24.10.2022

Cursul 4

- P & S -

Probabilități condiționale

1. Aruncăm cu o monedă de 3 ori

a) Care este probabilitatea să obținem HHH?

$\Omega = \{H, T\}^3$

$A = \{HHH\}$ - eveniment de interes

$P(A) = \frac{1}{8}$

HHH	HHT	HTH	THH
THT	HTT	TTH	TTT

b) Știm că la prima aruncare am obținut H.

$\Omega_2 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$

$P = \frac{1}{4} = P(A|B)$ → știind că; → s-a realizat

B - ev. prin care la prima aruncare am obținut H

$P(A|B)$ - probabilitatea realizării lui A, știind că B-ul s-a realizat.

- prob. condiționată a lui A la B.

Din perspectivă frecvenționistă:

Un experiment aleator pe care îl repetăm de N ori. Ne interesăm la evenimentul A și B.

$\frac{N(A \cap B)}{N(B)}$ → printre care s-a realizat A; nr de exp în care B s-a realizat

$$\frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{\frac{N(A \cap B)}{N}}{\frac{N(B)}{N}} \approx \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Def Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un câmp prob, $A, B \in \mathcal{F}$ cu $P(B) > 0$.

Atunci prob. condiționată a lui A la ev. B și not $P(A/B)$ prin

$$\boxed{\mathbb{P}(A \setminus B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

Obs! "$A \mid B$" nu este un eveniment!

$P(A)$ - prior sau prob a priori

$P(A \setminus B)$ - posterior prob. a posteriori

Exp: (cont)

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{4/8} = \frac{1}{4}$$

Exp 2

Avem un pachet de cărți de joc și extragem în mod aleator 2 cărți succesive și fără întoarcere.

A - "prima carte e de inimă roșie

B - "a doua carte este de inimă roșie"

C - "a doua carte este de culoare roșie"

Vrem să calculăm:

$P(B/A)$, $P(C/A)$, $P(A \setminus B)$, $P(A \setminus C)$

Care e probabilitatea ca a doua să fie de inimă dacă prima e de inimă roșie

52 cărți

26 culoare roșie

13 de inimi

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{13\cdot 12}{52\cdot 51}\cdot\frac{52}{13} = \frac{12}{51}$$

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(A\cap B) = \frac{13\cdot 12}{52\cdot 51}$$

- $$P(C \setminus A) = \frac{P(A\cap C)}{P(A)} = \frac{25}{51}$$

$$P(A\cap C) = \frac{13\cdot 25}{52\cdot 51}$$

- $$P(A \setminus B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$ $$P(C) = \frac{26}{52}$$

$$= \frac{12}{51} = P(B \setminus A)$$

$$P(A \setminus C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{13\cdot 25}{52\cdot 51}\cdot\frac{52}{26} = \frac{25}{102} \neq P(C \setminus A)$$

3 O familie are 2 copii.

a) Care e probabilitatea ca cei doi copii să fie de sex feminin știind că cel mai în vârstă este fata

b) ——— știind că cel puțin unul dintre ei este fată?

Ipoteze: - $\{F, B\}$
- $P(F) = P(B) = 1/2$
- sexul unui copil nu este influențat de sexul celuilalt copil

$$\Omega = \{FB\}^2 = \{BB, BF, FB, FF\}$$

$$A = \{FF\}$$

a) $B = \{$cel mai în vârstă e fata$\} = \{FB, FF\}$

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

b) C={cel puțin unul de sex feminin}
={FB, BF, FF}

$$P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}$$

Examen!

Fată născută iarna

I, P, V, T

$\Omega = \{FI, FP, FV, FT,\ BI, BP, BV, BT\}^2$

Prob. cei 2 copii să fie F, știind FI.

$P(FI)=\frac{15}{64}$

$\frac{7}{64}$

$P(2 C F / FI)=\frac{7}{15}$

FI, $\underset{}{\_\_}$ ↓8

$\underset{7}{\_\_}$, FI

FI, $\_\_$ ↓4

$\underset{3}{\_\_}$, FI

$\frac{7}{44}$

4 Dacă o aeronavă apare în zona de interes scanată de un radar, atunci se declanșează o alarmă cu prob. 99%.

Dacă nu avem aeronavă, at. alarma (falsă) se declanșează 10% prob.

Șansa să treacă o aeronavă prin zona de interes: 5%.

a) Care este prob. ca în zona de interes să avem avion și să avem alarmă?

b) Care este prob. să avem Avion și să nu fie detectat.

