

Curs 9 : 28 noiembrie

reamintire:

$X \rightarrow$ cont. dacă $\rightarrow f \geq 0$ a.i. $P(X \in A) = \int_A f(x) dx, \forall A \subset \mathbb{R}$
interval

Functia de repartitie $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X \in (-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \Downarrow \\ F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

* Cazul discret:

$$F(x) = \sum_{y \leq x} P(X=y) = \sum_{y \leq x} f(y)$$

Prop fct. repartitie

1) Ferse.

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

3) F este continuă la dreapta.

Obs.: Din Teorema fundamentală a analizei:

→ dacă f este continuă în x_0 atunci $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ este derivabilă în x_0 și $F'(x_0) = f(x_0)$

Dacă f densitatea de repartitie este continuă atunci F este derivabilă și $F'(x) = f(x), \forall x$.

Obs.: Dacă stim pe F atunci $f(x) = F'(x)$.

Dacă stim pe f atunci $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

notă

Ex.: Fie X o v.a. cu densitatea

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, x \in \mathbb{R}$$

X este o v.a. repartizată Logistică. \sim Logistică

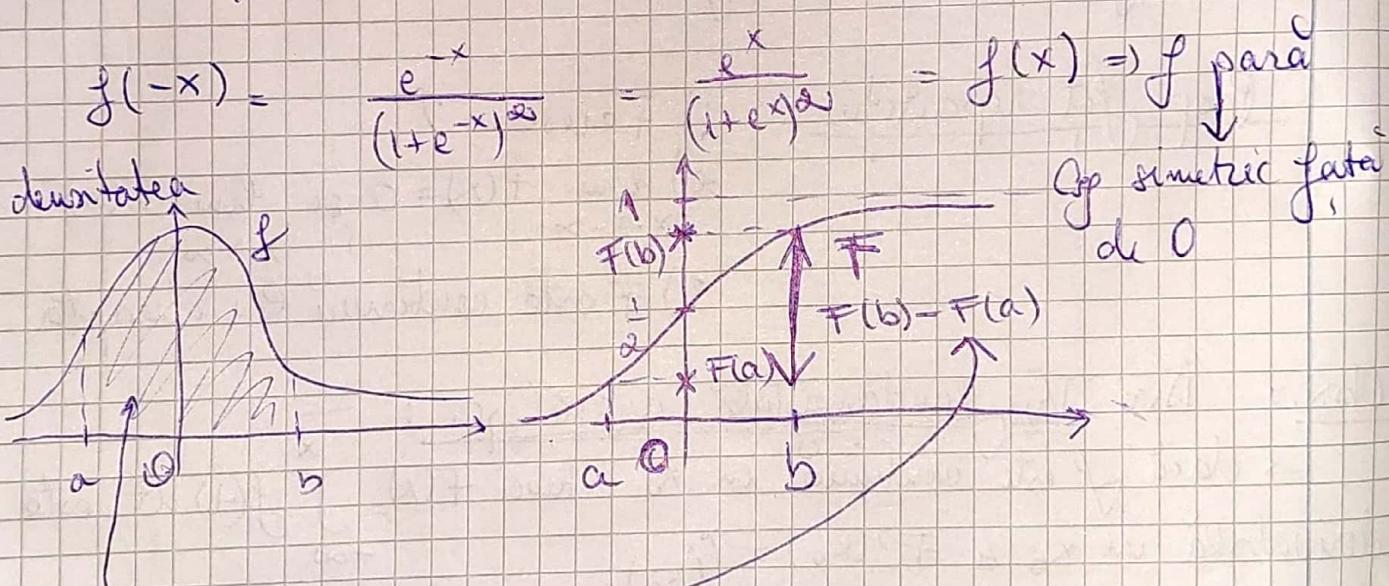
a) $F(x) = ?$

b) $P(a < X < b) = ?$; ($a = -3, b = 2$)

R) a) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{(1+e^t)^2} dt$

$$\int_0^x \frac{1}{(1+u)^2} du = -\frac{1}{1+u} \Big|_0^{e^x} = -\frac{1}{1+e^x} + 1 = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$F(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, x \in \mathbb{R}$$



b) $P(a < X < b)$

$$= P(X < b) - P(X \leq a)$$

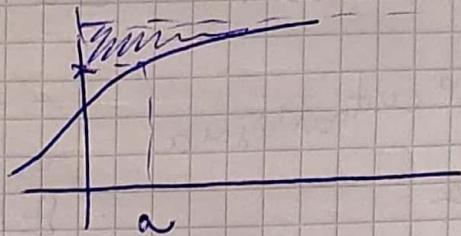
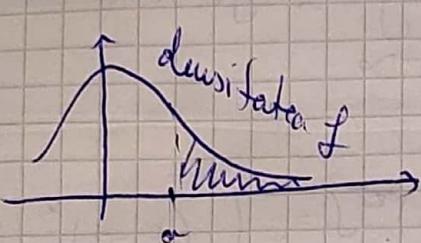
$$= P(X \leq b) - P(X \leq a) \quad (P(X=b)=0)$$

