Logică pentru cunoaștere

Cursul opțional Elemente de securitate și logică aplicată,

Anul 3, Semestrul 2, 2024

Laurențiu Leuștean

Web page: http://cs.unibuc.ro/~lleustean/

Logici pentru cunoaștere

Domeniul logicilor pentru cunoaștere a fost inițiat cu publicarea, în 1962, a cărții
Jaakko Hintikka, Knowledge and Belief. An Introduction to the Logic of the Two Notions, Cornell University Press, 1962.

- Logicile pentru cunoaștere se numesc și logici epistemice.
- Sunt logici modale, al căror limbaj conține, pe lângă conectivele propoziționale, și operatori modali.
- Se folosește semantica lumilor posibile.
- Cunoașterea unui agent este caracterizată folosind o mulțime de lumi posibile (numite de Hintikka alternative epistemice), cu o relație de accesibilitate între ele.
- Ceva adevărat în toate alternativele epistemice ale agentului nostru e considerat ca fiind cunoscut de agent.

Logici pentru cunoaștere

- Au fost dezvoltate în informatică pentru a raționa despre sisteme multiagent.
- Un sistem multiagent este o colecție de agenți care interacționează.
- Sunt folosite pentru a demonstra proprietăți ale acestor sisteme, pentru a reprezenta și raționa despre informația pe care agenții o posedă: cunoașterea lor.

Cartea de referință

Ronald Fagin, Joseph Halpern, Yoram Moses, Moshe Vardi, Reasoning about Knowledge, MIT Press, 1995

LOGICI MODALE

Definiția 2.1

Limbajul modal de bază ML_0 este format din:

- *o mulțime PROP de propoziții atomice sau variabile propoziționale (notate $p, q, r, v, \ldots$);*
- *conectorii propoziționali: $\neg$, $\rightarrow$;*
- *parantezele: (,);*
- *operatorul modal $\Box$ (se citește cutie).*

Mulțimea $Sim(ML_0)$ a simbolurilor lui ML_0 este

$$Sim(ML_0) := PROP \cup \{\neg, \rightarrow, (,), \Box\}.$$

Expresiile lui ML_0 sunt șirurile finite de simboluri ale lui ML_0.

Definiția 2.2

Formulele limbajului modal de bază ML_0 sunt expresiile definite astfel:

(F0) *Orice variabilă propozițională este formulă.*

(F1) *Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.*

(F2) *Daca φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \to \psi)$ este formulă.*

(F3) *Dacă φ este formulă, atunci $(\Box\varphi)$ este formulă.*

(F4) *Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3) sunt formule.*

Observația 2.3

Formulele lui ML_0 sunt definite, folosind notația Backus-Naur, astfel:

$$\varphi ::= p \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \to \psi) \mid (\Box\varphi), \quad \textit{unde } p \in PROP.$$

Limbajul modal de bază

- În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Scriem $\neg\varphi$, $\varphi \to \psi$, $\Box\varphi$.
- Operatorul modal $\Box$ are precedență mai mare decât conectorii propoziționali.
- $\neg$ are precedență mai mare decât $\to$.

Conectorii propoziționali $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ și constantele $\top$ (adevărul), $\bot$ (falsul) sunt definiți ca în logica propozițională clasică:

$$\varphi \vee \psi := \neg\varphi \to \psi \qquad \varphi \wedge \psi := \neg(\varphi \to \neg\psi)$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \qquad \top := p \to p, \quad \bot := \neg\top.$$

Operatorul modal dual

Dualul lui $\Box$ se notează $\Diamond$ (se citește diamant) și se definește astfel:

$$\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi.$$

Logica modală clasică

În logica modală clasică, $\Box\varphi$ este citit ca este necesar φ . Atunci $\Diamond\varphi$ înseamnă nu este necesar ca non φ, adică este posibil ca φ.

Exemple de formule pe care le putem privi ca principii corecte includ:

- $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ (ce este necesar este și posibil)
- $\varphi \to \Diamond\varphi$ (ce este, este posibil).

Ce putem spune despre formule ca $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ (ce este, este necesar posibil) sau $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ (ce este posibil, este necesar posibil)? Pot fi ele privite ca adevăruri generale? Pentru a da un răspuns la astfel de întrebări trebuie să definim o semantică pentru logica modală clasică.

Logica epistemică

În logica epistemică, limbajul modal de bază este folosit pentru a raționa despre cunoaștere. În această logică,

$\Box\varphi$ se citește agentul știe că φ.

Se scrie $K\varphi$ în loc de $\Box\varphi$.

Deoarece discutăm despre cunoaștere, este natural să considerăm că este adevărată formula

$K\varphi \to \varphi$ (dacă agentul știe că φ, atunci φ trebuie să aibă loc)

Presupunând că agentul nu este atotștiutor, formula $\varphi \to K\varphi$ ar trebui să fie falsă.

Semantica

Structuri relaționale

Definiția 2.4

O structură relațională este un tuplu $\mathcal{F}$ format din:

- *o mulțime nevidă W, numită universul (sau domeniul) lui $\mathcal{F}$;*
- *o mulțime de relații pe W.*

Presupunem că fiecare structură relațională conține cel puțin o relație. Elementele lui W se numesc stări, lumi, puncte, noduri, timpi, instanțe sau situații.

Exemplul 2.5

- $\mathcal{F} = (W, R)$, unde R este o relaţie de ordine parţială pe W (adică o relaţie binară pe W care este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă).
- $\mathcal{F} = (W, R)$, unde R este o relaţie de echivalenţă pe W (adică o relaţie binară pe W care este reflexivă, simetrică şi tranzitivă).

Structuri relaționale

Sistemele de tranziții etichetate (*Labeled Transition Systems*), sau, mai simplu, sistemele de tranziții, sunt structuri relaționale simple, foarte folosite în informatică.

Definiția 2.6

Un sistem de tranziții este o pereche $(W, \{R_a \mid a \in A\})$, unde W este o mulțime nevidă de stări, A este o mulțime nevidă de etichete și, pentru fiecare $a \in A$, $R_a \subseteq W \times W$ este o relație binară pe W.

Sistemele de tranziții pot fi văzute ca modele abstracte de calcul: stările sunt stările posibile ale unui calculator, etichetele sunt programe și $(u, v) \in R_a$ înseamnă că există o execuție a programului a care începe în starea u și se termină în starea v.

Structuri relaționale

Fie W o mulțime nevidă și $R \subseteq W \times W$ o relație binară.

Scriem de obicei Rwv în loc de $(w, v) \in R$. Dacă Rwv, atunci spunem că v este R-accesibil din w.

Inversa lui R se notează R^{-1} și se definește astfel:

$$R^{-1}vw \quad \text{ddacă} \quad Rwv.$$

Definim $R^n (n \geq 0)$ inductiv:

$$R^0 = \{(w, w) \mid w \in W\}, \quad R^1 = R, \quad R^{n+1} = R \circ R^n.$$

Așadar, pentru orice $n \geq 2$, avem că $R^n wv$ ddacă există $u_1, \ldots u_{n-1}$ a.î $Rwu_1, Ru_1u_2, \ldots Ru_{n-1}v$.

Semantica

În continuare dăm semantica limbajului modal de bază cu ajutorul structurilor relaționale. Facem acest lucru în două moduri:

- la nivelul modelelor, unde definim noțiunile fundamentale de satisfacere și adevăr;
- la nivelul cadrelor, care ne permite să definim noțiunea cheie de validitate.

