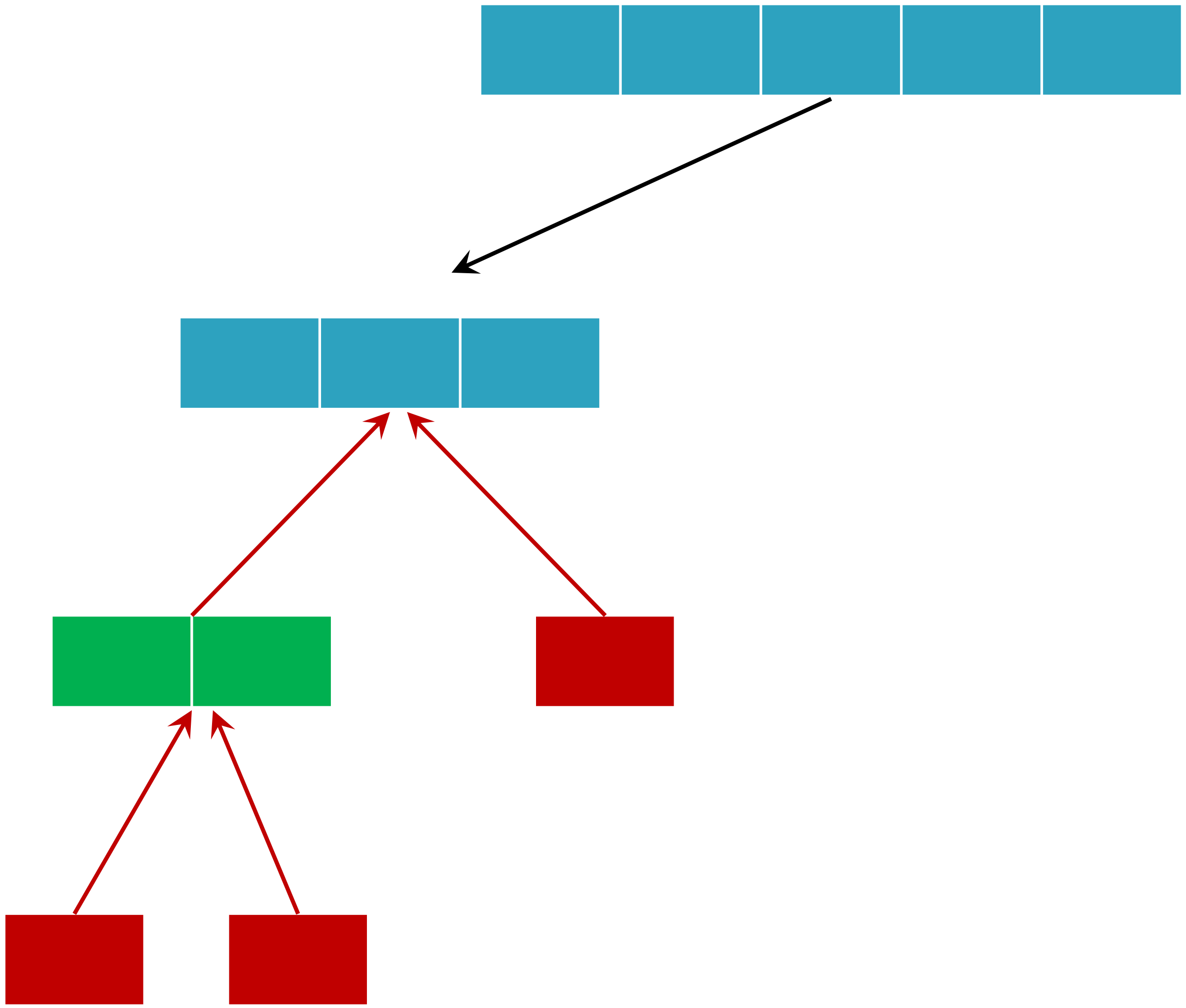
Metoda Divide et Impera



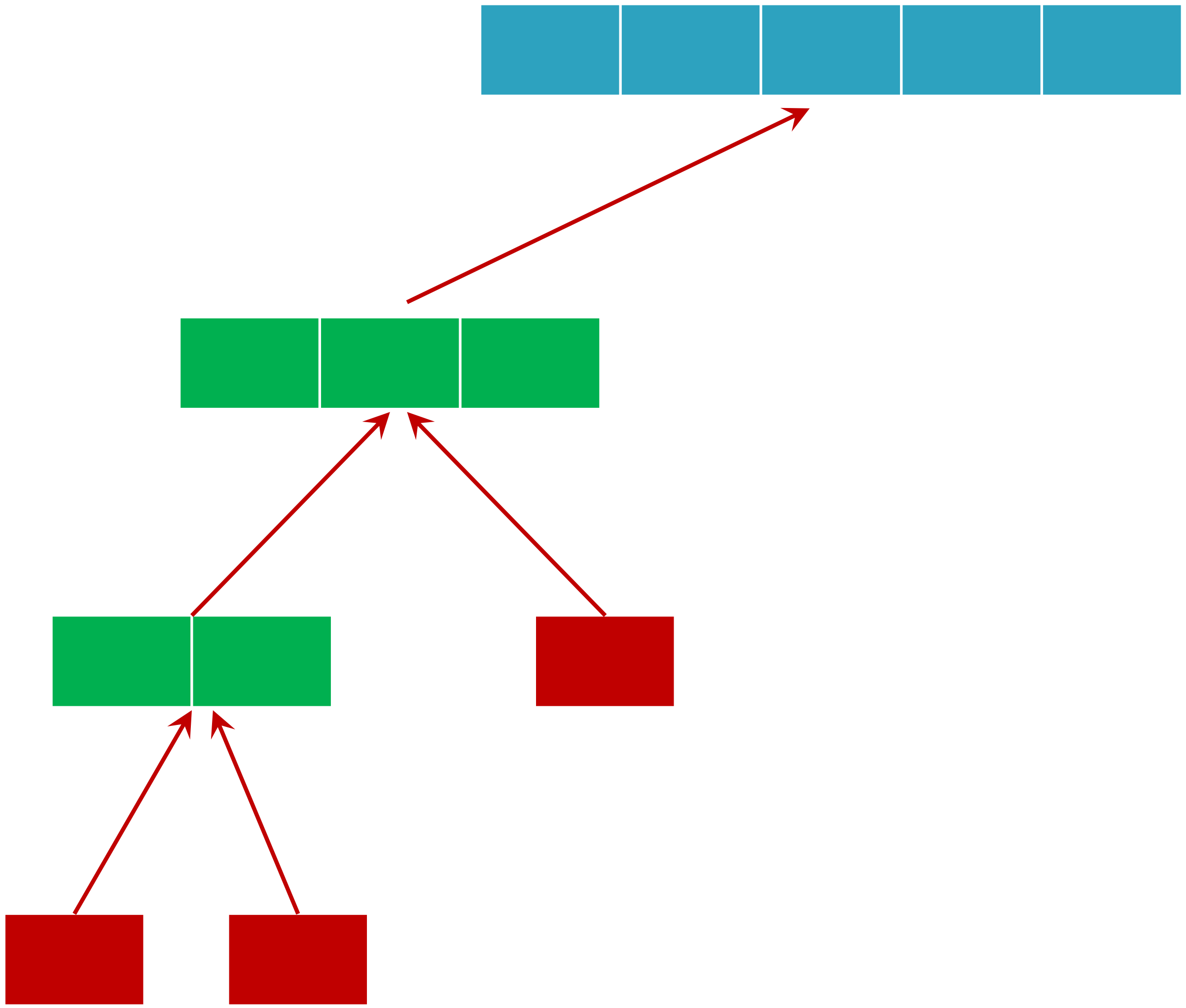
Metoda Divide et Impera



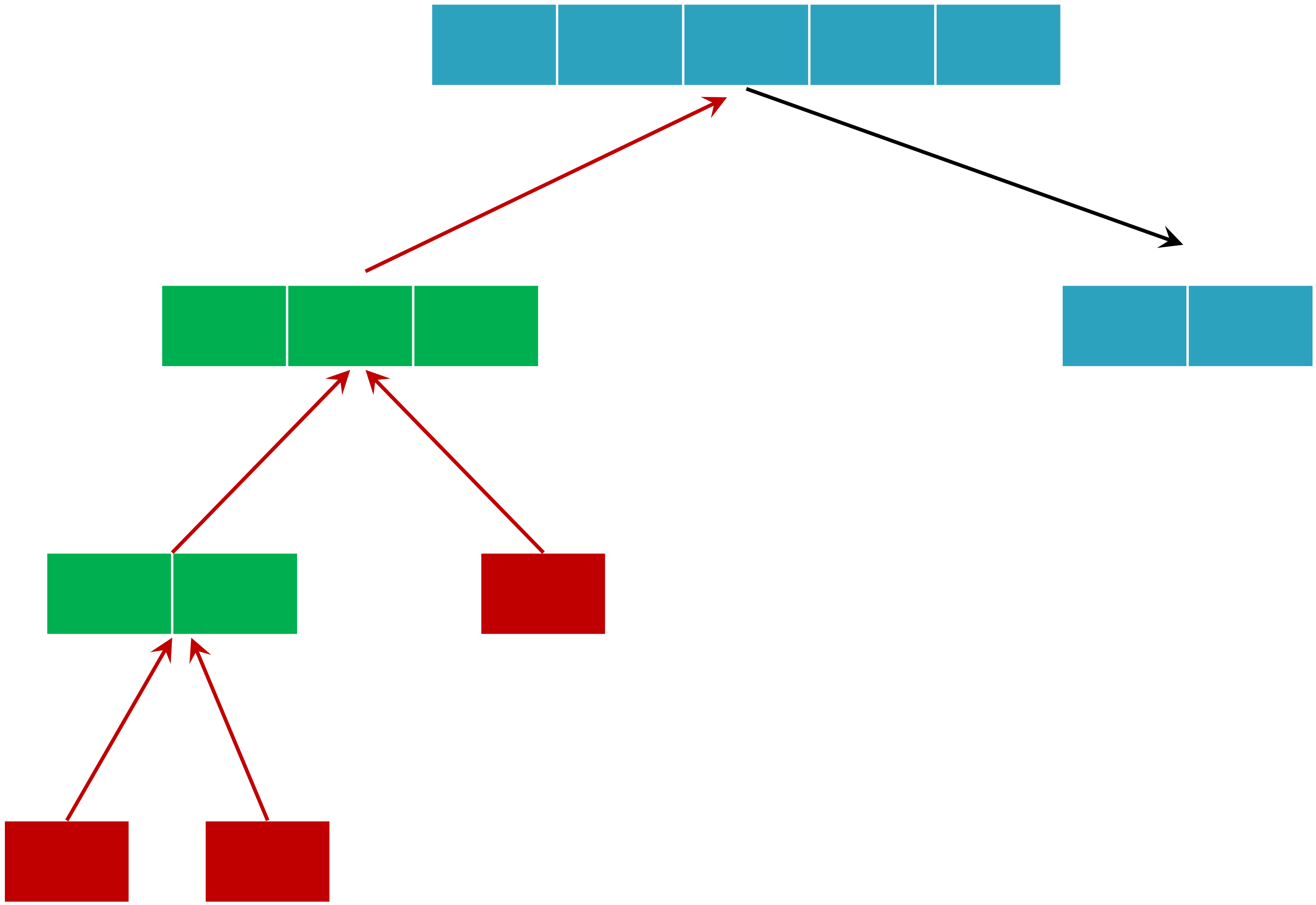
Metoda Divide et Impera



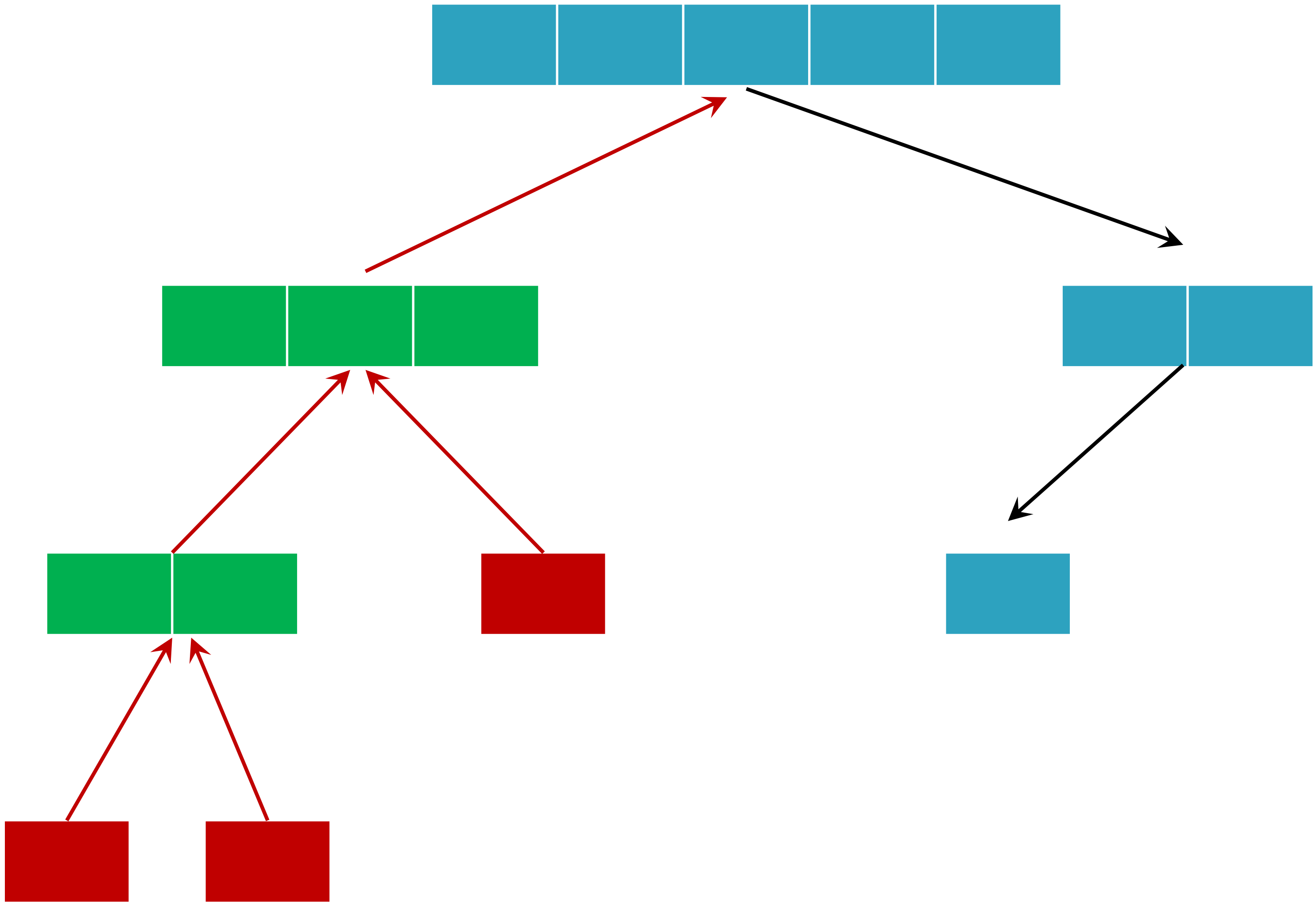
Metoda Divide et Impera



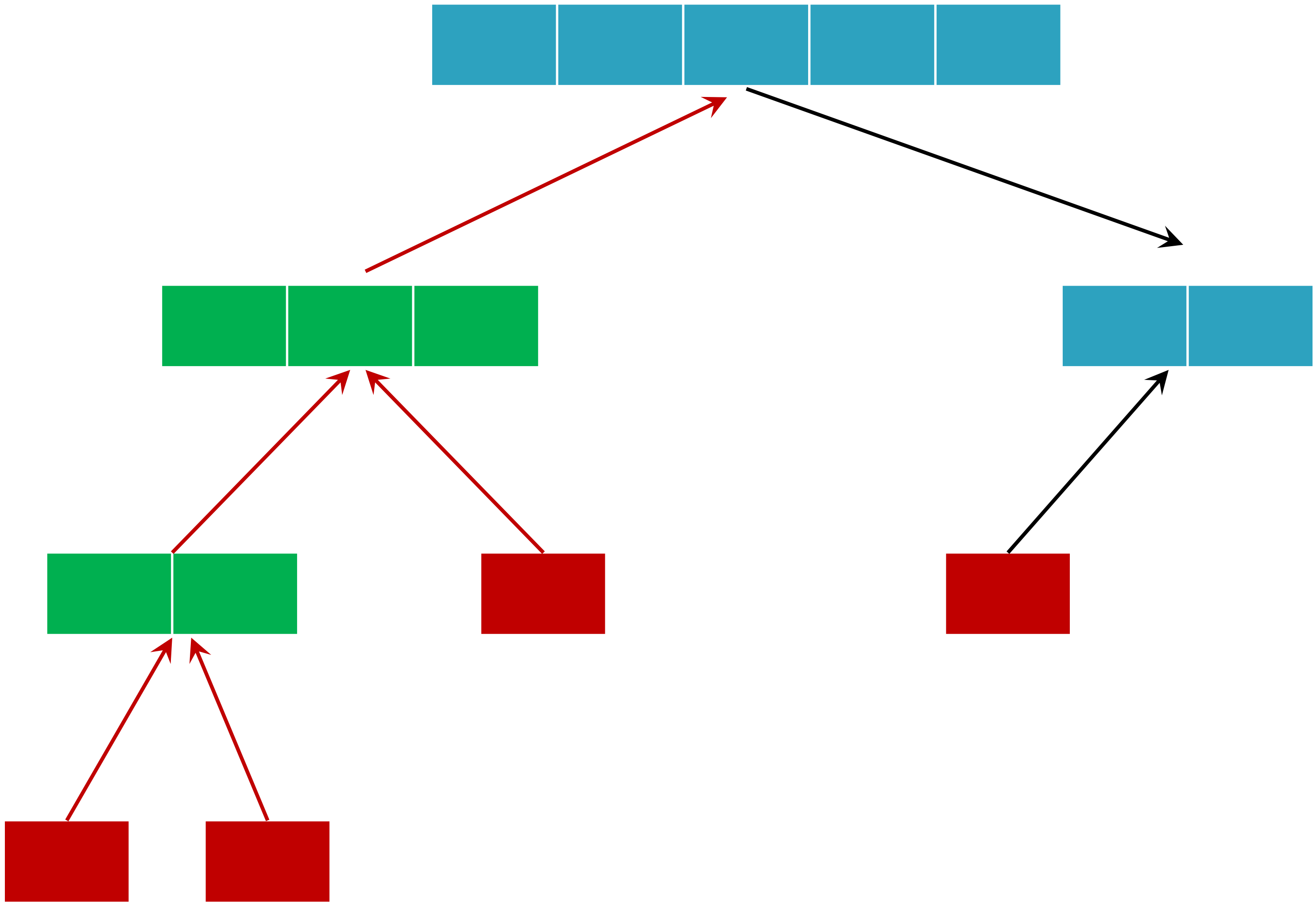
Metoda Divide et Impera



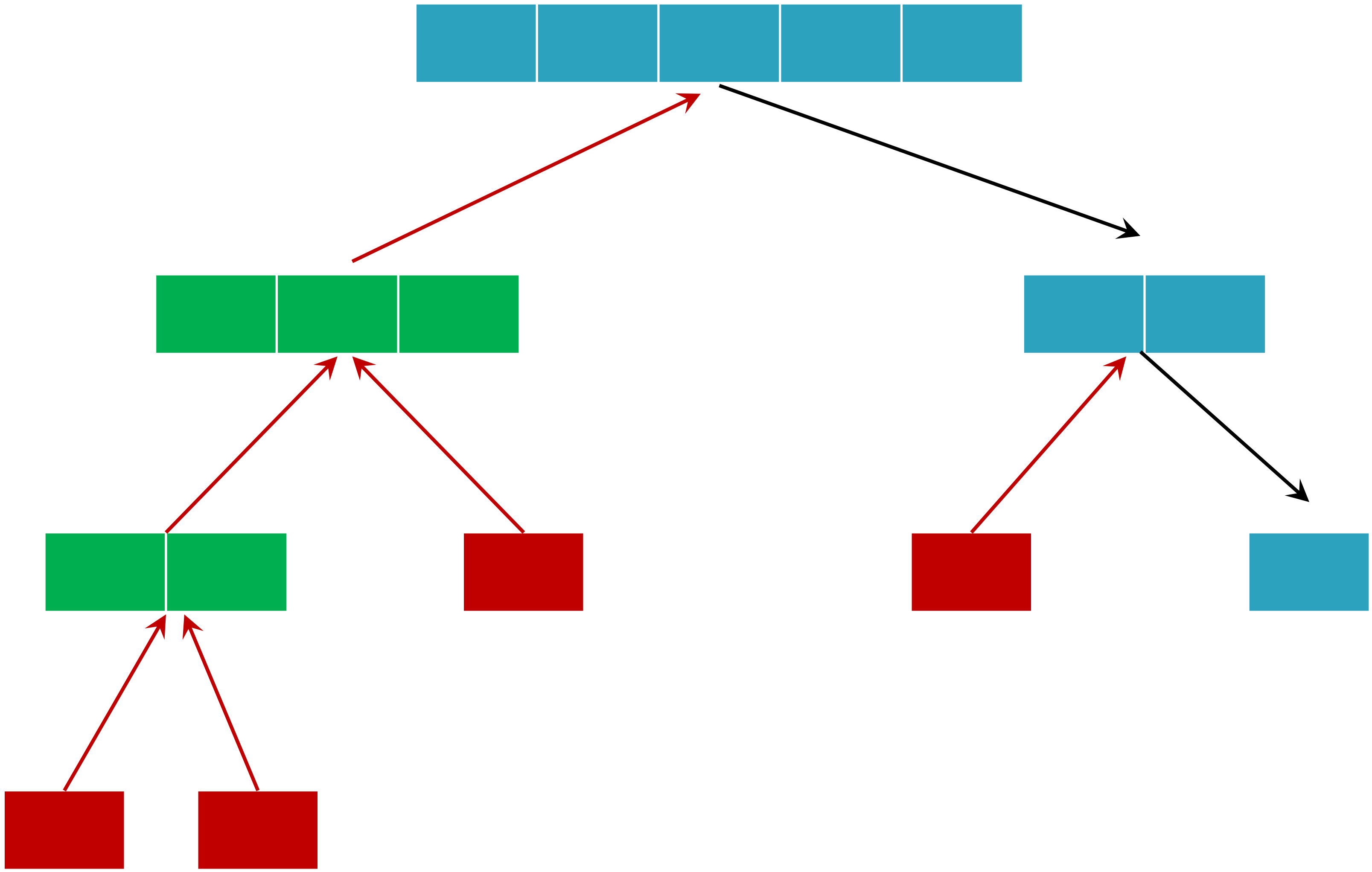
Metoda Divide et Impera



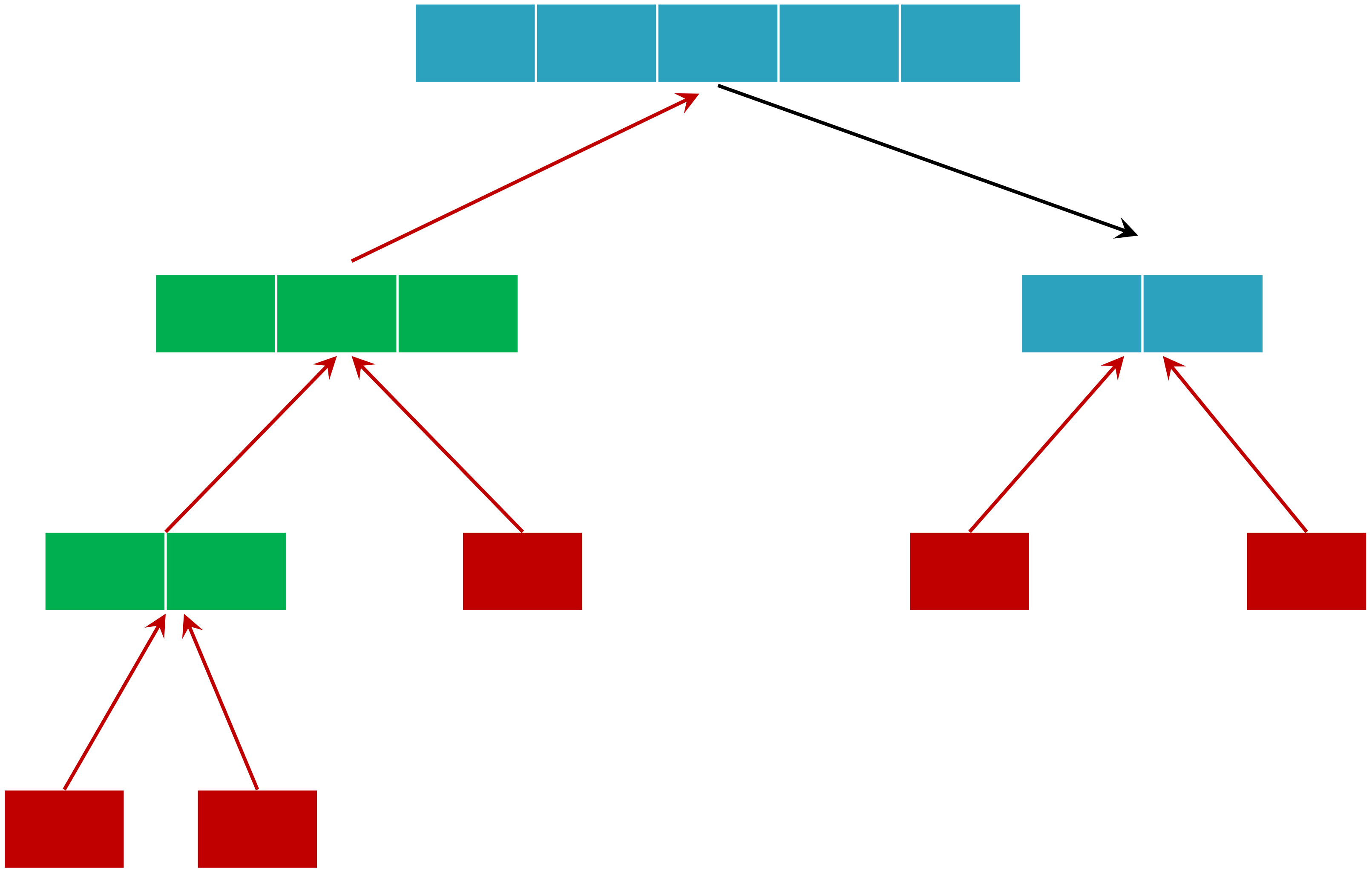
Metoda Divide et Impera



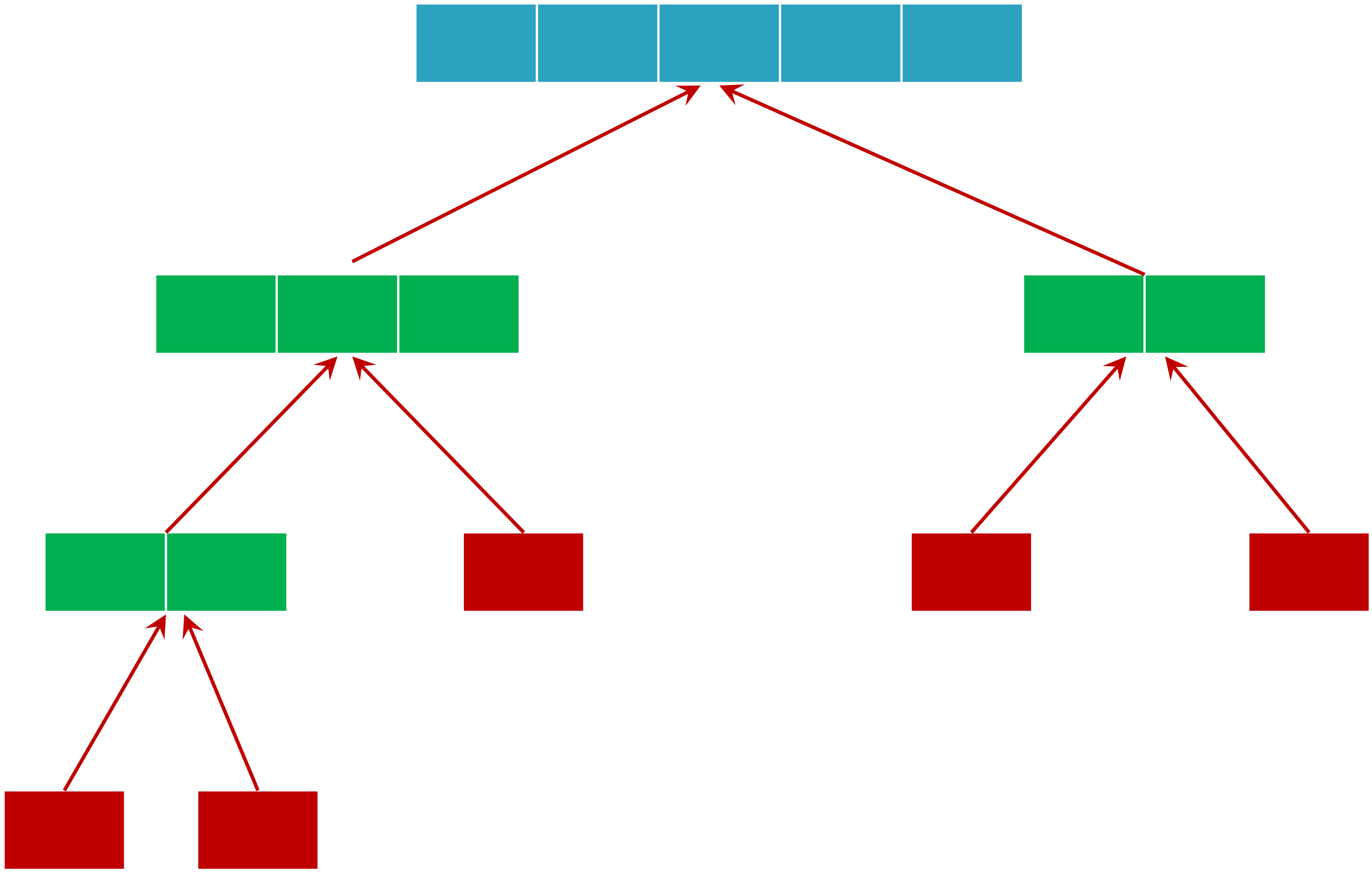
Metoda Divide et Impera



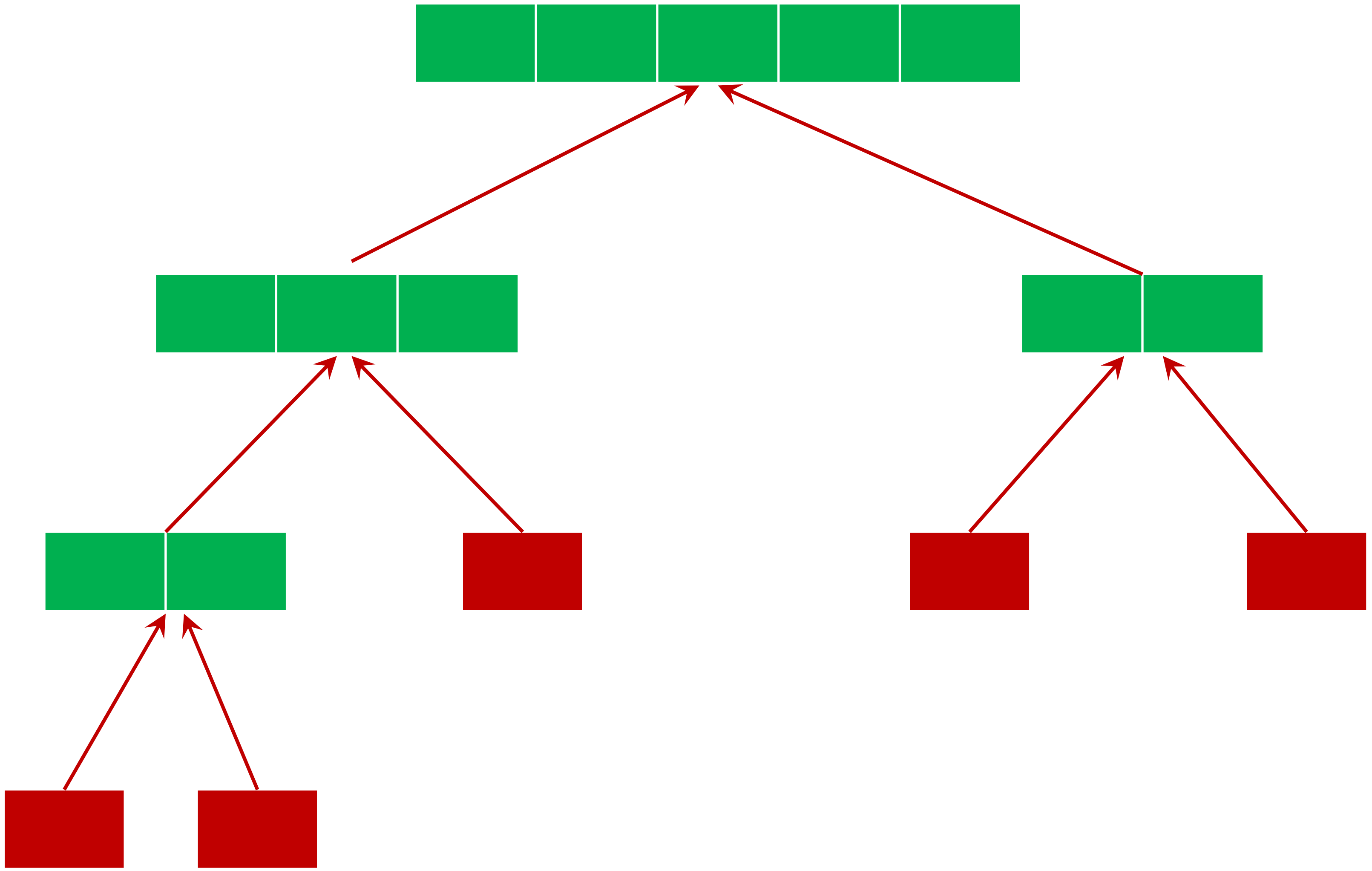
Metoda Divide et Impera



Metoda Divide et Impera



Metoda Divide et Impera



Exemplu –maximul elementelor unui vector

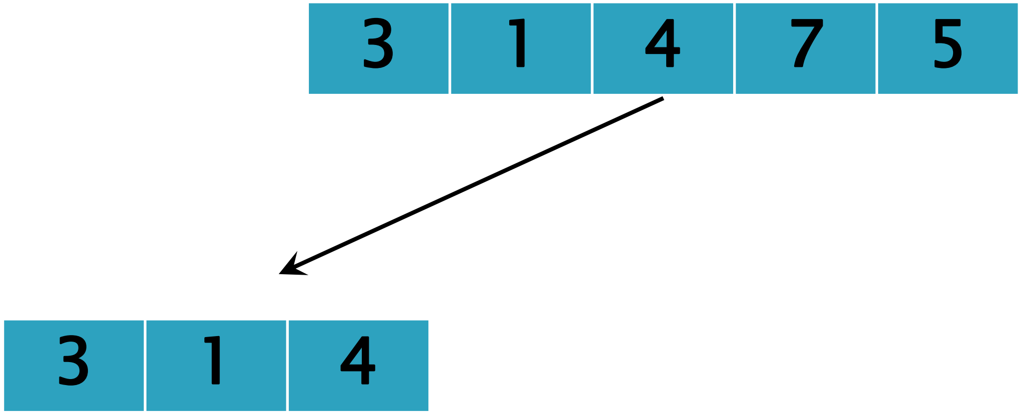
```
function DivImp(p,u)
    if u==p
        r ← a[p]
    else
        m ← ⌊(p+u)/2⌋
        r1 ← DivImp(p,m)
        r2 ← DivImp(m+1,u)
        if r1>r2
            r ← r1
        else
            r ← r2
    return r
```

