09.01.2023

Curs 13

- P&S -

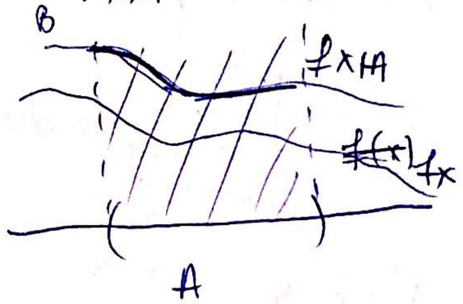
$f_{X,Y}(x,y)$ - densitatea comună

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

$$f_{X|A}(x) = \frac{f_X(x)}{P(X\in A)} \qquad P(X\in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)\,dx,\ \forall B$$

$f_{X|Y}(x,y)$



$\downarrow$

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Formula probabilității totale:

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{X|A_i}(x)\,P(A_i)$$

a) Y este o v.a. discretă $\{y_1, \dots, y_m\}$

X v.a. cont f_X

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{m} f_{X|Y}(x|y_i)\,P(Y=y_i)$$

b) Y v.a cont cu densitatea f_Y $\Rightarrow f_X(x) = \int f_{X|Y}(x|y)\,f_Y(y)\,dy$

X v.a cont — " — " f_X

Independența v.a.

$X \perp Y$ (X, Y independente)

$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$, $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}$

$A = (-\infty, x]$, $B = (-\infty, y] \Rightarrow \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) =$

$= \mathbb{P}(X \leq x) \cdot \mathbb{P}(Y \leq y)$, $\forall x, y$.

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv$$

/derivăm după y și x SAU x și y.

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}\,dv\,du = \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \frac{\partial}{\partial y}\int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} \dots\right)$$

$$\boxed{f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)}$$

Propoziția 1:

Dacă X și Y v.a. cu densitățile f_X și respectiv f_Y.

Atunci $X \perp Y \Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

Propoziția 2:

Fie X, Y două v.a și g și h două funcții

Dacă $f_{X,Y}(x,y) = g(x) h(y)$, $\forall x, y$ atunci $X \perp Y$

Propoziție 3:

Dacă X și Y sunt v.a. independente atunci

$$E[g(x)h(y)] = E[g(x)]E[h(y)]$$

! **Observație!**

Dacă $g(x) = x$ și $h(y) = y$ atunci

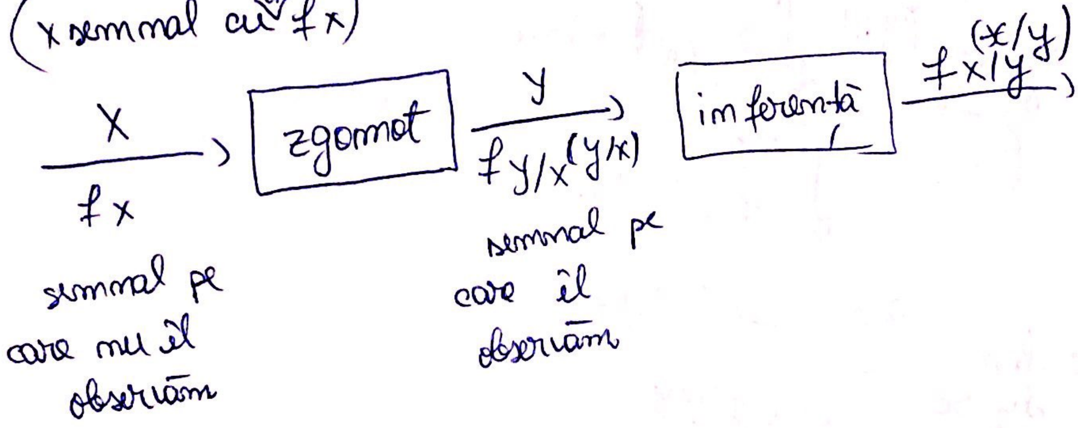
$$E[xy] = E[x] \cdot E[y].$$

$$Var(x+y) = Var(x) + Var(y)$$

Formula lui Bayes

X, Y două v.a. continue

(X semnal cu dens. f_X)



