INTEGRALA MULTIPLĂ

În acest capitol vom extinde noţiunea de integrală Riemann înlocuind intervalul de integrare cu anumite submulţimi din plan sau din spaţiu.

Vom numi mulţimi măsurabile acele mulţimi din $\mathbb{R}^2$ care au arie (vezi cursul) şi acele mulţimi din $\mathbb{R}^3$ care au volum (vezi cursul).

Noţiunea de interval închis n-dimensional

Definiţie. *O submulţime I a lui $\mathbb{R}^n$ de forma $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$, unde $a_1, b_1, a_2, b_2, ...a_n, b_n$ sunt numere reale, se numeşte interval închis n-dimensional, iar intervalele $[a_1, b_1], [a_2, b_2], ...$şi $[a_n, b_n]$ se numesc laturile intervalului I.*

Partiţiile $a_1 = x_1^1 < x_2^1 < ... < x_{m_1-1}^1 < x_{m_1}^1 = b_1$, $a_2 = x_1^2 < x_2^2 < ... < x_{m_2-1}^2 < x_{m_2}^2 = b_2$, ..., $a_n = x_1^n < x_2^n < ... < x_{m_n-1}^n < x_{m_n}^n = b_n$ ale intervalelor $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., respectiv $[a_n, b_n]$, generează o colecţie de intervale închise n-dimensionale de forma $[x_{k_1-1}^1, x_{k_1}^1] \times [x_{k_2-1}^2, x_{k_2}^2] \times ... \times [x_{k_n-1}^n, x_{k_n}^n]$, unde $k_1 \in \{1, 2, ..., m_1\}$, $k_2 \in \{1, 2, ..., m_2\}$, ..., $k_n \in \{1, 2, ..., m_n\}$, numită partiţie a lui I şi notată cu $\mathcal{G} = \{I_1, I_2, ..., I_p\}$.

Partiţiile intervalelor $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., respectiv $[a_n, b_n]$ se notează cu $P_1(\mathcal{G})$, $P_2(\mathcal{G})$, ..., $P_n(\mathcal{G})$.

O partiţie $\mathcal{G}$ a lui I se numeşte mai fină decât o altă partiţie $\mathcal{H}$ a lui I dacă $P_i(\mathcal{G})$ este mai fină decât $P_i(\mathcal{G})$, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Definiţie. *Volumul unui interval închis n-dimensional $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$ se defineşte ca fiind $v(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n)$.*

Observaţia 1. *Pentru orice interval închis n-dimensional I şi orice $\varepsilon > 0$ există un interval închis n-dimensional $\widetilde{I}$ astfel încât $I \subseteq \overset{\circ}{\widetilde{I}}$ şi $v(\widetilde{I}) = v(I) + \varepsilon$.*

Măsura interioară Jordan şi măsura exterioară Jordan

Definiţie. *Pentru un interval închis n-dimensional I, o partiţie $\mathcal{G} = \{I_1, I_2, ..., I_p\}$ a sa şi o submulţime E a lui I, definim:*

- *suma exterioară a lui E corespunzătoare partiţiei $\mathcal{G}$ ca fiind* $V(E,\mathcal{G}) = \sum_{I_j \cap \overline{E} \neq \emptyset} v(I_j)$;

- *suma interioară a lui E corespunzătoare partiţiei $\mathcal{G}$ ca fiind* $v(E,\mathcal{G}) = \sum_{I_j \subseteq \overset{\circ}{E}} v(I_j)$, *unde, prin convenţie, suma după mulţimea vidă este zero.*

Următoarea observaţie arată că putem controla diferenţa dintre suma exterioară a lui E corespunzătoare partiţiei $\mathcal{G}$ şi suma interioară a lui E corespunzătoare partiţiei $\mathcal{G}$ cu ajutorul sumei exterioare a mulţimii $Fr(E)$ corespunzătoare partiţiei $\mathcal{G}$.

