2 Creşterea funcţiilor

Ordinul de creştere a timpului de execuţie al unui algoritm, definit în capitolul 1 dă o caracterizare simplă pentru eficienţa algoritmilor şi ne dă în acelaşi timp posibilitatea de a compara performanţele relative ale unor algoritmi alternativi. De îndată ce dimensiunea n a datelor de intrare devine suficient de mare, algoritmul de sortare prin interclasare, cu timpul de execuţie $\Theta(n\, lg\, n)$ în cazul cel mai defavorabil, este mai performant decât sortarea prin inserţie, al cărei timp de execuţie în cazul cel mai defavorabil este $\Theta(n^2)$. Deşi uneori se poate determina exact timpul de execuţie al unui algoritm, aşa cum am făcut pentru sortarea prin inserţie în capitolul 1, în general, o precizie suplimentară nu merită efortul făcut. Pentru date de intrare suficient de mari, constantele multiplicative şi termenii de ordin inferior din expresia exactă a unui timp de execuţie sunt dominaţi de efectele dimensiunii datelor de intrare în sine.

Când examinăm date de intrare de dimensiuni suficient de mari, astfel încât numai ordinul de creştere a timpului de execuţie să fie relevant, studiem eficienţa ***asimptotică*** a algoritmilor. Cu alte cuvinte, suntem interesaţi de modul de creştere a timpului de execuţie a unui algoritm o dată cu mărirea dimensiunii datelor de intrare, *în cazul limită* când dimensiunea datelor de intrare creşte nemărginit. În mod uzual, un algoritm care este asimptotic mai eficient va fi cea mai bună alegere, cu excepţia cazului în care datele de intrare sunt de dimensiune foarte mică.

Acest capitol oferă mai multe metode standard pentru simplificarea analizei asimptotice a algoritmilor. Secţiunea următoare începe prin a defini mai multe tipuri de "notaţie asimptotică", dintre care am întâlnit deja Θ-notaţia. Vor fi prezentate mai multe convenţii de notaţie care vor fi utilizate pe parcursul cărţii şi în final vom trece în revistă comportamentul funcţiilor care apar frecvent în analiza algoritmilor.

2.1. Notaţia asimptotică

Notaţiile pe care le utilizăm pentru a descrie timpul asimptotic de execuţie al unui algoritm sunt definite cu ajutorul unor funcţii al căror domeniu de definiţie este de fapt mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Astfel de notaţii sunt convenabile pentru a descrie funcţia timp de execuţie în cazul cel mai defavorabil $T(n)$ care în mod uzual este definită doar pentru dimensiuni întregi ale datelor de intrare. Totuşi, este necesar uneori să folosim *în mod abuziv* notaţia asimptotică într-o varietate de moduri. De exemplu, notaţia se extinde cu uşurinţă la domeniul numerelor reale sau, alternativ, se poate restrânge la o submulţime a mulţimii numerelor naturale. Este important totuşi să înţelegem sensul exact al notaţiei pentru ca atunci când este utilizată în mod abuziv să nu fie utilizată în mod *incorect*. În această secţiune se definesc principalele notaţii asimptotice şi de asemenea, se introduc câteva abuzuri de notaţie mai des întâlnite.

Θ-notaţia

În capitolul 1 am arătat că timpul de execuţie pentru sortarea prin inserţie în cazul cel mai defavorabil este $T(n) = \Theta(n^2)$. Să definim acum exact această notaţie. Pentru o funcţie dată

$g(n)$, notăm cu $\Theta(g(n))$, ***mulţimea de funcţii***

$$\Theta(g(n)) = \{\, f(n) \;:\; \text{există constantele pozitive } c_1, c_2 \text{ şi } n_0 \text{ astfel încât } 0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n) \text{ pentru orice } n \ge n_0\}.$$

O funcţie $f(n)$ aparţine mulţimii $\Theta(g(n))$ dacă există constantele pozitive c_1 şi c_2 astfel încât aceasta să fie plasată între $c_1 g(n)$ şi $c_2 g(n)$ pentru n suficient de mare. Deşi $\Theta(g(n))$ este o mulţime, vom scrie "$f(n) = \Theta(g(n))$" pentru a indica faptul că $f(n)$ este un membru al acesteia. Acest abuz al utilizării semnului de egalitate pentru a desemna apartenenţa la o mulţime poate să pară confuz la început, dar vom vedea mai târziu că are avantajele sale.

Figura 2.1 (a) dă o imagine intuitivă a funcţiilor $f(n)$ şi $g(n)$, când $f(n) = \Theta(g(n))$. Pentru toate valorile lui n aflate la dreapta lui n_0, valoarea lui $f(n)$ este mai mare sau egală cu $c_1 g(n)$ şi mai mică sau egală cu $c_2 g(n)$. Cu alte cuvinte, pentru orice $n \ge n_0$, s-ar putea spune că funcţia $f(n)$ este egală cu $g(n)$ până la un factor constant. Vom spune că $g(n)$ este o ***margine asimptotic tare*** pentru $f(n)$.

Definiţia lui $\Theta(g(n))$ cere ca orice membru $f(n) \in \Theta(g(n))$ să fie ***asimptotic nenegativ***, adică $f(n)$ să fie nenegativă pentru n destul de mare. O funcţie asimptotic pozitivă este strict pozitivă pentru orice n suficient de mare. Prin urmare, funcţia $g(n)$ însăşi ar trebui să fie nenegativă, altfel mulţimea $\Theta(g(n))$ este vidă. Din acest motiv vom presupune în continuare că orice funcţie utilizată în cadrul Θ-notaţiei este asimptotic nenegativă. Această presupunere rămâne valabilă şi pentru celelalte notaţii asimptotice definite în acest capitol.

