## Spaţii metrice

**Definiţie.** *Fie* $X$ *o multime nevidă. O funcţie* $d : X \times X \to [0, \infty)$ *se numeşte distanţa (sau metrică) dacă:*

*i)* $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

*ii)* $d(x, y) = d(y, x)$ *pentru orice* $x, y \in X$

*iii)* $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ *pentru orice* $x, y \in X$.

*Perechea* $(X, d)$ *se numeşte spaţiu metric.*

**Definiţie.** *Fie* $(X, d)$ *un spaţiu metric, un element* $a \in X$ *şi* $r > 0$.

*i) Mulţimea* $\{x \in X : d(x, a) < r\}$ *se numeşte bila (sfera) de centru* $a$ *şi rază* $r$ *şi se notează cu* $B(a, r)$.

*ii) O mulţime* $A \subset X$ *se numeşte mărginită daca există o bilă* $B(a, r)$ *astfel încât* $A \subset B(a, r)$.

**Definiţie.** *Fie un spaţiu metric. Un şir* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ *se numeşte convergent la un element* $a \in X$ *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $d(x_n, a) < \varepsilon$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

**Observaţie**. Condiţia $d(x_n, a) < \varepsilon$ este echivalentă cu $x_n \in B(a, \varepsilon)$.

**Observaţie**. Intr-un spaţiu metric $(X, d)$, un şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ este convergent la un element $a \in X$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, a) = 0$.

**Definiţie.** *Fie* $(X, d)$ *un spaţiu metric. Un şir* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ *se numeşte Cauchy dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ *pentru orice* $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_\varepsilon$.

**Exemplu.** Perechea $(\mathbb{R}, d)$, unde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ este o funcţie dată de $d(x, y) = |x - y|$, este un spaţiu metric.

Verificare:

i) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow |x - y| = 0 \Longleftrightarrow x = y$

ii) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in X$

iii) $d(x, y) + d(y, z) = |x - y| + |y - z| \geq |x - z| = d(x, z)$ pentru orice $x, y \in X$.

Şirurile convergente în $(\mathbb{R}, d)$ sunt cele convergente în $\mathbb{R}$ după definiţia clasică.

Remarcăm că $B(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

**Observaţie.** Distanţa din exemplul anterior se numeşte distanţa canonică (standard) pe $\mathbb{R}$.

**Şiruri Cauchy în** $\mathbb{R}$.

**Definiţie**. *Un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *se numeşte Cauchy dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $|x_n - x_m| < \varepsilon$ *pentru orice* $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_\varepsilon$.

**Exemplu.** Perechea $\left(\overline{\mathbb{R}}, d_\phi\right)$, unde $\phi : \overline{\mathbb{R}} \to [-1.1]$ este o funcţie dată de $\phi(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|} \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \\ 1 \text{ dacă } x = \infty \\ -1 \text{ dacă } x = -\infty \end{cases}$ şi $d_\phi : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to [0, \infty)$ o funcţie dată de $d_\phi(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)|$, este un spaţiu metric. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ şi $a \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci $x_n \overset{d}{\to} a \iff x_n \overset{d_\phi}{\to} a$, unde $d(x, y) = |x - y|$.

Arătăm că $\phi$ este bijectivă.

Injectivitate. Dacă $x \in \mathbb{R}$ atunci $|\phi(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1$, deci $\phi(x) \notin \{-\infty, \infty\}$.

Observăm că $\phi(x) = 0 \iff x = 0$, $\phi(x) > 0 \iff x > 0$ şi $\phi(x) < 0 \iff x < 0$. Daca $\phi(x) = \phi(y)$ şi $x, y \in (0, \infty)$ rezultă că $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$, deci $x = y$.

Se verifică uşor că $\phi|_{\mathbb{R}}$ este continuă si crescătoare şi că $\phi(\mathbb{R}) = (-1, 1)$.

Proprităţile distanţei:

i) $d_\phi(x, y) = 0 \iff |\phi(x) - \phi(y)| = 0 \iff \phi(x) = \phi(y) \iff x = y$;

ii) $d_\phi(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)| = |\phi(y) - \phi(x)| = d_\phi(y, x)$ pentru orice $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$;

iii) $d_\phi(x, y) + d_\phi(y, z) = |\phi(x) - \phi(y)| + |\phi(y) - \phi(z)| \geq |\phi(x) - \phi(z)| = d_\phi(x, z)$ pentru orice $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$.

