17.10.2022

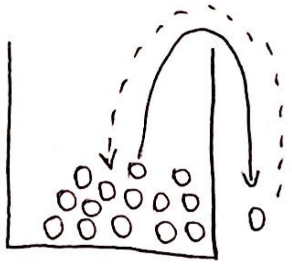
Curs 3

- P & S -

Modalități de eșantionare

1. Schema cu revenire (cu întoarcere)

Urnă cu n bile $1 \dots n$ și efectuăm k extrageri cu revenire.



În câte moduri?

Reformulare: k bile $(1 \dots k)$ și n urne

$(x_1, \dots, x_k)$, x_i - numărul urnei în care am pus bila i

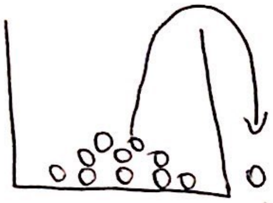
n^k moduri

Reformulare - nr. de șiruri de lungime k cu termeni oarecare din $\{1 \dots n\}$

Scanned with CamScanner

2. Schema de extragere fără revenire (fără întoarcere)

Urnă n bile $1 \ldots n$ și efectuăm k extrageri fără întoarcere



În câte moduri?

Reformulare: Numărul de șiruri de lungime k cu termeni distincți din mulțimea $\{1, \ldots, n\}$

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \text{Aranjamente}$$

	ordinea contează	ordinea nu contează
cu revenire	n^k	→ Boze-Einstein
fără revenire	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \binom{n}{k}$

Exp!

1. Câte cuv putem forma cu literele MATE

$\boxed{M, A, T, E}$

- cu revenire: $4^4 = 256$
- fără revenire: $4! = 24$

2. Cărți de 4 tipuri. Vrem să păstrăm grupate cărțile din domeniu

- 4 matematică
- 3 fizică
- 2 istorie
- 1 geografie

$$= 4!\,(4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!) =$$

4! rotiri

4!	3!	2!	1!
M	F	I	G

Exp! **Problema aniversărilor**

Avem n persoane. Vrem să vedem care este probabilitatea ca cel puțin 2 să se fi născut în aceeași zi.

Ipoteze:

- anul are 365 zile
- echirepartiție
- nu avem gemeni

Câmpul de probabilitate

$\Omega = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_i \in \{1, \dots, 365\}\}$

$|\Omega| = 365^n$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ - mulțimea evenimentelor posibile

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$

$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{365^n}$ - echirepartiță

A - cel puțin 2 persoane s-au născut în aceeași zi

$A = \{(z_1, \dots, z_n) \in \Omega \mid \exists\, i,j,\ i \neq j \text{ a.î. } z_i = z_j\}$

$\mathbb{P}(A) = ? = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\underbrace{A^c}_{\text{ev. contrar}})$

A^c - toate cele n persoane s-au născut în zile diferite

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{365 \times 364 \times \ldots \times (365-m+1)}{365^m}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-m)!}}{365^m}$$

$m = 23 \Rightarrow \mathbb{P}(A) \simeq 51\%.$

Avem m persoane și vrem să formăm comisii de câte k persoane

Reformulăm: Nr. de submulțimi cu k elem. a unei mulțimi cu m elemente.

Ordinea <u>nu</u> contează!

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = C_m^k$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \longrightarrow \frac{m!}{(m-k)!}$$

$k!$

Exp! (1) 52 cărți. Câte mâini de 5 cărți avem?

$$\binom{52}{5} = C_{52}^5$$

Exp! (2) Câte mâini de 5 cărți conțin exact 2 ași, 2 popi și o damă.

$$C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^1 = \binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{1}$$

52 cărți de joc:
- 4 culori: inimă roșie, inimă neagră, romb, treflă
- 13 figuri: 2, 3, ..., 10, J, Q, K, A

Exp 3! În jocul de Poker vrem să determinăm probabilitatea să obținem FULLHOUSE

$\ulcorner\!\to$ culori diferite

FullHouse: $\{Q, Q, 3, 3, 3\}$

$\Omega = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5 \mid \omega_i \in$ cărților de joc$\}$.

