5 Mulţimi etc.

În capitolele anterioare am studiat unele noţiuni matematice. În acest capitol vom recapitula şi vom completa notaţiile, definiţiile şi proprietăţile elementare ale mulţimilor, relaţiilor, funcţiilor, grafurilor şi arborilor. Cititorii familiarizaţi cu aceste noţiuni trebuie, doar, să răsfoiască paginile acestui capitol.

5.1. Mulţimi

O ***mulţime*** este o colecţie de obiecte distincte numite ***membri*** sau ***elemente***. Dacă un obiect x este element al mulţimii S, scriem $x \in S$ şi citim "x este un element al lui S" sau, mai scurt, "x aparţine lui S". Dacă x nu este un element al lui S, scriem $x \notin S$. Putem descrie o mulţime enumerându-i elementele în mod explicit ca o listă între acolade. De exemplu, putem defini o mulţime S care conţine numerele 1, 2 şi 3 scriind $S = \{1, 2, 3\}$. Deoarece 2 este un element al mulţimii S, vom scrie $2 \in S$, dar vom scrie $4 \notin S$ deoarece 4 nu este un element al lui S. O mulţime nu poate conţine acelaşi obiect de mai multe ori şi elementele sale nu sunt ordonate. Două mulţimi A şi B sunt ***egale*** dacă ele conţin aceleaşi elemente. Notaţia folosită pentru a arăta că două mulţimi sunt egale este $A = B$. De exemplu, avem $\{1, 2, 3, 1\} = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$.

Folosim notaţii speciale pentru câteva mulţimi mai des întâlnite.

- Notăm cu $\emptyset$ ***mulţimea vidă***, adică mulţimea care nu conţine nici un element.
- Notăm cu $\mathbb{Z}$ mulţimea ***numerelor întregi***, adică mulţimea $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- Notăm cu $\mathbb{R}$ mulţimea ***numerelor reale***.
- Notăm cu $\mathbb{N}$ mulţimea ***numerelor naturale***, adică mulţimea $\{0, 1, 2, \ldots\}$.[1]

Dacă toate elementele unei mulţimi A sunt conţinute într-o mulţime B, adică dacă $x \in A$ implică $x \in B$, atunci scriem $A \subseteq B$ şi spunem că A este o ***submulţime*** a lui B. O mulţime A este o ***submulţime strictă*** a lui B, notat $A \subset B$, dacă $A \subseteq B$ dar $A \neq B$. (Unii autori folosesc simbolul "$\subset$" pentru a nota relaţia obişnuită de incluziune şi nu relaţia de incluziune strictă.) Pentru orice mulţime A, avem $A \subseteq A$. Pentru două mulţimi A şi B, avem $A = B$ dacă, şi numai dacă, $A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$. Pentru oricare trei mulţimi A, B şi C, dacă $A \subseteq B$ şi $B \subseteq C$, atunci $A \subseteq C$. Pentru orice mulţime A avem $\emptyset \subseteq A$.

Uneori definim mulţimi pornind de la alte mulţimi deja definite. Dându-se o mulţime A, putem defini o mulţime $B \subseteq A$ impunând o restricţie care să distingă elementele din B de celelalte elemente din A. De exemplu putem defini mulţimea numerelor întregi pare prin

$$x : x \in \mathbb{Z}$$

şi $x/2$ este un număr întreg$\}$. Cele două puncte din notaţia anterioară înseamnă "astfel încât." (Unii autori folosesc o bară verticală în locul acestor două puncte.)

[1] Unii autori susţin că 0 nu face parte din mulţimea numerelor naturale. Totuşi tendinţa modernă este de a include şi numărul 0 în această mulţime.

Dându-se două mulţimi A şi B putem defini noi mulţimi aplicând unii ***operatori cu mulţimi***:

- ***Intersecţia*** mulţimilor A şi B este mulţimea

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ şi } x \in B\}.$$

- ***Reuniunea*** mulţimilor A şi B este mulţimea

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

- ***Diferenţa*** dintre două mulţimi A şi B este mulţimea

$$A - B = \{x : x \in A \text{ şi } x \notin B\}.$$

Operaţiile cu mulţimi respectă următoarele reguli:

Reguli ale mulţimii vide:

$$A \cap \emptyset = \emptyset,$$
$$A \cup \emptyset = A.$$

Reguli de idempotenţă:

$$A \cap A = A,$$
$$A \cup A = A.$$

Reguli de comutativitate:

$$A \cap B = B \cap A,$$
$$A \cup B = B \cup A.$$

Reguli de asociativitate:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Reguli de distributivitate:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Reguli de absorbţie:

$$A \cap (A \cup B) = A,$$
$$A \cup (A \cap B) = A.$$

Legile lui DeMorgan:

$$\begin{aligned} A - (B \cap C) &= (A - B) \cup (A - C), \\ A - (B \cup C) &= (A - B) \cap (A - C). \end{aligned} \tag{5.2}$$

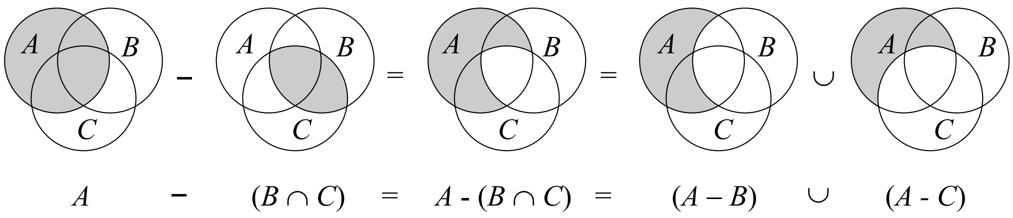

Figura 5.1 O diagramă Venn ilustrând prima regulă a lui DeMorgan (5.2). Fiecare dintre mulţimile A, B şi C este reprezentată ca un cerc în plan.

Prima dintre regulile lui DeMorgan este ilustrată în figura 5.1, folosind o ***diagramă Venn***, o imagine grafică în care mulţimile sunt reprezentate ca regiuni în plan.

Deseori toate mulţimile considerate sunt submulţimi ale unei mulţimi mai mari U numită ***univers***. De exemplu, dacă luăm în considerare diferite mulţimi formate numai din întregi, mulţimea $\mathbb{Z}$ este un univers potrivit. Dându-se un univers U, definim ***complementul*** unei mulţimi A ca fiind $\overline{A} = U - A$. Pentru orice mulţime $A \subseteq U$, următoarele propoziţii sunt adevărate:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}} &= A, \\ A \cap \overline{A} &= \emptyset, \\ A \cup \overline{A} &= U. \end{aligned}$$

Dându-se două mulţimi $A, B \subseteq U$, regulile lui DeMorgan pot fi rescrise cu ajutorul complementelor mulţimilor A şi B faţă de U astfel:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Două mulţimi A şi B sunt ***disjuncte*** dacă nu au nici un element comun, adică $A \cap B = \emptyset$. O colecţie $\mathcal{S} = \{S_i\}$ de mulţimi nevide formează o ***partiţie*** a unei mulţimi S dacă:

- mulţimile sunt ***distincte două câte două***, adică $S_i, S_j \in \mathcal{S}$ şi $i \neq j$ implică $S_i \cap S_j = \emptyset$ şi
- reuniunea lor este S, adică

$$S = \bigcup_{S_i \in \mathcal{S}.} S_i$$

Cu alte cuvinte, $\mathcal{S}$ formează o partiţie a lui S dacă fiecare element al mulţimii S apare în exact o mulţime $S_i \in \mathcal{S}$.

Numărul de elemente ale unei mulţimi poartă denumirea de ***cardinal*** (sau ***dimensiune***) al mulţimii şi este notat cu $|S|$. Două mulţimi au acelaşi cardinal dacă poate fi stabilită o corespondenţă biunivocă între cele două mulţimi. Cardinalul mulţimii vide este $|\emptyset| = 0$. În cazul în care cardinalul unei mulţimi este un număr natural, spunem că mulţimea este ***finită***; altfel, ea este ***infinită***. O mulţime infinită care poate fi pusă în corespondenţă biunivocă cu mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ este numită ***mulţime numărabilă infinită***; în caz contrar ea este ***nenumărabilă***. Mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi este numărabilă dar mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este nenumărabilă.

Pentru oricare două mulţimi finite A şi B, avem identitatea:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, \tag{5.3}$$

de unde putem deduce că

$$|A \cup B| \leq |A| + |B|.$$

Dacă A şi B sunt disjuncte, atunci $|A \cap B| = 0$, deci $|A \cup B| = |A| + |B|$. Dacă $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$.

O mulţime finită cu n elemente este uneori denumită ***n-mulţime***. O 1-mulţime este denumită ***mulţime cu un singur element***. O submulţime cu k elemente a unei mulţimi este denumită uneori ***k-submulţime***.

