

1. Fie $A = (1, 1)$, $B = (4, 7)$, $M_\alpha = (-1 + \alpha, -3 + 2\alpha)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). Arătați că punctele A, B și M_α sunt coliniare pentru orice α și determinați valorile lui α pentru care $r(A, M_\alpha, B) > 0$. (10p)

Am acordat 5p dacă a fost verificată doar coliniaritatea. Pentru condiția ca raportul să fie pozitiv (rezultatul corect era $\alpha \in (2, 5)$), am acordat punctaje parțiale pentru soluții incomplete, iar, pentru finalizare, am scăzut 1p în cazul erorilor de calcul.

2. Fie punctele $P_1 = (-5, 3)$, $P_2 = (-4, 3)$, $P_3 = (-3, 3)$, $P_4 = (-2, 4)$, $P_5 = (-1, 6)$, $P_6 = (1, 2)$, $P_7 = (2, 1)$, $P_8 = (3, 2)$. (i) Alegeți un punct P_9 pe dreapta $x = 5$, astfel ca P_8 să nu aparțină frontierei acoperirii convexe a lui \mathcal{M} , unde $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \dots, P_8, P_9\}$. Justificați alegerea făcută! (4p) (ii) Detaliați cum evoluează lista \mathcal{L}_i a vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui \mathcal{M} , obținută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew (punctul P_9 este cel ales la (i)). Justificați! (6p)

(i) Orice alegere de forma $(5, \alpha)$, cu $\alpha \in (0, 4)$ era corectă, altminteri punctul P_8 era pe frontieră (fie inferioară, fie superioară). Pentru valorile 0 și 4 punctul P_8 este pe frontieră, chiar dacă nu participă la determinarea acesteia. Am scăzut 1p pentru astfel de alegeri eronate.

(ii) Am scăzut 1p sau 2p pentru mici erori în aplicarea Graham's scan (unul sau mai multe puncte incluse în listă, deși trebuiau eliminate, faptul că P_9 nu a fost inclus, deși apărea explicit, etc.).

3. Dați exemplu de mulțimi $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathbb{R}^2$, fiecare cu 5 puncte, astfel ca, pentru fiecare dintre ele, diagrama Voronoi asociată să conțină exact 5 semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ să conțină exact 3 semidrepte. Justificați! (5p) Justificați câte muchii și câte triunghiuri are o triangulare a mulțimii $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$. (5p)

(i) Sunt diverse variante de răspunsuri corecte. Am scăzut 1p dacă nu era verificată condiția să fie 3 puncte pe frontiera reuniunii (chiar dacă aceasta era determinată de 3 puncte).

(ii) Era un calcul bazat pe formula din curs.

4. Fie semiplanele $H_1 : -y - 1 \leq 0$, $H_2 : -x - 2 \leq 0$, $H_3 : -x + y - 3 \leq 0$. (i) Alegeți două semiplane H_4 și H_5 astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile: (i) intersecția $D = H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 \cap H_5$ este un trapez dreptunghic și punctul $(-2, 1)$ este vârf al acestuia (5p); (ii) considerând problema de programare liniară dată de semiplanele H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 și de funcția obiectiv $f(x, y) = -y$, această problemă admite un unic punct optim (punct de maxim) (5p). Justificați și desenați!

Pentru a verifica și (i) și (ii) cel mai simplu era să alegeți un semiplan paralel cu H_3 (de exemplu $x - y + 1 \leq 0$) și un semiplan perpendicular pe H_3 (de exemplu $x + y - 4 \leq 0$). Astfel se obține un trapez dreptunghic, cu un unic "cel mai de jos punct", deci maxim pentru $f(x, y) = -y$.

(i) Am scăzut 2p dacă nu era scrisă nicio justificare, fie ea minimală (o figură, indicarea vârfurilor care determină trapezul, figura nu era un trapez dreptunghic, etc.).

(ii) Am acordat 1p dacă era considerat un trapez dreptunghic pentru care erau o infinitate de puncte de maxim pentru funcția dată, 2p dacă era un unic punct de maxim, dar pentru $f(x, y) = y$.

5. Fie punctele $A = (2, 3)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 0)$, $D = (-1, -1)$, $E = (2, -4)$, $F = (5, \alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 6\}$. Fie $\mathcal{P} = ABCDEF$. Discutați, în funcție de α : (i) numărul de vârfuri convexe/concave ale poligonului \mathcal{P} (3p); (ii) numărul de vârfuri principale ale lui \mathcal{P} (5p). Explicați de ce au fost excluse valorile -7 și 6 (2p).

(i) Pentru $\alpha \in (-\infty, -7) \cup (6, \infty)$ sunt 4 vârfuri convexe și 2 concave, $\alpha \in (-7, 6)$ sunt 5 convexe și 1 concav.

(ii) $\alpha \in (-\infty, -7) \cup (-7, -4) \cup (2, 6) \cup (6, \infty)$ sunt 5 vârfuri principale și 1 neprincipal, $\alpha \in (-4, 2)$ sunt 6 vârfuri principale.

(iii) Valorile au fost excluse datorită coliniarității unor puncte (nu se mai obținea un poligon).

Am scăzut puncte pentru confuziile dintre rezultatul de la (i) și cel de la (ii), pentru determinarea incorectă a intervalelor, pentru confuziile legate de concepte (în special cel de vârf principal).

6. În planul cartezian Oxy se consideră n triunghiuri $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_n$. Fiecare triunghi este isoscel și are o latură orizontală de lungime 8. Pentru fiecare triunghi sunt indicate coordonatele vârfurilor. Se presupune că, pentru toate triunghiurile, acestea sunt întregi și nu există două vârfuri cu aceeași abscisă. Notăm cu σ_{ij} aria intersecției triunghiurilor \mathcal{T}_i și \mathcal{T}_j . Descrieți succint (nu este necesar să detaliați calculele matematice, este suficient să le explicați pe scurt) un algoritm cât mai eficient care să determine $\max_{i,j=1,\dots,n} (\sigma_{ij})$. Justificați și exemplificați! (10p)

O variantă era de a sorta vârfurile după abscisă. Apoi, ținând cont de dimensiunea unei laturi și de faptul că vârfurile au coordonate întregi, se deducea că fiecare triunghi poate avea intersecții nevide cu $O(1)$ triunghiuri. Apoi se aplica paradigma dreptei de baleiere. Complexitatea finală era $O(n \log n)$. Am punctat și parțial, în funcție de ideile soluțiilor. Am acordat punctaj parțial și pentru soluția de complexitate $O(n^2)$, în care sunt considerate toate perechile de triunghiuri.