

Nume și prenume: LAZAROIU M. TEODORA-BIANCA  
Grupa: 241

Nota: \_\_\_\_\_

## Examen - Sesiunea ianuarie - februarie 2022

31 Ianuarie 2022

Timpul de rezolvare al problemelor este de 3h. Pentru transmiterea soluțiilor în format PDF<sup>1</sup> în folderul vostru de pe Drive aveți 15 minute timp suplimentar. Astfel, pentru dumneavoastră examenul începe la **ora 9 și 0 minute** și se termină la **ora 12 și 15 minute**.



Toate documentele, computerele personale, telefoanele mobile și/sau calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Orice modalitate de comunicare între voi este **strict interzisă**. Fiecare subiect valorează 10 puncte. Mult succes !

### Exercițiul 1

10p

Se consideră variabilele aleatoare  $X$  și  $Y$  având repartițiile:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0.37 & 0.63 \end{pmatrix} \text{ și } Y \sim \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \text{ cu } p_1, p_2 \in (0, 1).$$

- Aflați  $p_1$  și  $p_2$  știind că  $\mathbb{P}(X = -1, Y = 5) = 0.1233333$  și  $\mathbb{E}[X|Y = 5] = 0.5$ .
- Considerând valorile lui  $p_1$  și  $p_2$  aflate anterior, determinați repartițiile variabilelor aleatoare  $X + Y$ ,  $X - Y$ ,  $4X^2 + 3Y^2$  și calculați  $\mathbb{E}[X]$ ,  $\mathbb{E}[Y]$ ,  $\text{Var}(X)$ ,  $\text{Var}(Y)$ ,  $\text{Var}(8X - 6Y + 11)$  precum și coeficientul de corelație  $\rho(X, Y)$ .

### Exercițiul 2

10p

Fie  $X$  și  $Y$  două variabile aleatoare i.i.d. pozitive și  $c > 0$ . Pentru fiecare din punctele de mai jos completați cu unul din simbolurile  $=$ ,  $\leq$ ,  $\geq$  sau  $?$  (în caz că nu putem decide). Justificați alegerile făcute:

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\mathbb{E}[\log(X)] \dots \log(\mathbb{E}[X])$         | 6. $\mathbb{P}(X + Y > 10) \dots \mathbb{P}(X > 5 \text{ sau } Y > 5)$            |
| 2. $\mathbb{E}[X] \dots \sqrt{\mathbb{E}[X]}$              | 7. $\mathbb{E}[\min(X, Y)] \dots \min \mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$               |
| 3. $\mathbb{E}[\sin^2(X)] + \mathbb{E}[\cos^2(X)] \dots 1$ | 8. $\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right] \dots \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}$ |
| 4. $\mathbb{P}(X > c) \dots \frac{\mathbb{E}[X^3]}{c^3}$   | 9. $\mathbb{E}[X^2(X^2 + 1)] \dots \mathbb{E}[X^2(Y^2 + 1)]$                      |
| 5. $\mathbb{P}(X \leq Y) \dots \mathbb{P}(X \geq Y)$       | 10. $\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] \dots \frac{1}{\mathbb{E}[X]}$            |

### Exercițiul 3

10p

Știm că într-un lot de 6 telefoane mobile Huawei două prezintă defecte de fabricație. Telefoanele sunt testate unul după celălalt până când cele două telefoane defecte sunt depistate. Fie  $X$  numărul de teste efectuate pentru identificarea primului telefon defect și  $Y$  numărul de teste suplimentare pentru identificarea celui de-al doilea telefon defect.

- Determinați repartiția comună a cuplului  $(X, Y)$  și repartițiile marginale.
- Găsiți media și varianța lui  $X$  și respectiv  $Y$  și coeficientul de corelație dintre  $X$  și  $Y$ .
- Calculați media și varianța repartiției condiționate a lui  $X$  la  $Y = 2$ .

### Exercițiul 4

10p

Se dă variabila aleatoare  $X$  care are densitatea de repartiție

$$f(x) = \frac{x}{64} e^{-\frac{x^2}{128}} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

Să se calculeze raportul  $\frac{F^{-1}(0.75) - F^{-1}(0.25)}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$ , unde  $F$  este funcția de repartiție a lui  $X$ .

### Exercițiul 5

10p

La alegerile pentru șefia Partidului Național Liberal din 2021 vor participa doi candidați: Florin Cîțu și Ludovic Orban. Să presupunem că numărul alegătorilor care votează poate fi modelat prin intermediul unei variabile aleatoare repartizate  $Pois(778)$  și că fiecare alegător votează pentru candidatul Florin Cîțu cu probabilitatea 0.69 iar pentru candidatul Ludovic Orban cu probabilitatea 0.31, independent de ceilalți alegători. Fie  $V$  variabila aleatoare care descrie diferența de voturi dintre cei doi candidați, definită ca numărul de voturi pentru Florin Cîțu minus numărul de voturi pentru Ludovic Orban.

- Determinați repartiția cuplului dat de variabilele aleatoare care determină numărul de voturi pentru candidatul Florin Cîțu și respectiv Ludovic Orban.
- Arătați că variabilele aleatoare care determină numărul de voturi pentru cei doi candidați sunt independente.
- Calculați  $\mathbb{E}[V]$  și  $\text{Var}[V]$ .

### Exercițiul 6

10p

Aruncăm în mod repetat cu o monedă pentru care probabilitatea de succes este  $p = 0.65$ . Fie  $X$  variabila aleatoare care descrie numărul de succese înainte de al 3-lea eșec într-o secvență de aruncări repetate. Determinați repartiția lui  $X$ ,  $\mathbb{E}[9X - 9]$  și  $\text{Var}(4X + 15)$ .

---

<sup>1</sup>Pentru a transforma pozele în format PDF puteți folosi, de exemplu, programul CamScanner