07. 11. 2022

Curs 6

- P&S -

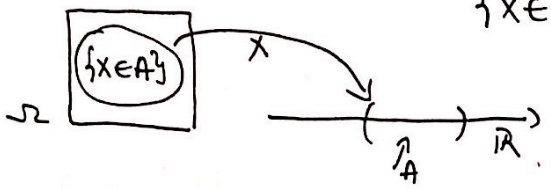
Variabile aleatoare. Repartiția unei v.a. și fct. de repartiție

v.a. : $\begin{cases} X : \Omega \to \mathbb{R} \\ \{X \le x\} \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, X v.a. și

$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A), \forall A \in \mathbb{R}$ interval

$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \in A\}$



$= X^{-1}(A)$

$\boxed{\mathbb{P}_X(\cdot) = (\mathbb{P} \circ X^{-1})(\cdot)}$ ($\cdot$ = funcție, A)

↳ repartiția v.a. X

Funcția de repartiție (fct. cumulativă / CDF)

$F : \mathbb{R} \to [0,1]$

$F(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x])$

$= \mathbb{P}(X \le x), \forall x \in \mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

$F(x)$

Exp: Aruncăm de 3 ori cu banul.

$X = \underset{\text{nr } H}{\#}$ capete în cele 3 aruncări

Care este fct. de rep. a lui X? Desen.

$\Omega = \{H, T\}^3 \to 8$ elem.

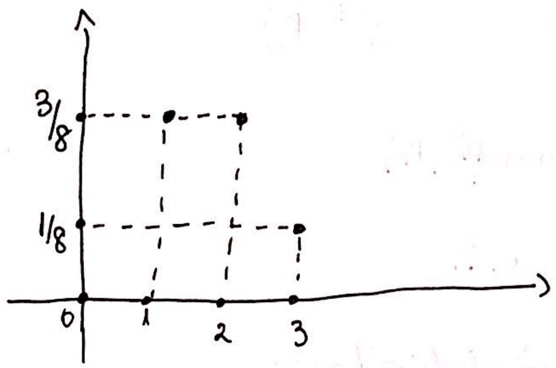
$X \in \{\underset{TTT}{0}, 1, 2, 3\}$

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\{TTT\}) = \frac{1}{8}$$

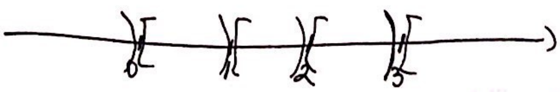
$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{HTT\}, \{THT\}, \{TTH\}) = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(\{HHT\}, \{HTH\}, \{THH\}) = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(\{HHH\}) = \frac{1}{8}$$

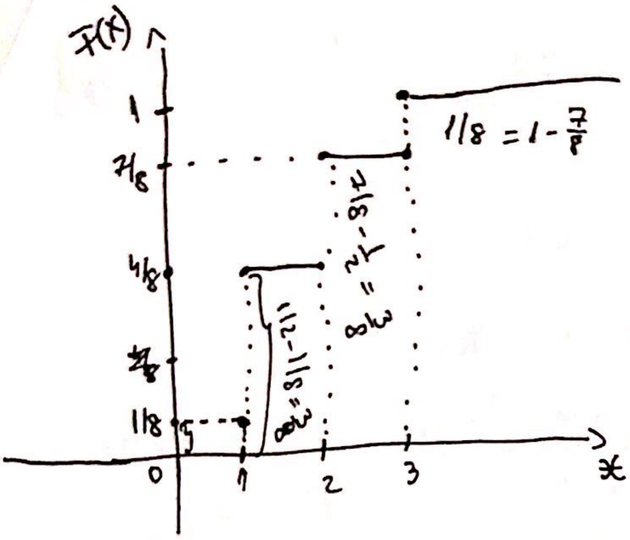


$F(x) = ?$



$$F(x) = \begin{cases} 0 = \mathbb{P}(\emptyset), & x < 0 \\ 1/8, & 0 \le x < 1 \\ 1/8 + 3/8 = \frac{4}{8}, & 1 \le x < 2 \\ 1/8 + 3/8 + 3/8 = \frac{7}{8}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

