

**Noțiunea de serie de elemente din  $\mathbb{R}$**   
**Operații algebrice cu serii**  
**Serii absolut convergente și serii semiconvergente**

**Noțiunea de serie de elemente din  $\mathbb{R}$**

Conceptul de serie, care încearcă să dea sens "sumelor infinite", s-a dovedit util în definirea unor constante importante (ca, de exemplu,  $e$  sau  $\pi$ ), precum și în definirea riguroasă a funcțiilor elementare.

**Definiție.** Dacă  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este un șir de elemente din  $\mathbb{R}$ , definim seria generată de ca fiind șirul  $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , unde  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ . Dacă șirul  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este convergent,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  se numește suma seriei și se notează cu  $S$ .  $x_n$ -urile poartă numele de termenii seriei, iar  $S_n$ -urile de sume parțiale.

Prin convenție, simbolurile  $\sum x_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$  sau  $\sum_{n \geq 1} x_n$  vor desemna atât seria generată de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , cât și suma sa, în cazul în care seria este convergentă.

Dacă șirul  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tinde  $\infty$  la vom spune ca  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$ .

Dacă șirul  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tinde  $-\infty$  la vom spune ca  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\infty$ .

**Observație.**

1) Deși în general termenii unei serii sunt indexați cu numere naturale, există situații în care este de preferat să începem indexarea cu  $n = 0$  sau cu  $n = k$ , unde  $k \in \mathbb{N}$ .

2) Practic o serie  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} x_n$  este o pereche  $((x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}^*})$  unde  $S_n$  sunt sumele parțiale și  $x_n$  sunt termenii seriei.

**Exemple.**

1) Să se afle suma seriei  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ .

Avem

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)} \rightarrow 1.$$

$$\text{Deci } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

2) Să se afle suma seriei  $\sum_{n \geq 0} a^n$ , numită seria geometrică, pentru  $a > -1$ .

$$\text{Pentru } |a| < 1 \text{ avem } S_n = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \rightarrow \frac{1}{1-a}, \text{ deci } \sum_{n \geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

$$\text{Pentru } a = 1 \text{ avem } S_n = \sum_{k=0}^n 1 = n+1, \text{ deci } \sum_{n \geq 0} a^n = \infty.$$

Pentru  $a > 1$  avem  $S_n = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ , deci  $\sum_{n \geq 0} a^n = \infty$ .

### Exerciții.

1. Să se afle suma seriei  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$ .
2. Să se afle suma seriei  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$ .
3. Să se afle suma seriei  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}$ .
4. Să se afle suma seriei  $\sum_{n \geq 1} na^{n-1}$ .
5. Să se afle suma seriei  $\sum_{n \geq 1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ .

Următorul rezultat furnizează o condiție necesară, însă nu și suficientă, pentru convergența unei serii.

**Lemă.** Dacă seria  $\sum x_n$ , cu termeni din  $\mathbb{R}$ , este convergentă, atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .  
0. Reciproca nu este adevărată.

*Demonstrație.* Într-adevăr,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$ . Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  arată că reciproca nu este validă.  $\square$

Următoarele două rezultate decurg îndată din cele corespunzătoare din capitolul privind șirurile de elemente din  $\mathbb{R}^p$ .

**Teoremă.** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de elemente din  $[0, \infty)$ . Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- i)  $\sum x_n$  este convergentă;
  - ii)  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este mărginit.
- În acest caz  $\sum x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ .

*Demonstrație.*

Avem  $S_{n+1} - S_n = x_n \geq 0$ . Deoarece șirul  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este crescător rezultă că este convergent dacă și numai dacă este mărginit.

**Criteriul lui Cauchy pentru serii din  $\mathbb{R}$ .** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de elemente din  $\mathbb{R}$ . Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- i)  $\sum x_n$  este convergentă;
- ii) pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât  $|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m| < \varepsilon$  pentru orice  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m > n \geq n_\varepsilon$ .

*Demonstrație.*

Avem  $|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m| = |S_m - S_n|$  pentru orice  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m > n \geq n_\varepsilon$ . Rezultă că șirul  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent (Cauchy) dacă și numai dacă este îndeplinită condiția ii).

**Notăție.** Spunem că două serii  $\sum x_n$  și  $\sum y_n$  sunt echivalente dacă sunt ambele convergente sau divergente și notăm  $\sum x_n \sim \sum y_n$ .

### Exemple standard de serii (seria geometrică și seria armonică)

1. Pentru  $a \in \mathbb{R}$ , seria  $\sum a^n$ , numită seria geometrică, este convergentă dacă și numai dacă  $|a| < 1$ .
2. Pentru  $a \in \mathbb{R}$ , seria  $\sum \frac{1}{n^a}$ , numită seria armonică generalizată, este convergentă dacă și numai dacă  $a > 1$ .

**Remarcă.** Denumirea de serie armonică generalizată are drept temei faptul că, în cazul  $a = 1$ , orice termen al seriei, începând cu cel de al doilea, este media armonică a termenilor vecini. Pentru  $a > 1$ , suma seriei  $\sum \frac{1}{n^a}$  se notează cu  $\zeta(a)$ . Funcția astfel construită, numită funcția  $\zeta$  a lui Riemann, este un ingredient principal în studiul distribuției asimptotice a numerelor prime și în celebra conjectură a lui Riemann rămasă fără răspuns până în acest moment.

### Operații algebrice cu serii din $\mathbb{R}$

Următorul rezultat (a cărui demonstrație decurge imediat din Propoziția privind comportamentul șirurilor convergente din  $\mathbb{R}$  la operațiile algebrice) arată că familia seriilor se comportă "bine" la operațiile algebrice standard.

#### Propoziția privind comportamentul seriilor la operațiile algebrice

$\alpha$ ) Dacă seriile  $\sum x_n$  și  $\sum y_n$ , cu elemente din  $\mathbb{R}$ , sunt convergente, atunci seriile  $\sum(x_n + y_n)$  și  $\sum(x_n - y_n)$  sunt convergente și sunt valabile relațiile următoare:  $\sum(x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$  și  $\sum(x_n - y_n) = \sum x_n - \sum y_n$ .

$\beta$ ) Dacă seria  $\sum x_n$ , cu elemente din  $\mathbb{R}$ , este convergentă,  $c \in \mathbb{R}$ , atunci seria  $\sum cx_n$  este convergentă și este valabilă relația următoare:  $\sum cx_n = c \sum x_n$ .