Mulţimea tuturor submulţimilor unei mulţimi S, incluzând mulţimea vidă şi mulţimea S, este notată prin 2^S şi este denumită ***mulţimea părţilor*** lui S. De exemplu, $2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. Mulţimea părţilor unei mulţimi finite S are cardinalul $2^{|S|}$.

Uneori ne interesează structuri asemănătoare mulţimilor în cadrul cărora elementele sunt ordonate. O ***pereche ordonată*** formată din două elemente a şi b este notată cu (a, b) şi poate fi definită ca fiind mulţimea $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$. Deci perechea ordonată (a, b) *nu* este identică cu perechea ordonată (b, a).

Produsul cartezian a două mulţimi A şi B, notat prin $A \times B$, este mulţimea tuturor perechilor ordonate astfel încât primul element al perechii face parte din mulţimea A, iar al doilea este un element al mulţimii B. Mai exact:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ şi } b \in B\}.$$

De exemplu $\{a, b\} \times \{a, b, c\} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c)\}$. Când A şi B sunt mulţimi finite, cardinalul produsului lor cartezian este:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|. \tag{5.4}$$

Produsul cartezian a n mulţimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ este o mulţime de ***n-tuple***

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\},$$

al cărei cardinal este:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|,$$

dacă toate mulţimile sunt finite. Notăm produsul cartezian dintre o mulţime A şi ea însăşi prin

$$A^2 = A \times A.$$

Similar, avem:

$$A^n = A \times A \times \cdots \times A.$$

Cardinalul acestei ultime mulţimi este $|A^n| = |A|^n$ dacă A este finită. Un n-tuplu poate fi privit ca un şir finit de lungime n (vezi secţiunea 5.3).

Exerciţii

5.1-1 Desenaţi diagramele Venn care ilustrează prima regulă de distributivitate (5.1).

5.1-2 Demonstraţi regulile generalizate ale lui DeMorgan pentru orice colecţie finită de mulţimi:

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n},$$
$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}.$$

5.1-3 $\star$ Demonstraţi generalizarea ecuaţiei (5.3), care este denumită ***principiul includerii şi al excluderii***:

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \\
&\quad |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| - \\
&\quad -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots && \text{(toate perechile)} \\
&\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots && \text{(toate tripletele)} \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\quad +(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.
\end{aligned}$$

5.1-4 Arătaţi că mulţimea numerelor naturale impare este numărabilă.

5.1-5 Arătaţi că, pentru orice mulţime finită S, mulţimea părţilor sale 2^S are $2^{|S|}$ elemente (adică există $2^{|S|}$ submulţimi distincte ale lui S).

5.1-6 Daţi o definiţie inductivă pentru un n-tuplu extinzând definiţia perechii ordonate din teoria mulţimilor.

5.2. Relaţii

O ***relaţie binară*** R între două mulţimi A şi B este o submulţime a produsului cartezian $A \times B$. Dacă $(a, b) \in R$, folosim uneori notaţia $a\,R\,b$. Când spunem că R este o relaţie binară peste o mulţime A, înţelegem că R este o submulţime a produsului cartezian $A \times A$. De exemplu, relaţia "mai mic decât" peste mulţimea numerelor naturale este mulţimea $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{N}$ şi $a < b\}$. O relaţie n-ară între mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ este o submulţime a lui $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

O relaţie binară $R \subseteq A \times A$ este ***reflexivă*** dacă

$$a\,R\,a$$

pentru orice $a \in A$. De exemplu, "$=$" şi "$\leq$" sunt relaţii reflexive peste $\mathbb{N}$ în timp ce relaţia "$<$" nu este. Relaţia R este ***simetrică*** dacă

$$a\,R\,b \text{ implică } b\,R\,a$$

pentru orice $a, b \in A$. De exemplu, "$=$" este simetrică, dar "$<$" şi "$\leq$" nu sunt. Relaţia R este ***tranzitivă*** dacă

$$a\,R\,b \text{ şi } b\,R\,c \text{ implică } a\,R\,c$$

pentru orice $a, b, c \in A$. De exemplu, relaţiile "$<$", "$\leq$" şi "$=$" sunt tranzitive, dar relaţia $R = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N}$ şi $a = b - 1\}$ nu este deoarece $3\,R\,4$ şi $4\,R\,5$ nu implică $3\,R\,5$.

O relaţie care este reflexivă, simetrică şi tranzitivă poartă denumirea de ***relaţie de echivalenţă***. De exemplu "$=$" este o relaţie de echivalenţă peste mulţimea numerelor naturale în timp ce "$<$" nu este. Dacă R este o relaţie de echivalenţă peste o mulţime A, atunci pentru oricare $a \in A$, ***clasa de echivalenţă*** a lui a este mulţimea $[a] = \{b \in A : a\ R\ b\}$, adică mulţimea tuturor elementelor echivalente cu a. De exemplu, dacă definim $R = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N}$ şi $a + b$ este un număr par$\}$, atunci R este o relaţie de echivalenţă deoarece $a + a$ este par (reflexivitate), dacă $a + b$ este par atunci şi $b + a$ este par (simetrie) şi, dacă $a + b$ este par şi $b + c$ este par, atunci şi $a + c$ este par (tranzitivitate). Clasa de echivalenţă a lui 4 este $[4] = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, iar clasa de echivalenţă a lui 3 este $[3] = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$. O teoremă de bază în studiul claselor de echivalenţă este următoarea.

Teorema 5.1 (O relaţie de echivalenţă este identică cu o partiţie) Clasele de echivalenţă ale oricărei relaţii de echivalenţă R peste o mulţime A formează o partiţie a lui A şi oricare partiţie a lui A determină a relaţie de echivalenţă peste A pentru care mulţimile din partiţie sunt clase de echivalenţă.

Demonstraţie. Pentru prima parte a demonstraţiei, trebuie să arătăm că clasele de echivalenţă ale lui R sunt nevide, disjuncte două câte două şi reuniunea lor este A. Deoarece R este reflexivă, $a \in [a]$, clasele de echivalenţă sunt nevide; mai mult, deoarece fiecare element $a \in A$ aparţine clasei de echivalenţă $[a]$, reuniunea claselor de echivalenţă este A. Rămâne de arătat că clasele de echivalenţă sunt distincte două câte două, adică dacă două clase de echivalenţă $[a]$ şi $[b]$ au un element c comun, ele sunt, de fapt, identice. Avem $a\,R\,c$ şi $b\,R\,c$ de unde deducem (datorită proprietăţilor de simetrie şi tranzitivitate ale lui R) că $a\,R\,b$. Deci, pentru oricare element $x \in [a]$ avem $x\,R\,a$ implică $x\,R\,b$, deci $[a] \subseteq [b]$. Similar, putem demonstra că $[b] \subseteq [a]$, deci $[a] = [b]$.

Pentru a doua parte a demonstraţiei, fie $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_i\}$ o partiţie a mulţimii A. Definim relaţia $R = \{(a, b) :$ există i astfel încât $a \in A_i$ şi $b \in A_i\}$. Susţinem că R este o relaţie de echivalenţă peste A. Proprietatea de reflexivitate este respectată deoarece $a \in A_i$ implică $a\,R\,a$. Proprietatea de simetrie este şi ea respectată deoarece dacă $a\,R\,b$ atunci a şi b fac parte din aceeaşi mulţime A_i, deci $b\,R\,a$. Dacă $a\,R\,b$ şi $b\,R\,c$ atunci toate cele trei elemente se află în aceeaşi mulţime, deci $b\,R\,a$ şi proprietatea de tranzitivitate este respectată. Pentru a vedea că mulţimile partiţiei sunt clase de echivalenţă ale lui R, observaţi că, dacă $a \in A_i$, atunci $x \in [a]$ implică $x \in A_i$ şi $x \in A_i$ implică $x \in [a]$. ■

O relaţie binară R peste o mulţime A este ***antisimetrică*** dacă

$a\ R\ b$ şi $b\ R\ a$ implică $a = b$.

De exemplu, relaţia "$\leq$" peste mulţimea numerelor naturale este antisimetrică deoarece $a \leq b$ şi $b \leq a$ implică $a = b$. O relaţie care este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă este o ***relaţie de ordine parţială***. O mulţime peste care este definită o relaţie de ordine parţială poartă denumirea de ***mulţime parţial ordonată***. De exemplu, relaţia "este descendent al lui" este o relaţie de ordine parţială a mulţimii tuturor fiinţelor umane (dacă privim indivizii ca fiind propriii lor descendenţi).

Într-o mulţime parţial ordonată A, poate să nu existe un singur element "maxim" x, astfel încât $y\,R\,x$ pentru orice $y \in A$. Pot exista mai multe elemente ***maximale*** x, astfel încât pentru nici un $y \in A$ nu există relaţia $x\,R\,y$. De exemplu, într-o colecţie de cutii având diferite dimensiuni pot exista mai multe cutii maximale care nu pot fi introduse în interiorul nici unei alte cutii, neexistând totuşi nici o cutie "maximă" în interiorul căreia să poată fi introduse toate celelalte cutii.

