INTEGRALA IMPROPRIE

Integrala Riemann tratează funcţii mărginite care au domeniul de definiţie o mulţime compactă. Dacă se renunţă la una dintre aceste ipoteze, teoria prezentată nu mai este valabilă fără a se opera anumite schimbări. Întrucât în multe aplicaţii este de dorit să se opereze cu funcţii care nu sunt mărginite sau care nu au domeniul de definiţie o mulţime compactă, vom prezenta teoria integralei şi în acest caz.

Integrala improprie: cazul funcţiilor nemărginite

Definiţie. *Fie* $J = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ *şi* f *o funcţie cu valori reale, al cărei domeniu de definiţie conţine pe* $(a,b]$. *Să presupunem că* f *este integrabilă Riemann, pe orice interval* $[c,b]$, *unde* $c \in (a,b]$. *Dacă există* $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a}} \int\limits_{c}^{b} f \in \mathbb{R}$, *o vom numi integrala improprie a lui* f *pe* $J = [a,b]$ *şi o vom nota cu* $\int\limits_{a+}^{b} f$ *sau cu* $\int\limits_{a+}^{b} f(x)dx$.

Observaţii

1. *Aşadar*

$$\int\limits_{a+}^{b} f = \lim_{\substack{c\to a\\ c>a}} \int\limits_{c}^{b} f \in \mathbb{R}.$$

2. *De multe ori semnul + din limita inferioară de integrare este omis.*

3. *Discuţia precedentă a tratat funcţiile care nu sunt definite sau nu sunt mărginite în capătul din stânga al intervalului. Este evident cum se tratează cazul în care funcţia are un comportament similar în capătul din dreapta al intervalului. Mai interesant este cazul în care funcţia nu este definită sau nu este mărginită într-un punct interior al intervalului. Dacă* p *este un punct interior intervalului* $[a,b]$, *iar funcţia* f *este definită în orice punct din* $[a,b]$, *exceptând eventual pe* p, *şi dacă există integralele improprii* $\int\limits_{a}^{p-} f$ *şi* $\int\limits_{p+}^{b} f$, *atunci definim integrala improprie a lui* f, *pe* $[a,b]$, *ca fiind suma celor* *două integrale improprii anterioare. Altfel spus, definim integrala improprie a lui f pe $[a,b]$ ca fiind* $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int\limits_{a}^{p-\varepsilon} f + \lim\limits_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \int\limits_{p+\delta}^{b} f$.

Exemple

1. *Fie $J=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ şi f o funcţie mărginită cu valori reale al cărei domeniu de definiţie conţine pe $(a,b]$. Dacă f este integrabilă Riemann pe orice interval $[c,b]$, unde $c\in(a,b]$, atunci există $\int\limits_{a+}^{b} f$. Spre exemplu, funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ dată de $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ pentru orice $x\in(0,\infty)$, este integrabilă impropriu pe $[0,1]$.*

2. *Funcţia dată de $f(x)=\frac{1}{x}$, pentru orice $x\in(0,1]$, nu este integrabilă impropriu pe $[0,1]$.*

3. *Funcţia dată de $f(x)=x^{\alpha}$, pentru orice $x\in(0,1]$, este integrabilă impropriu pe $[0,1]$, pentru $\alpha\in(-1,\infty)$ şi nu este intergrabilă impropriu pe $[0,1]$, pentru $\alpha\in(-\infty,-1)$.*

Exemplu. Să se arate că $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \frac{1}{\ln 2}$.

Soluţie. Avem

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int\limits_{t}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int\limits_{\ln t}^{\ln\frac{1}{2}} \frac{1}{y^2}dy = -\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{1}{y}\,\Big|_{\ln t}^{-\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Exerciţiu. Să se arate că $\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}$.

