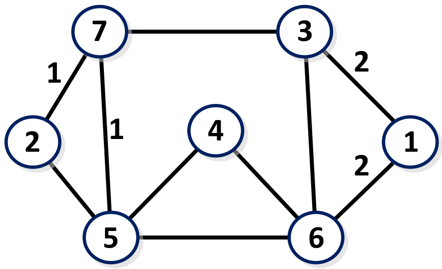
1. (**1p**) Adăugați ponderi - numere naturale pozitive - pe muchiile grafului din figura de mai jos care nu au încă ponderi, astfel încât graful să aibă exact doi arbori parțiali de cost minim (justificați).



2. (**1p**) Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate pentru un graf neorientat conex ponderat cu n>3 vârfuri? Justificați (complexitatea algoritmilor studiați se presupune cunoscută, nu trebuie demonstrată în justificare)

a) Algoritmul lui Kruskal determină corect un arbore parțial de cost minim în G chiar dacă graful are și muchii cu ponderi negative

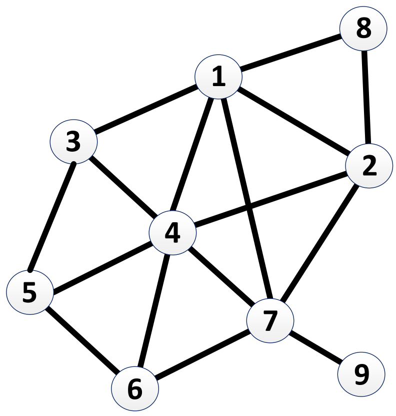
b) Algoritmul lui Dijkstra determină corect distanțele de la vârful 1 la celelalte vârfuri chiar dacă graful are și muchii cu ponderi negative

c) Algoritmul lui Prim are complexitatea O(m) dacă graful este complet

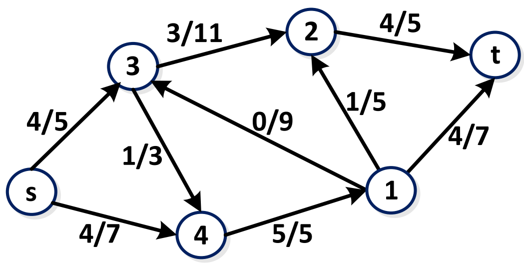
d) Un arbore parțial de cost minim conține toate muchiile critice din graf

3. (1p) a) Fie G un graf neorientat conex cu gradul maxim 6. Care este numărul maxim de culori folosite de algoritmul Greedy de colorare a vârfurilor lui G prezentat la curs, dacă vârfurile sunt ordonate folosind strategia Smallest First? Justificați.

b) Exemplificați (cu explicații) algoritmul Greedy de colorare cu vârfurile ordonate folosind strategia Smallest First pentru graful următor.



4. (**1,5p)** Definiți noțiunile de flux, tăietură minimă și lanț nesaturat/drum de creștere. Ilustrați pașii algoritmului Ford-Fulkerson pentru rețeaua din figura următoare (unde pe un arc e sunt trecute valorile f(e)/c(e) reprezentând flux/capacitate), pornind de la fluxul indicat și alegând la fiecare pas un s-t lanț f-nesaturat de lungime minimă (algoritmul Edmonds-Karp)**.** Indicați o tăietură (s-t tăietură) minimă în rețeaua (se vor indica vârfurile din bipartiție, arcele directe, arcele inverse). Mai există și o altă s-t tăietură minimă în această rețea? Justificați răspunsurile



5. (**2p) a)** Descrieți algoritmul Floyd-Warshall pentru determinarea de distanțe într-un graf orientat ponderat cu n vârfuri, detaliind următoarea schemă (se vor respecta numele variabilelor din schemă):

Inițializarea matricelor D de distanțe și P de predecesori ....
pentru **i** ← 1, n execută
    pentru **x** ← 1, n execută
        pentru **y** ← 1, n execută
            ....

b) Presupunem că n>3. Ce reprezintă valoarea D[x][y] după încheierea execuției pasului la care i=3 (ce semnifică)?

c) La finalul execuției pseudocodului de mai sus pentru un graf cu 8 vârfuri se obțin matricele următoare:

D =

0	∞	1	∞	∞	∞	∞	∞
2	0	3	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞
5	3	6	-1	2	3	-6	4
2	0	3	-4	-1	0	-9	1
1	-1	2	-5	-2	-1	-10	0
10	8	11	4	7	8	-1	9
-1	-3	0	-7	-4	-3	-12	-2

P =

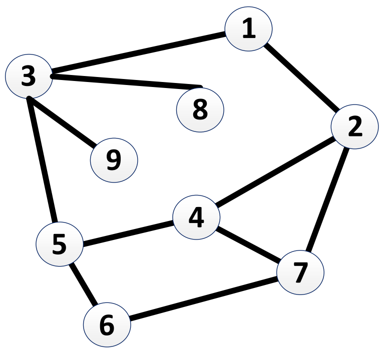
0	1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	2	0	0	0
3	3	0	0	0	0	0	0
2	5	1	7	4	5	8	6
2	5	1	7	4	5	8	6
2	5	1	7	4	5	8	6
2	5	1	7	4	5	8	6
2	5	1	7	4	5	8	6

Adăugați în pseudocod instrucțiunile necesare pentru ca algoritmul să testeze existența unui circuit cu cost negativ în graf, și, în caz afirmativ, să afișeze unul, și ilustrați-le pe graful dat ca exemplu (cu explicații).

6. (1p) Este corect următorul algoritm de determinare a unui arbore parțial de cost minim al unui graf conex ponderat G = (V, E, w)? Justificați (fără a apela în justificare la modul de funcționare al altor algoritmi; rezultatele folosite trebuie demonstrate și trebuie explicat modul în care se folosesc)

```
T = (V, E = Ø) - inițial V conține toate vârfurile și nu conține nicio
muchie
cat timp T nu e conex
   1. Alege o componentă conexă C al lui T cu număr maxim de vârfuri
   2. Alege o muchie de cost minim e cu o extremitate în C și
      cealaltă nu și adaugă e la T
```

7. (**1,5p)**.a) Indicați fețele hărții următoare și gradul fiecărei fețe.



b) Fie M=(V, E, F) o hartă conexă cu n>3 vârfuri și m muchii în care lungimea minimă a unui ciclu este 4. Arătați că gradul mediu al vârfurilor verifică relația:

$$\frac{1}{n}\sum_{v\in V} d(v) \leq 4-\frac{8}{n}$$

și există în M cel puțin un vârf de grad mai mic sau egal cu 3.