Definiția 2.7

Un cadru Kripke (Kripke frame) pentru ML_0 este o pereche $\mathcal{F} = (W, R)$ astfel încât

- *W este o mulțime nevidă;*
- *R este o relație binară pe W.*

Așadar, un cadru Kripke este pur și simplu o structură relațională cu o singură relație binară. Elementele lui W se numesc stări sau lumi.

Interpretare folosind agenți

Rwv dacă agentul consideră lumea v posibilă, conform informațiilor pe care le are în lumea w. Gândim R ca o relație de posibilitate, deoarece R definește ce lumi sunt considerate posibile de către agent din orice lume dată.

Definiția 2.8

Un model Kripke (Kripke model) pentru ML_0 este o pereche $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$, unde

- $\mathcal{F} = (W, R)$ *este un cadru pentru ML_0;*
- $V : PROP \to 2^W$ *este o funcție numită evaluare.*

Prin urmare, funcția V asignează oricărei propoziții atomice $p \in PROP$ submulțimea $V(p)$ a lui W. Informal, ne gândim la $V(p)$ ca la mulțime stărilor în care p este adevărată.

2^W este mulțimea submulțimilor lui W.

Semantica

Fie $\mathcal{F} = (W, R)$ un cadru Kripke și $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ un model Kripke. Spunem că modelul $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ este bazat pe cadrul $\mathcal{F} = (W, R)$ sau că $\mathcal{F}$ este cadrul suport al lui $\mathcal{M}$. Dacă $w \in W$, scriem uneori $w \in \mathcal{F}$ sau $w \in \mathcal{M}$.

Scriem de cele mai multe ori $\mathcal{M} = (W, R, V)$.

Semantica

Definim în continuare ce înseamnă că o formulă este adevărată într-o stare dintr-un model Kripke. Adevărul depinde atât de model cât și de stare.

Definiția 2.9

Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$ un model Kripke și w o stare în $\mathcal{M}$. Definim inductiv noțiunea

formula φ este satisfăcută (sau adevărată) în $\mathcal{M}$ în starea w,
notație $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{M}, w \Vdash p & \text{ddacă} & w \in V(p), \quad \text{unde } p \in PROP \\
\mathcal{M}, w \Vdash \neg\varphi & \text{ddacă} & \text{nu este adevărat că } \mathcal{M}, w \Vdash \varphi \\
\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \to \psi & \text{ddacă} & \mathcal{M}, w \Vdash \varphi \text{ implică } \mathcal{M}, w \Vdash \psi \\
\mathcal{M}, w \Vdash \Box\varphi & \text{ddacă} & \text{pentru orice } v \in W, \\
 & & Rwv \text{ implică } \mathcal{M}, v \Vdash \varphi.
\end{array}
$$

Semantica

Notație

Dacă $\mathcal{M}$ nu satisface φ în w, scriem $\mathcal{M}, w \not\Vdash \varphi$ și spunem că φ este falsă în $\mathcal{M}$ în starea w.

Pentru orice stare $w \in W$,

- $\mathcal{M}, w \Vdash \neg\varphi$ ddacă $\mathcal{M}, w \not\Vdash \varphi$.
- $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \to \psi$ ddacă ($\mathcal{M}, w \not\Vdash \varphi$ sau $\mathcal{M}, w \Vdash \psi$).

Clauza pentru $\Box$ are ca inspirație filosofia lui Leibniz:

- necesitate înseamnă adevăr în toate lumile posibile.
- posibilitate înseamnă adevăr într-o lume posibilă.

Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$ un model Kripke.

Propoziția 2.10

Pentru orice stare w în $\mathcal{M}$ și orice formule φ, ψ,

$$\mathcal{M}, w \not\Vdash \bot$$

$$\mathcal{M}, w \Vdash \top$$

$$\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \wedge \psi \quad \textit{ddacă} \quad \mathcal{M}, w \Vdash \varphi \textit{ și } \mathcal{M}, w \Vdash \psi$$

$$\mathcal{M}, w \Vdash \varphi \vee \psi \quad \textit{ddacă} \quad \mathcal{M}, w \Vdash \varphi \textit{ sau } \mathcal{M}, w \Vdash \psi$$

$$\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi \quad \textit{ddacă} \quad \textit{există } v \in W \textit{ a.î. } Rwv \textit{ și } \mathcal{M}, v \Vdash \varphi.$$

Dem.: Exercițiu.

Definiția 2.11

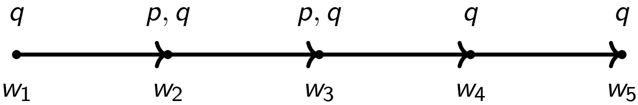
- *O formulă φ este global adevărată sau universal adevărată în $\mathcal{M}$ dacă $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$ pentru orice $w \in W$. Notație: $\mathcal{M} \Vdash \varphi$*
- *O formulă φ este satisfiabilă în $\mathcal{M}$ dacă există o stare $w \in W$ a.î. $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$.*

Semantica

Un model Kripke $\mathcal{M} = (W, R, V)$ poate fi reprezentat ca un graf etichetat:

- nodurile grafului sunt stările modelului.
- etichetăm fiecare nod cu propozițiile atomice care sunt adevărate în acel nod.
- există un arc de la nodul w la nodul v ddacă Rwv.

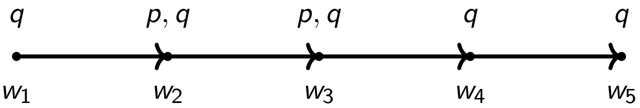
Exemplu



Avem că $PROP = \{p, q, r\}$, și $\mathcal{M} = (W, R, V)$, unde
$W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$; Rw_iw_j ddacă $j = i + 1$;
$V(p) = \{w_2, w_3\}$, $V(q) = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ și $V(r) = \emptyset$.

Exemplu

Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$ modelul Kripke reprezentat prin:



Demonstrați că

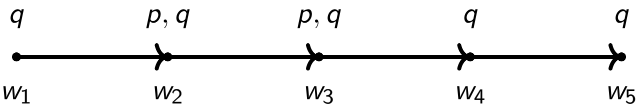
(i) $\mathcal{M}, w_1 \Vdash \Diamond\Box p$.
(ii) $\mathcal{M}, w_1 \not\Vdash \Diamond\Box p \to p$.
(iii) $\mathcal{M}, w_2 \Vdash \Diamond(p \wedge \neg r)$.
(iv) $\mathcal{M}, w_1 \Vdash q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond(q \wedge \Diamond q)))$.
(v) $\mathcal{M} \Vdash \Box q$.

Dem.: (i) $\mathcal{M}, w_1 \Vdash \Diamond\Box p$ ddacă există $v \in W$ a.î. Rw_1v și $\mathcal{M}, v \Vdash \Box p$. Luăm $v := w_2$. Cum Rw_1w_2, rămâne să demonstrăm că $\mathcal{M}, w_2 \Vdash \Box p$.