Apel: `DivImp(0,n-1)`

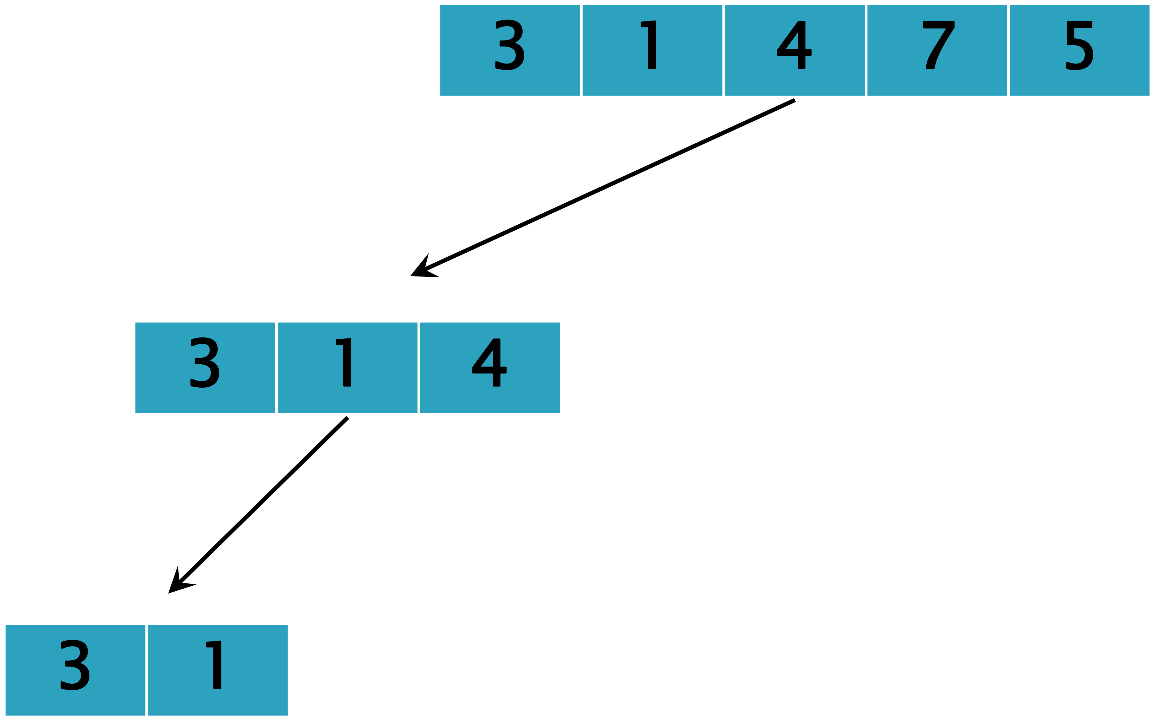
Metoda Divide et Impera

3	1	4	7	5

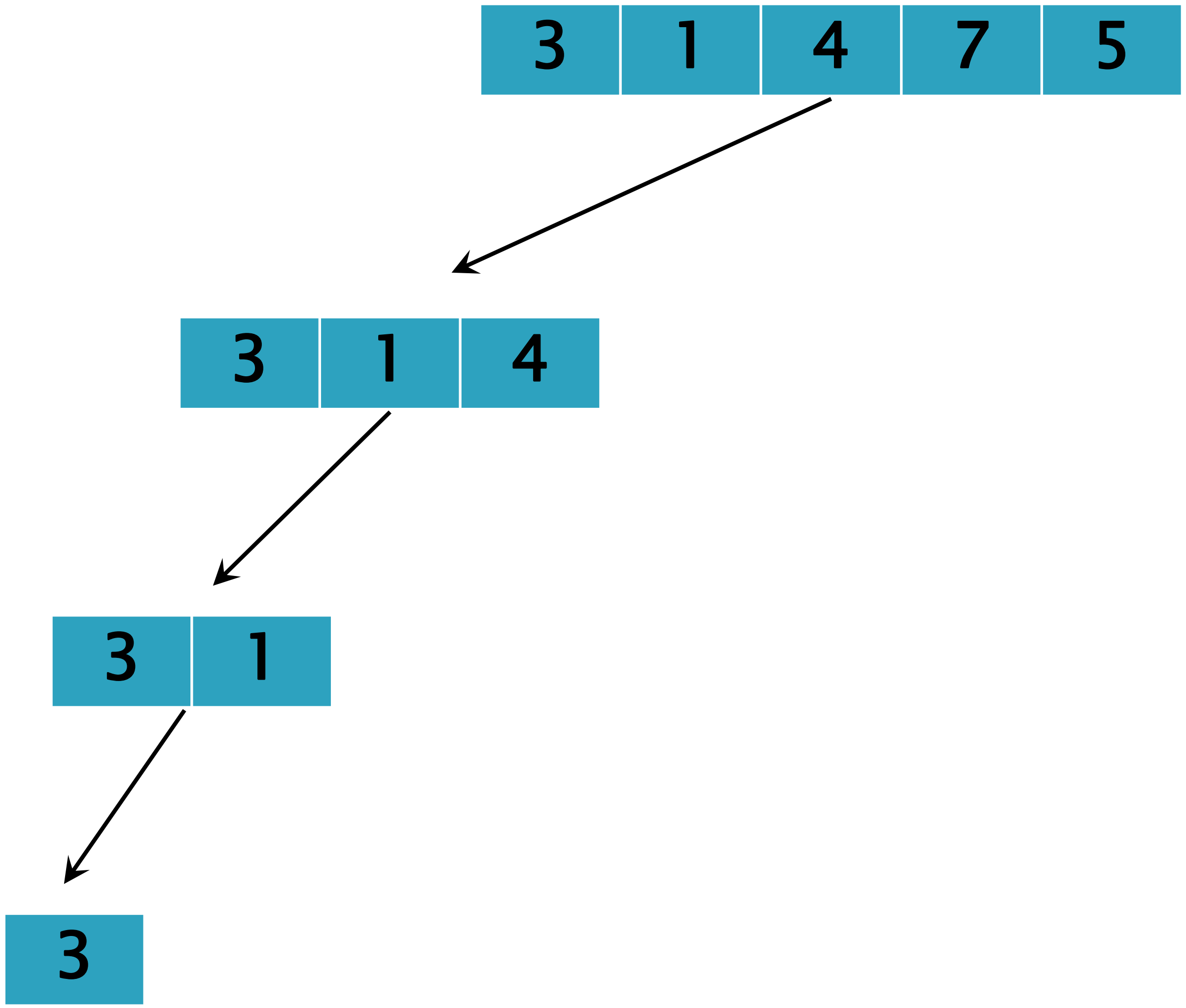
Metoda Divide et Impera



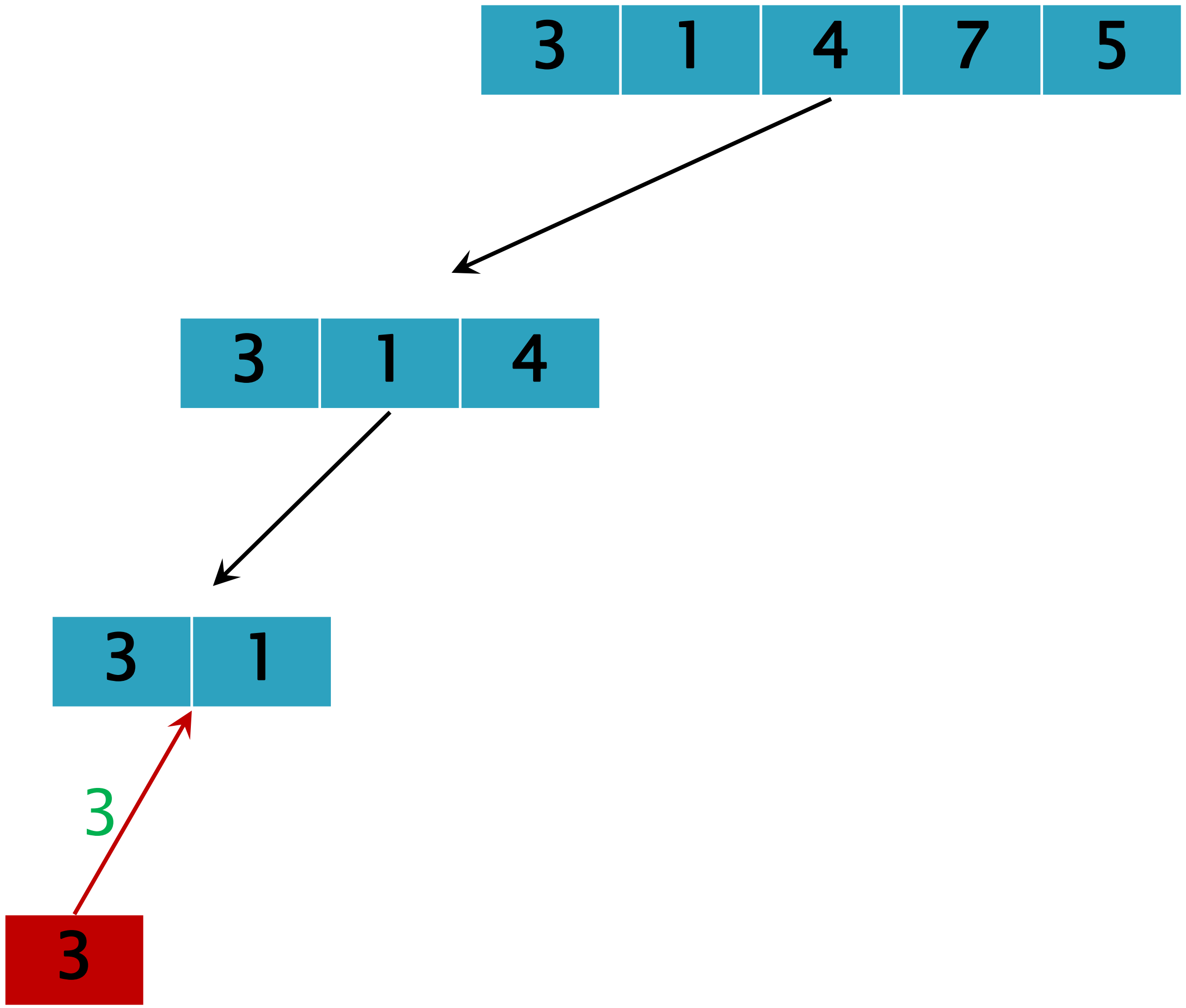
Metoda Divide et Impera



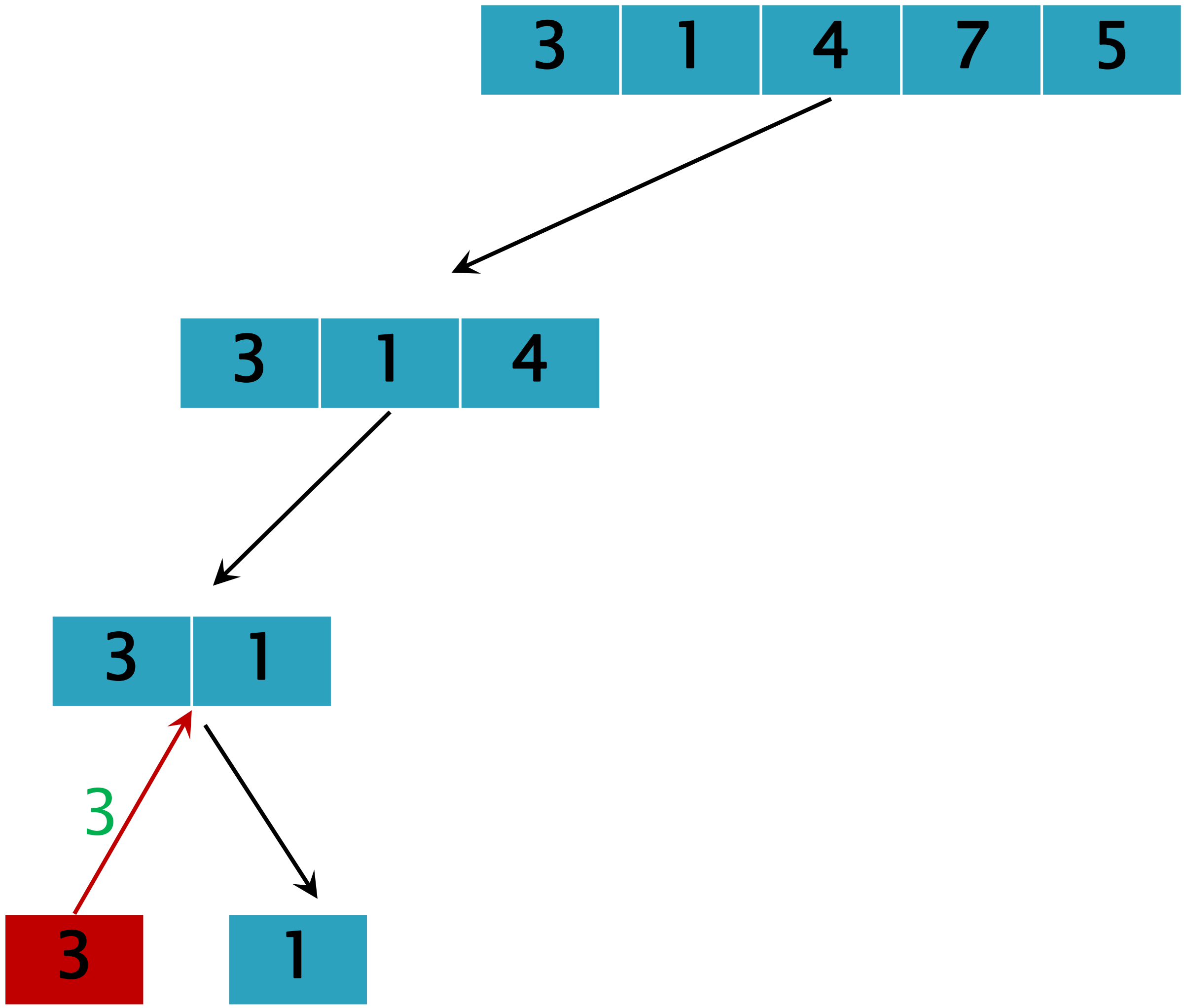
Metoda Divide et Impera



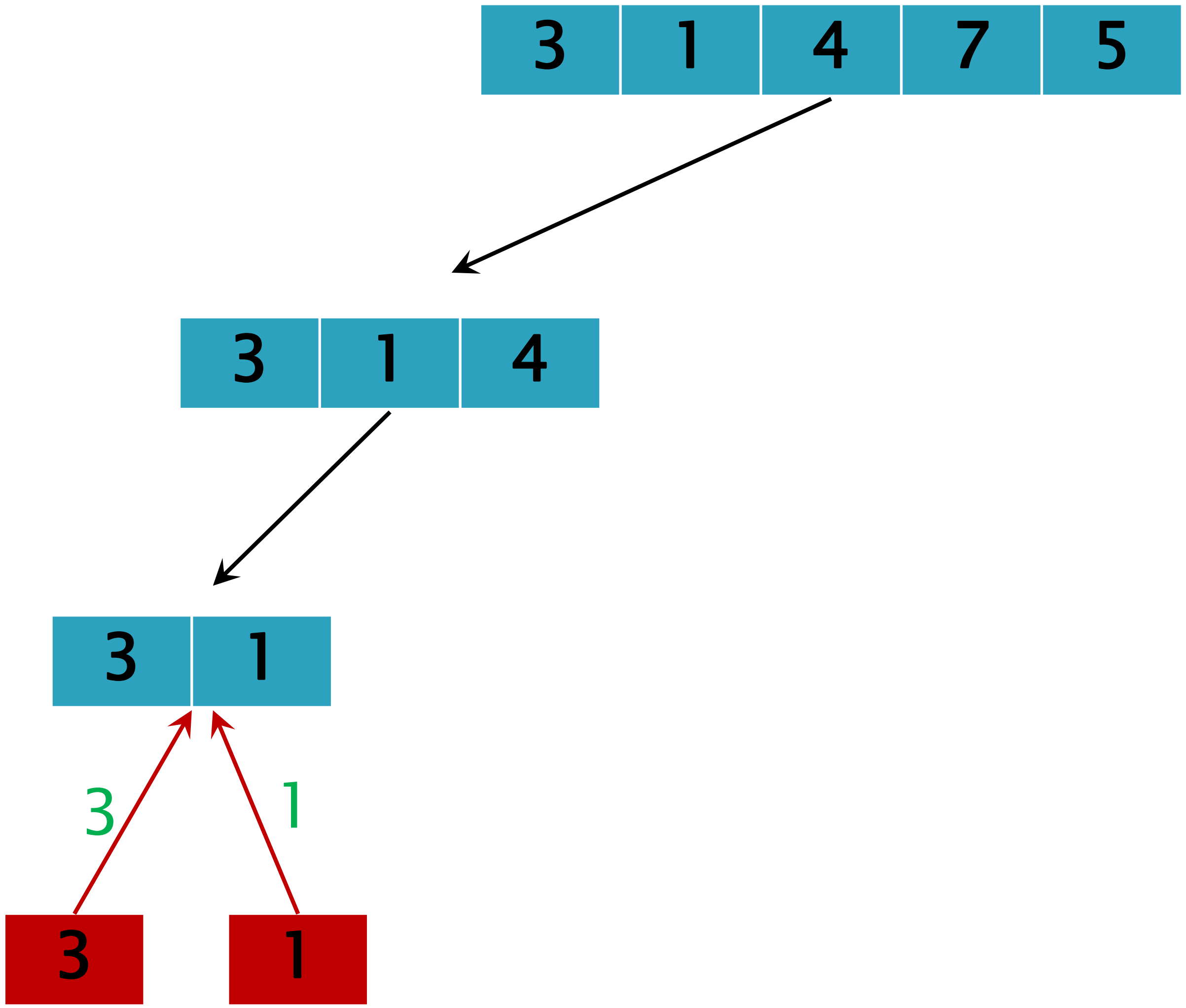
Metoda Divide et Impera



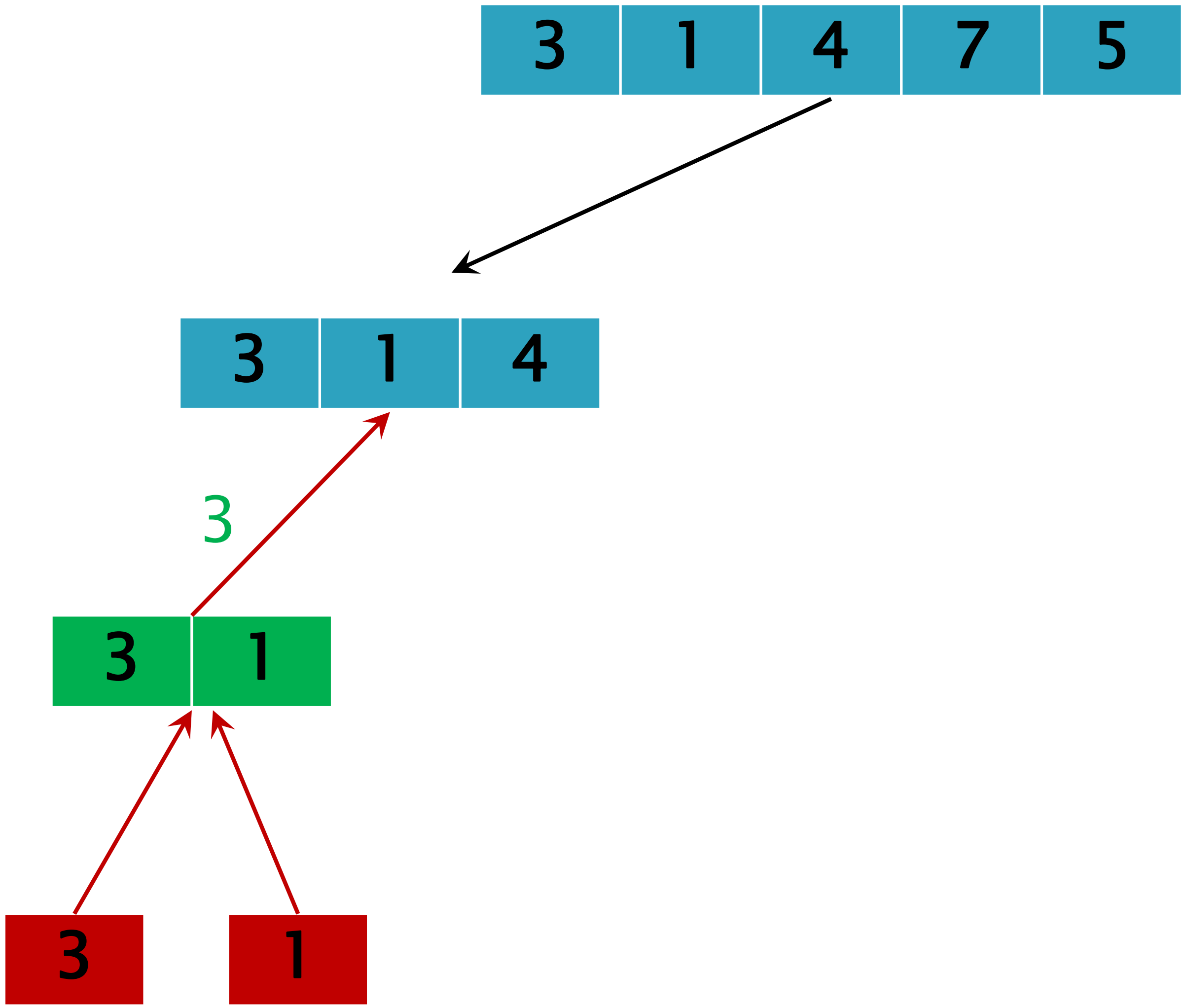
Metoda Divide et Impera



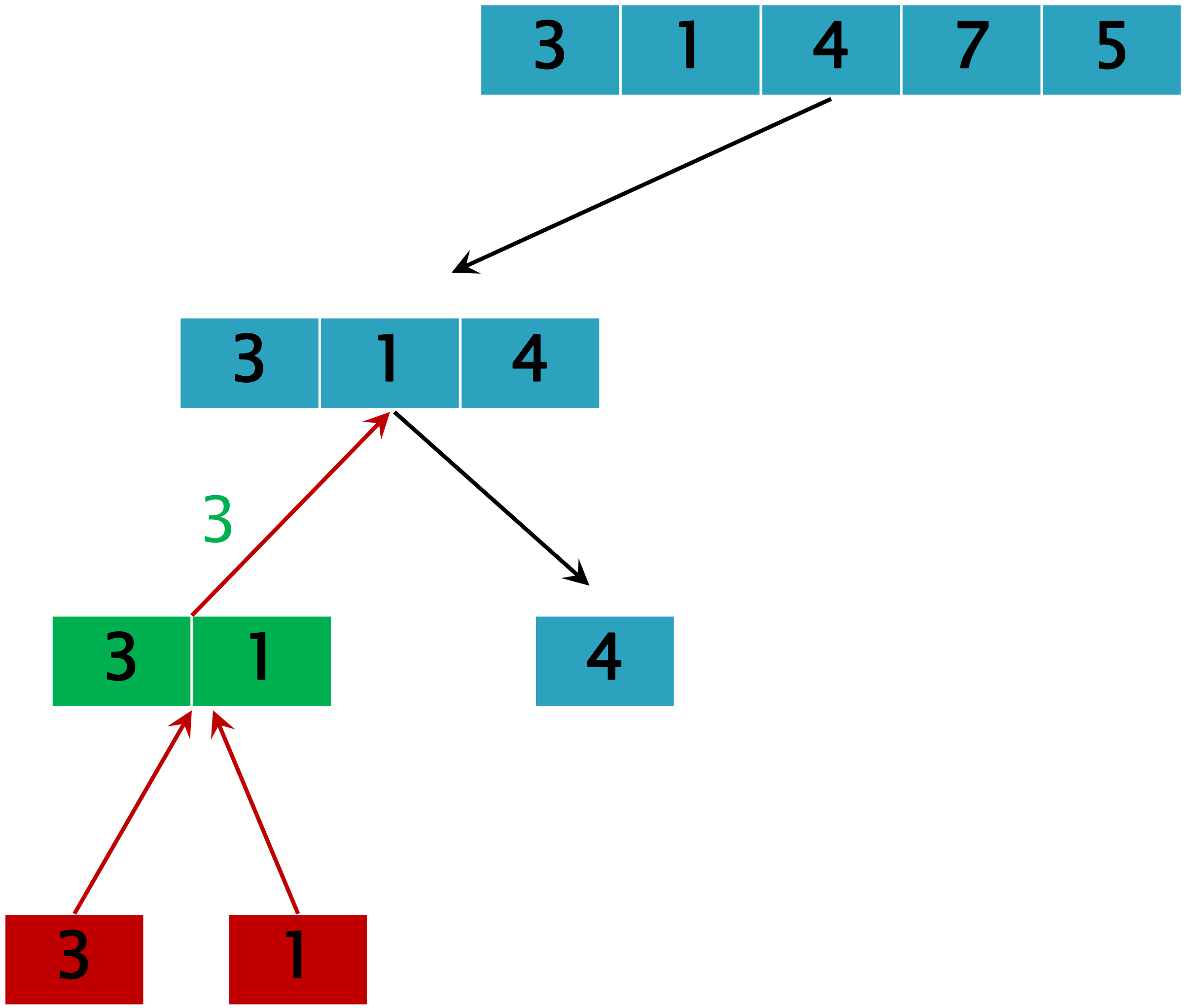
Metoda Divide et Impera



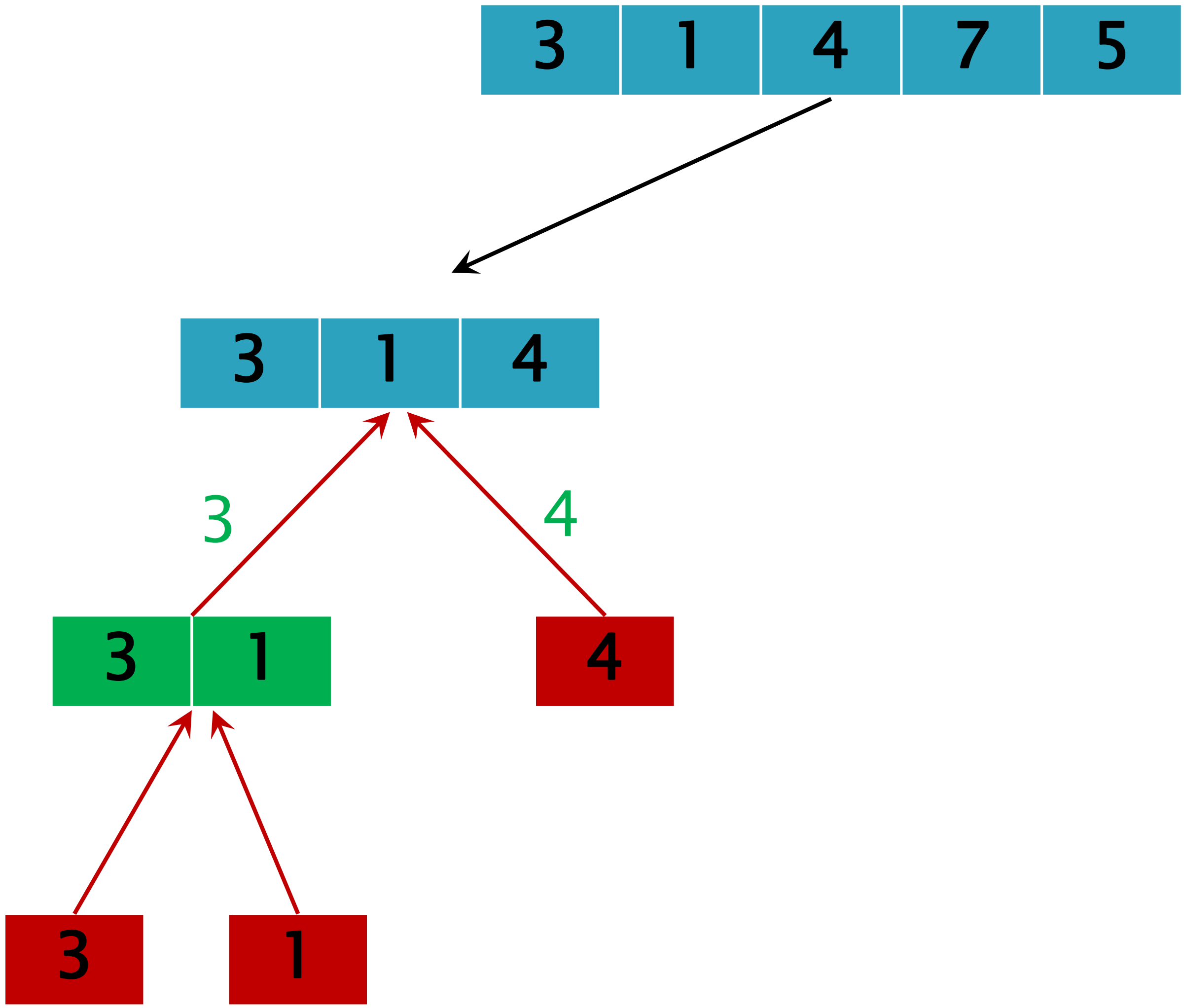
Metoda Divide et Impera



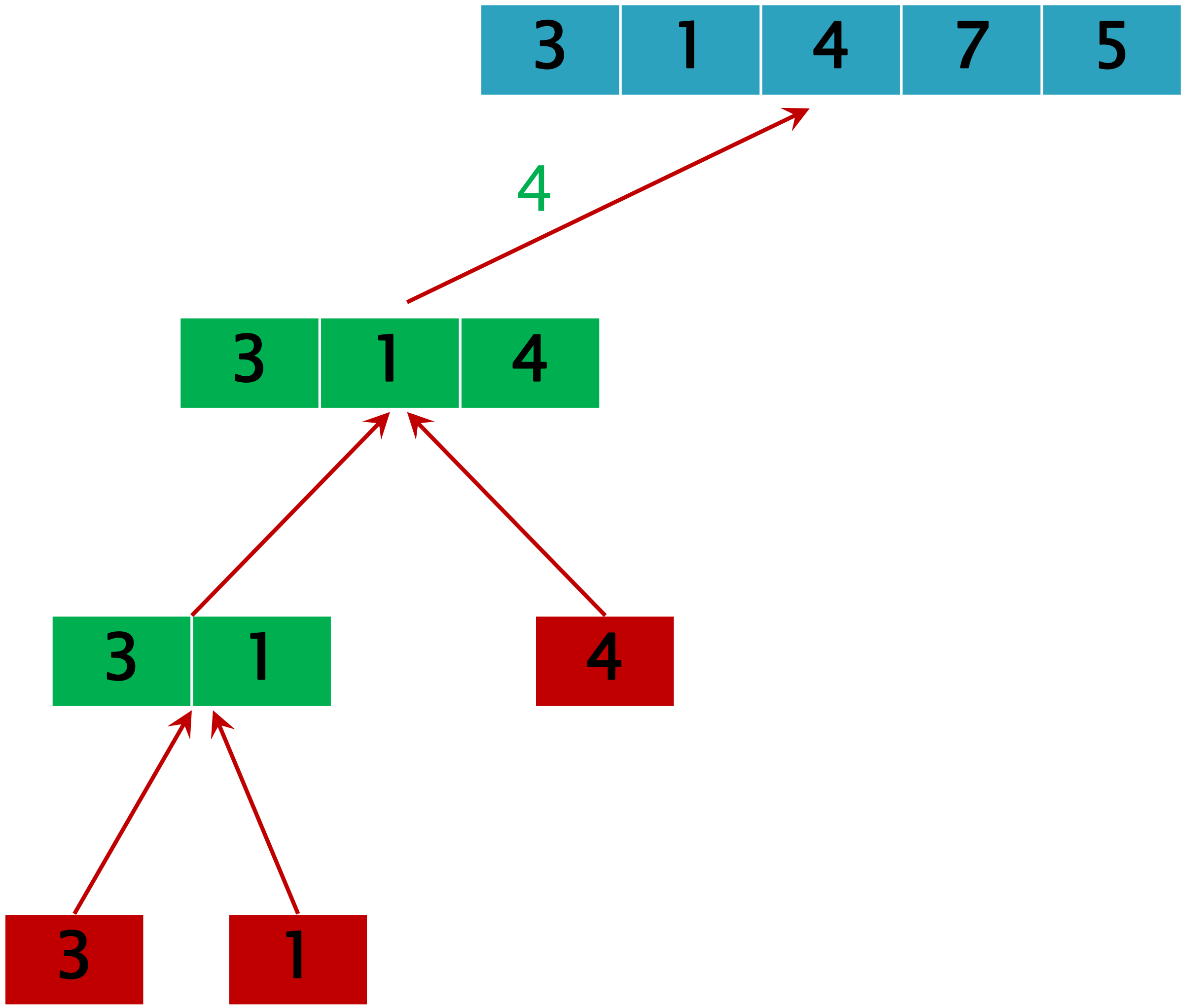
Metoda Divide et Impera



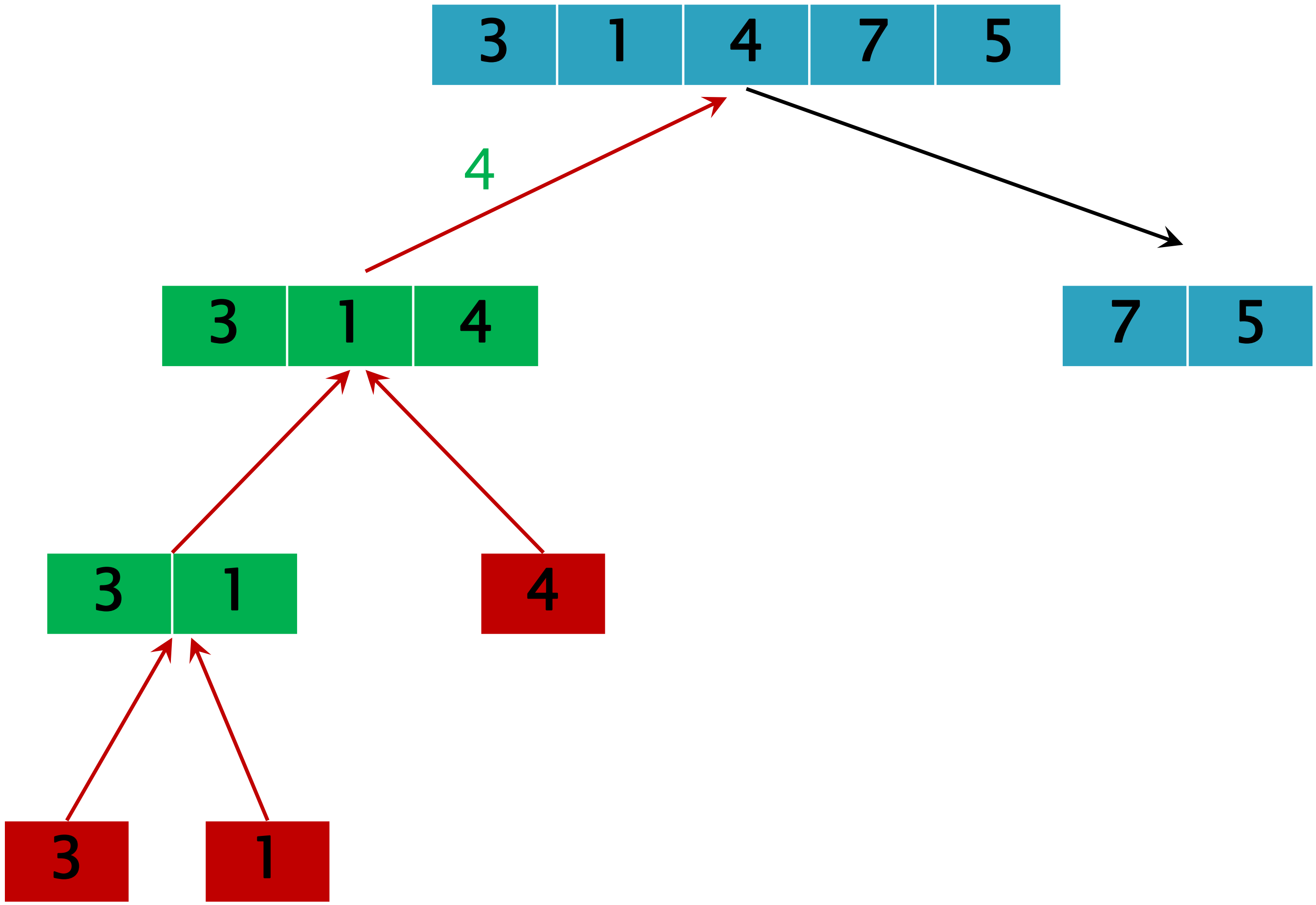
Metoda Divide et Impera



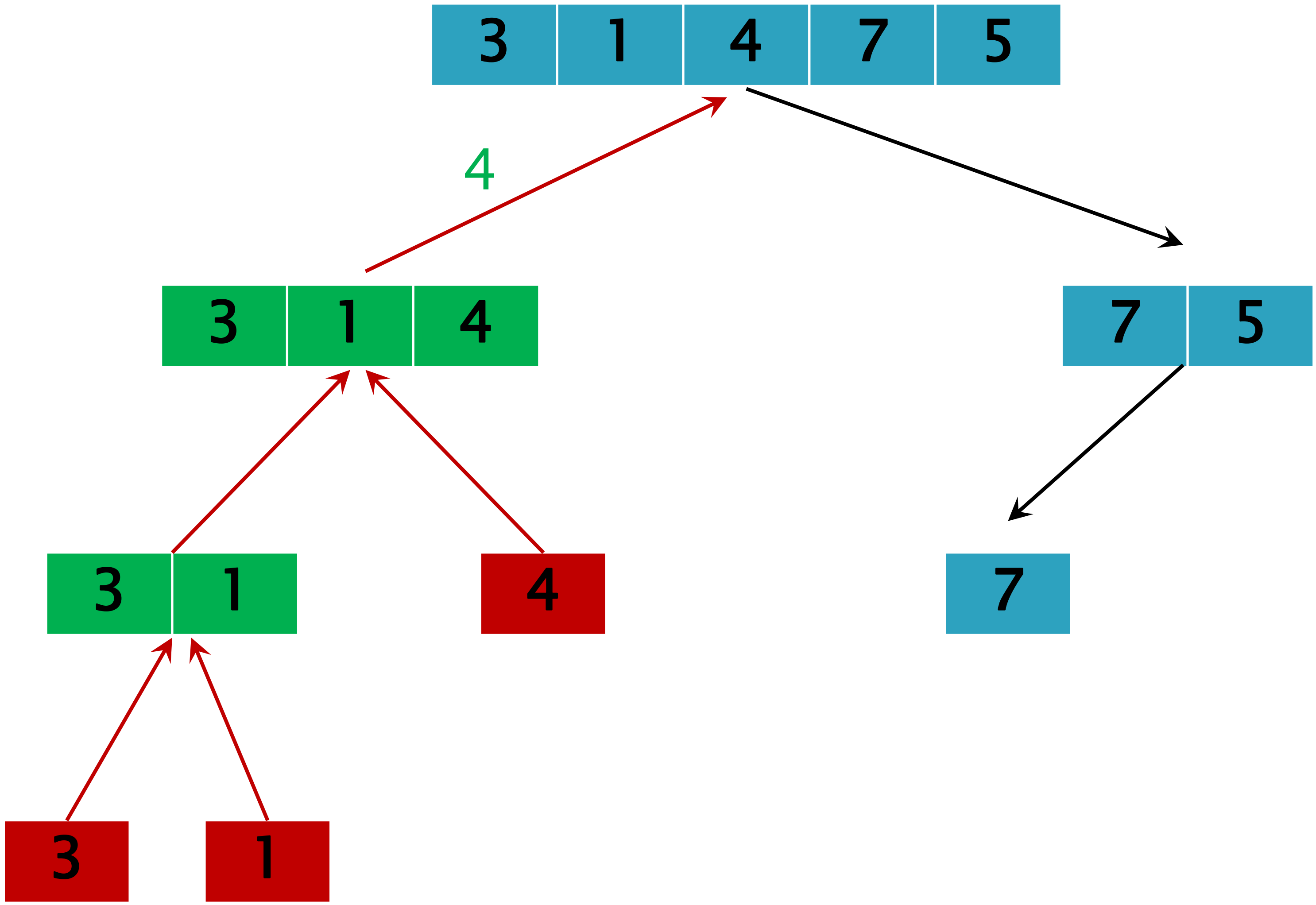
Metoda Divide et Impera



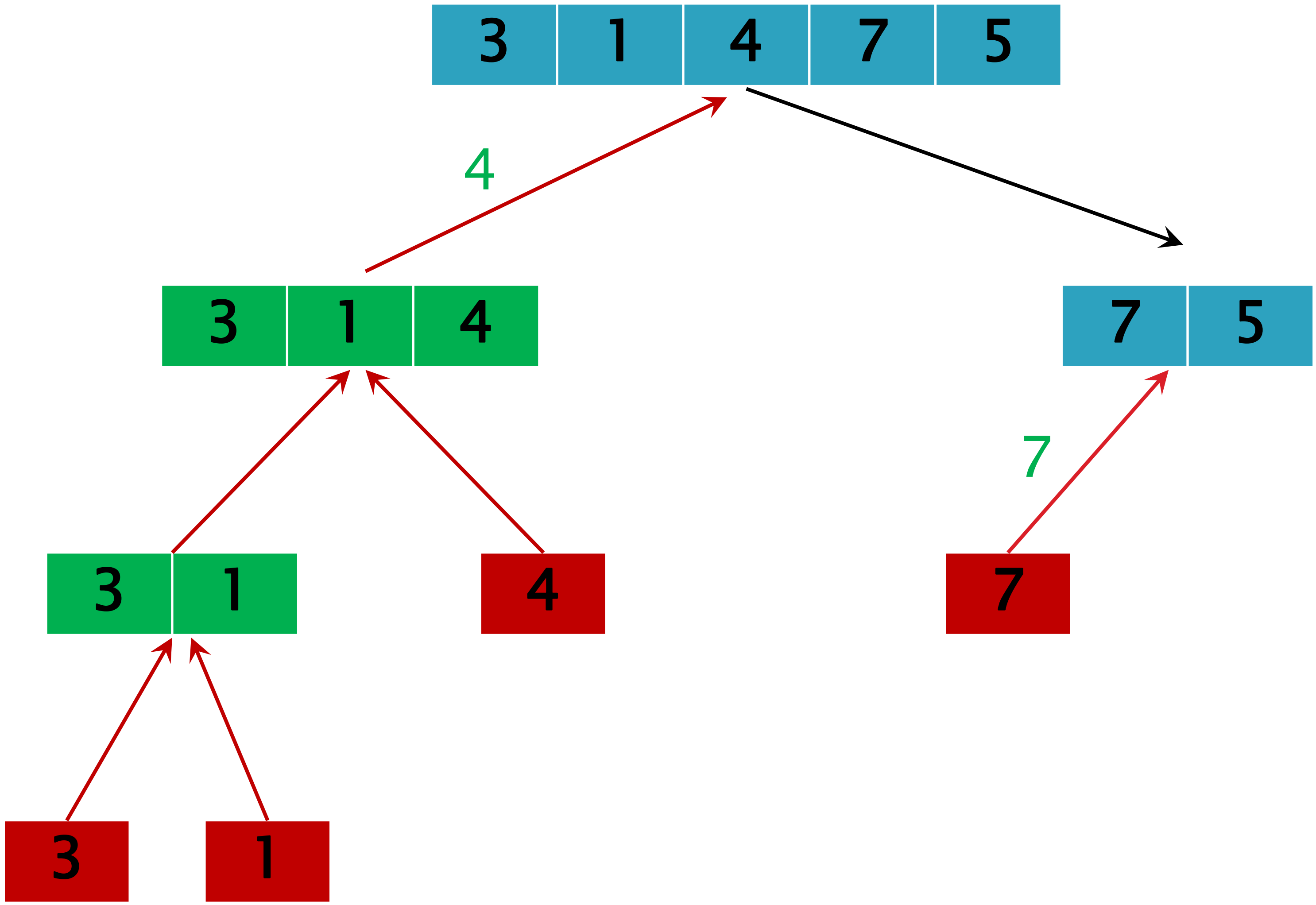
Metoda Divide et Impera



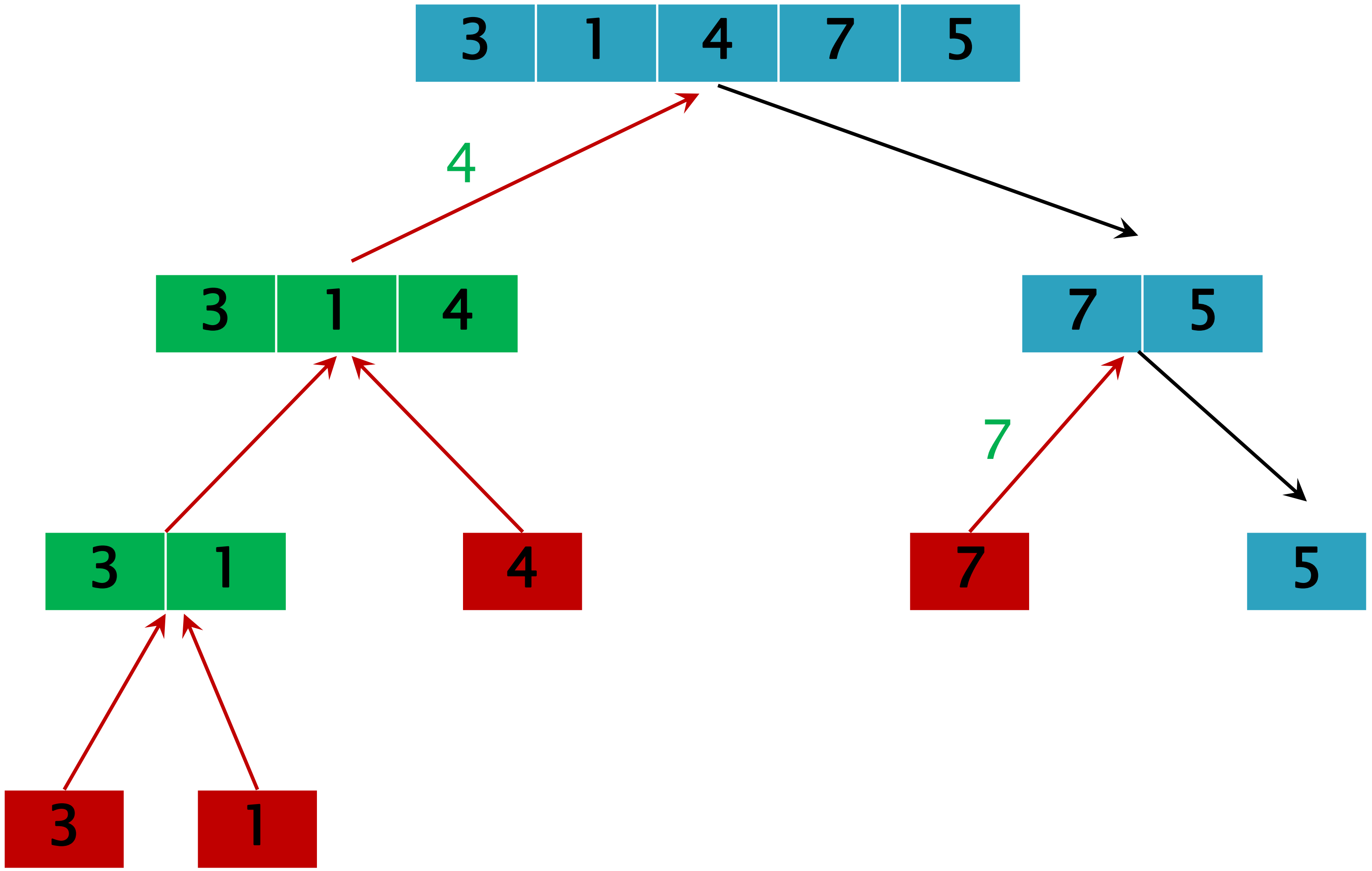
Metoda Divide et Impera



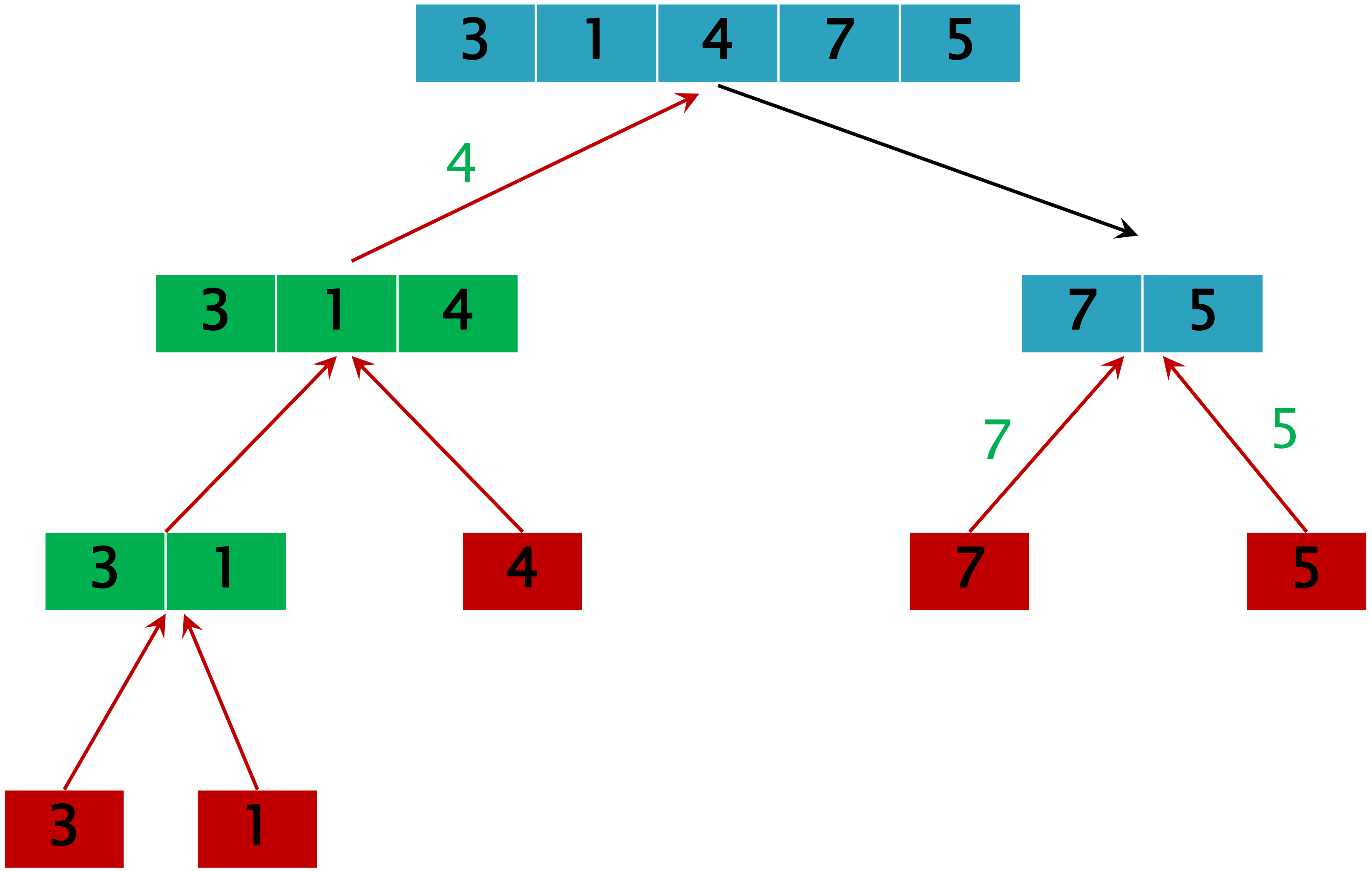
Metoda Divide et Impera



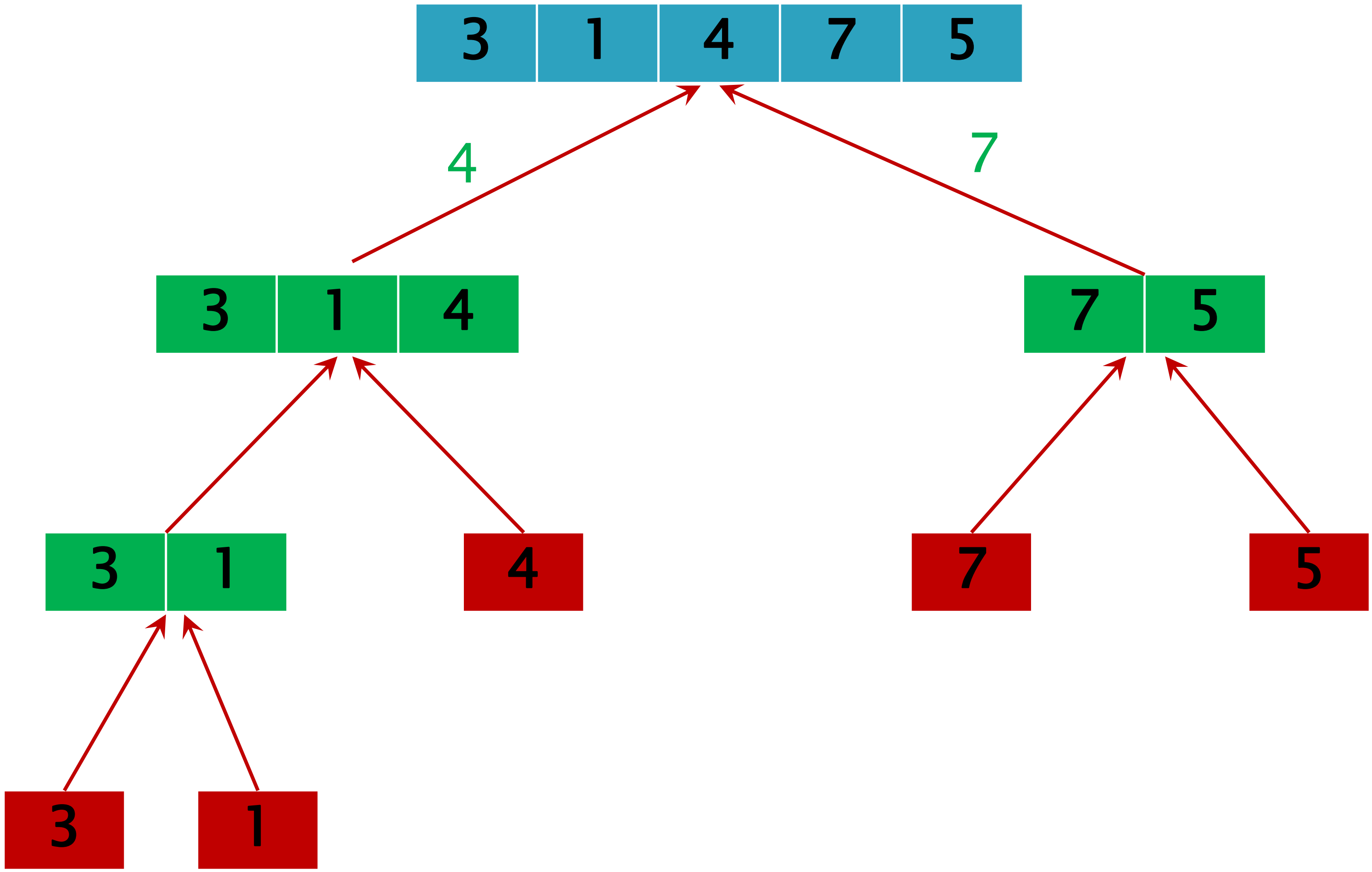
Metoda Divide et Impera



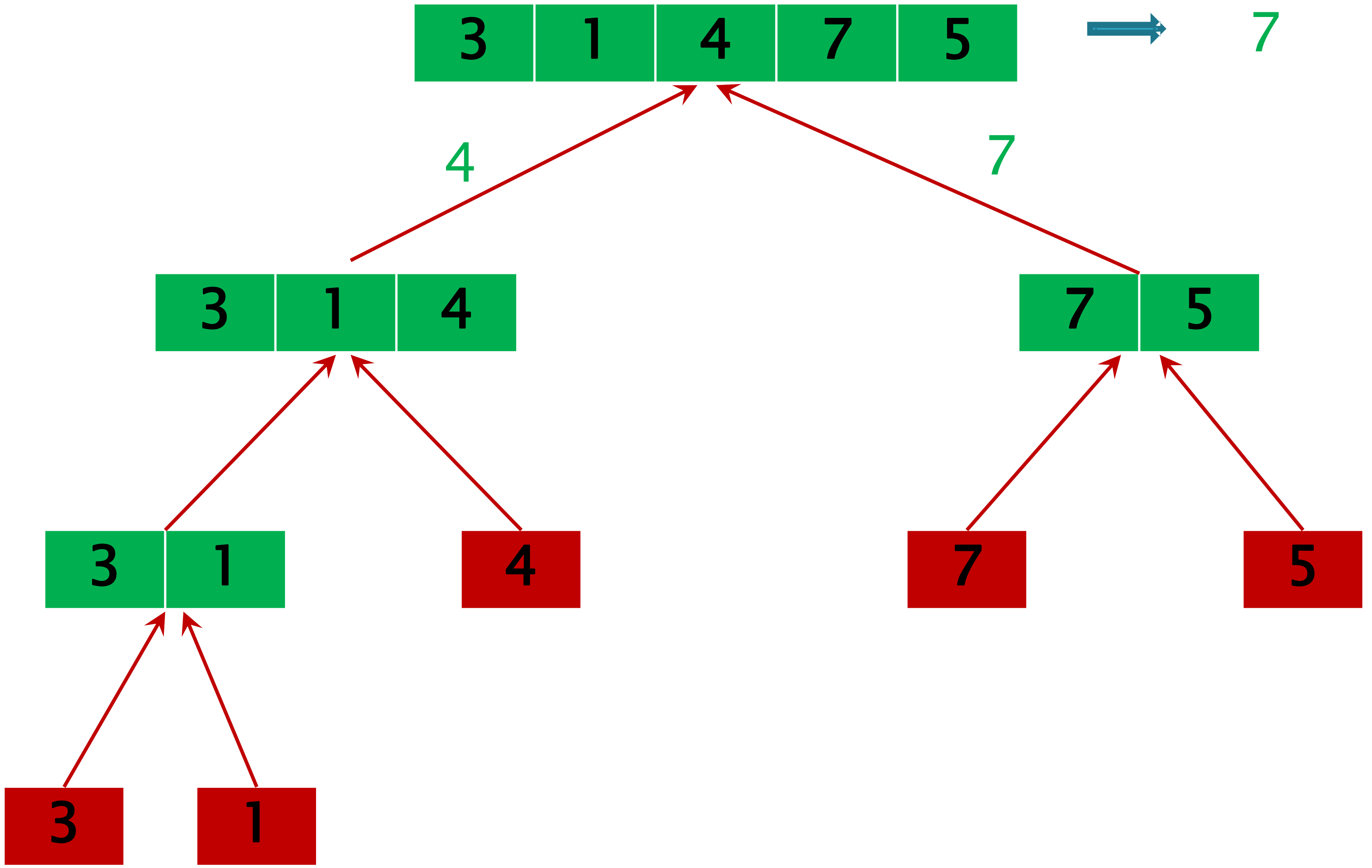
Metoda Divide et Impera



Metoda Divide et Impera



Metoda Divide et Impera



Exemplu –maximul elementelor unui vector

Complexitate

```
function DivImp(p,u)
    if u == p          → subproblema de dimensiune 1: u-p<1
        r ← a[p]
  else
        m ← ⌊(p+u)/2⌋
        r1 ← DivImp(p,m)       ← Subproblema de dimensiune n/2
        r2 ← DivImp(m+1,u)     ← Subproblema de dimensiune n/2
         if r1>r2
            r ← r1             ← Combinarea rezultatelor celor două
                                 subprobleme – timp constant c (O(1))
        else
            r ← r2
  return r
```

Apel: `DivImp(0,n-1)` → $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$ =>
$T(n) = 2T(n/2) + 1$ (putem considera c=1

Metoda Divide et Impera

- **Complexitate – relație de recurență**

$$T(n) = \begin{cases} c, & \text{pentru } n = 1 \\ T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + c, & \text{pentru } n > 1 \end{cases}$$

Metoda Divide et Impera

- **Complexitate – relație de recurență**

$$T(n) = \begin{cases} c, & \text{pentru } n = 1 \\ T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + c, & \text{pentru } n > 1 \end{cases}$$

- Suficient să presupunem că $n = 2^k$, $c=1$

  (apoi înlocuim $=$ cu $\leq$ în relații)

- Rezolvarea recurenței

  – metoda substituțiilor repetate

  – arbori de recurențe

  => demonstrație Teorema master

Metoda Divide et Impera

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } n = 1 \\ 2T(n/2) + 1, & \text{pentru } n > 1 \end{cases}$$

- Suficient să presupunem că $n = 2^k$

Metoda 1:

- **Rezolvarea recurenței prin metoda substituțiilor repetate**:

  Putem înlocui de la început n cu 2^k sau lucra cu $n, n/2, n/2^2...$
  Prezentăm ambele variante:

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