Observaţie. *Fie I un interval închis n-dimensional şi E o submulţime a lui I. Atunci $V(E,\mathcal{G}) - v(E,\mathcal{G}) = V(Fr(E),\mathcal{G})$ pentru orice partiţie $\mathcal{G}$ a lui I.*

Observaţie. *Fie I un interval închis n-dimensional, E o submulţime a lui I şi $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ două partiţii ale lui I. Atunci $0 \leq v(E,\mathcal{G}) \leq V(E,\mathcal{H})$.*

Definiţie. *Fie I un interval n-dimensional şi $E \subseteq I$. Atunci definim:*
- *măsura interioară Jordan a lui E ca fiind* $\mu_*(E) = \sup\limits_{\mathcal{G} \text{ partiţie a lui } I} v(E,\mathcal{G})$;
- *măsura exterioară Jordan a lui E ca fiind* $\mu^*(E) = \inf\limits_{\mathcal{G} \text{ partiţie a lui } I} V(E,\mathcal{G})$.

Observaţie. *Definiţia de mai sus este coerentă, i.e. nu depinde de intervalul n-dimensional ales I.*

Mulţimi măsurabile Jordan

Definiţie. *O submulţime mărginită E a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte măsurabilă Jordan dacă $\mu_*(E) = \mu^*(E)$. În acest caz, $\mu_*(E) = \mu^*(E)$ se notează cu $\mu(E)$ şi poartă numele de măsura Jordan a lui E.*

Observaţia următoare ne furnizează o caracterizare alternativă a mulţimilor măsurabile Jordan.

Observaţie. *Pentru orice submulţime mărginită E a lui $\mathbb{R}^n$, avem $0 \leq \mu_*(E) \leq \mu^*(E)$. Mai mult, mulţimea E este măsurabilă Jordan dacă şi numai dacă $\mu^*(E) \leq \mu_*(E)$.*

Definiţie. *O familie* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de mulţimi măsurabile Jordan se numeşte nesuprapusă (respectiv familie de mulţimi disjuncte) dacă* $\mu(E_n \cap E_m) = 0$ *(respectiv* $E_n \cap E_m = \emptyset$*) pentru orice* $n \neq m$.

Observaţie. *O familie de mulţimi măsurabile Jordan disjuncte este o familie nesuprapusă, însă reciproca nu este validă (aşa cum arată cazul unei partiţii a unui interval* n*-dimensional).*

Observaţie. *Orice interval închis* n*-dimensional* I *este o mulţime măsurabilă Jordan şi* $\mu(I) = v(I)$.

Observaţie. *Fie* E *o submulţime a lui* $\mathbb{R}^n$. *Atunci* E *este măsurabilă Jordan cu măsura Jordan nulă dacă şi numai dacă* $\mu^*(E) = 0$. *Mai mult, dacă o submulţime* E *a lui* $\mathbb{R}^n$ *are proprietatea că* $\mu^*(E) = 0$, *atunci orice submulţime* E_0 *a lui* E *este măsurabilă Jordan şi* $\mu^*(E_0) = 0$.

Observaţie. *Submulţimea* $E_0 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\}$ *a lui* $E = [0, 1] \times [0, 1]$ *nu este măsurabilă Jordan.*

Teoremă. *Fie* E *o submulţime mărginită a lui* $\mathbb{R}^n$. *Atunci* E *este măsurabilă Jordan dacă şi numai dacă* $\mu(Fr(E)) = 0$.

Teoremă. *Fie* E *o submulţime mărginită a lui* $\mathbb{R}^n$. *Atunci următoarele două afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\mu(E) = 0$

ii) Pentru orice $\varepsilon > 0$ *există o familie finită de intervale* n*-dimensionale* $\{I_1, I_2, ..., I_p\}$ *(unde* $I_k = [a_1^k, b_1^k] \times [a_2^k, b_2^k] \times ... \times [a_n^k, b_n^k]$, $k \in \{1, 2, ..., p\}$ *şi există* s *astfel încât* $b_j^k - a_j^k = s$, *pentru orice* $k \in \{1, 2, ..., p\}$ *şi orice* $j \in \{1, 2, ..., n\}$*) cu proprietatea că* $\overline{E} \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} I_k$ *şi* $\sum_{k=1}^{p} v(I_k) < \varepsilon$.