### Serii absolut convergente și serii semiconvergente

**Definiție.** Dacă  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un șir de elemente din  $\mathbb{R}$ , spunem că seria  $\sum x_n$  este absolut convergentă dacă seria  $\sum |x_n|$  este convergentă.

**Definiție.** O serie cu elemente din  $\mathbb{R}$  se numește semiconvergentă dacă este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

**Observație.** Pentru seriile care au drept termeni numere reale pozitive nu există distincție între noțiunile de convergență și convergență absolută.

Folosind criteriul lui Cauchy, se poate demonstra următoarea:

**Teorema privind convergența seriilor absolut convergente.** Dacă seria  $\sum x_n$ , cu elemente din  $\mathbb{R}$ , este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.

Demonstrația decurge din faptul că  $\sum_{k=n}^{n+p} |x_k| \geq \left| \sum_{k=n}^{n+p} x_k \right|$  pentru orice  $n, p \in \mathbb{N}$ .

Teorema următoare arată că termenii seriilor absolut convergente pot fi manipulați precum termenii sumelor finite, adică nu este importantă ordinea în care se sunează.

**Teorema privind comportamentul seriilor absolut convergente la permutări.** Fie  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  o bijecție și  $\sum x_n$  o serie absolut convergentă cu elemente din  $\mathbb{R}$ . Atunci:

$\alpha)$   $\sum x_{\sigma(n)}$  este convergentă;

$\beta)$   $\sum x_{\sigma(n)} = \sum x_n$ .

*Demonstrație.*

$\alpha)$  Notând  $x_{\sigma(n)}$  cu  $y_m$ , avem  $|y_1| + |y_2| + \dots + |y_m| \leq \sum |x_n|$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , deci seria  $\sum x_{\sigma(n)}$  este absolut convergentă.

$\beta)$  Fie  $S$  suma seriei  $\sum x_n$ ,  $S'$  suma seriei  $\sum x_{\sigma(n)}$  și  $\varepsilon > 0$  arbitrar dar fixat. Atunci există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât  $|S - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)| < \varepsilon$  și  $|x_{n+1}| + \dots + |x_m| < \varepsilon$  pentru orice  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq n \geq n_\varepsilon$  și alegem  $r$  satisfăcând următoarele două proprietăți:

a)  $|S' - (y_1 + y_2 + \dots + y_r)| < \varepsilon$ ;

b) elementele  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se află printre elementele  $y_1, y_2, \dots, y_r$ .

În continuare alegem  $m \geq n$  astfel încât elementele  $y_1, y_2, \dots, y_r$  să se afle printre elementele  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . În aceste condiții, avem

$$\begin{aligned} |S' - S| &\leq |S - (x_1 + \dots + x_n)| + |(x_1 + \dots + x_n) - (y_1 + \dots + y_r)| + \\ &+ |S' - (y_1 + \dots + y_r)| \leq \varepsilon + (|x_{n+1}| + \dots + |x_m|) + \varepsilon < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

deci, cum  $\varepsilon$  a fost ales arbitrar, concluzionăm că  $S' = S$ .  $\square$

Teorema următoare arată că, spre deosebire de seriile absolut convergente, seriile semiconvergente au un comportament total opus în privința sumei seriei obținute în urma permutării termenilor.

**Teorema privind comportamentul seriilor semiconvergente la permutări.** Pentru orice serie semiconvergentă de numere reale  $\sum_n x_n$  și orice două elemente  $\alpha, \beta$  din  $\overline{\mathbb{R}}$  astfel încât  $\alpha \leq \beta$ , există o bijecție  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  cu proprietatea că  $\lim S_n(\sigma) = \alpha$  și  $\overline{\lim} S_n(\sigma) = \beta$ , unde  $S_n(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exerciții

1. Să se calculeze suma seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ .

2. Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de numere reale. Dacă seria  $\sum x_n$  este convergentă, este convergentă seria  $\sum x_n^2$ ? Dar dacă  $x_n \geq 0$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , este convergentă seria  $\sum \sqrt{x_n}$ ?

3. Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de numere reale. Dacă seria  $\sum x_n$  este convergentă și  $x_n \geq 0$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , este convergentă seria  $\sum \sqrt{x_n x_{n+1}}$ ?
4. Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de numere reale pozitive. Să se arate că, dacă seria  $\sum x_n$  este convergentă, atunci seria  $\sum \frac{x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n}{n(n+1)}$  este convergentă.
5. Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir descrescător de elemente din  $[0, \infty)$ . Să se arate că, dacă seria  $\sum x_n$  este convergentă, atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 0$ . Este adevărată reciproca?

## CRITERII DE CONVERGENȚĂ PENTRU SERII

### Criteriile de comparație

#### Criteriul raportului, rădăcinii și cel al lui Raabe-Duhamel

#### Criteriile lui Abel și Dirichlet

#### Unele funcții elementare ca sume de serii

Pentru stabilirea naturii unei serii dispunem de unele criterii de convergență.

### Criteriile de comparație

Criteriile de comparație prezentate mai jos, aplicabile seriilor cu termeni pozitivi, sunt utile atunci când dispunem de niște serii standard a căror natură este cunoscută (și care de obicei sunt seria geometrică și seria armonică) și de inegalități și limite adecvate.

**Criteriul de comparație cu inegalități.** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  două șiruri de elemente din  $[0, \infty)$  astfel încât există  $n_0 \in \mathbb{N}$  și  $M > 0$  cu proprietatea că  $x_n \leq My_n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ . Atunci :

- i) Dacă seria  $\sum x_n$  este divergentă rezultă că seria  $\sum y_n$  este divergentă.
- ii) Dacă seria  $\sum y_n$  este convergentă rezultă că seria  $\sum x_n$  este convergentă.

Atunci  $\sum x_n$  este convergentă.

*Demonstrație.*

Putem presupune, fără pierderea generalității, că  $n_0 = 1$ . Cu notațiile  $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  și  $\mathcal{S}_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ , avem  $0 \leq S_n \leq M\mathcal{S}_n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

- i) Cum șirul  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este divergent rezultă că șirul  $(\mathcal{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este divergent.
- ii) Cum șirul  $(\mathcal{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent, deci mărginit, deducem că și  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este mărginit. Cum el este crescător, conform Teoremei convergenței monotone, este convergent, deci seria  $\sum x_n$  este convergentă.  $\square$

**Criteriul de comparație cu limita superioară și inferioară.** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  două șiruri de elemente din  $(0, \infty)$  astfel încât:

- i) Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} > 0$  și seria  $\sum y_n$  este divergentă, atunci și seria  $\sum x_n$  este divergentă.

ii) Dacă  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} < \infty$  și seria  $\sum y_n$  este convergentă, atunci și seria  $\sum x_n$  este convergentă.

