

Mulțimea numerelor reale \mathbb{R}

Relații

Definiție. Se numește relație pe o mulțime nevidă X , orice submulțime nevidă ρ a lui $X \times X$. Dacă $(x, y) \in \rho$, vom scrie xpy .

Definiție. O relație ρ pe o mulțime nevidă X se numește:

- reflexivă dacă xpx pentru orice $x \in X$;
- simetrică dacă $xpy \Rightarrow ypx$ pentru orice $x, y \in X$;
- antisimetrică dacă xpy și $ypx \Rightarrow x = y$ pentru orice $x, y \in X$;
- tranzitivă dacă xpy și $ypz \Rightarrow xpz$ pentru orice $x, y, z \in X$.

Definiție. O relație ρ pe o mulțime nevidă X se numește relație de echivalență dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Observație. De multe ori relația de echivalență ρ se notează prin \sim . Astfel xpy se scrie sub forma $x \sim y$.

Exemple. Relațiile de congruență, asemănare și paralelism de la geometrie și relația de congruență modulo n , unde $n \in \mathbb{N}$ și $n \geq 2$, din algebră.

Definiție. Fie \sim o relație de echivalență pe X și $x \in X$. Mulțimea $\hat{x} = \{y \in X \mid x \sim y\}$ se numește clasa de echivalență a lui x .

Observație. Fie \sim o relație de echivalență pe X și $x, y \in X$. Atunci $\hat{x} = \hat{y}$ sau $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$.

Definiție. Fie \sim o relație de echivalență pe X . Mulțimea $\{\hat{x} \mid x \in X\}$, notată X/\sim , se numește mulțimea cât (sau factor) a lui X generată de \sim .

Funcția $p : X \rightarrow X/\sim$, dată de $p(x) = \hat{x}$, pentru orice $x \in X$, se numește surjecția canonică generată de \sim .

Exemplu. Dacă pe \mathbb{Z} considerăm relația de congruență modulo 3 notată cu \equiv atunci \mathbb{Z}/\equiv este \mathbb{Z}_3 , iar $p : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_3, \oplus)$ este un morfism de grupuri.

Definiție. O relație ρ pe o mulțime nevidă X se numește relație de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.

Exemple. Relația de incluziune și relația de ordine din \mathbb{R} , relația de divizibilitate pe \mathbb{N} .

Observație. De multe ori relația de ordine ρ se notează prin \leq . Astfel $x \rho y$ se scrie sub forma $x \leq y$.

Definiție. Un cuplu (X, \leq) , unde X este o mulțime nevidă, iar \leq este o relație de ordine pe X , se numește mulțime ordonată.

Definiție. Mulțimea ordonată (X, \leq) se numește total ordonată dacă pentru orice $x, y \in X$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$ (i.e. orice două elemente sunt comparabile).

Definiție. Fie (X, \leq) o mulțime ordonată, A o submulțime nevidă a lui X și $m \in X$. Atunci

1) m se numește majorant (minorant) al lui A dacă pentru orice $a \in A$, avem $a \leq m$ (respectiv $a \geq m$).

2) Dacă există un majorant $m \in X$ al lui A , atunci spunem că A este majorată (mărginită superior). Dacă există un minorant $m \in X$ al lui A , atunci spunem că A este minorată (mărginită inferior). Dacă A este mărginită inferior și superior, atunci A se numește mărginită.

Observație. Dacă m este majorant al lui A și $m \in A$, atunci m este unic cu această proprietate și se numește maximul lui A (și se notează cu $\max(A)$) sau ultim element al lui A sau cel mai mare element al lui A . Dacă m este minorant al lui A și $m \in A$, atunci m este unic cu această proprietate și se numește minimul lui A (și se notează cu $\min(A)$) sau prim element al lui A sau cel mai mic element al lui A .

Definiție. Fie (X, \leq) o mulțime ordonată și A o submulțime nevidă majorată a lui X .

1) Se spune că A are margine superioară dacă există cel mai mic majorant (i.e. mulțimea majoranților lui A are minim, sau, altfel spus, mulțimea majoranților lui A are un cel mai mic element, adică, echivalent, mulțimea majoranților lui A are un prim element). În acest caz notăm cu $\sup A$ cel mai mic majorant al lui A . $\sup A$ se numește marginea superioară a lui A sau supremum de A .

2) Se spune că A are margine inferioară dacă există cel mai mare minorant (i.e. mulțimea minoranților lui A are maxim, sau, altfel spus mulțimea

minoranților lui A are un cel mai mare element, sau, echivalent, mulțimea minoranților lui A are un ultim element). În acest caz notăm cu $\inf A$ cel mai mare minorant al lui A . $\inf A$ se numește marginea inferioară a lui A , sau infimum de A .

Observație. Fie (X, \leq) o mulțime ordonată, A o submulțime nevidă majorată a lui X . Dacă există $\max A$, atunci există și $\sup A$ și $\sup A = \max A$.

Fie (X, \leq) o mulțime ordonată, A o submulțime nevidă minorată a lui X . Dacă există $\min A$, atunci există și $\inf A$ și $\inf A = \min A$.

Definiție. O relație de ordine \leq pe mulțimea nevidă X se numește completă dacă pentru orice submulțime nevidă majorată A a lui X există $\sup A$ și $\inf A$. Se spune în acest caz că mulțimea ordonată (X, \leq) este complet ordonată.

Exerciții

1. Fie A o mulțime și $(A_i)_{i \in I}$ o partiție a lui A (i.e. $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ și $A_i \cap A_j = \emptyset$, pentru orice $i \neq j$). Să se arate că $x \sim y$ dacă și numai dacă există $i \in I$ astfel încât $x, y \in A_i$ definește o relație de echivalență pe A , pentru care clasele de echivalență coincid cu elementele partiției considerate.

2. Fie X o mulțime nevidă. Pe $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ se consideră relația dată de $A \rho B$ dacă și numai dacă $A \subseteq B$. Să se arate că ρ este o relație de ordine care nu este totală dacă X are cel puțin două elemente.

3. Cu notațiile de la punctul 2 considerăm mulțimea $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Atunci $\sup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i$ și $\inf \mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} A_i$.

4. Considerăm mulțimea ordonată $(\mathbb{N}, |)$ și $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}$. Atunci $\sup A = \text{c.m.m.m.c}\{a_1, \dots, a_n\}$ și $\inf A = \text{c.m.m.d.c}\{a_1, \dots, a_n\}$.

Mulțimea numerelor reale \mathbb{R} (recapitulare)

Vom semnala proprietățile definitorii ale $+$, \cdot și \leq pe \mathbb{R} .

Propoziție. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este corp comutativ.

