/

31.10.2022

Curs 5

- P&S -

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) > 0$

$Q(B) = \mathbb{P}(B \setminus A)$, $\forall B \in \mathcal{F} \cap A = \{F \cap A / F \in \mathcal{F}\}$
↳ este prob!!

Formula lui Bayes: $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot / C)$

$$Q(A \setminus B) = \frac{Q(B/A) \cdot Q(A)}{Q(B)}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ B \cap C}}{\mathbb{P}(A \setminus B, C)} = \frac{\mathbb{P}(B/A, C) \cdot \mathbb{P}(A/C)}{\mathbb{P}(B/C)}$$

→ Exp: Pp. că avem 2 monede
- una echi. (prob $H = \frac{1}{2}$)
- una trucată (prob $H = \frac{3}{4}$)

Șansa de a alege oricare dintre cele 2 monede este $1/2$

Obținem în urma celor 3 aruncări HHH

a) având această inf., care este prob. să fi ales moneda echilibrată?

b) Pp. că aruncăm pt. a 4-a oară moneda. Care e prob. să fi obț. H?

Sol!

a) A - ev. prin care în primele aruncări am obț. HHH
B - ev. prin care am ales moneda echilibrată

$$\mathbb{P}(B/A) = \frac{\mathbb{P}(A/B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A/B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A/B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A/B^c) \cdot \mathbb{P}(B^c)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}$$

b) C - ev. prin care la a 4-a aruncare am obț. H.

$\mathbb{P}(C/A) = ?$

Dacă notăm $Q(C) = \mathbb{P}(C/A)$, $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot/A)$

Formula prob. totale: $Q(C) = Q(C/B)\,Q(B) + Q(C/B^c) \cdot Q(B^c)$

$$\left.\begin{array}{l} Q(B) = \mathbb{P}(B/A) = \text{din pct a)} \\ Q(B^c) = 1 - Q(B) \\ Q(C/B) = \frac{1}{2} \\ Q(C/B^c) = \frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{Q(C)}}$$

Independență

Două evenimente sunt independente dacă realizarea unuia nu aduce nicio informație suplimentară asupra realizării celuilalt.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $A, B \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B)$$

Definiție:

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un c.p. și $A, B \in \mathcal{F}$.

Spunem că A și B sunt independente și notăm $A \perp\!\!\!\perp B$ ($\downarrow$ A independent de B)

dacă $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Obs! dacă $A \perp\!\!\!\perp B$, atunci: $A^c \perp\!\!\!\perp B$, $A \perp\!\!\!\perp B^c$, $A^c \perp\!\!\!\perp B^c$

Exp1: Aruncăm cu banul de 2 ori

A_1 - ev. prin care la prima aruncare am obț. H

A_2 - ev. prin care la a 2-a aruncare am obț. H.

$\Omega = \{H, T\}^2$

$A_1 = \{(H,H), (H,T)\}$

$\cancel{A_2 = \{H,}$

$A_2 = \{(T,H), (H,H)\}$

$A_1 \cap A_2 = \{(H,H)\}$

Sunt A_1 și A_2 independente?

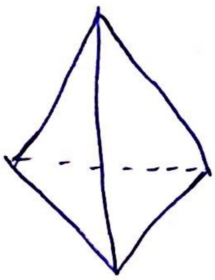
$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \Rightarrow A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$

Exp2: Zar cu 4 fețe, aruncăm de 2 ori



$\Omega = \{1,2,3,4\}^2$

$A = \{$ primul zar cu fața 1 $\}$

$B = \{$ suma punctelor este 5 $\}$

$C = \{$ min e 2 $\}$

$D = \{$ max e 2 $\}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$, $A = \{(1,x) \mid x \in \{1,2,3,4\}\}$

$B = \{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$

$A \cap B = \{(1,4)\} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{16}$

$\Rightarrow A \perp\!\!\!\perp B$ (pt ca $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$)