$$= F(b) - F(a)$$

$$= \frac{e^b}{1+e^b} - \frac{e^a}{1+e^a}$$

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx - / /$$

$$P(x > a) = 1 - P(x \leq a) = 1 - F(a)$$



Media și momentele u.a. cont.

Cazul discret: X v.a. discretă

$$\mathbb{E}[x] = \sum_{*} * P(x=x) = \sum_{*} * f(*)$$

$$\left(\sum |x| f(x) < \infty \right)$$

$$\text{momentul de ordin } k: \mathbb{E}[x^k] = \sum_{*} x^k P(x=x)$$

$$= \sum_{*} x^k f(*)$$

$$\text{momentul centrat în } a: \mathbb{E}[(x-a)^k] = \sum_{*} (x-a)^k f(x)$$

de ordin k

Dacă $a = \mathbb{E}[x]$ at. momentul centrat de ordin k .

$$\mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[x])^k] = \sum_{*} (x - \mathbb{E}[x])^k f(x)$$

$$\text{pt. } k=2 \text{ varianta } V(x) = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[x])^2]$$

Def.: Fie X o v.a. cont. cu densitatea rep. f. atunci

$$\text{def. } \mathbb{E}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx,$$

Dacă $\mathbb{E}[|x|] < \infty$ ($\int |x| f(x) dx < \infty$)
 în caz contrar media nu există.

— Momentul de ord k : $\mathbb{E}[x^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$

— Momentul centrat îma
de ord k :

$$\mathbb{E}[(x-\mu)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k f(x) dx$$

— Momentul centrat de
ord k :

$$\mathbb{E}[x - \mathbb{E}[x]]^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[x])^k f(x) dx$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[x])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[x])^2 f(x) dx$$

$$\boxed{\mathbb{E}[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx}$$

! Rep. mediei și ale variantei atunci în cazul discret
și patrulață și în cazul cont.

a) Dacă $X = c$ (const.) at. $\mathbb{E}[x] = c$ și $\text{Var}(x) = 0$

b) Dacă $x \geq 0$ at. $\mathbb{E}[x] \geq 0$

c) Dacă $x \geq y$ at. $\mathbb{E}(x) \geq \mathbb{E}[y]$

d) $\mathbb{E}[ax+by] = a\mathbb{E}[x] + b\mathbb{E}[y]$, $a, b \in \mathbb{R}$

e) $\text{Var}(ax+b) = a^2 \text{Var}(x)$

f) $\text{Var}(x) \geq 0$

g) Dacă $x \perp\!\!\!\perp y$ at. $\mathbb{E}[xy] = \mathbb{E}[x]\cdot\mathbb{E}[y]$ și

$$\text{Var}(xy) = \text{Var}(x) + \text{Var}(y)$$

① V.a. rep. uniformă pe $[a, b]$

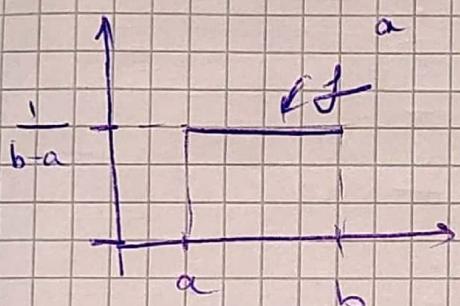
rep - reprezentat

Să punem că X este o v.a. rep. uniformă pe $[a, b]$,
 notăm $X \sim U([a, b])$, deoarece densitatea de rep. f este
 const. pe $[a, b]$.

Dacă f este densitate $\Rightarrow \begin{cases} f \geq 0 \\ \int f(x) dx = 1 \end{cases}$

Cum $f = c \rightarrow c \geq 0$

$$\int_a^b c dx = 1 \rightarrow c = \frac{1}{b-a}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(t) dt =$$

$$= \int \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \cdot \mathbb{1}_{(-\infty, t]}(t) dt$$