Dacă
$$\begin{cases} 0 \le x < 1 \Rightarrow \{X \le x\} = \{X = 0\} \Downarrow 1/8 \\ 1 \le x < 2 \Rightarrow \{X \le x\} = \{X=0\} \cup \{X=1\} \\ 2 \le x < 3 \Rightarrow \{X \le x\} = \{X=0\} \cup \{X=1\} \cup \{X=2\} \\ x \ge 3 \Rightarrow \{X \le x\} = \Omega \end{cases}$$



examen

Proprietăți funcției de repartiție:

a) F crescătoare ($\forall\, x < y \Rightarrow F(x) \le F(y)$)

b) F cont. la dreapta : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F(x) = F(x_0)$, $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

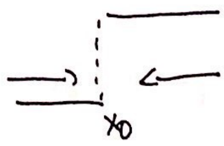
În plus,

d) $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \le x) = 1 - F(x)$

e) $\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \le x) - \mathbb{P}(X = x)$

$= \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F(x)$

$= F(x_0-)$ (lim la stânga)



($F(x+) \overset{not}{=}$ lim. la dreapta)

~~f) $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x-)$~~

f) $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x-)$

Variabile aleatoare discrete

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ v.a

$X(\Omega)$ - mulțimea valorilor lui X.

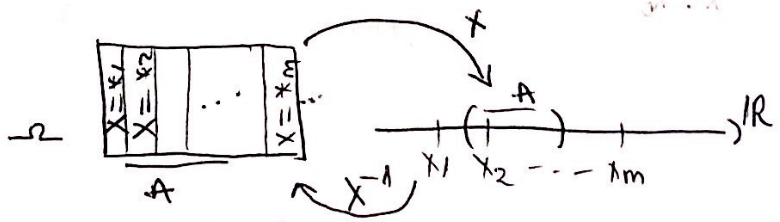
$X(\Omega)$ → cel mult numărabilă = finit sau numărabil $\Rightarrow X$ este v.a. discretă

$X(\Omega)$ → infinită nenumărabilă $\Rightarrow X$ este continuă

X v.a. discretă, $X: \Omega \to \mathbb{R}$

$A \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \in A) =$

$X(\Omega)$ - cel mult ~~nu~~ numărabilă



$\Rightarrow \Omega = \bigcup_{m \geq 1} \{X = x_m\}$

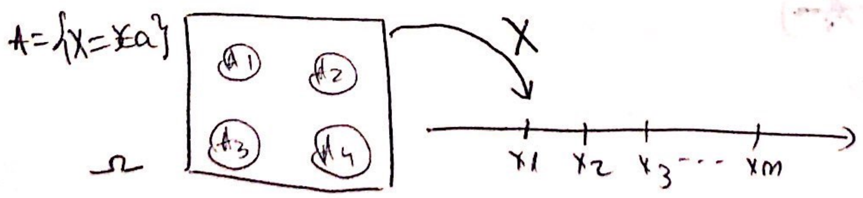
$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\Big(X \in \bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} \{x\}\Big) = \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} (X = x)$$

→ **Definiție**:

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. discretă.

Se numește funcția de masă asociată (PMF):

$f(x) = \mathbb{P}(X = x)$, $\forall x \in X(\Omega)$, $f: X(\Omega) \to [0, 1]$



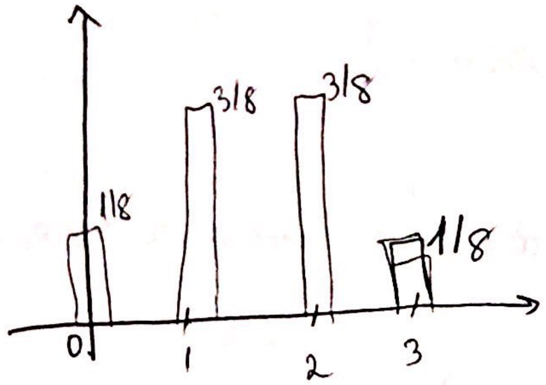
! **Obs!** Se mai folosește și notația $p(x)$ sau $p_X(x)$

Exp! Aruncăm de 3 ori cu banul, $X = \#H$ în cele 3 aruncări

Determinați f. de masă a lui X

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x), \forall x \in \{0, 1, 2, 3\} = X(\Omega)$$

$$f(0) = 1/8, \ f(1) = 3/8, \ f(2) = 3/8, \ f(3) = 1/8$$



! **Obs!** $X \in \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ $\quad X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$

$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$

$\sim$ nu e repartiția variabilei, e o notație!