$A = \{$ să avem avion în zona de interes $\}$

$B = \{$ se declanșează alarma $\}$

a) $P(A^c \cap B)$

b) $P(A \cap B^c)$

Ipoteza: $P(A) = 5\% ; 0{,}05$

$P(B) = 0{,}99\%.$

$P(B / A^c) = 0{,}1\%.$

$$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A \backslash B) \cdot P(B)}$$

$$P(B \backslash A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = \sqrt{P(B \backslash A) \cdot P(A)}$$

a) $P(A^c \cap B) = P(B \backslash A^c) \cdot P(A^c)$

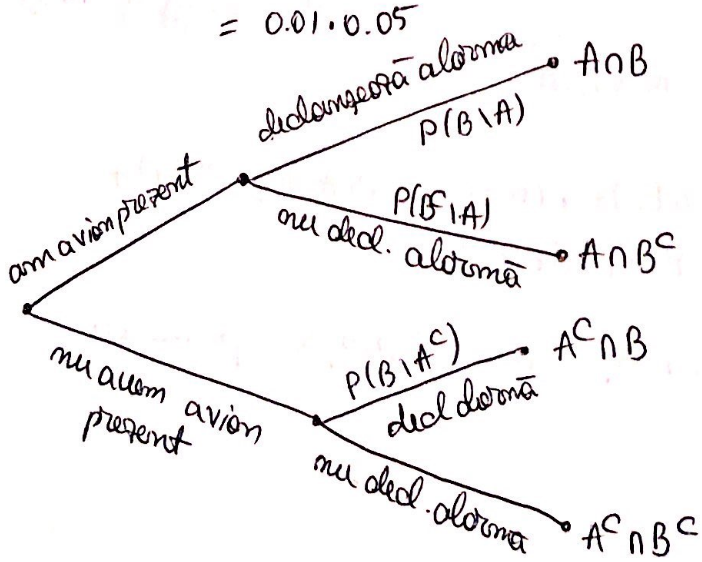
$= P(B \backslash A^c)(1 - P(A))$

$= 0{,}1 \cdot 0{,}95$

b) $P(A \cap B^c) = P(B^c / A) \cdot P(A)$

$= (1 - P(B \backslash A)) \cdot P(A)$

$= 0.01 \cdot 0.05$

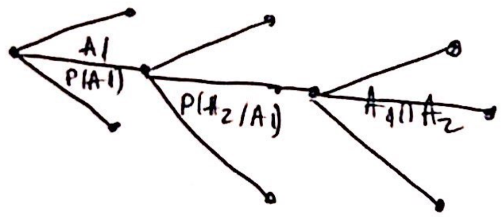


Formula produsului

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ cp. $A_1, A_2, \dots A_m \in \mathcal{F}$ $P(A_1 \cap A_2 \dots A_m) > 0$

Atunci $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2) \dots$

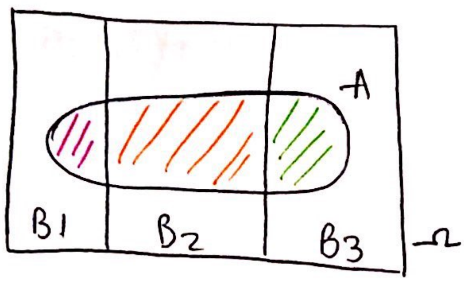
$\dots P(A_m / A_1 \cap A_2 \dots A_{m-1})$



Formula probabilității totale

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ câmp de probabilitate o partiție a lui Ω $\{B_1, B_2, B_3\}$

și $A \in \mathcal{F}$



$$\begin{cases} B_1, B_2, B_3 \subseteq \Omega \\ B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega \\ B_1 \cap B_2 = \emptyset \\ B_1 \cap B_3 = \emptyset \\ B_2 \cap B_3 = \emptyset \end{cases}$$

$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$

$(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$

În plus, $P(B_i) > 0$, $i \in \{1, 2\}$

$A = A \cap \Omega$

$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = P(A / B_1) P(B_1) +$

$+ P(A \setminus B_2) P(B_2) + P(A / B_3) P(B_3)$

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ cp și $B_1, B_2 \dots B_m \in \mathcal{F}$ partiții pe Ω cu

$P(B_i) > 0$, $i \in \{1, \dots m\}$

Dacă $A \in \mathcal{F}$ atunci

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)$$

$n = 2$

$A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}, P(B) \in (0,1)$

$$P(A) = P(A \setminus B) \cdot P(B) + P(A \setminus B^c) \cdot P(B^c)$$

Ex2 continuare

$$P(B) = P(B \mid A) P(A) + P(B \setminus A^c) P(A^c)$$

$$= \frac{12}{51} \cdot \frac{13}{52} + \frac{13}{51} \cdot \left(1 - \frac{13}{52}\right) = \frac{1}{4}$$

Formula lui Bayes

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ c.p. $A, B \in \mathcal{F}$ cu $P(A) > 0$, $P(B) > 0$

a) $P(B \setminus A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A \mid B) P(B)}{P(A)} = \dfrac{P(A \setminus B) P(B)}{P(A \setminus B) \cdot P(B) + P(A \setminus B^c) P(B^c)}$

b) $A \in \mathcal{F}$, $B_1 \circ B_2 \dots B_n \in \mathcal{F}$ o part. a lui Ω, $P(B_i) > 0$