Integrala improprie infinită: cazul domeniilor nemărginite

Definiţie. *Fie $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, unde $a\in\mathbb{R}$, o funcţie integrabilă Riemann pe $[a,c]$ pentru orice $c>a$. Dacă există $\lim\limits_{c\to\infty}\int\limits_{a}^{c} f\in\mathbb{R}$, o vom numi integrala improprie a lui f pe $[a,\infty)$ şi o vom nota cu $\int\limits_{a}^{\infty} f$ sau cu $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$.*

Observaţii

1. *Aşadar*

$$\int_a^\infty f = \lim_{c\to\infty}\int_a^c f \in \mathbb{R}.$$

2. *În mod similar se poate introduce* $\int\limits_{-\infty}^{a} f$ *pentru o funcţie* $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$*, unde* $a \in \mathbb{R}$*, iar* f *este integrabilă Riemann pe* $[c, a]$ *pentru orice* $c < a$.

3. *Putem considera de asemenea cazul funcţiilor definite pe* $\mathbb{R}$*. În acest caz cerem ca* f *să fie integrabilă Riemann pe orice interval din* $\mathbb{R}$ *şi considerăm* $\lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_b^a f \overset{not}{=} \int\limits_{-\infty}^{a} f$ *şi* $\lim\limits_{c\to\infty}\int\limits_a^c f \overset{not}{=} \int\limits_a^\infty f$*. Este uşor de demonstrat că dacă cele două limite de mai sus există pentru o anume valoare a lui* a*, atunci ele există pentru orice valoare a lui* a*. În acest caz definim integrala improprie a lui* f *pe* $\mathbb{R}$ *(sau integrala infinită a lui* f *pe* $\mathbb{R}$*) ca fiind suma integralelor de mai sus, adică:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f + \lim_{c\to\infty}\int_a^c f.$$

Exemple

1. Fie $a > 0$. Integrala infinită a funcţiei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \frac{1}{x}$ pentru orice $x \in [a, \infty)$, nu există.

2. Fie $a > 0$ şi $\alpha \neq -1$. Atunci integrala infinită a funcţiei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = x^\alpha$ pentru orice $x \in [a, \infty)$, nu există pentru $\alpha > -1$, dar există pentru $\alpha < -1$.

3. Integrala infinită a a funcţiei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = e^{-x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, există şi este 1.

Exemplu. Să se arate că $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx = 0$.

Soluţie. Avem

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^4} dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2}\lim_{t\to-\infty} arctgx^2 \,|_t^0 = -\frac{\pi}{4}.$$

Similar se arată că

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{4},$$

de unde obţinem că

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^4}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^4}dx + \int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}dx = 0.$$

Exerciţiu. Să se arate că $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

Observaţie. *Putem considera de asemenea cazul funcţiilor definite pe* $\mathbb{R}$. *În acest caz cerem ca* f *să fie integrabilă Riemann pe orice interval din* $\mathbb{R}$ *şi considerăm* $\lim\limits_{b\to-\infty}\int_b^a f \overset{not}{=} \int_{-\infty}^a f$ *şi* $\lim\limits_{c\to\infty}\int_a^c f \overset{not}{=} \int_a^\infty f$. *Este uşor de demonstrat că dacă cele două limite de mai sus există pentru o anume valoare a lui* a, *atunci ele există pentru orice valoare a lui* a. *În acest caz definim integrala improprie a lui* f *pe* $\mathbb{R}$ *(sau integrala infinită a lui* f *pe* $\mathbb{R}$*) ca fiind suma integralelor de mai sus, adică:* $\int_{-\infty}^\infty f = \lim\limits_{b\to-\infty}\int_b^a f + \lim\limits_{c\to\infty}\int_a^c f$. *Este clar că dacă există cele două limite de mai sus, atunci există şi limita* $\lim\limits_{c\to\infty}(\int_{-c}^a f + \int_a^c f)$ *şi* $\int_{-\infty}^\infty f = \lim\limits_{b\to-\infty}\int_b^a f + \lim\limits_{c\to\infty}\int_a^c f = \lim\limits_{c\to\infty}(\int_{-c}^a f + \int_a^c f)$.

