Spații topologice

1. Să se arate că $(X, \tau = \mathcal{P}(X))$ formează un spațiu topologic. Să se determine mulțimile închise, vecinătățile și șirurile convergente.

2. $(X, \tau = \{\emptyset, X\})$

3. $(X, \tau = \{\emptyset, A, X\})$ $\quad A \subset X \quad A \neq \emptyset$ și $A \neq X$

4. X infinită

   $\tau_c = \{\emptyset\} \cup \{D \subset X \mid X \setminus D$ este finită$\}$

   topologia cofinită

5. $(\mathbb{R}, \tau)$, $\tau = \{ (a, \infty) \mid a \in \overline{\mathbb{R}} \}$

6. τ_1 și τ_2 sunt topologii pe $X \Rightarrow$

   $\tau_1 \cap \tau_2$ este o topologie pe X.

Elemente de topologie în $\mathbb{R}$

Def ① $D \subset \mathbb{R}^n$ este deschisă $\Leftrightarrow$ $D = \bigcup_{n \geq 1} I_n$ unde

$I_n = (a_n, b_n)$ și $I_n \cap I_m = \emptyset$ $\forall n \neq m$

② $F \subset \mathbb{R}$ este închisă $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R} \setminus F$ este deschisă

③ $A' = \{ x \mid \exists (x_n)_n \subset A \;\; x_n \to x \;\; x_n \neq x \} =$

$= \{ x \mid \forall V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow V \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset \}$

④ $\bar{A} = A \cup A' = \{ x \mid \exists (x_n) \subset A \;\; x_n \to x \}$

$= \{ x \mid \forall V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset \}$

⑤ $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{D \subset A \\ D \text{ deschisă}}} D = \{ x \mid A \in \mathcal{V}_x \} = \{ x \mid \forall x_n \to x \Rightarrow \exists n_A \text{ a.î. } x_n \in A \;\; \forall n \geq n_A \}$

⑥ $Fr(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \{ x \mid \exists (x_n)_n \subset A, \exists (y_n) \subset \mathbb{R} \setminus A \text{ a.î. } x_n \to x \text{ și } y_n \to x \}$

⑦ $iz(A) = A \setminus A'$

Stabiliți dacă următoarele mulțimi sunt închise sau deschise (3)

1) $A = (0,2) \cup (3,7)$

2) $A = (0,3] \cup (9,10)$

3) $A = [2,4]$

4) $A = \{ \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \} \cup \{0\}$

5) $A = \{ \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \}$

6) $A = [-3,-1] \cup [2,7]$

7) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

8) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

9) $A = \{ (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \} \cup (3,5]$

10) $A = \bigcup_{n \geq 1} (2n, 2n+1]$

11) $A = \bigcup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right]$

Pentru mulțimile de mai sus găsiți $\inf A$, $\sup A$, $\mathring{A}$, A', $Fr(A) = \partial A$, $\bar{A}$, $iz(A)$

TOPOLOGIE ÎN $\mathbb{R}$

1.) $A = (a, b)$ cu $a < b$. este deschisă

2.) $B = [a b] = \mathbb{R} \setminus ((-\infty, a) \cup (b, \infty))$ închisă

deschisă

3) $C = (a, b]$ nu este nici deschisă nici închisă

$C \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = (b-\varepsilon, b]$ $0 < \varepsilon < b-a$

deci $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \not\subset C \Rightarrow$

C nu este deschisă

altfel şirul $x_n = b + \frac{1}{n} \to b$

$\notin C$

$y_n = a + \frac{1}{n+1}(b-a) \in (a, b]$

$\downarrow$

$a \notin (a, b]$

$\Rightarrow$ C nu este închisă.

Exemple

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \right\} \cup (3, 6]$$

$A' = \{0\} \cup [3, 6]$

$\mathring{A} = (3, 6)$

$\Rightarrow \bar{A} = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \right\} \cup [3, 6] \cup \{0\}$

$Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} =$

$= \{0, 3, 6\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \right\}$

$iz(A) = A \setminus A' = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \right\}$.