O să arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff x_n \overset{d_\phi}{\to} a$ doar in cazul în care $a, x_n \in (0, \infty)$.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, atunci $d_\phi(x_n, a) = |\phi(x_n) - \phi(a)| = \left|\frac{x_n}{1+|x_n|} - \frac{a}{1+|a|}\right| = \left|\frac{x_n}{1+x_n} - \frac{a}{1+a}\right| = \left|\frac{x_n - a}{(1+x_n)(1+a)}\right| \leq |x_n - a|$, deci $d_\phi(x_n, a) \to 0$.

Reciproc rezultă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit de un $M$ (în caz contrar există $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ astfel încât $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty \implies a = \infty$). Atunci $|x_n - a| = |(1 + x_n)(1 + a)|\, d_\phi(x_n, a) \leq (1 + M)^2 d_\phi(x_n, a)$.

**Temă:**

1) Arataţi că perechea $(\mathbb{C}, d)$, unde $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to [0, \infty)$ este o funcţie dată de $d(z, w) = |z - w|$, este un spaţiu metric. Arătaţi că un şir $(z_n = x_n + iy_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ este convergent către $z = x + iy$ dacă şi numai dacă $x_n \to x$ şi $y_n \to y$.

2) Arataţi că într-un spaţiu metric $(X, d)$ un şir constant de la un rang încolo este convergent.

3) Fie $X$ o multime nevidă. Considerăm funcţia $d : X \times X \to [0, \infty)$ dată de $d(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x = y \\ 1 \text{ dacă } x \neq y \end{cases}$. Arătaţi că $(X, d)$ este un spaţiu metric şi determinaţi şirurile convergente si bilele din $(X, d)$. Determinaţi $B(a, r)$ în $(X, d)$.

4) Fie $X$ o multime nevidă dotată cu o relaţie de echivalenţa notată cu $\sim$ şi o funcţie $d : X \times X \to [0, \infty)$ dată de $d(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x = y \\ 1 \text{ dacă } x \neq y \text{ şi } x \sim y \\ 3 \text{ dacă } x \neq y \text{ şi } x \nsim y \end{cases}$.

Arătaţi că $(X, d)$ este un spaţiu metric şi determinaţi şirurile convergente si bilele din $(X, d)$. Determinaţi $B(a, r)$ în $(X, d)$.

## MULŢIMEA $\mathbb{R}^n$

Deoarece evoluţia multor fenomene din lumea înconjurătoare depinde de mai mulţi parametri, acestea sunt modelate prin intermediul funcţiilor de mai multe variabile, adică a funcţiilor care au drept domeniu de definiţie o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$. Din acest motiv este necesar un studiu atent al proprietăţilor mulţimii $\mathbb{R}^n$.

### $\mathbb{R}^n$ ca spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$

Vom lucra în cele ce urmează cu

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{\text{n } ori} = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}.$$

**Observaţii.**

**1.** *Aşa cum uneori ne referim la* $\mathbb{R}^1$ *ca fiind dreapta reală, la fel vom numi uneori* $\mathbb{R}^2$ *planul real sau* $\mathbb{R}^3$ *spaţiul real.*

**2.** *Pentru simplificarea scrierii, vom nota* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, *iar* $x_1, x_2, ..., x_n$ *se vor numi prima componentă, a doua componentă, ...., a n-a componentă a vectorului x. Elementul* $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, ..., 0)$ *se numeşte originea sau vectorul zero al lui* $\mathbb{R}^n$. *Pentru simplitate, de multe ori, vom nota* $0_{\mathbb{R}^n}$ cu 0.

Vom introduce două operaţii algebrice pe $\mathbb{R}^n$.

