

Nume și prenume: LAZAROIU M. TEODORA-BIANCA
Grupa: 241

Nota: _____

Examen Restanță - Sesiunea iunie 2022

2 Iunie 2022

Timpul de rezolvare al problemelor este de 3h. Pentru transmiterea soluțiilor în format PDF¹ în folderul vostru de pe Drive aveți 15 minute timp suplimentar. Astfel, pentru dumneavoastră examenul începe la **ora 9 și 2 minute** și se termină la **ora 12 și 17 minute**.



Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Fiecare subiect valorează 10 puncte. Mult succes ! Dacă sunt întrebări puteți să îmi scrieți pe canalul de Teams dedicat cursului.

Exercițiul 1

10p

Se consideră variabilele aleatoare independente X și Y având repartițiile:

$$X \sim \begin{pmatrix} -5 & 3 & 5 \\ 0.44 & 0.52 & 0.04 \end{pmatrix}; Y \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0.78 & 0.15 & 0.07 \end{pmatrix}$$

Să se determine repartițiile variabilelor aleatoare $X + Y$, $X - Y$, $4X^2 + 2Y^2$ și să se afle $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $Var(X)$, $Var(Y)$, $Var(6X - 3Y + 4)$, $Var(5XY + 5)$, $Cov(X, Y)$ și $\rho(X, Y)$ (coeficientul de corelație).

Exercițiul 2

10p

Aruncăm în mod repetat cu o monedă pentru care probabilitatea de succes este $p = 0.91$. Fie X variabila aleatoare care descrie numărul de succese înainte de al 5-lea eșec într-o secvență de aruncări repetate. Determinați repartiția lui X , $\mathbb{E}[8X - 9]$ și $Var(9X + 3)$.

Exercițiul 3

10p

Un jucător dispune de un zar echilibrat și de o monedă care are probabilitatea $p = 0.75$ să cadă cap (H). Jucătorul lansează la început zarul iar apoi lansează moneda de un număr de ori egal cu rezultatul obținut pe fața superioară a zarului. Presupunând că moneda se lansează de manieră independentă, se cere să se determine:

1. Probabilitatea ca numărul de capete să fie 4 știind că numărul de puncte de pe fața superioară a zarului a fost 5. 2p
2. Probabilitatea ca numărul de capete obținute să fie 1 sau 5. 2p

3. Știind că nu am obținut niciun cap în cursul jocului care este probabilitatea ca rezultatul zarului să fi fost 2? 3p
4. Scrieți câte o funcție în R care să permită calculul empiric al probabilităților de la punctele anterioare. Comentați și explicați codul. 3p

Exercițiul 4

10p

Lansăm două zaruri echilibrate, unul alb și celălalt negru, fiecare având șase fețe dintre care două marcate cu un singur punct, două marcate cu două puncte și alte două marcate cu trei puncte. Considerăm următoarele variabile aleatoare:

$$\begin{array}{ll} X_n = \text{numarul de puncte de pe zarul negru} & X_a = \text{numarul de puncte de pe zarul alb} \\ R = |X_n - X_a| & S = X_n + X_a \\ V = \min(X_n, X_a) & W = \max(X_n, X_a) \end{array}$$

1. Determinați repartiția comună a cuplului (X_n, X_a) . 1p
2. Determinați repartiția lui V și W . 2p
3. Determinați repartiția comună a cuplului (V, W) și regăsiți repartițiile lui V și W drept repartiții marginale. 2p
4. Calculați $\mathbb{E}[9V]$ și $\mathbb{E}[6W]$ fără să utilizați rezultatele de la întrebările 2 și 3. 2p
5. Calculați $\mathbb{E}[10R]$, $\mathbb{E}[8S]$ și $\text{Var}(3R - 11S + 2)$. 3p

Exercițiul 5

10p

Fie X și Y două variabile aleatoare cu densitatea comună

$$f(x, y) = \begin{cases} 6ae^{-y} & \text{daca } 0 < x < y \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

1. Determinați $a \in \mathbb{R}$. 1p
2. Determinați densitățile marginale ale lui X și Y și calculați mediile, respectiv varianțele celor două variabile aleatoare. 2p
3. Sunt variabilele aleatoare X și Y independente? 1p
4. Determinați densitățile condiționate $f_{X|Y}(x|y)$ și respectiv $f_{Y|X}(y|x)$ și calculați $\mathbb{E}[X|Y = y]$ și $\mathbb{E}[Y|X = x]$. 2p
5. Scrieți o funcție în R care să permită trasarea grafică a densităților marginale, a funcțiilor de repartiție corespunzătoare și respectiv a densităților condiționate. 2p
6. Calculați pentru $z \in [0, 1]$

$$\mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} \leq z \text{ si } Y \leq y\right)$$

și deduceți repartiția variabilei $\frac{X}{Y}$. Sunt variabilele aleatoare $\frac{X}{Y}$ și Y independente?

2p

¹Pentru a transforma pozele în format PDF puteți folosi, de exemplu, programul CamScanner