Determinarea numărului minim de resurse necesare pentru a putea desfăşura toate activitățile – Problema partiționării intervalelor

Să presupunem că avem `n` activităţi (spectacole) care pentru a se desfăşura au nevoie de o resursă (sală de spectacole). Această resursă poate fi folosită de o singură activitate la un moment dat. Fiecare activitate i are un timp de start s_i şi un timp de terminare t_i, deci se poate desfăşura doar în intervalul $[s_i, t_i)$. Astfel, pe o resursă se pot planifica doar activităţi cu intervalele de desfăşurare disjuncte. Să se determine numărul minim k de resurse (săli de spectacole) de care este nevoie pentru a efectua toate activitățile (spectacolele) și o planificare a acestor activităţi pe cele k resurse.

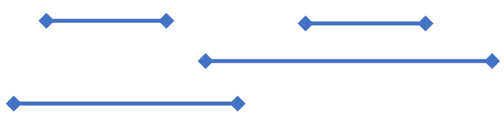
Exemplu: pentru n=3 spectacole, care trebuie să se desfăşoare în intervalele: [10, 14), [12, 16), respectiv [17, 18), sunt necesare 2 săli, o programare optimă fiind:

- Sala 1: [10, 14) – spectacolul 1, [17, 18) – spectacolul 3
- Sala 2: [12, 16) – spectacolul 2

Variantă de enunț cu intervale – Problema partiționării intervalelor: Se consideră o mulțime A de intervale închise. Să se împartă (partiţioneze) această mulţime de intervale într-un **număr minim de submulţimi** cu proprietatea că oricare două intervale dintr-o submulţime nu se intersectează şi să se afişeze aceste submulţimi

În cele ce urmează vom rezolva problema cu varianta de enunț cu spectacole: Se dau intervalele de desfăşurare pentru n spectacole. Să se determine numărul minim de săli necesare pentru a putea desfăşura toate spectacolele (într-o sală se pot programa doar spectacole cu intervale de desfăşurare disjuncte două câte două).

O posibilă încercare de a face planificarea este să programăm în sala 1 cât mai multe spectacole folosind strategia de la problema spectacolelor de la B, apoi să continuăm cu o sală nouă până epuizăm toate spectacolele. O astfel de strategie nu este însă corectă, deoarece pentru intervalele [2, 3), [1, 5), [6, 7), [4, 8) soluția obținută ar fi: sala 1: [2,3), [6,7), sala 2: [1,5), sala 3: [4,8), dar se poate și o programare în două săli: sala 1: [2,3), [4,8), sala 2: [1,5) , [6,7)



O altă abordare ar fi să considerăm pe rând spectacolele într-o anumită ordine și încearcă să programeze spectacolul curent într-o sală deja existentă; dacă nu este posibil, se programează spectacolul într-o sală nouă (nefolosită anterior). Care este însă ordinea potrivită pentru considerarea spectacolelor? Ca si la problema spectacolelor de la punctul B putem considera mai mule criterii:

- Programam întâi spectacolul cel mai scurt (pentru a ocupa cat mai puțin din sală), deci consideram spectacolele în ordine crescătoare după lungime – strategia obține tot 3 săli pentru exemplul anterior

- Programam întâi spectacolul care se termina cel mai devreme (pentru a lăsa liberă sala după terminare cât mai mult), deci consideram spectacolele în ordine crescătoare după timpul de terminare; daca există însă mai multe săli la care se poate adăuga spectacolul curent, adăugarea la prima dintre săli la care se potrivește nu duce la o soluție corectă, este similară repetării problemei spectacolelor; am putea alege însă altfel sala în care se adaugă spectacolul curent în caz că sunt mai multe opțiuni, de exemplu la cea care se termina cel mai târziu pentru a lăsa mai puțin spațiu liber prin programarea ei – este corectă o astfel de soluție?

Observație. Dacă există k intervale de desfășurare care au un punct comun, atunci este nevoie de minim k săli pentru a programa toate spectacolele (deoarece oricare două astfel de intervale trebuie să fie programate în săli diferite).

Astfel, o strategie greedy corectă ar fi să considerăm spectacolele cronologic - în ordine crescătoare după momentul de început – pentru a le repartiza în săli. Atunci, dacă un spectacol nu se poate programa într-o sală deja folosită, nevoia creării unei noi săli este justificată de observația anterioară, deoarece intervalul de început al acestui spectacol aparține câte unui interval din fiecare sală, după cum este ilustrat în desenul următor și vom detalia în demonstrarea corectitudinii.

Corectitudine Fie k numărul de săli din programarea obținută prin algoritmul de tip greedy anterior. Arătăm că există k intervale de desfășurare care au un punct comun deci, conform observației anterioare, orice programare are nevoie de minim k săli. Cum programarea greedy are nevoie de exact k săli, aceasta este optimă.
Fie $I=[s,t]$ primul interval adăugat la sala k. Atunci pentru fiecare sala $i<k$ există un interval $I_i=[s_i,t_i]$ cu care I se intersectează. Deoarece intervalele au fost considerate în ordine crescătoare după început (după extremitatea inițială), rezultă că $s \in I_i$, deci intervalele $I_1, ..., I_{k-1}$, I au în comun punctul s