În capitolul 1 am introdus o noţiune neriguroasă de Θ-notaţie care ducea la neglijarea termenilor de ordin inferior şi a coeficientului constant al termenului de ordin maxim. Să justificăm pe scurt această imagine intuitivă, utilizând de data aceasta definiţia, pentru a arăta că $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$. Pentru a face aceasta, trebuie determinate constantele pozitive c_1, c_2 şi n_0 astfel încât

$$c_1 n^2 \le \frac{1}{2}n^2 - 3n \le c_2 n^2$$

pentru orice $n \ge n_0$. Împărţind cu n^2, se obţine

$$c_1 \le \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \le c_2.$$

Inegalitatea din dreapta va fi verificată pentru orice $n \ge 1$ dacă alegem $c_2 \ge 1/2$. În acelaşi fel, inegalitatea din stânga va fi verificată pentru orice valoare $n \ge 7$ dacă alegem $c_1 \le 1/14$. Astfel, luând $c_1 = 1/14$, $c_2 = 1/2$ şi $n_0 = 7$, se poate verifica faptul că $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$. Evident, sunt posibile şi alte alegeri pentru aceste constante, însă faptul important aici este doar acela că acestea există. Să mai observăm că aceste constante depind de funcţia $\frac{1}{2}n^2 - 3n$; o altă funcţie aparţinând lui $\Theta(n^2)$ va cere de regulă alte constante.

Putem utiliza definiţia formală şi pentru a verifica faptul că $6n^3 \ne \Theta(n^2)$. Să presupunem, în scopul obţinerii unei contradicţii, că există c_2 şi n_0 astfel încât $6n^3 \le c_2 n^2$ pentru orice $n \ge n_0$. De aici, $n \le c_2/6$, inegalitate care nu poate fi adevărată pentru n oricât de mare deoarece c_2 este o constantă.

Intuitiv, termenii de ordin inferior ai unei funcţii asimptotic pozitive pot fi ignoraţi în determinarea unor margini asimptotic strânse, deoarece aceştia sunt nesemnificativi pentru valori mari ale lui n. O fracţiune infimă a termenului de rang maxim este suficientă pentru a domina termenii de rang inferior. Astfel, dând lui c_1 o valoare ceva mai mică decât coeficientul termenului

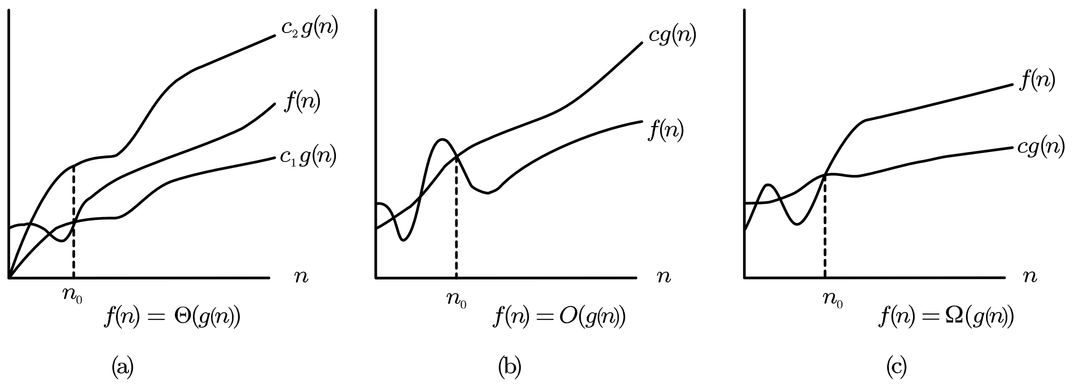

Figura 2.1 Exemple grafice pentru notaţiile Θ, O şi Ω. În fiecare parte, valoarea indicată a lui n_0 este cea mai mică valoare posibilă; orice valoare mai mare va funcţiona, de asemenea. **(a)** Θ-notaţia mărgineşte o funcţie până la factori constanţi. Scriem $f(n) = \Theta(g(n))$ dacă există constantele pozitive n_0, c_1 şi c_2 astfel încât la dreapta lui n_0, valoarea lui $f(n)$ se află întotdeauna între $c_1g(n)$ şi $c_2g(n)$ inclusiv. **(b)** O-notaţia dă o margine superioară pentru o funcţie până la un factor constant. Scriem $f(n) = O(g(n))$ dacă există constantele pozitive n_0 şi c astfel încât la dreapta lui n_0, valoarea lui $f(n)$ este întotdeauna mai mică sau egală cu $cg(n)$. **(c)** Ω-notaţia dă o margine inferioară pentru o funcţie până la un factor constant. Scriem $f(n) = \Omega(g(n))$ dacă există constantele pozitive n_0 şi c astfel încât la dreapta lui n_0, valoarea lui $f(n)$ este întotdeauna mai mare sau egală cu $cg(n)$.

de rang maxim şi dând lui c_2 o valoare ceva mai mare, s-ar putea ca inegalităţile din definiţia Θ-notaţiei să fie satisfăcute. Coeficientul termenului de rang maxim poate fi de asemenea ignorat, deoarece acesta poate schimba c_1 şi c_2 doar cu un factor constant.