O relaţie parţială de ordine R peste o mulţime A este o ***relaţie de ordine totală*** sau ***relaţie de ordine liniară*** dacă pentru orice $a, b \in A$ avem $a\,R\,b$ sau $b\,R\,a$, adică orice pereche de elemente din A poate fi pusă în relaţie de către R. De exemplu, relaţia "$\leq$" este o relaţie de ordine totală peste mulţimea numerelor naturale, dar relaţia "este descendent al lui" nu este o relaţie de ordine totală peste mulţimea tuturor fiinţelor umane deoarece există perechi de indivizi pentru care nici unul nu este descendentul celuilalt.

Exerciţii

5.2-1 Demonstraţi că relaţia de incluziune "$\subseteq$" peste toate submulţimile lui $\mathbb{Z}$ este o relaţie de ordine parţială, dar nu este o relaţie de ordine totală.

5.2-2 Arătaţi că, pentru orice întreg pozitiv n, relaţia de "echivalenţă modulo n" este o relaţie de echivalenţă peste mulţimea numerelor întregi. (Spunem că $a \equiv b \pmod{n}$ dacă există un număr întreg q astfel încât $a - b = qn$.) În ce clase de echivalenţă partiţionează această relaţie mulţimea numerelor întregi?

5.2-3 Daţi exemple de relaţii care sunt:

a. reflexive şi simetrice, dar netranzitive,

b. reflexive şi tranzitive, dar nesimetrice,

c. simetrice şi tranzitive, dar nereflexive.

5.2-4 Fie S o mulţime finită şi R o relaţie de echivalenţă peste $S \times S$. Arătaţi că, dacă R este şi antisimetrică, atunci clasele de echivalenţă ale lui S faţă de R sunt mulţimi unitate.

5.2-5 Profesorul Narcissus susţine că, dacă o relaţie este simetrică şi tranzitivă, ea este şi reflexivă. El oferă următoarea demonstraţie: prin simetrie $a\,R\,b$ implică $b\,R\,a$, deci tranzitivitatea implică $a\,R\,a$. Are profesorul dreptate?

5.3. Funcţii

Dându-se două mulţimi A şi B, o ***funcţie*** este o relaţie binară peste $A \times B$ astfel încât, pentru orice $a \in A$, există exact un $b \in B$, şi $(a, b) \in f$. Mulţimea A este numită ***domeniul*** lui f, iar mulţimea B este numită ***codomeniul*** lui f. Uneori, scriem $f : A \to B$ şi, dacă $(a, b) \in f$, scriem $b = f(a)$, deoarece b este unic determinat prin alegerea lui a.

Intuitiv, funcţia f atribuie fiecărui element din A un element din B. Nici unui element din A nu i se atribuie două elemente diferite din B, dar acelaşi element din B poate fi atribuit mai multor elemente diferite din A. De exemplu, relaţia binară

$$f = \{(a, b) : a \in \mathbb{N} \text{ şi } b = a \bmod 2\}$$

este o funcţie $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, deoarece pentru fiecare număr natural a există exact o valoare b în $\{0, 1\}$ astfel încât $b = a \bmod 2$. Pentru acest exemplu avem $0 = f(0)$, $1 = f(1)$, $0 = f(2)$ etc. În schimb, relaţia binară

$$g = \{(a, b) : a \in \mathbb{N} \text{ şi } a + b \text{ este par}\}$$

nu este o funcţie deoarece atât $(1, 3)$ cât şi $(1, 5)$ se află în g, deci dacă alegem $a = 1$ nu putem determina un singur b pentru care $(a, b) \in g$.

Dându-se o funcţie $f : A \to B$ dacă $b = f(a)$, spunem că a este ***argumentul*** lui f, iar b este ***valoarea*** lui f în punctul a. Putem defini o funcţie enumerând valorile sale pentru fiecare element din domeniu. De exemplu, putem defini $f(n) = 2n$ pentru $n \in \mathbb{N}$, ceea ce înseamnă $f = \{(n, 2n) : n \in \mathbb{N}\}$. Două funcţii f şi g sunt ***egale*** dacă au acelaşi domeniu, acelaşi codomeniu şi, pentru orice a din domeniu, avem $f(a) = g(a)$.

Un ***şir finit*** de lungime n este o funcţie f al cărei domeniu este mulţimea $\{0, 1, \ldots, n - 1\}$. Deseori, definim un şir finit prin enumerarea valorilor sale: $\langle f(0), f(1), \ldots, f(n - 1)\rangle$. Un ***şir infinit*** este o funcţie al cărei domeniu este mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$. De exemplu, şirul lui Fibonacci, definit prin (2.13), este şirul infinit $\langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\rangle$.

Când domeniul unei funcţii f este un produs cartezian, omitem adesea perechea suplimentară de paranteze în care este cuprins argumentul lui f. De exemplu, dacă $f : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to B$, vom scrie $b = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ în loc de a scrie $b = f((a_1, a_2, \ldots, a_n))$. De asemenea, vom numi fiecare a_i un ***argument*** al lui f, cu toate că singurul argument "veritabil" al lui f este n-tuplul $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Dacă $f : A \to B$ este o funcţie şi $b = f(a)$, uneori, spunem că b este ***imaginea*** lui a prin f. Imaginea unei mulţimi $A' \subseteq A$ prin f este definită prin:

$$f(A') = \{b \in B : b = f(a) \text{ pentru } a \in A'\}.$$

Domeniul de valori al unei funcţii este imaginea domeniului său, adică $f(A)$. De exemplu imaginea funcţiei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definită prin $f(n) = 2n$ este $f(\mathbb{N}) = \{m : m = 2n \text{ pentru } n \in \mathbb{N}\}$.

O funcţie este o ***surjecţie*** dacă imaginea sa este egală cu codomeniul său. De exemplu, funcţia $f(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ este o funcţie surjectivă de la $\mathbb{N}$ la $\mathbb{N}$ deoarece fiecare element din $\mathbb{N}$ este valoare a lui f pentru un anumit argument. În schimb, funcţia $f(n) = 2n$ nu este o funcţie surjectivă de la $\mathbb{N}$ la $\mathbb{N}$ deoarece pentru nici un argument funcţia nu ia valoarea 3. Funcţia $f(n) = 2n$ este, totuşi, o funcţie surjectivă de la mulţimea numerelor naturale la mulţimea numerelor pare.

O funcţie $f : A \to B$ este o ***injecţie*** dacă, pentru argumente distincte, avem valori distincte ale funcţiei, adică $a \neq a'$ implică $f(a) \neq f(a')$. De exemplu funcţia $f(n) = 2n$ este o funcţie injectivă de la $\mathbb{N}$ la $\mathbb{N}$ deoarece fiecare număr par b este imaginea prin f a cel mult un element din domeniu, mai precis a lui $b/2$. Funcţia $f(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ nu este injectivă deoarece ia valoarea 1 pentru mai multe argumente: 2 şi 3. O injecţie se numeşte uneori funcţie ***unu-la-unu***.

O funcţie $f : A \to B$ este o ***bijecţie*** dacă este injectivă şi surjectivă. De exemplu, funcţia $f(n) = (-1)^n \lceil n/2 \rceil$ este o bijecţie de la $\mathbb{N}$ la $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rcl}
0 & \to & 0, \\
1 & \to & -1, \\
2 & \to & 1, \\
3 & \to & -2, \\
4 & \to & 2, \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Funcţia este injectivă, deoarece nici un element din $\mathbb{Z}$ nu este imagine a mai multor elemente din $\mathbb{N}$, şi surjectivă, deoarece fiecare element din $\mathbb{Z}$ este imagine a unui element din $\mathbb{N}$. În concluzie, funcţia este bijectivă. O bijecţie este uneori numită şi ***corespondenţă unu-la-unu*** deoarece "împerechează" elemente din domeniu şi codomeniu. O bijecţie de la o mulţime A la ea însăşi este uneori numită o ***permutare***.

Când o funcţie f este bijectivă ***inversa*** ei f^{-1} este definită prin:

$f^{-1}(b) = a$ dacă şi numai dacă $f(a) = b$.

De exemplu, inversa funcţiei $f(n) = (-1)^n \lceil n/2 \rceil$ este

$$f^{-1}(m) = \begin{cases} 2m & \text{dacă } m \geq 0, \\ -2m - 1 & \text{dacă } m < 0. \end{cases}$$

Exerciţii

5.3-1 Fie A şi B două mulţimi finite şi o funcţie $f : A \rightarrow B$. Arătaţi că:

a. dacă f este injectivă atunci $|A| \leq |B|$;

b. dacă f este surjectivă atunci $|A| \geq |B|$.

5.3-2 Verificaţi dacă funcţia $f(x) = x + 1$ este bijectivă în cazul în care domeniul şi codomeniul sunt $\mathbb{N}$. Dar dacă domeniul şi codomeniul sunt $\mathbb{Z}$?