**Criteriul de comparație cu limită.** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  două șiruri de elemente din  $(0, \infty)$ .

$\alpha)$  Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0, \infty)$ , atunci seriile  $\sum x_n$  și  $\sum y_n$  au aceeași natură.

$\beta)$  Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$  și seria  $\sum y_n$  este convergentă, atunci și seria  $\sum x_n$  este convergentă.

$\gamma)$  Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$  și seria  $\sum y_n$  este divergentă, atunci și seria  $\sum x_n$  este divergentă.

*Demonstrație.* Rezultatul decurge din explicitarea ipotezelor și utilizarea Criteriului de comparație cu inegalități.  $\square$

**Criteriul condensării.** Fie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un șir descrescător cu elemente din  $\mathbb{R}^+$ . Atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă dacă și numai dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  este convergentă.

*Demonstrație.* Fie  $n \in \mathbb{N}$ . Pentru orice  $k \in \mathbb{N}$  astfel încât  $2^n \leq k \leq 2^{n+1}$  avem  $a_{2^n} \geq a_k \geq a_{2^{n+1}}$ , de unde rezultă că  $2^n a_{2^n} \geq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \geq 2^n a_{2^{n+1}}$ .

Notăm  $b_n = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k$ . Din criteriul comparației rezultă că seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \right) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$  sunt echivalente.  $\square$

**Exemplu.** Pentru  $a \in \mathbb{R}$ , seria  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$ , numită seria armonică generalizată, este convergentă dacă și numai dacă  $a > 1$ .

Avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } a > 0 \\ 1 & \text{dacă } a = 0 \\ \infty & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$ . Rezultă că pentru  $a \leq 0$  seria este

divergentă. Pentru  $a > 0$  șirul  $(\frac{1}{n^a})_{n \geq 1}$  este descrescător și convergent la 0. Atunci

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a} \sim \sum_{n \geq 1} 2^n \frac{1}{(2^n)^a} = \sum_{n \geq 1} (2^{1-a})^n$$

, care este convergentă dacă și numai dacă  $2^{1-a} < 1$  dacă și numai dacă  $a > 1$ .

**Exemplu** (criteriul condensării). Să se studieze natura seriei  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^a}$ .

Se consideră funcția  $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dată de  $f(x) = x(\ln x)^a$ . Deoarece  $f$  este crescătoare de la un anumit  $x_0$  rezultă că  $\frac{1}{n(\ln n)^a} \searrow 0$ . Atunci

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^a} \sim \sum_{n \geq 2} \frac{2^n}{2^n (\ln 2^n)^a} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n \ln 2)^a} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n)^a (\ln 2)^a},$$

care este convergentă pentru  $n > 1$  și divergentă pentru  $n \leq 1$ .

**Example** (criteriul comparației).

1. Să se studieze natura seriei  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}$ .

Fie  $x_n = \frac{1}{n}$  și  $y_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}$ . Avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}} = 1$ . Deci  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} \sim \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  care este divergentă.

2. Să se studieze natura seriei  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+5}$ .

Fie  $x_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+5}$  și  $y_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ . Avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2+5}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = 1$ . Deci  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+5} \sim \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$  care este convergentă.

3. Să se studieze natura seriei  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ .

### Criteriul raportului și criteriul rădăcinii

Foarte utile pentru stabilirea convergenței unei serii se dovedesc a fi următoarele două criterii a căror demonstrație (fiind asemănătoare cu cea a Criteriului Raabe-Duhamel) este lăsată în seama cititorului.

**Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy).** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de elemente din  $\mathbb{R}$ .

$\alpha)$  Dacă există  $r \in [0, 1)$  și  $n_0 \in \mathbb{N}$  astfel încât  $|x_n|^{\frac{1}{n}} \leq r$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ , atunci seria  $\sum x_n$  este absolut convergentă.

$\beta)$  Dacă există  $r \in [1, \infty)$  și  $n_0 \in \mathbb{N}$  astfel încât  $|x_n|^{\frac{1}{n}} \geq r$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ , atunci seria  $\sum x_n$  este divergentă.

*Demonstrație.*

$\alpha)$  Seria  $\sum r^n$  este convergentă pentru  $r \in [0, 1)$ . Deoarece  $|x_n| \leq r^n$ , din criteriul comparației rezultă că  $\sum x_n$  este absolut convergentă.

$\beta)$  Seria  $\sum r^n$  este divergentă pentru  $r \in [1, \infty)$ . Deoarece  $|x_n| \geq r^n \geq 1$ , rezultă că  $\sum x_n$  este divergentă.

**Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy).** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de elemente din  $\mathbb{R}$ .

$\alpha)$  Dacă  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{\frac{1}{n}} \in [0, 1)$ , atunci seria  $\sum x_n$  este absolut convergentă.

$\beta)$  Dacă  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{\frac{1}{n}} \in (1, \infty)$ , atunci seria  $\sum x_n$  este divergentă.

**Observație.**

Pentru  $r \in (0, 1)$ , notând cu  $S$  suma seriei  $\sum x_n$ , iar cu  $S_n$  sumele sale parțiale, avem  $|S - S_n| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ .

**Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy).** Dacă  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un șir de elemente din  $[0, \infty)$  astfel încât există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \stackrel{\text{not}}{=} r$ , atunci seria  $\sum x_n$  este convergentă pentru  $r \in [0, 1)$  și divergentă pentru  $r \in (1, \infty)$ .

**Exemplu.** Să se studieze natura seriei  $\sum_{n \geq 1} (a^{\frac{n^2+n+1}{n^2}})^n$ ,  $a > 0$ .

Avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(a^{\frac{n^2+n+1}{n^2}})^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{n^2+n+1}{n^2}} = a$ . Rezultă că seria  $\sum_{n \geq 1} (a^{\frac{n^2+n+1}{n^2}})^n$  este convergentă pentru  $a \in [0, 1)$  și divergentă pentru  $a \in (1, \infty)$ . Pentru  $a = 1$ , deoarece  $(\frac{n^2+n+1}{n^2})^n \geq 1$ , seria este divergentă.

**Criteriul raportului (al lui D'Alembert).** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un șir de elemente din  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$\alpha)$  Dacă există  $r \in [0, 1)$  și  $n_0 \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq r$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ , atunci seria  $\sum x_n$  este absolut convergentă.

