Cuaternioni

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2023 - 2024

Problematizare - generalități

Când este considerată o clasă de transformări:

(i) de câte informații numerice este nevoie pentru a indica o transformare?

(ii) există o structură algebrică subiacentă?

1. Translații

1. Translații

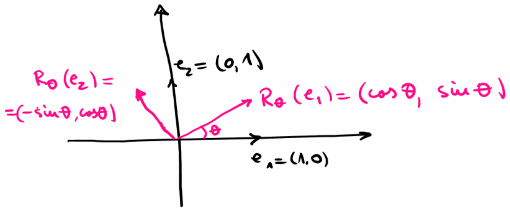
Context 2D, respectiv 3D :

- 2, respectiv 3 numere;
- $(\mathbb{R}^2, +)$, respectiv $(\mathbb{R}^3, +)$

2. Rotații 2D

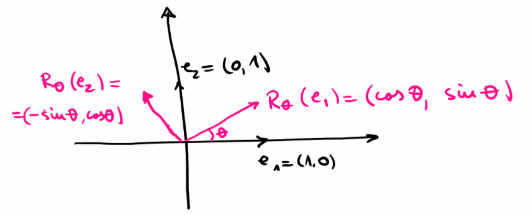
2. Rotații 2D

O rotație 2D (originea este presupusă punct fix) este complet caracterizată de **1** număr: unghiul rotației.



2. Rotații 2D

O rotație 2D (originea este presupusă punct fix) este complet caracterizată de **1** număr: unghiul rotației.



Avem

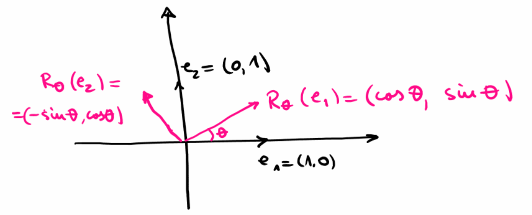
$$R_\theta(e_1) = (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta \cdot e_1 + \sin\theta \cdot e_2$$
$$R_\theta(e_2) = (-\sin\theta, \cos\theta) = -\sin\theta \cdot e_1 + \cos\theta \cdot e_2$$

Așadar, R_θ este complet caracterizată de matricea

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

2. Rotații 2D

O rotație 2D (originea este presupusă punct fix) este complet caracterizată de **1** număr: unghiul rotației.



Avem

$$R_\theta(e_1) = (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta \cdot e_1 + \sin\theta \cdot e_2$$
$$R_\theta(e_2) = (-\sin\theta, \cos\theta) = -\sin\theta \cdot e_1 + \cos\theta \cdot e_2$$

Așadar, R_θ este complet caracterizată de matricea

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Matricea R_θ verifică relația $R_\theta \cdot R_\theta^T = \mathbb{I}_2$.

2. Rotații 2D. De reținut

- pentru a indica o rotație 2D este necesară / suficientă o singură informație numerică,
- a descrie o rotație $\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow$ a indica modul în care este transformat un reper ortonormat în alt reper ortonormat păstrând orientarea $\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow$ a indica matricea de transformare între repere, în cazul 2D aceasta este de forma $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Definiții generale. Grupul ortogonal

Definiție (i) O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește **ortogonală** dacă $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n$.

Definiții generale. Grupul ortogonal

Definiție (i) O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește **ortogonală** dacă $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n$.

Definiție (ii) $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n\}$.

Definiții generale. Grupul ortogonal

Definiție (i) O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește **ortogonală** dacă $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n$.

Definiție (ii) $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n\}$.

Observații.

Definiții generale. Grupul ortogonal

Definiție (i) O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește **ortogonală** dacă $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n$.

Definiție (ii) $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n\}$.

Observații.

(a) $(O(n), \cdot)$ este grup: **grupul ortogonal de ordinul** n.

(b) $A \in O(n) \Rightarrow \det A \in \{\pm 1\}$, după cum păstrează sau schimbă orientarea, pentru $\det A = 1$, respectiv $\det A = -1$.

Definiții generale. Grupul ortogonal

Definiție (i) O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește **ortogonală** dacă $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n$.

Definiție (ii) $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n\}$.

Observații.