Semantica

Exemplu

Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$ modelul Kripke reprezentat prin:



Dem.: (continuare) Avem că

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{M}, w_2 \Vdash \Box p & \Longleftrightarrow & \text{pentru orice } u \in W,\ Rw_2u \text{ implică } \mathcal{M}, u \Vdash p. \\ & \Longleftrightarrow & \mathcal{M}, w_3 \Vdash p \text{ (deoarece } w_3 \text{ este unicul } u \in W \\ & & \text{a.î. } Rw_2u) \\ & \Longleftrightarrow & w_3 \in V(p), \text{ ceea ce este adevărat.} \end{array}$$

(ii) Avem că $\mathcal{M}, w_1 \not\Vdash \Diamond\Box p \to p \iff \mathcal{M}, w_1 \Vdash \Diamond\Box p$ și $\mathcal{M}, w_1 \not\Vdash p$. Aplicăm (i) și faptul că $w_1 \notin V(p)$.

(iii), (iv), Exercițiu.

Exemplu

Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$ modelul Kripke reprezentat prin:

$$
\begin{tikzcd}
\overset{q}{\underset{w_1}{\bullet}} \arrow[r] & \overset{p,q}{\underset{w_2}{\bullet}} \arrow[r] & \overset{p,q}{\underset{w_3}{\bullet}} \arrow[r] & \overset{q}{\underset{w_4}{\bullet}} \arrow[r] & \overset{q}{\underset{w_5}{\bullet}}
\end{tikzcd}
$$

Dem.: (continuare)
(v) Fie $w \in W$ arbitrar. Avem că $\mathcal{M}, w \Vdash \Box q \iff$ pentru orice $v \in W$, Rwv implică $\mathcal{M}, v \Vdash q \iff$ pentru orice $v \in W$, Rwv implică $v \in V(q)$, ceea ce este adevărat, deoarece $V(q) = W$.

Semantica

Noțiunea de satisfacere este internă și locală. Evaluăm formulele în interiorul modelelor, într-o stare particulară w (starea curentă).
În cazul operatorilor modali $\Box$, $\Diamond$ nu verificăm adevărul lui φ în toate stările din W ci numai în acelea care sunt R-accesibile din starea curentă.
Aceasta este nu este o slăbiciune a noțiunii de satisfacere, ci, dimpotrivă, ne permite o foarte mare flexibilitate. Dacă luăm $R = W \times W$, atunci toate stările sunt accesibile din w, iar dacă luăm $R = \{(v, v) \mid v \in W\}$, atunci w este singura stare accesibilă din w. Acestea sunt cazurile extreme, dar, evident, sunt multe opțiuni de explorat.
Putem să ne punem următoarele întrebări naturale: ce se întâmplă dacă impunem anumite condiții asupra lui R (de exemplu, reflexivitate, simetrie, tranzitivitate, etc.), ce impact au aceste condiții asupra necesității și posibilității, ce principii sau reguli sunt justificate de aceste condiții?

Validitatea într-un cadru Kripke este unul din conceptele cheie în logica modală.

Definiția 2.12

Fie $\mathcal{F}$ un cadru Kripke și φ o formulă.

- φ *este validă într-o stare* w *din* $\mathcal{F}$ *dacă pentru orice model* $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ *bazat pe* $\mathcal{F}$, $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$.
- φ *este validă în* $\mathcal{F}$ *dacă este validă în orice stare* w *din* $\mathcal{F}$.
  Notație: $\mathcal{F} \Vdash \varphi$

Așadar, o formulă este validă într-un cadru Kripke dacă este adevărată în orice stare din orice model bazat pe cadru.

Semantica

Validitatea într-un cadru Kripke diferă în mod esențial de adevărul într-un model Kripke. Să dăm un exemplu simplu.

Dacă $\varphi \vee \psi$ este adevărată într-un model Kripke $\mathcal{M}$ în w, atunci φ este adevărată în $\mathcal{M}$ în w sau ψ este adevărată în $\mathcal{M}$ în w (conform definiției satisfacției).

Pe de altă parte, dacă $\varphi \vee \psi$ este validă într-un cadru Kripke $\mathcal{F}$ în w, nu rezultă că φ este validă în $\mathcal{F}$ în w sau ψ este validă în $\mathcal{F}$ în w ($p \vee \neg p$ este un contraexemplu).

Definiția 2.13

Fie $\boldsymbol{F}$ o clasă de cadre și φ o formulă.
Spunem că φ este validă în $\boldsymbol{F}$ dacă este validă în orice cadru din $\boldsymbol{F}$.
Notație: $\boldsymbol{F} \Vdash \varphi$

Definiția 2.14

Mulțimea tuturor formulelor din ML_0 care sunt valide într-o clasă de cadre $\boldsymbol{F}$ se numește logica lui $\boldsymbol{F}$ și se notează $\Lambda_{\boldsymbol{F}}$.

Exemplul 2.15

Pentru orice formule φ, ψ,

$$\Diamond(\varphi \vee \psi) \to (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi) \quad \text{şi} \quad \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$$

sunt valide în clasa tuturor cadrelor Kripke.

Dem.: Fie $\mathcal{F}$ un cadru Kripke arbitrar, w o stare din $\mathcal{F}$ și $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ un model Kripke bazat pe $\mathcal{F}$. Trebuie să arătăm că

$$\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond(\varphi \vee \psi) \to (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi).$$

Presupunem că $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond(\varphi \vee \psi)$. Atunci există $v \in W$ astfel încât Rwv și $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi \vee \psi$. Avem două cazuri:

- $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$. Atunci $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$, deci $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$.
- $\mathcal{M}, v \Vdash \psi$. Atunci $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\psi$, deci $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$.

Așadar, $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond(\varphi \vee \psi) \to (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$.

Lăsăm ca exercițiu demonstrația faptului că $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ este validă în clasa tuturor cadrelor Kripke. $\Box$

Exemplul 2.16

Formula $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ nu este validă în clasa tuturor cadrelor Kripke.

Dem.: Trebuie să găsim un cadru Kripke $\mathcal{F}$, o stare w și un model Kripke $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ a.î

$$\mathcal{M}, w \nVdash \Diamond\Diamond p \to \Diamond p.$$

Considerăm următorul cadru: $\mathcal{F} = (W, R)$, unde

$$W = \{0, 1, 2\}, \quad R = \{(0, 1), (1, 2)\}$$

și $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ cu $V(p) = \{2\}$. Atunci $\mathcal{M}, 0 \Vdash \Diamond\Diamond p$, deoarece $R01$, $R12$ și $\mathcal{M}, 2 \Vdash p$. Dar $\mathcal{M}, 0 \nVdash \Diamond p$, deoarece singurul punct R-accesibil din 0 este 1 și $\mathcal{M}, 1 \nVdash p$.
Prin urmare, $\mathcal{M}, 0 \nVdash \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$. $\square$

Definiția 2.17

Spunem că un cadru Kripke $\mathcal{F} = (W, R)$ este tranzitiv dacă R este tranzitivă.

Exemplul 2.18

Pentru orice formulă φ,

$$\Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$$

este validă în clasa tuturor cadrelor Kripke tranzitive.