Pentru a exemplifica, să considerăm o funcţie pătratică oarecare $f(n) = an^2 + bn + c$, în care a, b şi c sunt constante iar $a > 0$. Eliminarea termenilor de rang inferior lui 2 şi neglijarea constantelor conduce la $f(n) = \Theta(n^2)$. Pentru a arăta acelaşi lucru în mod formal, alegem constantele $c_1 = a/4$, $c_2 = 7a/4$ şi $n_0 = 2 \cdot \max\{|b|/a, \sqrt{|c|/a}\}$. Cititorul poate arăta că $0 \leq c_1n^2 \leq an^2 + bn + c \leq c_2n^2$ pentru orice $n \geq n_0$. În general, pentru orice polinom $p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_ix^i$, unde a_i sunt constante şi $a_d > 0$, avem $p(n) = \Theta(n^d)$. (vezi problema 2-1)

Deoarece orice constantă este un polinom de gradul 0, putem expima orice funcţie constantă ca $\Theta(n^0)$ sau $\Theta(1)$. Această ultimă notaţie este un mic abuz deoarece nu este clar care variabilă tinde la infinit.[1] Vom folosi des notaţia $\Theta(1)$ înţelegând prin aceasta fie o constantă, fie o funcţie constantă.

O-notaţia

Θ-notaţia delimitează o funcţie asimptotic inferior şi superior. Când avem numai ***o margine asimptotică superioară***, utilizăm O-notaţia. Fiind dată o funcţie $g(n)$, vom nota cu $O(g(n))$,

[1]Adevărata problemă este aceea că notaţia noastră obişnuită pentru funcţii nu face distincţie între funcţii şi valorile lor. În λ-calcul, parametrii unei funcţii sunt clar specificaţi: funcţia n^2 poate fi scrisă ca $\lambda n \cdot n^2$ sau chiar $\lambda r \cdot r^2$. Adoptarea unei notaţii mai riguroase, pe de altă parte, ar complica manipulările algebrice, aşa că preferăm să tolerăm abuzul.

mulţimea

$$O(g(n)) = \{f(n) \ : \ \text{există constantele pozitive } c \text{ şi } n_0 \text{ astfel încât } 0 \le f(n) \le cg(n) \text{ pentru orice } n \ge n_0\}.$$

Vom utiliza O-notaţia pentru a indica o margine superioară a unei funcţii până la un factor constant. Figura 2.1(b) dă imaginea intuitivă aflată în spatele O-notaţiei. Pentru toate valorile lui n aflate la dreapta lui n_0, valorile corespunzătoare ale lui $f(n)$ sunt egale sau mai mici decât cele ale lui $g(n)$.

Pentru a indica faptul că o funcţie $f(n)$ este un membru al lui $O(g(n))$, vom scrie $f(n) = O(g(n))$. Să notăm faptul că $f(n) = \Theta(g(n))$ implică $f(n) = O(g(n))$ deoarece Θ-notaţia este o noţiune mai puternică decât O-notaţia. În limbajul teoriei mulţimilor, avem $\Theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$. Astfel, demonstraţia faptului că orice funcţie pătratică $an^2 + bn + c$, unde $a > 0$, în $\Theta(n^2)$, arată de asemenea că orice funcţie pătratică este în $O(n^2)$. Ceea ce poate părea şi mai surprinzător este că orice funcţie ***liniară*** $an + b$ este în $O(n^2)$, ceea ce se verifică uşor, luând $c = a + |b|$ şi $n_0 = 1$.

Unor cititori, care s-au mai întâlnit cu notaţii de tipul O, ar putea să li se pară ciudat că scriem $n = O(n^2)$. În literatură, O-notaţia este folosită uneori informal pentru a descrie margini asimptotice strânse, adică ceea ce am definit utilizând Θ-notaţia. În această carte, totuşi, atunci când scriem $f(n) = O(g(n))$, afirmăm, în esenţă, că un anumit multiplu constant al lui $g(n)$ este o margine asimptotică superioară a lui $f(n)$, fără să spunem nimic despre cât de strânsă este această margine superioară. Distincţia dintre marginile asimptotice superioare şi marginile asimptotice strânse a devenit standard în literatura consacrată algoritmilor.

Folosind O-notaţia, se poate adeseori descrie timpul de execuţie al unui algoritm inspectând structura globală a algoritmului. De exemplu, structura de ciclu dublu a algoritmului de sortare prin inserţie din capitolul 1 asigură imediat o margine superioară de tipul $O(n^2)$ pentru timpul de execuţie în cazul cel mai defavorabil: costul ciclului interior este mărginit superior de $O(1)$ (constantă), indicii i, j sunt, ambii, cel mult n iar ciclul interior este executat cel mult o dată pentru fiecare dintre cele n^2 perechi de valori pentru i şi j.

Deoarece O-notaţia descrie o margine superioară, atunci când o folosim pentru delimitarea timpului de execuţie în cazul cel mai defavorabil, prin implicaţie, delimităm, de asemenea, timpul de execuţie al algoritmului pentru date de intrare arbitrare. Astfel, delimitarea $O(n^2)$ pentru timpul de execuţie în cazul cel mai defavorabil al sortării prin inserţie se aplică, în egală măsură, timpului său de execuţie pentru orice date de intrare. Delimitarea $\Theta(n^2)$ a timpului de execuţie în cazul cel mai defavorabil al sortării prin inserţie, totuşi, nu implică o delimitare $\Theta(n^2)$ asupra timpului de execuţie al sortării prin inserţie pentru ***orice*** date de intrare. De exemplu, am văzut în capitolul 1 că dacă datele de intrare sunt deja sortate, sortarea prin inserţie se execută în timpul $\Theta(n)$.