5.3-3 Daţi o definiţie naturală pentru inversa unei relaţii binare, astfel încât dacă o relaţie binară este, de fapt, o funcţie bijectivă, atunci inversa relaţiei este inversa funcţiei.

5.3-4 $\star$ Daţi o bijecţie între $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

5.4. Grafuri

Această secţiune prezintă două tipuri de grafuri: orientate şi neorientate. Cititorul trebuie avizat că anumite definiţii din literatura de specialitate diferă de cele prezentate aici, dar în cele mai multe cazuri diferenţele sunt minore. Secţiunea 23.1 arată cum pot fi reprezentate grafurile în memoria calculatorului.

Un ***graf orientat*** (sau ***digraf***) G este o pereche (V, E), unde V este o mulţime finită, iar E este o relaţie binară pe V. Mulţimea V se numeşte ***mulţimea vârfurilor*** lui G, iar elementele ei se numesc ***vârfuri***. Mulţimea E se numeşte ***mulţimea arcelor*** lui G, şi elementele ei se numesc ***arce***. Figura 5.2(a) este o reprezentare grafică a unui graf orientat cu mulţimea de vârfuri $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. În figură, vârfurile sunt reprezentate prin cercuri, iar arcele prin săgeţi. Observaţi că sunt posibile ***autobuclele*** – arce de la un vârf la el însuşi.

Într-un ***graf neorientat*** $G = (V, E)$, ***mulţimea muchiilor*** E este constituită din perechi de vârfuri *neordonate*, şi nu din perechi ordonate. Cu alte cuvinte, o muchie este o mulţime $\{u, v\}$, unde $u, v \in V$ şi $u \neq v$. Prin convenţie, pentru o muchie vom folosi notaţia (u, v) în locul notaţiei pentru mulţimi $\{u, v\}$, iar (u, v) şi (v, u) sunt considerate a fi aceeaşi muchie. Într-un graf neorientat, autobuclele sunt interzise şi astfel fiecare muchie este formată din exact două

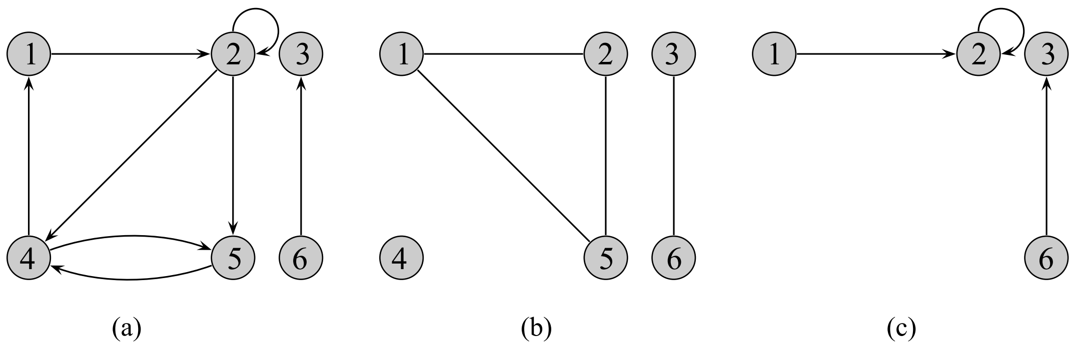

Figura 5.2 Grafuri orientate şi neorientate. **(a)** Un graf orientat $G = (V, E)$, unde $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ şi $E = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$. Arcul $(2, 2)$ este o autobuclă. **(b)** Un graf neorientat $G = (V, E)$, unde $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ şi $E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\}$. Vârful 4 este izolat. **(c)** Subgraful grafului de la (a) indus de mulţimea de vârfuri $\{1, 2, 3, 6\}$.

vârfuri distincte. Figura 5.2(b) este o reprezentare grafică a unui graf neorientat având mulţimea de vârfuri $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Multe definiţii pentru grafuri orientate şi neorientate sunt aceleaşi, deşi anumiţi termeni pot avea semnificaţii diferite în cele două contexte. Dacă (u, v) este un arc într-un graf orientat $G = (V, E)$, spunem că (u, v) este ***incident din*** sau ***pleacă din*** vârful u şi este ***incident în*** sau ***intră în*** vârful v. De exemplu, arcele care pleacă din vârful 2, în figura 5.2(a), sunt $(2, 2)$, $(2, 4)$ şi $(2, 5)$. Arcele care intră în vârful 2 sunt $(1, 2)$ şi $(2, 2)$. Dacă (u, v) este o muchie într-un graf neorientat $G = (V, E)$, spunem că (u, v) este ***incidentă*** vârfurilor u şi v. În figura 5.2(b), muchiile incidente vârfului 2 sunt $(1, 2)$ şi $(2, 5)$.

Dacă (u, v) este o muchie (arc) într-un graf $G = (V, E)$, spunem că vârful v este ***adiacent*** vârfului u. Atunci când graful este neorientat, relaţia de adiacenţă este simetrică. Când graful este orientat, relaţia de adiacenţă nu este neapărat simetrică. Dacă v este adiacent vârfului u într-un graf orientat, uneori scriem $u \to v$. În părţile (a) şi (b) ale figurii 5.2, vârful 2 este adiacent vârfului 1, deoarece muchia (arcul) $(1, 2)$ aparţine ambelor grafuri. Vârful 1 *nu* este adiacent vârfului 2 în figura 5.2(a), deoarece muchia $(2, 1)$ nu aparţine grafului.

Gradul unui vârf al unui graf neorientat este numărul muchiilor incidente acestuia. De exemplu, vârful 2, din figura 5.2(b), are gradul 2. Un vârf al cărui grad este 0, cum este, de exemplu, vârful 4, din figura 5.2(b), se numeşte ***vârf izolat***. Într-un graf orientat, ***gradul exterior*** al unui vârf este numărul arcelor ce pleacă din el, iar ***gradul interior*** al unui vârf este numărul arcelor ce intră în el. ***Gradul*** unui vârf al unui graf orientat este gradul său interior, plus gradul său exterior. Vârful 2 din figura 5.2(a) are gradul interior 2, gradul exterior 3 şi gradul 5.

Un ***drum*** de ***lungime*** k de la un vârf u la un vârf u' într-un graf $G = (V, E)$ este un şir de vârfuri $\langle v_0, v_1, v_2, ..., v_k\rangle$ astfel încât $u = v_0$, $u' = v_k$, şi $(v_{i-1}, v_i) \in E$ pentru $i = 1, 2, ..., k$. Lungimea unui drum este numărul de muchii (arce) din acel drum. Drumul ***conţine*** vârfurile $v_0, v_1, v_2, ..., v_k$ şi muchiile $(v_0, v_1), (v_1, v_2), ..., (v_{k-1}, v_k)$. Dacă există un drum p de la u la u', spunem că u' este ***accesibil*** din u prin p, relaţie reprezentată uneori prin $u \overset{p}{\leadsto} u'$ dacă G este orientat. Un drum este ***elementar*** dacă toate vârfurile din el sunt distincte. În figura 5.2(a), drumul $\langle 1, 2, 5, 4\rangle$ este un drum elementar de lungime 3. Drumul $\langle 2, 5, 4, 5\rangle$ nu este elementar.

Un ***subdrum*** al unui drum $p = \langle v_0, v_1, ..., v_k\rangle$ este un subşir continuu al vârfurilor sale. Cu alte cuvinte, pentru orice $0 \leq i \leq j \leq k$, subşirul de vârfuri $\langle v_i, v_{i+1}, ..., v_j \rangle$ este un subdrum al lui p.

Într-un graf orientat, un drum $\langle v_0, v_1, ..., v_k \rangle$ formează un ***ciclu*** dacă $v_0 = v_k$ şi drumul conţine cel puţin o muchie. Ciclul este ***elementar*** dacă, pe lângă cele de mai sus, $v_1, v_2, ..., v_k$ sunt distincte. O autobuclă este un ciclu de lungime 1. Două drumuri $\langle v_0, v_1, v_2, ..., v_{k-1}, v_0 \rangle$ şi $\langle v'_0, v'_1, v'_2, ..., v'_{k-1}, v'_0 \rangle$ formează acelaşi ciclu dacă există un număr întreg j astfel încât $v'_i = v_{(i+j) \bmod k}$ pentru $i = 0, 1, ..., k-1$. În figura 5.2(a), drumul $\langle 1, 2, 4, 1 \rangle$ formează acelaşi ciclu ca drumurile $\langle 2, 4, 1, 2 \rangle$ şi $\langle 4, 1, 2, 4 \rangle$. Acest ciclu este elementar, dar ciclul $\langle 1, 2, 4, 5, 4, 1 \rangle$ nu este elementar. Ciclul $\langle 2, 2 \rangle$ format de muchia $(2, 2)$ este o autobuclă. Un graf orientat fără autobucle este ***elementar***. Într-un graf neorientat, un drum $\langle v_0, v_1, ..., v_k \rangle$ formează un ***ciclu elementar*** dacă $k > 3, v_0 = v_k$ şi vârfurile $v_1, v_2, ..., v_k$ sunt distincte. De exemplu, în figura 5.2(b), drumul $\langle 1, 2, 5, 1 \rangle$ este un ciclu. Un graf fără cicluri este ***aciclic***.