VARIANTA 1 – lucrăm cu n, $n/2$, $n/2^2$...

$T(n) = 2T(n/2) + 1$

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 1 =$$

$$= 2 \cdot [2T(n/2^2) + 1] + 1 =$$

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 1 =$$

$$= 2 \cdot [2T(n/2^2) + 1] + 1 =$$

$$= 2^2 \cdot T(n/2^2) + (1+2) =$$

$$=$$

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + 1 =$$

$$= 2 \cdot [2T(n/2^2) + 1] + 1 =$$

$$= 2^2 \cdot T(n/2^2) + (1+2) =$$

$$= 2^2 \cdot [2T(n/2^3) + 1] + (1+2) =$$

$k=\log_2(n)$

$$= 2^3 \cdot T(n/2^3) + (1+2+2^2) = \ldots$$

$$= 2^k \cdot T(n/2^k) + (1+2+2^2+\ldots+2^{k-1}) =$$

$$= 2^k \cdot T(1) + (2^k-1) = n + (n-1) = (2n-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{T(n) = O(n)}$$

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

VARIANTA 2 – înlocuim de la început n cu 2^k

$T(n) = 2T(n/2) + 1$

$T(n) = T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + 1 =$

$T(n) = 2T(n/2) + 1$

$$T(n) = T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + 1 =$$

$$= 2 \cdot [2T(2^{k-2}) + 1] + 1 =$$

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

$$T(n) = T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + 1 =$$

$$= 2 \cdot [2T(2^{k-2}) + 1] + 1 =$$

$$= 2^2 \cdot T(2^{k-2}) + (1+2) =$$

$$=$$

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

$$T(n) = T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + 1 =$$

$$= 2 \cdot [2T(2^{k-2}) + 1] + 1 =$$

$$= 2^2 \cdot T(2^{k-2}) + (1+2) =$$

$$= 2^2 \cdot [2T(2^{k-3}) + 1\ ] + (1+2) =$$

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

$$T(n) = T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + 1 =$$

$$= 2 \cdot [2T(2^{k-2}) + 1] + 1 =$$

$$= 2^2 \cdot T(2^{k-2}) + (1+2) =$$

$$= 2^2 \cdot [2T(2^{k-3}) + 1] + (1+2) =$$

$$= 2^3 \cdot T(2^{k-3}) + (1+2+2^2) = \ldots$$

$$=$$

$T(n) = 2T(n/2) + 1$

$$T(n) = T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + 1 =$$

$$= 2 \cdot [2T(2^{k-2}) + 1] + 1 =$$

$$= 2^2 \cdot T(2^{k-2}) + (1+2) =$$

$$= 2^2 \cdot [2T(2^{k-3}) + 1\,] + (1+2) =$$

$$= 2^3 \cdot T(2^{k-3}) + (1+2+2^2) = \ldots$$

$$= 2^k \cdot T(2^0) + (1+2+2^2+\ldots+2^{k-1}) =$$

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

$$T(n) = T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + 1 =$$

$$= 2 \cdot [2T(2^{k-2}) + 1] + 1 =$$

$$= 2^2 \cdot T(2^{k-2}) + (1+2) =$$

$$= 2^2 \cdot [2T(2^{k-3}) + 1\ ] + (1+2) =$$

$k=\log_2(n)$, $2^k=n$

$$= 2^3 \cdot T(2^{k-3}) + (1+2+2^2) = \ldots$$

$$= 2^k \cdot T(2^0) + (1+2+2^2+\ldots+2^{k-1}) =$$

$$= 2^k \cdot T(1) + (2^k-1) = n + (n-1) = 2n-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{T(n) = O(n)}$$

Metoda Divide et Impera

$$T(n) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } n = 1 \\ 2T(n/2) + 1, & \text{pentru } n > 1 \end{cases}$$

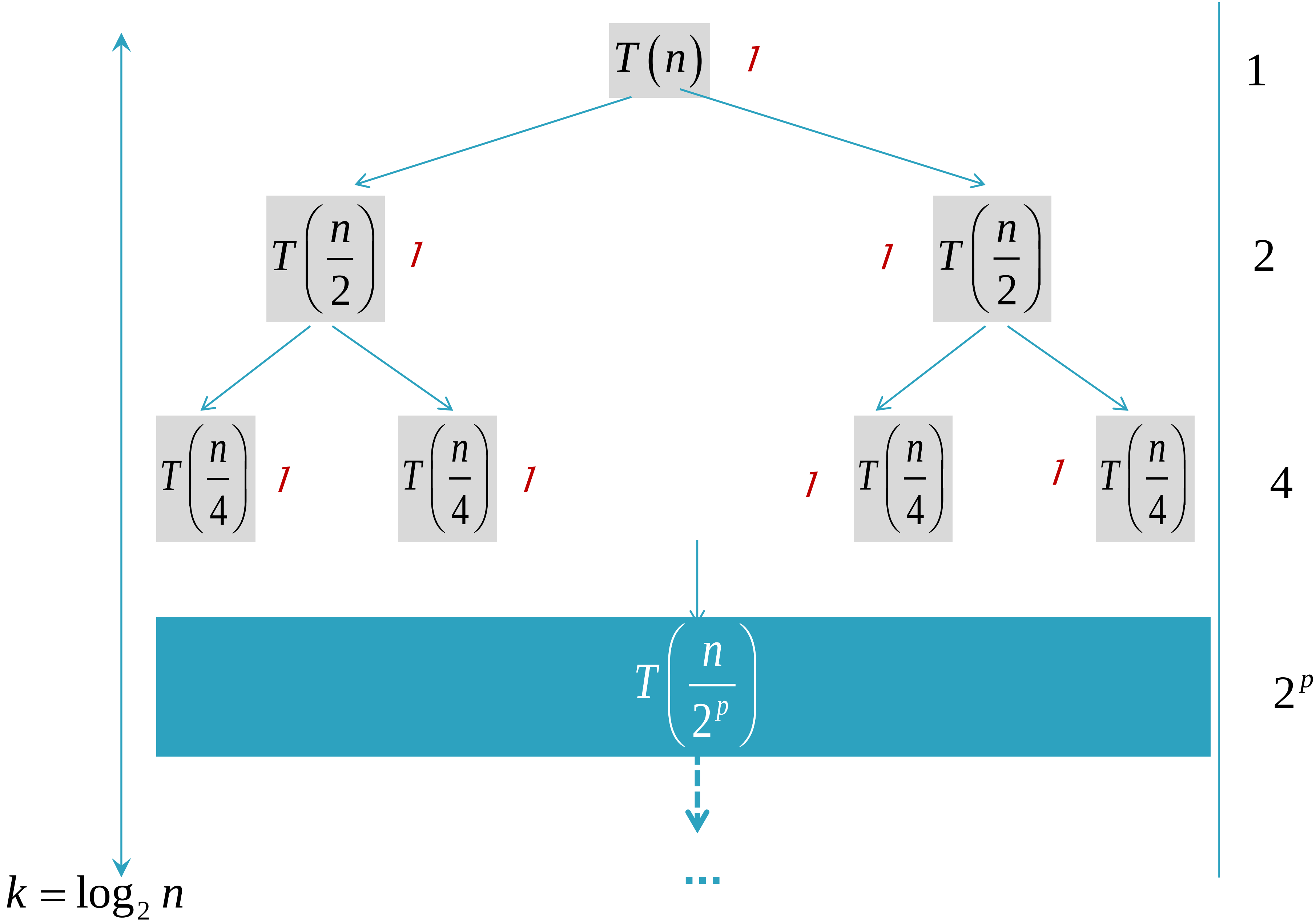
- Suficient să presupunem că $n = 2^k$