Definiție. Un element $M \in \mathbb{R}$ se numește majorant al submulțimii A a lui \mathbb{R} dacă

$$a \leq M,$$

pentru orice $a \in A$.

Definiție. O submulțime A a lui \mathbb{R} se numește majorantă (sau mărginită superior) dacă există un majorant al său.

Definiție. Dacă pentru submulțime A a lui \mathbb{R} există un majorant al său care aparține lui A acesta este unic și se numește maximul (sau cel mai mare element al lui A sau ultimul element al lui A) și se notează cu $\max A$.

Remarcă. Definiția de mai sus implică așa numita axiomă a lui Cantor care afirmă că orice submulțime nevidă și majorată a lui \mathbb{R} admite supremum.

Remarcă. Similar se definesc noțiunile de minorant, mulțime minorată și minim.

Definiție. Pentru o submulțime A a lui \mathbb{R} majorată și nevidă, mulțimea majoranților săi are un cel mai mic element care poartă numele de marginea superioară a lui A și care se notează cu $\sup A$.

Așadar $\sup A$ este cel mai mic majorant al lui A .

Remarcă. Similar se definește noțiunea de margine inferioară a unei submulțimi a lui \mathbb{R} minorată și nevidă, care se notează cu $\inf A$.

Așadar $\inf A$ este cel mai mare minorant al lui A .

Propoziție. Relația de ordine \leq pe \mathbb{R} are următoarele proprietăți:
i) este compatibilă cu structura algebrică, i.e.

a)

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z,$$

pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$;

b)

$$x \leq y \ \& \ z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz,$$

pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$;

ii) este total ordonată i.e. pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$

iii) este complet ordonată i.e. orice submulțime nevidă și majorată a lui \mathbb{R} admite supremum.

Example

1. Să se determine $\inf\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ și $\sup\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$;

Deoarece $0 \leq \frac{m}{1+m+n}$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, concluzionăm că 0 este minorant pentru mulțimea $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x > 0$ minorant al mulțimii $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$, deducem că $x < \frac{1}{n+2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n < \frac{1}{x} - 2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulțimea \mathbb{N} este mărginită, ceea ce constituie o contradicție.

Așadar $\inf\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Deoarece $\frac{m}{1+m+n} \leq 1$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, tragem concluzia că 1 este majorant pentru mulțimea $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x < 1$ majorant al mulțimii $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$, deducem că $\frac{n}{n+2} < x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n < \frac{2x}{1-x}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulțimea \mathbb{N} este mărginită, ceea ce constituie o contradicție.

Așadar $\sup\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\} = 1$.

2. Să se arate că inegalitatea $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$ este valabilă pentru orice $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, A mărginită.

Deoarece $x \leq \sup A$ pentru orice $x \in A$ și $B \subseteq A$, deducem că $\sup A$ este majorant pentru B , deci, cum $\sup B$ este cel mai mic majorant al lui B , obținem că $\sup B \leq \sup A$.

Similar se arată că $\inf A \leq \inf B$.

Temă

1. Să se determine:

i) $\inf[0, 1)$ și $\sup[0, 1)$

ii) $\inf[0, 1) \cup \{2, 3\}$ și $\sup[0, 1) \cup \{2, 3\}$

iii) $\inf(-1, 1] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ și $\sup(-1, 1] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{5}]$

iv) $\inf\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < 2n\}$ și $\sup\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < 2n\}$;

2. Să se arate că dacă A și B sunt submulțimi nevide și mărginite ale lui \mathbb{R} , atunci $\min\{\inf A, \inf B\} = \inf(A \cup B) \leq \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

3. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

ii). $f(xy) = f(x)f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Indicație. Este mai ușor să determinăm funcțiile continue (monotone) care verifică i) și ii).

Teoremă de caracterizare cu ε a marginilor unei mulțimi. Pentru orice mulțime nevidă mărginită de numere reale A și $a, b \in \mathbb{R}$, avem:

$\alpha)$ Următoarele afirmații sunt echivalente:

i) $\sup A = a$;

ii) $(x \leq a, \text{ pentru orice } x \in A)$ și (pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x' \in A$ astfel încât $a - \varepsilon < x'$).

$\beta)$ Următoarele afirmații sunt echivalente:

i) $\inf A = b$;

ii) $(b \leq x, \text{ pentru orice } x \in A)$ și (pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x' \in A$ astfel încât $x' < b + \varepsilon$).

Demonstrație.

$\alpha)$ i) \Rightarrow ii) Deoarece a este majorant al lui A , deducem că $x \leq a$ pentru orice $x \in A$. Deoarece $a - \varepsilon < a$, iar a este cel mai mic majorant al lui A , deducem că $a - \varepsilon$ nu este majorant al lui A , deci există $x' \in A$ astfel încât $a - \varepsilon < x'$.

ii) \Rightarrow i) Deoarece $x \leq a$, pentru orice $x \in A$, deducem că a este majorant al lui A .

Vom arăta acum că a este cel mai mic majorant al lui A .

Într-adevăr, să presupunem, prin reducere la absurd, că există b majorant al lui A astfel încât $b < a$. Atunci, conform Teoremei privind calitatea de corp arhimedeean a lui \mathbb{R} , există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $1 < n(a-b)$, i.e. $\frac{1}{n} < a-b$, de unde $x \leq b < a - \frac{1}{n}$ pentru orice $x \in A$, fapt care, în conformitate cu ipoteza, contrazice existența unui element $x' \in A$ astfel încât $a - \frac{1}{n} < x'$. Așadar a este cel mai mic majorant al lui A .

Prin urmare $a = \sup A$.

$\beta)$ Demonstrația este similară. \square

Temă

3. Pentru două mulțimi mărginite $A, B \subseteq \mathbb{R}$ și $a \in \mathbb{R}$ definim $a + A = \{a + x \mid x \in A\}$, $-A = \{-a \mid x \in A\}$, $A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$ și $A \cdot B = \{ab \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$. Arătați că:

i) $\sup(a + A) = a + \sup(A)$

- ii) $\sup(-A) = -\inf(A)$
- iii) $\inf(A) + \inf(B) = \inf(A + B) \leq \sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$
- iv) dacă $A \subseteq B$ atunci $\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$, i.e. marginile unei submulțimi se situează între marginile mulțimii
- v) dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, pentru orice $a \in A$ și $b \in B$, atunci $A \cdot B$ este mărginită și $\inf(A) \cdot \inf(B) = \inf(A \cdot B) \leq \sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$.