$\mathbb{P}(C) = \frac{5}{16}$ $\quad C = \{(2,3), (2,4), (4,2), (3,2), (2,2)\}$

$D = \{(1,2), (2,1), (2,2)\}$

$\mathbb{P}(D) = \frac{3}{16}$

$\mathbb{P}(C \cap D) = \frac{1}{16}$

$\Rightarrow C \not\perp\!\!\!\perp D$

Definiție:

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

Spunem că ev. $A_1, \dots A_n$ sunt independente (mutual) dacă

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i), \quad \forall I \subseteq \{1, \dots, n\}$$

! Obs! $\quad A_1, A_2, A_3$ indep $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2) \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_3) \\ \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) \cap \mathbb{P}(A_3) \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) \end{cases}$$

Def $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ cp și $A, B, C \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(C) > 0$

Spunem că A și B sunt indep. condiționat la C dacă:

$$\mathbb{P}(A \cap B / C) = \mathbb{P}(A / C) \cdot \mathbb{P}(B / C)$$

! Obs! $Q(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot / C) \Rightarrow Q(A \cap B) = Q(A) \cdot Q(B)$

Exp: D - {o persoană are afecțiunea}
T - {testul a ieșit pozitiv}

$\mathbb{P}(D) = 1\%$

acuratețea (senzitivitatea = specificitatea) = 95%

$\mathbb{P}(T / D) = \mathbb{P}(T^c / D^c) = 95\%$

$\mathbb{P}(D / T) \simeq 5\%$

Să presupunem că pers. mai efec. un test (p p că rezultatul testelor sunt indep. în rap. cu statusul bolii) și testul este tot +. Care este prob. să aibă COVID?

T_1 - primul test +

T_2 - al 2-lea test +

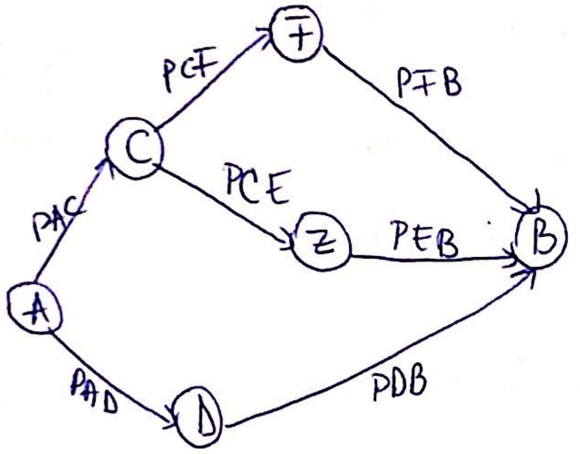
$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 / D) = \mathbb{P}(T_1 / D) \cdot \mathbb{P}(T_2 / D)$

$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 / D^c) = \mathbb{P}(T_1 / D^c) \cdot \mathbb{P}(T_2 / D^c)$

$$\mathbb{P}(D / T_1 \cap T_2) = \frac{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2 / D) \cdot \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T_1 \cap T_2)}$$

$\mathbb{P}(T_1 \cap T_2) = \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 / D)\, \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T_1 \cap T_2 / D^c)\, \mathbb{P}(D^c)$

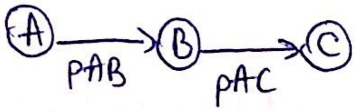
Exp.



PAD ? Care e prob. să transmit un mesaj de la A la B?