$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X/Y}(x/y) f_Y(y)$$

$$= f_{Y/X}(y/x) f_X(x)$$

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y/X}(y/x) f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y/X}(y/x) f_X(x)}{\int f_{Y/X}(y/x') f_X(x') dx'}$$

↳ marginala la Y

baz hibrid:

$$\{0,1\} \xrightarrow[B]{} \boxed{\text{zgomot}} \xrightarrow{Y} \boxed{\text{inferență}} \; \mathbb{P}(A/Y=y) \rightarrow$$

$+\mathcal{N}(0,1)$ $\quad \mathbb{P}(A \setminus Y=y)$

$\parallel$

$$\cancel{\mathbb{P}(A/Y=y)} \quad = \lim_{dy \to 0} \mathbb{P}(A / Y \in (y, y+dy))$$

$$\left(y - \frac{dy}{2}, y + \frac{dy}{2}\right)$$

$$= \lim_{dy \to 0} \frac{\mathbb{P}(A \cap Y \in (y, y+dy))}{\mathbb{P}(Y \in (y, y+dy))}$$

$$= \lim_{dy \to 0} \frac{\mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(Y \in (y, y+dy) / A)}{\mathbb{P}(Y \in (y, y+dy))}$$

$$= \lim_{dy \to 0} \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \int_y^{y+dy} f_{Y/A}(u)\,du}{\int_y^{y+dy} f_Y(u)\,du}$$

$$= \lim_{dy \to 0} \frac{\mathbb{P}(A)\, f_{Y/A}(y)\,\cancel{dy}}{f_Y(y)\,\cancel{dy}}$$

$\cancel{\mathbb{P}(A/A}$

$$\mathbb{P}(A/Y=y) = \frac{\mathbb{P}(A)\, f_{Y/A}(y)}{f_Y(y)}$$

$$\hookrightarrow f_{Y/A}(y)\,\mathbb{P}(A) + f_{Y/A^c}(y) \cdot \mathbb{P}(A^c)$$

Scanned with CamScanner

Formula prob. totale

X / Y	discret	cont
discret	$\mathbb{P}(X=x) = \sum_{y} \mathbb{P}(X=x / Y=y) \cdot \mathbb{P}(Y=y)$	$\mathbb{P}(X=x) = \int \mathbb{P}(X=x / Y=y) \cdot f_Y(y) dy$
cont	$f_X(x) = \sum_{y} f_{X/Y}(x/y)\, \mathbb{P}(Y=y)$	$f_X(x) = \int f_{X/Y}(x/y)\, f_Y(y) dy$

VS

Formula lui Bayes

X / Y	discret	cont
discret	$\mathbb{P}(Y=y / X=x) = \frac{\mathbb{P}(X=x / Y=y)\mathbb{P}(Y=y)}{\mathbb{P}(X=x)}$	$f_{Y/X}(y/x) = \frac{\mathbb{P}(X=x / Y=y)\, f_Y(y)}{\mathbb{P}(X=x)}$
cont	$\mathbb{P}(Y=y / X=x) = \frac{f_{X,Y}(x/y)\, \mathbb{P}(Y=y)}{f_X(x)}$	$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{X,Y}(x/y)\, f_Y(y)}{f_X(x)}$

! Ex: Fie A și B 2 firme

durata de viață A $\quad Exp(\lambda_0)$

— " — " B $\quad Exp(\lambda_1)$

Pp. că primim un telefon de la A cu prob. p_0 și de la B cu $p_1 = 1-p_0$

Fie T durata de viață a telefonului primit.

a) fct. de repartiție și densitatea lui T

b) Vrem să găsim prob. ca tel. să fi provenit de la B știind că $T=t$.

T v.a. cont.