Observaţie. *Fie* E_1 *şi* E_2 *mulţimi măsurabile Jordan din* $\mathbb{R}^n$. *Atunci:*

a) Dacă $E_1 \subseteq E_2$, *atunci* $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$.

b) $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$ *şi* $E_1 - E_2$ *sunt măsurabile Jordan.*

c) Dacă E_1 *şi* E_2 *sunt disjuncte, atunci* $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.

d) Dacă $E_1 \subseteq E_2$, *atunci* $\mu(E_2 - E_1) = \mu(E_2) - \mu(E_1)$.

e) $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1 \cap E_2)$. *În particular este validă următoarea inegalitate:* $\mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2)$.

Definiţie. *Fie* $X \neq \emptyset$ *şi* $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{A}$ *se numeşte inel de mulţimi dacă:*

i) $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$;

ii) $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 - A_2 \in \mathcal{A}$.

Definiţie. *Fie* $\mathcal{A}$ *un inel de mulţimi. O funcţie* $m : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ *se numeşte măsură dacă are loc egalitatea* $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$ *pentru orice* $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ *cu proprietatea că* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Observaţie. *În cadrul definiţiei anterioare, avem:*

α) $(A_1, A_2 \in \mathcal{A},\ A_1 \subseteq A_2) \Rightarrow m(A_1) \leq m(A_2)$;

β) $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow m(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \leq m(A_1) + ... + m(A_n)$.

Observaţie. *Mulţimea* $J(\mathbb{R}^n)$ *a submulţimilor lui* $\mathbb{R}^n$ *care sunt măsurabile Jordan este un inel de mulţimi, iar funcţia* $\mu : J(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ *dată de* $\mu(E)$ *ca fiind măsura Jordan a lui* E*, este o măsură pe* $J(\mathbb{R}^n)$ *numită măsura Jordan pe* $\mathbb{R}^n$.

Definiţie. *O măsură* $m : J(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ *se numeşte invariantă la translaţii dacă* $m(x + E) = m(E)$ *pentru orice* $E \in J(\mathbb{R}^n)$ *şi orice* $x \in \mathbb{R}^n$.

Observaţie. *Măsura Jordan pe* $\mathbb{R}^n$ *este invariantă la translaţii.*

Integrala Riemann pentru funcţii mărginite definite pe mulţimi măsurabile

Definiţie. *Pentru o mulţime măsurabilă* E *din* $\mathbb{R}^n$*, unde* $n \in \{2, 3\}$*,* I *un interval* n*-dimensional care conţine pe* E *şi o funcţie mărginită* $f : E \to \mathbb{R}$ *ce va fi extinsă cu* 0 *în afara lui* E (i.e. pe $I \setminus E$)*, vom defini:*

-
$$(L)\int_E f(x)dx = \sup_{\mathcal{G}=\{I_1, I_2, ..., I_p\} \text{ partiţie a lui } I} \sum_{j=1}^{p} \inf_{x \in I_j} f(x) v(I_j),$$

ca fiind integrala inferioară a funcţiei f *(pe mulţimea* E*)*;