Un graf neorientat este ***conex*** dacă fiecare pereche de vârfuri este conectată printr-un drum. ***Componentele conexe*** ale unui graf sunt clasele de echivalenţă ale vârfurilor sub relaţia "este accesibil din". Graful din figura 5.2(b) are trei componente conexe: $\{1, 2, 5\}$, $\{3, 6\}$, şi $\{4\}$. Fiecare vârf din $\{1, 2, 5\}$ este accesibil din fiecare vârf din $\{1, 2, 5\}$. Un graf neorientat este conex dacă are exact o componentă conexă, sau, altfel spus, dacă fiecare vârf este accesibil din fiecare vârf diferit de el.

Un graf orientat este ***tare conex*** dacă fiecare două vârfuri sunt accesibile din celălalt. ***Componentele tare conexe*** ale unui graf sunt clasele de echivalenţă ale vârfurilor sub relaţia "sunt reciproc accesibile". Un graf orientat este tare conex dacă are doar o singură componentă tare conexă. Graful din figura 5.2(a) are trei componente tare conexe: $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{3\}$, şi $\{6\}$. Toate perechile de vârfuri din $\{1, 2, 4, 5\}$ sunt reciproc accesibile. Vârfurile $\{3, 6\}$ nu formează o componentă tare conexă, deoarece vârful 6 nu este accesibil din vârful 3.

Două grafuri $G = (V, E)$ şi $G' = (V', E')$ sunt ***izomorfe*** dacă există o bijecţie $f : V \to V'$ astfel încât $(u, v) \in E$ dacă, şi numai dacă, $(f(u), f(v)) \in E'$. Cu alte cuvinte, putem reeticheta vârfurile lui G pentru ca acestea să fie vârfuri din G', păstrând muchiile corespunzătoare din G şi G'. Figura 5.3(a) prezintă o pereche de grafuri izomorfe G şi G' cu mulţimile de vârfuri $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ şi $V' = \{u, v, w, x, y, z\}$. Funcţia din V în V', dată de $f(1) = u$, $f(2) = v$, $f(3) = w$, $f(4) = x$, $f(5) = y$, $f(6) = z$, este funcţia bijectivă cerută. Grafurile din figura 5.3(b) nu sunt izomorfe. Deşi ambele grafuri au 5 vârfuri şi 7 muchii, graful din partea superioară are un vârf cu gradul egal 4, în timp ce graful din partea inferioară a figurii nu posedă un astfel de vârf.

Spunem că un graf $G' = (V', E')$ este un ***subgraf*** al grafului $G = (V, E)$ dacă $V' \subseteq V$ şi $E' \subseteq E$. Dată fiind o mulţime $V' \subseteq V$, subgraful lui G ***indus*** de V' este graful $G' = (V', E')$, unde

$$E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}.$$

Subgraful indus de mulţimea de vârfuri $\{1, 2, 3, 6\}$, din figura 5.2(a), apare în figura 5.2(c) şi are mulţimea de muchii $\{(1, 2), (2, 2), (6, 3)\}$.

Dat fiind un graf neorientat $G = (V, E)$, ***versiunea orientată*** a lui G este graful orientat $G' = (V, E')$, unde $(u, v) \in E'$ dacă, şi numai dacă, $(u, v) \in E$. Cu alte cuvinte, fiecare muchie neorientată (u, v) din G este înlocuită în versiunea orientată prin două arce orientate: (u, v) şi (v, u). Dat fiind un graf orientat $G = (V, E)$, ***versiunea neorientată*** a lui G este graful neorientat $G' = (V, E')$, unde $(u, v) \in E'$ dacă, şi numai dacă, $u \neq v$ şi $(u, v) \in E$. Deci versiunea neorientată conţine arcele lui G "cu direcţiile eliminate" şi cu autobuclele eliminate. (Deoarece

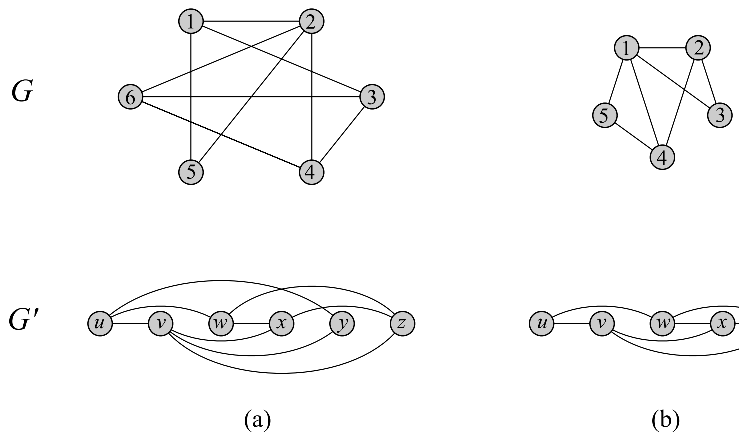

Figura 5.3 **(a)** O pereche de grafuri izomorfe. Corespondenţa dintre vârfurile grafului de sus şi cele ale grafului de jos este realizată prin funcţia dată de $f(1) = u$, $f(2) = v$, $f(3) = w$, $f(4) = x$, $f(5) = y$, $f(6) = z$. **(b)** Două grafuri care nu sunt izomorfe, deoarece graful de sus are un vârf de grad 4, iar graful de jos nu.

(u, v) şi (v, u) reprezintă aceeaşi muchie într-un graf neorientat, versiunea neorientată a unui graf orientat o conţine o singură dată, chiar dacă graful orientat conţine atât muchia (u, v) cât şi muchia (v, u).) Într-un graf orientat $G = (V, E)$, un ***vecin*** al unui vârf u este orice vârf care este adiacent lui u în versiunea neorientată a lui G. Deci v este un vecin al lui u dacă $(u, v) \in E$ sau $(v, u) \in E$. Într-un graf neorientat, u şi v sunt vecine dacă sunt adiacente.

Mai multe tipuri de grafuri poartă nume speciale. Un ***graf complet*** este un graf neorientat în care oricare două vârfuri sunt adiacente. Un ***graf bipartit*** este un graf neorientat $G = (V, E)$ în care mulţimea V poate fi partiţionată în două mulţimi V_1 şi V_2 astfel încât $(u, v) \in E$ implică fie că $u \in V_1$ şi $v \in V_2$, fie că $u \in V_2$ şi $v \in V_1$. Cu alte cuvinte, toate muchiile merg de la mulţimea V_1 la mulţimea V_2 sau invers. Un graf neorientat, aciclic este o ***pădure***, iar un graf neorientat, aciclic şi conex este un ***arbore (liber)*** (vezi secţiunea 5.5).

Există două variante de grafuri care pot fi întâlnite ocazional. Un ***multigraf*** seamănă cu un graf neorientat, însă poate avea atât muchii multiple între vârfuri cât şi autobucle. Un ***hipergraf*** seamănă, de asemenea, cu un graf neorientat, dar fiecare ***hipermuchie***, în loc de a conecta două vârfuri, conectează o submulţime arbitrară de vârfuri. Mulţi algoritmi scrişi pentru grafuri orientate şi neorientate obişnuite pot fi adaptaţi pentru a rula pe aceste structuri asemănătoare grafurilor.

Exerciţii

5.4-1 Invitaţii unei petreceri studenţeşti îşi strâng mâinile când se salută unul pe celălalt, şi fiecare profesor îşi aminteşte de câte ori a salutat pe cineva. La sfârşitul petrecerii, decanul facultăţii însumează numărul strângerilor de mână făcute de fiecare profesor. Arătaţi că rezultatul este par demonstrând ***lema strângerilor de mână***: dacă $G = (V, E)$ este un graf neorientat, atunci

$$\sum_{v \in V} \mathrm{grad}(v) = 2|E|.$$

5.4-2 Arătaţi că, dacă un graf orientat sau neorientat conţine un drum între două vârfuri u şi v, atunci conţine un drum elementar între u şi v. Arătaţi că dacă un graf orientat conţine un ciclu, atunci conţine şi un ciclu elementar.

5.4-3 Arătaţi că orice graf neorientat, conex $G = (V, E)$ satisface relaţia $|E| \geq |V| - 1$.

5.4-4 Verificaţi faptul că, într-un graf neorientat, relaţia "este accesibil din" este o relaţie de echivalenţă pe vârfurile grafului. Care din cele trei proprietăţi ale unei relaţii de echivalenţă sunt în general adevărate pentru relaţia "este accesibil din" pe vârfurile unui graf orientat?

5.4-5 Care este versiunea neorientată a grafului orientat din figura 5.2(a)? Care este versiunea orientată a grafului neorientat din figura 5.2(b)?