(a) $(O(n), \cdot)$ este grup: **grupul ortogonal de ordinul** n.

(b) $A \in O(n) \Rightarrow \det A \in \{\pm 1\}$, după cum păstrează sau schimbă orientarea, pentru $\det A = 1$, respectiv $\det A = -1$.

Definiție (iii) $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$. Se numește **grupul special ortogonal de ordinul** n.

Definiții generale. Grupul ortogonal

Definiție (i) O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește **ortogonală** dacă $A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n$.

Definiție (ii) $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbb{I}_n\}$.

Observații.

(a) $(O(n), \cdot)$ este grup: **grupul ortogonal de ordinul** n.

(b) $A \in O(n) \Rightarrow \det A \in \{\pm 1\}$, după cum păstrează sau schimbă orientarea, pentru $\det A = 1$, respectiv $\det A = -1$.

Definiție (iii) $SO(n) = \{A \in O(n) \,|\, \det A = 1\}$. Se numește **grupul special ortogonal de ordinul** n.

Observații.

(c) $SO(n)$ este subgrup al lui $O(n)$.

2. Rotații 2D și grupul $\mathrm{SO}(2)$

- Am văzut că unei rotații R_θ de unghi θ îi corespunde o matrice M_{R_θ} din $SO(2)$.

2. Rotații 2D și grupul $\mathrm{SO}(2)$

- Am văzut că unei rotații R_θ de unghi θ îi corespunde o matrice M_{R_θ} din $SO(2)$.
- Și reciproc este adevărat: se poate arăta că orice matrice $A \in SO(2)$ corespunde unei rotații de unghi convenabil.

2. Rotații 2D și grupul SO(2)

- Am văzut că unei rotații R_θ de unghi θ îi corespunde o matrice M_{R_θ} din $SO(2)$.
- Și reciproc este adevărat: se poate arăta că orice matrice $A \in SO(2)$ corespunde unei rotații de unghi convenabil.
- Grupul $\mathcal{R}_{2D}$ al rotațiilor 2D este izomorf cu un grup de matrice

$$(\mathcal{R}_{2D}, \circ) \simeq (SO(2), \cdot).$$

2. Rotații 2D și numere complexe

- Rotațiile 2D pot fi interpretate cu ajutorul numerelor complexe:

$$(\cos\theta, \sin\theta) \equiv \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

2. Rotații 2D și numere complexe

- Rotațiile 2D pot fi interpretate cu ajutorul numerelor complexe:

$$(\cos\theta, \sin\theta) \equiv \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

- **Cercul / sfera 1-dimensională**

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

2. Rotații 2D și numere complexe

- Rotațiile 2D pot fi interpretate cu ajutorul numerelor complexe:

$$(\cos\theta, \sin\theta) \equiv \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

- **Cercul / sfera 1-dimensională**

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

- $(S^1, \cdot)$ este grup.

2. Rotații 2D și numere complexe

- Rotațiile 2D pot fi interpretate cu ajutorul numerelor complexe:

$$(\cos\theta, \sin\theta) \equiv \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

- **Cercul / sfera 1-dimensională**

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

- $(S^1, \cdot)$ este grup.
- Avem izomorfisme naturale

$$(\mathcal{R}_{2D}, \circ) \simeq (SO(2), \cdot) \simeq (S^1, \cdot).$$

$$R_\theta \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \leftrightarrow \cos\theta + i\sin\theta.$$

Remember: corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe

Construcție: Se consideră mulțimea $\mathbb{R}^2$, înzestrată cu două operații:

"+": $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$

"·": $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$

În raport cu cele două operații se obține un corp comutativ.

Remember: corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe

Construcție: Se consideră mulțimea $\mathbb{R}^2$, înzestrată cu două operații:

"+": $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$

"·": $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$

În raport cu cele două operații se obține un corp comutativ.

Notații:

$$1 \equiv (1, 0), \qquad i \equiv (0, 1)$$

și folosind aceste notații orice pereche (a, b) se reprezintă sub forma $a + ib$.

Are loc relația fundamentală $i^2 = -1$.