-
$$(U)\int_E f(x)dx = \inf_{\mathcal{G}=\{I_1, I_2, ..., I_p\} \text{ partiţie a lui } I} \sum_{j=1}^{p} \sup_{x \in I_j} f(x) v(I_j)$$

ca fiind integrala superioară a funcţiei f *(pe mulţimea* E*).*

Observaţie. *În contextul definiţiei anterioare,* $(L)\int\limits_E f(x)dx$ *şi* $(U)\int\limits_E f(x)dx$ *nu depind de alegerea intervalului* n*-dimensional* I *şi*

$$(L)\int\limits_E f(x)dx \leq (U)\int\limits_E f(x)dx.$$

Definiţie. *O funcţie mărginită* $f : E \to \mathbb{R}$*, unde* E *este o mulţime măsurabilă din* $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$*, se numeşte (Riemann) integrabilă (pe mulţimea* E*) dacă* $(L)\int\limits_E f(x)dx = (U)\int\limits_E f(x)dx$*. În acest caz*

$$(L)\int\limits_E f(x)dx = (U)\int\limits_E f(x)dx \overset{not}{=} \int\limits_E f(x)dx$$

se numeşte integrala funcţiei f *pe mulţimea* E*.*

Pentru $n = 2$, $\int\limits_E f(x)dx$ *se notează, în mod tradiţional cu*

$$\int\int\limits_E f(x, y)dxdy.$$

Pentru $n = 3$, $\int\limits_E f(x)dx$ *se notează, în mod tradiţional cu*

$$\int\int\limits_E\int f(x, y, z)dxdydz.$$

Observaţie. *În contextul definiţiei anterioare:*

$$\int\int\limits_E 1dxdy = \text{aria lui } E$$

şi

$$\int\int\limits_E\int 1dxdydz \ = \text{volumul lui } E.$$

Teorema următoare furnizează o clasă însemnată de funcţii integrabile.

Teoremă. *Fie E o mulţime închisă (i.e. $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid$ există $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x\}$) măsurabilă din $\mathbb{R}^n$, unde $n \in \{2, 3\}$, şi $f : E \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci f este integrabilă pe E.*

Teoremă *Fie E o mulţime măsurabilă Jordan din $\mathbb{R}^n$, $f, g : E \to \mathbb{R}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci:*

α) Dacă f şi g sunt integrabile pe E, atunci αf şi $f + g$ sunt integrabile pe E şi sunt valide următoarele două egalităţi:

$\int\limits_E \alpha f(x)dx = \alpha \int\limits_E f(x)dx$ *şi* $\int\limits_E (f(x) + g(x))dx = \int\limits_E f(x)dx + \int\limits_E g(x)dx.$

β) Dacă E_1 şi E_2 sunt două submulţimi măsurabile Jordan ale lui E care sunt nesuprapuse şi dacă f este integrabilă pe E_1 şi pe E_2, atunci f este integrabilă pe $E_1 \cup E_2$ şi $\int\limits_{E_1\cup E_2} f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx.$

Teoremă. *Fie E o mulţime măsurabilă Jordan din $\mathbb{R}^n$ şi $f, g : E \to \mathbb{R}$ două funcţii mărginite.*

α) Dacă E_0 este o submulţime a lui E astfel încât $\mu(E_0) = 0$, atunci g este integrabilă pe E_0 şi $\int\limits_{E_0} g(x)dx = 0$.

β) Dacă $f : E \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă şi $\{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}$ are măsura Jordan nulă, atunci g este integrabilă pe E şi $\int\limits_E g(x)dx = \int\limits_E f(x)dx$.

Teoremă. *Fie E o mulţime măsurabilă Jordan din $\mathbb{R}^n$ şi $f, g : E \to \mathbb{R}$ două funcţii integrabile. Atunci:*

α) Dacă $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in E$, atunci $\int\limits_E f(x)dx \leq \int\limits_E g(x)dx$.

β) Dacă există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel încât $m \leq f(x) \leq M$ pentru orice $x \in E$, atunci $m\mu(E) \leq \int\limits_E f(x)dx \leq M\mu(E)$.

γ) Funcţia $|f|$ este integrabilă pe E şi $\left|\int\limits_E f(x)dx\right| \leq \int\limits_E |f(x)|\,dx$.

Următorul rezultat reprezintă un instrument extrem de util pentru calculul integralelor multiple.