Criteriul lui Cauchy pentru integrala improprie infinită. *Fie* $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, *unde* $a \in \mathbb{R}$, *o funcţie integrabilă Riemann pe* $[a,c]$ *pentru orice* $c > a$. *Atunci următoarele două afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\int_a^\infty f$ *există.*

ii) Pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $K_\varepsilon \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\left|\int_c^b f\right| < \varepsilon$ *pentru orice* $b \geq c \geq K_\varepsilon$.

Criteriul de convergenţă pentru integrala improprie infinită a unei funcţii pozitive. *Fie* $f : [a,\infty) \to [0,\infty)$, *unde* $a \in \mathbb{R}$, *o funcţie* *integrabilă Riemann pe $[a, c]$, pentru orice $c > a$. Atunci următoarele două afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\int\limits_a^\infty f$ *există.*

ii) Mulţimea $\{I_c \mid c \geq a\}$ *este mărginită.*

În acest caz $\int\limits_a^\infty f = \sup\limits_{c \geq a} \int\limits_a^c f$.

Criteriu de comparaţie cu inegalităţi pentru integrala improprie infinită. *Fie $f, g : [a, \infty) \to [0, \infty)$, unde $a \in \mathbb{R}$, două funcţii integrabile Riemann pe $[a, c]$, pentru orice $c > a$, cu proprietatea că $0 \leq f(x) \leq g(x)$, pentru orice $x \in [a, \infty)$. Atunci, dacă există* $\int\limits_a^\infty g$ *există şi* $\int\limits_a^\infty f$. *În plus, avem* $0 \leq \int\limits_a^\infty f \leq \int\limits_a^\infty g$.

Criteriu de comparaţie la limită pentru integrala improprie infinită. *Fie $f, g : [a, \infty) \to [0, \infty)$, unde $a \in \mathbb{R}$, două funcţii integrabile Riemann pe $[a, c]$, pentru orice $c > a$, astfel încât:*

i) există $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$;

ii) $g(x) > 0$, *pentru orice* $x \in [a, \infty)$;

iii) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$.

Atunci integralele $\int\limits_a^\infty g$ *şi* $\int\limits_a^\infty f$ *au aceeaşi natură; altfel spus ele există sau nu, simultan.*

Ca şi în cazul seriilor, putem discuta despre convergenţa absolută a unei integrale.

Noţiunea de convergenţă absolută

Fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$, o funcţie integrabilă Riemann pe $[a, c]$, pentru orice $c > a$. Atunci $|f|$ este integrabilă Riemann pe $[a, c]$, pentru orice $c > a$. Deoarece $-|f| \leq f \leq |f|$, deducem, în baza Criteriului lui Cauchy pentru integrala improprie infinită, că dacă există $\int\limits_a^\infty |f|$, atunci există şi $\int\limits_a^\infty f$, şi, mai mult, avem $\left| \int\limits_a^\infty f \right| \leq \int\limits_a^\infty |f|$.

Definiţie. *Fie* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, *unde* $a \in \mathbb{R}$. *Dacă există* $\int\limits_a^\infty |f|$ *spunem că* f *este absolut integrabilă pe* $[a, \infty)$ *sau că* $\int\limits_a^\infty f$ *converge absolut.*

INTEGRALA IMPROPRIE INFINITĂ CU PARAMETRU

Continuitatea în raport cu parametrul
Teorema de inversare a ordinii de integrare
Derivabilitatea în raport cu parametrul

Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o funcţie continuă. Se presupune că există $F(t) = \int\limits_a^\infty f(x, t)dx$ pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$. Vom arăta că dacă această convergenţă este uniformă (în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$), atunci F este continuă, iar integrala sa poate fi calculată schimbând ordinea de integrare. Un rezultat corespunzător va fi demonstrat pentru derivată.

Continuitatea în raport cu parametrul

Teorema de continuitate în raport cu parametrul pentru integrala improprie infinită. *Fie* $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, *unde* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *o funcţie continuă astfel ca pentru orice* $t \in [\alpha, \beta]$ *există* $F(t) = \int\limits_a^\infty f(x, t)dx$, *iar această convergenţă este uniformă (în raport cu* $t \in [\alpha, \beta]$*). Atunci* F *este continuă.*

Teorema de inversare a ordinii de integrare pentru integrala improprie infinită cu parametru. *În ipotezele anterioare, avem* $\int\limits_\alpha^\beta F(t)dt = \int\limits_a^\infty (\int\limits_\alpha^\beta f(x, t)dt)dx$, *adică* $\int\limits_\alpha^\beta (\int\limits_a^\infty f(x, t)dx)dt = \int\limits_a^\infty (\int\limits_\alpha^\beta f(x, t)dt)dx$.