Observație. Dacă A și B nu sunt mulțimi care au toate elementele pozitive, egalitatea $\inf(A) \cdot \inf(B) = \inf(A \cdot B)$ nu mai rămâne valabilă, așa cum arată următorul exemplu: $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{-1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, pentru care $\inf A = 0$, $\inf B = -2$ și $\inf(A \cdot B) = -2$.

- vi) $A \cup B$ este mărginită și $\inf\{\inf(A), \inf(B)\} = \inf(A \cup B) \leq \sup(A \cup B) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$.

Principiul intervalelor nevide închise incluse al lui Cantor

Vom prezenta în continuare un rezultat extrem de util, echivalent cu Axioma lui Cantor și cu Criteriul lui Cauchy, care se va utiliza, spre exemplu, pentru a justifica faptul că mulțimea numerelor reale nu este numărabilă.

Principiul intervalelor nevide închise incluse al lui Cantor. Fie $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$, astfel încât:

- a) $a_n < b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
 - b) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
- Atunci $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Demonstrație. Deoarece mulțimile $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sunt minorate de a_1 și majorate de b_1 , conform Axiomei lui Cantor, există $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $b = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Deoarece $a_n \leq b_m$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, deducem că $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci $[a, b] \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$, de unde $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$. \square

Exercițiu

Să se arate că $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{2^n}) = \emptyset$.

Dreapta reală încheiată $\overline{\mathbb{R}}$

Mulțimea $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, unde elementele $-\infty$ și ∞ sunt exterioare lui \mathbb{R} și convenim că

$$-\infty < x < \infty,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, se notează cu $\overline{\mathbb{R}}$ și poartă numele de dreapta reală încheiată.

Remarcă. Dacă submulțimea nevidă A a lui \mathbb{R} nu este mărginită superior, atunci convenim să spunem că marginea superioară a lui A este ∞ și să scriem $\sup A = \infty$. Similar, dacă submulțimea nevidă A a lui \mathbb{R} nu este mărginită inferior, atunci convenim să spunem că marginea inferioară a lui A este $-\infty$ și să scriem $\inf A = -\infty$.

Remarcă. Intervalele pe $\overline{\mathbb{R}}$ se definesc similar celor pe \mathbb{R} .

Exemplu. $\sup\{\frac{n^2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \infty$ deoarece mulțimea $\{\frac{n^2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nu este mărginită superior căci $n - 1 < \frac{n^2}{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Temă. Să se determine $\inf A$ și $\sup A$ în următoarele cazuri:

- i) $A = \{x^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$;
- ii) $A = \{x^2 + x + 1 \mid x \in \mathbb{R}\}$;
- iii) $A = \mathbb{Q}$.

Intervale pe \mathbb{R}

Definiție. O mulțime se numește interval dacă pentru orice trei numere reale $a < c < b$ astfel încât $a, b \in I$ să avem $c \in I$.

Pentru $a, b \in \mathbb{R}$ considerăm următoarele mulțimi, numite intervale:

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Construcția lui \mathbb{R}

Axiomele lui Peano

Se consideră ca noțiuni primare mulțimea \mathbb{N} și o lege care asociază oricărui element $n \in \mathbb{N}$ un alt element $n' \in \mathbb{N}$ numit succesorul lui n .

AP1. Orice $n \in \mathbb{N}$ are un unic succesor (deci $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dată de $s(n) = n'$ este funcție).

AP2. Există un element din \mathbb{N} , desemnat prin 0, care are proprietatea că $n' \neq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (deci $0 \notin s(\mathbb{N})$). Notăm

AP3. Pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, avem $m' \neq n'$ (deci s este injectivă).

AP4. Dacă $S \subseteq \mathbb{N}$, $0 \in S$ și $(n \in S \Rightarrow n' \in S)$, atunci $S = \mathbb{N}$.

Din motive evidente, ultima axiomă poartă numele de axiomă inducției matematice.

Notăție. $\mathbb{N}^* = s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Adunarea pe \mathbb{N}

Definim $1 = 0'$. Fiecărui cuplu (m, n) de numere naturale i se asociază numărul natural desemnat prin $m + n$ definit prin inducție matematică după n astfel: $m + 0 = m$, $m + 1 = m'$ și $m + n' = (m + n)'$.

Înmulțirea pe \mathbb{N}

Fiecărui cuplu (m, n) de numere naturale i se asociază numărul natural desemnat prin $m \cdot n$ definit prin inducție matematică după n astfel: $m \cdot 0 = 0$, $m \cdot 1 = m$ și $m \cdot n' = mn + m$.

Relația de ordine pe \mathbb{N}

Teoremă. Dacă $m, n \in \mathbb{N}$ avem una și numai una dintre următoarele situații:

- a) $m = n$;
- b) există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $m = n + p$;
- c) există $q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n = m + q$.

Definiție. Spunem că $m \in \mathbb{N}$ este mai mic decât $n \in \mathbb{N}$, fapt care va fi notat prin $m < n$, dacă există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n = m + p$.

Observație. Pe \mathbb{N} putem introduce relația \leq dată de echivalența $n \leq m \Leftrightarrow n < m$ sau $n = m$. Conform teoremei de mai sus, \mathbb{N} , cu această relație, devine o mulțime total ordonată.

Mulțimi finite și infinite

Definiție. Un segment inițial al lui \mathbb{N} , determinat de $k \in \mathbb{N}$, este o submulțime a lui \mathbb{N} de forma $\{0, 1, 2, \dots, k\}$. O mulțime A se numește finită dacă este vidă sau dacă există o bijecție între ea și un segment inițial al lui \mathbb{N} . În caz contrar, mulțimea se numește infinită.

Mulțimi numărabile și mulțimi cel mult numărabile

Definiție. O mulțime A se numește numărabilă dacă există o bijecție între ea și \mathbb{N} . O mulțime A se numește cel mult numărabilă dacă este finită sau numărabilă.

Propoziție. Orice submulțime a unei mulțimi finite este finită. Orice submulțime a unei mulțimi numărabile este cel mult numărabilă.

Teoremă. Reuniunea unei familii finite de mulțimi finite este finită. Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.

Exemple.

1) \mathbb{Z} este numărabilă. Considerăm funcția bijectivă $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definită de $f(n) = \begin{cases} 2n & \text{dacă } n \in \mathbb{N} \\ -2n - 1 & \text{dacă } n \notin \mathbb{N} \end{cases}$.

2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă. Considerăm funcția bijectivă $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definită de $f(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$.

3) \mathbb{Q} este numărabilă.

Demonstrație. Deoarece $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$, unde $A_n = \{\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, -\frac{2}{n}, \dots\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $A_0 = \{0\}$, deducem că \mathbb{Q} este cel mult numărabilă. Cum \mathbb{Q} este infinită, deducem că \mathbb{Q} este numărabilă. \square

\mathbb{R} nu este cel mult numărabilă

Teoremă. \mathbb{R} nu este cel mult numărabilă.