Fie I v.a. $= \begin{cases} 0, & \text{dacă tel} \in A \\ 1, & \text{dacă tel} \in B \end{cases}$

$\mathbb{P}(I=0) = p_0$

$\mathbb{P}(I=1) = p_1 = 1-p_0.$

$T/I=0 \sim Exp(\lambda_0)$

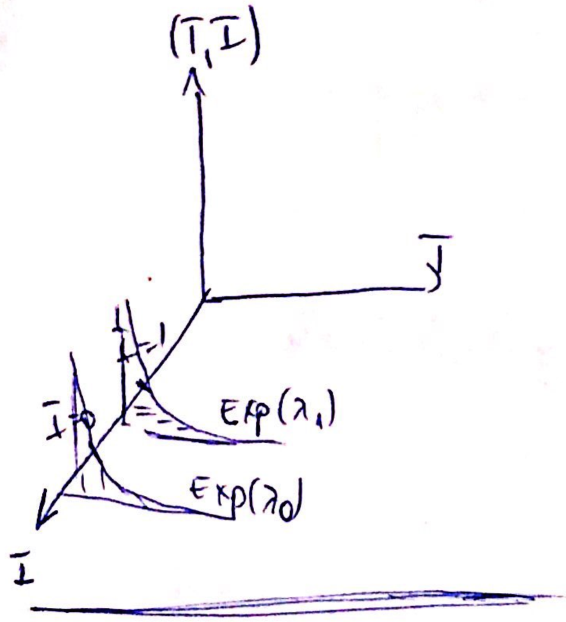
$T/I=1 \sim Exp(\lambda_1)$

$$\mathbb{P}(T\le t) = \underbrace{\mathbb{P}(T\le t / I=0)}_{(1-e^{-\lambda_0 t})}\underbrace{\mathbb{P}(I=0)}_{p_0} + \underbrace{\mathbb{P}(T\le t / I=1)}_{(1-e^{-\lambda_1 t})}\cdot\underbrace{\mathbb{P}(I=1)}_{1-p_0}$$

$\boxed{\begin{aligned} Exp(\lambda): f(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \\ F(x) &= 1-e^{-\lambda x}\end{aligned}}$

$$= (1-e^{-\lambda_0 t})\cdot p_0 + (1-e^{\lambda_1 t})\cdot(1-p_0)$$

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(1) = \lambda_0 \cdot e^{-\lambda_0 t} p_0 + \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \cdot (1-p_0), t>0$$



b) $$\mathbb{P}(I=1 \mid T=t) = \frac{f_{T|I}(t|1) \cdot \mathbb{P}(I=1)}{f_T(t)}$$

$$= \frac{\lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 t}(1-p_0)}{\lambda_0 \cdot e^{-\lambda_0 t} p_0 + \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}(1-p_0)}$$

Media unei funcții de v.a.

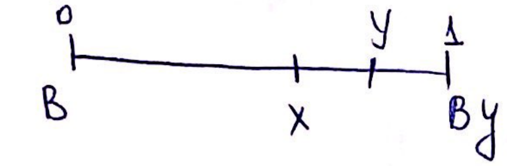
X, Y două v.a. $f_{X,Y}(x,y)$ și $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\mathbb{E}[g(X,Y)] = \iint g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy}$$

→ medie

În particular, $\mathbb{E}[XY] = \iint xy\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

Exp:



$X, Y \sim U[0,1)$ indep.

$$\mathbb{E}[|X-Y|] = \iint |x-y|\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$\mathbb{E}[|X-Y|] = \iint |x-y|\, \mathbb{1}_{[0,1)}(x) \cdot \mathbb{1}_{[0,1)}(y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_y^1 (x-y)\,dx\,dy + \int_0^1 \int_0^y (y-x)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{2} - yx \Big|_y^1 dy + \int_0^1 yx - \frac{x^2}{2} \Big|_0^y dy = \frac{1}{3}$$

Media condiționată

X v.a cont și fie un ev. $\mathbb{P}(A) > 0$

$$\mathbb{E}[X/A] = \int x f_{X/A}(x)dx$$

Dacă $A = \{Y = y\}$

$$\mathbb{E}[X/Y=y] = \int x f_{X/Y}(x/y)\,dx$$

Formula probabilității totale

$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{X/A_i}(x)\mathbb{P}(A_i) \,/ \cdot x$, apoi integrăm

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X/A_i]\mathbb{P}(A_i)}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \int \mathbb{E}[X/Y=y] f_Y(y)\,dy}$$

Definiție: Fie $g(y) = \mathbb{E}[X/Y=y]$. Atunci $\overset{v.a.}{\mathbb{E}[X/Y]} = g(Y)$

Proprietăți:

i) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$

~~ii) Var(E[X|Y]) =~~

Examen. -

$$Var(X) = Var(\mathbb{E}[X|Y]) + \mathbb{E}[Var(X|Y)]$$

n clienți

fiecare din n cl. achită o sumă $X_1, X_2, \dots X_n$ u.m.