5.4-6 $\star$ Arătaţi că un hipergraf poate fi reprezentat printr-un graf bipartit dacă stabilim ca incidenţa în hipergraf să corespundă adiacenţei în graful bipartit. (*Indicaţie:* Presupuneţi că o mulţime de vârfuri din graful bipartit corespunde vârfurilor din hipergraf, iar cealaltă mulţime de vârfuri a grafului bipartit corespunde hipermuchiilor.)

5.5. Arbori

La fel ca în cazul grafurilor, există multe noţiuni de arbori înrudite, dar uşor diferite. Această secţiune prezintă definiţii şi proprietăţi matematice pentru mai multe tipuri de arbori. Secţiunile 11.4 şi 23.1 descriu modurile de reprezentare a arborilor în memoria calculatorului.

5.5.1. Arbori liberi

După cum a fost definit în secţiunea 5.4, un ***arbore liber*** este un graf neorientat, aciclic şi conex. Deseori omitem adjectivul "liber" atunci când spunem că un graf este un arbore. Dacă un graf neorientat este aciclic, dar s-ar putea să nu fie conex, el formează o ***pădure***. Mulţi algoritmi pentru arbori funcţionează, de asemenea, şi pe păduri. Figura 5.4(a) prezintă un arbore liber, iar figura 5.4(b) prezintă o pădure. Pădurea din figura 5.4(b) nu este un arbore pentru că nu este conexă. Graful din figura 5.4(c) nu este nici arbore şi nici pădure, deoarece conţine un ciclu.

Următoarea teoremă prezintă într-o formă concentrată multe proprietaţi importante ale arborilor liberi.

Teorema 5.2 (Proprietăţile arborilor liberi) Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:

1. G este un arbore liber.

2. Oricare două vârfuri din G sunt conectate printr-un drum elementar unic.

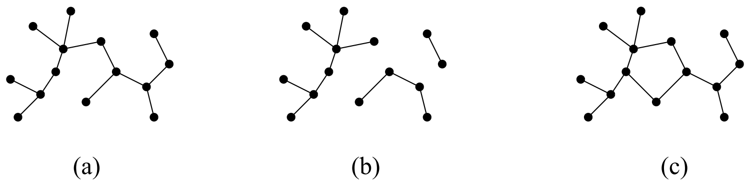

Figura 5.4 **(a)** Un arbore liber. **(b)** O pădure. **(c)** Un graf ce conţine un ciclu, motiv pentru care nu este nici arbore, nici pădure.

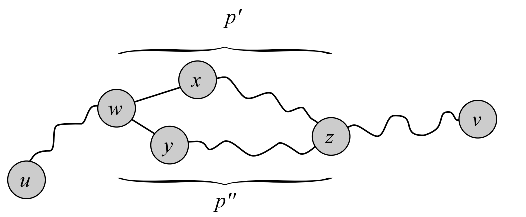

Figura 5.5 Un pas în demonstraţia teoremei 5.2. Dacă (1) G este un arbore liber, atunci (2) oricare două vârfuri din G sunt conectate printr-un unic drum elementar. Să presupunem, prin absurd, că vârfurile u şi v sunt conectate prin două drumuri simple distincte p_1 şi p_2. Aceste drumuri se despart pentru prima dată în vârful w, şi se reîntâlnesc pentru prima oară în vârful z. Drumul p' împreună cu inversul drumului p'' formează un ciclu, de unde rezultă o contradicţie.

3. G este conex, dar, dacă eliminăm o muchie oarecare din E, graful obţinut nu mai este conex.

4. G este conex, şi $|E| = |V| - 1$.

5. G este aciclic, şi $|E| = |V| - 1$.

6. G este aciclic, dar, dacă adăugăm o muchie oarecare în E, graful obţinut conţine un ciclu.

Demonstraţie. (1) $\Rightarrow$ (2): Deoarece un arbore este conex, oricare două vârfuri din G sunt conectate prin cel puţin un drum elementar. Fie u şi v două vârfuri care sunt conectate prin două drumuri distincte p_1 şi p_2, după cum este prezentat în figura 5.5. Fie w vârful unde drumurile se despart pentru prima dată. Cu alte cuvinte, w este primul vârf, atât din p_1 cât şi din p_2, al cărui succesor în p_1 este x şi al cărui succesor din p_2 este y, cu $x \neq y$. Fie z primul vârf unde drumurile se reîntâlnesc, adică z este primul vârf de după w din p_1 care se află de asemenea şi în p_2. Fie p' subdrumul din p_1 de la w la z şi care trece prin x, şi fie p'' drumul din p_2 de la w la z şi care trece prin y. Drumurile p' şi p'' nu au nici un vârf comun cu excepţia vârfurilor lor terminale. Astfel, drumul obţinut, alăturând lui p' inversul lui p'', este un ciclu. Aceasta este o contradicţie şi deci, dacă G este un arbore, nu poate exista decât cel mult un drum elementar între două vârfuri.

(2) $\Rightarrow$ (3): Dacă oricare două vârfuri din G sunt conectate printr-un drum elementar, atunci G este conex. Fie (u, v) o muchie oarecare din E. Această muchie este un drum de la u la v, şi, deci, trebuie să fie drumul unic dintre u şi v. Dacă eliminăm muchia (u, v) din G, nu mai există nici un drum între u şi v şi, astfel, eliminarea ei face ca G să nu mai fie conex.

(3) $\Rightarrow$ (4): Din ipoteză, graful G este conex, iar din exerciţiul 5.4-3 avem $|E| \geq |V| - 1$. Vom demonstra relaţia $|E| \leq |V| - 1$ prin inducţie. Un graf conex cu $n = 1$ sau $n = 2$ vârfuri are $n - 1$ muchii. Să presupunem că G are $n \geq 3$ vârfuri şi că toate grafurile ce satisfac relaţia (3) şi au mai puţin de n vârfuri, satisfac, de asemenea, şi relaţia $|E| \leq |V| - 1$. Eliminând o muchie arbitrară din G, separăm graful în $k \geq 2$ componente conexe. (De fapt k este exact 2). Fiecare componentă satisface (3), deoarece, altfel, G nu ar satisface relaţia (3). Astfel, prin inducţie, dacă adunăm numărul muchiilor din fiecare componentă, obţinem cel mult $|V| - k \leq |V| - 2$. Adunând muchia eliminată, obţinem $|E| \leq |V| - 1$.

(4) $\Rightarrow$ (5): Să presupunem că G este conex şi că $|E| = |V| - 1$. Trebuie să arătăm că G este aciclic. Să presupunem că G posedă un ciclu ce conţine k vârfuri $v_1, v_2, ..., v_k$. Fie $G_k = (V_k, E_k)$ subgraful lui G format din ciclul respectiv. Observaţi că $|V_k| = |E_k| = k$. Dacă $k < |V|$, atunci, trebuie să existe un vârf $v_{k+1} \in V - V_k$ care să fie adiacent unui vârf oarecare $v_i \in V_k$, din moment ce G este conex. Definim $G_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ ca fiind subgraful lui G având $V_{k+1} = V_k \cup \{v_{k+1}\}$ şi $E_{k+1} = E_k \cup \{(v_i, v_{k+1})\}$. Observaţi că $|V_{k+1}| = |E_{k+1}| = k+1$. Dacă $k+1 < n$ putem continua, definind G_{k+2} în aceeaşi manieră, şi aşa mai departe, până când obţinem $G_n = (V_n, E_n)$, unde $n = |V|$, $V_n = V$, şi $|E_n| = |V_n| = |V|$. Deoarece G_n este un subgraf al lui G, avem $E_n \subseteq E$ şi de aici $|E| \geq |V|$, ceea ce contrazice presupunerea că $|E| = |V| - 1$. Astfel, G este aciclic.

(5) $\Rightarrow$ (6): Să presupunem că G este aciclic şi că $|E| = |V| - 1$. Fie k numărul componentelor conexe ale lui G. Fiecare componentă conexă este, prin definiţie, un arbore liber şi, deoarece (1) implică (5), suma tuturor muchiilor din toate componentele conexe ale lui G este $|V| - k$. Prin urmare, trebuie să avem $k = 1$ şi G este de fapt un arbore. Deoarece (1) implică (2), oricare două vârfuri din G sunt conectate printr-un unic drum elementar. Astfel, adăugarea oricărei muchii la G formează un ciclu.

(6) $\Rightarrow$ (1): Să presupunem că G este aciclic, dar că, dacă adăugăm o muchie arbitrară la E, creăm un ciclu. Trebuie să arătăm că G este conex. Fie u şi v două vârfuri arbitrare din G. Dacă u şi v nu sunt deja adiacente, adăugând muchia (u, v), creăm un ciclu în care toate muchiile, cu excepţia muchiei (u, v), aparţin lui G. Astfel, există un drum de la u la v şi, deoarece u şi v au fost alese arbitrar, G este conex. ∎

5.5.2. Arbori cu rădăcină şi arbori ordonaţi

Un ***arbore cu rădăcină*** este un arbore liber în care unul dintre vârfuri se deosebeşte de celelalte. Vârful evidenţiat se numeşte ***rădăcina*** arborelui. De multe ori ne referim la un vârf al unui arbore cu rădăcină ca la un ***nod***[2] al arborelui. Figura 5.6(a) prezintă un arbore cu radăcină pe o mulţime de 12 noduri a cărui rădăcină este 7.