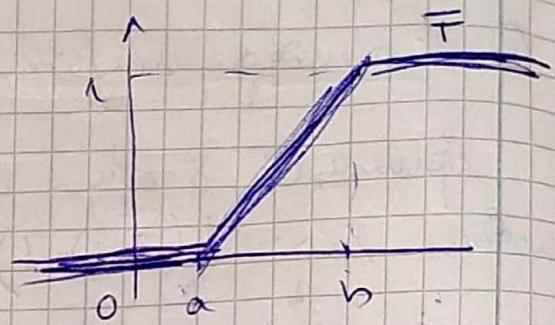
$$= \int \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b] \cap (-\infty, x]}(t) dt$$

$$= \begin{cases} 0, & x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

fd. indicator

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & ; a \leq x \leq b \\ 1 & ; x > b \end{cases}$$



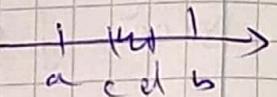
$U \sim U([a, b])$

$[c, d] \subseteq [a, b]$

$$P(U \in [c, d]) = P(U \leq d) - P(U \leq c)$$

$$= \int_c^d f(x) dx = \int_c^d \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x) dx$$

$$= \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a}$$



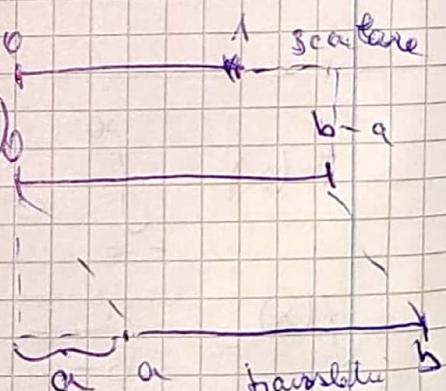
$\Rightarrow U \sim U[0, 1]$ unif standard

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{a. f. o. f.} \end{cases}$$

$$\text{Fix } V = a + (b-a)U \sim U([a, b])$$

\downarrow scale

translatic



$$P(V \leq x) = P(a + (b-a)U \leq x)$$

$$= P\left(U \leq \frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$F_V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{b=1}{a=0}$$

$a + (b-a)$ runif(b)
 \hookrightarrow runif(n, a, b)

Fie $V \sim V([a, b])$

- Metoda 1

$$\mathbb{E}[V] = ?$$

$$\int x f(x) dx = \int x \frac{1}{b-a} \cdot \mathbf{1}_{[a,b]}(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \cdot \frac{ab}{2}$$

$$\text{Var}(V) = \mathbb{E}[V^2] - \mathbb{E}[V]^2$$

momentul de ord. 2 \Rightarrow

$$\rightarrow \mathbb{E}[V^2] = \int x^2 f(x) dx = \int x^2 \frac{1}{b-a} \cdot \mathbf{1}_{[a,b]}(x) dx =$$

$$= \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$\text{Var}(V) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Metoda 2:

Fie $U \sim U([0,1])$

$$\mathbb{E}[U] = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[U^2] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\text{Var}(U) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$V = a + (b-a)U \sim U([a, b])$$

$$\mathbb{E}[V] = a + (b-a) \mathbb{E}[U] = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{Var}(V) = (b-a)^2 \cdot \text{Var}(U) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

T: calc.
num. de or. sup.

Teorema de universalitate a rep. uniforme (Th. fără a simula)

(T) Fie X_0 v.a. cu funcția de rep. F . Fie $U \sim U([0,1])$

atunci

a) Dacă ~~F^{-1}~~ $F^{-1}(u) = \inf \{x \mid F(x) \geq u\}$ funcție
arem $F^{-1}(U)$ este rep ca X

b) $F(X)$ este $U([0,1])$

am

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

Trăiem doar cauză: F cont. și str. crescătoare
(bijecțivă)

F^{-1} inversa lui F

$$\begin{aligned} P(\overbrace{F^{-1}(U)} \leq x) &\stackrel{(1)}{=} P(\overbrace{U \leq F(x)}) \\ &= F(x) = P(X \leq x) \end{aligned}$$

(1) am aplicat F

Ex. 1: X v.a. logistică

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$F(x) = u \Leftrightarrow \frac{e^x}{1+e^x} = u$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{u}{1-u} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)$$

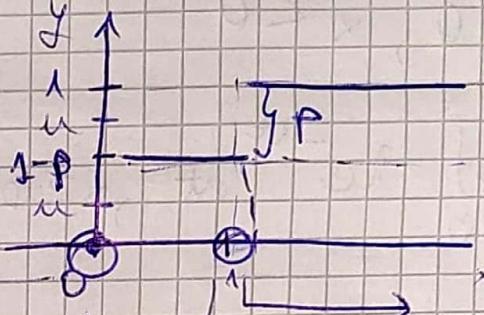
$$\Rightarrow F^{-1}(u) = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)$$