**Definiţie.**

*Dacă* $c \in \mathbb{R}$ *şi* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, *atunci definim* $c \cdot x$ *(notat pe scurt cu cx), numit produsul numărului real c cu vectorul x, astfel:*

$$c \cdot x = (cx_1, cx_2, ..., cx_n) \in \mathbb{R}^n.$$

*Dacă* $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, *atunci definim* $x + y$, *numit suma vectorilor x şi y, prin*

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

**Proprietăţi.** *Pentru* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *şi* $b, c \in \mathbb{R}$, *avem:*

**1.**

$$x + y = y + x;$$

**2.**

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

**3.**

$$0 + x = x + 0 = x;$$

**4**.

$$x + (-1)x = (-1)x + x = 0;$$

**5**.

$$1x = x;$$

**6**.

$$b(cx) = (bc)x;$$

**7**.

$$c(x + y) = cx + cy \text{ şi } (b + c)x = bx + cx.$$

**Observaţii**

**1**. *Prin urmare, $\mathbb{R}^n$, cu cele două operaţii descrise mai sus, este spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$.*

**2**. *Vom folosi următoarele notaţii: $(-1)x \overset{not}{=} -x$ şi $x + (-y) \overset{not}{=} x - y$.*

**3**. *Sistemul $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, unde $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, ..., 0, 1)$, formează o bază a spaţiului vectorial real $\mathbb{R}^n$, orice vector $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ putând fi scris sub forma*

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n.$$

**Exemplu**

Considerăm funcţia $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ dată de

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_n - y_n|.$$

Atunci $d_1$ este o distanţa care are următoarele proprităţi:

a) $d_1(x, y) = d_1(x + z, y + z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

b) $d_1(ax, ay) = |a| d_1(x, y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$ şi $a \in \mathbb{R}$.

Verificări:

i) $d_1(x, y) = 0 \Longleftrightarrow |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_n - y_n| = 0 \Longleftrightarrow$
$|x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| = ... = |x_n - y_n| = 0 \Longleftrightarrow$
$x_i = y_i$ pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\} \Longleftrightarrow x = y$

ii) $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_n - y_n| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + ... + |y_n - x_n| = d_1(y, x)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

iii) $d_1(x, y) + d_1(y, z) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i - z_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \geq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i + y_i - z_i| = d_1(x, z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$

a) $d_1(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i + z_i - (y_i + z_i)| = d_1(x + z, y + z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

b) $d_1(ax, ay) = \sum\limits_{i=1}^{n} |ax_i - ay_i| = |a| \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = |a| d_1(x, y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$ şi $a \in \mathbb{R}$.

**Temă:**

1) Arătaţi ca funcţiile $d_2, d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ date de

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

şi

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, ..., |x_n - y_n|\}$$

sunt distante în $\mathbb{R}^n$.

2) Pentru $n = 2$ determinaţi şirurile convergente şi $B(0, r)$ în $d_1, d_2$ şi $d_\infty$.

3) Arătaţi că:

a) $d_2(x, y) = d_2(x + z, y + z)$ şi $d_\infty(x, y) = d_\infty(x + z, y + z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

b) $d_2(ax, ay) = |a| d_2(x, y)$ şi $d_\infty(ax, ay) = |a| d_\infty(x, y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$ şi $a \in \mathbb{R}$

c) $d_\infty(x, y) \le d_2(x, y) \le d_1(x, y) \le n d_\infty(x, y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$.

4) Folosind punctul anterior arătaţi că, pentru că un şir $(x_m)_{m \ge 1} \subset \mathbb{R}^n$ şi $x \in \mathbb{R}^n$ avem:

$x_m \overset{d_1}{\to} x \Longleftrightarrow x_m \overset{d_2}{\to} x \Longleftrightarrow x_m \overset{d_\infty}{\to} x.$

**Proprietăţile şirurilor Cauchy şi şirurilor convergente**

**Propoziţie.** *Fie* $(X, d)$ *un spaţiu metric. Atunci:*
*i) Orice şir convergent este Cauchy.*
*ii) Orice şir Cauchy este mărginit.*
*iii) Orice şir convergent este mărginit.*
*iv) Orice şir Cauchy care are un subşir convergent este convergent.*

*Demonstraţie.*

i) Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ un şir convergent la $a \in X$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_\varepsilon$. Dacă $n, m \ge n_\varepsilon$ avem

$$d(x_n, x_m) \le d(x_n, a) + d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Deci şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ este Cauchy.

ii) Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ un şir Cauchy. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \ge n_\varepsilon$. Luăm $\varepsilon = 1$. Atunci pentru orice $n \ge n_1$ avem $d(x_n, x_{n_1}) < 1 \Longleftrightarrow x_n \in B(x_{n_1}, 1)$. Fie $r = 1 + \max\{d(x_1, x_{n_1}), d(x_2, x_{n_1}), ..., d(x_{n_1}, x_{n_1})\}$. Atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $x_n \in B(x_{n_1}, r)$.

i)+ii)$\Longrightarrow$iii)

iv) Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ un şir Cauchy şi $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ un subşir al lui convergent la $a \in X$.