Tehnic, este o inexactitate să se spună că timpul de execuţie la sortarea prin inserţie este $O(n^2)$ deoarece pentru un n dat timpul real de execuţie depinde de forma datelor de intrare de dimensiune n. Prin urmare, timpul de execuţie nu este de fapt tocmai o funcţie de n. Ceea ce înţelegem atunci când spunem "timpul de execuţie este $O(n^2)$" este că timpul de execuţie în cazul cel mai defavorabil (care este o funcţie de n) este $O(n^2)$, sau, echivalent, oricare ar fi datele de intrare de dimensiune n, pentru fiecare valoare a lui n, timpul de execuţie pentru acest set de date de intrare este $O(n^2)$.

Ω-notaţia

La fel cum O-notaţia furnizează o delimitare asimptotică ***superioară*** pentru o funcţie, Ω-notaţia furnizează o ***delimitare asimptotică inferioară***. Pentru o funcţie dată $g(n)$, vom nota cu $\Omega(g(n))$, mulţimea

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \; : \; \text{există constantele pozitive } c \text{ şi } n_0 \text{ astfel încât } 0 \le cg(n) \le f(n) \text{ pentru orice } n \ge n_0\}$$

Imaginea intuitivă în spatele Ω-notaţiei este arătată în figura 2.1(c). Pentru toate valorile n aflate la dreapta lui n_0, $f(n)$ este mai mare sau egală cu $cg(n)$.

Din definiţiile notaţiilor asimptotice pe care le-am întâlnit până acum, este uşor de demonstrat următoarea teoremă importantă (vezi exerciţiul 2.1-5).

Teorema 2.1 Pentru orice două funcţii $f(n)$ şi $g(n)$, avem $f(n) = \Theta(g(n))$ dacă şi numai dacă $f(n) = O(g(n))$ şi $f(n) = \Omega(g(n))$. ∎

Ca un exemplu de aplicare a acestei teoreme, faptul că $an^2+bn+c = \Theta(n^2)$ implică imediat $an^2+bn+c = O(n^2)$ şi $an^2+bn+c = \Omega(n^2)$. În practică, în loc să utilizăm teorema 2.1 pentru a obţine margini asimptotice superioare sau inferioare pornind de la margini asimptotice strânse, aşa cum am făcut în exemplul precedent, o utilizăm de obicei pentru a demonstra delimitări asimptotice strânse plecând de la delimitări asimptotice superioare şi inferioare. Mărginirea asimptotic tare va fi demonstrată utilizând mărginirea asimptotică, superioară şi inferioară.

Deoarece Ω-notaţia descrie o margine inferioară, atunci când o utilizăm pentru a evalua timpul de execuţie al unui algoritm în cazul cel mai favorabil, în mod implicit, evaluăm şi timpul de execuţie al algoritmului pentru date de intrare arbitrare. De exemplu, timpul de execuţie în cazul cel mai favorabil al sortării prin inserţie este $\Omega(n)$, de unde rezultă că timpul de execuţie al sortării prin inserţie este $\Omega(n)$.

Timpul de execuţie al sortării prin inserţie se află prin urmare între $O(n)$ şi $\Omega(n^2)$ deoarece este situat întotdeauna între o funcţie liniară şi o funcţie pătratică de n. Mai mult, aceste aproximări sunt asimptotic cele mai strânse: de exemplu, timpul de execuţie al sortării prin inserţie nu este $\Omega(n^2)$ deoarece acesta este $\Theta(n)$ în cazul datelor de intrare deja sortate. Nu este contradictoriu să spunem totuşi că acest timp de execuţie este $\Omega(n^2)$ *în cazul cel mai defavorabil* deoarece există cel puţin un tip de date de intrare care impun algoritmului un timp de execuţie $\Omega(n^2)$. Atunci când spunem că *timpul de execuţie* al unui algoritm este $\Omega(g(n))$, înţelegem că *nu contează ce set particular de date de intrare de dimensiune* n *este ales pentru fiecare valoare a lui* n, timpul de execuţie pe acel set de date de intrare este cel puţin o constantă înmulţită cu $g(n)$, pentru n suficient de mare.

Notaţia asimptotică în ecuaţii

Am văzut deja cum poate fi utilizată o notaţie asimptotică în formulele matematice. De exemplu, la introducerea O-notaţiei, am scris "$n = O(n^2)$". Am putea scrie, de asemenea $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$. Cum interpretăm astfel de formule?

Atunci când o notaţie asimptotică se află singură în membrul drept al unei ecuaţii, ca în $n = O(n^2)$, deja am definit semnul de egalitate ca reprezentând apartenenţa din teoria mulţimilor: $n \in O(n^2)$. În general, totuşi, când notaţia asimptotică apare într-o relaţie, o vom interpreta ca reprezentând o funcţie anonimă pe care nu ne obosim să o numim. De exemplu, egalitatea $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$ înseamnă de fapt $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + f(n)$, unde $f(n)$ este o funcţie oarecare din mulţimea $\Theta(n)$. În acest caz, $f(n) = 3n + 1$, care este într-adevăr în $\Theta(n)$.

Folosirea notaţiilor asimptotice în aceste situaţii poate ajuta la eliminarea unor detalii inutile dintr-o ecuaţie. De exemplu, în capitolul 1, am exprimat timpul de execuţie în cazul cel mai defavorabil la sortarea prin interclasare prin relaţia de recurenţă

$$T(n) = 2\,T(n/2) + \Theta(n)$$

Dacă suntem interesaţi doar de comportarea asimptotică a lui $T(n)$, nu are nici un rost să specificăm exact toţi termenii de ordin inferior: aceştia sunt toţi presupuşi a fi incluşi în funcţia anonimă notată prin termenul $\Theta(n)$.