Corpul $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Remember: corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe

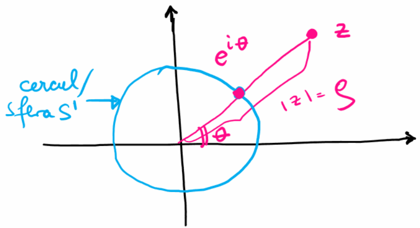
Proprietăți și notații

(i) Pentru $z = a + ib \in \mathbb{C}$, modulul lui z este $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

(ii) Dacă $z = a + ib \neq 0$, are loc relația $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, unde $\bar{z} = a - ib$ este conjugatul lui z

(iii) Orice număr complex $z \neq 0$ se scrie în mod unic sub forma

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}, \qquad \rho = |z|.$$



3. Rotații 3D - generalități

Observație 1.

A indica o rotație 3D $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ a indica o schimbare de repere ortonormate cu păstrarea orientării

$\Leftrightarrow$ a indica o matrice din grupul $\mathrm{SO}(3)$

De fapt

$$(\mathcal{R}_{3D}, \circ) \simeq (\mathrm{SO}(3), \cdot).$$

3. Rotații 3D - generalități

Observație 1.

A indica o rotație 3D $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ a indica o schimbare de repere ortonormate cu păstrarea orientării

$\Leftrightarrow$ a indica o matrice din grupul $\mathrm{SO}(3)$

De fapt

$$(\mathcal{R}_{3D}, \circ) \simeq (\mathrm{SO}(3), \cdot).$$

Observație 2.

Orice matrice $A \in \mathrm{SO}(3)$ (i.e. orice rotație în context 3D) admite **o valoare proprie reală** și **un vector propriu (axă a rotației)** . De asemenea, rotația este caracterizată de **un unghi**, măsurat în planul perpendicular pe axă. Pentru rotația de unghi θ și axă $(v1, v2, v3)$:

$$\mathtt{glm} :: \mathtt{rotate}(\theta, \mathtt{vec3}(\mathtt{v1}, \mathtt{v2}, \mathtt{v3}))$$

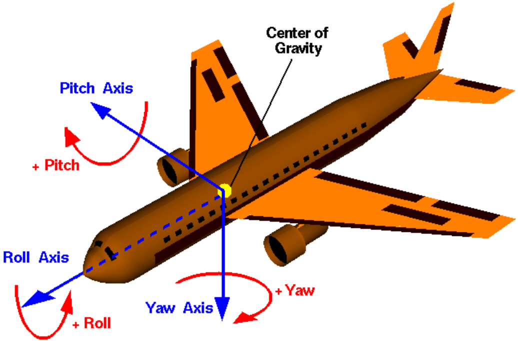
3. Rotații 3D - problematizare: structura grupului $\mathrm{SO}(3)$

Două posibilități:

– folosind unghiurile lui Euler

– folosind cuaternioni

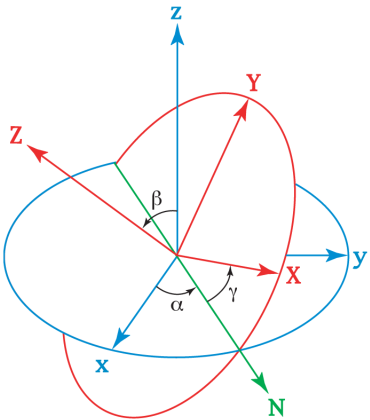
3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: intuiție



Sursa: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/Rollpitchyawplain.png

Altă reprezentare:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/85/Euler2a.gif

3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: intuiție



Sursa: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/82/Euler.png

3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: formalizare

Exemplu: Rotația de unghi θ în jurul axei Oy are matricea asociată

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Altfel spus, considerând axa Oy, elementului $\theta \in S^1$ i se asociază matricea $M_{Oy,\theta} \in \mathrm{SO}(3)$.

3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: formalizare

Exemplu: Rotația de unghi θ în jurul axei Oy are matricea asociată

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Altfel spus, considerând axa Oy, elementului $\theta \in S^1$ i se asociază matricea $M_{Oy,\theta} \in \mathrm{SO}(3)$.

Observație: Există o aplicație

$$S^1 \times S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$$

ce se obține utilizând rotațiile în jurul axelor de coordonate.