Proprietăți funcția de masă

a) $f(x) = \mathbb{P}(X=x) \geq 0$ (pozitivă)

b) $$\left.\begin{aligned} &\mathbb{P}(\Omega)=1 \\ &\mathbb{P}(\Omega) = \bigcup_{x\in X(\Omega)} \{X=x\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}\Big(\bigcup_{x\in X(\Omega)}\{X=x\}\Big) = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \sum_{x\in X(\Omega)} f(x) = 1}$$ (masa totală $=1$)

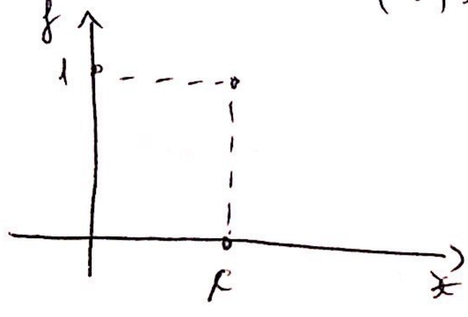
! **Obs!** Legătura dintre funcția de masă și funcția de repartiție

$$\begin{cases} F(x) = \mathbb{P}(X\leq x) = \displaystyle\sum_{\substack{y\leq x \\ y\in X(\Omega)}} f(y) \\ f(x) = F(x) - F(x-) \end{cases}$$

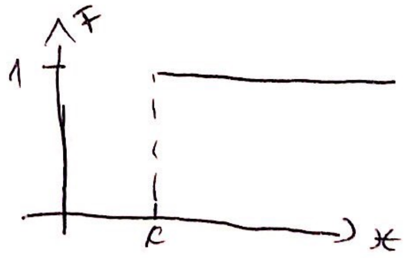
Exemple de v.a. discrete

1) v.a. $X = c$ (constantă) $\rightarrow$ ban cu H pe ambele fețe

$$f(x) = \mathbb{P}(X=x) = \begin{cases} 1, & x=c \\ 0, & x\neq c \end{cases}$$ (fct de masă)



$$F(x) = \mathbb{P}(X\leq x) = \begin{cases} 0, & x<c \\ 1, & x\geq c \end{cases}$$



(fct de repartiție)

② Variabile aleatoare de tip Bernoulli

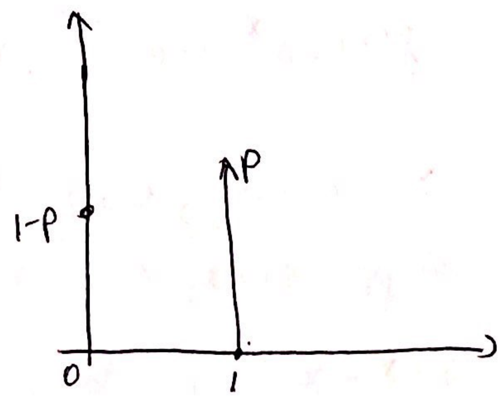
Avem un experiment, și un eveniment A de interes.

Pp. $\mathbb{P}(A) = p \in [0,1]$

$X: \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \cancel{\omega \notin A} \text{ altfel} \end{cases}$

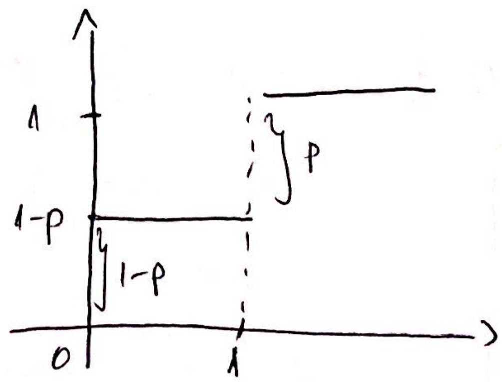
$f(1) = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(A) = p$

$f(0) = \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(A^C) = 1-p$



$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1-p & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , x \ge 1 \end{cases}$

Dacă $x \ge 1$, $\{X \le x\} =$
$= \{X=0\} \cup \{X=1\}$



v.a. indicator: A, $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$

Not. v.a. de tip Bernoulli: $X \sim Ber(p)$ (sau $B(p)$)

este repartizată ca ...