  (apoi înlocuim = cu ≤ în relații)

Metoda 2:

- Rezolvarea recurenței folosind arbori de recurențe

  => demonstrație Teorema master



$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^k = (2^{k+1} - 1) = 2n - 1 \Rightarrow \quad O(n)$$

Metoda Divide et Impera

- **În termeni de arbori**, DI constă în
  - **construirea dinamică a unui arbore** (prin împărţirea în subprobleme)

  urmată de

  - **parcurgerea în postordine a arborelui** (prin asamblarea rezultatelor parţiale).

Exemple clasice

- Căutare binară
- Sortarea prin interclasare (Merge Sort)
- Sortarea rapidă (Quick Sort)
- Problema turnurilor din Hanoi

Căutarea binară

Căutarea binară

- **Se consideră vectorul a=(a_1,...,a_n) ordonat crescător şi o valoare x. Se cere să se determine dacă x apare printre componentele vectorului.**

- Mai exact căutăm perechea (b,i) dată de:
  - `(True,i)` dacă $a_i = x$;
  - `(False,i)` dacă $\mathbf{a_{i-1} < x < a_i}$,

  unde, prin convenţie,

$$a_0 = -\infty,\ a_{n+1} = +\infty.$$

Căutarea binară

```
def cautare_binara(x,ls,p,u):
    if p > u:
        return (False, u)
    else:
        mij = (p + u) // 2
        if x == ls[mij]:
            return (True,mij)
        elif x < ls[mij]:
            return cautare_binara(x,ls, p, mij-1)
        else:
            return cautare_binara(x,ls, mij+1, u)

def cautare(x,ls):
    n = len(ls)
    return cautare_binara(x,ls,0,n-1)
```

Căutarea binară

Implementare nerecursivă

```
def cautare_binara_nerecursiv(x,ls):
    p = 0
    u = len(ls) - 1
    while p<=u:
        mij = (p + u) // 2
        if x == ls[mij]:
            return (True, mij)
        elif x < ls[mij]:
            u = mij - 1
        else:
            p = mij + 1
    return (False,u)
```

Căutarea binară

- **Complexitate:** $O(\log n)$
  - $T(n) = T(n/2)+c$

Căutarea binară

- **Complexitate:** $O(\log n)$
  - $n=2^k$
  - $T(1) = 1$, $T(n) = T(n/2)+1$

Căutarea binară

- **Complexitate:** O(log n)

  - $n=2^k$
  - $T(1) = 1, T(n) = T(n/2)+1$

  Metoda substituțiilor repetate

  - $T(n) = T(n/2)+1 = [T(n/2^2)+1]+1 = T(n/2^2)+2 =$

Căutarea binară

- **Complexitate:** $O(\log n)$

  - $n=2^k$
  - $T(1) = 1$, $T(n) = T(n/2)+1$

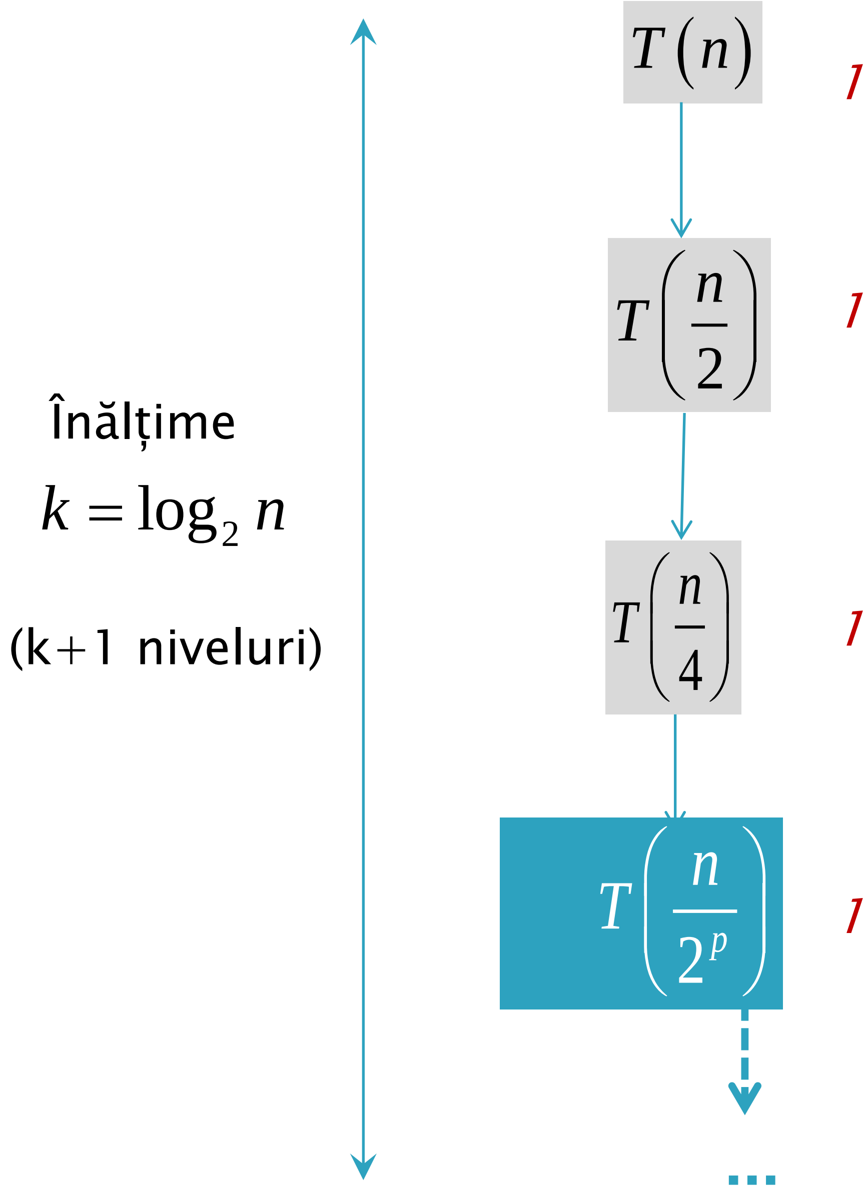
  Metoda substituțiilor repetate

  - $T(n) = T(n/2)+1 = [T(n/2^2)+1]+1 = T(n/2^2)+2 =$

    $= \ldots = T(n/2^k)+k = 1 + \log_2 n$

    $k = \log_2 n$

$\Rightarrow O(\log_2 n)$

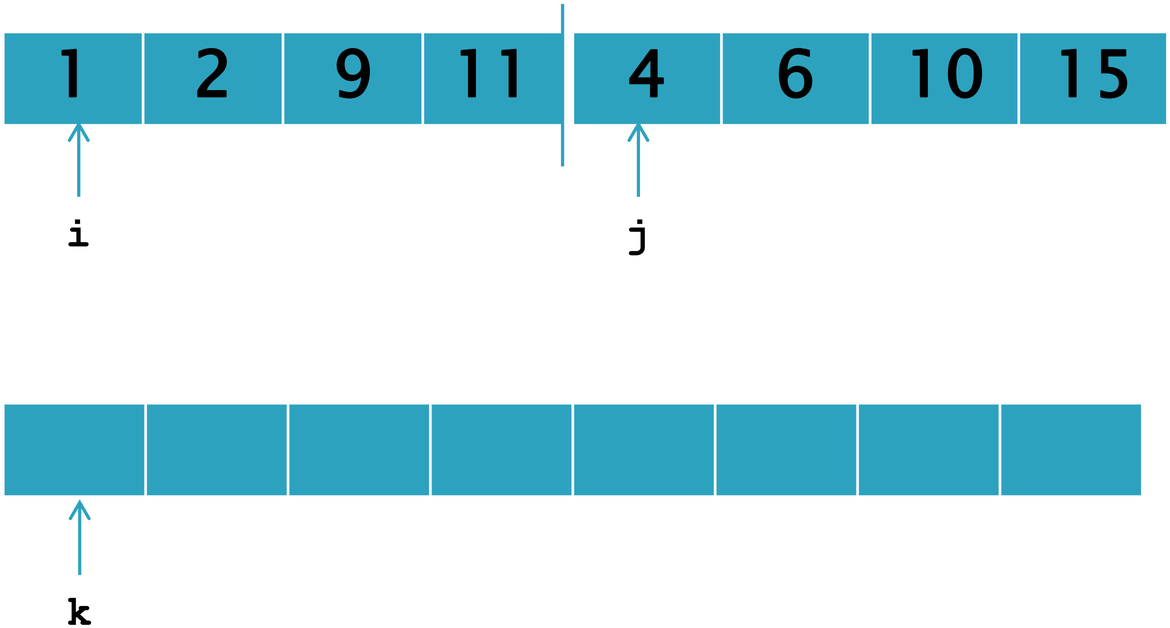


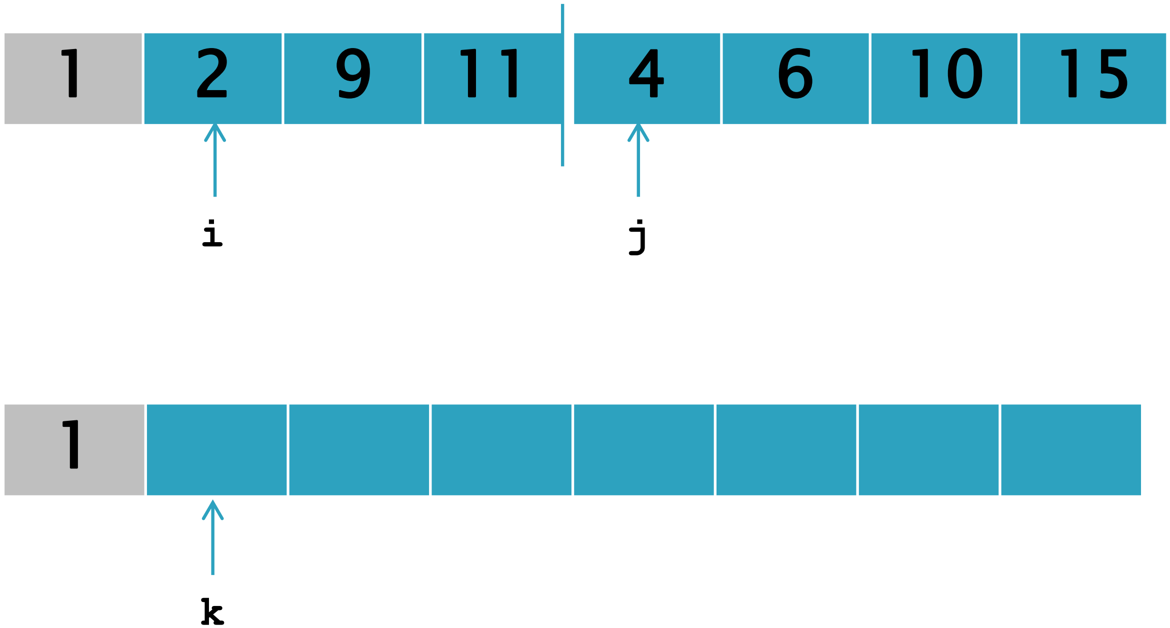
$$1+1+1+\ldots+1 = k+1 = log(n)+1 \Rightarrow \quad O(log(n))$$

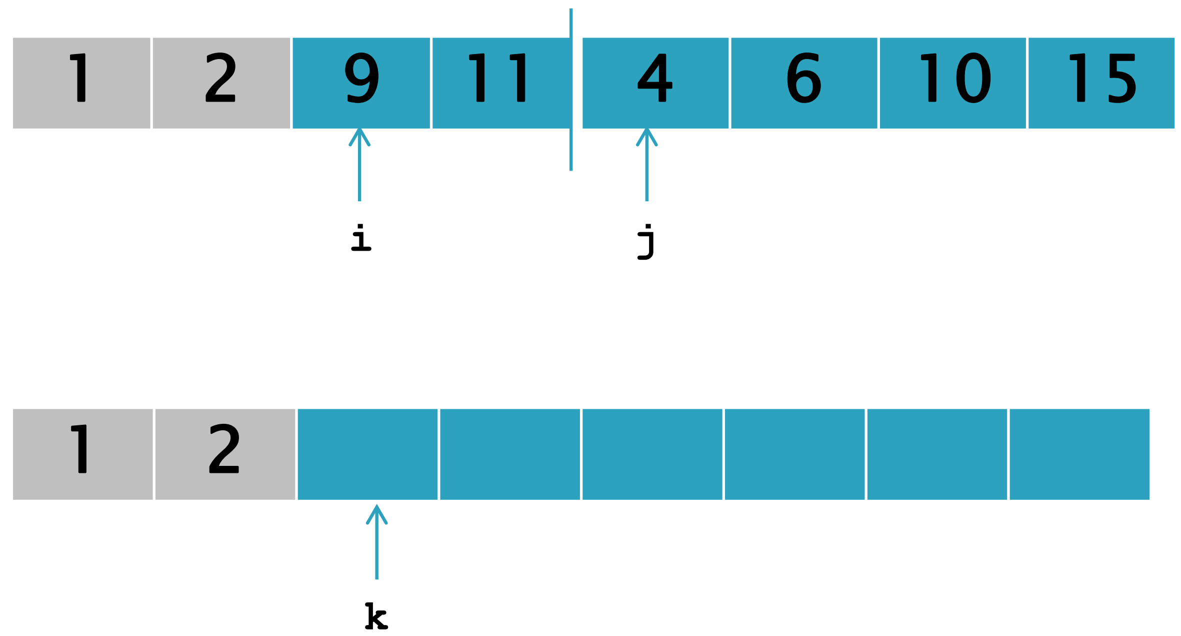
Sortarea prin interclasare

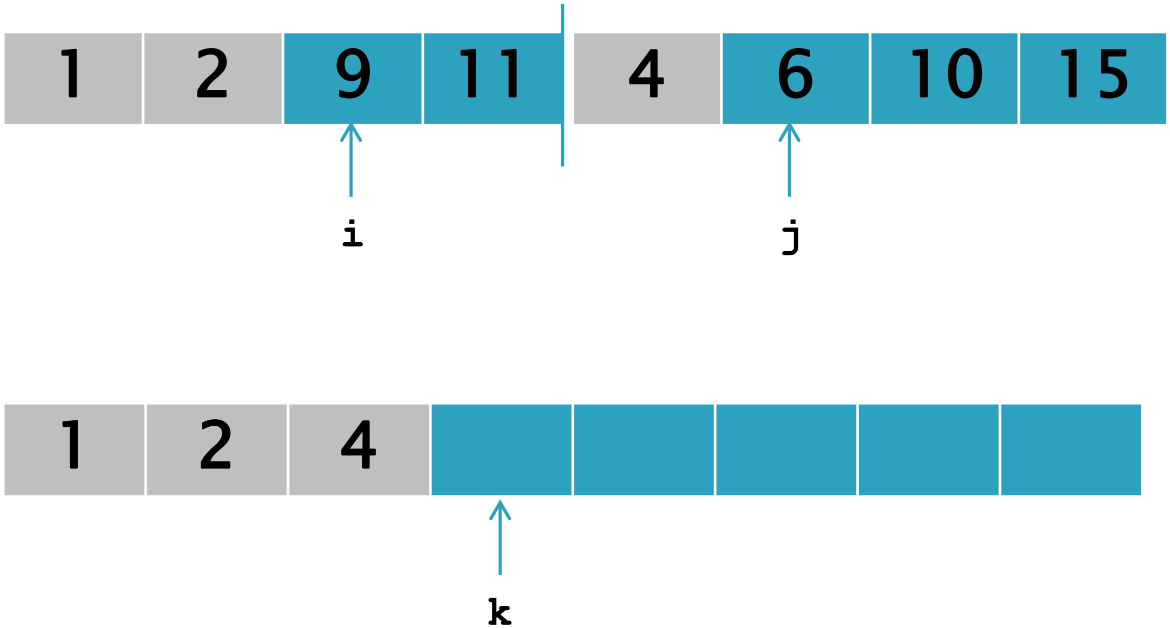
Sortare prin interclasare

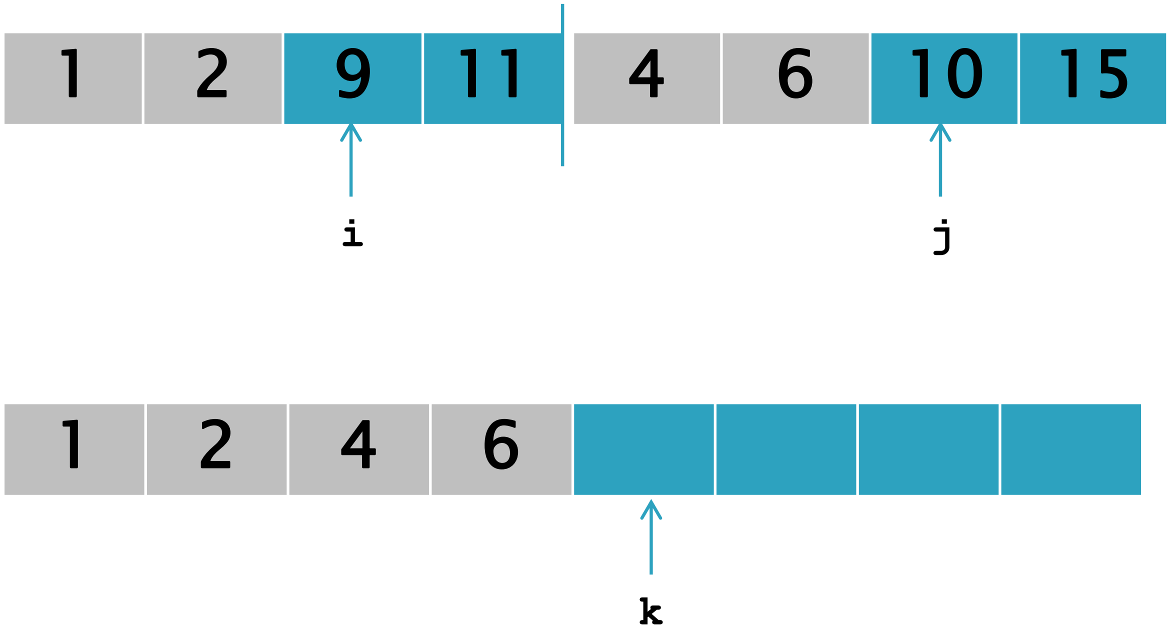
- **Idee:**
  - împărţim vectorul în doi subvectori
  - ordonăm crescător fiecare subvector
  - asamblăm rezultatele prin ***interclasare***