? O zi dată

totalul/media câștigului

$T = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ $\qquad \mathbb{E}[X_1]\,\mathbb{E}[N]$

zi 1: ω_1 $\quad N(\omega_1) = 10$

$T(\omega_1) = X_1^{(\omega_1)} + \dots + X_{10}^{(\omega_1)}$

$\mathbb{E}[T] =$

Covarianța și corelație

! **Def.** Fie X și Y două v.a. . S.n. covarianța dintre X și Y

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$$

În particular, $X=Y \Rightarrow Cov(X,X) = Var(X)$

~~P Cov~~

! **Prop:** $\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}$!!

! **Def.** Spunem că v.a. X și Y sunt necorelate dacă

$Cov(X,Y) = 0$

Altfel spus, dacă $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]$.

! **Obs!** Dacă $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow$ X și Y sunt necorelate.

Exp!

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(0,1) \\ Y = X^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y] = 0 \\ \mathbb{E}[X\cdot Y] = \mathbb{E}[X^3] = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ X și Y sunt necorelate

X și Y nu sunt indep!

Proprietăți:

a) $Cov(X,X) = Var(X)$

b) $Cov(X, a) = 0$, a - constantă

c) $Cov(a + bX, Y) = b\,Cov(X,Y)$, a, b - const.

d) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$ (simetricat).

e) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$.

$$Var(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$$

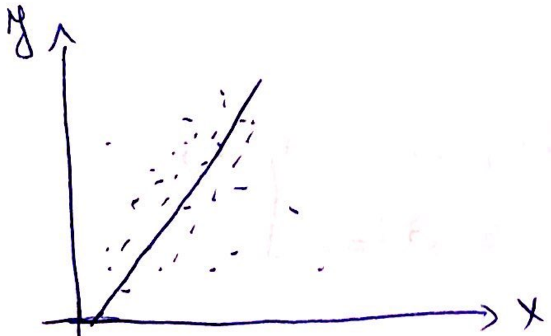
f) $Cov(X+Y, Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z)$

Corelație

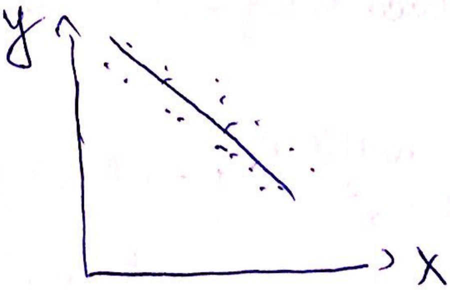
! Def: Fie X și Y două v.a. și definim coeficientul de corelație dintre X și Y

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

nr.



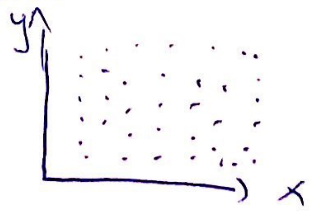
$\rho > 0$



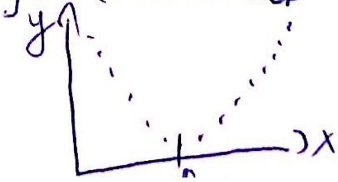
$\rho < 0$

Una ↗, alta ↘.

Caz $\rho = 0$ (indep)



$\rho = 0$ (necorelate)



Prop

$\rho \in [-1,1]$. Dacă $\rho = 1$ (sau -1) atunci $X = a + bY$ ($Y = a + bX$) a.s (aproape sigur)

$\mathbb{P}(X = a + bY) = 1$.

Dem: X, Y $\quad \mathbb{E}[X] = \mu_X$, $Var(X) = \sigma_X^2$,

$\mathbb{E}[Y] = \mu_Y$, $Var(Y) = \sigma_Y^2$

Pp. $\mu_X = \mu_Y = 0$ și $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$.

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} = \frac{\mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

$$\mathbb{E}\underbrace{\left[\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]}_{\text{v.a. normalizate}}$$

Dacă $\mu_X = \mu_Y = 0 \Rightarrow \rho(X,Y) = \mathbb{E}[XY]$.