$\beta)$  Dacă există  $r \in [1, \infty)$  și  $n_0 \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \geq r$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ , atunci seria  $\sum x_n$  este divergentă.

*Demonstrație.*

$\alpha)$  Fie  $n \geq n_0$ . Atunci  $\frac{|x_n|}{|x_{n_0}|} = \frac{|x_n|}{|x_{n-1}|} \frac{|x_{n-1}|}{|x_{n-2}|} \dots \frac{|x_{n_0+1}|}{|x_{n_0}|} \leq r^{n-n_0}$  și  $|x_n| \leq \frac{|x_{n_0}|}{r^{n_0}} r^n$ . Din criteriul comparației rezultă că  $\sum x_n$  este absolut convergentă.

$\beta)$  Fie  $n \geq n_0$ . Atunci  $\frac{|x_n|}{|x_{n_0}|} = \frac{|x_n|}{|x_{n-1}|} \frac{|x_{n-1}|}{|x_{n-2}|} \dots \frac{|x_{n_0+1}|}{|x_{n_0}|} \geq 1$ . Deci șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nu converge la 0.

**Criteriul raportului (al lui D'Alembert).** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un șir de elemente din  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$\alpha)$  Dacă  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \in [0, 1)$ , atunci seria  $\sum x_n$  este absolut convergentă.

$\beta)$  Dacă  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \in (1, \infty)$  atunci seria  $\sum x_n$  este divergentă.

**Criteriul raportului (al lui D'Alembert).** Dacă  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un șir de elemente din  $(0, \infty)$  astfel încât există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \stackrel{\text{not}}{=} r$ , atunci seria  $\sum x_n$  este convergentă pentru  $r \in [0, 1)$  și divergentă pentru  $r \in (1, \infty)$ .

**Observații.**

1. Pentru  $r \in [0, 1)$ , notând cu  $S$  suma seriei  $\sum x_n$ , iar cu  $S_n$  sumele sale parțiale, avem  $|S - S_n| \leq \frac{r}{1-r} |x_n|$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ .

2. Dacă  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un șir de elemente din  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  astfel încât există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \stackrel{\text{not}}{=} r$ , atunci seria  $\sum x_n$  este absolut convergentă pentru  $r \in [0, 1)$  și divergentă pentru  $r \in (1, \infty)$ .

**Exemplu.** Să se studieze natura seriei  $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{n^b}$ , unde  $a > 0$  și  $b \in \mathbb{R}$ .



**Exercițiu.** Să se studieze natura seriei  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{(2n)!}$ .

$$\text{Avem } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{n^n}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \frac{(n+1)^n (n+1)}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \frac{(n+1)^n}{n^n} =$$

0. Rezultă că pentru seria este convergentă.

Deși criteriul rădăcinii este mai "puternic" decât cel al raportului ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$ , dacă există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$ ), el este mai ușor de aplicat, de cele mai multe ori. Dacă  $r = 1$ , ambele criterii sunt inutilizabile. În acest caz, următorul criteriu poate decide natura seriei.

**Criteriul lui Raabe-Duhamel.** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de elemente din  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$\alpha)$  Dacă există  $r \in (1, \infty)$  și  $n_0 \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq 1 - \frac{r}{n}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ , atunci seria  $\sum x_n$  este absolut convergentă.

$\beta)$  Dacă există  $r \in (-\infty, 1)$  și  $n_0 \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \geq 1 - \frac{r}{n}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ , atunci seria  $\sum x_n$  nu este absolut convergentă.

*Demonstrație.*

$\alpha)$  Din ipoteză obținem că

$$0 < (r-1)|x_n| \leq (n-1)|x_n| - n|x_{n+1}|, \quad (1)$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ . Prin urmare, șirul  $(n|x_{n+1}|)_{n \in \mathbb{N}}$  este descrescător, începând cu rangul  $n_0$ , deci mărginit. Prin adunarea inegalităților de tip (1), obținem  $(r-1)(|x_{n_0}| + \dots + |x_n|) \leq (n_0-1)|x_{n_0}| - n|x_{n+1}|$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ , ceea ce arată că șirul sumelor parțiale ale seriei  $\sum |x_n|$  este mărginit, i.e. seria  $\sum x_n$  este absolut convergentă.

$\beta)$  Din ipoteză obținem că  $n|x_{n+1}| \geq (n-r)|x_n| \geq (n-1)|x_n|$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ . Prin urmare, șirul  $(n|x_{n+1}|)_{n \in \mathbb{N}}$  este crescător începând cu rangul  $n_0$ , deci există un număr real strict pozitiv  $c$  astfel încât  $|x_{n+1}| \geq \frac{c}{n}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$  și cum seria armonică  $\sum \frac{1}{n}$  este divergentă, deducem că seria  $\sum x_n$  nu este absolut convergentă.  $\square$

**Corolar.** Pentru  $r \in (1, \infty)$ , notând cu  $S$  suma seriei  $\sum x_n$ , iar cu  $S_n$  sumele sale parțiale, avem  $|S - S_n| \leq \frac{n}{r-1} |x_{n+1}|$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ .

**Corolar.** Dacă  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un șir de elemente din  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  astfel încât există  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}) \stackrel{\text{not}}{=} r$ , atunci seria  $\sum x_n$  este absolut convergentă pentru  $r \in (1, \infty)$  și nu este absolut convergentă pentru  $r \in (-\infty, 1)$ .

**Exemplu.** Să se studieze natura seriei  $\sum_{n \geq 1} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ .

Fie  $x_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ . Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{4^{n+1} ((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{4^{n+1}} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} = 1.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{4n^2 + 6n + 2 - 4n^2 - 8n - 2}{4(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{-2n}{4(n+1)^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Rezultă că seria este convergentă.

**Exercițiu.** Să se studieze natura seriei  $\sum_{n \geq 1} a\sqrt{n}$ ,  $a > 0$ .

**Notă.** Se folosește și următoarea variantă a criteriului lui Raabe-Duhamel.

Dacă  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un șir de elemente din  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  astfel încât există  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} -$

1)  $\stackrel{\text{not}}{=} r$ , atunci seria  $\sum x_n$  este absolut convergentă pentru  $r \in (-\infty, 1)$  și nu este absolut convergentă pentru  $r \in (1, \infty)$ .