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)}$$

Exp

Să presupunem că prevalența unei anumite boli în populație este de 1%. Pp că efectuăm un test de detecție cu o acuratețe de 95%.

acuratețe : Senzitivitatea și specificitatea testului 95%

a) senzitivitate: rata de true pozitive

b) specificitate: rata de true negative

a) prob. ca testul să fie pozitiv știind că pacientul e infectat

b) prob ca testul să fie negativ — " — " — "

D – pacientul este infectat

T – testul e pozitiv

$P(T|D)$ – senz

$P(T^c/D^c)$ – specif.

false pozitive $P(T/D^c)$

negative $P(T^c/D)$

F. lui B

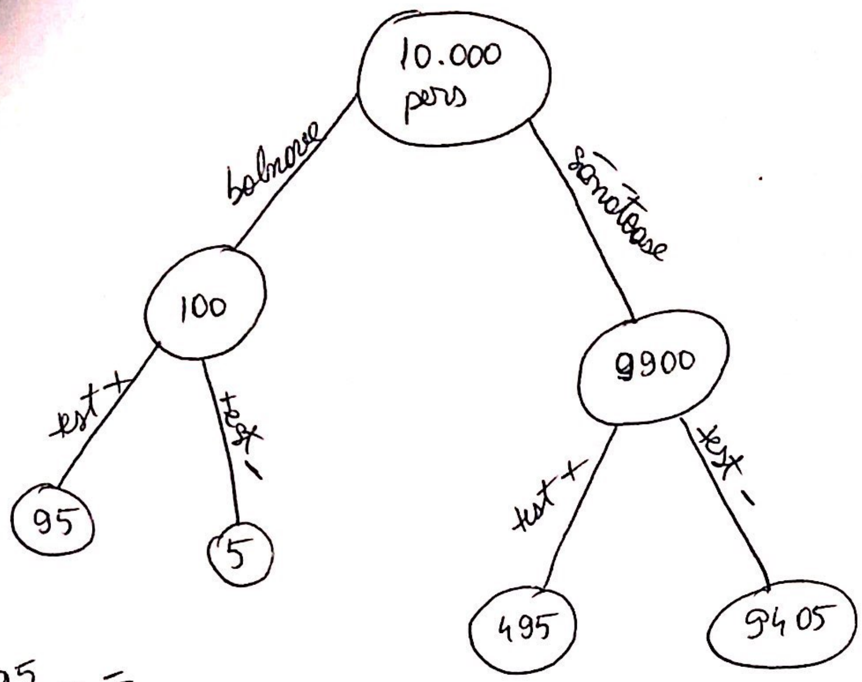
Pp că am efectuat testul și a ieșit pozitiv. Care este prob. să avem virusul, știind că testul e pozitiv?

$P(D|T) = ?$

$$P(D|T) = \frac{P(T|D)\,P(D)}{P(T)} = \frac{P(T|D)\ P(D)}{P(T|D)\,P(D) + P(T/D^c)\,\underbrace{P(D^c)}_{1-P(D)}}$$

$$\left[P(T|D^c) = 1 - \underbrace{P(T^c|D^c)}_{\text{specif}} = 0.05\right]$$

$$\Rightarrow \frac{0.95 \times 0.01}{0.95 \times 0.01 + 0.05 \times 0.99} = 0.16 \Rightarrow 16\%.$$



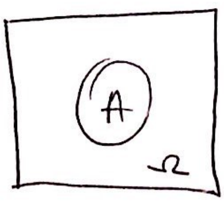
$$\frac{95}{95+495} =$$

Propoziție:

Prob. condiționată este o probabilitate:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ c.p. și $A \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$

def $Q(\cdot) = P(\cdot / A)$ $\qquad$ $Q(B) = P(B/A)$



$(A, \mathcal{F} \cap A)$ $\quad$ $Q(A) \overset{P(A/A)}{=} 1$

$(A_n)_n \subseteq \mathcal{F} \cap A$ disjuncte 2 câte 2)

$$Q\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum Q(A_n)$$

$$P(A/A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = 1$$

$$P\left(\bigcup_n A_n / A\right) = \frac{P\left(\bigcup_n A_n \cap A\right)}{P(A)} = \frac{\sum P(A_n \cap A)}{P(A)} = \sum Q(A_n)$$

Exp $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ op

$A, B, C \in \mathcal{F}$ $P(A \cap B) > 0$

$P(A \cap C) > 0$

$P(B \cap C) > 0$

$$P(A \mid \underbrace{B, C}_{\hookrightarrow B \cap C}) = \frac{P(B / A, C)\, P(A / C)}{P(B / C)}$$

$Q(\cdot) = P(\cdot / C)$