Teorema lui Lebesgue. *O funcţie $f : E \to \mathbb{R}$ mărginită, unde E este o mulţime măsurabilă Jordan, este integrabilă pe E dacă şi numai dacă mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f este de măsură Lebesgue nulă.*

Teorema de schimbare de variabile pentru integrala multiplă. *Fie* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *cu proprietatea că* $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid$ *există* $r > 0$ *astfel încât* $B(x, r) \subseteq V\}$ *şi* $\phi : V \to \mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$, *satisfăcând următoarele condiţii:*

i) ϕ *este injectivă;*

ii) ϕ *este de clasă* $\mathcal{C}^1$(i.e. admite derivate parţiale de ordin 1 şi acestea sunt continue);

iii) $\det J_\phi(x) \neq 0$, *pentru orice* $x \in V$, *unde*

$$J_\phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$\int\limits_{\phi(E)} f = \int\limits_{E} (f \circ \phi) \left|\det J_\phi\right|,$$

pentru orice mulţime $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *măsurabilă cu proprietatea că* $\overline{E} \subseteq V$ *şi orice funcţie* f *integrabilă pe* $\phi(E)$.

Observaţie. *De fapt are loc un rezultat mai general care permite anularea* $\det J_\phi$ *pe o mulţime de măsură nulă* (i.e. de arie nulă, respectiv de volum nul).

Evaluarea integralei duble

TEOREMA LUI FUBINI

În cele ce urmează vom prezenta o metodă pentru calculul practic al unei clase largi de integrale Riemann.

Lemă. *Fie* $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *astfel încât:*

i) f *este funcţie mărginită;*

ii) funcţia $y \to f(x, y)$ *este integrabilă pe* $[c, d]$ *pentru orice* $x \in [a, b]$.

Atunci

$$(L) \int\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y) dx dy \leq (L) \int\limits_a^b (\int\limits_c^d f(x, y) dy) dx \leq$$

$$\leq (U)\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx \leq (U) \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy.$$

Demonstraţie. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\{x_0, x_1, ..., x_k\}$ o partiţie a lui $[a, b]$ şi $\{y_0, y_1, ..., y_l\}$ o partiţie a lui $[c, d]$ astfel încât partiţia $\mathcal{G} = \{I_{ij}\}_{i\in\{1,2,...,k\}, j\in\{1,2,...,l\}}$ a lui $[a, b]\times[c, d]$, unde $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, are proprietatea următoare: $U(f, \mathcal{G}) - \varepsilon < (U) \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dxdy$. Cu notaţia $M_{ij} = \sup\limits_{(x,y)\in I_{ij}} f(x, y)$, avem

$$(U)\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \sum_{i=1}^{k} (U) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\sum_{j=1}^{l} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy\right)dx \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} (U) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy\right)dx \leq \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} M_{ij} v(I_{ij}) = U(f, \mathcal{G}) < (U) \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy + \varepsilon,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, de unde $(U)\int\limits_a^b (\int\limits_c^d f(x, y)dy)dx \leq (U) \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dxdy$.

Similar se arată că $(L) \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)dxdy \leq (L)\int\limits_a^b (\int\limits_c^d f(x, y)dy)dx$, de unde obţinem concluzia. $\square$

Teorema lui Fubini pe dreptunghiuri. *Fie $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ o funcţie astfel încât:*

i) funcţia $y \to f(x, y)$ este integrabilă pe $[c, d]$, pentru orice $x \in [a, b]$;
ii) funcţia $x \to f(x, y)$ este integrabilă pe $[a, b]$, pentru orice $y \in [c, d]$;
iii) f este integrabilă pe $[a, b] \times [c, d]$.
Atunci:

α) *Funcţia $x \to \int\limits_c^d f(x, y)dy$ este integrabilă pe $[a, b]$.*

β) *Funcţia $y \to \int\limits_a^b f(x, y)dx$ este integrabilă pe $[c, d]$.*

γ) $\int\limits_{[a,b]\times[c,d]}\int f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b(\int\limits_c^d f(x,y)dy)dx = \int\limits_c^d(\int\limits_a^b f(x,y)dx)dy.$