$\{0\} \cup [3, 6] \subset A'$

$x_n = \frac{1}{n} \in A \qquad x_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \in A'$

$x_n \neq 0$

$3 + \frac{1}{n} \in A \qquad 3 + \frac{1}{n} \to 3 \quad \Rightarrow \quad 3 \in A'$

$3 + \frac{1}{n} \neq 3$

$x \in (3, 6]$

$x_n = x - \frac{1}{n+1}(x - 3) \to x$

$6 \geq x > x_n > x - x + 3 = 3 \Rightarrow x_n \in A$

$\Rightarrow x \in A'$

$A' \subset \{0\} \cup [3, 6]$

Fie $a \in A' \Rightarrow \exists (x_n)_n \subset A$ a.î. $x_n \to a$

$x_n \neq a$

$A = (3, 6] \cup \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}.$

Trecând la un subșir putem presupune că

CAZ 1 $\quad x_n \in (3, 6] \Rightarrow a \in [3, 6]$

CAZ 2 $\quad x_n = \frac{1}{m(n)} \quad m_n \geq 1 \quad m_n \in \mathbb{N}$

Avem 2 subcazuri

CAZ 2.1 $\quad m(n) \to \infty \Rightarrow x_n \to 0$

CAZ 2.1. $\exists$ un subșir mărginit pentru $m(n)$

Trecând la un subșir putem presupune că

m_n este constant $\quad x_n = \frac{1}{m_n} \to \frac{1}{K} = x_n = a$

$(m_n = K)$

care nu verifică cand $x_n \neq a$.

$(3,6) \subset A$

$(3,6)$ - mulțime deschisă $\Rightarrow (3,6) \subset \mathring{A}$.

$\mathring{A} \subset A$

$A \setminus (3,6) = \{6\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$

este suficient să arătăm că $6 \notin \mathring{A}$ și

$\frac{1}{n} \in \mathring{A} \quad \forall \quad n \geq 1$

$$x_k = \underset{\notin A}{6 + \frac{1}{k}} \to 6 \Rightarrow 6 \notin \mathring{A}$$

$$x_k = \underset{\notin A}{\frac{1}{n} + \frac{\sqrt{2}}{2k+1}} \to \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} \in \mathring{A}.$$

Spații topologice

(1) $\mathcal{T} = P(X)$ - mulțimile închise

$V \in \mathcal{V}_a \iff \exists D \in \mathcal{T}$ a.î. $a \in D \subset V \Rightarrow a \in V$

Alegem $D = \{a\} \Rightarrow a \in \{a\} \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}_a$

$\mathcal{V}_a = \{V \mid a \in V\}$

$x_n \to a \quad \forall V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow \exists n_V$ a.î. $\forall n \geq n_V \Rightarrow x_n \in V$

$V = \{a\} \Rightarrow \exists n_0$ a.î. $\forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in \{a\} \iff x_n = a$

Este evident că i) $\emptyset$ X $\in P(X)$

ii) $D_1, D_2 \in P(X) \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in P(X)$

iii) $(D_i)_{i \in I} \subset P(X) = \bigcup_{i \in I} D_i \in P(X)$

② 1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

2)

$\cap$	$\emptyset$	X
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
X	$\emptyset$	X.

3) $(D_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$

CAS 1 $\exists i$ tq $D_i = X \Rightarrow \bigcup D_i = X$

CAS 2 $\forall i$ $D_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup D_i = \emptyset$.

$V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow \exists D \in \mathcal{T}$ tq $a \in D \subset V \Rightarrow D = X \Rightarrow V = X$.

$\mathcal{V}_a = \{X\}$

$\Rightarrow \forall (x_n)_n \subset X$ $x_n \to a$

$\forall V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow x_n \in V$ $(V = X)$.

$\mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$.