Derivabilitatea în raport cu parametrul

Teorema de derivabilitate în raport cu parametrul pentru integrala improprie infinită. *Fie* $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, *unde* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *având următoarele proprietăţi:*

i) f este continuă;

ii) $\frac{\partial f}{\partial t}$ este continuă;

iii) există $F(t) = \int\limits_a^\infty f(x,t)dx$, pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$;

iv) $G(t) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$ converge uniform (în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$).

Atunci:

α) F este derivabilă.

β) $F' = G$, i.e. $\frac{\partial}{\partial t}(\int\limits_a^\infty f(x,t)dx) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$.

Demonstraţie. Considerând, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $F_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ dată de $F_n(t) = \int\limits_a^{a+n} f(x,t)dx$ pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$, conform Teoremei de derivabilitate în raport cu parametrul pentru integrala Riemann, F_n este derivabilă şi $F_n'(t) = \int\limits_a^{a+n} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$. Cum şirul $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către F, iar şirul $(F_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către G, deducem, folosind Teorema de permutare a limitei cu derivata, că $F' = G$. $\square$

Funcţia Gama

Funcţia $\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$, *dată de*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t} dt,$$

pentru orice $x \in (0,\infty)$, *numită funcţia Gama, are următoarele proprietăţi:*

α)

$$\Gamma(1) = 1.$$

β)

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

γ)

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

pentru orice $x \in (0,\infty)$.

În particular, avem

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

δ)

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

pentru orice $x \in (0,1)$.

Funcţia Beta

Funcţia $B : (0,\infty) \times (0,\infty) \to (0,\infty)$, *dată de*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt,$$

pentru orice $x, y \in (0,\infty)$, *numită funcţia Beta, are următoarele proprietăţi:*

α)

$$B(x,y) = B(y,x),$$

pentru orice $x, y \in (0,\infty)$.

β)

$$B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}t\cos^{2y-1}t\,dt,$$

pentru orice $x,y\in(0,\infty)$.

Legătura dintre funcţiile Gama şi Beta

Legătura dintre cele două funcţii este dată de formula

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

care este valabilă pentru orice $x,y\in(0,\infty)$.

Exemple

1. Să se calculeze $\Gamma(1)$.

Soluţie. Avem

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-t}dt=\lim_{x\to\infty}\int_0^{x}e^{-t}dt=-\lim_{x\to\infty}e^{-t}\mid_0^x=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{e^x})=1.$$

2. Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{5}{2}}x\cos^{\frac{3}{2}}x\,dx$.

Soluţie. Avem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{5}{2}}x\cos^{\frac{3}{2}}x\,dx=\frac{1}{2}B(\frac{7}{4},\frac{5}{4})=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{7}{4})\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{7}{4}+\frac{5}{4})}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{7}{4})\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(3)}=$$

$$=\frac{1}{4}\Gamma(\frac{3}{4}+1)\Gamma(\frac{1}{4}+1)=\frac{1}{4}\frac{3}{4}\frac{1}{4}\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{4})=\frac{3}{64}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{3\pi\sqrt{2}}{64}.$$

Exerciţii

1. Să se calculeze $\int_0^{\infty}x^6e^{-2x}dx$ şi $\int_0^{2}x\sqrt[3]{8-x^3}dx$.

INTEGRALA CURBILINIE

Vom considera acum integrala unui funcţii al cărui domeniu de definiţie este un drum.