Deoarece şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este Cauchy rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \ge n_\varepsilon$.

Deoarece şirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ este convergent la $a \in X$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $n_{k_\varepsilon} > n_\varepsilon$ şi $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$ şi pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_\varepsilon$.

Atunci pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem

$$d(x_n, a) \leq d\left(x_n, x_{n_{k_\varepsilon}}\right) + d\left(x_{n_{k_\varepsilon}}, a\right) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Rezultă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent la $a$.

**Definiţie**. *Un spaţiu metric în care orice şir Cauchy este convergent se numeste spaţiu metric complet.*

**Exemplu.** Spaţiul metric $((0,1), d)$, unde $d : (0,1) \times (0,1) \to [0,\infty)$ este o funcţie dată de $d(x,y) = |x-y|$, nu este complet.

Şirul $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ este Cauchy dar nu este convergent.

**Temă:**

1) Fie $X$ o multime nevidă. Arătaţi că spaţiul metric $(X, d)$, unde funcţia $d : X \times X \to [0,\infty)$ este dată de $d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x = y \\ 1 \text{ dacă } x \neq y \end{cases}$, este complet.

2) Arătaţi că spaţiul metric $(\mathbb{Q}, d)$, unde $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to [0,\infty)$ este o funcţie dată de $d(x,y) = |x-y|$, nu este complet.

## LIMITA SUPERIOARĂ ŞI INFERIOARĂ A UNUI ŞIR

### Noţiunea de limită superioară şi limită inferioară pentru un şir mărginit de numere reale
### Caracterizarea convergenţei şirurilor mărginite cu ajutorul limitelor superioară şi inferioară

În această secţiune vom introduce noţiunile de limită superioară şi limită inferioară pentru un şir mărginit de numere reale care sunt utile pentru "clasificarea" şirurilor divergente.

**Noţiunea de limită superioară şi limită inferioară pentru un şir mărginit de numere reale**

Supremumul unei submulţimi $S$ a lui $\mathbb{R}$ poate fi descris ca fiind infimumul mulţimii acelor numere reale ce sunt mai mari decât orice element al lui $S$. Este util să se relaxeze această condiţie şi să se considere infimumul mulţimii acelor numere reale pentru care există numai un număr finit de elemente ale lui $S$ mai mari decât ele. Din mai multe motive, în cazul şirurilor de numere reale este important să se considere o uşoară modificare a acestui concept. Într-adevăr, un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de numere reale, furnizează o submulţime a lui $\mathbb{R}$, dar şirul posedă o structură suplimentară prin faptul că elementele sale sunt indexate după $\mathbb{N}$, deci avem aici o ordonare, care nu este prezentă în cazul unei mulţimi arbitrare de numere reale. Ca urmare, acelaşi număr poate să apară de mai multe ori în mulţimea termenilor şirului, fenomen ce nu este prezent pentru mulţimi arbitrare de numere reale. Suntem conduşi astfel la următoarea:

**Definiţie**. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir mărginit de numere reale. Atunci limita superioară a sa, notată lim sup $x_n$ sau $\overline{\lim}\, x_n$, este infimumul mulţimii numerelor reale $v$ cu proprietatea că există un număr finit de numere naturale $n$ astfel încât $v < x_n$. Altfel spus*

$$\overline{\lim}\, x_n = \inf\{v \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \,|v < x_n\} \text{ este finită}\} =$$

$$= \inf\{v \in \mathbb{R} \mid \text{există } n_v \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } x_n \leq v \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, n \geq n_v\}.$$

*Similar, fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir mărginit de numere reale. Atunci limita inferioară a sa, notată* $\liminf x_n$ *sau* $\underline{\lim} x_n$, *este supremumul mulţimii numerelor reale $v$, cu proprietatea că există un număr finit de numere naturale $n$ astfel încât $v > x_n$.*

**Observaţii:**

**1**. *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale mărginit, atunci limita superioară şi limita inferioară există şi sunt unice.*