1) $U \sim U([0,1])$

2) $\ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \sim \text{logistica}$

Exp. 2: $X \sim B(p)$: $P(X=1) = p$, $P(X=0) = 1-p$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 1-p \\ 1, & u > 1-p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0, & p \leq 1-u \\ 1, & p > 1-u \end{cases}$$

$U \sim U([0,1])$

$1-U \sim U([0,1])$

$F^{-1}(U) \sim B(p)$

Alg. de generare:

Cum $U \sim U([0,1])$

Dacă $U \geq p \Rightarrow X=0$

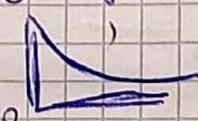
altfel $X=1$

N. a. repartizată exponentială

Dof. Fie x o v.a. spunem că X este rep. exponentială de parametru λ , numind $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, dacă densitatea

de rep. a lui X este

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \quad \text{și } \lambda > 0$$



Este o densitate?

$$f \geq 0, \quad \int f(x) dx = \int \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)} dx =$$

$$-\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty = 1$$

Căt este $F(x)$?

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x x e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(t) dt =$$
$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x x e^{-\lambda t} dt, & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a) = e^{-\lambda a}$$

f. de supraviețuire

$$\mathbb{E}[X] = \int x f(x) dx = \int x \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x) dx = \int x \lambda e^{-\lambda x} dx$$
$$= \int_0^\infty x (\cancel{-e^{-\lambda x}})' dx = \underbrace{-x e^{-\lambda x}}_0 \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^\infty$$
$$= \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int x^2 f(x) dx = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty x^2 (-e^{-\lambda x})' dx$$
$$= \underbrace{-x^2 e^{-\lambda x}}_0 \Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} dx =$$
$$= \frac{2}{\lambda^2} \mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda^2}$$

(P) Proprietatea lipsei de memorie

a) Dacă X este o v.a. rep. Exp(λ) atunci

$$\boxed{\overline{P(X \geq s+t | X \geq s)} = P(X \geq t)}$$

dacă pt. exp.!

Reipunerea

b) Dacă λ este o v.a. cont.^{zăd} care verif. $P(X \geq s+t | X \geq s) = P(X \geq t)$, $\forall s, t > 0$ atunci $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

$$\frac{P(X \geq s+t | X \geq s)}{P(X \geq s)} = \frac{P(X \geq s+t)}{P(X \geq s)}$$
$$= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(s+t)})}{1 - (1 - e^{-\lambda s})} = e^{-\lambda t} = P(X \geq t)$$

(?) $P(X \geq s+t) = P(X \geq s) \cdot P(X \geq t)$, $\forall (s, t)$

$R_{\text{al}}(s+t) = R_{\text{al}}(s) \cdot R_{\text{al}}(t)$

* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall (x, y)$ ec. func. Cauchy

③ Rep. Normală

Sug.: Fie X o v.a. spunem că X este rep. Normală

de param. μ și σ^2 , notăm $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

dacă admite ca densitate pe f)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

Obs: 1) repartitie Gaussiana

2) Dacă $\mu = 0$ și $\sigma^2 = 1$ atunci $N(0, 1)$ s.m. normală standardă și în acest caz densitatea s. u. f

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$$

Pt. normala standard, f.d. de rap. s.m.

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

1). Verificăm că f este densitate.

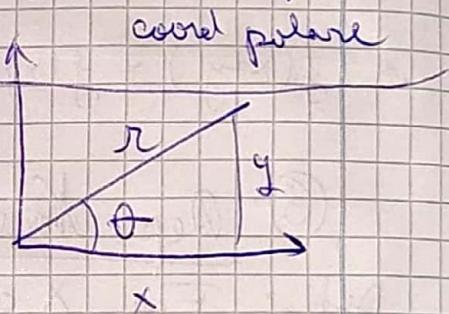
$$f(x) \geq 0 \quad (\text{exp.})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad \text{sun } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\pi}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\text{Calculăm } I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$\text{Fubini} = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \stackrel{!}{=}$$



Auxiliu pentru I

$$\int_{G'} f(x) dx = \int_G f(g(y)) |\det Jg| dy$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & r \in [0, \infty) \\ y &= r \sin \theta & \theta \in [0, \pi] \end{aligned}$$

$$[0, \infty) \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(r, \theta) \longrightarrow (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$Jg = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} d\theta dr = \int_0^{\infty} \alpha \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr \\
 &= \alpha \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \alpha \int_0^{\infty} \left(-e^{-\frac{r^2}{2}} \right)' dr \\
 &= \alpha \left(-e^{-\frac{r^2}{2}} \right) \Big|_0^{\infty} = \alpha
 \end{aligned}$$

Var?