1
2
9
11
4
6
10
15
i
j
k

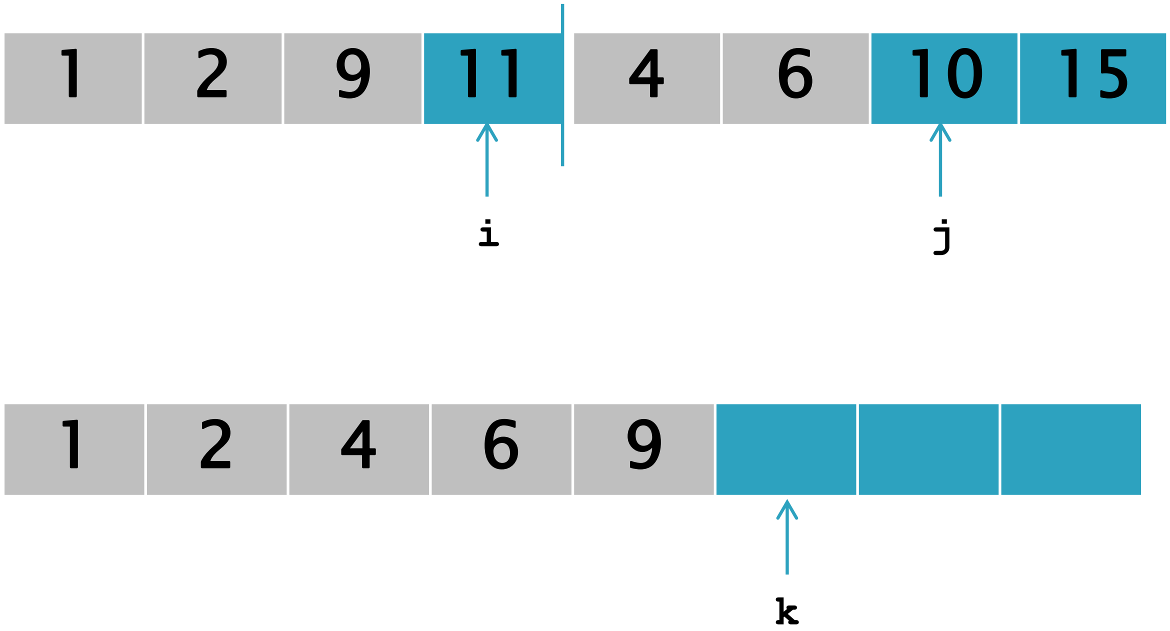

1
2
9
11
4
6
10
15
i
j
1
k

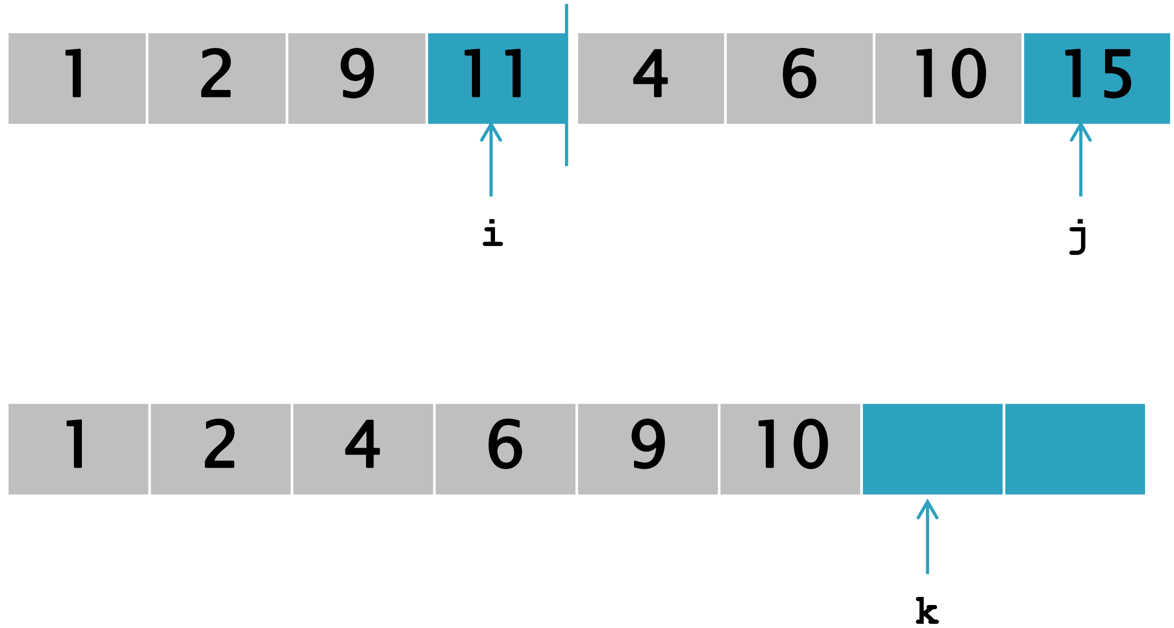

1
2
9
11
4
6
10
15
i
j
1
2
k

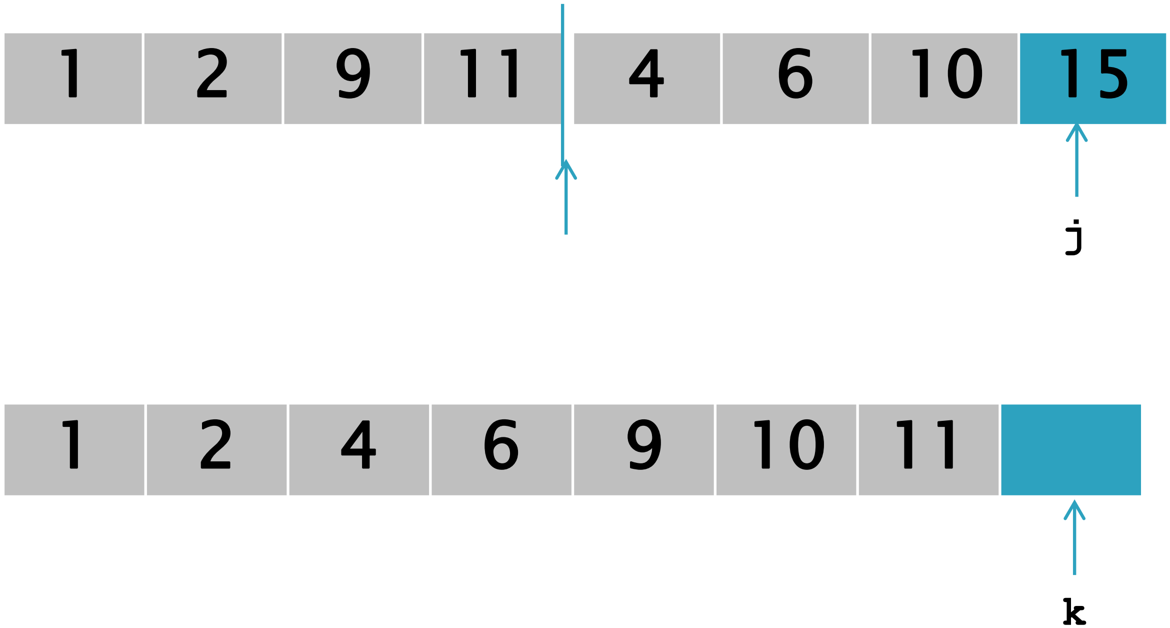

1
2
9
11
4
6
10
15
i
j
1
2
4
k



1
2
9
11
4
6
10
15
i
j
1
2
4
6
k

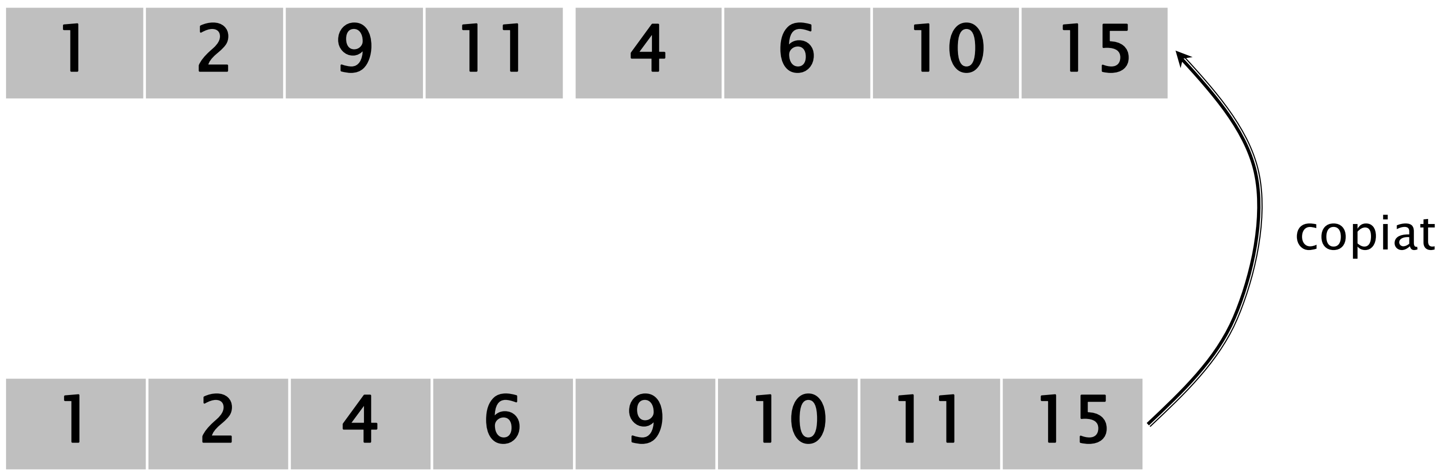

1
2
9
11
4
6
10
15
i
j
1
2
4
6
9
k


1 2 9 11 4 6 10 15
i
j
1 2 4 6 9 10
k


1 2 9 11 4 6 10 15
j
1 2 4 6 9 10 11
k

1	2	9	11	4	6	10	15

1	2	4	6	9	10	11	15


1 2 9 11 4 6 10 15
copiat
1 2 4 6 9 10 11 15

Sortare prin interclasare

```
def sort_interclasare(v, p, u):
    if p == u:
        pass
    else:
        m = (p+u)//2
        sort_interclasare(v, p, m)
        sort_interclasare(v, m+1, u)
        interclaseaza(v, p, m, u)
```

```python
def interclaseaza(a, p, m, u):
   b = [None]*(u-p+1)
   i = p
   j = m + 1
   k = 0
   while (i<=m) and (j <= u):
         if a[i] <= a[j]:
            b[k] = a[i]; i += 1
         else:
            b[k] = a[j]; j+= 1
         k+=1

   while i<=m:
      b[k] = a[i]; k += 1; i += 1

   while j<=u:
      b[k] = a[j]; k += 1; j += 1

   for i in range(p,u+1):
      a[i] = b[i-p]
```

Sortare prin interclasare

➢**Complexitate:**

```
def sort_interclasare(v, p, u):
    if p == u:
        pass
    else:
        m = (p+u)//2
        sort_interclasare(v, p, m)
        sort_interclasare(v, m+1, u)
        interclaseaza(v, p, m, u)
```

Problema de dimensiune n

Timp constant O(1)

Două subprobleme de dimensiune n/2

O(n) (interclaseaza cele doua jumatati, adica doi vectori de dimensiune n/2)

$\Rightarrow T(n) = 2T(n/2) + O(n)$

$T(n) = 2T(n/2) + n$

Sortare prin interclasare

- **Complexitate:**

$$T(n) = 2T(n/2)+n, \text{ pentru } n>1$$

$T(n)=2T(n/2)+n,\ n=2^k$

Varianta 1

$T(n) = 2\ T(n/2) + n =$

$= 2\ [2T(n/2^2) + n/2] + n =$

$=$

$T(n)=2T(n/2)+n,\ n=2^k$

Varianta 1

$T(n) = 2\ T(n/2) + n =$

$= 2\ [2T(n/2^2) + n/2] + n=$

$= 2^2T(n/2^2) + 2 \cdot n/2+n = 2^2T(n/2^2) + n+n =$

$= 2^2T(n/2^2) + 2 \cdot n =$

$= \ldots =$

$T(n)=2T(n/2)+n,\ n=2^k$

Varianta 1

$T(n) = 2\ T(n/2) + n =$

$= 2\ [2T(n/2^2) + n/2] + n=$

$= 2^2T(n/2^2) + 2\cdot n/2+n = 2^2T(n/2^2) + n+n =$

$= 2^2T(n/2^2) + 2\cdot n =$

$= \ldots = 2^kT(n/2^k) + k\cdot n =$

$T(n)=2T(n/2)+n,\ n=2^k$

Varianta 1

$T(n) = 2\ T(n/2) + n =$

$= 2\ [2T(n/2^2) + n/2] + n=$

$= 2^2T(n/2^2) + 2 \cdot n/2+n = 2^2T(n/2^2) + n+n =$

$= 2^2T(n/2^2) + 2 \cdot n =$

$= \ldots = 2^kT(n/2^k) + k \cdot n = 2^kT(1)+ k \cdot n = n + n \cdot \log_2 n$

$\Rightarrow$ **O(n log(n))**

$k=\log_2(n),\ 2^k=n$

$T(n)=2T(n/2)+n,\ n=2^k$

Varianta 2 – inlocuim de la inceput n cu 2^k

$$T(n) = T(2^k) = 2\ T(2^{k-1}) + 2^k =$$

$$= 2\ [2T(2^{k-2}) + 2^{k-1}] + 2^k = 2^2T(2^{k-2}) + 2\cdot 2^k$$

$$= \ldots =$$

$T(n)=2T(n/2)+n,\ n=2^k$

Varianta 2 – inlocuim de la inceput n cu 2^k

$$T(n) = T(2^k) = 2\ T(2^{k-1}) + 2^k =$$

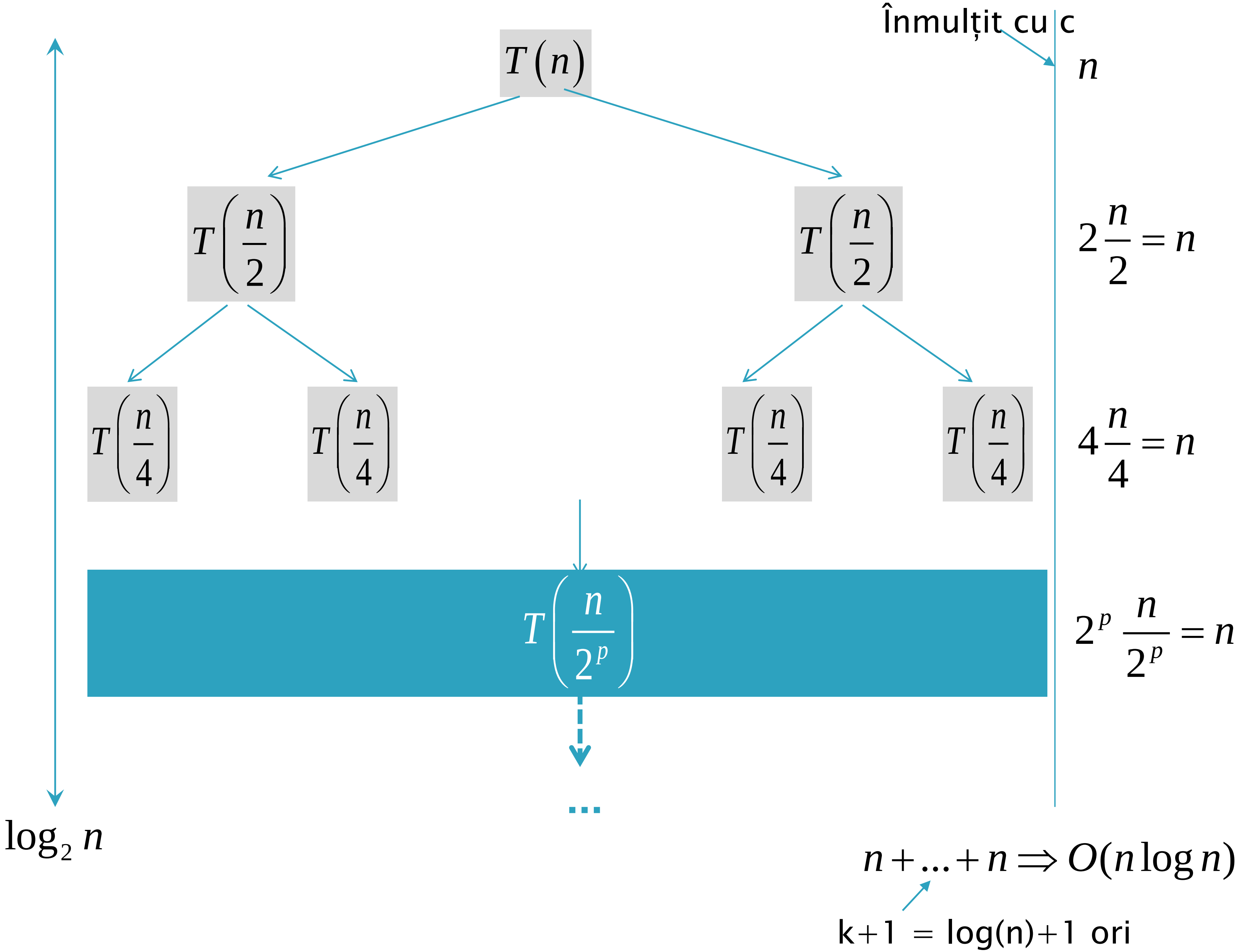
$$= 2\ [2T(2^{k-2}) + 2^{k-1}] + 2^k = 2^2T(2^{k-2}) + 2 \cdot 2^k$$

$$= \ldots = 2^iT(2^{k-i}) + i \cdot 2^k =$$

$$= 2^kT(1) + k \cdot 2^k = n + n \cdot \log_2 n$$

$\Rightarrow$ **O(n log(n))**

$k=\log_2(n),\ 2^k=n$


Înmulțit cu c
$T(n)$
n
$T\left(\frac{n}{2}\right)$
$T\left(\frac{n}{2}\right)$
$2\frac{n}{2}=n$
$T\left(\frac{n}{4}\right)$
$T\left(\frac{n}{4}\right)$
$T\left(\frac{n}{4}\right)$
$T\left(\frac{n}{4}\right)$
$4\frac{n}{4}=n$
$T\left(\frac{n}{2^p}\right)$
$2^p\frac{n}{2^p}=n$
...
$\log_2 n$
$n+\ldots+n \Rightarrow O(n\log n)$
k+1 = log(n)+1 ori

Aplicație

Numărare inversiuni

Problemă

Se consideră un vector cu n elemente distincte.
Să de determine numărul de inversiuni din acest vector

- **Inversiune** = pereche (i, j) cu proprietatea că i < j şi $a_i > a_j$

- **Exemplu** **`1,2,11,9,4,6` ⇒ `5 inversiuni`**

  `((11,9), (11,4), (9,4), (11,6), (9,6))`

Aplicații

- **Măsură a diferenței între două liste ordonate**
- **“Gradul de ordonare” al unui vector**
- **Probleme de analiză a clasificărilor (ranking)**
  - Asemănarea între preferințele a doi utilizatori – sugestii de utilizatori cu preferințe similare
  - Asemănări dintre rezultatele întoarse de motoare diferite de căutare pentru aceeași cerere
  - **collaborative filtering**

Aplicații

- Suficient să presupunem că prima clasificare este

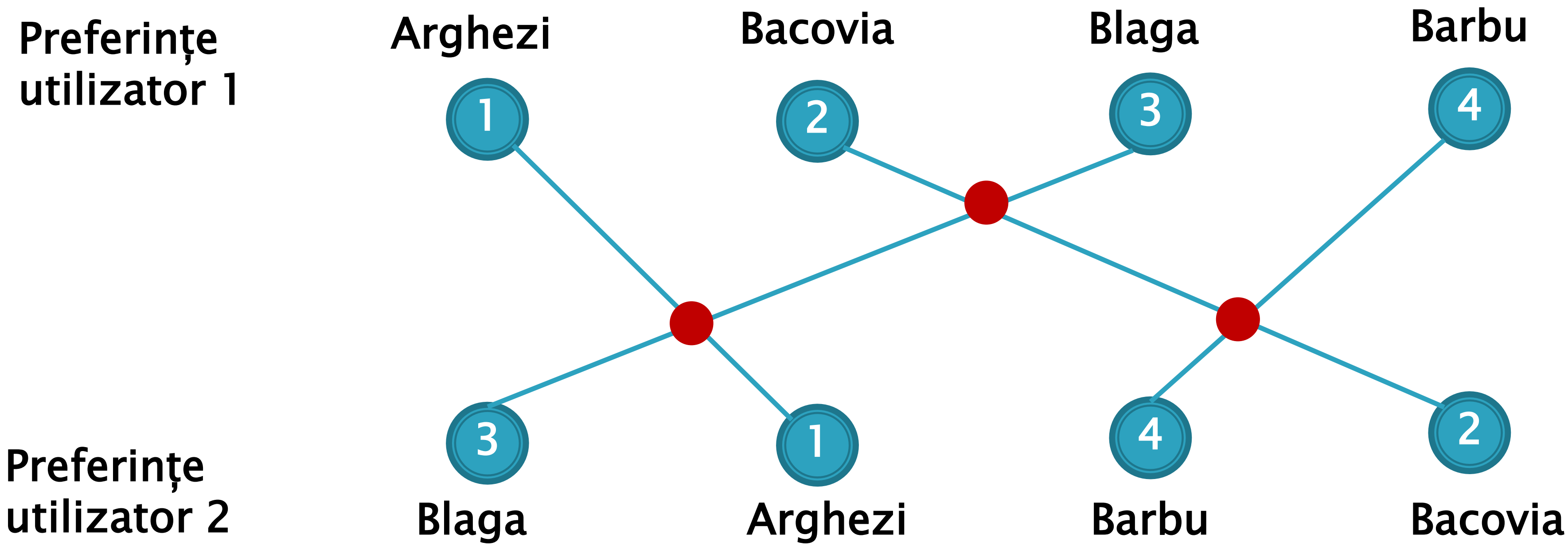
  `1, 2, 3, …, n`

- Gradul de asemănare dintre clasificări = numărul de inversiuni din a doua clasificare

Aplicații

Preferințe utilizator 1	Arghezi 1	Bacovia 2	Blaga 3	Barbu 4
Preferințe utilizator 2	3 Blaga	1 Arghezi	4 Barbu	2 Bacovia

Aplicații



3 inversiuni

Numărare inversiuni

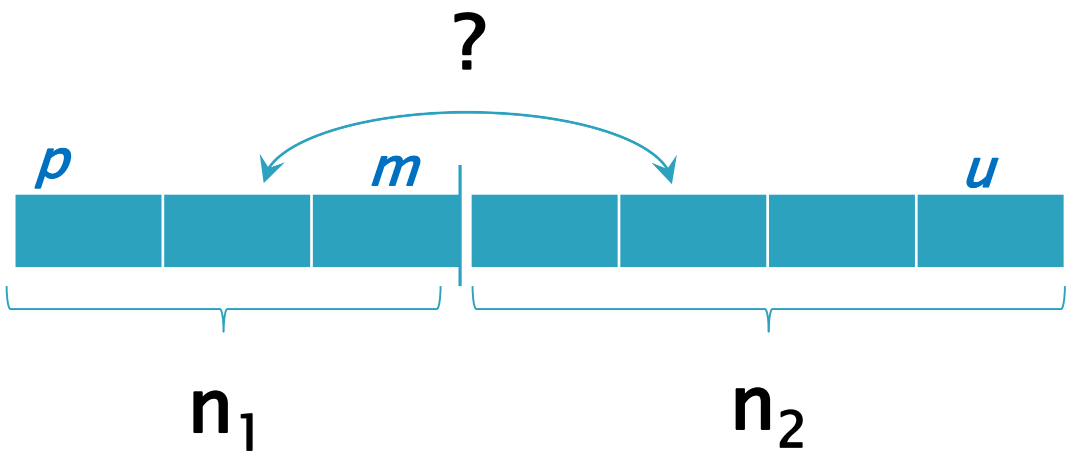
Numărul maxim de inversiuni pentru un vector cu n elemente?

Numărare inversiuni

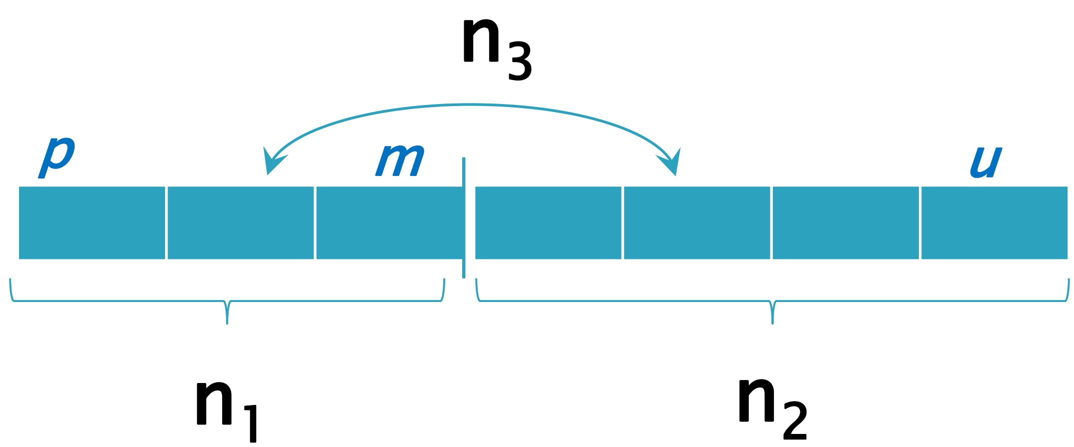
- **Algoritm $\Theta(n^2)$** – evident

Numărare inversiuni

- Algoritm Divide et Impera

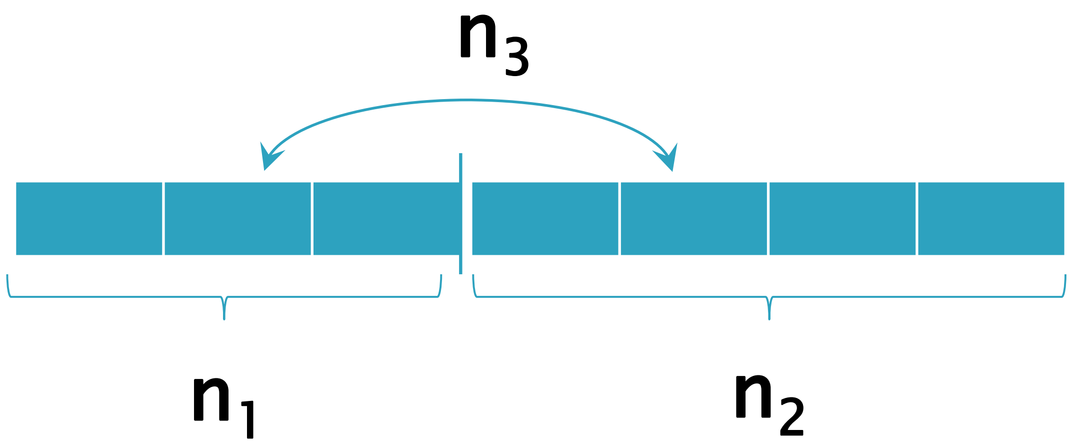


$$n_1+n_2+?$$

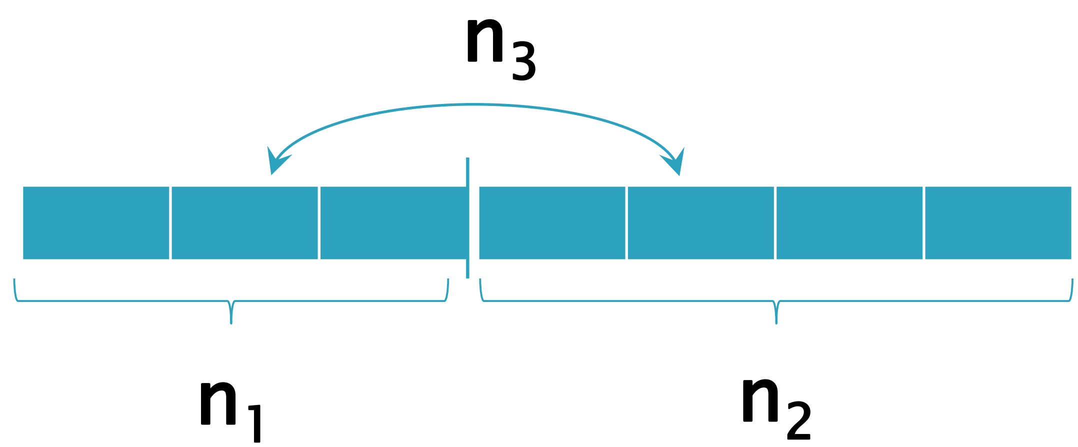


$$n_1+n_2+n_3$$

Cum calculăm eficient n_3?