### Criteriile lui Abel și Dirichlet

Criteriile anterioare prezintă condiții în care o serie este absolut convergentă. Deoarece, așa cum am menționat, există serii care sunt convergente fără a fi absolut convergente, este util să dispunem de criterii care să garanteze convergența acestor tipuri de serii.

Următoarea leamnă se dovedește a fi utilă în cadrul demonstrațiilor criteriilor lui Dirichlet și Abel.

**Lema lui Abel.** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  două șiruri de elemente din  $\mathbb{R}$ .

Atunci  $\sum_{j=n}^m x_j y_j = (x_m s_m - x_n s_{n-1}) + \sum_{j=n}^m (x_j - x_{j+1}) s_j$  pentru orice  $m, n \in \mathbb{N}$ ,

$m \geq n$ , unde  $(s_k)_k$  șirul sumelor parțiale ale seriei  $\sum y_n$ .

*Demonstrație.*

Avem

$$\begin{aligned} \sum_{j=n}^m x_j y_j &= \sum_{j=n}^m x_j (s_j - s_{j-1}) = \sum_{j=n}^m x_j s_j - \sum_{j=n}^m x_j s_{j-1} = \\ &= (x_m s_m - x_n s_{n-1}) + \sum_{j=n}^{m-1} x_j s_j - \sum_{j=n+1}^m x_j s_{j-1} = \\ &= (x_m s_m - x_n s_{n-1}) + \sum_{j=n}^{m-1} x_j s_j - \sum_{j=n}^{m-1} x_{j+1} s_j = \\ &= (x_{m+1} s_m - x_n s_{n-1}) + \sum_{j=n}^m (x_j - x_{j+1}) s_j. \quad \square \end{aligned}$$

**Criteriul lui Dirichlet.** Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  și  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  două șiruri de elemente din  $\mathbb{R}$  satisfăcând următoarele trei proprietăți:

- i)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge către 0;
- ii)  $\sum |x_n - x_{n+1}|$  este convergentă;
- iii)  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  este mărginit,

unde  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  este șirul sumelor parțiale ale seriei  $\sum y_n$ .

Atunci seria  $\sum x_n y_n$  este convergentă.

*Demonstrație.* În conformitate cu iii), există  $M \in \mathbb{R}$  astfel încât  $|s_k| \leq M$  pentru orice  $k \in \mathbb{N}$ . Atunci, utilizând Lema lui Abel, obținem că  $\left| \sum_{j=n}^m x_j y_j \right| \leq M(|x_m| + |x_n| + \sum_{j=n}^m |x_j - x_{j+1}|)$  pentru orice  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq n$ . Ipotezele i) și ii), împreună cu Criteriul lui Cauchy pentru serii cu elemente din  $\mathbb{R}$ , încheie demonstrația.  $\square$

**Observație.** Dacă  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un șir descrescător de numere reale pozitive care converge către 0, atunci ipotezele i) și ii) sunt îndeplinite.

**Corolar.** În condițiile de mai sus, cu ipoteza suplimentară că  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un șir descrescător de numere reale pozitive care converge către 0, avem

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j - \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq 2M |x_{n-1}| \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

**Criteriul lui Abel.** Fie  $\sum y_n$  o serie de elemente din  $\mathbb{R}$  și  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de elemente din  $\mathbb{R}$  satisfăcând următoarele proprietăți:

i)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este monoton și convergent;

ii)  $\sum y_n$  este convergentă.

Atunci seria  $\sum x_n y_n$  este convergentă.

*Demonstrație.* Pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$|x_m s_m - x_n s_{n-1}| < \varepsilon, \quad (1)$$

pentru orice  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq n \geq n_\varepsilon$ , unde  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  reprezintă șirul sumelor parțiale ale seriei  $\sum y_n$ . Conform ipotezei ii), există  $M \in \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $|s_k| \leq M$  pentru orice  $k \in \mathbb{N}$ , de unde

$$\left| \sum_{j=n}^m (x_j - x_{j+1}) s_j \right| \leq |x_n - x_m| M, \quad (2)$$

pentru orice  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq n \geq n_\varepsilon$ . Din (1), (2), Lema lui Abel și Criteriul lui Cauchy pentru serii din  $\mathbb{R}^p$  se deduce concluzia.  $\square$

**Corolar.** În condițiile rezultatului anterior, este valabilă inegalitatea

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j - \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq |x| |s - s_n| + 2M |x - x_{n+1}| \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Există o clasă importantă de serii, anume acelea care au termenii numere reale cu semnele alternând.

**Definiție.** Un șir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de elemente din  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  se numește alternat dacă elementele mulțimii  $\{(-1)^n x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  sunt toate pozitive sau toate negative. O serie generată de un șir alternat se numește alternată.

**Criteriul lui Leibniz** (criteriul privind convergența seriilor alternate). Fie  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un șir de elemente din  $[0, \infty)$  satisfăcând următoarele două proprietăți:

i)  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este descrescător;

ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

Atunci seria alternată  $\sum (-1)^n x_n$  este convergentă.

Mai mult, avem  $|S - S_n| \leq x_{n+1}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , unde  $S$  reprezintă suma seriei  $\sum (-1)^n x_n$ , iar  $S_n$  sumele sale parțiale.

## Produsul a două serii

Următoarea definiție este motivată de modul în care se înmulțesc două polinoame și este utilă în demonstrarea proprietăților uzuale ale funcțiilor elementare.

**Definiție.** Pentru seriile  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ , cu elemente din  $\mathbb{R}$ , se definește produsul Cauchy al lor ca fiind seria  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ , unde  $c_n = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot b_1 + a_n \cdot b_0$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

**Observație.** Produsul Cauchy a două serii convergente nu este, în general, o serie convergentă. Spre exemplu, produsul Cauchy al seriei convergente  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$  cu ea însăși nu este o serie convergentă. Într-adevăr, termenul general

$c_n$  al produsului seriei menționate cu ea însăși este dat de  $(-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$ .

Cum  $\sqrt{(k+1)(n-k+1)} \leq \frac{n+2}{2}$  pentru orice  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , deducem că

$|c_n| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{2(n+1)}{n+2}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Această ultimă inegalitate arată că afirmația  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$  este falsă, deci seria produs  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  este

divergentă.

Următoarele două teoreme furnizează condiții suficiente pentru ca produsul a două serii să fie o serie convergentă și pentru ca suma seriei produs să fie produsul sumelor celor două serii.

**Teorema lui Mertens.** Fie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  două serii, de elemente din  $\mathbb{R}$ , satisfăcând următoarele două proprietăți:

i)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge absolut către  $A$ ;

ii)  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  converge către  $B$ .