Să luăm un nod x într-un arbore T care are rădăcina r. Orice nod y pe drumul unic din r în x este numit un ***strămoş*** al lui x. Dacă y este un strămoş al lui x, atunci x este un ***descendent*** al lui y. (Fiecare nod este atât un strămoş cât şi un descendent al lui însuşi.) Dacă y este un strămoş al lui x şi $x \neq y$, atunci y este un ***strămoş propriu*** al lui x, iar x este un ***descendent propriu*** al lui y. ***Subarborele cu rădăcina*** x este arborele indus de către descendenţii lui x şi având rădăcina x. De exemplu, subarborele având ca rădăcină nodul 8, din figura 5.6, conţine nodurile 8, 6, 5, şi 9.

Dacă ultima muchie de pe drumul de la rădăcina r a unui arbore T până la un nod x este (y, x), atunci y este ***părintele*** lui x, iar x este un ***copil*** al lui y. Rădăcina este singurul nod din

[2]Termenul de "nod" este adesea folosit în literatura de teoria grafurilor ca un sinonim pentru "vârf". Vom rezerva folosirea termenului de "nod" pentru a desemna un vârf al unui arbore cu rădăcină.

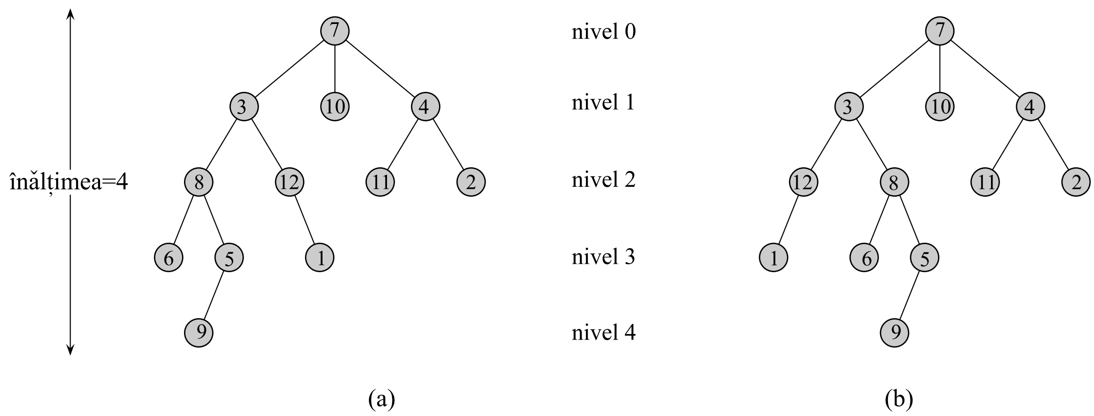

Figura 5.6 Arbori cu rădăcină şi arbori ordonaţi. **(a)** Un arbore cu rădăcină având înălţimea egală cu 4. Arborele este desenat într-un mod standard: rădăcina (nodul 7) se află în partea de sus, copiii ei (nodurile cu adâncimea 1) sub ea, copiii lor (nodurile cu adâncimea 2) sub aceştia şi aşa mai departe. Dacă arborele este ordonat, ordinea relativă de la stânga la dreapta a copiilor unui nod este importantă, altfel ea nu contează. **(b)** Un alt arbore cu rădăcină. Ca arbore cu rădăcină, este identic cu cel din (a), dar privit ca un arbore ordonat el este diferit, din moment ce copiii nodului 3 apar într-o ordine diferită.

T fără nici un părinte. Dacă două noduri au acelaşi părinte, atunci ele sunt ***fraţi***. Un nod fără nici un copil se numeşte ***nod extern*** sau ***frunză***. Un nod care nu este frunză se numeşte ***nod intern***.

Numărul copiilor unui nod x dintr-un arbore cu rădăcina T se numeşte ***gradul*** lui x.[3] Lungimea drumului de la rădăcina r la un nod x constituie ***adâncimea*** lui x în T. Cea mai mare adâncime a unui nod constituie ***înălţimea*** lui T.

Un ***arbore ordonat*** este un arbore cu rădăcină în care copiii fiecărui nod sunt ordonaţi. Cu alte cuvinte, dacă un nod are k copii, atunci există un prim copil, un al doilea copil,... şi un al k-lea copil. Cei doi arbori din figura 5.6 sunt diferiţi atunci când sunt priviţi ca fiind arbori ordonaţi, dar sunt identici atunci când sunt consideraţi a fi doar arbori cu rădăcină.

5.5.3. Arbori binari şi arbori poziţionali

Arborii binari pot fi descrişi cel mai bine într-o manieră recursivă. Un ***arbore binar*** T este o structură definită pe o mulţime finită de noduri care

- nu conţine nici un nod, sau
- este constituită din trei mulţimi de noduri disjuncte: un nod ***rădăcină***, un arbore binar numit ***subarborele stâng*** al său, şi un arbore binar numit ***subarborele drept*** al lui T.

Arborele binar care nu conţine nici un nod se numeşte ***arborele vid*** sau ***arborele nul***, notat uneori prin NIL. Dacă subarborele stâng nu este vid, atunci rădăcina acestuia se numeşte ***copilul***

[3] Observaţi că gradul unui nod depinde de modul în care este privit T: ca arbore cu rădăcină sau ca arbore liber. Gradul unui vârf dintr-un arbore liber este, ca în orice graf orientat, numărul vârfurilor adiacente lui. Cu toate acestea, într-un arbore cu rădăcină, gradul este dat de numărul de copii – părintele unui nod nu contează din perspectiva gradului.

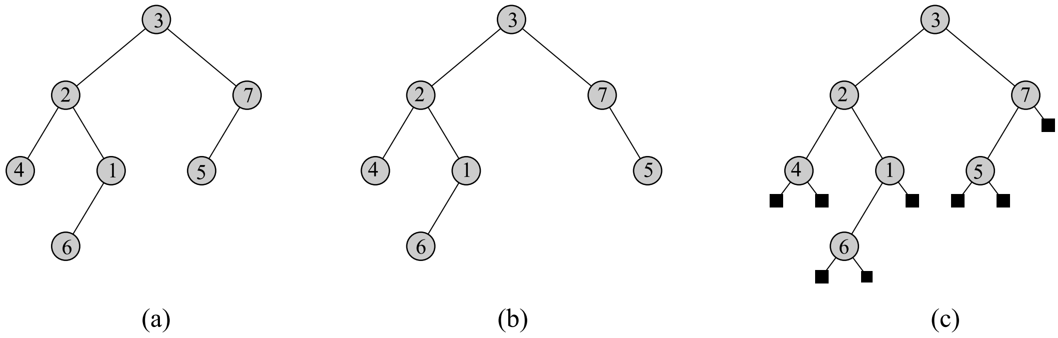

Figura 5.7 Arbori binari. **(a)** Un arbore binar desenat într-un mod standard. Copilul stâng al unui nod este desenat dedesubtul nodului şi la stânga. Copilul drept este desenat dedesubt şi la dreapta. **(b)** Un arbore binar diferit de cel din (a). În (a), copilul stâng al nodului 7 este 5, iar copilul drept este absent. În (b), copilul stâng al nodului 7 este absent, iar copilul drept este 5. Ca arbori ordonaţi, aceşti doi arbori sunt identici, dar, priviţi ca arbori binari, ei sunt diferiţi. **(c)** Arborele binar din (a) reprezentat prin nodurile interne ale unui arbore binar complet: un arbore ordonat în care fiecare nod intern are gradul 2. Frunzele din arbore sunt reprezentate prin pătrate.

stâng al rădăcinii întregului arbore. În mod asemănător, rădăcina unui subarbore drept nevid este ***copilul drept*** al rădăcinii întregului arbore. Dacă un subarbore este arborele vid NIL, copilul este ***absent*** sau ***lipseşte***. Figura 5.7(a) prezintă un arbore binar.

Un arbore binar nu este un simplu arbore ordonat în care fiecare nod are un grad mai mic sau egal cu 2. De exemplu, într-un arbore binar, dacă un nod are doar un copil, poziţia copilului – dacă este ***copilul stâng*** sau ***copilul drept*** – contează. Într-un arbore ordonat, un unic copil nu poate fi clasificat ca fiind un copil drept sau un copil stâng. Figura 5.7(b) prezintă un arbore binar care diferă de arborele din figura 5.7(a) din cauza poziţiei unui singur nod. Cu toate acestea, dacă sunt priviţi ca arbori ordonaţi, cei doi arbori sunt identici.