③ 1) ϕ, $X \in \mathcal{T}$

M închise

$\mathcal{F} = \{ X = X \setminus \phi,\ X \setminus A,\ \phi = X \setminus X \}$

2)

$\cap$	ϕ	A	X
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
A	ϕ	A	A
X	ϕ	A	X

3) $(D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$

CAZ 1 $\exists\ j \in I$ a.î. $D_j = X \Rightarrow \bigcup_{i \in I} D_i = X$

CAZ 2 $\exists\ j \in I$ a.î. $D_j = A$

$\forall\ i \in I \quad D_i \neq X \Rightarrow \bigcup_{i \in I} D_i = A$

CAZ 3 $D_i = \phi \quad \forall\ i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} D_i = \phi$.

$a \in X$

CAZ 1 $a \in A \quad V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow \exists\ D \in \mathcal{T}$ a.î. $a \in D \subset V$

$\Rightarrow D \in \{A, X\} \Rightarrow \mathcal{V}_a = \{ V \mid A \subset V \}$

CAZ 2 $a \notin A \quad V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow \exists\ D \in \mathcal{T}$ a.î. $a \in D \subset V$

$\Rightarrow D = X \Rightarrow V = X \Rightarrow \mathcal{V}_a = \{X\}$

$x_n \to a$ CAZ 1 ($a \in A$) $\exists\ n_0$ a.î. $\forall n \geq n_0 \quad x_n \in A$

CAZ 2 ($a \notin A$) $\Rightarrow x_n \to a$.

(4) 1) $X \setminus X = \phi$ este finită $\Rightarrow X \in \mathcal{T}_c$

2) $D_1, D_2 \in \mathcal{T}_c$

CAZ 1 $D_1 = \phi$ sau $D_2 = \phi \Rightarrow D_1 \cap D_2 = \phi$

CAZ 2 $X \setminus (D_1 \cap D_2) = (X \setminus D_1) \cup (X \setminus D_2)$ finită

$D_1, D_2 \neq \phi$

3) $(D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$

CAZ 1 $D_i = \phi \ \forall i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} D_i = \phi$

CAZ 2 $\exists j \in I$ a.î. $D_j \neq \phi \Rightarrow$

$D_j \subset \bigcup_{i \in I} D_i \Rightarrow \underbrace{X \setminus D_j}_{\text{finită}} \supset \underbrace{X \setminus (\bigcup_{i \in I} D_i)}_{\text{finită}}$ $\Rightarrow$

$\mathcal{T} = \{X\} \cup \{A \subset X \mid A \text{ finită}\}$

$V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow \exists D$ a.î. $a \in D \subset V \Rightarrow X \setminus V \subset X \setminus D$ finită

$\Rightarrow X \setminus V$ finită $\Rightarrow \mathcal{V}_a = \{V \mid a \in V$ și $X \setminus V$ finită$\} \subset \mathcal{T}_c$

$x_n \to a \quad \forall V \in \mathcal{V}_a \ \exists n_V$ a.î. $\forall n \geq n_V \Rightarrow x_n \in V$

$V = X \setminus \{b\}$ cu $b \neq a \Rightarrow x_n \neq b \ \forall n \geq n_b$

$x_n \to a$ dacă $\forall$ element cu excepția lui a se repetă de un număr finit de ori!

$A, B \in X \qquad (X, \mathcal{T})$ spațiu topologic

$A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}, \quad \mathring{A} \subset \mathring{B}, \quad A' \subset B'$

$x \in \bar{A} \Rightarrow \forall\, V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$

$\emptyset \neq V \cap A \subset V \cap B \Rightarrow V \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{B}$

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$A, B \subset A \cup B \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Fie $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow \forall\, V \in \mathcal{V}_x$

$V \cap A \cap B = \emptyset$

pp că $x \notin \bar{A} \Rightarrow \exists\, W \in \mathcal{V}_x$ a.î. $W \cap A = \emptyset$.

Fie $V \in \mathcal{V}_x \Rightarrow V \cap W \in \mathcal{V}_x \Rightarrow$

$$(V \cap W) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

$$\| $$

$$V \cap \underbrace{(W \cap A)}_{\emptyset} \cup (W \cap B) = V \cap (W \cap B) \subset V \cap B.$$

$\overset{\circ}{\overline{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B} \qquad (A \cup B)' = A' \cup B'$