**2**. *Unii autori folosesc notaţia lim sup $x_n = \infty$ pentru a marca faptul că şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este nemărginit superior, respectiv notaţia lim inf $x_n = -\infty$ pentru a marca faptul că şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este nemărginit inferior.*

**Definiţie**. *Pentru un şir mărginit de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mulţimea $\{x \in \mathbb{R} \,|$există un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x\}$, notată cu $\mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$, poartă numele de mulţimea punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

**Exemplu.** Considerăm şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dat de $x_n = \frac{1}{1+n} + \cos\frac{n\pi}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci

1) $x_{4k} = \frac{1}{1+4k} + \cos 2k\pi = \frac{1}{1+4k} + 1$, deci $x_{4k} \to 1$.

2) $x_{4k+2} = \frac{1}{1+4k+2} + \cos(\pi + 2k\pi) = \frac{1}{1+4k+2} - 1$, deci $x_{4k+2} \to -1$.

3) $x_{2k+1} = \frac{1}{2+2k} + \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2+2k}$, deci $x_{2k+1} \to 0$.

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are 3 punte limită $-1$, $0$ şi $1$. Limita superioară este 1 şi limita inferioară este $-1$.

**Observaţie.** *Pentru un şir mărginit de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avem:*

1)

$$\sup_{n\in\mathbb{N},\ n\geq m} x_n \geq \sup_{n\in\mathbb{N},\ n\geq m+p} x_n \geq \inf_{n\in\mathbb{N},\ n\geq m+p} x_n \geq \inf_{n\in\mathbb{N},\ n\geq m} x_n$$

*pentru orice $m, p \in \mathbb{N}$;*

2)

$$\sup_{n\in\mathbb{N},\, n\geq m} x_n \geq l^*$$

*şi*

$$l_* \geq \inf_{n\in\mathbb{N},\, n\geq m} x_n$$

*pentru orice* $m \in \mathbb{N}$;

$\sup_{n\in\mathbb{N},\, n\geq m} x_n \geq l^*$ pentru că există un număr finit de termeni ai şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care să fie mai mari decât $\sup_{n\in\mathbb{N},\, n\geq m} x_n$.

3)

$$\lim_{m\to\infty}(\sup_{n\in\mathbb{N},\, n\geq m} x_n) = \inf_{m\in\mathbb{N}}(\sup_{n\in\mathbb{N},\, n\geq m} x_n) \geq l^*$$

4) $l^* \geq l_*$;

Presupunem prin reducere la absurd că $l^* < l_*$. Avem $l^* < \frac{2l^*+l_*}{3} < \frac{l^*+2l_*}{3} < l_*$. Rezultă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are un număr finit de termeni mai mari decât $\frac{2l^*+l_*}{3}$ şi un număr finit de termeni mai mici decât $\frac{l^*+2l_*}{3}$. Cu alte cuvinte rezultă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are un număr finit de termeni (absurd).

5) Din punctele anterioare avem

$$\sup_{n\in\mathbb{N},\, n\geq m} x_n \geq \lim_{m\to\infty}(\sup_{n\in\mathbb{N},\, n\geq m} x_n) \geq l^* \geq$$

$$\geq l_* \geq \lim_{m\to\infty}(\inf_{n\in\mathbb{N},\, n\geq m} x_n) \geq \inf_{n\in\mathbb{N},\, n\geq m} x_n.$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

**Propoziţie**. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir mărginit de numere reale şi* $l^*$ *limita lui superioară. Atunci există un subşir* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *convergent la* $l^*$*.*

*Demonstraţie.*

Vom arăta mai întâi că pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $n \in \mathbb{N}$ există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $l^* - \varepsilon < x_m < l^* + \varepsilon$ şi $m > n$. Deoarece $l^* < l^* + \varepsilon$ există $n_0$ astfel încât $x_n < l^* + \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_0$. Putem presupune ca $n_0 \geq n$. Deoarece $l^* - \varepsilon < l^*$ există o infinitate de termeni ai sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strict mai mari decât $l^* - \varepsilon$, deci există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $m > n_0 \geq n$ şi $l^* - \varepsilon < x_m < l^* + \varepsilon$.