Dem.: Fie $\mathcal{F}$ un cadru Kripke tranzitiv, w o stare din $\mathcal{F}$ și $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ un model Kripke bazat pe $\mathcal{F}$. Presupunem că $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\Diamond\varphi$. Atunci există $u, v \in W$ a.î Rwu, Ruv și $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$. Deoarece R este tranzitivă, rezultă că Rwv și $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$. Deci, $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$.
Prin urmare, $\mathcal{M}, v \Vdash \Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$. $\square$

Exemplul 2.19

Verificaţi dacă următoarea formulă este validă în clasa tuturor cadrelor Kripke:

$$p \to \Box\Diamond p.$$

Dem.: Răspunsul este NU. Considerăm următorul cadru Kripke $\mathcal{F} = (W, R)$, unde

$$W = \{1, 2, 3\},\ R = \{(1, 2), (2, 3)\}$$

și $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ cu $V(p) = \{1\}$. Avem că $\mathcal{M}, 1 \Vdash p$, deoarece $1 \in V(p)$. Pe de altă parte,

$$\mathcal{M}, 1 \Vdash \Box\Diamond p \iff \mathcal{M}, 2 \Vdash \Diamond p \iff \mathcal{M}, 3 \Vdash p \iff 3 \in V(p),$$

ceea ce este fals.
Prin urmare, $\mathcal{M}, 1 \nVdash p \to \Box\Diamond p$. $\Box$

Exemplul 2.20

Verificaţi dacă formula $\Diamond p \wedge (\Box q \vee \Box r) \to \Diamond(p \wedge (q \vee r))$ este validă în clasa tuturor cadrelor Kripke.

Dem.: Răspunsul este DA. Fie $\mathcal{F}$ un cadru Kripke arbitrar, w o stare din $\mathcal{F}$ și $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ un model Kripke bazat pe $\mathcal{F}$. Trebuie să arătăm că $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p \wedge (\Box q \vee \Box r) \to \Diamond(p \wedge (q \vee r))$.
Presupunem că $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p \wedge (\Box q \vee \Box r)$, deci $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond p$ și ($\mathcal{M}, w \Vdash \Box q$ sau $\mathcal{M}, w \Vdash \Box r$). Fie $v \in W$ a.î.

$$(*) \quad Rwv \text{ și } \mathcal{M}, v \Vdash p.$$

Dacă $\mathcal{M}, w \Vdash \Box q$, atunci pentru orice $u \in W$, Rwu implică $\mathcal{M}, u \Vdash q$. Luând $u = v$, obținem $\mathcal{M}, v \Vdash q$.
Dacă $\mathcal{M}, w \Vdash \Box r$, atunci pentru orice $u \in W$, Rwu implică $\mathcal{M}, u \Vdash r$. Luând $u = v$, obținem $\mathcal{M}, v \Vdash r$. Prin urmare,

$$(**) \quad \mathcal{M}, v \Vdash q \text{ sau } \mathcal{M}, v \Vdash r.$$

Din (*) și (**) rezultă că Rwv și $\mathcal{M}, v \Vdash p \wedge (q \vee r)$. Deci, $\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond(p \wedge (q \vee r))$. $\Box$

Exemplul 2.21

Verificaţi dacă următoarea formulă este validă în clasa tuturor cadrelor Kripke:

$$\Box\Box p \to \Box p.$$

Dem.: Răspunsul este NU. Considerăm următorul cadru Kripke $\mathcal{F} = (W, R)$, unde

$$W = \{1, 2\},\ R = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

și $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ cu $V(p) = \{1\}$. Avem că $\mathcal{M}, 1 \Vdash \Box\Box p$ $\iff \mathcal{M}, 2 \Vdash \Box p \iff \mathcal{M}, 1 \Vdash p \iff 1 \in V(p)$, ceea ce este adevărat.
Pe de altă parte, $\mathcal{M}, 1 \Vdash \Box p \iff \mathcal{M}, 2 \Vdash p \iff 2 \in V(p)$, ceea ce este fals.
Prin urmare, $\mathcal{M}, 1 \not\Vdash \Box\Box p \to \Box p$. □

Exemplul 2.22

Verificaţi dacă următoarea formulă este validă în clasa tuturor cadrelor Kripke:

$$\Box p \to \Diamond p.$$

Dem.: Răspunsul este NU. Considerăm următorul cadru Kripke $\mathcal{F} = (W, R)$, unde

$$W = \{1, 2\},\ R = \{(2, 2), (2, 1)\}$$

și $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$ cu V arbitrar. Deoarece nu există nicio stare $w \in W$ a.î. $R1w$, rezultă că $\mathcal{M}, 1 \Vdash \Box p$, dar $\mathcal{M}, 1 \nVdash \Diamond p$. $\square$

Sintaxa

Definiția 2.23

O logică modală normală este o mulțime Λ de formule din ML_0 care are următoarele proprietăți:

- *Λ conține următoarele axiome:*

$$\begin{array}{ll} (Taut) & \text{toate tautologiile propoziționale,} \\ (K) & \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi) \end{array}$$

- *Λ este închisă la următoarele reguli de deducție:*
  - *modus ponens (MP):*

$$\frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}$$

    Prin urmare, dacă $\varphi \in \Lambda$ și $\varphi \to \psi \in \Lambda$, atunci $\psi \in \Lambda$.
  - *generalizarea (GEN):*

$$\frac{\varphi}{\Box\varphi}$$

    Prin urmare, dacă $\varphi \in \Lambda$, atunci $\Box\varphi \in \Lambda$.

Sintaxa

Adăugăm toate tautologiile propoziționale ca axiome pentru ușurință, dar nu este necesar. Puteam să adăugăm doar un număr mic de tautologii, care le generează pe toate.
Tautologiile pot conține și modalități. De exemplu, $\Diamond\psi \vee \neg\Diamond\psi$ este tautologie, deoarece are aceeași formă cu $\varphi \vee \neg\varphi$.

Axioma (K) se mai numește și axioma distribuției și este importantă pentru că ne permite să transformăm $\Box(\varphi \to \psi)$ într-o implicație $\Box\varphi \to \Box\psi$, putând astfel să folosim gândirea propozițională. De exemplu, presupunem că vrem să demonstrăm $\Box\psi$ și avem deja o demonstrație care conține atât $\Box(\varphi \to \psi)$ cât și $\Box\varphi$. Atunci aplicând (K) și modus ponens, obținem $\Box\varphi \to \Box\psi$. Aplicând din nou modus ponens, rezultă $\Box\psi$.

Generalizarea "modalizează" formulele, adăugându-le $\Box$ în față, crează noi contexte modale în care să lucrăm.

Teorema 2.24

Pentru orice clasă $\mathbf{F}$ *de cadre Kripke, logica* $\Lambda_{\mathbf{F}}$ *a lui* $\mathbf{F}$ *este o logică modală normală.*

Lema 2.25

- *Colecția tuturor formulelor este o logică modală normală, numită logica inconsistentă.*
- *Dacă* $\{\Lambda_i \mid i \in I\}$ *este o colecție de logici modale normale, atunci* $\bigcap_{i \in I} \Lambda_i$ *este o logică modală normală.*

Definiția 2.26

K *este intersecția tuturor logicilor modale normale.*

Logica **K** este cea mai mică logică modală normală, este foarte slabă. Putem obține logici mai puternice folosind ideea de a extinde **K** cu axiome adiționale.

Sintaxa

Conform Lemei 2.25, pentru orice mulțime de formule Γ, există cea mai mică logică modală normală care conține Γ.