Numărul funcţiilor "anonime" într-o expresie este înţeles ca fiind egal cu numărul notaţiilor asimptotice care apar în această expresie. De exemplu, în expresia

$$\sum_{i=1}^{n} O(i)$$

există o singură funcţie anonimă (o funcţie de i). Această expresie ***nu*** este echivalentă cu $O(1) + O(2) + \cdots + O(n)$, care oricum nu are o interpretare clară.

În anumite cazuri apar notaţii asimptotice în membrul stâng al unei ecuaţii, cum ar fi

$$2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2).$$

Vom interpreta astfel de ecuaţii utilizând următoarea regulă: *Oricum ar fi alese funcţiile anonime din partea stângă a semnului egal, există o modalitate de alegere a funcţiilor anonime din partea dreaptă a semnului egal pentru a realiza egalitatea descrisă de ecuaţie.* Astfel, sensul exemplului nostru este acela că pentru ***orice*** funcţie $f(n) \in \Theta(n)$, există ***o anumită*** funcţie $g(n) \in \Theta(n^2)$ astfel încât $2n^2 + f(n) = g(n)$ pentru orice n. Cu alte cuvinte, membrul drept al ecuaţiei oferă un nivel de detaliu mai scăzut decât membrul stâng.

Un număr de astfel de relaţii pot fi înlănţuite ca în

$$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n) = \Theta(n^2)$$

Putem interpreta fiecare ecuaţie separat după regula de mai sus. Prima ecuaţie spune că există o funcţie $f(n) \in \Theta(n)$ astfel încât $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + f(n)$ pentru orice n. A doua ecuaţie spune că pentru ***orice*** funcţie $g(n) \in \Theta(n)$ (aşa cum este $f(n)$), există o ***anumită*** funcţie $h(n) \in \Theta(n^2)$ astfel încât $2n^2 + g(n) = h(n)$ pentru orice n. Să observăm că această interpretare implică $2n^2 + 3n + 1 = \Theta(n^2)$, fapt care coincide cu informaţia intuitivă pe care o transmite lanţul celor două ecuaţii de mai sus.

o-notaţia

Delimitarea asimptotică superioară dată de O-notaţia definită anterior poate sau nu să fie o delimitare asimptotic strânsă. Astfel, relaţia $2n^2 = O(n^2)$, este o delimitare asimptotic strânsă pe când $2n = O(n^2)$ nu este. Vom utiliza în cele ce urmează o-notaţia pentru a desemna o delimitare superioară care nu este asimptotic strânsă. Formal, vom defini $o(g(n))$ ("o mic de g de n") ca fiind mulţimea

$$o(g(n)) = \{f(n) \ : \ \text{pentru orice constantă pozitivă } c > 0 \text{ există o constantă } n_0 > 0 \text{ astfel încât } 0 \le f(n) < cg(n) \text{ pentru orice } n \ge n_0\}.$$

De exemplu, $2n = o(n^2)$, dar $2n^2 \neq o(n^2)$.

Definiţiile pentru O-notaţie şi o-notaţie sunt similare. Principala diferenţă este aceea că în $f(n) = O(g(n))$, delimitarea $0 \leq f(n) \leq c\,g(n)$ are loc pentru o ***anumită*** constantă $c > 0$, dar, în $f(n) = o(g(n))$, delimitarea $0 \leq f(n) < c\,g(n)$ are loc pentru ***toate*** constantele $c > 0$. Intuitiv, în cazul o-notaţiei, funcţia $f(n)$ devine neglijabilă relativ la $g(n)$ atunci când n tinde la infinit; cu alte cuvinte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0. \tag{2.1}$$

Unii autori folosesc această limită ca o definiţie pentru o-notaţie: definiţia din această carte impune, de asemenea, funcţiilor anonime să fie asimptotic nenegative.

ω-notaţia

Prin analogie, ω-notaţia este faţă de Ω-notaţie ceea ce este o-notaţia faţă de O-notaţie. Utilizăm ω-notaţia pentru a desemna o delimitare asimptotică inferioară care nu este asimptotic strânsă. O cale de a o defini este

$$f(n) \in \omega(g(n)) \text{ dacă şi numai dacă } g(n) \in o(f(n)).$$

Formal, totuşi, definim $\omega(g(n))$ ("omega mic de g de n") ca fiind mulţimea

$$\omega(g(n)) = \{f(n) \;:\; \text{pentru orice constantă pozitivă } c > 0 \text{ există o constantă } n_0 > 0 \text{ astfel încât } 0 \leq cg(n) < f(n) \text{ pentru orice } n \geq n_0\}.$$

De exemplu, $n^2/2 = \omega(n)$, dar $n^2/2 \neq \omega(n)$. Relaţia $f(n) = \omega(g(n))$ implică

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty,$$

dacă limita există. Cu alte cuvinte, $f(n)$ devine oricât de mare relativ la $g(n)$ atunci când n tinde la infinit.

Compararea funcţiilor

Multe dintre proprietăţile relaţiilor dintre numerele reale se aplică şi la compararea asimptotică a funcţiilor. Pentru cele ce urmează vom presupune că $f(n)$ şi $g(n)$ sunt asimptotic pozitive.