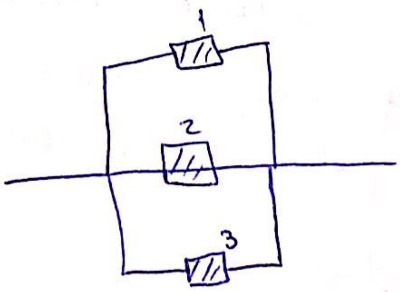
a) Subsistem serie

$p_1 \times p_2 \times p_3$



$P_{AC} = P_{AB} \times P_{AC}$

b) Subsistem paralel



P(transmitem mesajul în sist. paralel) = 1 − p (nu trans. mes. în sist paralel)

= 1 − p(eșec mod 1, eșec mod 2, ..., eșec mod n)

= 1 − p(eșec mod 1) × ... × p(eșec mod n)

$= 1 - (1-p_1) \times \ldots \times (1-p_n)$

$\mathbb{P}(A \to B) = ?$

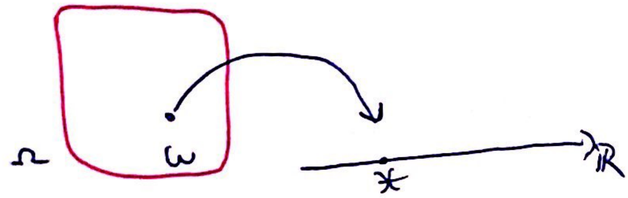
$\mathbb{P}(C \to B) = 1 - (1 - \mathbb{P}(C \to E,\ E \to B))$

$= 1 - (1 - p_{CE} \times p_{EB})(1 - p_{CF} \times p_{FB})$

Variabile aleatoare

Definiție: Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un c.p. și $X: \Omega \to \mathbb{R}$ ~~sunt~~ funct.

Spunem că X este o variabilă aleatoare dacă mulțimea
$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \forall\, x \in \mathbb{R}$.



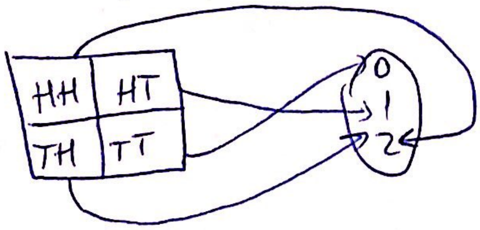
Exp. Aruncăm 2 zaruri

Def: X = suma punctelor de pe cele 2 zaruri

Exp: Aruncăm de 2 ori zarul

X = nr. de H din cele 2 aruncări

$$\Omega = \{\underset{\substack{\downarrow\\ 2}}{HH}, \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{HT}, \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{TH}, \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{TT}\}$$



$X \in \mathbb{R}$

! Obs!

$\{X \le x\} = \{\omega \in \Omega / X(x) \le x\}$

$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} = X^{-1}(A)$

$\{X \le x\} \in \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

Dacă $\rightarrow x < 0$ $\{X \in x\} = \emptyset$

$\rightarrow x \in [2, +\infty)$ $\{X \le x\} = \Omega$

$X^{-1}(\{0\}) = \{TT\}$

$X^{-1}(\{1\}) = \{HT, TH\}$

$X^{-1}(\{2\}) = \{HH\}$

$\rightarrow x \in [0,1)$ $\{X \le x\} = \{TT\}$

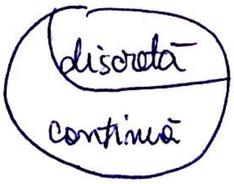
$\rightarrow x \in [1,2)$ $\{X \le x\} = \{X=0$ sau $X=1\} = \{TT, TH, HT\}$

! Notație: v.a. se notează cu litere mari

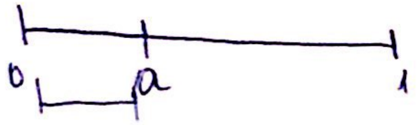
X, Y, Z, T, W

$X \rightarrow$ discretă : $X(\Omega)$ este cel mult numărabilă

$X \rightarrow$ continuă :



Exp. $[0,1)$ luăm un punct la întâmplare



$$\operatorname{sgn}(a)=\begin{cases}-1, & a<0\\ 0, & a=0\\ 1, & a>0\end{cases}$$

Vrem să calculăm $\mathbb{P}(X\in A)$ unde $A\subseteq\mathbb{R}$

Definiție: Repartiția unei v.a. $(\mathbb{P}_X(A))$

Fie $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un c.p. și $X:\Omega\to\mathbb{R}$ v.a