Prin inducţie obţinem un şir $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ astfel încât $n_k < n_{k+1}$ şi $l^* - \frac{1}{k+1} < x_{n_k} < l^* + \frac{1}{k+1}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Deci $l^*$ este un punct limită al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Teorema** (lema lui Cesaro)**.** *Orice şir mărginit are un subşir convergent.*

**Teorema.** *Mulţimea numerelor reale împreună cu distanţa canonică formează un spaţiu metric complet.*

**Observaţie**. *Orice şir de numere reale conţine un subşir care are limită.*

Propoziţia următoare ne furnizează modalităţi alternative pentru caracterizarea limitei superioare a unui şir mărginit de numere reale.

**Propoziţie**. *Pentru orice şir mărginit de numere reale* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$, *următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

*i)* $l^* = \overline{\lim}\, x_n$.

*ii) Sunt îndeplinite următoarele două condiţii:*

$\alpha$) *Pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un număr finit de numere naturale* $n$ *astfel încât* $l^* + \varepsilon < x_n$.

$\beta$) *Pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un număr infinit de numere naturale* $n$ *astfel încât* $l^* - \varepsilon < x_n$.

*iii)* $l^* = \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} \sup\limits_{n\in\mathbb{N},\ n\geq m} x_n$.

*iv)* $l^* = \lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{n\in\mathbb{N},\ n\geq m} x_n$.

*v)* $l^* = \sup \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \max \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

*Demonstraţie.*

i)$\Rightarrow$ii)

$\alpha$) Pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $l^* < l^* + \varepsilon$, i.e. $\inf\{v \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \,|v < x_n\}$ este finită$\} < l^* + \varepsilon$, deci există $v_0 \in \mathbb{R}$ cu următoarele două proprietăţi: a) Există un număr finit de numere naturale $n$ astfel încât $v_0 < x_n$; b) $v_0 < l^* + \varepsilon$. Prin urmare există un număr finit de numere naturale $n$ astfel încât $l^* + \varepsilon < x_n$, i.e. condiţia $\alpha$) este satisfăcută.

$\beta$) Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\beta$) nu este satisfăcută. Atunci există $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că există un număr finit de numere naturale $n$ astfel încât $l^* - \varepsilon_0 < x_n$. Drept urmare $l^* - \varepsilon_0 \in \{v \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \,|v < x_n\}$ este finită$\}$, deci $\inf\{v \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \,|v < x_n\}$ este finită$\} = l^* \leq l^* - \varepsilon_0$, i.e. $\varepsilon_0 \leq 0$. Contradicţia obţinută arată că $\beta$) este validă.

ii)$\Rightarrow$i) Condiţia $\alpha$) arată că $l^* + \varepsilon \in \{v \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \,|v < x_n\}$ este finită$\}$, deci $\inf\{v \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \,|v < x_n\}$ este finită$\} < l^* + \varepsilon$, i.e. $\overline{\lim}\, x_n < l^* + \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$. Prin urmare $\overline{\lim}\, x_n \leq l^*$. Vom arăta că inegalitatea de mai sus nu poate fi strictă. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\overline{\lim}\, x_n < l^*$. Atunci există $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că $\overline{\lim}\, x_n < l^* - \varepsilon_0$, i.e. $\inf\{v \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \,|v < x_n\}$ este finită$\} < l^* - \varepsilon_0$, deci există $v_0 \in \mathbb{R}$ cu următoarele două proprietăţi: a) există un număr finit de numere naturale $n$ astfel încât $v_0 < x_n$; b) $v_0 < l^* - \varepsilon_0$. Prin urmare există un număr finit de numere naturale $n$ astfel încât $l^* - \varepsilon_0 < x_n$, ceea ce contrazice condiţia $\beta$). Concluzionăm că $l^* = \overline{\lim} x_n$.

ii)$\Rightarrow$iii) Cu notaţia $\xi = \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} \sup\limits_{n\in\mathbb{N},\ n\geq m} x_n$, avem:

a) Conform cu $\alpha$), pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $x_n < l^* + \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, deci $\sup\limits_{n\in\mathbb{N},\ n\geq n_\varepsilon} x_n \leq l^* + \varepsilon$. Prin urmare $\xi = \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} \sup\limits_{n\in\mathbb{N},\ n\geq m} x_n \leq l^* + \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$, deci

$$\xi \leq l^*. \tag{1}$$

b) Conform cu $\beta$), pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $m \in \mathbb{N}$ există $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ cu proprietatea că $l^* - \varepsilon < x_n \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N},\ n\geq m} x_n$. Aşadar $l^* - \varepsilon < \sup\limits_{n\in\mathbb{N},\ n\geq m} x_n$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$, de unde $l^* - \varepsilon \leq \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} \sup\limits_{n\in\mathbb{N},\ n\geq m} x_n = \xi$ pentru orice $\varepsilon > 0$.