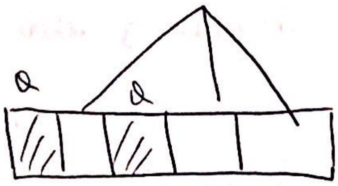
$|\Omega| = C_{52}^{5}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$

$\mathbb{P}(\{\omega_1, \dots, \omega_5\})$ echipartiție $= \dfrac{1}{\binom{52}{5}}$

A - ev. prin care am obținut FullHouse

$\cancel{\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|B|}}$ $\quad \mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$



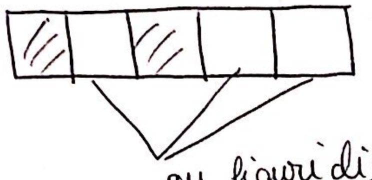
$|A| =$ putem alege figura pt pereche în $\binom{13}{1}$, iar culoarea în $\binom{4}{2}$
iar pt cele 3 cărți avem $\binom{12}{1}$ moduri de alegere a figurii
și $\binom{4}{3}$ moduri de alegere a culorii

$$|A| = \binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{1}\binom{4}{3}$$

2. o pereche

B – evenimentul prin care avem o pereche

$$\boxed{\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}^3}$$



au figuri diferite

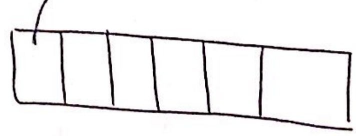
Exp! <u>Problema lui Newton – Pepys</u>

a) Cel puțin un 6 apare atunci când aruncăm 6 zaruri
b) Cel puțin 2 valori de 6 apar atunci când aruncăm 12 zaruri
c) Cel puțin 3 valori de 6 apar atunci când aruncăm 18 zaruri.

a) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^6$

A – evenimentul de interes

$\{1,\dots,5\}$



$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \mathbb{P}(A^c)$$

$$= 1 - \frac{5^6}{6^6}$$

b) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^{12}$ → nr. de aruncări

B – cel puțin 2 valori de 6 în 12 zaruri

$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c)$

$\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(\underbrace{\text{nicio valoare de 6}}\ \underset{\cup}{\text{sau}}\ \underbrace{\text{exact o valoare de 6}})$

$= \mathbb{P}(\text{nicio valoare de 6}) + \mathbb{P}(\text{exact o valoare de 6}) = \dfrac{5^{12}}{6^{12}} + \dfrac{\binom{12}{1}\cdot 5^{11}}{6^{12}}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B) = 1 - \dfrac{5^{12}}{6^{12}} - \dfrac{\binom{12}{1}\cdot 5^{11}}{6^{12}}$

c) C – ev. cel puțin 3 valori de 6 în 18 zaruri

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^{18}$

$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c)$

$\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}($niciо val de 6 sau exact una sau exact 2$)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cup \qquad\qquad\quad \cup$

$= \mathbb{P}($nicio val$) + \mathbb{P}($exact una$) + \mathbb{P}($exact 2$)$

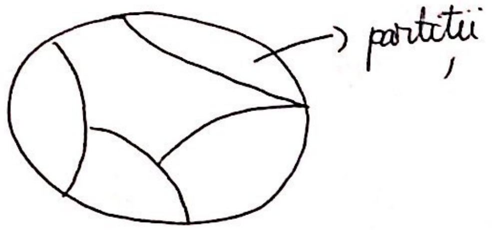
$$= \underbrace{\frac{5^{18}}{6^{18}} + \frac{\binom{18}{1} \cdot 5^{17}}{6^{18}} + \frac{\binom{18}{2} \cdot 5^{16}}{6^{18}}}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B) = 1 -$

$\Rightarrow$ Cel mai probabil eveniment este pct. a).

Partiții - coeficientul multinomial

Avem o mulțime cu n elemente și fie $n_1, n_2, \dots n_k \in \mathbb{N}$ a.î.
$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.



Considerăm o partiție cu k submulțimi a.î. submulțimea i să aibă n_i elemente.