Informaţia poziţională dintr-un arbore binar poate fi reprezentată prin nodurile interne ale unui arbore ordonat, după cum se arată în figura 5.7(c). Ideea este să înlocuim fiecare copil absent din arborele binar cu un nod ce nu are nici un copil. Aceste noduri de tip frunză sunt reprezentate, în figură, prin pătrate. Arborele rezultat este un ***arbore binar complet***: fiecare nod este fie o frunză, fie are gradul exact 2. Nu există noduri cu gradul egal cu 1. Prin urmare, ordinea copiilor unui nod păstrează informaţia poziţională.

Informaţia poziţională care deosebeşte arborii binari de arborii ordonaţi poate fi extinsă şi la arbori cu mai mult de doi copii corespunzători unui nod. Într-un ***arbore poziţional***, copiii unui nod sunt etichetaţi cu numere întregi pozitive distincte. Al i-lea copil al unui nod este ***absent*** dacă nici un copil nu este etichetat cu numărul i. Un ***arbore k-ar*** este un arbore poziţional în care, pentru fiecare nod, toţi copiii cu etichete mai mari decât k lipsesc. Astfel, un arbore binar este un arbore k-ar cu $k = 2$.

Un ***arbore k-ar complet*** este un arbore k-ar în care toate frunzele au aceeaşi adâncime şi toate nodurile interne au gradul k. Figura 5.8 prezintă un arbore binar complet având înălţimea egală cu 3. Câte frunze are un arbore k-ar complet de înălţime h? Rădăcina are k copii de adâncime 1, fiecare dintre aceştia având k copii de adâncime 2 etc. Astfel, numărul frunzelor la adâncimea h este k^h. Prin urmare, înălţimea unui arbore k-ar complet care are n frunze este

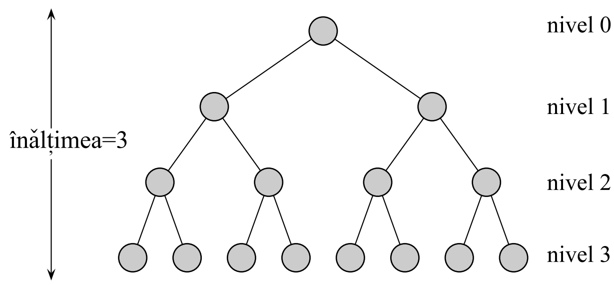

Figura 5.8 Un arbore binar complet de înălţime 3, cu 8 frunze şi 7 noduri interne.

$\log_k n$. Numărul nodurilor interne ale unui arbore k-ar complet de înălţime h este

$$1 + k + k^2 + ... + k^{h-1} = \sum_{i=0}^{h-1} k^i = \frac{k^h - 1}{k - 1}$$

din ecuaţia (3.3). Astfel, un arbore binar complet are $2^h - 1$ noduri interne.

Exerciţii

5.5-1 Desenaţi toţi arborii liberi formaţi din 3 vârfuri A, B, C. Desenaţi toţi arborii cu rădăcină având nodurile A, B, C, cu A drept rădăcină. Desenaţi toţi arborii ordonaţi având nodurile A, B, C, cu A drept rădăcină. Desenaţi toţi arborii binari având nodurile A, B, C, cu A drept rădăcină.

5.5-2 Arătaţi că, pentru $n \geq 7$, există un arbore liber cu n noduri astfel încât alegerea fiecăruia din cele n noduri drept rădăcină produce un arbore cu rădăcină diferit.

5.5-3 Fie $G = (V, E)$ un graf aciclic orientat în care există un vârf $v_0 \in V$ astfel încât există un unic drum de la v_0 la fiecare vârf $v \in V$. Demonstraţi că versiunea neorientată a lui G formează un arbore.

5.5-4 Arătaţi prin inducţie că numărul nodurilor cu gradul 2 din orice arbore binar este cu 1 mai mic decât numărul frunzelor.

5.5-5 Arătaţi, prin inducţie, că un arbore binar cu n noduri are înălţimea cel puţin egală cu $\lfloor \lg n \rfloor$.

5.5-6 $\star$ ***Lungimea drumului intern*** al unui arbore binar complet este suma adâncimilor tuturor nodurilor interne. În mod asemănător, ***lungimea drumului exterior*** este suma adâncimilor tuturor frunzelor. Se dă un arbore binar complet cu n noduri interne, având lungimea drumului interior i şi lungimea drumului exterior e. Demonstraţi că $e = i + 2n$.

5.5-7 $\star$ Asociem un cost $w(x) = 2^{-d}$ fiecărei frunze x de adâncime d dintr-un arbore binar T. Demonstraţi că $\sum_x w(x) \leq 1$, unde x este orice frunză din T. (Această relaţie este cunoscută sub numele de ***inegalitatea Kraft***.)

5.5-8 $\star$ Arătaţi că orice arbore binar cu L frunze conţine un subarbore având între $L/3$ şi $2L/3$ frunze (inclusiv).

Probleme

5-1 Colorarea grafurilor
O ***k-colorare*** a unui graf neorientat $G = (V, E)$ este o funcţie $c : V \rightarrow \{0, 1, ..., k-1\}$ astfel încât $c(u) \neq c(v)$ pentru orice muchie $(u, v) \in E$. Cu alte cuvinte, numerele $0, 1, ..., k-1$ reprezintă k culori, iar nodurile adiacente trebuie să aibă culori diferite.

a. Demonstraţi că orice arbore este 2-colorabil.

b. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) G este bipartit.

(b) G este 2-colorabil.

(c) G nu are cicluri de lungime impară.

c. Fie d gradul maxim al oricărui vârf dintr-un graf G. Arătaţi că G poate fi colorat cu $d+1$ culori.

d. Arătaţi că dacă G are $O(|V|)$ muchii, atunci G poate fi colorat cu $O(\sqrt{|V|})$ culori.

5-2 Grafuri de prieteni
Reformulaţi fiecare dintre următoarele afirmaţii sub forma unei teoreme despre grafuri neorientate, iar apoi demonstraţi teorema. Puteţi presupune că prietenia este simetrică dar nu şi reflexivă.

a. În orice grup de $n \geq 2$ persoane, există două persoane cu acelaşi număr de prieteni în grup.

b. Orice grup de şase persoane conţine fie trei persoane între care există o relaţie de prietenie reciprocă, fie trei persoane care nu se cunosc nici una pe cealaltă.

c. Orice grup de persoane poate fi împărţit în două subgrupuri astfel încât cel puţin jumătate din prietenii fiecărei persoane să se afle în grupul din care persoana respectivă *nu* face parte.

d. Dacă toate persoanele dintr-un grup sunt prietene cu cel puţin jumătate din persoanele din grup, atunci grupul poate fi aşezat la o masă astfel încât fiecare persoană este aşezată între doi prieteni.

5-3 Împărţirea arborilor în două
Mulţi algoritmi divide şi stăpâneşte care lucrează pe grafuri cer ca graful să fie împarţit în două subgrafuri de dimensiuni aproximativ egale, prin eliminarea unui mic număr de muchii. Această problemă cercetează împărţirea în două a arborilor.

a. Demonstraţi că, prin eliminarea unei singure muchii, putem partiţiona vârfurile oricărui arbore binar având n vârfuri în două mulţimi A şi B astfel încât $|A| \leq 3n/4$ şi $|B| \leq 3n/4$.

b. Demonstraţi că această constantă de $3/4$ de la punctul (a) este optimală în cel mai defavorabil caz, dând un exemplu de arbore simplu a cărui cea mai echilibrată partiţie, după eliminarea unei singure muchii, are proprietatea $|A| = 3n/4$.

c. Demonstraţi că, prin eliminarea a cel mult $O(\lg n)$ muchii, putem partiţiona vârfurile oricărui arbore având n vârfuri în două mulţimi A şi B astfel încât $|A| = \lfloor n/2 \rfloor$ şi $|B| = \lceil n/2 \rceil$.

Note bibliografice

G. Boole a dus o muncă de pionierat în dezvoltarea logicii simbolice şi a introdus multe dintre notaţiile de bază pentru mulţimi într-o carte publicată în 1854. Teoria modernă a mulţimilor a fost elaborată de către G. Cantor în timpul perioadei 1874–1895. Cantor s-a concentrat, în special, asupra mulţimilor cu cardinalitate infinită. Termenul de "funcţie" este atribuit lui G. W. Leibnitz, care l-a folosit pentru a se referi la mai multe feluri de formule matematice. Definiţia sa limitată a fost generalizată de multe ori. Teoria grafurilor datează din anul 1736, când L. Euler a demonstrat că este imposibil ca o persoană să traverseze fiecare din cele 7 poduri din oraşul Königsberg exact o singură dată şi să se întoarcă în locul de unde a plecat.

Un compendiu folositor, conţinând mai multe definiţii şi rezultate din teoria grafurilor, se află în cartea scrisă de Harary [94].