Tranzitivitatea:

$$\begin{array}{llll}
f(n) = \Theta(g(n)) & \text{şi} \quad g(n) = \Theta(h(n)) & \text{implică} & f(n) = \Theta(h(n)), \\
f(n) = O(g(n)) & \text{şi} \quad g(n) = O(h(n)) & \text{implică} & f(n) = O(h(n)), \\
f(n) = \Omega(g(n)) & \text{şi} \quad g(n) = \Omega(h(n)) & \text{implică} & f(n) = \Omega(h(n)), \\
f(n) = o(g(n)) & \text{şi} \quad g(n) = o(h(n)) & \text{implică} & f(n) = o(h(n)), \\
f(n) = \omega(g(n)) & \text{şi} \quad g(n) = \omega(h(n)) & \text{implică} & f(n) = \omega(h(n)).
\end{array}$$

Reflexivitatea:

$$\begin{aligned}
f(n) &= \Theta(f(n)), \\
f(n) &= O(f(n)), \\
f(n) &= \Omega(f(n)).
\end{aligned}$$

Simetria:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \quad \text{dacă şi numai dacă} \quad g(n) = \Theta(f(n)).$$

Antisimetria:

$$\begin{array}{lll} f(n) = O(g(n)) & \text{dacă şi numai dacă} & g(n) = \Omega(f(n)), \\ f(n) = o(g(n)) & \text{dacă şi numai dacă} & g(n) = \omega(f(n)). \end{array}$$

Deoarece aceste proprietăţi sunt valide pentru notaţii asimptotice, se poate trasa o analogie între compararea asimptotică a două funcţii f şi g şi compararea asimptotică a două numere reale a şi b:

$$\begin{array}{lll} f(n) = O(g(n)) & \approx & a \leq b, \\ f(n) = \Omega(g(n)) & \approx & a \geq b, \\ f(n) = \Theta(g(n)) & \approx & a = b, \\ f(n) = o(g(n)) & \approx & a < b, \\ f(n) = \omega(g(n)) & \approx & a > b. \end{array}$$

O proprietate a numerelor reale, totuşi, nu se transpune la notaţii asimptotice:

Trihotomia: Pentru orice două numere reale a şi b exact una dintre următoarele relaţii este adevărată: $a < b$, $a = b$ sau $a > b$.

Deşi orice două numere reale pot fi comparate, nu toate funcţiile sunt asimptotic comparabile. Cu alte cuvinte, pentru două funcţii $f(n)$ şi $g(n)$, se poate întâmpla să nu aibă loc nici $f(n) = O(g(n))$, nici $f(n) = \Omega(g(n))$. De exemplu, funcţiile n şi $n^{1+\sin n}$ nu pot fi comparate utilizând notaţii asimptotice, deoarece valoarea exponentului în $n^{1+\sin n}$ oscilează între 0 şi 2, luând toate valorile intermediare.

Exerciţii

2.1-1 Fie $f(n)$ şi $g(n)$ funcţii asimptotic nenegative. Utilizând definiţia de bază a Θ-notaţiei, demonstraţi că $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$.

2.1-2 Demonstraţi că pentru orice constante reale a şi b, unde $b > 0$, avem

$$(n + a)^b = \Theta(n^b). \tag{2.2}$$

2.1-3 Explicaţi de ce afirmaţia "Timpul de execuţie al algoritmului A este cel puţin $O(n^2)$" este lipsită de conţinut.

2.1-4 Este adevărat că $2^{n+1} = O(2^n)$? Este adevărat că $2^{2n} = O(2^n)$?

2.1-5 Demonstraţi teorema 2.1.

2.1-6 Demonstraţi că timpul de execuţie al unui algoritm este $\Theta(g(n))$ dacă şi numai dacă timpul său de execuţie în cazul cel mai defavorabil este $O(g(n))$ şi timpul său de execuţie în cazul cel mai favorabil este $\Omega(g(n))$.

2.1-7 Demonstraţi că $o(g(n)) \cap \omega(g(n))$ este mulţimea vidă.

2.1-8 Putem extinde notaţia noastră la cazul a doi parametri n şi m care tind la infinit în mod independent, cu viteze diferite. Peentru o funcţie dată $g(n, m)$ notăm cu $O(g(n, m))$ mulţimea de funcţii

$$O(g(n, m)) = \{f(n, m) \ : \ \text{există constantele pozitive } c, n_0 \text{ şi } m_0 \text{ astfel încât } 0 \leq f(n, m) \leq cg(n, m) \text{ pentru orice } n \geq n_0 \text{ şi } m \geq m_0\}.$$

Daţi definiţiile corespunzătoare pentru $\Omega(g(n, m))$ şi $\Theta(g(n, m))$.

2.2. Notaţii standard şi funcţii comune

Această secţiune trece în revistă câteva funcţii şi notaţii matematice standard şi explorează relaţiile dintre ele. Ea ilustrează, de asemenea, utilizarea notaţiilor asimptotice.

Monotonie

O funcţie $f(n)$ este ***monoton crescătoare*** dacă $m \leq n$ implică $f(m) \leq f(n)$. Analog, ea este ***monoton descrescătoare*** dacă $m \leq n$ implică $f(m) \geq f(n)$. O funcţie $f(n)$ este ***strict crescătoare*** dacă $m < n$ implică $f(m) < f(n)$ şi ***strict descrescătoare*** dacă $m < n$ implică $f(m) > f(n)$.

Părţi întregi inferioare şi superioare

Pentru orice număr real x, notăm cel mai mare întreg mai mic sau egal cu x prin $\lfloor x \rfloor$ (se citeşte "partea întreagă inferioară a lui x") şi cel mai mic întreg mai mare sau egal cu x prin $\lceil x \rceil$ (se citeşte "partea întreagă superioară a lui x"). Pentru orice x real,

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1.$$

Pentru orice întreg n,

$$\lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor = n,$$

iar pentru orice întreg n şi orice întregi $a \neq 0$ şi $b > 0$,

$$\lceil \lceil n/a \rceil / b \rceil = \lceil n/ab \rceil \tag{2.3}$$

şi

$$\lfloor \lfloor n/a \rfloor / b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor. \tag{2.4}$$

Funcţiile parte întreagă inferioară şi superioară sunt monoton crescătoare.

