/

14.11.2022

Curs 7
- P&S -

Ex.: O urnă cu bile numerotate de la 1-100
Extragem 5 bile din urnă (succesiv)

a) Care este repartiția var. aleat. care dă nr. bilelor ≥ 70?
b) Cum este rep. v.a. care dă a 3-a extragere?
c) Care este prob. ca nr 79 să fie extras cel puțin o dată?

Sol:
I Extragere cu revenire

a) $X \sim B(5, \frac{31}{100})$
↳ prob. să avem succes = (am extras o bilă ≥ 70)
↳ nr extrageri

b) $x_1, x_2, \dots x_5 \in \{1, \dots 100\}$

$x_1 \sim U(\{1, \dots, 100\})$ prima extragere
$\vdots$
$x_3 \sim U(\{1, \dots, 100\})$ a 3-a extragere

c) $\{79\}$ să fie extras cel puțin o dată =
$= \{x_1 = 79\} \cup \{x_2 = 79\} \cup \{x_3 = 79\} \cup \{x_4 = 79\} \cup \{x_5 = 79\}$
$\Rightarrow \mathbb{P} = 1 - \mathbb{P}(x_1 \neq 79) \cap \{x_2 \neq 79\} \dots \cap \{x_3 \neq 79\}$
independente (ex. cu revenire)

$$\mathbb{P} = 1 - \frac{99^5}{100^5} = \frac{100^5 - 99^5}{100^5}$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = 1 - \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c)$$

II Extragere ~~cu rev~~ fără revenire

(a) Fie Y v.a. din cerință

$Y \sim HG(5, 100, 31)$

(b) $Y_1, Y_2, \dots, Y_5$

$Y_1 \sim U(\{1, 2, \dots, 100\})$

$Y_2 \sim U(\{1, 2, \dots, 100\})$

$\vdots$

$Y_5 \sim U(\{1, 2, \dots, 100\})$

$$\mathbb{P}(Y_2 = j) = \sum_{i=1}^{100} \mathbb{P}(Y_2 = j / Y_1 = i) \mathbb{P}(Y_2 = i)$$

O partiție a lui $\Omega = \underbrace{B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m}_{\text{disjuncte 2 câte 2}}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A \setminus B_i) \mathbb{P}(B_i)$$

$$\mathbb{P}(Y_2 = j / Y_1 = i) = \begin{cases} 0, & j = i \\ \frac{1}{99}, & j \neq i \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(Y_2 = j) = \sum_{i=1}^{100} \mathbb{P}(Y_2 = j / Y_1 = i) \mathbb{P}(Y_1 = i)$$

$$= 99 \cdot \frac{1}{99} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{100} \Rightarrow \text{DA, e uniformă}$$

(c) $A =$ nr 79 extras cel puțin o dată

$= \{Y_1 = 79\} \cup \{Y_2 = 79\} \cup \dots \{Y_5 = 79\}$
sunt disj 2 câte 2 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(Y_i = 79) = \frac{5}{100}$$

7 Repartiția geometrică și negativ binomială

Aruncăm cu o monedă în mod repetat, iar șansa de succes $= p$ $(\mathbb{P}(\{H\}) = p)$

$X =$ v.a. care ne dă nr de aruncări până avem prima oară succes (H), incluzând succesul (primul succes).

$X \in \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}^*$

$$\left[\begin{array}{l} TTH \Rightarrow X = 3 \\ H \Rightarrow X = 1 \end{array}\right]$$

Funcția de masă:

$$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad k \geq 1$$

$$X \sim G(p) \quad (\text{geom}(p))$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$$

$$q = 1-p$$

$$= p\,(1 + q + q^2 + \dots) = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \\ \text{Dacă } x \in (0,1),\ n \to \infty \Rightarrow \displaystyle\sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x} \end{array}}$$

$Y =$ v.a. care ne dă nr. de eșecuri până la primul succes.