Scrierea sub formă compactă a funcției de masă:

~~$f(x)$~~

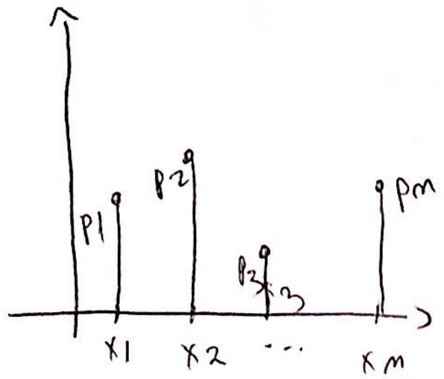
$$f(x) = p^{x}(1-p)^{1-x}, \; x \in \{0,1\}$$

3 $X: \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ și

să pp. $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$

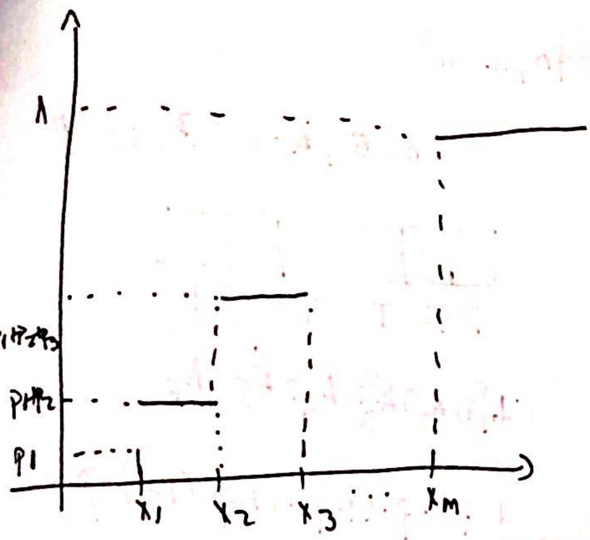
$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i \in (0,1)$ cu $\sum_{i \geq 1}^{m} p_i = 1$

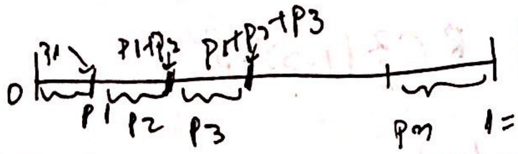
Graficul fct. de masă:



$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} p_i, & x_k \leq x < x_{k+1} \end{cases}$$

Graficul de masă:





$1 = p_1 + p_2 + \dots + p_m$

(4) Variabile aleatoare de tip binomial

Presupunem că avem un exp. aleator și A un ev. de interes. Repetăm exp. de n ori (în aceleași condiții) și ne interesăm la nr. de realizări ale evenimentului A.

$X = \#$ realizări ale ev. A în n repetări ale exp.

$X \sim B(n, p)$ - v.a. repartizate binomial de parametri n și p.

p ↳ prob. de realiz. a eve. A în cadrul exp ($\mathbb{P}(A)$)

n ↳ nr de repetiții a exp

$X \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$

Scanned with CamScanner

funcția de masă:

$f(k) = \mathbb{P}(X=k) = ?$ $\quad k \in \{0, \dots m\}$

$\mathbb{P}(X=k) = C_m^K (1-p)^{m-K} \cdot p^K$

~~C_m^k~~ Proprietăți verificare:

a) pozitivă $\checkmark$

b) $\sum_{K=0}^{m} \mathbb{P}(X=k) = 1$

$$\sum_{K=0}^{m} \binom{m}{K} (1-p)^{m-K} \cdot p^K = 1 ? \quad \checkmark$$

$$= (1-p+p)^m \text{ (binomul lui Newton)}$$

$m = 6,\ k = 2;\ \mathbb{P}(H) = p$

T H T T T H

$A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c \cap A_6$

$(1-p) \cdot p \cdot (1-p) \cdot (1-p)(1-p) \cdot p$

$\mathbb{P}(THTTTH) = (1-p)^4 \cdot p^2$

$C_6^2 (1-p)^4 \cdot p^2$

! Obs! $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m,\ Y_i \sim B(p)$ (indep.)