Polinoame

Fiind dat un întreg pozitiv d, ***un polinom în*** n ***de gradul*** d este o funcţie $p(n)$ de forma

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i,$$

unde constantele $a_0, a_1, \ldots a_d$ sunt ***coeficienţii*** polinomului, iar $a_d \neq 0$. Un polinom este *asimptotic pozitiv* dacă şi numai dacă $a_d > 0$. Pentru un polinom asimptotic pozitiv $p(n)$ de grad d avem $p(n) = \Theta(n^d)$. Pentru orice constantă reală $a \geq 0$, funcţia n^a este monoton crescătoare, iar pentru orice constantă reală $a \leq 0$ funcţia n^a este monoton descrescătoare. Spunem că o funcţie $f(n)$ este ***polinomial mărginită*** dacă $f(n) = n^{O(1)}$, ceea ce este echivalent cu a spune că $f(n) = O(n^k)$ pentru o anumită constantă k (vezi exerciţiul 2.2-2).

Exponenţiale

Pentru orice $a \neq 0$, m şi n reale avem următoarele identităţi:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, \\ a^1 &= a, \\ a^{-1} &= 1/a, \\ (a^m)^n &= a^{mn}, \\ (a^m)^n &= (a^n)^m, \\ a^m a^n &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

Pentru orice n şi $a \geq 1$, funcţia a^n este monoton crescătoare în n. Când ne va conveni, vom presupune că $0^0 = 1$.

Ratele de creştere ale polinoamelor şi exponenţialelor pot fi legate prin următorul fapt. Pentru orice constante a şi b astfel încât $a > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0, \tag{2.5}$$

din care putem trage concluzia că

$$n^b = o(a^n).$$

Astfel, orice funcţie exponenţială având baza strict mai mare decât 1 creşte mai repede decât orice funcţie polinomială.

Utilizând e pentru a nota $2.71828\ldots$, baza funcţiei logaritm natural, avem, pentru orice x real,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}, \tag{2.6}$$

unde "!" desemnează funcţia factorial definită mai târziu în această secţiune. Pentru orice x real avem inegalitatea

$$e^x \geq 1 + x, \tag{2.7}$$

unde egalitatea are loc numai pentru $x = 0$. Când $|x| \leq 1$, avem aproximaţia

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2. \tag{2.8}$$

Când $x \to 0$, aproximaţia lui e^x prin $1 + x$ este destul de bună:

$$e^x = 1 + x + \Theta(x^2).$$

(În această ecuaţie, notaţia asimptotică este utilizată pentru a descrie comportamentul la limită pentru $x \to 0$ mai degrabă decât pentru $x \to \infty$.) Avem, pentru orice x,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Logaritmi

Vom utiliza următoarele notaţii:

$$\begin{aligned} \lg n &= \log_2 n && \text{(logaritm binar)}, \\ \ln n &= \log_e n && \text{(logaritm natural)}, \\ \lg^k n &= (\lg n)^k && \text{(exponenţierea)}, \\ \lg\lg n &= \lg(\lg n) && \text{(compunerea)}. \end{aligned}$$

O convenţie de notaţie importantă pe care o vom adopta este aceea că ***funcţiile logaritmice se vor aplica numai următorului termen dintr-o formulă***, astfel că $\lg n + k$ va însemna $(\lg n) + k$ şi nu $\lg(n + k)$. Pentru $n > 0$ şi $b > 1$, funcţia $\log_b n$ este strict crescătoare.

Pentru orice numere reale $a > 0, b > 0, c > 0$ şi n,

$$\begin{aligned} a &= b^{\log_b a}, \\ \log_c(ab) &= \log_c a + \log_c b, \\ \log_b a^n &= n \log_b a, \\ \log_b a &= \frac{\log_c a}{\log_c b}, \\ \log_b(1/a) &= -\log_b a, \\ \log_b a &= \frac{1}{\log_a b}, \\ a^{\log_b n} &= n^{\log_b a}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Deoarece schimbarea bazei unui logaritm de la o constantă la o altă constantă schimbă valoarea logaritmului doar printr-un factor constant, vom utiliza adesea notaţia "$\lg n$" când factorii constanţi nu vor fi importanţi, aşa cum este cazul cu O-notaţia. Informaticienilor li se pare că 2 este baza cea mai naturală pentru logaritmi, deoarece atât de mulţi algoritmi şi structuri de date presupun descompunerea unei probleme în două părţi.

Există o dezvoltare în serie simplă pentru $\ln(1 + x)$ când $|x| < 1$:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Avem, de asemenea, următoarele inegalităţi pentru $x > -1$:

$$\frac{x}{1 + x} \leq \ln(1 + x) \leq x, \tag{2.10}$$

unde egalitatea are loc numai pentru $x = 0$.

Spunem că o funcţie $f(n)$ este ***polilogaritmic mărginită*** dacă $f(n) = \lg^{O(1)} n$. Putem lega creşterile polinoamelor şi polilogaritmilor înlocuind pe n cu $\lg n$ şi pe a cu 2^a în ecuaţia (2.5), obţinând

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg^b n}{(2^a)^{\lg n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lg^b n}{n^a} = 0.$$

Din această limită, putem conchide că

$$\lg^b n = o(n^a)$$

pentru orice constantă $a > 0$. Astfel, orice funcţie polinomială pozitivă creşte mai repede decât orice funcţie polilogaritmică.