$Y \in \{0, 1, \dots\} = \mathbb{N}$

$Y = X - 1$

$\mathbb{P}(Y=k) = (1-p)^k \cdot p$

→ **Definiție**:

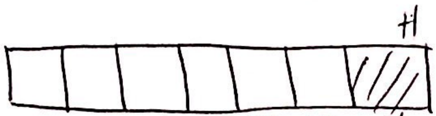
v.a. Z care ne dă nr. de aruncări necesare până obținem a r-a oară succes s.n. negativ binomiala not.:

$$Z \sim NB(r,p)$$

$Z \in \{r, r+1, \dots\}$

$\mathbb{P}(Z=K) = \qquad , K \geq r$

ex: $\{Z=K\}$, $K=7$, $r=3$



T H H T T T H

H T T H T T H

a r-a tot timpul ultima $\Rightarrow$

$C_{k-1}^{r-1} = \binom{k-1}{r-1}$ moduri

$$\Rightarrow \boxed{\binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r} \cdot p^{r} = \mathbb{P}(Z=K), K \geq r}$$

$Z = X_1 + \dots + X_r$

↳ câte aruncări sunt necesare pt. a obține prima oară succesul

$X_i \sim G(p)$

8 V.a. de tip Poisson

→ **Definiție:** Spunem că o var. aleat. X este repartizată Poisson de parametru λ dacă $X \in \mathbb{N}$ și $\boxed{\mathbb{P}(X=K) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^K}{K!}}$

? Când se folosește? – numărul de apariții al unui eve. de interes în contextul în care repetăm experimentul de un nr mare de ori, iar șansa de apariție a eve. este mică

- nr. cazuri boală rară dintr-o regiune
- nr accidente Valea Prahovei
- nr. sosirilor într-un interval specific de timp a clienților la ghișeu
- nr. de spam-uri primite într-un minut
- nr. de cuvinte scrise greșit într-o carte

$$\sum_{K=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^K}{K!} = 1? = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^K}{K!}}_{e^{\lambda}} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

$$e^x = \sum_{K \geq 0} \frac{x^K}{K!}$$

Aproximarea Poisson a binomialei

Fie $X \sim B(n,p)$ a.î. n și p să verifice $np \to \lambda$ (n este mare, p este mic)

$$\mathbb{P}(X=K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$$

? Când? Vom pp că n e mare și p e mic a.î. $n \cdot p \to \lambda$

$$\mathbb{P}(X=K) = \frac{n!}{K!(n-K)!} \cdot p^K (1-p)^{n-K} \simeq \frac{n!}{K!(n-K)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^K \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-K} =$$

$$= \frac{n!}{(n-K)!\, n^K} \cdot \frac{\lambda^K}{K!} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{1^{\infty}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-K}}_{1}$$

Pt. $n \to \infty$ avem $\frac{\lambda}{n} \to 0$, deci

$$1 - \frac{\lambda}{n} \to 1$$

$$\underbrace{\frac{n-K+1}{n}}_{\downarrow\, 1} \times \dots \times \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\downarrow\, 1} \times \underbrace{\frac{n}{n}}_{\downarrow\, 1} \to 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\frac{\lambda}{n} \cdot n} = e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(X = K) \simeq e^{-\lambda} \cdot 1 \cdot \frac{\lambda^K}{K!}}$$

Funcții de v.a.

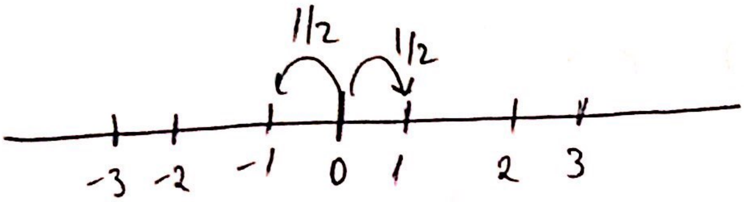
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p., X va, g v a

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad g \circ X$$

atunci $g \circ X$ este v.a.