Definiția 2.27

***K*Γ** *este cea mai mică logică modală normală care conține* Γ*.*
Spunem că ***K*Γ** *este generată de* Γ *sau că este axiomatizată de* Γ*.*

Definiția 2.28

O ***K*Γ***-demonstrație este o secvență de formule* $\theta_1, \ldots, \theta_n$ *a.î. pentru fiecare* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, una din următoarele condiții este satisfăcută:*

- θ_i *este axiomă (adică (Taut) sau (K));*
- $\theta_i \in \Gamma$*;*
- θ_i *se obține din formule anterioare aplicând următoarele reguli de deducție: modus ponens sau generalizarea.*

Definiția 2.29

*Fie φ o formulă. O **$K\Gamma$**-demonstrație a lui φ este o **$K\Gamma$**-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$.*
*Dacă φ are o **$K\Gamma$**-demonstrație, spunem că φ este **$K\Gamma$**-demonstrabilă și scriem $\vdash_{K\Gamma} \varphi$.*

Teorema 2.30

$$K\Gamma = \{\varphi \mid \vdash_{K\Gamma} \varphi\}.$$

Luând $\Gamma = \emptyset$, obținem că $K = \{\varphi \mid \vdash_K \varphi\}$.

Exemplul 2.31

$$\vdash_{\boldsymbol{K}} \varphi \to \psi \text{ implică } \vdash_{\boldsymbol{K}} \Box\varphi \to \Box\psi.$$

Dem.: Prezentăm următoarea ***K***-demonstrație:

(1)	$\vdash_{\boldsymbol{K}} \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\vdash_{\boldsymbol{K}} \Box(\varphi \to \psi)$	(GEN): (1)
(3)	$\vdash_{\boldsymbol{K}} \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$	(K)
(4)	$\vdash_{\boldsymbol{K}} \Box\varphi \to \Box\psi$	(MP): (2), (3).

Exemplul 2.32

$$\vdash_{\boldsymbol{K}} \varphi \to \psi \text{ implică } \vdash_{\boldsymbol{K}} \Diamond\varphi \to \Diamond\psi.$$

Dem.: Prezentăm următoarea ***K***-demonstrație:

(1)	$\vdash_{\boldsymbol{K}} \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\vdash_{\boldsymbol{K}} (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	(Taut)
(3)	$\vdash_{\boldsymbol{K}} \neg\psi \to \neg\varphi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\vdash_{\boldsymbol{K}} \Box\neg\psi \to \Box\neg\varphi$	Exemplul 2.31: (3)
(5)	$\vdash_{\boldsymbol{K}} (\Box\neg\psi \to \Box\neg\varphi) \to (\neg\Box\neg\varphi \to \neg\Box\neg\psi)$	(Taut)
(6)	$\vdash_{\boldsymbol{K}} \neg\Box\neg\varphi \to \neg\Box\neg\psi$	(MP): (4), (5)
(7)	$\vdash_{\boldsymbol{K}} \Diamond\varphi \to \Diamond\psi$	definiția lui $\Diamond$.

Exemplul 2.33

$$\vdash_{\boldsymbol{K}} \Box\varphi \wedge \Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi).$$

Dem.: Prezentăm următoarea ***K***-demonstrație:

(1) $\vdash_{\boldsymbol{K}} \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$ (Taut)

(2) $\vdash_{\boldsymbol{K}} \Box\varphi \to \Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi))$ Exemplul 2.31: (1)

(3) $\vdash_{\boldsymbol{K}} \Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi)) \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi))$ (K)

(4) $\vdash_{\boldsymbol{K}} \Box\varphi \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi))$
logică propozițională: (2), (3) și (MP),
$(\sigma_1 \to \sigma_2) \to ((\sigma_2 \to \sigma_3) \to (\sigma_1 \to \sigma_3))$ tautologie

(5) $\vdash_{\boldsymbol{K}} \Box\varphi \wedge \Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi)$
logică propozițională: (4) și (MP),
$(\sigma_1 \to (\sigma_2 \to \sigma_3)) \to ((\sigma_1 \wedge \sigma_2) \to \sigma_3)$ tautologie. $\Box$

Sintaxa și semantica

Fie $\boldsymbol{F}$ o clasă de cadre Kripke și Λ o logică modală normală.

Notație

Dacă $\varphi \in \Lambda$, spunem și că φ este Λ-teoremă sau teoremă a lui Λ și scriem $\vdash_\Lambda \varphi$. Dacă $\varphi \notin \Lambda$, scriem $\nvdash_\Lambda \varphi$.

Definiția 2.34

Λ *este*

- *corectă (sound) cu privire la* $\boldsymbol{F}$ *dacă* $\Lambda \subseteq \Lambda_{\boldsymbol{F}}$.
- *completă (complete) cu privire la* $\boldsymbol{F}$ *dacă* $\Lambda_{\boldsymbol{F}} \subseteq \Lambda$.

- Λ este corectă cu privire la $\boldsymbol{F}$ ddacă pentru orice formulă φ,
$$\vdash_\Lambda \varphi \quad \text{implică} \quad \boldsymbol{F} \Vdash \varphi.$$
- Λ este completă cu privire la $\boldsymbol{F}$ ddacă pentru orice formulă φ,
$$\boldsymbol{F} \Vdash \varphi \quad \text{implică} \quad \vdash_\Lambda \varphi.$$

Așadar, dacă demonstrăm că o logică modală normală Λ (specificată sintactic) este atât corectă cât și completă cu privire la o clasă $\boldsymbol{F}$ de cadre Kripke, obținem o potrivire perfectă între perspectiva sintactică și cea semantică:

$$\Lambda = \Lambda_{\boldsymbol{F}}.$$

Teorema 2.35

K *este corectă și completă cu privire la clasa tuturor cadrelor Kripke.*

Fiind dată o logică modală normală $\Lambda_{\boldsymbol{F}}$ (specificată semantic), o problemă foarte importantă este găsirea unei mulțimi cât mai simple de formule Γ astfel încât $\Lambda_{\boldsymbol{F}}$ este logica generată de Γ. Spunem și că Γ axiomatizează $\Lambda_{\boldsymbol{F}}$.

LOGICI MULTIMODALE

Logici multimodale

Întreaga teorie prezentată până acum se extinde ușor la limbaje cu mai mulți operatori modali.

Fie I o mulțime nevidă.

- Limbajul multimodal ML_I constă în: o mulțime $PROP$ de propoziții atomice, $\neg$, $\rightarrow$, parantezele (,) și o mulțime de operatori modali $\{\Box_i \mid i \in I\}$.
- Formulele lui ML_I sunt definite, folosind notația Backus-Naur, astfel:

  $$\varphi ::= p \mid \bot \mid (\neg\varphi) \mid (\varphi \rightarrow \psi) \mid (\Box_i\varphi),$$

  unde $p \in PROP$ și $i \in I$.
- Dualul lui $\Box_i$ se notează $\Diamond_i$ și este definit ca:

  $$\Diamond_i\varphi := \neg\Box_i\neg\varphi$$

Logici multimodale

- Un cadru Kripke pentru ML_I este o structură relațională $\mathcal{F} = (W, \{R_i \mid i \in I\})$, unde R_i este relație binară pe W pentru orice $i \in I$.
- Un model Kripke pentru ML_I este o pereche $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$, unde $\mathcal{F}$ este un cadru Kripke și $V : PROP \to 2^W$ este o evaluare.
- Ultima clauză din definiția relației de satisfacere $\mathcal{M}, w \Vdash \varphi$ devine: pentru orice $i \in I$,

  $$\mathcal{M}, w \Vdash \Box_i \varphi \text{ ddacă pentru orice } v \in W, R_i wv \text{ implică } \mathcal{M}, v \Vdash \varphi.$$
- Rezultă că

  $$\mathcal{M}, w \Vdash \Diamond_i \varphi \text{ ddacă există } v \in W \text{ a.î. } R_i wv \text{ și } \mathcal{M}, v \Vdash \varphi.$$
- Definițiile adevărului într-un model Kripke ($\mathcal{M} \Vdash \varphi$) sau validității într-un cadru Kripke ($\mathcal{F} \Vdash \varphi$) sunt neschimbate.