Concluzionăm că

$$l^* \leq \xi. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) deducem că $l^* = \xi$, i.e. $l^* = \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} \sup\limits_{n\in\mathbb{N},\ n\geq m} x_n$.

iii)$\Rightarrow$ii)

$\alpha$) Pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $l^* < l^* + \varepsilon$, i.e. $\inf\limits_{m\in\mathbb{N}} \sup\limits_{n\in\mathbb{N},\ n\geq m} x_n < l^* + \varepsilon$, deci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sup\limits_{n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0} x_n < l^* + \varepsilon$, de unde $x_n < l^* + \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, adică $\alpha$) este validă.

$\beta$) Pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $l^* - \varepsilon < l^*$, i.e. $l^* - \varepsilon < \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} \sup\limits_{n\in\mathbb{N},\ n\geq m} x_n \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N},\ n\geq m+1} x_n$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$. Aşadar pentru orice $m \in \mathbb{N}$ există $k_m \in \mathbb{N}$, $k_m > m$ astfel încât $l^* - \varepsilon < x_{k_m}$, deci există un şir $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ strict crescător cu proprietatea că $l^* - \varepsilon < x_{n_k}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Prin urmare şi $\beta$) este validă.

iii)$\Leftrightarrow$iv) Având în vedere faptul că şirul $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$, unde $y_m = \sup\limits_{n\in\mathbb{N},\ n\geq m} x_n$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$, este descrescător, precum şi Teorema convergenţei monotone, acestă echivalenţă decurge imediat.

ii)$\Rightarrow$v)

Vom arăta mai întâi ca pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $n \in \mathbb{N}$ există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $l^* - \varepsilon < x_m < l^* + \varepsilon$ şi $m > n$. Din condiţia $\beta$) implică faptul că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea că

$$l^* - \varepsilon < x_{n_k}, \tag{3}$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Din condiţia $\alpha$) există cel mult un număr finit de numere naturale $l_1, ..., l_p$ astfel încât $x_{l_1} > l^* + \frac{\varepsilon}{2}, ..., x_{l_p} > l^* + \frac{\varepsilon}{2}$. Alegem $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = n_k > \max\{n, l_1, ..., l_p\}$. Atunci $l^* - \varepsilon < x_m \leq l^* + \frac{\varepsilon}{2} < l^* + \varepsilon$.

Prin inducţie obţinem un şir $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ astfel incât $n_k < n_{k+1}$ şi $l^* - \frac{1}{k+1} < x_{n_k} < l^* + \frac{1}{k+1}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Deci $l^*$ este un punct limită.

Fie $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ un subşir al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea că $x_{n_k} \to a$. Din $\alpha$) rezultă că $a \leq l^* + \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$, deci $a \leq l^*$.

v)$\Rightarrow$ii)

$\alpha$) Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\alpha$) nu este validă. Atunci există $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că inegalitatea $l^* + \varepsilon_0 < x_n$ este valabilă pentru o infinitate de numere naturale $n$. Prin urmare, există un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât

$$l^* + \varepsilon_0 < x_{n_k}, \tag{4}$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Conform lemei lui Cesaro, există un subşir $(x_{n_{k_p}})_{p\in\mathbb{N}}$ al lui $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, deci şi al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, şi un element $l \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$\lim\limits_{p\to\infty} x_{n_{k_p}} = l$, deci $l \in \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Având în vedere (4), deducem că $l^* + \varepsilon_0 \leq l \leq l^*$, deci am obţinut contradicţia $\varepsilon_0 \leq 0$. Aşadar condiţia $\alpha$) este satisfăcută.