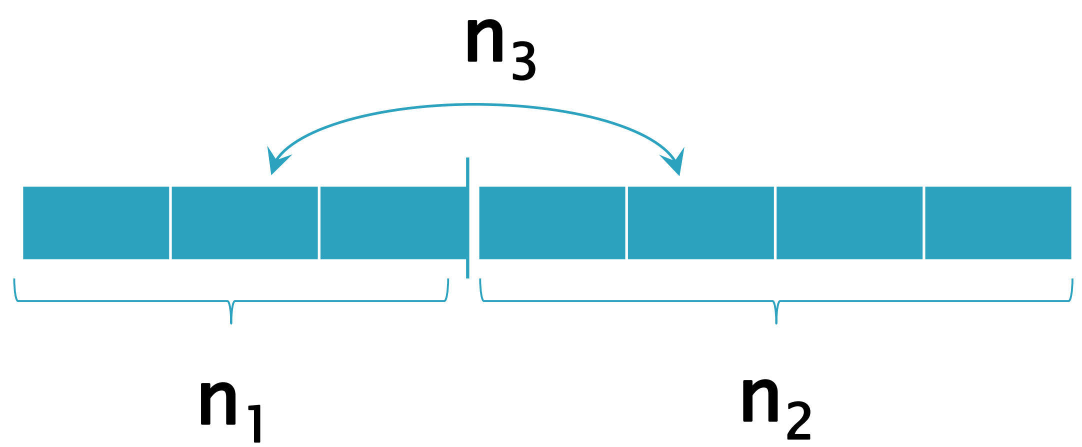


Cum calculăm eficient n_3?



Cum calculăm eficient n_3?

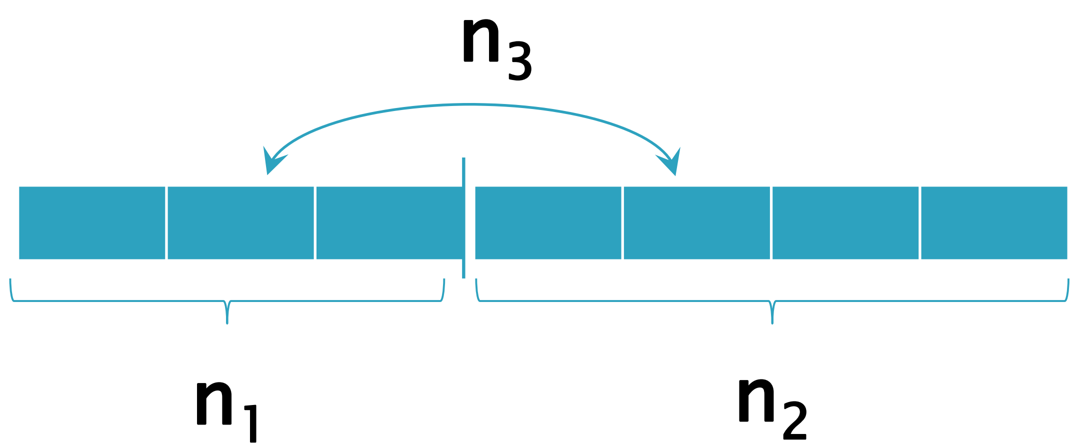
- **Încercare**: Considerăm fiecare pereche (i,j) cu i în subvectorul stâng și j în cel drept



Cum calculăm eficient n_3?

- **Încercare**: Considerăm fiecare pereche (i,j) cu i în subvectorul stâng și j în cel drept

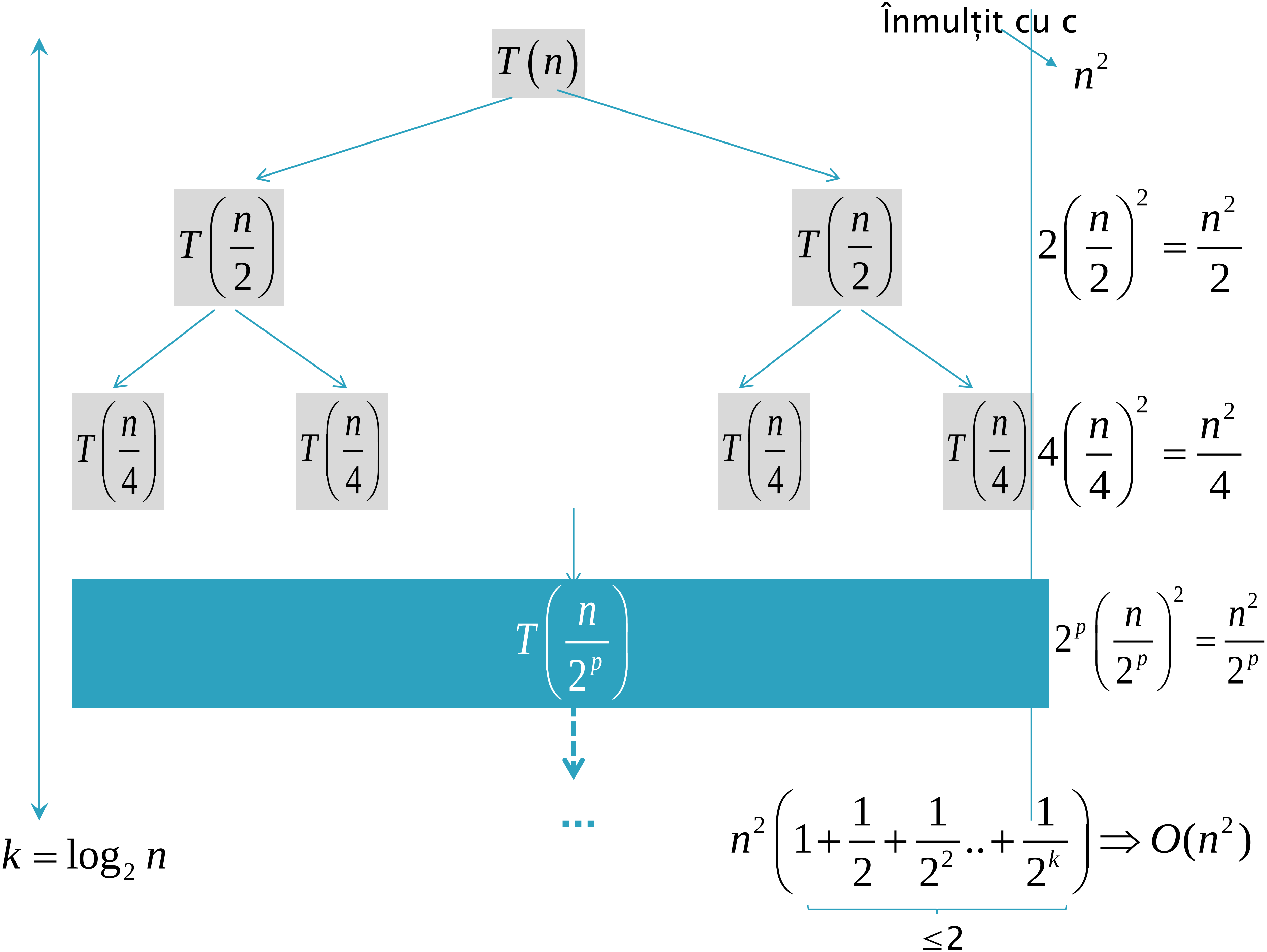
$$T(n) = 2T(n/2)+cn^2$$



Cum calculăm eficient n_3?

- **Încercare**: Considerăm fiecare pereche (i,j) cu i în subvectorul stâng și j în cel drept

$$T(n) = 2T(n/2)+cn^2 \Rightarrow O(?)$$



Înmulțit cu c
n^2
$T(n)$
$T\left(\frac{n}{2}\right)$
$T\left(\frac{n}{2}\right)$
$2\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{2}$
$T\left(\frac{n}{4}\right)$
$T\left(\frac{n}{4}\right)$
$T\left(\frac{n}{4}\right)$
$T\left(\frac{n}{4}\right)$
$4\left(\frac{n}{4}\right)^2 = \frac{n^2}{4}$
$T\left(\frac{n}{2^p}\right)$
$2^p\left(\frac{n}{2^p}\right)^2 = \frac{n^2}{2^p}$
...
$k = \log_2 n$
$n^2\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}..+\frac{1}{2^k}\right)}_{\leq 2} \Rightarrow O(n^2)$

Complexitate

$T(n) = 2T(n/2) + c\cdot n^2 =$

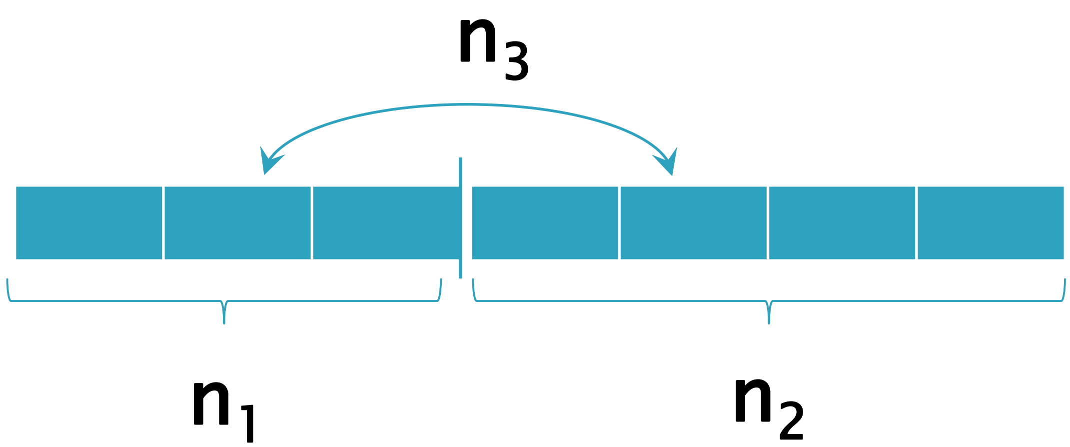
$= 2[2T(n/2^2) + c\cdot(n/2)^2] + cn^2 =$

$= 2^2T(n/2^2) + cn^2(1+1/2)$

$= \ldots =$

$= 2^kT(n/2^k) + cn^2(1+1/2+\ldots+1/2^{k-1})$

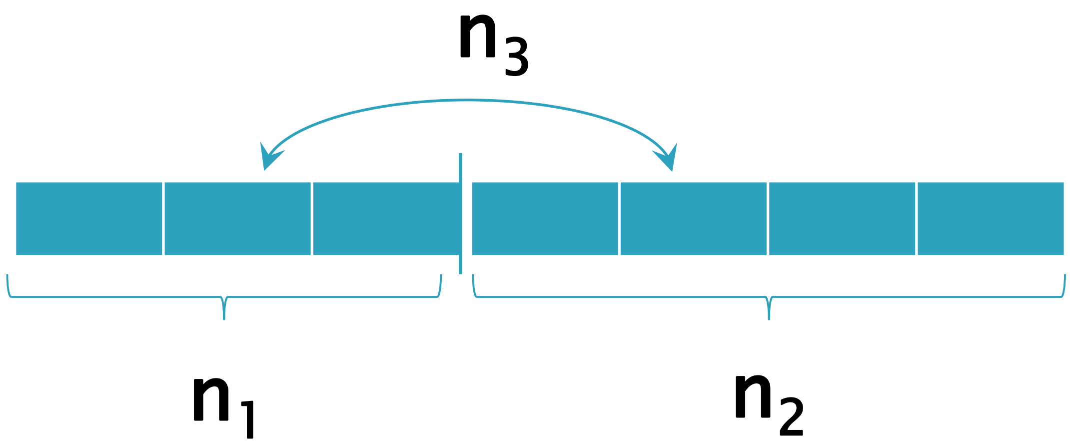
$n=2^k=n^2/2^k$ => tot suma anterioară



Cum calculăm eficient n_3?

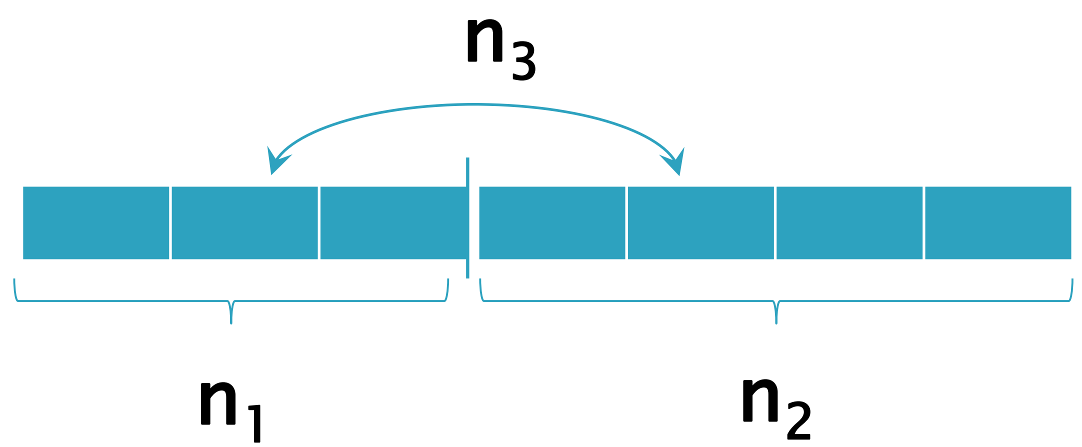
- **Încercare**: Considerăm fiecare pereche (i,j) cu i în subvectorul stâng și j în cel drept

$$T(n) = 2T(n/2)+cn^2 \text{ – tot } O(n^2)$$



Cum calculăm eficient n_3?

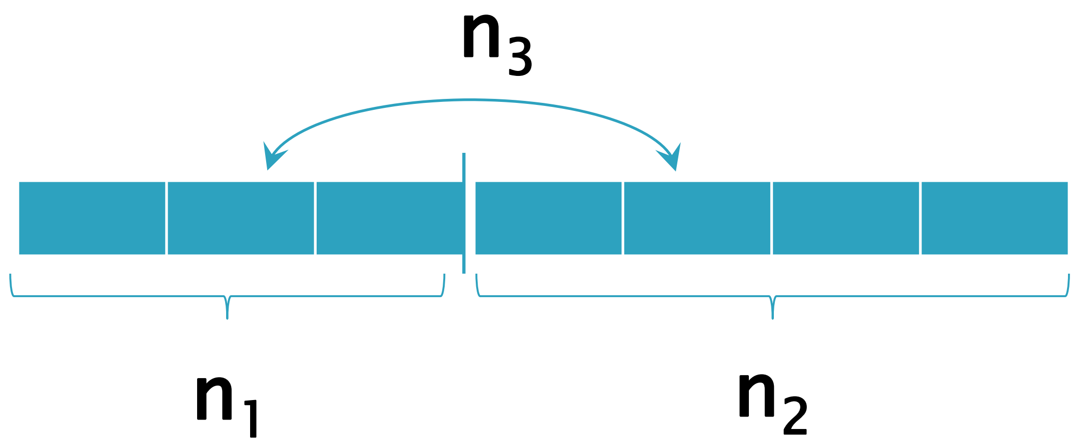
Dacă subvectorii stâng şi drept sunt **sortaţi crescător**, numărarea inversiunilor (i,j) date de elemente din subvectori diferiţi se poate face la interclasare



Cum calculăm eficient n_3?

Dacă subvectorii stâng şi drept sunt **sortaţi crescător**, numărarea inversiunilor (i,j) date de elemente din subvectori diferiţi se poate face la interclasare

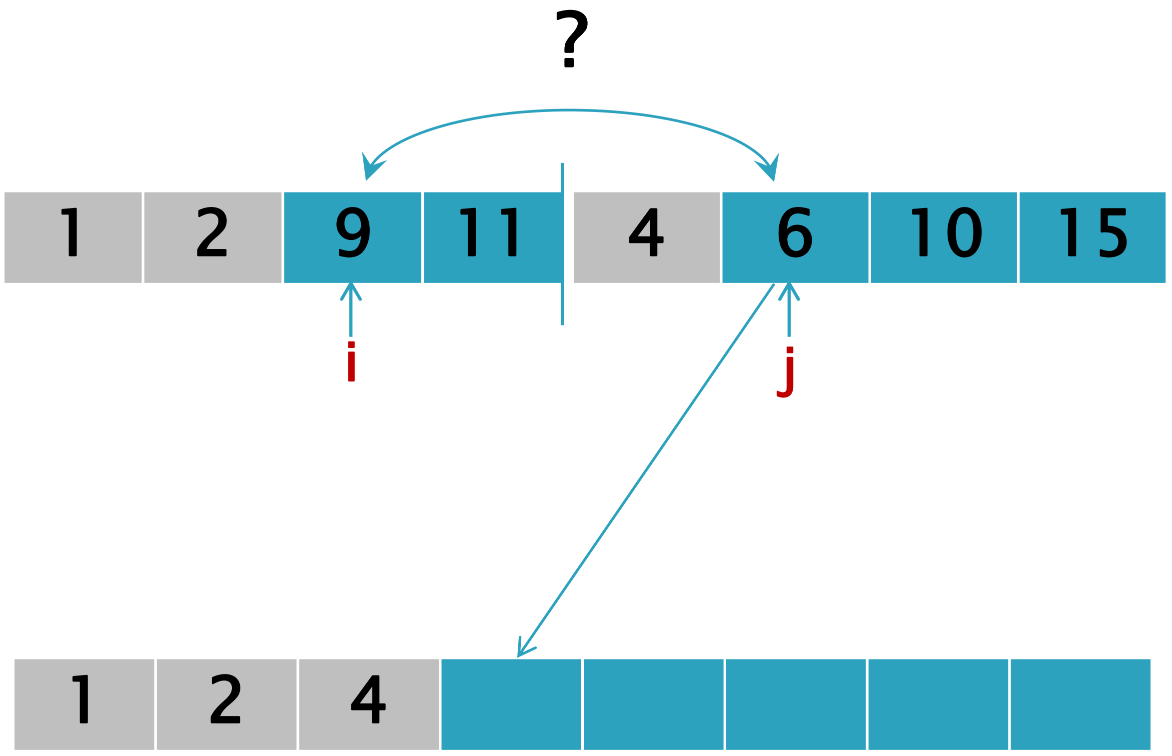
$T(n) = 2T(n/2)+cn \Rightarrow$

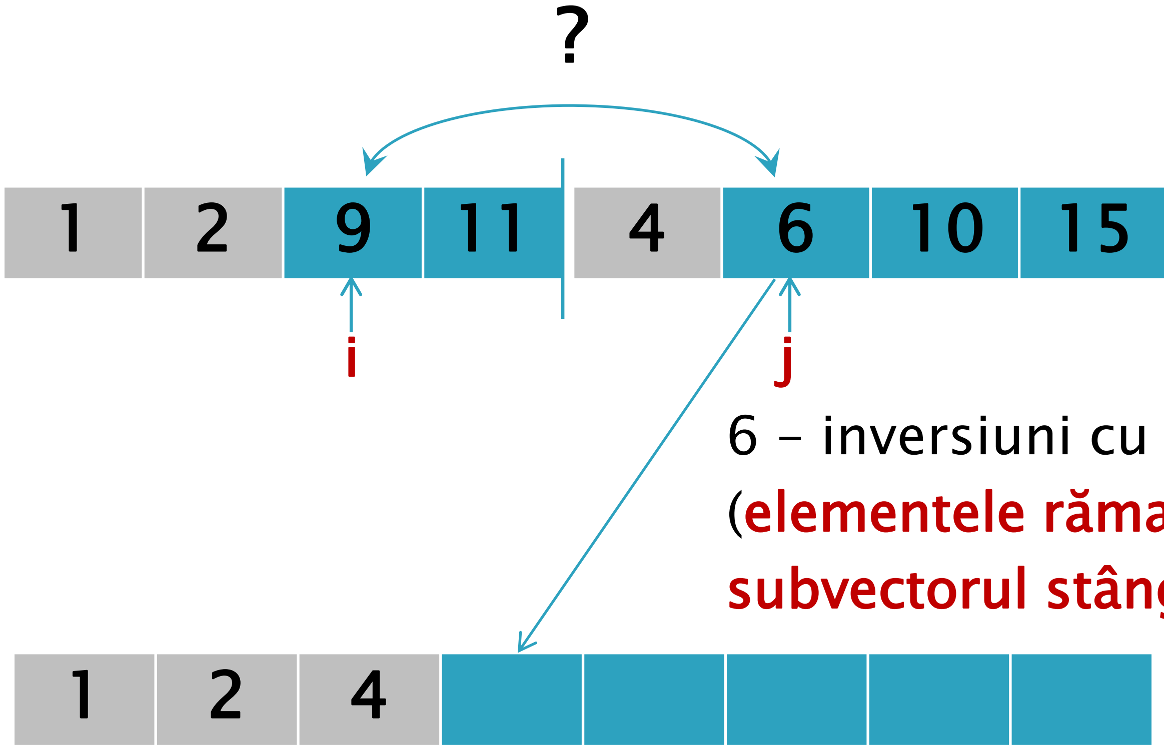


Cum calculăm eficient n_3?

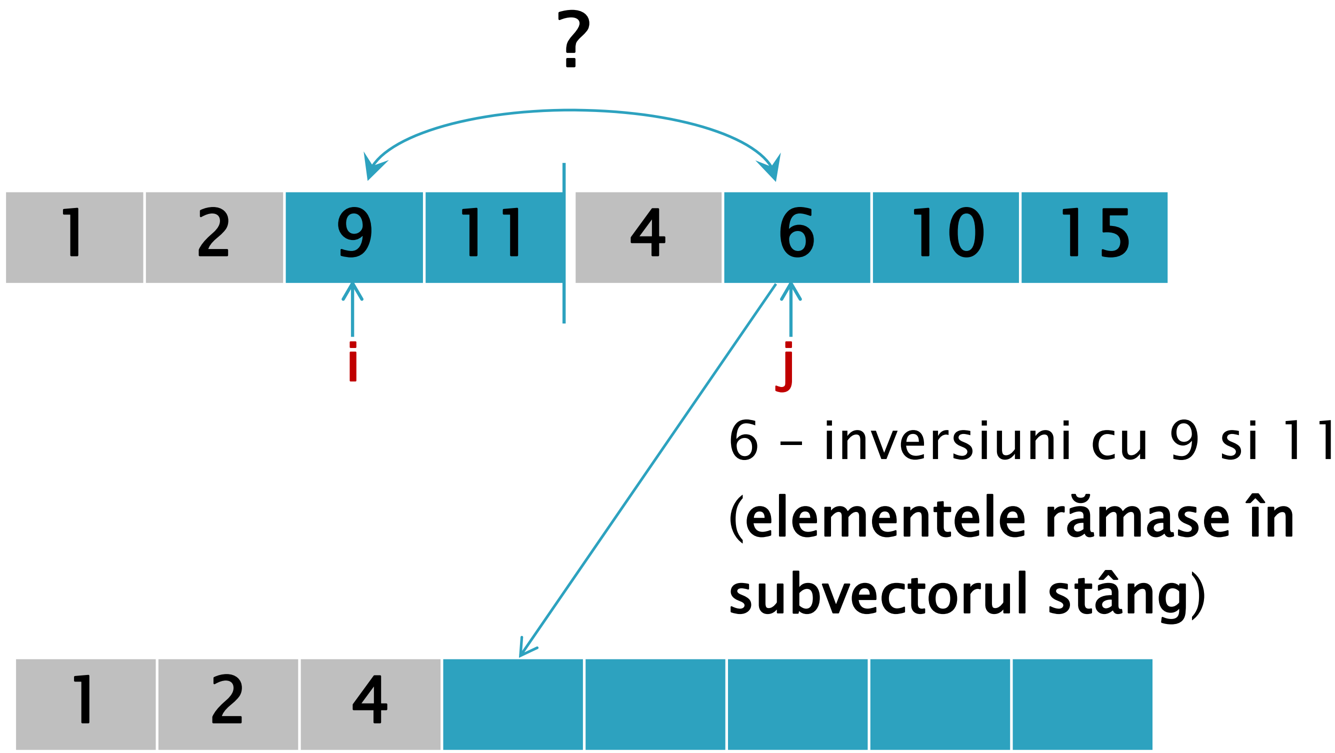
Dacă subvectorii stâng şi drept sunt **sortaţi crescător**, numărarea inversiunilor (i,j) date de elemente din subvectori diferiţi se poate face la interclasare

$$T(n) = 2T(n/2)+cn \Rightarrow T(n) = O(n \log n)$$


?
1
2
9
11
4
6
10
15
i
j
1
2
4

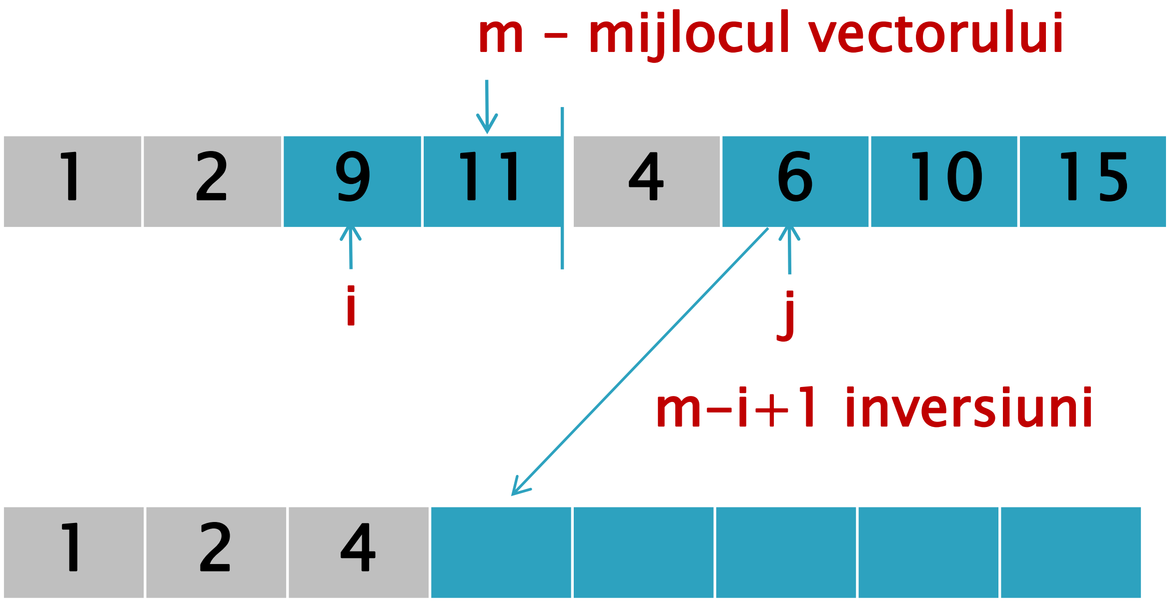


6 – inversiuni cu 9 si 11 (**elementele rămase în subvectorul stâng**)



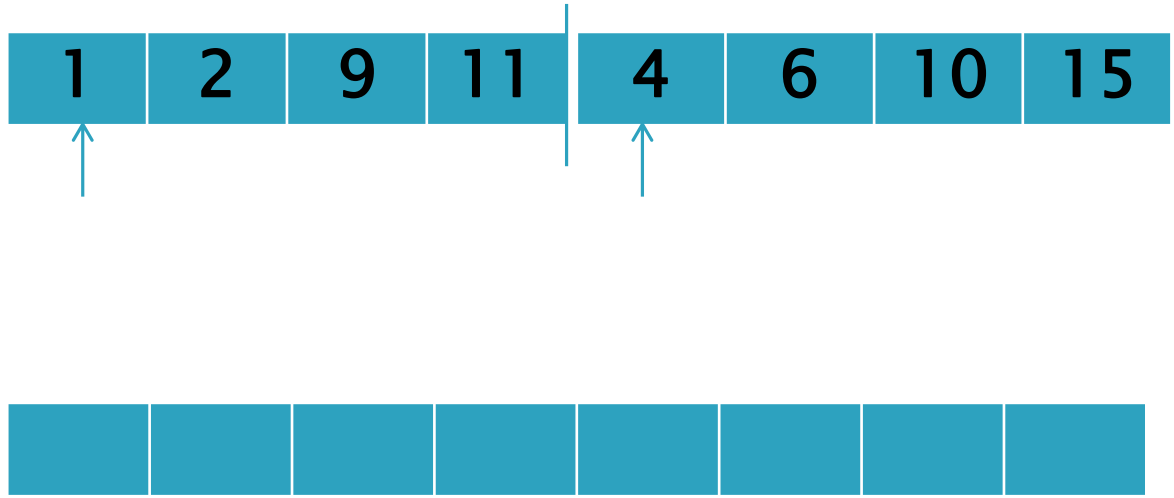
Când a[j] cu j > m este adăugat în vectorul rezultat, el este **mai mic (doar)** decât toate elementele din subvectorul stâng **neadăugate** încă în vectorul rezultat

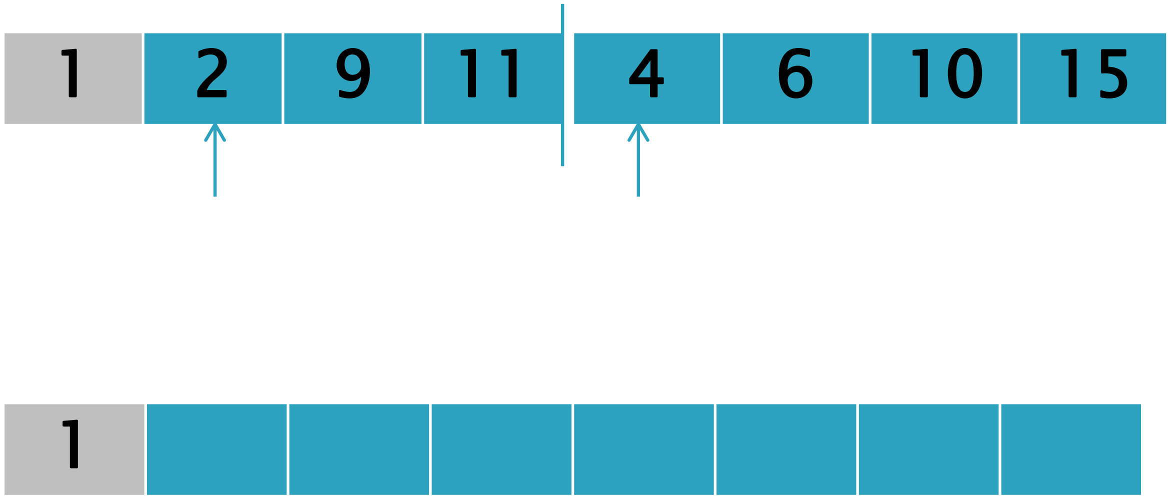
Câte inversiuni determină deci a[j] cu elementele din subvectorul stâng?