Definiția 2.36

O *logică multimodală normală* *este o mulțime Λ de formule din ML_I care are următoarele proprietăți:*

- *Λ conține toate tautologiile propoziționale.*
- *Λ conține toate formulele*

$$(K) \quad \Box_i(\varphi \to \psi) \to (\Box_i\varphi \to \Box_i\psi),$$

  unde φ, ψ sunt formule și $i \in I$.
- *Λ este închisă la modus ponens.*
- *Λ este închisă la generalizare: pentru orice formulă φ și orice $i \in I$,*

$$\frac{\varphi}{\Box_i\varphi}.$$

Logici multimodale

- Folosim aceeași notație, $\boldsymbol{K}$, pentru cea mai mică logică multimodală normală.
- Logica multimodală normală generată de o mulțime Γ de formule se notează tot $\boldsymbol{K\Gamma}$.
- Definim similar $\boldsymbol{K\Gamma}$-demonstrațiile și avem, de asemenea, $\boldsymbol{K\Gamma} = \{\varphi \mid \vdash_{\boldsymbol{K\Gamma}} \varphi\}$. În particular, $\boldsymbol{K} = \{\varphi \mid \vdash_{\boldsymbol{K}} \varphi\}$.
- Definițiile corectitudinii și completitudinii sunt neschimbate.

LOGICI EPISTEMICE

Logici epistemice

În logicile epistemice, limbajul multimodal este folosit pentru a raționa despre cunoaștere. Fie $n \geq 1$ și $AG = \{1, \ldots, n\}$ mulțimea agenților.

- Considerăm limbajul multimodal ML_{Ag}.
- Scriem pentru orice $i = 1, \ldots, n$, $K_i\varphi$ în loc de $\Box_i\varphi$.
- $K_i\varphi$ se citește agentul i știe că φ.
- Notăm cu $\hat{K}_i$ operatorul dual: $\hat{K}_i\varphi = \neg K_i\neg\varphi$.
- Atunci $\hat{K}_i\varphi$ se citește agentul i consideră posibil (că) φ.

- Un cadru Kripke este o structură $\mathcal{F} = (W, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n)$, unde W este o mulțime nevidă și $\mathcal{K}_i$ este relație binară pe W pentru orice $i = 1, \ldots, n$. Așadar, scriem $\mathcal{K}_i$ în loc de R_i.
- Un model Kripke este o structură $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, V)$, unde $V : PROP \to 2^W$.

Definiția 2.37

O logică epistemică este o mulțime Λ de formule ale lui ML_{Ag} care are următoarele proprietăți:

- *Λ conține toate tautologiile propoziționale.*
- *Λ conține toate formulele*

$$(K) \quad K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi),$$

  unde φ, ψ sunt formule și $i \in Ag$.
- *Λ este închisă la modus ponens.*
- *Λ este închisă la generalizare: pentru orice formulă φ și orice $i \in Ag$,*

$$\frac{\varphi}{K_i\varphi}.$$

Notăm cea mai mică logică epistemică tot cu ***K***.

Teorema 2.38

K *este corectă și completă privire la clasa tuturor cadrelor Kripke.*

Considerăm

$$(T) \quad K_i\varphi \to \varphi,$$

unde φ este formulă și $i \in Ag$.

Axioma (T) se numește axioma cunoașterii: Dacă un agent știe φ, atunci φ trebuie să fie adevărată. Ce este cunoscut este adevărat. Aceasta este adesea considerată ca fiind proprietatea care distinge cunoașterea de alte atitudini informaționale, cum ar fi credința.

Folosim notația ***T*** pentru logică epistemică generată de (T).

Definiția 2.39

Un cadru Kripke $\mathcal{F} = (W, \{\mathcal{K}_i \mid i \in Ag\})$ este reflexiv dacă $\mathcal{K}_i$ este reflexivă pentru orice $i \in Ag$.

Teorema 2.40

T *este corectă și completă cu privire la clasa tuturor cadrelor Kripke reflexive.*

Considerăm

$$(D) \quad \neg K_i(\varphi \wedge \neg\varphi),$$

unde φ este formulă și $i \in Ag$.

Axioma (D) este axioma consistenței: un agent nu știe atât φ cât și $\neg\varphi$. Un agent nu poate ști o contradicție.

Folosim notația ***KD*** pentru logică epistemică generată de (D).

Definiția 2.41

O relație binară R pe W se numește serială dacă pentru orice $w \in W$ există $v \in W$ astfel încât Rwv.

Definiția 2.42

Un cadru Kripke $\mathcal{F} = (W, \{\mathcal{K}_i \mid i \in Ag\})$ este serial dacă $\mathcal{K}_i$ este serială pentru orice $i \in Ag$.

Teorema 2.43

***KD** este corectă și completă cu privire la clasa tuturor cadrelor Kripke seriale.*

Considerăm

$$(4) \quad K_i\varphi \to K_iK_i\varphi,$$

unde φ este formulă și $i \in Ag$.

Axioma (4) este numită introspecție pozitivă: dacă un agent știe φ, atunci știe că știe φ. Un agent știe ce știe.

Folosim notația ***K*4** pentru logică epistemică generată de (4).

Definiția 2.44

Un cadru Kripke $\mathcal{F} = (W, \{\mathcal{K}_i \mid i \in Ag\})$ este tranzitiv dacă $\mathcal{K}_i$ este tranzitivă pentru orice $i \in Ag$.

Teorema 2.45

***K*4** *este corectă și completă cu privire la clasa tuturor cadrelor Kripke tranzitive.*

Considerăm

$$(B) \quad \varphi \to K_i \neg K_i \neg \varphi,$$

unde φ este formulă și $i \in Ag$.

Axioma (B) spune că dacă φ are loc, atunci un agent știe că nu știe $\neg\varphi$.

Folosim notația ***B*** pentru logică epistemică generată de (B).

Definiția 2.46

Un cadru Kripke $\mathcal{F} = (W, \{\mathcal{K}_i \mid i \in Ag\})$ este simetric dacă $\mathcal{K}_i$ este simetrică pentru orice $i \in Ag$.

Teorema 2.47

B *este corectă și completă cu privire la clasa tuturor cadrelor Kripke simetrice.*

Considerăm

$$(5) \quad \neg K_i\varphi \to K_i\neg K_i\varphi$$

unde φ este formulă și $i \in Ag$.

Axioma (5) este numită introspecția negativă: dacă un agent nu știe φ, atunci știe că nu știe φ. Un agent este conștient de ceea ce nu știe.

Vom folosi notația ***K*5** pentru logică epistemică generată de (5).

Definiția 2.48

O relație binară R pe W se numește euclideană dacă pentru orice $u, v, w \in W$

$$wRu \text{ și } wRv \text{ implică } uRv.$$

Definiția 2.49

Un cadru Kripke $\mathcal{F} = (W, \{\mathcal{K}_i \mid i \in Ag\})$ este euclidean dacă $\mathcal{K}_i$ este Euclideană pentru orice $i \in Ag$.