Atunci produsul Cauchy al celor două serii este o serie convergentă, cu suma  $AB$ .

Dacă seria  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  converge absolut către  $B$ , atunci produsul Cauchy al celor două serii este o serie absolut convergentă.

### Noțiunea de serie de puteri

**Definiție.** O serie de funcții de tipul  $\sum_{n \geq 0} a_n(x-c)^n$ , unde  $a_n, c \in \mathbb{R}$ , se numește serie de puteri în jurul lui  $c$ .

### Raza unei serii de puteri. Teorema Cauchy-Hadamard

**Definiție.** Pentru seria de puteri  $\sum_n a_n x^n$ , definim raza de convergență ca fiind  $R = \begin{cases} 0, & \rho = \infty \\ \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < \infty \\ \infty, & \rho = 0 \end{cases}$ , unde  $\rho = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$  dacă șirul  $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}}$  este mărginit și  $\rho = \infty$  dacă șirul  $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}}$  este nemărginit.

**Observație.** Fără a pierde din generalitate, putem presupune că  $c = 0$  (căci translația  $x' = x - c$  reduce o serie de puteri în jurul lui  $c$  la o serie de puteri în jurul lui 0).

Rezultatul de mai jos justifică terminologia de rază de convergență.

**Teorema Cauchy-Hadamard.** Dacă  $R$  este raza de convergență a seriei de puteri  $\sum_n a_n x^n$ , atunci:

- α) *Seria este absolut convergentă pentru  $|x| < R$ .*
- β) *Seria este divergentă pentru  $|x| > R$ .*

**Demonstrație.** Vom trata numai cazul  $R \in (0, \infty)$ , celelalte, anume  $R = 0$  și  $R = \infty$ , rămânând în seama cititorului. Pentru  $0 < |x| < R$ , există  $c \in [0, 1)$  astfel încât  $|x| < cR$ , deci  $\rho < \frac{c}{|x|}$ , de unde deducem existența unui  $n_0 \in \mathbb{N}$  cu proprietatea că  $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{c}{|x|}$ , i.e.  $|a_n x^n| \leq c^n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ . Din inegalitatea anterioară, deoarece  $c \in [0, 1)$ , conform Criteriului de comparație cu inegalități, se obține convergența absolută a serie de puteri  $\sum_n a_n x^n$ . Dacă  $|x| > R = \frac{1}{\rho}$ , avem  $|a_n|^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{|x|}$ , adică  $|a_n x^n| > 1$  pentru o infinitate de  $n$ , de unde deducem că șirul  $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  nu converge la 0, ceea ce implică faptul că seria de puteri  $\sum_n a_n x^n$  este divergentă.  $\square$

### Observație.

1. Deși funcțiile  $x \rightarrow a_n x^n$  sunt definite pe  $\mathbb{R}$ , nu este de așteptat ca seria  $\sum_n a_n x^n$  să convergă pe  $\mathbb{R}$ . De exemplu, seriile  $\sum_n n! x^n$ ,  $\sum_n x^n$  și  $\sum_n \frac{x^n}{n!}$  converg pentru  $x$  aparținând mulțimilor  $\{0\}$ ,  $(-1, 1)$ , respectiv  $\mathbb{R}$ . Prin urmare, mulțimea punctelor în care converge o serie de puteri poate fi "mică", "medie"

sau "mare". Aşa cum vom vedea, mulţimea punctelor de convergenţă ale unei serii de puteri are o structură specială.

2. Raza de convergenţă a seriei de puteri  $\sum a_n x^n$ , în cazul în care există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ , este dată, de asemenea, de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ .

### Aplicaţii.

1. Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  este absolut convergentă,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$  şi, folosind Teorema lui Cauchy, avem  $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

*Justificare.*

a) Reamintim că  $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } e^x \cdot e^y &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i+j=n} \frac{x^i}{i!} \frac{y^j}{j!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} x^i y^j \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{i+j=n} C_n^i x^i y^j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = e^{x+y} \end{aligned}$$

c) Se vede că  $e^x \geq 1$  pentru. Deci, pentru orice  $x \geq y$ ,  $e^x = e^y e^{x-y}$ . Cu alte cuvinte  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  este crescătoare. Pornind de aici se poate arăta că este şi continuă.

2. Pentru orice  $x, \alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât  $|x| < 1$ , seria  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$  este absolut convergentă şi  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = (1+x)^\alpha$ .

3. Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , seria  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$  este absolut convergentă şi suma sa se notează cu  $\sin x$ . Aşadar  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$ .

4. Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , seria  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  este absolut convergentă şi suma sa se notează cu  $\cos x$ . Aşadar  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$ .

5. Au loc relaţiile:  $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$ ,  $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ ,  $\sin(-x) = -\sin x$ ,  $\cos(-x) = \cos x$ ,  $\sin(0) = 0$ ,  $\cos(0) = 1$  şi  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ . Există un unic număr real, notat cu  $\pi$ , astfel încât:

- $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ ;
- $\cos x > 0$  pentru orice  $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ ;
- $\sin(x+2\pi) = \sin x$  şi  $\cos(x+2\pi) = \cos x$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ;
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$  şi  $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

6. Definim funcţiile  $tg : \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$  şi  $ctg : \mathbb{R} - \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$  prin  $tg(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$  şi  $ctg(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ .

**Observație.** Pentru a studia convergența unei serii putem să aplicăm următorul algoritm:

PAS 1. Studiem absolut convergența seriei.

Pas 1.1. Încercăm să aplicăm criteriul raportului sau al radicalului.

Pas 1.2. Dacă criteriile de la pasul 1.1 nu decid încercăm să aplicăm criteriul comparației sau Raabe-Duhamel.

PAS 2. Vedem dacă termenul general tinde la 0. Dacă nu seria este divergentă.

PAS 3. Încercăm să aplicăm criteriul Dirichlet sau Abel ( în particular criteriul lui Leibniz).

**Notă.** 1. Unele dintre criteriile de la pasul 1 ne asigură că termenul general nu tinde la 0 deci seria este divergentă.

2. Dacă seria este cu termeni pozitivi pasul 3 nu mai folosește.

**Exemplu.** Să se studieze convergența seriei  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ .

*Rezolvare.*

PAS 1. Studiem absolut convergența seriei. Considerăm seria  $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{x^n}{n^\alpha} \right|$  și notăm  $a_n = \left| \frac{x^n}{n^\alpha} \right|$ .