Obs! Dacă X este discretă $\Rightarrow$ $g \circ X$ este v.a. discretă

Exp: <u>Mersul la întâmplare</u>



particulă care pleacă din 0.

face n pași

prob să meargă în stânga = dreapta = $\frac{1}{2}$

Fie Y v.a. care ne dă poziția după n pași

vrem $\mathbb{P}(Y=k)=?$

Considerăm X v.a. care ne dă nr de pași spre dreapta,

atunci $X \sim B(n, 1/2)$

Dacă $X=i$, atunci a făcut $n-i$ pași spre stânga și

poziția ei este $i-(n-i) = \underline{2i-n}$

$Y = 2X-n$

$Y = g(X)$

$\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(2X-n=k) = \mathbb{P}(X = \frac{n+k}{2}) =$

$= \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} \cdot (1-p)^{\frac{n-k}{2}}$

masa

? Distanța față de origine?

$$Z = |Y| = h(Y) = h(g(X))$$

$\mathbb{P}(Z = k)$

$\uparrow$

masa

$k = 0 \Rightarrow Y = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(Z = 0)$

$k \neq 0$

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Y = k \text{ sau } Y = -k)$$
$$= \mathbb{P}(Y = k) + \mathbb{P}(Y = -k)$$
$$= 2\binom{n}{\frac{n+k}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ pt că } \binom{n}{\frac{n+k}{2}} = \binom{n}{\frac{n-k}{2}}$$

? Cum calculăm?

$Y = g(X)$?

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(g(X) = y) = \sum_{\{x / g(x) = y\}} \mathbb{P}(X = x)$$

$$\{g(X) = y\} = \{X \in g^{-1}(y)\}$$

Exp. $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$

$Y = X^2$

$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$Y = X^3 \to$ la fel ca $X \to X^{impar} = X$

$Y = X^4 \to$ la fel ca $X^2 \to X^{par} = X^2$

în cazul $-1 \quad 0 \quad 1$!!

Exp: $X_1, X_2, X_3 \qquad g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$g(X_1, X_2, X_3)$ - v.a. de ex atunci când: g — suma, prod, masa, etc...

INDEPENDENȚA V.A.

Două v.a. sunt indep. dacă realizarea uneia nu influențează în niciun mod realizarea celeilalte.

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ c.p. și X, Y v.a.

Spunem că X și Y sunt ind, $X \perp\!\!\!\perp Y$

dacă ev. : $\{X = x\}$ și $\{Y = y\}$ sunt ind $\forall x, y$

(P) Fie X, Y v.a. (discrete). Atunci $X \perp Y$ dacă:

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x) \times P(Y \le y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

(P) $X \perp Y \iff P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B), \forall A, B \subseteq \mathbb{R}$ intervale

(P) Dacă X, Y v.a. a.î. $X \perp Y$ și g și h două funcții atunci $g(X) \perp h(Y)$

Obs! $X_1, X_2, \dots, X_n$ sunt independente dacă:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n) = \\ &= \mathbb{P}(X_1 \le x_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \le x_n), \\ &\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

Apl: $X \sim B(n, p)$ și $Y \sim B(m, p)$ indep $\Rightarrow X+Y \sim B(n+m, p)$

Apl: $X \sim Pois(\lambda_1)$ (Poisson) și $Pois(\lambda_2)$ indep $\Rightarrow$
$\Rightarrow X+Y \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$

! Dem: $\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X+Y=n / X=k) \cdot \mathbb{P}(X=k)$

$\hookrightarrow$ formula prob. totale

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y=n-k / X=k)\, \mathbb{P}(X=k) \overset{\text{indep}}{=} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y=n-k) \cdot \mathbb{P}(X=k)$$

Media unei v.a. discrete

Repetăm un exp. de N ori și ne interesăm la valorile unei v.a. X de interes.

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$

1 1 1 3 3 5 8 8

$$m = \frac{x_1 + \dots + x_m}{N}$$

$1+1+1+3+3+5+8+8 = \frac{30}{8}$

$\frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8}{8} = \frac{30}{8}$

$\{X = x\}$

$\mathbb{P}(X = x) = f(x) \simeq \frac{N(x)}{N}$

$N(x) \simeq f(x) \cdot N$

$$m = \frac{\sum x \cdot N(x)}{N} = \frac{\sum x \cdot f(x) \cdot N}{N} = \sum x f(x)$$

→ **Definiție:**

Fie X o v.a. discretă. Se numește media lui X valoarea:

$$E[X] = \sum_x x\,(f(x)) = \sum_x x\,\mathbb{P}(X = x)$$

ori de câte ori $\sum_x |x| f(x) < \infty$

Dacă $\sum |x| f(x) = \infty$ spunem că X nu are medie!!!