Integrala curbilinie de prima speţă

Definiţie. *Fie:*
- $D \subseteq \mathbb{R}^3$;
- $f : D \to \mathbb{R}$ *continuă;*
- $\gamma = (x, y, z) : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *astfel încât:*

i) $\gamma([a, b]) \subseteq D$;

ii) γ *este drum neted (i.e.* x, y *şi* z *sunt derivabile, cu derivatele continue şi* $(x^{'}(t))^2 + (y^{'}(t))^2 + (z^{'}(t))^2 \neq 0$ *pentru orice* $t \in [a, b]$*).*

Integrala

$$\int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt =$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t)) \left\|\gamma^{'}(t)\right\| dt$$

se numeşte integrala curbilinie de prima speţă a funcţiei f *pe drumul* γ *şi se notează cu*

$$\int_\gamma f(x, y, z)ds.$$

Observaţii

1. *Aşadar*

$$\int_\gamma f(x, y, z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

2. *Similar se defineşte integrala curbilinie de prima speţă pentru drumuri în plan.*

3. *Dacă* $f \equiv 1$, *atunci integrala curbilinie de prima speţă a funcţiei* f *pe drumul* γ *reprezintă lungimea drumului* γ. *Aşadar*

$$\textit{lungimea lui } \gamma = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt =$$

$$= \int_a^b \left\| \gamma'(t) \right\| dt$$

4. *Dacă imaginea lui* γ *este un fir material având densitatea* $f > 0$, *atunci* $\int_\gamma f(x, y, z) ds$ *reprezintă masa firului.*

Exemplu. Să se calculeze $\int_\gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds$, unde $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ este descris de $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ pentru orice $t \in [0, 1]$.

Soluţie. Avem

$$\int_\gamma \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} ds = \int_0^1 \frac{1}{\sin^2 t + \cos^2 t + t^2} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt = \sqrt{2} arctgt \mid_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Exerciţiu. Să se calculeze $\int_\gamma z(x^2 + y^2) ds$, unde $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ este descris de $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$ pentru orice $t \in [0, 2\pi]$.

Integrala curbilinie de a doua speţă

Definiţie. *Fie:*
- $D \subseteq \mathbb{R}^3$
- $P, Q, R : D \to \mathbb{R}$ *continue;*
- $\gamma = (x, y, z) : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *astfel încât:*

i) $\gamma([a,b]) \subseteq D$;

ii) γ *este drum neted.*

Integrala

$$\int_a^b P(\gamma(t))x^{'}(t) + Q(\gamma(t))y^{'}(t) + R(\gamma(t))z^{'}(t)dt =$$

$$= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma^{'}(t)dt,$$

unde $F = (P, Q, R)$, *se numeşte integrala curbilinie de a doua speţă a formei diferenţiale* $Pdx + Qdy + Rdz$ *pe drumul* γ *şi se notează cu*

$$\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz.$$

Observaţii

1. *Aşadar*

$$\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int_a^b P(x(t), y(t), z(t))x^{'}(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y^{'}(t) + R(x(t), y(t), z(t))z^{'}(t)dt.$$

2. *Similar se defineşte integrala curbilinie de a doua speţă a formei diferenţiale* $Pdx + Qdy$ *pentru drumuri în plan.*

3. $\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz$ *reprezintă lucrul mecanic efectuat de câmpul de forţe* (P, Q, R) *de-a lungul lui* γ.

Observaţie. *Legătura dintre integrala curbilinie de a doua speţă şi cea de prima speţă este dată de următoarea formulă:*

$$\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_\gamma F \cdot \frac{\gamma^{'}(t)}{\|\gamma^{'}(t)\|}dt,$$

unde $F = (P, Q, R)$.

Exemplu. Să se calculeze $\int\limits_\gamma x dx + xy dy + xyz dz$, unde $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ este descris de $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ pentru orice $t \in [0,1]$.

Soluţie. Avem

$$\int\limits_\gamma x dx + xy dy + xyz dz = \int\limits_0^1 (e^{2t} - e^{-t} + 2t) dt = \frac{e^2}{2} + e^{-1} - \frac{1}{2}.$$

Exerciţiu. Să se calculeze $\int\limits_\gamma (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, unde $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ este descris de $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ pentru orice $t \in [0, 2\pi]$.