Demonstraţie. Să considerăm, pentru orice $x \in [a,b]$, $g(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$. Deoarece f este integrabilă pe $[a,b]\times[c,d]$, conform lemei precedente, deducem că $\int\limits_{[a,b]\times[c,d]}\int f(x,y)dxdy = (U)\int\limits_a^b g(x)dx = (L)\int\limits_a^b g(x)dx$, deci g este integrabilă pe $[a,b]$ şi $\int\limits_{[a,b]\times[c,d]}\int f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b(\int\limits_c^d f(x,y)dy)dx$. Schimbând rolurile lui x şi y, obţinem că $\int\limits_{[a,b]\times[c,d]}\int f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d(\int\limits_a^b f(x,y)dx)dy$, deci $\int\limits_{[a,b]\times[c,d]}\int f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b(\int\limits_c^d f(x,y)dy)dx = \int\limits_c^d(\int\limits_a^b f(x,y)dx)dy$. $\square$

Observaţie. *Ipotezele din cadrul Teoremei lui Fubini sunt îndeplinite dacă f este continuă.*

Următoarele două teoreme, cunoscute sub numele de teoreme de tip Fubini pentru integrala dublă, permit reducerea calculului unei integrale duble la calculul a două integrale Riemann.

Teoremă. *Fie $\alpha,\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue astfel încât $\alpha \leq \beta$. Atunci:*
α)

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], y \in [\alpha(x),\beta(x)]\}$$

este măsurabilă;
β)

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy)dx,$$

pentru orice $f : D \to \mathbb{R}$ continuă.

Un domeniu D precum cel din Teorema anterioară se numeşte domeniu simplu în raport cu axa Oy.

Un enunţ similar are loc pentru domenii simple în raport cu axa Ox, anume:

Teoremă. *Fie $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue astfel încât $\alpha \leq \beta$. Atunci:*
α)
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [a,b], x \in [\alpha(y), \beta(y)]\}$$
este măsurabilă;
β)
$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx)dy,$$
pentru orice $f : D \to \mathbb{R}$ continuă

Exemplu. Să se calculeze $\int\int_D xydxdy$, unde D este limitat de parabola $y = x^2$ şi de dreapta $y = 2x + 3$.

Soluţie. Avem
$$\int\int_D xydxdy = \int_{-1}^{3} (\int_{x^2}^{2x+3} xydy)dx = \int_{-1}^{3} x(\frac{y^2}{2} |_{x^2}^{2x+3})dx = \frac{160}{3}.$$

Exerciţiu. Să se calculeze $\int\int_D ydxdy$, unde D este limitat de parabola $y = x^2$ şi de dreapta $y = 1$.

Următorul rezultat este un caz particular al teoremei de schimbare de variabile.

Propoziţie (trecerea la coordonate polare). *În condiţiile stipulate la teorema de schimbare de variabile (unde $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$), avem*
$$\int_{\phi(E)} f(x,y)dxdy = \int_E rf(r\cos\theta, r\sin\theta)drd\theta.$$

Exemplu. Să se calculeze $\int\int_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, unde D este discul cu centru în origine şi de rază R.

Soluţie. Avem

$$\int\int_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\int_{[0,R]\times[0,2\pi]} re^{-r^2}drd\theta = \int_0^{2\pi}(\int_0^R re^{-r^2}dr)d\theta = \pi(1-e^{-R^2}).$$

Exerciţiu. Să se calculeze $\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, unde D este discul cu centru în origine şi de rază R.

Evaluarea integralei triple

Teorema următoare, cunoscută sub numele de teorema lui Fubini pentru integrala triplă, permite reducerea calculului unei integrale triple la calculul unei integrale duble şi a uneia Riemann.