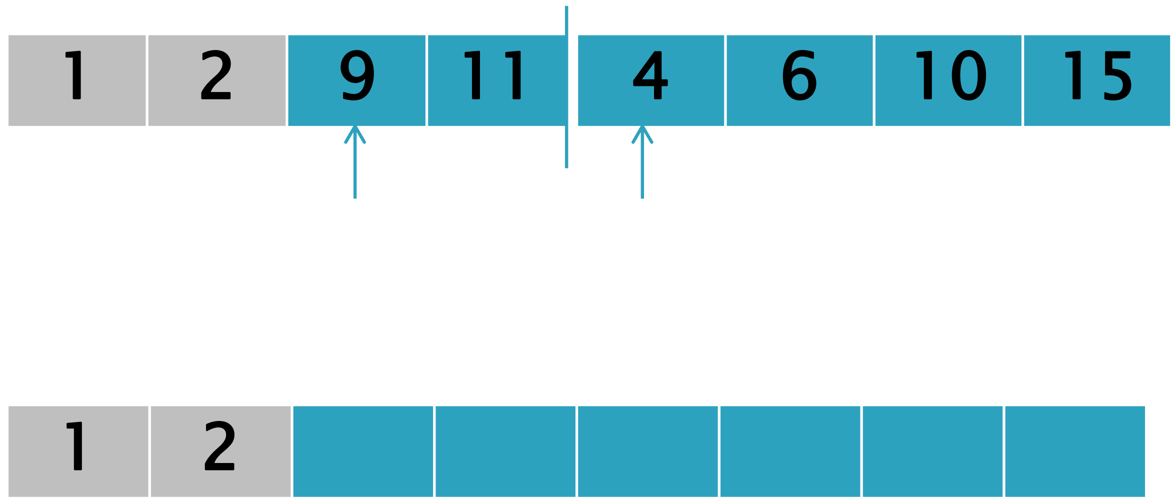


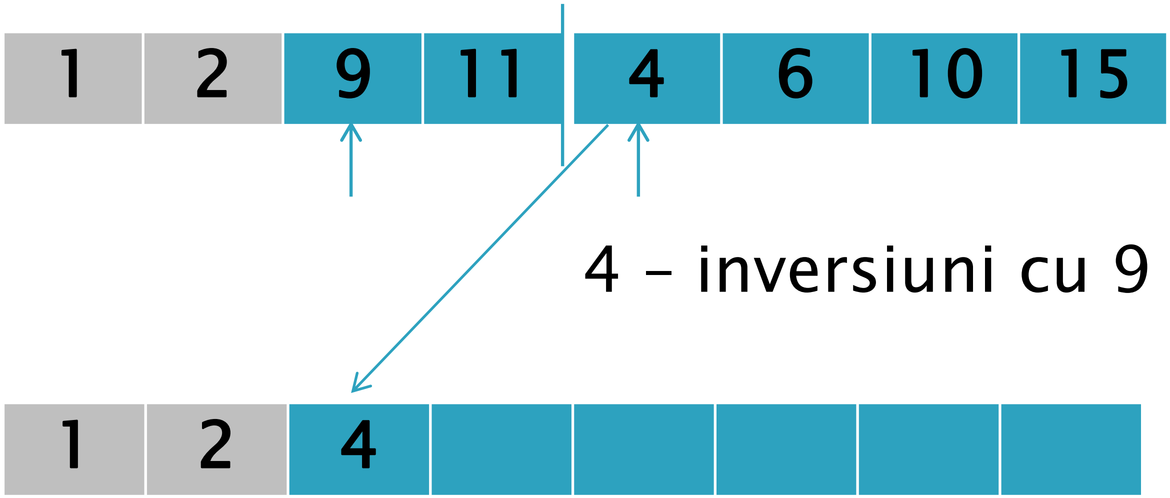
- a[j] determină m - i + 1 inversiuni

Exemplu – numărarea inversiunilor la interclasare


1 2 9 11 4 6 10 15

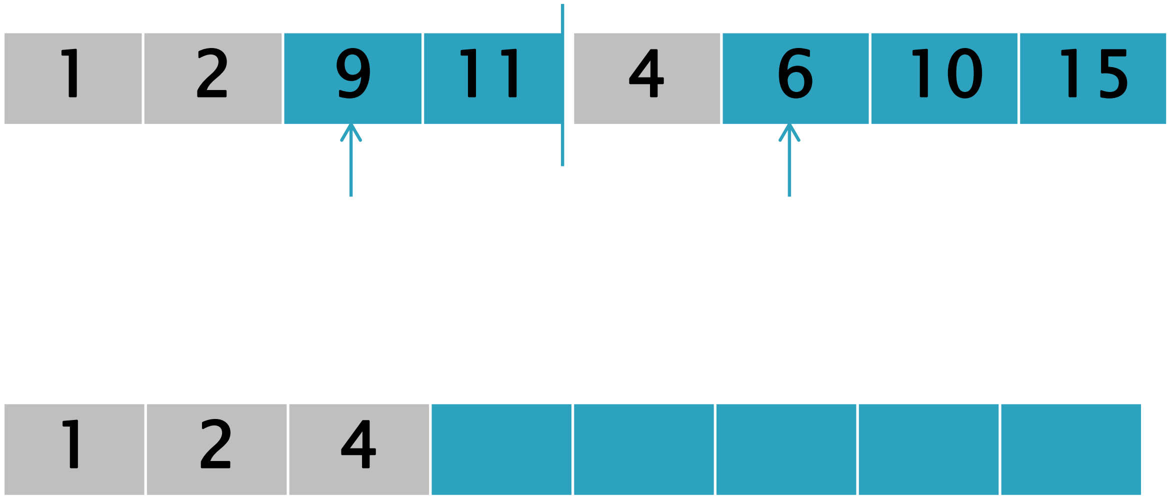

1
2
9
11
4
6
10
15
1


1
2
9
11
4
6
10
15
1
2

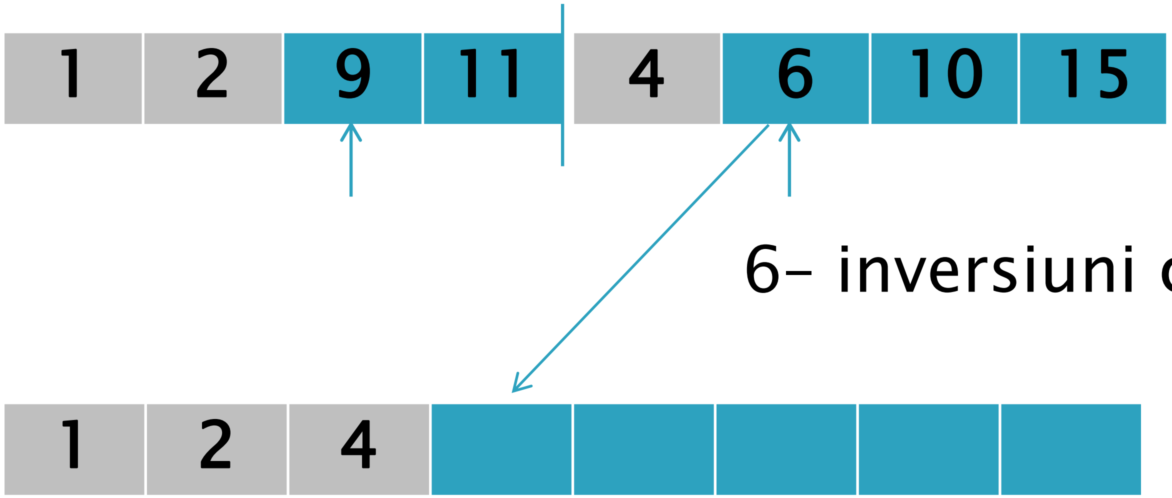


4 – inversiuni cu 9 si 11

Inversiuni = 2

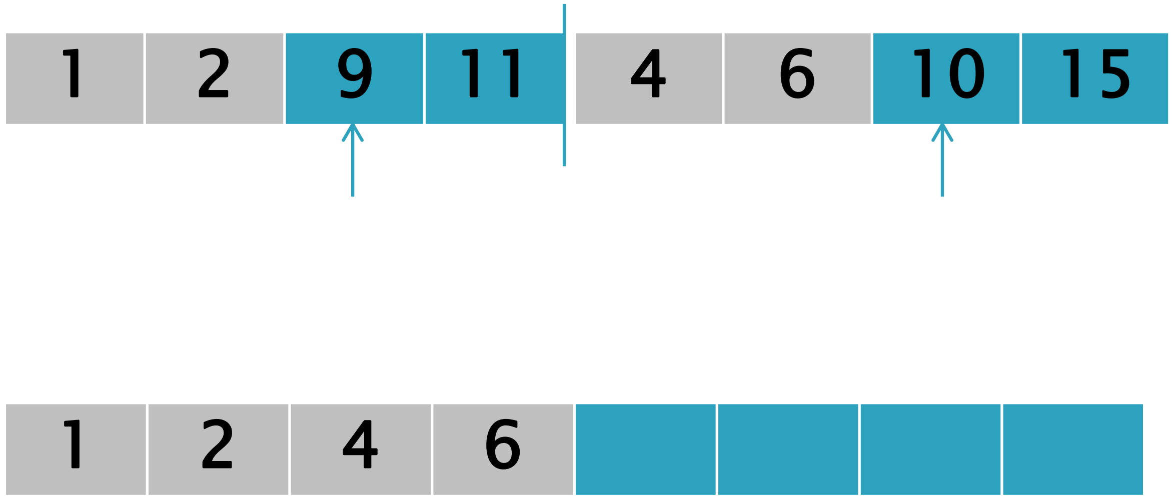


Inversiuni = 2

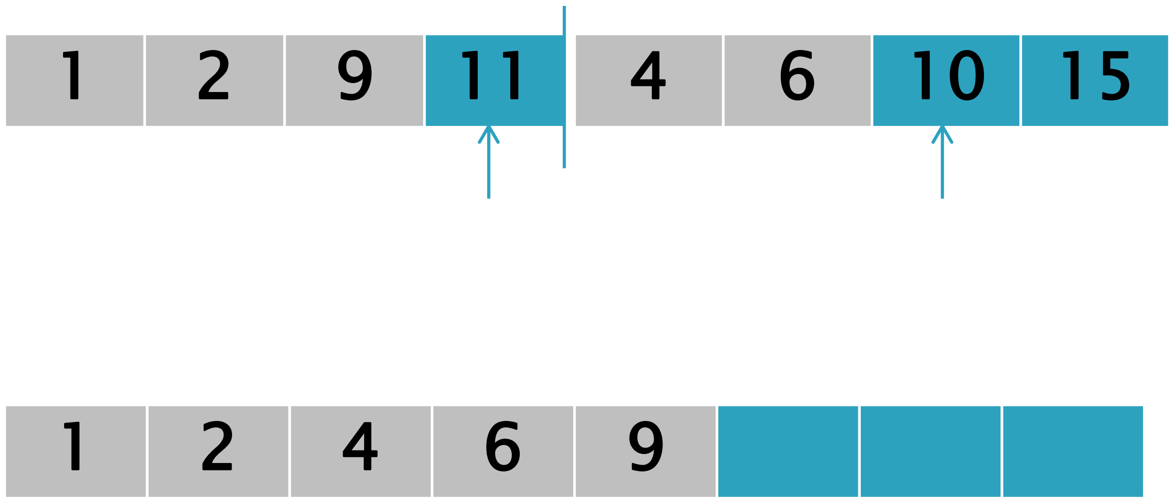


6- inversiuni cu 9 si 11

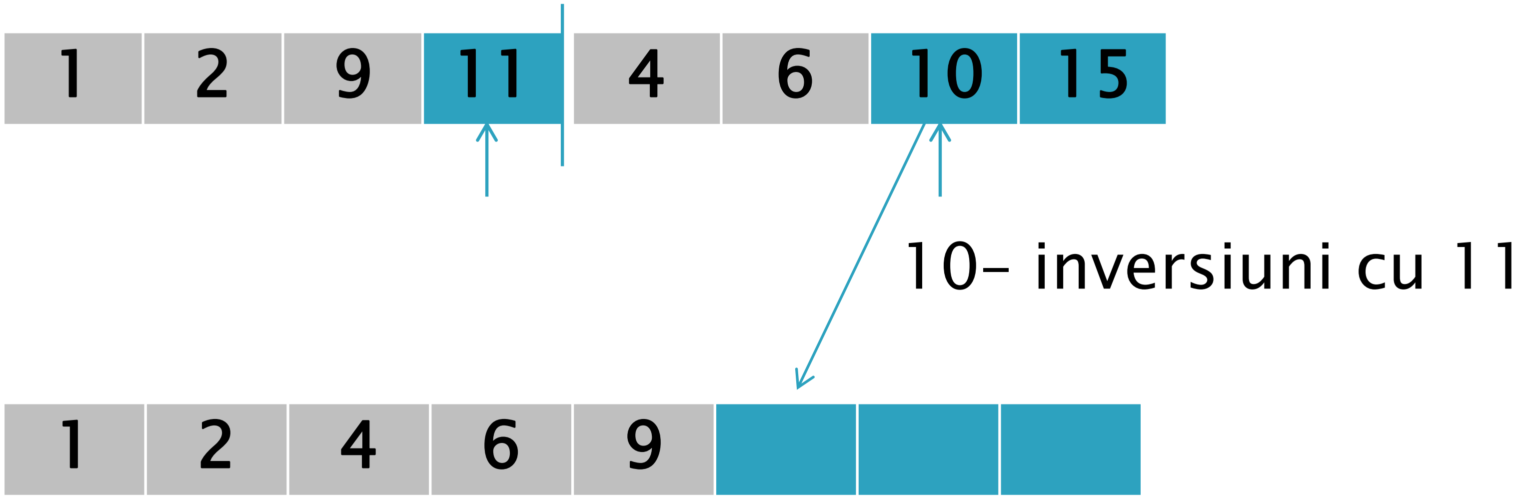
Inversiuni = 2 + 2



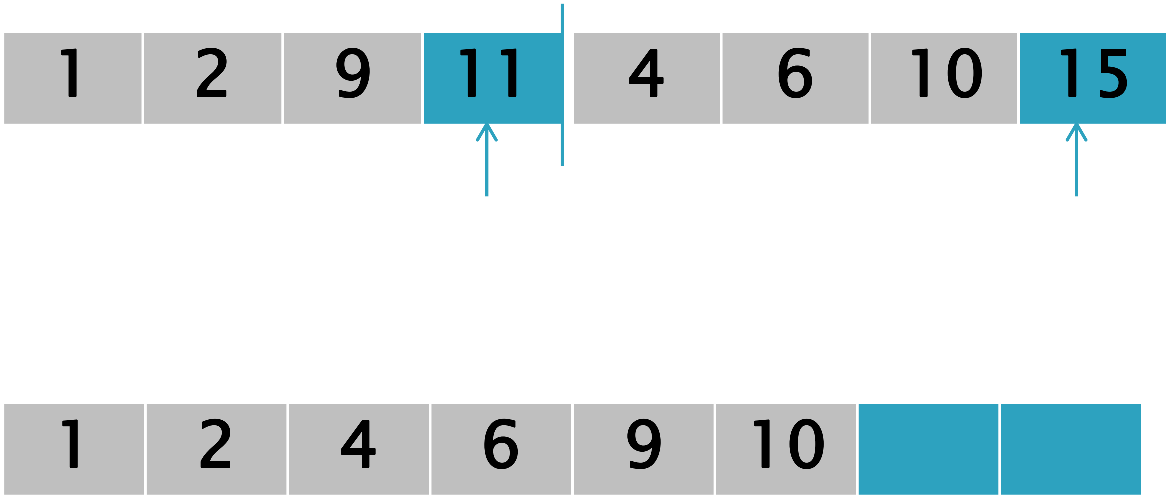
Inversiuni = 2 + 2



Inversiuni = 2 + 2



Inversiuni = 2 + 2 + 1

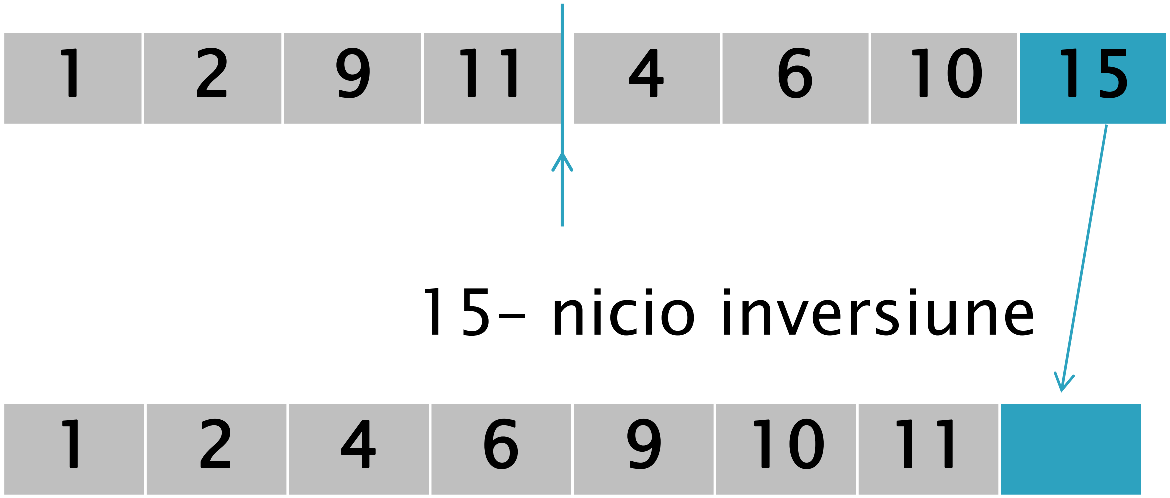


Inversiuni = 2 + 2 + 1

1	2	9	11	4	6	10	15

1	2	4	6	9	10	11	

Inversiuni = 2 + 2 + 1



Inversiuni = 2 + 2 + 1 + 0

1	2	9	11	4	6	10	15

1	2	4	6	9	10	11	15

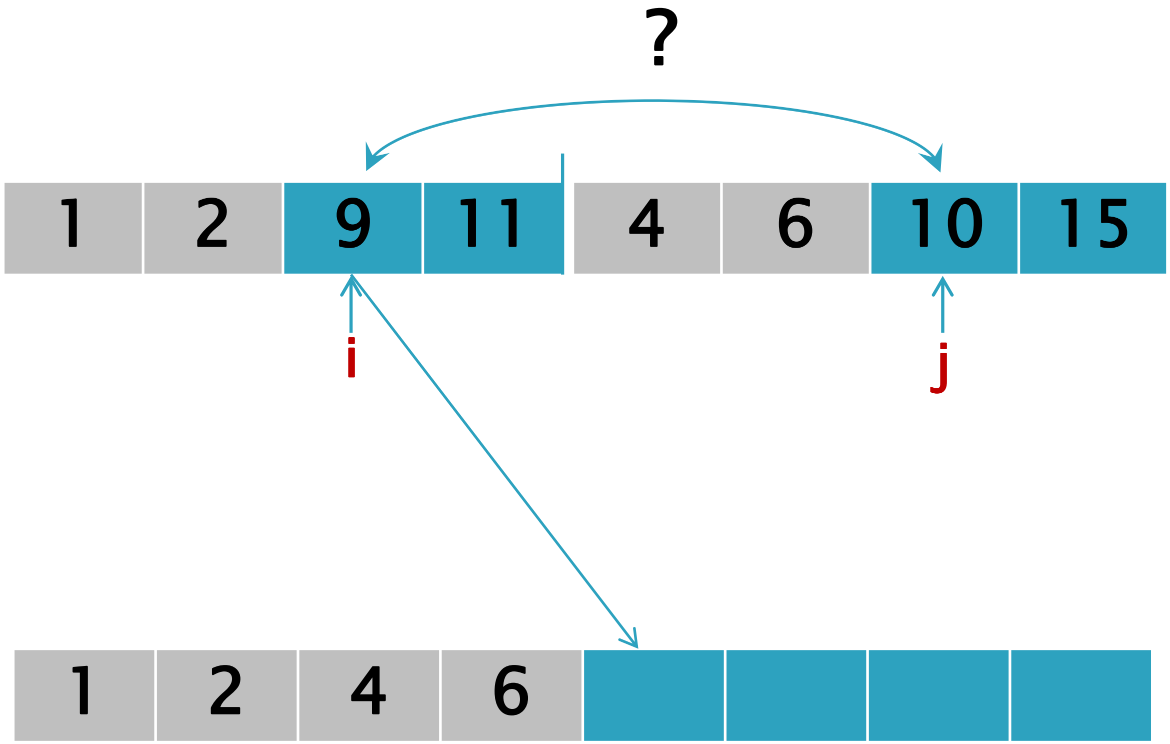
Inversiuni = 2 + 2 + 1 + 0 = 5

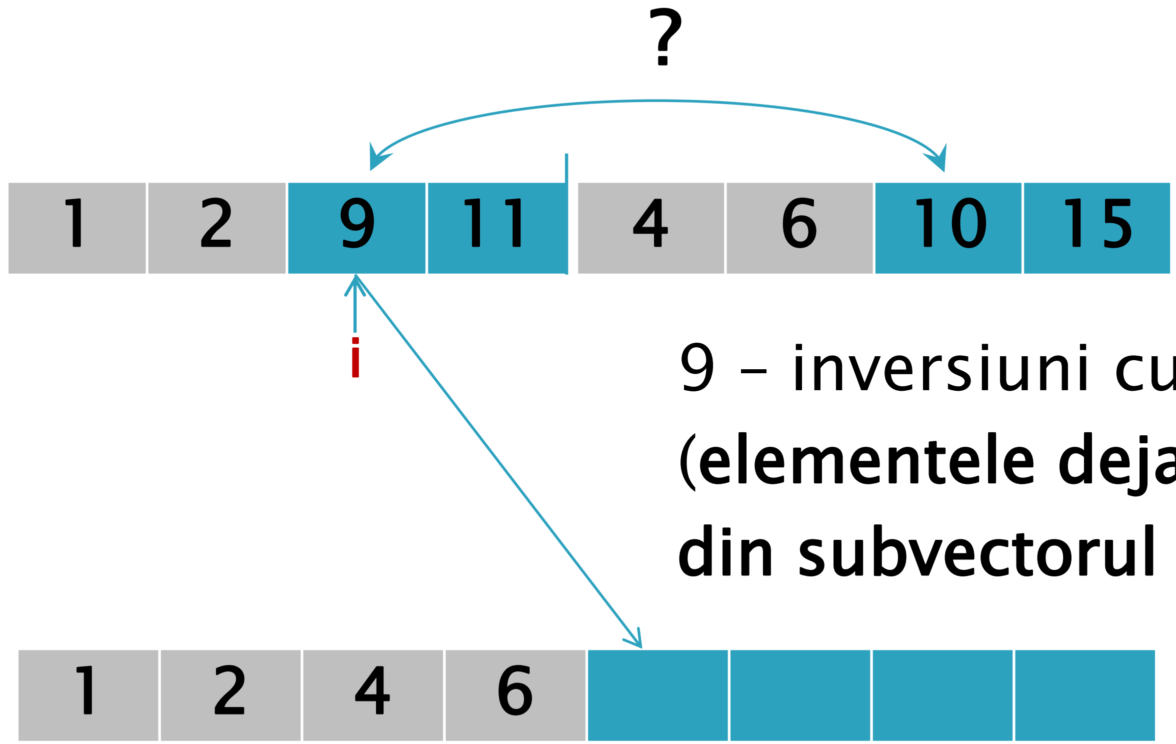
```python
def nr_inversiuni(v, p, u):
    if p==u:
        return 0
    else:
        m = (p+u)//2
        n1 = nr_inversiuni(v, p, m)
        n2 = nr_inversiuni(v, m+1, u)
        return n1+n2+interclaseaza(v, p, m, u)
```

- **Apel:** `x = nr_inversiuni(v,0, len(v)-1)`

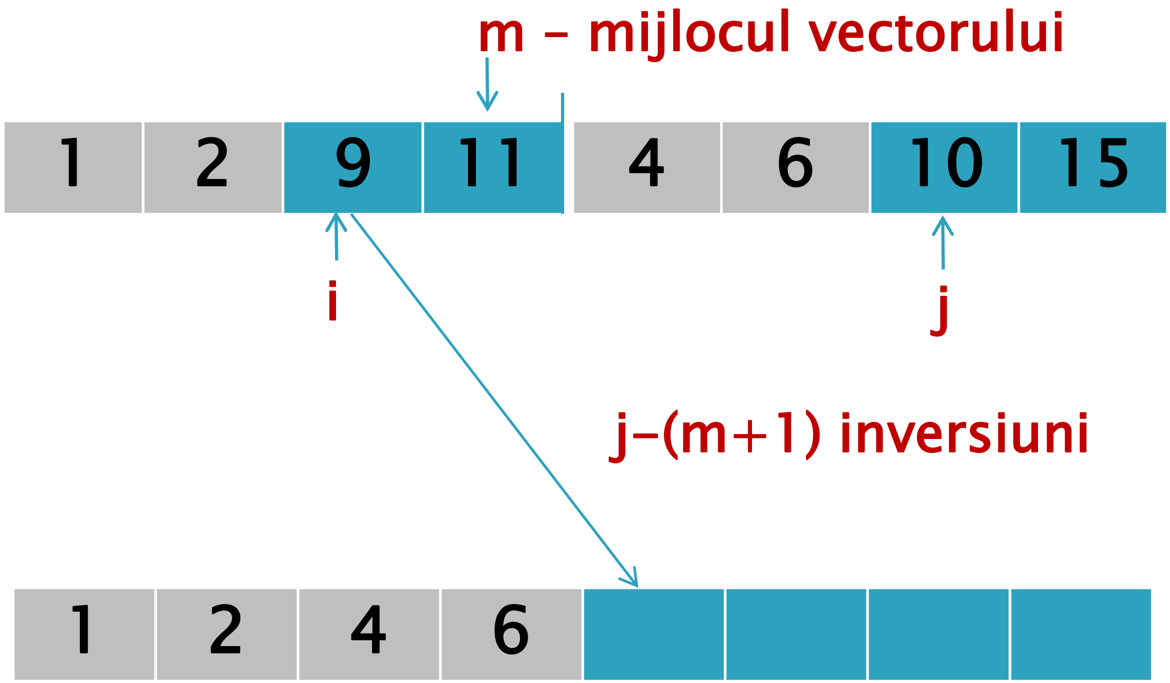
```
def interclaseaza(a, p, m, u):
   b = [None]*(u-p+1)
   nr = 0
   i = p;  j = m + 1; k = 0
   while (i<=m) and (j <= u):
         if a[i] <= a[j]:
            b[k] = a[i]; i += 1
         else:
            b[k] = a[j]; j += 1; nr += (m-i+1)
         k+=1

   while i<=m:
      b[k] = a[i]; k += 1; i += 1

   while j<=u:
      b[k] = a[j]; k += 1; j += 1

   for i in range(p,u+1):
      a[i] = b[i-p]

   return nr
```

- **Varianta 2** – puteam număra inversiunile dintre subvectori şi atunci când un element când a[i] cu i $\leq$ m (din subvectorul stâng) este adăugat în vectorul rezultat.