S.n. rep. lui X (distribuția) prob pe $\mathbb{R}$ definită prin

$$\boxed{\mathbb{P}_X(A)=\mathbb{P}(X\in A)=(\mathbb{P}\circ X^{-1})(A),\ \forall A\in\mathbb{R}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_X=\mathbb{P}\circ X^{-1}}$$

Definiție: Funcția de repartiție

Fie $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ c.p., $X:\Omega\to\mathbb{R}$ v.a

Definim f. de rep. a lui X

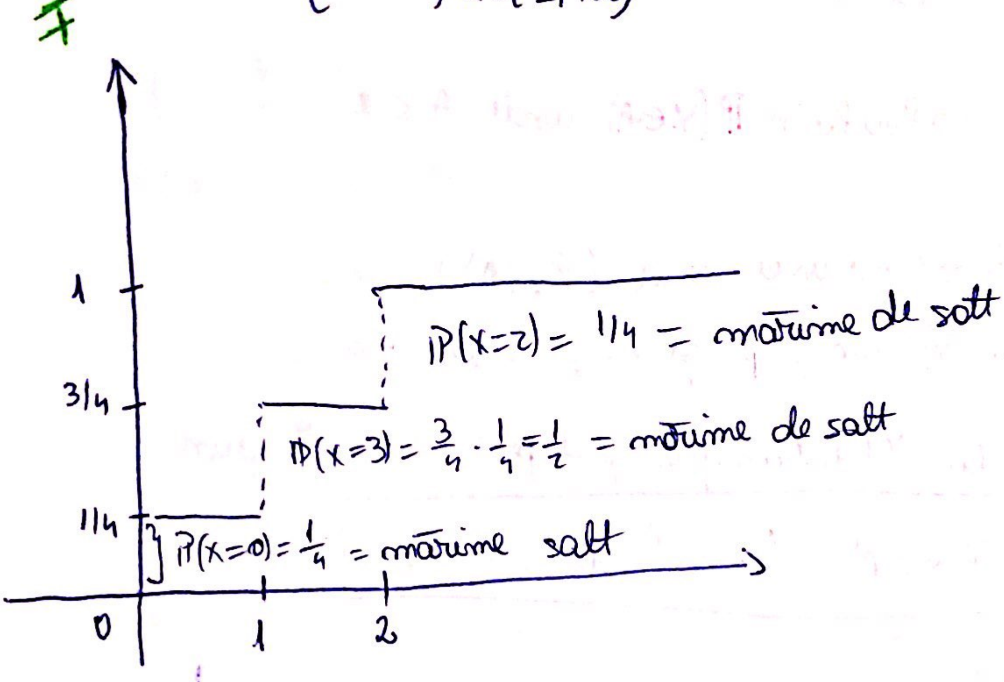
$F:\mathbb{R}\to[0,1]$ prin $F(x)=\mathbb{P}(X\le x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

! Obs! $A=(-\infty,x]$

$\mathbb{P}_X(A)=F(x)$

Exp. Aruncăm de 2 ori cu banul și X= nr de H în cele 2 aruncări

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1/4 & , x \in [0,1) \\ 3/4 & , x \in [1,2) \\ 1 & , x \in [2,+\infty) \end{cases}$$



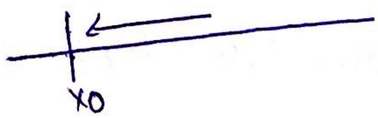
scară => discretă

Proprietăți f. de repartiție:

a) F e crescătoare $(x < y \Rightarrow F(x) \le F(y))$

b) F e continuă la dreapta

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} F(x) = F(x_0)$$



c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

$$\boxed{P(X = x_0) = P(X \le x_0) - P(X < x_0) = F(x_0) - F\left(x_0 - \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} F(x)\right)}$$