Demonstrație. Deoarece mulțimea infinită \mathbb{N} este o submulțime a lui \mathbb{R} , deducem că \mathbb{R} este infinită.

Vom arăta acum că \mathbb{R} nu este numărabilă.

Într-adevăr, să presupunem, prin reducere la absurd, că \mathbb{R} este numărabilă. Atunci există x_n , unde $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $x_n \neq x_m$ pentru orice $n \neq m$ și $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Fie a_1 și b_1 cu proprietatea că $x_1 \notin [a_1, b_1]$. Împărțim intervalul $[a_1, b_1]$ în trei părți egale. Atunci cel puțin unul dintre aceste trei subintervale nu va conține pe x_2 . Așadar există a_2 și b_2 astfel încât $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$ și $x_2 \notin [a_2, b_2]$. Repetând acest procedeu, găsim a_n și b_n cu următoarele proprietăți: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ și $x_n \notin [a_n, b_n]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Conform Principiului intervalelor nevide închise incluse al lui Cantor, există $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Atunci $x \neq x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, de unde obținem contradicția $x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \mathbb{R}$. \square

Observație. Mulțimea numerelor iraționale este infinită și nu este numărabilă.

MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI \mathbb{Z}

Definiție. Pe mulțimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definim următoarea relație binară: $(m, n) \equiv (m', n') \Leftrightarrow m + n' = n + m'$.

Observație. Definiția relației binare de mai sus, care se dovedește a fi o relație de echivalență, este naturală deoarece ecuațiile $x+n = m$ și $x+n' = m'$ au aceeași soluție dacă și numai dacă $m + n' = n + m'$.

Definiție. Definim pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ două operații, anume:

- o adunare prin $(m, n) + (m', n') = (m + m', n + n')$;
- o înmulțire prin $(m, n) \cdot (m', n') = (mm' + nn', mn' + nm')$.

Definiție. Definim pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \equiv$ două operații, anume:

- o adunare prin $(\hat{m}, \hat{n}) + (\hat{m}', \hat{n}') = (\hat{m} + \hat{m}', \hat{n} + \hat{n}')$, i.e.
- $$(\hat{m}, \hat{n}) + (\hat{m}', \hat{n}') = (m, n) + (m', n');$$

- o înmulțire prin $\hat{(m, n)} \cdot \hat{(m', n')} = (mm' + nn', mn' + nm')$, i.e.
 $\hat{(m, n)} \cdot \hat{(m', n')} = \hat{(m, n)} \cdot \hat{(m', n')}$.

Observație. Definițiile adunării și înmulțirii pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \equiv$ sunt corecte, adică nu depind de reprezentanții aleși.

Definiție. Mulțimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \equiv$ înzestrată cu adunarea și înmulțirea se desemnează prin \mathbb{Z} , iar elementele sale se numesc numere întregi.

Relația de ordine pe \mathbb{Z}

Să observăm că elementele lui \mathbb{Z} , diferite de 0, sunt mulțimile de forma $\{(n + r, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ sau $\{(n, n + s) \mid n \in \mathbb{N}\}$, unde $r, s \in \mathbb{N}^*$.

Definiție. Spunem că $\alpha = \hat{(u, v)} \in \mathbb{Z}$ este pozitiv dacă $u > v$, adică dacă există $r \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\alpha = \{(n + r, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Spunem că $\alpha = \hat{(u, v)} \in \mathbb{Z}$ este negativ dacă $u < v$, adică dacă există $s \in \mathbb{N}$ astfel încât $\alpha = \{(n, n + s) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Observații

1. Orice număr întreg este fie 0, fie pozitiv, fie negativ.
2. Suma și produsul a două numere întregi pozitive sunt pozitive.

Scufundarea lui \mathbb{N} în \mathbb{Z}

Să observăm că aplicația $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, dată de $f(p) = \hat{(p, 0)}$ pentru orice $p \in \mathbb{N}$, are următoarele proprietăți:

- a) $f(p + q) = f(p) + f(q)$ pentru orice $p, q \in \mathbb{N}$;
- b) $f(pq) = f(p)f(q)$ pentru orice $p, q \in \mathbb{N}$;
- c) $p < q \Rightarrow f(p) < f(q)$ pentru orice $p, q \in \mathbb{N}$.

Prin urmare f este injectivă și, ca atare, putem identifica $p \in \mathbb{N}$ cu $f(p) \in \mathbb{Z}$, deci f generează o scufundare a lui \mathbb{N} în \mathbb{Z} .

Construcția lui \mathbb{Q}

Faptul că o ecuație precum $x \cdot 2 = 3$ nu are soluții în \mathbb{Z} ne determină să încercăm "lărgirea" mulțimii \mathbb{Z} astfel încât să putem rezolva ecuația de mai

sus în mulțimea lărgită. Cu alte cuvinte, vom introduce noi numere privite ca soluții ale unei ecuații de tipul $x \cdot n = m$, unde $m \in \mathbb{Z}$, iar $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Vom obține astfel mulțimea numerelor raționale, notată cu \mathbb{Q} . În cele ce urmează vom folosi următoarea notație: $\mathbb{Z}^* \stackrel{\text{not}}{=} \mathbb{Z} - \{0\}$.

Definiție. Pe mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ definim următoarea relație binară: $(p, q) \equiv (p', q') \Leftrightarrow p \cdot q' = q \cdot p'$.

Definiție. Definim pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ două operații, anume:

- o adunare prin $\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}$;
- o înmulțire prin $\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}$.

Observație. Definițiile adunării și înmulțirii pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \equiv$ sunt corecte, adică nu depind de reprezentanții aleși.

Definiție. Mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \equiv$ înzestrată cu adunarea și înmulțirea se desemnează prin \mathbb{Q} , iar elementele sale se numesc numere raționale.

Propoziție. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ este corp comutativ.

Relația de ordine pe \mathbb{Q}

Definiție. Spunem că un număr rațional $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ este pozitiv (negativ) dacă $pq > 0$ (< 0).

Observații

1. Definiția de mai sus este corectă, adică nu depinde de reprezentantul ales.
2. Orice număr rațional este fie 0, fie pozitiv, fie negativ.

Definiție. Spunem că numărul rațional α este mai mic decât numărul rațional β , și notăm această situație prin $\alpha < \beta$, dacă există un număr rațional pozitiv γ astfel încât $\alpha + \gamma = \beta$.

Observație. Relația binară pe \mathbb{Q} dată de $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$ este o relație de ordine totală.