Teorema 2.50

K5 este corectă și completă cu privire la clasa tuturor cadrelor Kripke euclideene.

Fie $\boldsymbol{S4} = \boldsymbol{KT4}$.

Teorema 2.51

$\boldsymbol{S4}$ *este corectă și completă cu privire la clasa cadrelor Kripke ale căror relații sunt reflexive și tranzitive.*

Fie $\boldsymbol{S5} = \boldsymbol{KT4B}$. $\boldsymbol{S5}$ este considerată logica cunoașterii idealizate.

Introspecția pozitivă și negativă implică faptul că un agent are cunoaștere perfectă despre ceea ce știe și ce nu știe.

Propoziția 2.52

$\boldsymbol{S5} = \boldsymbol{KDB4} = \boldsymbol{KDB5} = \boldsymbol{KT5}$.

Teorema 2.53

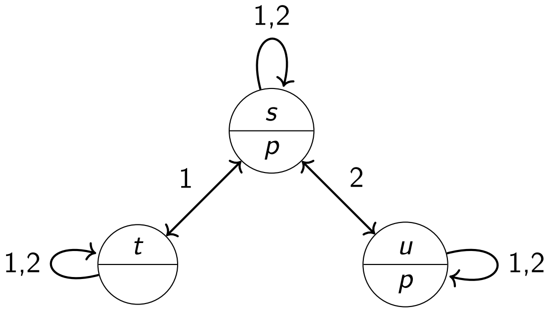
$\boldsymbol{S5}$ *este corectă și completă cu privire la clasa cadrelor Kripke ale căror relații sunt relații de echivalență.*

Logică epistemică

Un model Kripke $\mathcal{M} = (W, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n, V)$ poate fi reprezentat ca un graf etichetat:

- nodurile grafului sunt stările modelului.
- etichetăm fiecare nod cu propozițiile atomice care sunt adevărate în acel nod.
- $\mathcal{K}_i wv$ ddacă există un arc de la nodul w la nodul v, pe care îl etichetăm cu i.

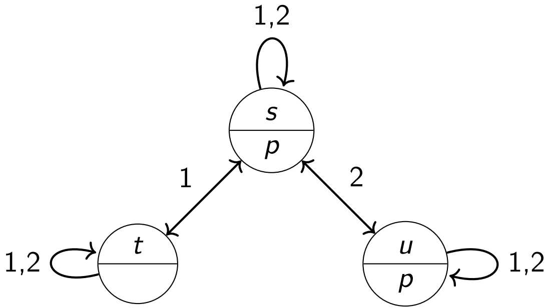
Exemplu



Avem că $Ag = \{1, 2\}$, $Prop = \{p\}$ și $\mathcal{M} = (W, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, V)$, unde

- $W = \{s, t, u\}$.
- $\mathcal{K}_1 = \{(s, s), (t, t), (u, u), (s, t), (t, s)\}$.
- $\mathcal{K}_2 = \{(s, s), (t, t), (u, u), (s, u), (u, s)\}$.
- $V(p) = \{s, u\}$.

Exemplu



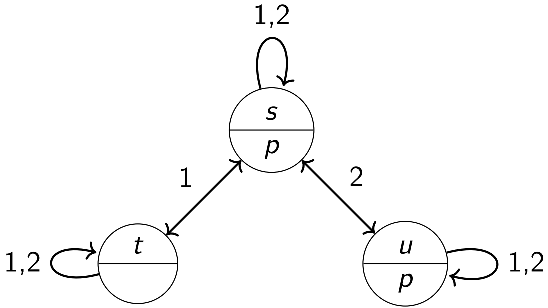
- $\mathcal{M}, s \Vdash p \wedge \neg K_1 p$.

Dem.: Avem că $s \in V(p)$, deci $\mathcal{M}, s \Vdash p$. Deoarece $\mathcal{K}_1 st$ și $\mathcal{M}, t \nVdash p$, rezultă că $\mathcal{M}, s \nVdash K_1 p$, deci $\mathcal{M}, s \Vdash \neg K_1 p$. Prin urmare, $\mathcal{M}, s \Vdash p \wedge \neg K_1 p$. $\square$

În starea s, p este adevărată, dar agentul 1 nu știe asta, deoarece în starea s el consideră atât s cât și t posibile.

Informațiile pe care le are agentul 1 nu îi permit să distingă dacă lumea actuală este s sau t.

Exemplu

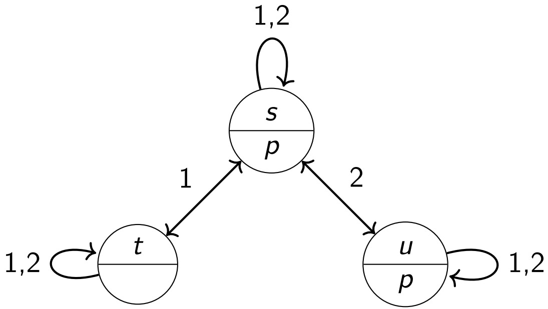


- $\mathcal{M}, s \Vdash K_2 p$.

Dem.: Avem că $\mathcal{M}, s \Vdash K_2 p$ ddacă pentru orice $v \in W$, $\mathcal{K}_2 sv$ implică $\mathcal{M}, v \Vdash p$ ddacă $\mathcal{M}, s \Vdash p$ și $\mathcal{M}, u \Vdash p$ (deoarece $\mathcal{K}_2 ss$, $\mathcal{K}_2 su$, dar nu avem că $\mathcal{K}_2 st$), ceea ce este adevărat. □

În starea s, agentul 2 știe că p este adevărată, deoarece p este satisfăcută în ambele lumi pe care le consideră posibile din s, și anume, s și u.

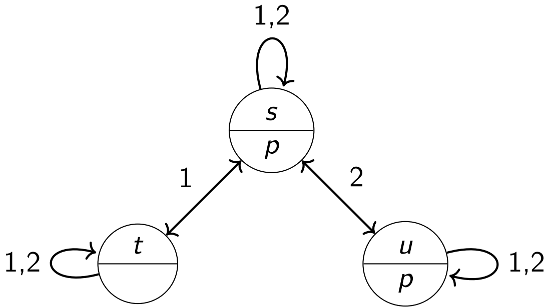
Exemplu



- $\mathcal{M}, s \Vdash \neg K_2 \neg K_1 p$.

Dem.: Avem că $\mathcal{M}, s \Vdash \neg K_2 \neg K_1 p$ ddacă $\mathcal{M}, s \nVdash K_2 \neg K_1 p$ ddacă există $v \in W$ a.î. $\mathcal{K}_2 sv$ și $\mathcal{M}, v \nVdash \neg K_1 p$ ddacă există $v \in W$ a.î. $\mathcal{K}_2 sv$ și $\mathcal{M}, v \Vdash K_1 p$. Luăm $v := u$. Atunci $\mathcal{K}_2 su$ și $\mathcal{M}, u \Vdash K_1 p$, deoarece $\mathcal{M}, u \Vdash p$ și $\mathcal{K}_1 uw$ ddacă $w = u$. $\square$

Exemplu



- $\mathcal{M}, s \Vdash \neg K_2 \neg K_1 p$.