3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: formalizare

Exemplu: Rotația de unghi θ în jurul axei Oy are matricea asociată

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Altfel spus, considerând axa Oy, elementului $\theta \in S^1$ i se asociază matricea $M_{Oy,\theta} \in \mathrm{SO}(3)$.

Observație: Există o aplicație

$$S^1 \times S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$$

ce se obține utilizând rotațiile în jurul axelor de coordonate.

Fapt: Orice matrice din $\mathrm{SO}(3)$ poate fi obținută ca produs al unor rotații (3) în jurul axelor de coordonate, cu unghiuri alese convenabil (unghiurile lui Euler).

3. Rotații 3D - unghiurile lui Euler: *Gimbal Lock*

Ilustrare *Gimbal Lock*

<u>Exemplu</u> $R(\alpha, (1,0,0))$ (rotație de unghi α și axă $(1,0,0)$)

$$R\left(\frac{\pi}{2}, (0,1,0)\right)$$

$$R(\gamma, (0,0,1))$$

compunere (scriem matrice, înmulțim ...) $\longrightarrow$

matricea $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha+\gamma) & \cos(\alpha+\gamma) & 0 \\ -\cos(\alpha+\gamma) & \sin(\alpha+\gamma) & 0 \end{pmatrix}$ "se pierde o libertate de mișcare"

$\rightarrow$ legată de propr. aplicației $S^1 \times S^1 \times S^1 \rightarrow SO(3)$

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

$$\mathbb{R}^4 = \{(s, a, b, c) \mid s, a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$\wr\wr$$

$$\mathbb{H} = \{\underbrace{s}_{\text{"partea reală"}} + \underbrace{ai + bj + ck}_{\text{"partea imaginară"}} \mid s, a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

i, j, k verifică
$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ i \cdot j = -j \cdot i = k \\ j \cdot k = -k \cdot j = i \\ k \cdot i = -i \cdot k = j \end{cases}$$

Pe $\mathbb{H}$ se definesc: $\begin{cases} \text{"+"} : \text{pe componente} \\ \text{"}\cdot\text{"} : \text{indusă de regulile de mai sus} \end{cases}$

Fapt: $\boxed{(\mathbb{H}, +, \cdot) \quad \text{corp necomutativ}}$

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Observație. Fie

$$\mathcal{H} = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid M = s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ s, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Au loc relațiile

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De fapt, $(\mathcal{H}, +, \cdot) \simeq (\mathbb{H}, +, \cdot)$.

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Notație. Fie $q = s + ai + bj + ck = (s, \mathbf{v})$,
unde $\mathbf{v} = (a, b, c)$

Cu această notație:

(i) înmulțirea este

$$q \cdot q' = (s \cdot s - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}', \ s \cdot \mathbf{v}' + s' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}')$$

(ii) $|q|^2 = s^2 + \|\mathbf{v}\|^2$

(iii) Ptr $q \neq 0$. $q^{-1} = \dfrac{\bar{q}}{|q|^2}$, $\bar{q} = (s, -\mathbf{v})$

Notație $S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$.

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Propoziție. (legătura dintre rotații 3D și cuaternioni)

(i) Fie rotația 3D având axa dată de versorul u și unghiul θ. Fie cuaternionul $q \in S^3$ dat de

$$q = (s, \mathrm{v}), \qquad \begin{cases} s = \cos\frac{\theta}{2} \in \mathbb{R} \\ \mathrm{v} = \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{u} \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Fie $P \in \mathbb{R}^3$ și P' punctul obținut aplicând rotația de unghi θ și axă u lui P, adică

$$P' = R_{\mathrm{u},\theta}(P).$$

Atunci în $\mathbb{H}$ are loc relația

$$(0, P') = q \cdot (0, P) \cdot q^{-1}.$$

Altfel spus, pentru a determina P' efectuăm în $\mathbb{H}$ calculul $q \cdot (0, P) \cdot q^{-1}$ și rezultatul ne va conduce la cuaternionul $(0, P')$.