Ca să putem aplica criteriul raportului punem condiția ca  $a_n \neq 0$ . Dacă  $a_n = 0$  rezultă că  $x = 0$ . În acest caz seria este  $\sum_{n \geq 1} 0 = 0$  deci este absolut convergentă.

$$\text{Cazul } x \neq 0. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^\alpha}}{\frac{|x|^n}{n^\alpha}} = |x|.$$

Dacă  $|x| < 1$  seria este absolut convergentă iar dacă  $|x| > 1$  seria este divergentă ( $a_n \rightarrow \infty$ ).

Dacă  $|x| = 1$  seria este seria armonică  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  care este convergentă pentru  $\alpha > 1$  și divergentă pentru  $\alpha \leq 1$ .

Acesta ne rezolvă cazul  $x = 1$ . Pentru  $x = -1$  seria devine  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ . Stim că este absolut convergentă pentru  $\alpha > 1$ .

Trecem la pasul 2 și calculăm  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \alpha > 0 \\ 1 & \text{dacă } \alpha = 0 \\ \infty & \text{dacă } \alpha < 0 \end{cases}$ . Dacă  $\alpha \leq 0$  seria este divergentă. Dacă  $0 < \alpha \leq 1$  seria este semiconvergentă deoarece  $\frac{1}{n^\alpha} \searrow 0$  (criteriul lui Leibniz).

## Produsul scalar în $\mathbb{R}^n$ și norma unui vector din $\mathbb{R}^n$

Deoarece evoluția multor fenomene din lumea înconjurătoare depinde de mai mulți parametri, acestea sunt modelate prin intermediul funcțiilor de mai multe variabile, adică a funcțiilor care au drept domeniu de definiție o submulțime a lui  $\mathbb{R}^n$ . Din acest motiv este necesar un studiu atent al proprietăților mulțimii  $\mathbb{R}^n$ . Reamintim că  $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ ori}} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ .

**Definiție.** Pentru  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  și  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  definim:

-  $x \cdot y$  (notat pe scurt  $xy$ ), numit produsul scalar al vectorilor  $x$  și  $y$ , prin

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n;$$

- norma (euclidiană a) lui  $x$ , notată  $\|x\|$  (sau  $\|x\|_2$ ), prin

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Vom prezenta acum principalele proprietăți ale normei (sau lungimii) unui vector.

**Observație.** Produsul scalar se mai notează cu  $\langle, \rangle$  și are următoarele proprietăți:

- i)  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \langle \alpha x, z \rangle + \langle \beta y, z \rangle$  pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  și orice  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;
- ii)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ;
- iii)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
- iv)  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Proprietăți.** Pentru  $x, y \in \mathbb{R}^n$  și  $c \in \mathbb{R}$ , avem:

1.

$$\|x\| \geq 0;$$

2.

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

3.

$$\|cx\| = |c| \|x\|;$$

4.

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \left\| x + y \right\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

**Observație.** Numărul real  $\|x\|$  poate fi gândit ca fiind lungimea lui  $x$  sau ca fiind distanța de la 0 la  $x$ .



Prezentăm acum un rezultat care arată relațiile dintre lungimea unui vector și valorile absolute ale componentelor sale.

**Propoziție.** Pentru  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , avem

$$|x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\},$$

pentru orice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Observație.** Inegalitatea de mai sus arată că dacă lungimea lui  $x$  este mică, atunci lungimile componentelor lui  $x$  sunt mici și reciproc.

**Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz.** Dacă  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , atunci

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|.$$

*Demonstrație.* Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dată de

$$f(t) = \sum_{k=1}^n (x_k t - y_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) t^2 - 2 \sum_{k=1}^n x_k y_k + \sum_{k=1}^n y_k^2 \geq 0,$$

pentru orice  $t \in \mathbb{R}$ , unde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  și  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Prin urmare

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right),$$

i.e.

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|. \quad \square$$

**Observație.** Dacă  $\|x\| = \|y\| = 1$ , atunci  $|x \cdot y| \leq 1$ , iar în acest caz  $x \cdot y$  poate fi interpretat geometric ca fiind cosinusul unghiului dintre  $x$  și  $y$ . În  $\mathbb{R}^2$  sau  $\mathbb{R}^3$ , unde se poate defini unghiul  $\varphi$  dintre  $x$  și  $y$ , se arată că  $x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos \varphi$ , această formulă fiind folosită adesea pentru a defini produsul scalar  $x \cdot y$ . În prezența unui produs scalar geometria spațiului este mult mai bogată deoarece se poate defini noțiunea de unghi dintre doi vectori.

**Exemple.**

1. Să se calculeze norma următorilor vectori:  $(-1, 3) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(2, -1, 5) \in \mathbb{R}^3$  și  $(0, 3, -1, 2) \in \mathbb{R}^4$ .

2. Să se calculeze produsul scalar  $x \cdot y$  dacă  $x = (3, 4, 5, -4)$  și  $y = (3, 0, 3, 3)$ .

*Demonstrația faptului că  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inegalitatea triunghiului).*

$$\begin{aligned} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| &\iff \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2} \iff \\ &(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 + \\ &2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2} \iff \\ &x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2} \end{aligned}$$

Ultima inegalitate este inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz.

## SPAȚIUL METRIC $(\mathbb{R}^n, d_2)$

Reamintim că distanța  $d_2$  este definită prin  $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  dată de  $d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \|x - y\|_2$  și că  $d_2$  are următoarele proprietăți:

- i)  $d_2(x, y) = 0 \iff x = y$   
 $d_2(x, y) = 0 \iff \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = 0 \iff |x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| = \dots = |x_n - y_n| = 0 \iff$   
 $\iff x_i = y_i \text{ pentru orice } i \in \{1, 2, \dots, n\} \iff x = y$
- ii)  $d_2(x, y) = d_2(y, x)$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}^n$   
 $d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} =$   
 $= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} = d_2(y, x)$
- iii)  $d_2(x, y) + d_2(y, z) \geq d_2(x, z)$  pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$   
 $d_2(x, y) + d_2(y, z) = \|x - y\|_2 + \|y - z\|_2 \geq \|x - y + y - z\|_2 = \|x - z\|_2 =$   
 $d_2(x, z)$   
 (proprietățile distanței)
- iv)  $d_2(x, y) = d_2(x + z, y + z)$  pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  (invariantă la translații)  
 $d_2(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\|_2 = \|x - y\|_2 = d_2(x, y)$
- v)  $d_2(ax, ay) = |a| d_2(x, y)$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}^n$  și  $a \in \mathbb{R}$ .  
 $d_2(ax, ay) = \|ax - ay\|_2 = \|a(x - y)\|_2 = |a| \|x - y\|_2 = |a| d_2(x, y)$