Știm că $\mathbb{E}[(X + \lambda Y)^2] \geq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. (p.t. că ≥ 0)

$$\lambda^2 \mathbb{E}[Y^2] + 2\lambda \mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[X^2] \geq 0, \forall \lambda$$

$$\Delta = 4\mathbb{E}[XY]^2 - 4\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] \leq 0.$$

$\nearrow$ Ineg. Cauchy–Schwartz

$$\Delta \le 0 \Rightarrow \mathbb{E}[XY]^2 \le \mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[XY] \le 1 \Rightarrow \rho(X,Y)^2 \le 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\rho(X,Y)| \le 1$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$$

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \frac{1}{n} & & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ \frac{1}{n} & & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Inegalități și teoreme limită

Teoremă (Ineg. Cauchy–Schwartz)

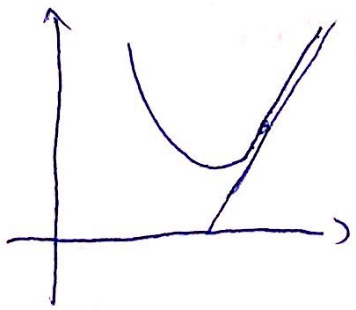
Fie X și Y v.a. cu $Var(X) < \infty$ și $Var(Y) < \infty$. Atunci:

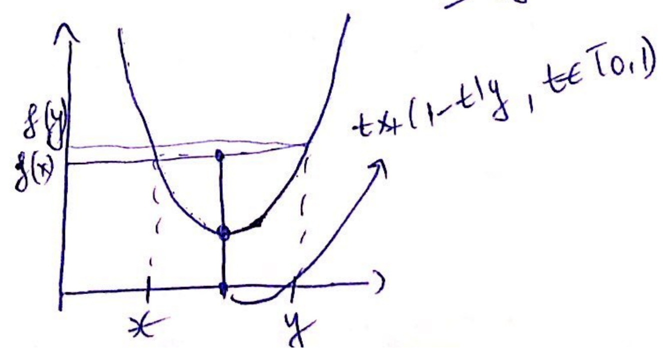
$$|\mathbb{E}[XY]| \le \sqrt{\mathbb{E}[X^2] \cdot \mathbb{E}[Y^2]}$$

Inegalitatea lui Jensen

(a) Fct. convexă

$$f(tx+(1-t)y) \le$$
$$\le t f(x) + (1-t) f(y)$$





Fct. concavă: $\forall x, y$, $\forall t \in [0,1]$

$$f(tx + (1-t)y) \geq t f(x) + (1-t) f(y)$$

T (Ineg. Jensen)

Fie X v.a. și g o fct. convexă.

Atunci:

$$\mathbb{E}[g(X)] \geq g(\mathbb{E}[X])$$

Dacă g este concavă:

$$\mathbb{E}[g(X)] \leq g(\mathbb{E}[X])$$

! Obs: $var(X) \geq 0$

$$\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2$$

(T) Ineg. Markov

Fie X v.a. pozitivă. Atunci:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

Dem: $Y = \begin{cases} 0, & X < a \\ a, & X \geq a \end{cases}$

$\mathbb{E}[Y] = a \cdot \mathbb{P}(X \geq a)$

$Y \leq X \Rightarrow \mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X]$.

! Exp: $X \sim \mathcal{U}([0,1])$.

$\mathbb{P}(X > 2) \leq \frac{1}{4}$ $\quad \mathbb{P}(X \geq \frac{1}{2}) \leq 1$.

$\mathbb{P}(X \geq 1) = \frac{1}{2}$

Prop. (Inegalitatea Chebyshev)

Fie X v.a. $\mathbb{E}[X] = \mu < \infty$

$Var(X) = \sigma^2 < \infty$

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{var(X)}{a^2}, \forall a > 0.$$

$Y = (X-\mu)^2$

$$\mathbb{P}(Y \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{a^2} = \frac{Var(X)}{a^2}$$

!Obs! $a = k\sigma$

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Prop. Ineg. Chernoff.

Fie v.a. X, $a > 0$, $t > 0$.

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}}, \forall a, t$$