Teoremă. *Fie $\alpha, \beta : D \to \mathbb{R}$ continue astfel încât $\alpha \leq \beta$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ este măsurabilă. Atunci:*

α)

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z \in [\alpha(x, y), \beta(x, y)]\}$$

este măsurabilă;

β)

$$\int\int\int_V f(x, y, z)dxdydz = \int\int_D(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)dz)dxdy,$$

pentru orice $f : V \to \mathbb{R}$ continuă

Un domeniu V precum cel din Teorema anterioară se numeşte intergrafic proiectabil pe planul xOy. Enunţuri similare au loc pentru intergrafice proiectabile pe xOz, respectiv pe yOz.

Exemplu. Să se calculeze $\int\int\int_V zdxdydz$, unde V este conul limitat de $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 0$ şi $z = 1$.

Soluţie. Avem $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\alpha(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi $\beta(x, y) = 1$, deci

$$\int\int\int_V zdxdydz = \int\int_D(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 zdz)dxdy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\int_D (1 - (x^2 + y^2))dxdy = \frac{1}{2} \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} r(1 - r^2)drd\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\int_0^1 (r - r^3)dr)d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Exerciţiu. Să se calculeze $\int\int\int_V xdxdydz$, unde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y + z^2 \leq 1$ şi $y \geq 0\}$.

Următoarele două propoziţii constituie cazuri particulare importante ale teoremei de schimbare de variabile.

Propoziţie (trecerea la coordonate cilindrice). *În condiţiile stipulate de teorema de schimbare de variabile (unde $\phi(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$), avem*

$$\int\int\int_{\phi(E)} f(x, y, z)dxdydz = \int\int\int_E rf(r\cos\theta, r\sin\theta, z)drd\theta dz.$$

Exemplu

Să se calculeze $\int\int\int_V (x^2 + y^2 + (z - 2)^2)^{-\frac{1}{2}}dxdydz$, unde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1$ şi $-1 \leq z \leq 1\}$.

Avem

$$\int\int\int_V (x^2 + y^2 + (z - 2)^2)^{-\frac{1}{2}}dxdydz =$$

$$= \int\int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[-1,1]} r(r^2 + (z - 2)^2)^{-\frac{1}{2}}drd\theta dz = \text{etc}$$

Exerciţiu. Să se calculeze $\int\int\int_V z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$, unde V este mărginit de cilindrul $x^2 + y^2 = 2x$ şi de planele $y = 0$, $z = 0$ şi $z = -1$.

Propoziţie (trecerea la coordonate sferice). *În condiţiile stipulate de teorema de schimbare de variabile (unde* $\phi(r,\theta,z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$*), avem*

$$\iiint\limits_{\phi(E)} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{E} r^2\cos\varphi f(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)drd\theta d\varphi.$$

Exemplu

Să se calculeze $\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$, unde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Avem

$$\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} r^4\cos\varphi drd\theta d\varphi = \frac{4}{5}\pi.$$

Exerciţiu

Să se calculeze $\iiint\limits_{V}\mathrm{x}^2dxdydz$, unde $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Noţiunea de interval închis n-dimensional

Definiţie

O submulţime

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subseteq \mathbb{R}^2,$$

unde $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$, se numeşte dreptunghi închis 2-dimensional, iar intervalele $[a_1, b_1]$ şi $[a_2, b_2]$ se numesc laturile dreptunghiului I.

O submulţime

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3,$$

unde $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \in \mathbb{R}$, $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$, $a_3 \leq b_3$, se numeşte paralelipiped închis 3-dimensional, iar intervalele $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$ şi $[a_3, b_3]$ se numesc laturile paralelipipedului I.

Prin interval închis n-dimensional, unde $n \in \{2, 3\}$, vom înţelege un dreptunghi închis 2-dimensional, respectiv un paralelipiped închis 3-dimensional.