Scufundarea lui \mathbb{Z} în \mathbb{Q}

Să observăm că aplicația $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, dată de $f(p) = \frac{p}{1}$ pentru orice $p \in \mathbb{Z}$, are următoarele proprietăți:

- a) $f(p + q) = f(p) + f(q)$ pentru orice $p, q \in \mathbb{Z}$;
- b) $f(pq) = f(p)f(q)$ pentru orice $p, q \in \mathbb{Z}$;
- c) $p < q \Rightarrow f(p) < f(q)$ pentru orice $p, q \in \mathbb{Z}$.

Prin urmare f este injectivă și, ca atare, putem identifica $p \in \mathbb{Z}$ cu $f(p) \in \mathbb{Q}$, deci f generează o scufundare a lui \mathbb{Z} în \mathbb{Q} .

Teorema de necompletitudine a relației de ordine pe \mathbb{Q} . Nu orice submulțime nevidă majorată a lui \mathbb{Q} are margine superioară (i.e. relația de ordine pe \mathbb{Q} nu este completă).

Demonstrație. Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, x^2 < 2\}$ are următoarele proprietăți:

- a) $A \neq \emptyset$, deoarece $1 \in A$.
- b) A este majorată, 2 fiind un majorant al său.
- c) Nu există $a \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a = \sup A$.

Iată justificarea proprietății c):

Dacă presupunem, prin reducere la absurd, contrariul, i.e. că există $a \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a = \sup A$, atunci $a \geq 1$ (căci $1 \in A$).

Ne putem plasa în una și numai una dintre următoarele două situații:

- A. $a^2 < 2$
- B. $a^2 > 2$.

Dacă ne situăm în situația A, considerăm $b = \frac{2-a^2}{2(a+1)^2} \in \mathbb{Q}$. Vom arăta că $a + b \in A$, de unde, deoarece a este majorant al lui A , obținem $a + b \leq a$, inegalitate care conduce la contradicția $b \leq 0$. Rămâne să arătăm că $a + b \in A$, i.e. $(a + b)^2 < 2$. În acest scop, să observăm că $b(a + 1)^2 = \frac{2-a^2}{2} < 1$, deci $b < \frac{1}{(a+1)^2} < 1$. Atunci $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 < a^2 + 2ab + b < a^2 + 2ab + b + a^2b = a^2 + b(a + 1)^2 = \frac{a^2+2}{2} < 2$.

Dacă ne situăm în situația B, considerăm $c = \frac{a^2-2}{2(a+1)^2} \in \mathbb{Q}$. Vom arăta că $a - c$ este majorant al lui A , deci $a \leq a - c$, inegalitate care conduce la contradicția $c \leq 0$. Rămâne să arătăm că $x \leq a - c$ pentru orice $x \in A$. Cum $x^2 < 2$ pentru orice $x \in A$, este suficient să arătăm că $2 < (a - c)^2$. Să observăm că $c < 1$, fapt echivalent cu $0 < (a+2)^2$. Atunci $(a-c)^2 = a^2 - 2ac + c^2 > a^2 - 2ac - c^2 > a^2 - 2ac - c - a^2c = a^2 - c(a+1)^2 = \frac{a^2+2}{2} > 2$.

În acest mod demonstrația este încheiată. \square

Construcția lui \mathbb{R}

Faptul că o ecuație precum $x^2 = 2$ nu are soluții în \mathbb{Q} ne determină să încercăm "lărgirea" mulțimii \mathbb{Q} astfel încât să putem rezolva ecuația de mai sus în mulțimea lărgită. Vom obține astfel mulțimea numerelor reale, notată cu \mathbb{R} .

Definiție. Un cuplu (I, J) de mulțimi disjuncte de numere raționale se numește tăietură (în \mathbb{Q}) dacă satisface următoarele trei proprietăți:

- i) pentru orice $a \in I$ și orice $a' \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a' < a$, avem $a' \in I$;
- ii) pentru orice $A \in J$ și orice $A' \in \mathbb{Q}$ astfel încât $A < A'$, avem $A' \in J$;
- iii) pentru orice $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, există $a \in I$ și $A \in J$ astfel încât $A - a < r$;
- iv) pentru orice $a \in I$ există $b \in I$ astfel încât $a < b$ și pentru orice $A \in J$ există $B \in J$ astfel încât $A < B$.

I se numește prima clasă a tăieturii, iar J se numește a doua clasă a tăieturii.

Dacă s este o tăietură, atunci notăm prima clasă a sa prin I_s , iar pe cea de-a doua prin J_s .

Lemă. Fie $I, J \subseteq \mathbb{Q}$ astfel încât $I \cap J = \emptyset$, $I, J \neq \emptyset$ și $I \cup J = \mathbb{Q}$. Dacă sunt verificate condițiile 1 și 2 din definiția tăieturii, atunci (I, J) este o tăietură.

Obsevații. Fie s o tăietură. Atunci:

- i) dacă $a \in I_s$ și $A \in J_s$, atunci $a < A$.
- ii) $I \cap J = \emptyset$, $I, J \neq \emptyset$ și $\mathbb{Q} \setminus (I \cup J)$ are cel mult un element.

Exemple

1. (I, J) , unde $I = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq 0\} \cup \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0 \text{ și } a^2 < 2\}$ și $J = \{A \in \mathbb{Q} \mid 2 < A^2\}$, este o tăietură.

2. Pentru $l \in \mathbb{Q}$, cuplul $(\{a \in \mathbb{Q} \mid a < l\}, \{A \in \mathbb{Q} \mid l < A\})$ este o tăietură, numită tăietura determinată de l și o vom nota cu (l) .

Propoziție. Fie $l \in \mathbb{Q}$ și s o tăietură în \mathbb{Q} . Dacă pentru orice $a \in I_s$ și orice $A \in J_s$, avem $a \leq l \leq A$, atunci s este tăietura determinată de l .

Adunarea pe \mathbb{R}

Definiție. Pe τ definim o adunare astfel: dacă $s, t \in \tau$, atunci $s + t = (I_{s+t}, J_{s+t})$, unde $I_{s+t} = I_s + I_t = \{a + b \mid a \in I_s \text{ și } b \in I_t\}$ și $J_{s+t} = J_s + J_t = \{A + B \mid A \in J_s \text{ și } B \in J_t\}$.

Se constată că $s + t \in \tau$.

Notație. Mulțimea τ / \equiv se va nota cu \mathbb{R} , iar elementele sale se numesc numere reale.

Observație. Dacă $s \in \tau$, atunci $(\{-A \mid A \in J_s\}, \{-a \mid a \in I_s\})$ este o tăietură pe care o vom nota cu $-s$. Dacă s este determinată de $l \in \mathbb{Q}$, atunci $-s$ este determinată de $-l$.