?
1
2
9
11
4
6
10
15
i
j
1
2
4
6



9 – inversiuni cu 4 si 6 (**elementele deja adăugate din subvectorul drept**)



- a[i] determină j – m – 1 inversiuni

- **Temă** – Propuneți un algoritm similar pentru determinarea numărului de inversiuni ale unui vector oarecare (ale cărui elemente **nu sunt neapărat distincte**)

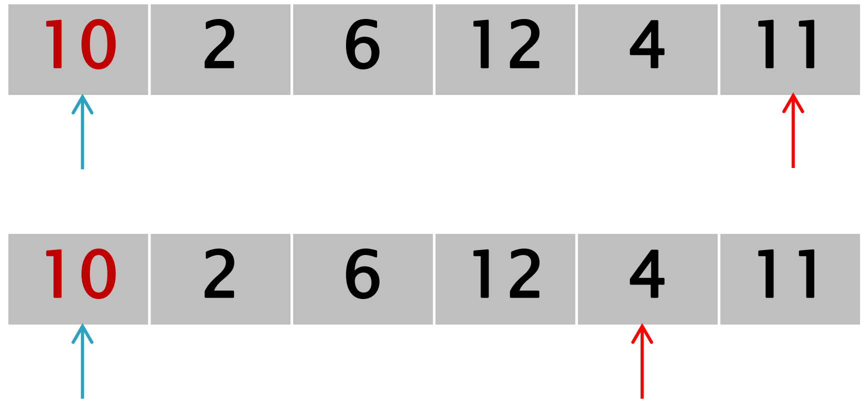
Quicksort
Sortarea rapidă

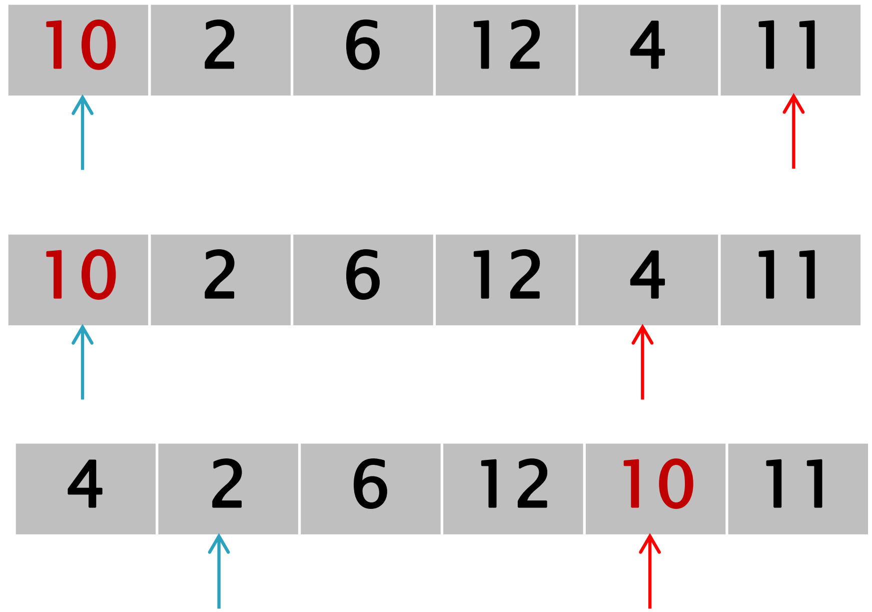
Quicksort

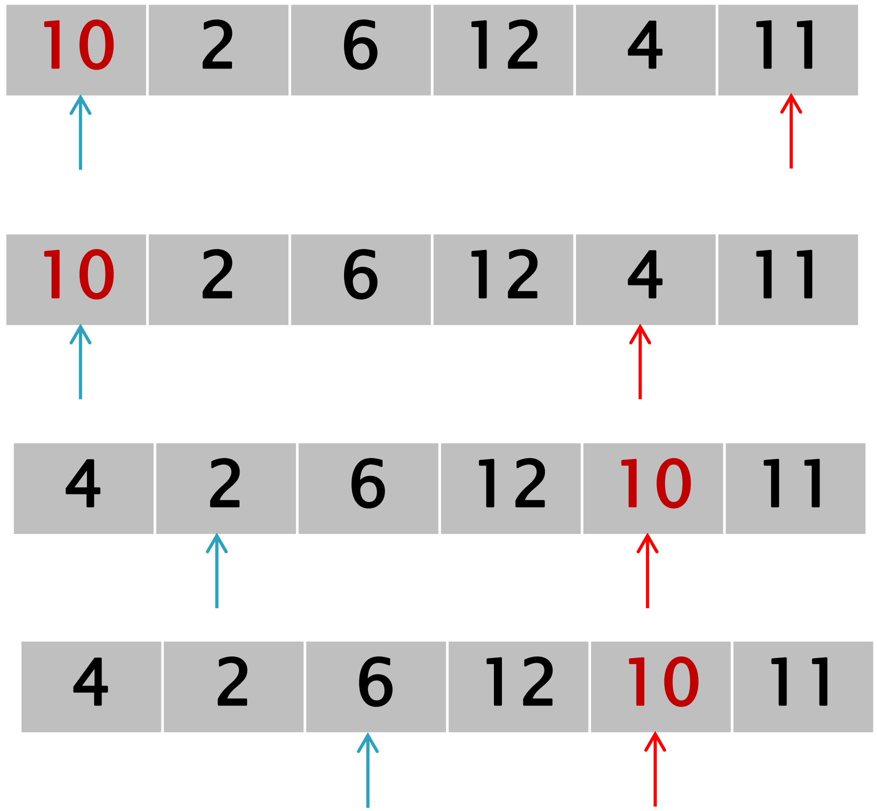
- **Idee:**
  - poziționăm primul element al secvenței (**pivotul**) pe poziția sa finală = astfel încât elementele din stânga sa sunt mai mici, iar cele din dreapta mai mari
  - ordonăm crescător elementele din stânga
  - ordonăm crescător elementele din dreapta

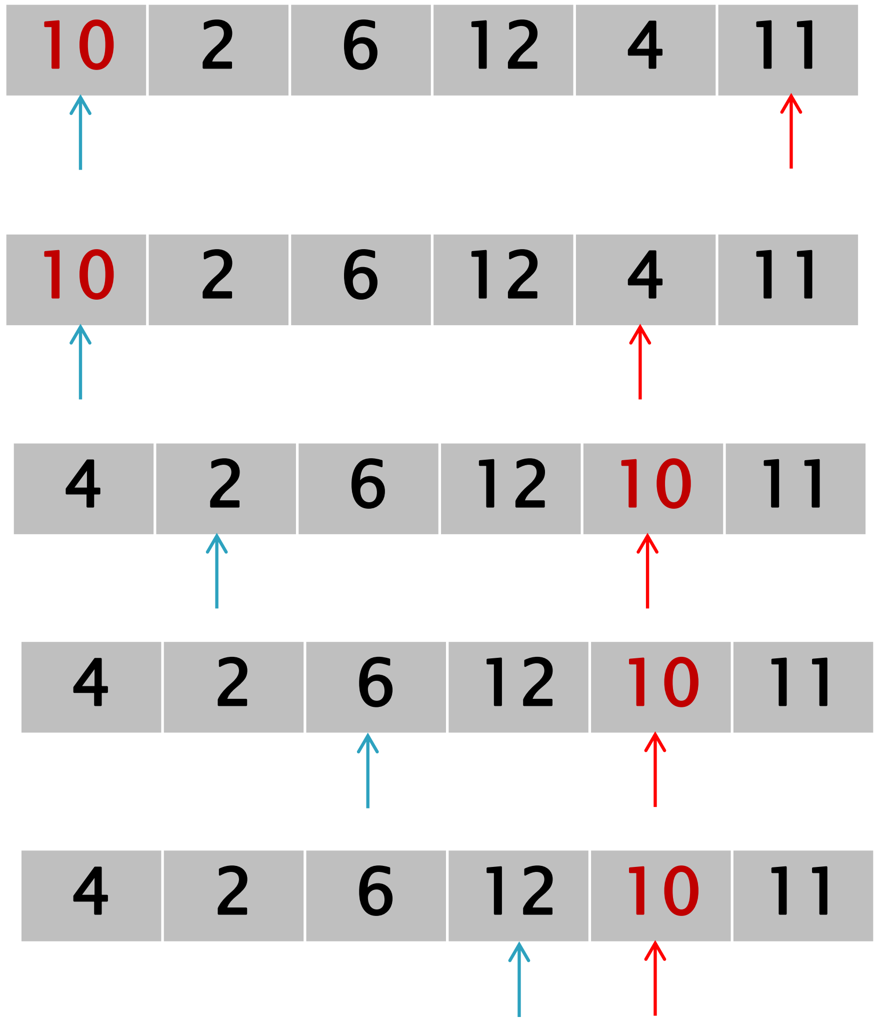
Exemplu – poziţionare pivot

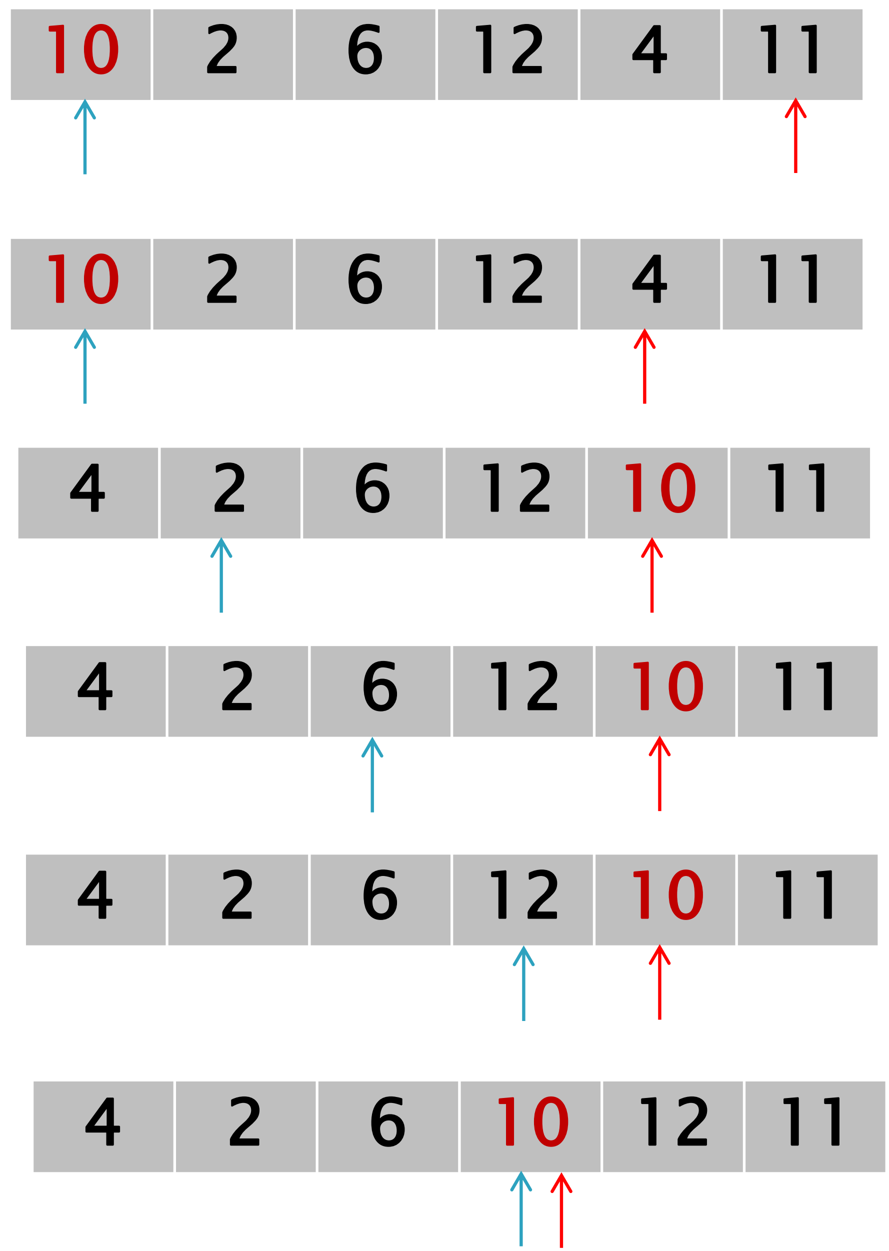
10	2	6	12	4	11


10 2 6 12 4 11
10 2 6 12 4 11


10 2 6 12 4 11
10 2 6 12 4 11
4 2 6 12 10 11


10 2 6 12 4 11
10 2 6 12 4 11
4 2 6 12 10 11
4 2 6 12 10 11


10 2 6 12 4 11
10 2 6 12 4 11
4 2 6 12 10 11
4 2 6 12 10 11
4 2 6 12 10 11



10 2 6 12 4 11
10 2 6 12 4 11
4 2 6 12 10 11
4 2 6 12 10 11
4 2 6 12 10 11
4 2 6 10 12 11

Quicksort

```
def quick_sort_di(v, p, u):
    if p >= u:
        return
    m = poz(v, p, u)
    quick_sort_di(v, p, m - 1)
    quick_sort_di(v, m + 1, u)
```

```python
def poz(v, p, u):
    i = p
    j = u
    depli = 0
    deplj = -1
    while i < j:
        if v[i] > v[j]:
            v[i], v[j] = v[j], v[i]
            depli, deplj = -deplj, -depli
            #aux= depli; depli= -deplj; deplj= -aux;
        i += depli
        j += deplj
    return i
```

Quicksort

- **Complexitate:**
  - **Defavorabil**: $O(n^2)$

    – pentru vector deja sortat =>

    – una dintre subprobleme are dimensiune n–1

    – pivotarea n–1

    $T(n) = T(n-1) + n-1$

m = 1 = **poziția pivotului**

1	2	6	10	12	14

n – 1

Quicksort

- **Complexitate:**
  - **Mediu**: O(n log n) – cu **pivot ales aleator**
    - Alegem aleator un element ca pivot, îl interschimbăm cu primul element și folosim procedura de pivotare anterioară

m = **poziția pivotului**

$$\underbrace{4 \quad 2 \quad 6}_{m\,-\,1} \quad 10 \quad \underbrace{12 \quad 11}_{n\,-\,m}$$

Quicksort – pivot aleator

```
def quick_sort_di(v, p, u):
    if p >= u:
        return
    m = poz_rand(v, p, u)
    quick_sort_di(v, p, m - 1)
    quick_sort_di(v, m + 1, u)
```

Quicksort – pivot aleator

```
def poz_rand(v, p, u):
    r = random.randint(p, u)
    v[r], v[p] = v[p], v[r]
    return poz(v, p, u)
```

Quicksort

- **Complexitate:**
  - **Mediu**: O(n log n) – cu **pivot ales aleator**
    - Justificarea complexității caz mediu – SUMPLIMENTAR

m = **poziția pivotului**

$$\underbrace{\boxed{4}\ \boxed{2}\ \boxed{6}}_{m-1}\ \boxed{\color{red}{10}}\ \underbrace{\boxed{12}\ \boxed{11}}_{n-m}$$

Quicksort

Timp mediu

$$\begin{cases} T(n) = n - 1 + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[T(k-1) + T(n-k)] \\ T(1) = T(0) = 0 \end{cases}$$

Quicksort

$$\begin{cases} T(n) = n - 1 + \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} [T(k-1) + T(n-k)] \\ T(1) = T(0) = 0 \end{cases}$$

$$nT(n) = n(n-1) + 2[T(0) + T(1) + ... + T(n-1)]$$

Quicksort

$$\begin{cases} T(n) = n - 1 + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[T(k-1) + T(n-k)] \\ T(1) = T(0) = 0 \end{cases}$$

$$nT(n) = n(n-1)+2[T(0)+T(1)+...+T(n-1)]$$

$$(n-1)T(n-1) = (n-1)(n-2)+2[T(0)+...+T(n-2)]$$

Quicksort

$$\begin{cases} T(n) = n - 1 + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[T(k-1) + T(n-k)] \\ T(1) = T(0) = 0 \end{cases}$$

$$nT(n) = n(n-1)+2[T(0)+T(1)+...+T(n-1)]$$

$$(n-1)T(n-1) = (n-1)(n-2)+2[T(0)+...+T(n-2)]$$

Scădem cele două relații:

$$nT(n)-(n-1)T(n-1) = 2(n-1)+ 2T(n-1)$$

Quicksort

$$\begin{cases} T(n) = n - 1 + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[T(k-1) + T(n-k)] \\ T(1) = T(0) = 0 \end{cases}$$

$$nT(n) = n(n-1)+2[T(0)+T(1)+...+T(n-1)]$$

$$(n-1)T(n-1) = (n-1)(n-2)+2[T(0)+...+T(n-2)]$$

$$nT(n)-(n-1)T(n-1) = 2(n-1)+ 2T(n-1)$$

$$nT(n) = (n+1)T(n-1)+2(n-1)$$

Quicksort

$$\begin{cases} T(n) = n - 1 + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[T(k-1) + T(n-k)] \\ T(1) = T(0) = 0 \end{cases}$$

$$nT(n) = n(n-1)+2[T(0)+T(1)+...+T(n-1)]$$

$$(n-1)T(n-1) = (n-1)(n-2)+2[T(0)+...+T(n-2)]$$

$$nT(n)-(n-1)T(n-1) = 2(n-1)+ 2T(n-1)$$

$$nT(n) = (n+1)T(n-1)+2(n-1) \quad \mathbf{| \ :n(n+1)}$$

Quicksort

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n-1)}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

Quicksort

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n-1)}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n-1)}{n} + 2\left(\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

Quicksort

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n-1)}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n-1)}{n} + 2\left(\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{T(n-1)}{n} = \frac{T(n-2)}{n-1} + 2\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{T(2)}{3} = \frac{T(1)}{2} + 2\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

Quicksort

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n-1)}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

$$\frac{T(n)}{n+1} = \frac{T(n-1)}{n} + 2\left(\frac{2}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{T(n-1)}{n} = \frac{T(n-2)}{n-1} + 2\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{T(2)}{3} = \frac{T(1)}{2} + 2\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$+$$

$$\frac{T(n)}{n+1} = 2\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \ldots\ldots + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{n+1} - 1$$

Quicksort

$$\frac{T(n)}{n+1} = 2\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \ldots\ldots + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{n+1} - 1$$

$$\leq 2\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \ldots\ldots + \frac{1}{3}\right)$$

sume Riemann inferioare pentru funcţia f(x)=1/x

$\Delta = \{2,3,\ldots, n+1\}$

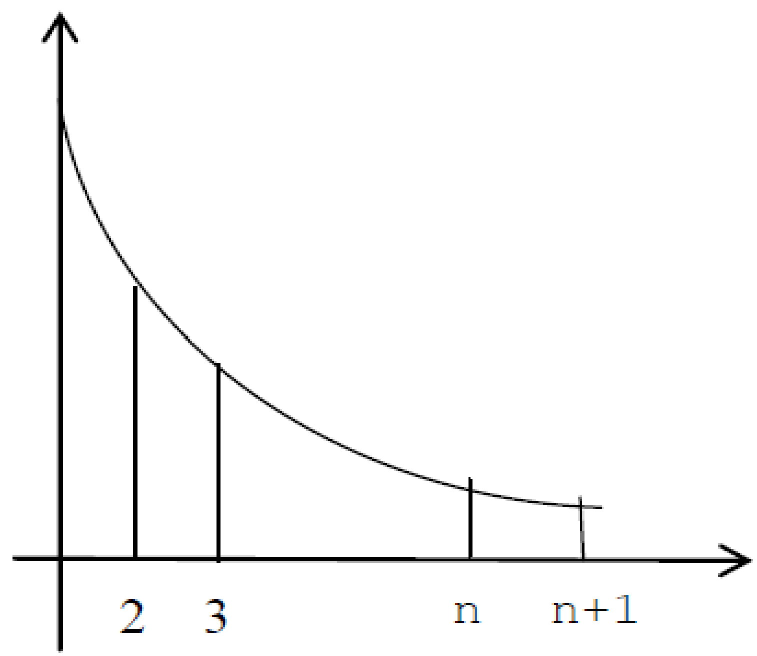
Quicksort

$$\frac{T(n)}{n+1} = 2\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \ldots\ldots + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{n+1} - 1$$

$$\leq 2\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \ldots\ldots + \frac{1}{3}\right)$$

sume Riemann inferioare pentru funcţia f(x)=1/x

$\Delta = \{2,3,\ldots, n+1\}$



Quicksort

$$\frac{T(n)}{n+1} = 2\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \ldots\ldots + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{n+1} - 1$$

$$\leq 2\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \ldots\ldots + \frac{1}{3}\right)$$

sume Riemann inferioare pentru funcţia $f(x)=1/x$

$\Delta = \{2,3,\ldots, n+1\}$

$$\frac{T(n)}{n+1} \leq 2\int_{2}^{n+1} \frac{1}{x}dx = 2\ln x\Big|_{2}^{n+1} \leq \ 2\cdot\ln(n+1)$$

Statistici de ordine

Dat un vector a de n numere şi un indice k, $1 \leq k \leq n$, să se determine al k-lea cel mai mic element din vector.

Statistici de ordine

A i-a statistică de ordine a unei mulțimi = al i-lea cel mai mic element.

- **Minimul** = prima statistică de ordine
- **Maximul** = a n-a statistică de ordine

Statistici de ordine

- **Mediana** = punctul de la jumătatea unei mulțimi

  = o valoare v a.î. numărul de elemente din mulțime mai mici decât v este egal cu numărul de elemente din mulțime mai mari decât v.

Statistici de ordine

- **Mediana**

Dacă n este impar, atunci mediana este a $\lceil n/2 \rceil$–a statistică de ordine, altfel, prin **convenție** mediana este **media aritmetică** dintre a $\lfloor n/2 \rfloor$–a statistică și a $(\lfloor n/2 \rfloor + 1)$–a statistică de ordine

1	12	15	16	38	40

15,5

- **Mediană inferioară / superioară**

Statistici de ordine – utilitate

- **Statistică**
- **Mediana** – pentru o mulţime $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ valoarea μ care minimizează expresia

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\mu-a_i\right|$$

Statistici de ordine

Idee

Al k-lea minim

Statistici de ordine

Idee

Al k-lea minim – folosim poziţionarea de la quicksort (**pivot aleator**)

Statistici de ordine

Fie m poziţia pivotului

- Dacă m = k, pivotul este al k-lea minim
-
-

Statistici de ordine

Fie m poziţia pivotului

- Dacă m = k, pivotul este al k-lea minim
- Dacă **m > k**, al k-lea minim este în **stânga** pivotului (al k-lea minim din stanga)
-

Statistici de ordine

Fie m poziţia pivotului

- Dacă m = k, pivotul este al k-lea minim
- Dacă **m > k**, al k-lea minim este în **stânga** pivotului (al k-lea minim din stanga)
- Dacă **m < k**, al k-lea minim este în **dreapta** pivotului (al (k-m)-lea minim din dreapta)

k = 2

10	2	6	12	4	11

poziţionare pivot

4	2	6	10	12	11

m = 4 > k $\Longrightarrow$ stânga

$k = 2$

10	2	6	12	4	11

poziţionare pivot

4	2	6	10	12	11

$m = 4 > k \longrightarrow$ stânga

4	2	6

poziţionare pivot

2	4	6

$m = 2 = k \longrightarrow$ stop;

pivotul este al k-lea minim

```
#pentru numerotare de la 0

def sel_k_min(v, k, p, u):
    m = poz_rand(v, p, u)
    if m == k - 1:
        return v[m]
    if m < k - 1:
        return sel_k_min(v, k, m + 1, u)
    return sel_k_min(v, k, p, m - 1)
```

Apel: `x = sel_k_min(v, k, 0, len(v) - 1)`

Complexitate

- **Timpul mediu**

m = poziția pivotului

$$\begin{cases} T(n) \le n-1+\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\boldsymbol{m}=1}^{n} T(\max\{m-1, n-\boldsymbol{m}\}) \\ \le n-1+\dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{\boldsymbol{m}=\frac{n}{2}}^{n-1} T(m) \end{cases}$$

$$T(n) \le cn,\ c \ge 4$$

– se demonstrează prin inducţie

Complexitate

- **Detalii pas inducție**

$$T(n) \le n-1+\frac{2}{n}\sum_{m=\frac{n}{2}}^{n-1} T(m) \le n-1+\frac{2}{n}\sum_{m=\frac{n}{2}}^{n-1}(cm)$$

Complexitate

- **Detalii pas inducție**

$$T(n) \le n-1+\frac{2}{n}\sum_{m=\frac{n}{2}}^{n-1} T(m) \le n-1+\frac{2}{n}\sum_{m=\frac{n}{2}}^{n-1}(cm)$$

$$\le n-1+\frac{2}{n}c\left[\frac{1}{2}n(n-1)-\frac{1}{2}\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]=$$

$$=$$

Complexitate

- **Detalii pas inducție**

$$T(n) \le n-1+\frac{2}{n}\sum_{m=\frac{n}{2}}^{n-1} T(m) \le n-1+\frac{2}{n}\sum_{m=\frac{n}{2}}^{n-1}(cm)$$

$$\le n-1+\frac{2}{n}c\left[\frac{1}{2}n(n-1)-\frac{1}{2}\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]=$$

$$=n-1+\frac{2}{n}c\frac{n}{2}\left(n-1-\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)=n-1+c\left(\frac{3}{4}n-\frac{1}{2}\right)$$

Dar $c \ge 4 \quad \Rightarrow$

Complexitate

- **Detalii pas inducție**

$$T(n) \le n-1+\frac{2}{n}\sum_{m=\frac{n}{2}}^{n-1} T(m) \le n-1+\frac{2}{n}\sum_{m=\frac{n}{2}}^{n-1}(cm)$$

$$\le n-1+\frac{2}{n}c\left[\frac{1}{2}n(n-1)-\frac{1}{2}\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]=$$

$$=n-1+\frac{2}{n}c\frac{n}{2}\left(n-1-\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)=n-1+c\left(\frac{3}{4}n-\frac{1}{2}\right)$$

Dar $c \ge 4 \quad \Rightarrow$

$$T(n) \le c\left(\frac{n-1}{4}+\frac{3}{4}n-\frac{1}{2}\right)=c\left(n-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\le cn$$

Statistici de ordine

Algoritm O(n) caz defavorabil (suplimentar)

Statistici de ordine

Algoritm O(n) caz defavorabil

Idee

În algoritmul anterior `sel_k_min` **se foloseşte în loc de pivot aleatoriu un pivot calculat astfel:**

Statistici de ordine

Algoritm O(n) caz defavorabil

Idee

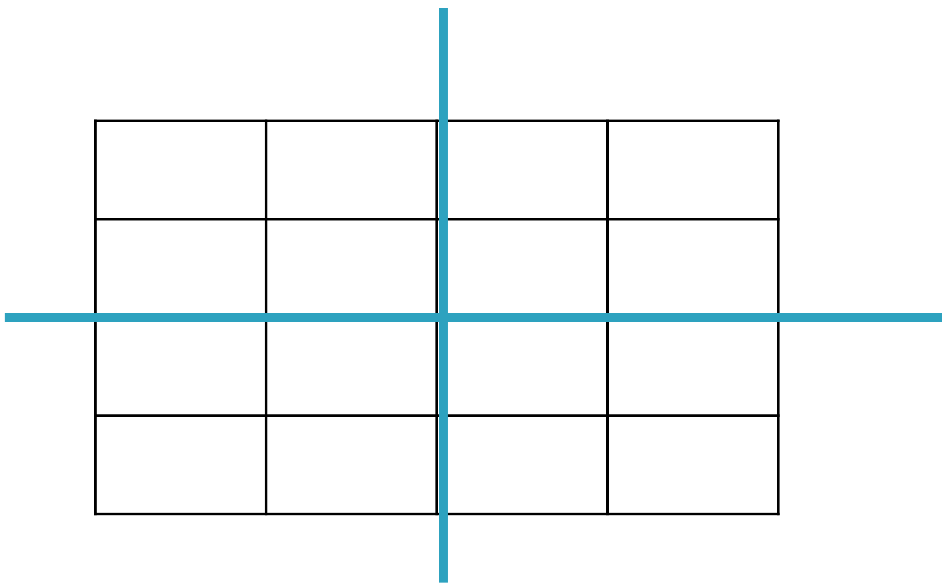
În algoritmul anterior `sel_k_min` **se foloseşte în loc de pivot aleatoriu un pivot calculat astfel:**

- se împarte vectorul în grupe de 5 (cu cel mult o excepţie – ultimul grup)
- se formează un vector `mediane`[] având ca elemente mediana fiecărui grup
- se calculează mediana acestui vector folosind aceeaşi funcţie `sel_k_min` `mediane`, $\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$, $\left\lceil \frac{n}{10} \right\rceil$) $\Rightarrow$

  $\Rightarrow$ **aceasta este pivotul**

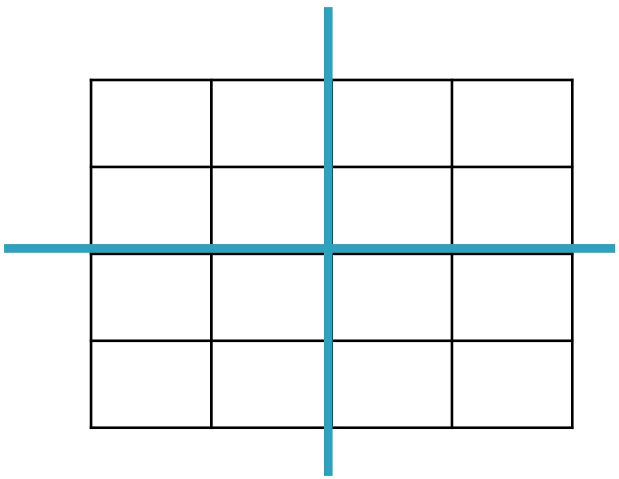
Divide et impera – Matrice

Să se calculeze suma elementelor unei matrice pătratice de dimensiune n unde n este putere a lui 2 folosind Divide et Impera (împărțind matricea succesiv în 4 subcadrane)



Divide et impera – Matrice

Să se calculeze suma elementelor unei matrice pătratice de dimensiune n unde n este putere a lui 2 folosind Divide et Impera (împărțind matricea succesiv în 4 subcadrane)



O subproblemă este identificată de:

- Două colțuri opuse ale submatricei

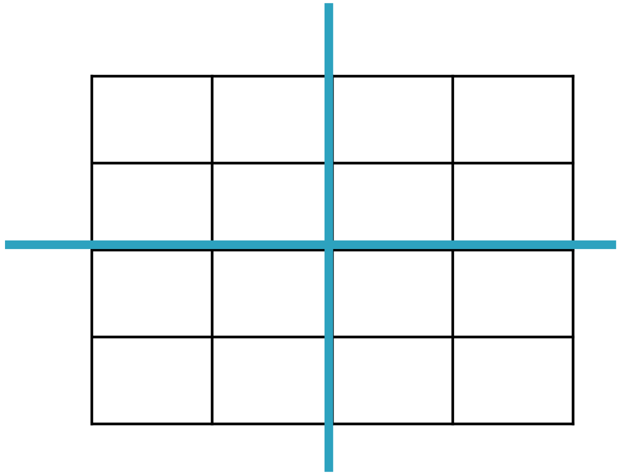
  `divide(x1, y1, x2, y2)`

sau

- Un colț al submatricei și dimensiunea ei

  `divide(x, y, dim)`

Divide et impera – Matrice



```
def suma(m,x,y,n):
    if n==1:
        return m[x][y]

    s1 = suma(m, x, y, n//2)
    s2 = suma(m, x+n//2, y, n//2)
    s3 = suma(m, x, y+n//2, n//2)
    s4 = suma(m, x+n//2, y+n//2, n//2)
    return s1+s2+s3+s4

def suma_matrice(m):
    return suma(m,0,0,len(m))
```