Chiar dacă agentul 2 știe că p este adevărată în starea s, el nu știe că agentul 1 nu știe acest lucru. De ce? Pentru că într-o lume pe care agentul 2 o consideră posibilă, și anume u, agentul 1 știe că p are loc, dar în altă lume posibilă, și anume s, agentul 1 nu știe acest lucru.

Un joc de cărți simplu

$Ag = \{1, 2\}$

- Presupunem că avem un pachet format din trei cărți etichetate A, B și C. Agenții 1 și 2 primesc fiecare câte o carte; a treia carte este lăsată cu fața în jos.
- O lume posibilă se caracterizează prin descrierea cărților pe care le are fiecare agent. De exemplu, în lumea (A, B), agentul 1 are cartea A și agentul 2 are cartea B, în timp ce cartea C este cu fața în jos.
- Mulțimea lumilor posibile este

$$W = \{(A, B), (A, C), (B, A), (B, C), (C, A), (C, B)\}.$$

- În lumea (A, B), agentul 1 crede că sunt posibile două lumi: (A, B) și (A, C). Agentul 1 știe că el are cartea A, dar consideră posibil ca agentul 2 să aibă fie cartea B fie cartea C.

Un joc de cărți simplu

- Similar, în lumea (A, B), agentul 2 de asemenea consideră două lumi ca fiind posibile: (A, B) și (C, B).
- În general, într-o lume (X, Y), agentul 1 consideră lumile (X, Y) și (X, Z) posibile, în timp ce agentul 2 consideră lumile (X, Y) și (Z, Y) posibile, unde Z este o carte diferită de X și Y.

- Putem defini ușor relațiile $\mathcal{K}_1$ și $\mathcal{K}_2$.
- Este simplu să verificăm că sunt relații de echivalență.

Un joc de cărți simplu

Descriem cadrul Kripke $\mathcal{F}_c = (W, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ pentru jocul de cărți ca un grafic etichetat. Pentru simplitate, omitem buclele și săgețile arcelor (dacă există un arc de la starea w la starea v, trebuie să existe un arc și de la v la w, prin simetrie).

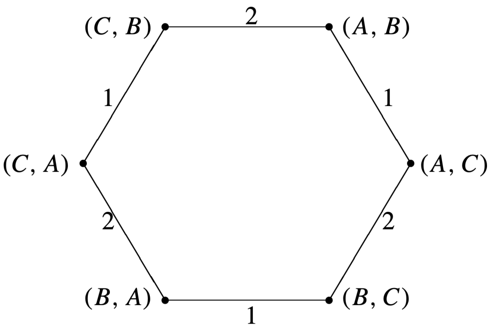
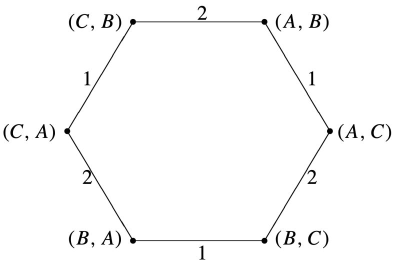


Figura 1: Cadru care descrie un joc de cărți simplu

Un joc de cărți simplu



Să considerăm lumea (A, B).

- Agentul 1 știe că lumea (B, C) nu e posibilă. Acest lucru este surprins de faptul că nu există o muchie cu eticheta 1 între (A, B) și (B, C).
- Totuși, agentul 1 consideră că este posibil ca agentul 2 să considere posibilă lumea (B, C). Acest lucru este surprins de faptul că există o muchie etichetată 1 între (A, B) și (A, C) și o muchie etichetată 2 între (A, C) și (B, C).

Definim mulțimea PROP a propozițiilor atomice astfel:

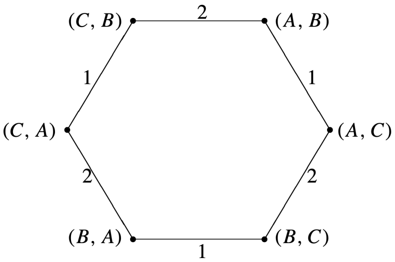
$$PROP = \{iX \mid i \in \{1, 2\}, X \in \{A, B, C\}\}.$$

iX va fi interpretat ca agentul i are cartea X. Fiind dată această interpretare, definiția evaluării V este evidentă

$$V(iX) = \begin{cases} \{(X, Z) \mid Z \in \{A, B, C\} \setminus \{X\}\} & \text{dacă } i = 1 \\ \{(Z, X) \mid Z \in \{A, B, C\} \setminus \{X\}\} & \text{dacă } i = 2. \end{cases}$$

Fie $\mathcal{M}_c = (\mathcal{F}_c, V)$ modelul care descrie jocul de cărți.

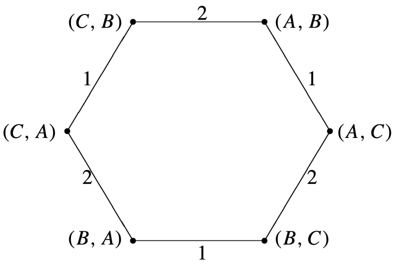
Un joc de cărți simplu



- $\mathcal{M}_c, (A, B) \Vdash 1A \wedge 2B$.

Dem.: Avem că $\mathcal{M}_c, (A, B) \Vdash 1A \wedge 2B$ ddacă $\mathcal{M}_c, (A, B) \Vdash 1A$ și $\mathcal{M}_c, (A, B) \Vdash 2B$ ddacă $(A, B) \in V(1A)$ și $(A, B) \in V(2B)$, ceea ce este adevărat.

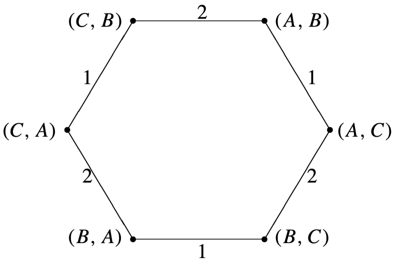
Un joc de cărți simplu



- $\mathcal{M}_c, (A, B) \Vdash \mathsf{K}_1(2B \vee 2C)$: agentul 1 știe că agentul 2 are una din cărțile B, C.

Dem.: Avem că $\mathcal{M}_c, (A, B) \Vdash \mathsf{K}_1(2B \vee 2C)$ ddacă $\mathcal{M}_c, (A, B) \Vdash 2B \vee 2C$ și $\mathcal{M}_c, (A, C) \Vdash 2B \vee 2C$ ddacă $\big(\mathcal{M}_c, (A, B) \Vdash 2B$ sau $\mathcal{M}_c, (A, B) \Vdash 2C\ \big)$ și $\big(\mathcal{M}_c, (A, C) \Vdash 2B$ sau $\mathcal{M}_c, (A, C) \Vdash 2C\ \big)$ ddacă $\big(\ (A, B) \in V(2B)$ sau $(A, B) \in V(2C)\ \big)$ și $\big(\ (A, C) \in V(2B)$ sau $(A, C) \in V(2C)\ \big)$, ceea ce este adevărat, deoarece $(A, B) \in V(2B)$ și $(A, C) \in V(2C)$ sunt adevărate.

Un joc de cărți simplu



- $\mathcal{M}_c, (A, B) \Vdash K_1 \neg 2A$: agentul 1 știe că agentul 2 nu are cartea A.
- $\mathcal{M}_c, (A, B) \Vdash K_1 \neg K_2 1A$: agentul 1 știe că agentul 2 nu știe că agentul 1 are cartea A.