Observații

1. Pe \mathbb{R} se poate defini operația de scădere în modul următor: $x - y \stackrel{\text{def}}{=} x + (-y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

2. $(\mathbb{R}, +)$ este grup abelian.

Definiție. O tăietură în \mathbb{Q} se numește pozitivă (negativă) atunci când în prima clasă (în a doua clasă) a sa se află un număr rațional pozitiv (negativ).

Notație. Vom nota cu τ_+ mulțimea tăieturilor pozitive.

Propoziție. O tăietură în \mathbb{Q} este fie pozitivă, fie negativă, fie determinată de 0.

Observație. Dacă s este una dintre tăieturile determinate de $l \in \mathbb{Q}$, atunci s este pozitivă (negativă) dacă și numai dacă $l > 0$ ($l < 0$).

Propoziție. Suma a două tăieturi pozitive (negative) este o tăietură pozitivă (negativă).

Definiție. Un număr real se numește pozitiv (negativ) atunci când are ca reprezentant o tăietură pozitivă (negativă).

Înmulțirea pe \mathbb{R}

Definiție. Pe τ_+ definim o înmulțire astfel: dacă $s, t \in \tau_+$, atunci $s \cdot t = (I_{s \cdot t}, J_{s \cdot t})$, unde $I_{s \cdot t} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{ab \mid a \in I_s, a > 0 \text{ și } b \in I_t, b > 0\}$ și $J_{s \cdot t} = \{AB \mid A \in J_s \text{ și } B \in J_t\}$.

Se constată că $s \cdot t \in \tau$.

Observații

1. Se constată că dacă $s, t \in \tau_+$, atunci $s \cdot t$ este pozitivă și că înmulțirea în τ_+ este asociativă și comutativă.

2. Pentru $s \in \tau_+$, definim tăietura, notată s^{-1} , dată de $(I_{s^{-1}}, J_{s^{-1}})$, unde $I_{s^{-1}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{\frac{1}{A} \mid A \in J_s\}$ și $J_{s^{-1}} = \{\frac{1}{a} \mid a \in I_s \text{ și } a > 0\}$. Evident $s^{-1} \in \tau_+$.

Proprietăți

1. Dacă $s \in \tau_+$, atunci $s \cdot s^{-1} = (1)$.

2. Dacă $s, t, u \in \tau_+$, atunci $s \cdot (t + u) = s \cdot t + s \cdot u$.

3. Dacă s, s' și s'' sunt cele trei tăieturi determinate de $l \in \mathbb{Q}, l > 0$, iar t este o tăietură de speța a doua, atunci $s \cdot t = s' \cdot t = s'' \cdot t$ este o tăietură de speța a doua.

4. Dacă $l, l' \in \mathbb{Q}, l, l' > 0$, atunci $(l) \cdot (l') = (ll')$.

Definiție. Definim înmulțirea în \mathbb{R} astfel:

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \hat{s}t, & \alpha, \beta > 0 \\ -\alpha \cdot (-\beta), & \alpha > 0, \beta < 0 \\ -(-\alpha) \cdot \beta, & \alpha < 0, \beta > 0 \\ (-\alpha) \cdot (-\beta), & \alpha < 0, \beta < 0 \\ 0, & \alpha = 0 \text{ sau } \beta = 0 \end{cases},$$

unde $\alpha = \hat{s}$ și $\beta = \hat{t}$, $s, t \in \tau$.

Scufundarea lui \mathbb{Q} în \mathbb{R}

Să observăm că aplicația $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $f(r) = \hat{r}$ pentru orice $r \in \mathbb{Q}$, are următoarele proprietăți:

- a) $f(r + r') = f(r) + f(r')$ pentru orice $r, r' \in \mathbb{Q}$;
- b) $f(rr') = f(r)f(r')$ pentru orice $r, r' \in \mathbb{Q}$;
- c) $r < r' \Rightarrow f(r) < f(r')$ pentru orice $r, r' \in \mathbb{Q}$.

Prin urmare f este injectivă și, ca atare, putem identifica $r \in \mathbb{Q}$ cu $f(r) \in \mathbb{R}$, deci f generează o scufundare a lui \mathbb{Q} în \mathbb{R} .

Definiție. Elementele mulțimii $\mathbb{R} - f(\mathbb{Q})$ se numesc numere iraționale.

Relația de ordine pe \mathbb{R} este completă

Teorema de mai jos marchează una dintre deosebirile esențiale dintre \mathbb{Q} și \mathbb{R} . Ea este echivalentă cu Principiul intervalor nevide închise incluse și cu Criteriul lui Cauchy. Aceste trei fapte echivalente constituie o trăsătură definitorie a lui \mathbb{R} care explică de ce se "face" Analiză Matematică pe \mathbb{R} și nu pe \mathbb{Q} .

Teorema privind completitudinea relației de ordine pe \mathbb{R} . *Orice submulțime nevidă majorată a lui \mathbb{R} are margine superioară (i.e. relația de ordine pe \mathbb{R} este completă).*

Demonstrație. Fie A o submulțime nevidă majorată a lui \mathbb{R} . Prin urmare, există $\alpha \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x \leq \alpha$ pentru orice $x \in A$. Fie $I = \{r \in \mathbb{Q} \mid \text{există } x' \in A \text{ astfel încât } r < x'\}$ și $J = \{r \in \mathbb{Q} \mid x \leq r \text{ pentru orice } x \in A\}$. Să observăm că $I \neq \emptyset$, $J \neq \emptyset$ (deoarece $\alpha \in J$), $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J = \mathbb{Q}$ și că sunt verificate primele două proprietăți din definiția tăieturii. Atunci, conform lemei ce urmează definiției tăieturii, (I, J) este o tăietură pe care o vom nota cu s .

Vom arăta că $M \stackrel{\text{def}}{=} s$ este marginea superioară a lui A .

Afirmația 1. *M este majorant al lui A .*

Justificarea afirmației 1. Dacă presupunem, prin reducere la absurd, că M nu este majorant al lui A , atunci există $x \in A$ astfel încât $M < x$. Conform celei de a patra proprietăți a relației de ordine pe \mathbb{R} , există $r \in \mathbb{Q}$ astfel încât $M = \hat{s} < r < x$, deci $r \in I$ și drept urmare, având în vedere cea de a treia proprietate a relației de ordine pe \mathbb{R} , obținem contradicția $r \leq M$.