Exp.: Urnă cu bile de 2 culori: albe și negre.
Știm că în urnă sunt N bile, din care M negre.
Extragem din urnă m bile cu întoarcere:

X = nr. de bile negre din cele m bile extrase este:

$$X \sim B\left(m, \frac{M}{N}\right)$$

5. v.a. repartizată hipergeometric

Avem o urnă cu N bile albe și negre și M de culoare neagră. Extragem n bile fără întoarcere și ne interesăm la nr de bile negre din cele n extrase.

$X = \#$ bile negre din cele n extrase este repartizată hipergeometric not $HG(n, N, M)$

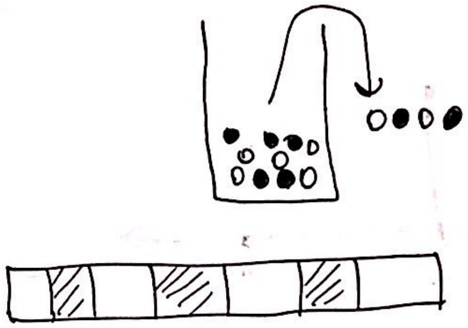
n → nr de extrageri fără întoarcere

N → nr bile urnă

M → nr. bile negre.

$X \sim HG(n, N, M)$ $\qquad X \in \{0, 1, \dots, \min(M, n)\}$

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

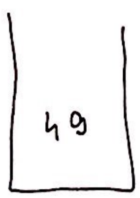


Loto 6 din 49

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

$1, 17, 23, 41, 39, 5$

? Care este prob. să fi nimerit $k = 3$ numere?



$N = 49$

$M = 6$ bile negre (cele extrase)

$n = 6$

$$\mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}}$$

$\mathbb{P}(X \in \{3,4,5,6\}) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=2) \simeq 0{,}18\dots$ → șansa pt. premiul cel mare

$$\sum_{k=0}^{\min(n,M)} \binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k} = \binom{N}{n} \Rightarrow \text{este fct. de masă}$$

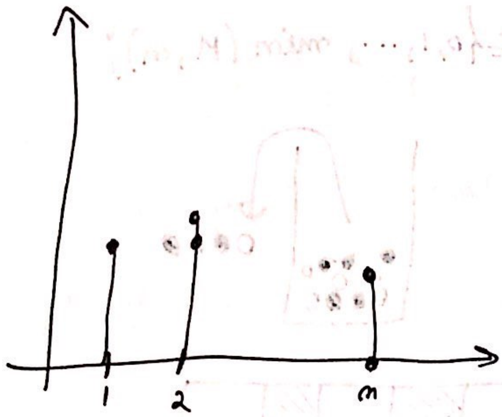
$$(1+x)^M \cdot (1+x)^{N-M} = (1+x)^N$$

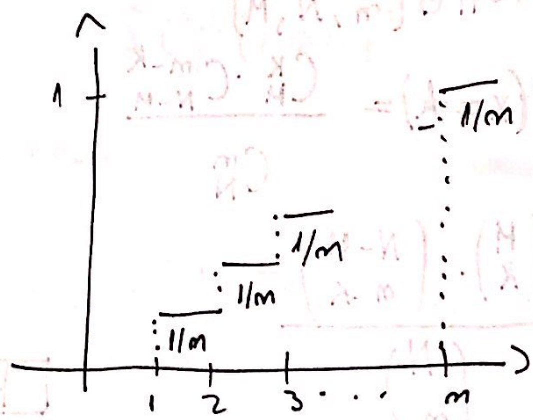
coef lui x^n

⑥ Uniforma pe $\{1, 2, \ldots, n\}$ (echirepartiția)

$X: \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\Omega) = \{1, 2, \ldots, n\}$ (D finită)

$f(k) = \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{|D|}\right), \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$





$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{|A \cap D|}{|D|}, \forall A \in \mathbb{R}.$$