Partiţiile $a_1 = x_1^1 < x_2^1 < ... < x_{m_1-1}^1 < x_{m_1}^1 = b_1$, $a_2 = x_1^2 < x_2^2 < ... < x_{m_2-1}^2 < x_{m_2}^2 = b_2$ (şi eventual $a_3 = x_1^3 < x_2^3 < ... < x_{m_3-1}^3 < x_{m_3}^3 = b_3$) ale intervalelor $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ (şi eventual $[a_3, b_3]$), generează o colecţie de intervale închise n-dimensionale de forma $[x_{k_1-1}^1, x_{k_1}^1] \times [x_{k_2-1}^2, x_{k_2}^2]$ (şi eventual $[x_{k_1-1}^1, x_{k_1}^1] \times [x_{k_2-1}^2, x_{k_2}^2] \times [x_{k_3-1}^3, x_{k_3}^3]$), unde $k_1 \in \{1, 2, ..., m_1\}$, $k_2 \in \{1, 2, ..., m_2\}$, $k_3 \in \{1, 2, ..., m_3\}$, numită partiţie a lui I şi notată cu $\mathcal{G} = \{I_1, I_2, ..., I_p\}$.

Definiţie. *Volumul unui interval închis 2-dimensional $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ se defineşte ca fiind*

$$v(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2),$$

iar volumul unui interval închis 3-dimensional $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ se defineşte ca fiind

$$v(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3).$$

Măsura interioară Jordan şi măsura exterioară Jordan

Definiţie. *Pentru un interval închis n-dimensional I, unde $n \in \{2, 3\}$, o partiţie $\mathcal{G} = \{I_1, I_2, ..., I_p\}$ a sa şi o submulţime E a lui I, definim:*

- *suma exterioară a lui* E *corespunzătoare partiţiei* $\mathcal{G}$ *ca fiind*

$$V(E,\mathcal{G}) = \sum_{I_j \cap \overline{E} \neq \emptyset} v(I_j),$$

unde $\overline{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\text{există } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E \text{ astfel încât } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x\}$;

- *suma interioară a lui* E *corespunzătoare partiţiei* $\mathcal{G}$ *ca fiind*

$$v(E,\mathcal{G}) = \sum_{I_j \subseteq \overset{\circ}{E}} v(I_j),$$

unde, prin convenţie, suma după mulţimea vidă este zero şi $\overset{\circ}{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\text{există } r > 0 \text{ astfel încât } B(x,r) \subseteq E\}$.

Definiţie. *Fie* I *un interval n-dimensional, unde* $n \in \{2,3\}$, *şi* $E \subseteq I$. *Atunci definim:*

- *măsura interioară Jordan a lui* E *ca fiind*

$$\mu_*(E) = \sup_{\mathcal{G} \text{ partiţie a lui } I} v(E,\mathcal{G});$$

- *măsura exterioară Jordan a lui* E *ca fiind*

$$\mu^*(E) = \inf_{\mathcal{G} \text{ partiţie a lui } I} V(E,\mathcal{G}).$$

Observaţie. *Definiţia anterioară este coerentă, i.e. nu depinde de intervalul* I.

Mulţimi măsurabile Jordan

Definiţie. *O submulţime mărginită* E *a lui* $\mathbb{R}^n$, *unde* $n \in \{2,3\}$, *se numeşte măsurabilă Jordan dacă* $\mu_*(E) = \mu^*(E)$. *În acest caz,*

$$\mu_*(E) = \mu^*(E) \overset{not}{=} \mu(E)$$

poartă numele de măsura Jordan a lui E.

Observaţie. *Orice interval închis n-dimensional* I, *unde* $n \in \{2,3\}$, *este o mulţime măsurabilă Jordan şi* $\mu(I) = v(I)$. *În cazul* $n = 2$, $\mu(E)$ *reprezintă aria lui* E *(vezi cursul 7), iar în cazul* $n = 3$, $\mu(E)$ *reprezintă volumul lui* E *(vezi cursul 7).*