Afirmația 2. *M este cel mai mic majorant al lui A .*

Justificarea afirmației 2. Dacă presupunem, prin reducere la absurd, că există un majorant M_1 al lui A astfel încât $M_1 < M$, atunci alegem $r \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $M_1 < r < M$. Drept urmare $r \in J$ (deoarece $x \leq M_1 < r$, pentru orice $x \in A$), de unde contradicția $M \leq r$.

Din cele două afirmații de mai sus, deducem că $M = \sup A$. \square

Privire abstractă asupra sistemului numerelor reale

Vom prezenta definiția "abstractă" a mulțimii numerelor reale, adică vom pune în evidență lista proprietăților definitorii ale lui \mathbb{R} .

Definiție. O mulțime nevidă \mathbb{R} pe care sunt definite două operații interne, $+$ (adunarea) și \cdot (înmulțirea), precum și o relație de ordine \leq , se numește o mulțime a numerelor reale dacă:

- i) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este corp comutativ;
- ii) \leq este compatibilă cu structura de corp, i.e.
 - ii a) pentru orice $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $y \geq 0$ și $a \leq b$, rezultă $a + x \leq b + x$ și $a \cdot y \leq b \cdot y$;
 - ii b) pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem $a \geq 0$ sau $a \leq 0$;
- iii) pentru orice submulțime A a lui \mathbb{R} , care este nevidă și mărginită superior, există $\sup A$.

Observație. În condițiile definiției de mai sus, relația de ordine este totală. Afirmția de la iii) este cunoscută sub numele de Axioma lui Cantor.

În capitolul precedent am construit un model pentru mulțimea numerelor reale (anume modelul lui Dedekind). Deoarece există și alte modele pentru \mathbb{R} (precum cel al lui Cauchy sau cel al lui Weierstrass), se pune problema unicității sistemului numerelor reale. Această problemă este rezolvată de următoarea

Teorema privind unicitatea sistemului numerelor reale. Dacă $(\mathbb{R}', +, \cdot, \leq)$ și $(\mathbb{R}'', +, \cdot, \leq)$ satisfac condițiile definiției de mai sus, atunci există o (unică) funcție surjectivă $f: \mathbb{R}' \rightarrow \mathbb{R}''$ astfel încât:

- $\alpha)$ $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}'$;
- $\beta)$ $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}'$;
- $\gamma)$ $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}'$.

Mai mult, avem:

- $\delta)$ pentru orice submulțime A a lui \mathbb{R}' care este nevidă și mărginită superior, $f(A)$ este nevidă și mărginită superior și $\sup f(A) = f(\sup A)$.

Demonstrație (schiță).

Se poate arăta că:

$$f(0') = 0'' \quad (x = y = 0' \text{ în } \alpha)$$

$$f(1') = 1'' \quad (x = y = 1' \text{ în } \beta)$$

$f(n') = n''$ pentru orice $n' \in \mathbb{N}'$ (prin inducție) ($n' = \underbrace{1' + \dots + 1'}_{n \text{ ori}}$)

$f(n') = n''$ pentru orice $n' \in \mathbb{Z}'$ (deoarece $f(-x) = -f(x)$)

$f(r') = r''$ pentru orice $n' \in \mathbb{Q}'$ (din β)($r' = \frac{n'}{m'}$ si $r'' = \frac{n''}{m''}$).

În final definim $f(x) = \sup_{\mathbb{R}''} \{f(r') \mid r' < x\} = \inf_{\mathbb{R}''} \{f(r') \mid r' > x\}$.

Observații

1. Prin urmare, din punct de vedere abstract, există o unică mulțime de numere reale. Orice obiect care se încadrează în definiția de mai sus se va numi mulțimea numerelor reale și se va nota cu \mathbb{R} .

2. Mulțimea numerelor naturale \mathbb{N} se definește, în acest context al prezentații axiomatice a mulțimii numerelor reale, ca fiind cea mai mică submulțime a lui \mathbb{R} care conține pe 0 și care are proprietatea ca pentru orice element x al său, $x + 1$ este, de asemenea, un element al său. Cu notațiile $1 + 1 = 2$, $1 + 1 + 1 = 3$, etc, avem $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Mulțimea numerelor întregi \mathbb{Z} se definește ca fiind $\mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$, unde $-\mathbb{N} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$, mulțimea numerelor raționale \mathbb{Q} se definește ca fiind $\{mn^{-1} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$, iar mulțimea numerelor iraționale \mathbb{Q} se definește ca fiind $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

\mathbb{R} este un corp arhimedeean

Următorul rezultat pune în evidență o proprietate esențială a sistemului numerelor reale, anume aceea care afirmă că orice număr real strict pozitiv adunat cu el însuși de un număr suficient de ori se va poziționa la dreapta oricărui alt număr real.

Teorema privind calitatea de corp arhimedeean a lui \mathbb{R} . Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a < nb$, i.e. \mathbb{R} este un corp arhimedeean.

Demonstrație. Să presupunem, prin reducere la absurd, că există $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ astfel încât $nb \leq a$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci mulțimea de numere reale $A = \{nb \mid n \in \mathbb{N}\}$ este nevidă și majorată, deci, există $z = \sup A$. Prin urmare, avem $mb + b = (m + 1)b \leq z$, i.e. $mb \leq z - b$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$. Așadar $z - b$ este un majorant al lui A și cum z este cel mai mic majorant al lui A , obținem că $z \leq z - b$, i.e. contradicția $b \leq 0$. \square

Observație. Teorema anterioară arată că pentru orice număr real există un număr natural mai mare decât el. Prin urmare \mathbb{N} este nemărginită superior.

Exerciții

1. Să se arate că pentru $x \in [0, \infty)$, următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) $x = 0$;
- b) $x \leq \frac{1}{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
- c) $x \leq \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$.

2. Să se arate că $\inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = 0$.

3. Pentru orice numere reale $x < y$ există un număr rațional r astfel încât $x < r < y$.

Funcțiile exponențială și logaritmică

În cele ce urmează vom introduce funcțiile exponențială și logaritmică.

Puterea de exponent natural a unui număr real

Definiție. Pentru $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$, definim x^n , inductiv, astfel: $x^0 = 1$, $x^1 = x$ și $x^{n+1} = x^n \cdot x$.

Proprietăți. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$ și $n, m \in \mathbb{N}^*$, avem:

- 1. $x^n = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$;
- 2. $1^n = 1$;
- 3. $(xy)^n = x^n y^n$;
- 4. dacă $x \neq 0$, atunci $(\frac{1}{x})^n = \frac{1}{x^n}$;
- 5. $0 < x < y \Rightarrow 0 < x^n < y^n$;
- 6. dacă $n \geq 2$, atunci $0 < x < 1 \Rightarrow x^n < x$ și $x > 1 \Rightarrow x^n > x$;
- 7. $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ și $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$.