**Notă.** Distanța  $d_2$  se mai numește distanța euclidiană.

**Notă.**  $d_2(x, y) = d_2(x - y, 0) = \|x - y\|_2$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

**Teorema de reducere a studiului convergenței unui șir din  $\mathbb{R}^n$  la convergența a  $n$  șiruri din  $\mathbb{R}$ .** Convergența în spațiul metric  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  este convergența pe componente. Mai precis, dacă  $(x_m = (x_{m,1}, \dots, x_{m,n}))_{m \in \mathbb{N}}$  este un șir de elemente din  $\mathbb{R}^n$  și  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  atunci  $x_m \xrightarrow{d_2} x$  dacă și numai dacă  $x_{m,i} \rightarrow x_i$  pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

*Demonstrație.*

Presupunem că  $x_m \xrightarrow{d_2} x$ . Atunci  $d_2(x_m, x) = \sqrt{(x_{m,1} - x_1)^2 + \dots + (x_{m,n} - x_n)^2}$ . Deoarece  $|x_{m,i} - x_i| \leq d_2(x_m, x)$  pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$ , din criteriul cleștelui, rezultă că  $x_{m,i} \rightarrow x_i$  pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Reciproc, presupunem că  $x_{m,i} \rightarrow x_i$  pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Rezultă că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $m_\varepsilon$  astfel încât  $|x_{m,i} - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{n}$  pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$  și  $m \geq m_\varepsilon$ . Atunci pentru un  $m \geq m_\varepsilon$  avem  $d_2(x_m, x) = \sqrt{(x_{m,1} - x_1)^2 + (x_{m,2} - x_2)^2 + \dots + (x_{m,n} - x_n)^2} \leq \sqrt{n \frac{\varepsilon^2}{n^2}} = \sqrt{n} \frac{\varepsilon}{n} < \varepsilon$ . Deci  $x_m \xrightarrow{d_2} x$ .

**Exerciții.**

- 1) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n^2+2}{3n^2-n+1}, e^{\frac{1}{n}}, n \ln(1 + \sin \frac{1}{n}))$ .

2) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2n}{3n-1}, (1 + \frac{1}{n})^{-2n}, \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}))$ .

Raspuns.

1)  $(\frac{1}{3}, 1, 1)$ .

2)  $(\frac{2}{3}, e^{-2}, 1)$ .

**Propoziție.** Un șir din spațiul metric  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  dacă și numai dacă este Cauchy pe componente. (Șirul  $(x_m = (x_{m,1}, \dots, x_{m,n}))_{m \in \mathbb{N}}$  este un șir Cauchy dacă și numai dacă șirurile  $(x_m)_{m, i \in \mathbb{N}}$  sunt Cauchy pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$ ).

**Teoremă.** Un șir mărginit din spațiul metric  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  are un subșir convergent.

*Demonstrație (în cazul  $n = 2$ ).*

Fie șirul  $(z_m = (x_m, y_m))_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ . Rezultă că șirul  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  este mărginit, deci are un subșir convergent  $(x_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$  la un  $x \in \mathbb{R}$ . Șirul  $(y_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$  este mărginit pentru că este un subșir al șirului mărginit  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ . Deci șirul  $(y_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$  are un subșir convergent  $(y_{m_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$  la un  $y \in \mathbb{R}$ . Rezultă că  $(z_{m_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$  converge la  $z = (x, y)$ .

**Teoremă.** Spațiul metric  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  este complet.

*Demonstrație.*

Fie  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  un șir Cauchy din  $\mathbb{R}^n$ . Rezultă că este mărginit deci are un subșir convergent. Orice șir Cauchy cu un subșir convergent este convergent.

## Norme

**Definiție.** O funcție  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se numește normă pe  $\mathbb{R}^n$  dacă satisface următoarele proprietăți:

- i)  $\|x\| \geq 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
- ii)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
- iii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}^n$  și orice  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- iv)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Perechea  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  se numește spațiu normat.

**Definiție.** Fie  $V$  un spațiu vectorial real. O funcție  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  se numește normă pe  $V$  dacă satisface următoarele proprietăți:

- i)  $\|x\| \geq 0$  pentru orice  $x \in V$ ;
- ii)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  pentru orice  $x \in V$ ;
- iii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  pentru orice  $x \in V$  și orice  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- iv)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  pentru orice  $x, y \in V$ .

Perechea  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  se numește spațiu normat.

**Definiție.** Unei norme  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  i se asociază o distanță  $d_{\|\cdot\|}(x, y) = \|x - y\|$ .

**Temă.** Verificați că  $d_{\|\cdot\|}$  este o distanță.

**Exemple.**

$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definite de

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

și

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

cu distanțele asociate

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

și

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}.$$

1)  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  și  $\|\cdot\|_\infty$  verifică relația

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}^n$ .

2) Pentru un șir  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  și  $x \in \mathbb{R}^n$  avem

$$\text{i) } x_m \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x \Leftrightarrow x_m \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x \Leftrightarrow x_m \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x$$

ii) Șirul  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  este Cauchy în  $\|\cdot\|_1$  dacă și numai dacă este Cauchy în  $\|\cdot\|_2$  dacă și numai dacă este Cauchy în  $\|\cdot\|_\infty$ .

iii) Șirul  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  este mărginit în  $\|\cdot\|_1$  dacă și numai dacă este mărginit în  $\|\cdot\|_2$  dacă și numai dacă este mărginit în  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Definiție.** Două norme  $\|\cdot\|, \|\cdot\|' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se numesc echivalente dacă există  $0 < \alpha < \beta$  astfel încât  $\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Observații.**

1) Dacă două norme sunt echivalente atunci șirurile convergente, Cauchy și mărginite în cele două norme coincid.

2) Dacă  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este o normă și  $x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{R}^n$  atunci

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \leq \|x_1 e_1\| + \dots + \|x_n e_n\| = |x_1| \|e_1\| + \dots + |x_n| \|e_n\| \leq \\ &\leq (|x_1| + \dots + |x_n|) \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_n\|\} = \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_n\|\} \|x\|_1. \end{aligned}$$

**Teoremă.** În  $\mathbb{R}^n$  orice două norme sunt echivalente.