$\boxed{k=2}$ $\quad n_1 + n_2 = n$

$$\binom{n}{n_1}$$

Echivalent cu mulțimea șirurilor de lungime n cu
n_1 elemente de tip 1
n_2 elemente de tip 2
$\vdots$
n_k elemente de tip k.

$$\binom{n}{n_1} \times \binom{n-n_1}{n_2} \times \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \times \dots \times \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k}$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_k \end{array}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,\cancel{(n-n_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\,\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1-n_2)!}}{n_3!\,\cancel{(n-n_1-n_2-n_3)!}} \cdot \dots \cdot \frac{\cancel{(n-n_1-\dots-n_{k-1})!}}{n_k!\,\underbrace{(n-n_1-\dots-n_k)!}_{0!=1}}$$

$$= \boxed{\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

Exp! 1) Nr. anagrame a cuv. MATEMATICA

M -> 2
A -> 3
T -> 2
E -> 1
I -> 1
C -> 1

$$\binom{10}{2,3,2,1,1,1}$$

2) 4 băieți și 12 fete

4 grupe de câte 4 studenți în mod <u>aleator</u>!

Care este probabilitatea ca în fiecare subgrupă să fie un băiat?

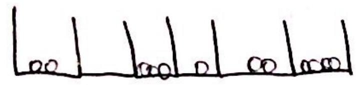
$$\binom{16}{4,4,4,4} = \frac{16!}{4!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 4!} \Rightarrow \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{\binom{16}{4,4,4,4}} \quad \text{echiprobabilitate}$$

băieţii $= 4!$ moduri

$$= \frac{4! \cdot \binom{12}{3,3,3,3}}{\binom{16}{4,4,4,4}}$$

Extragere cu revenire + ordinea nu contează (Bose – Einstein)

În câte moduri putem plasa k bile (care nu se disting între ele) în n urne care se disting între ele.



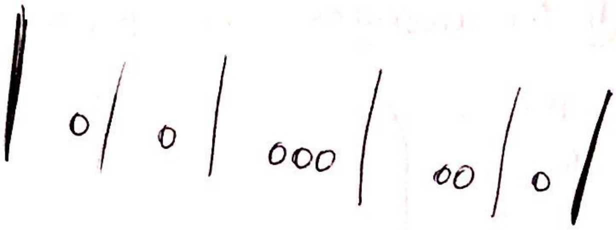
$n = 6$

$k = 12$

$n-1$ pereţi

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$

$x_i \in \mathbb{N}$



$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

Aplicație!

~~Pr~~

Problema lui de Montmort

$\begin{cases} n \text{ plicuri} \\ n \text{ scrisori} \end{cases}$

Care e prob. ca cel puțin o scrisoare să fi ajuns la destinatarul de drept?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ bijectivă.

$\Omega = S_n = \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \mid \sigma \text{ bij}\}$

$|\Omega| = n!$

$\mathbb{P}$ e echirepartiția

$A = \{\sigma \in S_n \mid \exists\, i \in \{1, \dots, n\} \text{ a.î. } \sigma(i) = i\}$

$n \to \infty \qquad 1 - \frac{1}{e}$

Fie A_j - evenimentul prin care destinatarul j a primit scrisoarea destinată lui

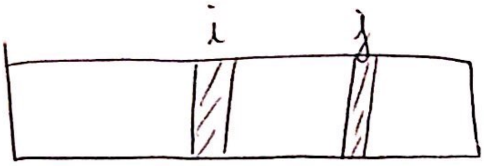
$A_j = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(j) = j\}$

$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

~~$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) \cup$~~

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots - (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{(m-1)!}{m!} = \frac{1}{m}$$



$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{|A_i \cap A_j|}{m!} = \frac{(m-2)!}{m!}$$

$$= \sum_{K=1}^{m} (-1)^{K+1} \sum_{i_1 < \dots < i_K} (A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_K})$$

$$= \sum_{K=1}^{m} (-1)^{K+1} \cdot \sum_{i_1 < \dots < i_K} \frac{(m-K)!}{m!}$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum (-1)^{K+1} \binom{m}{K} \frac{(m-K)!}{m!}$$

$$= \sum_{K=1}^{m} \frac{(-1)^{K+1}}{K!} = - \sum_{K=1}^{m} \frac{(-1)^K}{K!} =$$

$$= 1 - \underbrace{\sum_{K=0}^{m} \frac{(-1)^K}{K!}}_{m \to \infty}$$

$$1 - \frac{1}{e}.$$

$$e^x = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{x^K}{K!}$$