Puterea de exponent rațional a unui număr real pozitiv

Observație. Pentru $a \in \mathbb{R}$ și $n \geq 2$, folosind faptul că este un corp complet ordonat, putem defini $\sqrt[n]{a} = \sup\{x \mid x > 0 \text{ și } x^n < a\} = \inf\{x \mid x > 0 \text{ și } x^n > a\}$.

Pentru început vom prezenta o teoremă de punct fix care ne va fi utilă în definirea rădăcinii aritmetice de ordin n a unui număr real pozitiv.

Definiție. O funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, unde $A \subseteq \mathbb{R}$, se numește:

- crescătoare (respectiv strict crescătoare) dacă pentru orice $x, y \in A$ avem: $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (respectiv $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$);

- descrescătoare (respectiv strict descrescătoare) dacă pentru orice $x, y \in A$ avem: $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (respectiv $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$).

O funcție care este crescătoare sau descrescătoare se numește monotonă, iar o funcție care este strict crescătoare sau strict descrescătoare se numește strict monotonă.

Teorema de punct fix a lui Knaster. Pentru orice funcție crescătoare $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, există $x_0 \in [a, b]$ astfel încât $f(x_0) = x_0$.

Demonstrație. Mulțimea $M = \{x \in [a, b] \mid x \leq f(x)\}$ este nevidă (căci $a \in M$) și majorată (de exemplu, b este un majorant al lui M), deci există $\sup M \stackrel{\text{not}}{=} x_0 \in [a, b]$ (căci, pe de o parte, $a \in M$, deci $a \leq x_0$, iar, pe de altă parte, $M \subseteq [a, b]$, deci $x_0 \leq b$).

Având în vedere că f este crescătoare și că x_0 este majorant pentru M , deducem că $x \leq f(x) \leq f(x_0)$ pentru orice $x \in M$. Prin urmare $f(x_0)$ este majorant pentru M și cum x_0 este cel mai mic majorant al lui M , obținem că

$$x_0 \leq f(x_0). \quad (1)$$

Din ultima inegalitate, folosind faptul că f este crescătoare, deducem că $f(x_0) \leq f(f(x_0))$, deci $f(x_0) \in M$ și cum x_0 este majorant pentru M , deducem că

$$f(x_0) \leq x_0. \quad (2)$$

Din (1) și (2), concluzionăm că $f(x_0) = x_0$. \square

Propoziția privind existența rădăcinii aritmetice de ordin n .

Pentru orice $x \in [0, \infty)$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$ există un unic $a \in [0, \infty)$ astfel încât $a^n = x$.

Demonstrație. Fie $f : [0, x+1] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $f(t) = t + \frac{x-t^n}{n(x+1)^n}$ pentru orice $t \in [0, x+1]$.

Afirmația 1. f este crescătoare.

Justificarea afirmației 1. Totul decurge din relațiile

$$f(t_2) - f(t_1) = (t_2 - t_1) \left[1 - \frac{t_2^{n-1} + t_2^{n-2}t_1 + \dots + t_2t_1^{n-2} + t_1^{n-1}}{n(x+1)^{n-1}} \right]$$

și

$$1 - \frac{t_2^{n-1} + t_2^{n-2}t_1 + \dots + t_2t_1^{n-2} + t_1^{n-1}}{n(x+1)^{n-1}} \geq 0,$$

care sunt valabile pentru orice $t_1, t_2 \in [0, x+1]$.

Afirmația 2. $f([0, x+1]) \subseteq [0, x+1]$.

Justificarea afirmației 2. Deoarece f este crescătoare, avem $f([0, x+1]) \subseteq [f(0), f(x+1)]$ și cum $f(0) = \frac{x}{n(x+1)^{n-1}} \geq 0$ și $f(x+1) = x+1 + \frac{x-(x+1)^n}{n(x+1)^{n-1}} \leq x+1$, deducem că $f([0, x+1]) \subseteq [0, x+1]$.

Din cele două afirmații, conform teoremei de punct fix a lui Knaster, există $a \in [0, x+1]$ astfel încât $f(a) = a$, i.e. $a^n = x$.

Unicitatea lui a decurge din faptul că, pentru $a_1, a_2 \in [0, \infty)$, este validă următoarea echivalență: $a_1 < a_2 \Leftrightarrow a_1^n < a_2^n$. \square

Definiție. a se numește rădăcina aritmetică de ordin n a lui x și vom folosi notația $a \stackrel{\text{not}}{=} x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Definiție. Pentru $x \in (0, \infty)$ și $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q}$, cu $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ și $q \in \mathbb{N}$, elementul $(x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$, care nu depinde de fracția $\frac{p}{q}$ care reprezintă pe r , se numește puterea de exponent r a lui x și se va nota cu x^r .

Dacă $r \in \mathbb{Q}$ și $r < 0$, definim $x^r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x^{-r}} = (\frac{1}{x})^{-r}$.

Puterea de exponent real a unui număr real pozitiv și funcția logaritmică

Propoziție. Pentru orice $x \in (0, \infty)$, $x > 1$ (respectiv $x < 1$) există o unică funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ astfel încât:

- a) f este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare);
- b) $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$;
- c) $f(1) = x$.

Observații

1. Dacă $a \in \mathbb{Q}$, atunci $f(a) = x^a$.

2. Mai general, pentru $a \in \mathbb{R}$, avem:

α) $f(a) = \sup\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ și } r < a\} = \inf\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ și } r > a\}$ pentru orice $x > 1$ și $a \in \mathbb{R}$;

β) $f(a) = \inf\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ și } r < a\} = \sup\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ și } r > a\}$ pentru orice $x < 1$ și $a \in \mathbb{R}$.

3. Funcția de mai sus este surjectivă.

4. Funcția de mai sus se numește funcția exponențială de bază x și se notează cu \exp_x , iar, pentru $x \neq 1$, inversa ei se numește funcția logaritmică de bază x și se notează cu \log_x .

Pentru $x > 1$, funcția \log_x este strict crescătoare, iar pentru $x < 1$ funcția \log_x este strict descrescătoare.

Mai mult, avem $\log_x(x) = 1$ și $\log_x(ab) = \log_x(a) + \log_x(b)$ pentru orice $a, b \in (0, \infty)$.

5. Pentru $a \in \mathbb{R}$ funcția $p : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $p(x) = \begin{cases} x^a, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, se numește funcția putere de exponent a .

6. Pentru orice $x, y \in (0, \infty)$ și orice $a \in \mathbb{R}$, avem $(xy)^a = x^a y^a$.