(ii) Fie $q = s + ai + bj + cK \in S^3$ un cuaternion de normă 1. El corespunde unei rotații având matricea 3×3

$$\begin{pmatrix} s^2 + a^2 - b^2 - c^2 & 2ab - 2sc & 2ac + 2sb \\ 2ab + 2sc & s^2 - a^2 + b^2 - c^2 & 2bc - 2sa \\ 2ac - 2sb & 2bc + 2sa & s^2 - a^2 - b^2 + c^2 \end{pmatrix}.$$

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Exemplul 1. Considerăm rotația $R_{\mathrm{u},\theta}$ dată de vectorul $\mathrm{u} = (0,0,1)$ și de unghi $\theta = \frac{\pi}{2} (= 90^\circ)$. Avem $R_{\mathrm{u},\theta}(1,0,0) = (0,1,0)$. Interpretarea acestei relații folosind cuaternioni este următoarea.

(i) Vectorul u corespunde, de fapt, cuaternionului k. Conform propoziției anterioare, rotației $R_{\mathrm{u},\theta}$ i se asociază cuaternionul

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\mathrm{u} = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}k.$$

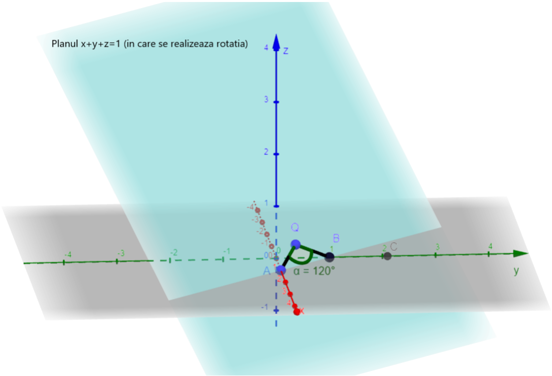
Atunci:

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k, \quad q^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}k.$$

(ii) Punctele $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ corespund respectiv cuaternionilor i,j,k, deci $R_{\mathrm{u},\theta}(1,0,0) = (0,1,0)$ se rescrie $R_{\mathrm{u},\theta}(i) = j$. Se poate verifica faptul că are loc relația $(0,j) = q\cdot(0,i)\cdot q^{-1}$ (altfel spus $j = q\cdot i\cdot q^{-1}$, sau, echivalent, $j\cdot q = q\cdot i$). Aceasta este exact rescrierea din propoziția anterioară (cu $P = (1,0,0) \equiv i, P' = (0,1,0) \equiv j$).

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Exemplul 2. Considerăm rotația $R_{u,\theta}$ dată de vectorul $u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ și de unghi $\theta = \frac{2\pi}{3} (= 120^\circ)$. De exemplu, avem $R_{u,\theta}(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$ (în figură $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$) - rotația de la A la B are loc în planul $x + y + z = 1$ (perpendicular pe axa u a rotației). Punctul $Q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ este fix. Practic are o rotație a lui QA către QB, unghiul fiind de 120°.



3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Exemplul 2 (continuare). Considerăm rotația $R_{u,\theta}$ dată de vectorul $u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ și de unghi $\theta = \frac{2\pi}{3} (= 120^\circ)$. Avem $R_{u,\theta}(1,0,0) = (0,1,0)$. Interpretarea acestei relații folosind cuaternioni este următoarea.

(i) Vectorul u se scrie cu cuaternioni $u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k$. Conform propoziției anterioare, rotației $R_{u,\theta}$ i se asociază cuaternionul

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}u = \cos\frac{2\pi}{6} + \sin\frac{2\pi}{6}(\frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k) = \ldots.$$

Prin calcul, se deduce

$$q = \frac{1}{2}(1 + i + j + k), \quad q^{-1} = \frac{1}{2}(1 - i - j - k).$$

(ii) Punctele $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ corespund respectiv cuaternionilor i, j, k, deci $R_{u,\theta}(1,0,0) = (0,1,0)$ se rescrie $R_{u,\theta}(i) = j$. Se poate verifica faptul că are loc relația $(0,j) = q \cdot (0,i) \cdot q^{-1}$, care este exact rescrierea din propoziția anterioară (cu $P = (1,0,0) \equiv i, P' = (0,1,0) \equiv j$).

3. Rotații 3D - reprezentare folosind cuaternioni

Alte detalii teoretice și despre implementare:

K. Shoemake, Quaternions

https://www.cprogramming.com/tutorial/3d/quaternions.html