$\beta$) Pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $l^* - \varepsilon < l^*$, i.e. $l^* - \varepsilon < \sup \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$, de unde deducem că există $y \in \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ cu proprietatea că $l^* - \varepsilon < y$. Cum $y \in \mathcal{L}((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$, există un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent către $y$, deci există o infinitate de numere naturale $n$ cu proprietatea că $l^* - \varepsilon < x_n$, adică este satisfăcută şi condiţia $\beta$). $\square$

**Caracterizarea convergenţei şirurilor mărginite cu ajutorul limitelor superioară şi inferioară**

Rezultatul următor ne oferă posibilitatea de a caracteriza şirurile convergente de numere reale cu ajutorul limitei inferioare şi a limitei superioare.

**Teorema de caracterizare a şirurilor convergente cu ajutorul limitelor inferioară şi superioară**. *Pentru orice şir de numere reale mărginit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

*i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent;*

*ii) $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$.*

*În acest caz, avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$.*

*Demonstraţie.*

i)$\Rightarrow$ii) Cu notaţia $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, avem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$. Ultima inegalitate arată că $\overline{\lim}\, x_n \leq l + \varepsilon$, iar prima că $l - \varepsilon \leq \underline{\lim}\, x_n$. Prin urmare $\overline{\lim}\, x_n - \underline{\lim}\, x_n \leq 2\varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$, de unde concluzionăm că $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

ii)$\Rightarrow$i) Cu notaţia $l = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$, avem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \leq l + \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon^1$ şi există $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $l - \varepsilon \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon^2$. Atunci $l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2\}$, de unde concluzionăm că $l = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. $\square$

**Observaţie**. *Teorema de mai sus subliniază modul în care noţiunile de limită superioară şi inferioară contribuie la clasificarea şirurilor divergente prin evaluarea distanţei dintre limita inferioară şi cea superioară, anume cu cât distanţa dintre $\underline{\lim}\, x_n$ şi $\overline{\lim}\, x_n$ este mai mare, cu atât şirul în cauză este "mai divergent".*

**Exerciţii**

**1**. Să se determine punctele limită, $\underline{\lim}\, x_n$ şi $\overline{\lim}\, x_n$ pentru şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, în următoarele situaţii:

a) $x_n = \frac{2+(-1)^n}{1+n^{(-1)^n}} + \sin\frac{n\pi}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

b) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \frac{n}{2n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

c) $x_n = (1+\frac{1}{n})^n[\frac{1}{2}+(-1)^n] + \cos\frac{n\pi}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

d) $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

e) $x_n = \frac{1}{n} + \{\frac{n}{k}\}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ unde $k \in \mathbb{N}^*$.

f) $\{na\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ unde $k$este un număr iraţional.

**2. Proprităţile limitei superioare şi inferioare.**

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale mărginite. Să se arate că:

a) $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$;

b) dacă $c \geq 0$, atunci $\underline{\lim}\, cx_n = c\,\underline{\lim}\, x_n$ şi $\overline{\lim}\, cx_n = c\,\overline{\lim}\, x_n$;

b$^{'}$) dacă $c \leq 0$, atunci $\underline{\lim}\, cx_n = c\,\overline{\lim}\, x_n$ şi $\overline{\lim}\, cx_n = c\,\underline{\lim}\, x_n$;

c) $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}\, (x_n + y_n)$;

d) $\overline{\lim}\, (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$;

e) $\overline{\lim}\, (x_n + y_n) \geq \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$;

f) $\underline{\lim}\, (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$;

h) daca $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent atunci $\overline{\lim}\, (x_n + y_n) = \overline{\lim}\, x_n + \lim y_n$ si $\underline{\lim}\, (x_n + y_n) = \underline{\lim}\, x_n + \lim y_n$;

i) dacă $x_n \leq y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $\underline{\lim}\, x_n \leq \underline{\lim}\, y_n$ şi $\overline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, y_n$.

**Observaţie**. *În general, inegalităţile de mai sus sunt stricte.* Pentru a justifica acest fapt se poate studia cazurile în care $x_n = (-1)^n$ şi $y_n = (-1)^{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ sau $x_n = y_n = (-1)^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

**3**. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale strict pozitive. Să se arate că $\underline{\lim}\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim}\sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}\sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}\frac{x_{n+1}}{x_n}$. În particular, dacă şirul $(\frac{x_{n+1}}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent, atunci şi şirul $(\sqrt[n]{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.