Factoriali

Notaţia $n!$ (se citeşte "n factorial") este definită pentru numere întregi $n \geq 0$ prin

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n = 0, \\ n \cdot (n-1)! & \text{dacă } n > 0. \end{cases}$$

Astfel, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

O margine superioară slabă a funcţiei factorial este $n! \leq n^n$, deoarece fiecare dintre cei n factori ai produsului factorial este cel mult n. ***Aproximaţia lui Stirling,***

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{2.11}$$

unde e este baza logaritmilor naturali, ne dă o margine superioară mai strânsă, dar şi o margine inferioară. Utilizând aproximaţia lui Stirling, putem demonstra că

$$\begin{aligned} n! &= o(n^n), \\ n! &= \omega(2^n), \\ \lg(n!) &= \Theta(n \lg n). \end{aligned}$$

Următoarele delimitări sunt, de asemenea, valabile pentru orice n:

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{ne^{1/12n}} \tag{2.12}$$

Funcţia logaritm iterată

Utilizăm notaţia $\lg^* n$ (se citeşte "logaritm stea de n") pentru a nota logaritmul iterat, care este definit după cum urmează. Fie funcţia $\lg^{(i)} n$ definită recursiv pentru întregii nenegativi i prin

$$lg^{(i)}n = \begin{cases} n & \text{dacă } i = 0, \\ lg(\lg^{(i-1)} n) & \text{dacă } i > 0 \text{ şi } \lg^{(i-1)} n > 0, \\ \text{nedefinită} & \text{dacă } i > 0 \text{ şi } lg^{(i-1)}n \geq 0 \text{ sau } \lg^{(i-1)} n \text{ este nedefinită.} \end{cases}$$

Calculaţi diferenţa între funcţia $\lg^{(i)} n$ (funcţia logaritm aplicată succesiv de i ori, începând cu argumentul n) şi $\lg^i n$ (logaritmul lui n ridicat la puterea i). Funcţia logaritm iterată este definită prin

$$\lg^* n = \min\left\{i \geq 0 : \lg^{(i)} n \leq 1\right\}.$$

Funcţia logaritm iterată este o funcţie ***foarte*** lent crescătoare:

$$\begin{aligned} \lg^* 2 &= 1, \\ \lg^* 4 &= 2, \\ \lg^* 16 &= 3, \\ \lg^* 65536 &= 4, \\ \lg^*(2^{65536}) &= 5. \end{aligned}$$

Deoarece numărul atomilor din universul observabil este estimat la aproximativ 10^{80}, care este mult mai mic decât 2^{65536}, rareori întâlnim o valoare a lui n astfel încât $\lg^* n > 5$.

Numere Fibonacci

Numerele Fibonacci sunt definite prin următoarea recurenţă:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_i = F_{i-1} + F_{i-2} \quad \text{pentru } i \geq 2. \tag{2.13}$$

Astfel, fiecare număr Fibonacci este suma celor două numere Fibonacci anterioare, rezultând secvenţa

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots .$$

Numerele Fibonacci sunt legate de ***raportul de aur*** ϕ şi de conjugatul său $\widehat{\phi}$, care sunt date de următoarele formule:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\ldots, \widehat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -.61803\ldots. \tag{2.14}$$

Mai precis, avem

$$F_i = \frac{\phi^i - \widehat{\phi}^i}{\sqrt{5}}, \tag{2.15}$$

ceea ce se poate demonstra prin inducţie (exerciţiul 2.2-7). Deoarece $|\widehat{\phi}| < 1$, avem $|\widehat{\phi}^i|/\sqrt{5} < 1/\sqrt{5} < 1/2$, astfel că cel de-al i-lea număr Fibonacci este egal cu $\phi^i/\sqrt{5}$ rotunjit la cel mai apropiat întreg. Astfel, numerele Fibonacci cresc exponenţial.

Exerciţii

2.2-1 Arătaţi că dacă $f(n)$ şi $g(n)$ sunt funcţii monoton crescătoare, atunci la fel sunt şi funcţiile $f(n) + g(n)$ şi $f(g(n))$, iar dacă $f(n)$ şi $g(n)$ sunt în plus nenegative, atunci şi $f(n) \cdot g(n)$ este monoton crescătoare.

2.2-2 Utilizaţi definiţia O-notaţiei pentru a arăta că $T(n) = n^{O(1)}$ dacă şi numai dacă există o constantă $k > 0$ astfel încât $T(n) = O(n^k)$.

2.2-3 Demonstraţi ecuaţia (2.9).

2.2-4 Demonstraţi că $\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$ şi că $n! = o(n^n)$.

2.2-5 $\star$ Este funcţia $\lceil \lg n \rceil!$ polinomial mărginită? Este funcţia $\lceil \lg \lg n \rceil!$ polinomial mărginită?

2.2-6 $\star$ Care este asimptotic mai mare: $\lg(\lg^* n)$ sau $\lg^*(\lg n)$?

2.2-7 Demonstraţi prin inducţie că cel de-al i-lea număr Fibonacci verifică egalitatea $F_i = (\phi^i - \widehat{\phi}^i)/\sqrt{5}$, unde ϕ este raportul de aur iar $\widehat{\phi}$ este conjugatul său.

2.2-8 Demonstraţi că pentru $i \geq 0$ cel de-al $(i+2)$-lea număr Fibonacci verifică $F_{i+2} \geq \phi^i$.

Probleme

2-1 Comportamentul asimptotic al polinoamelor
Fie

$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i p^i,$$

unde $a_d > 0$ un polinom de gradul d în n şi fie k o constantă. Utilizaţi proprietăţile notaţiilor asimptotice pentru a demonstra următoarele proprietăţi.

a. Dacă $k \geq d$, atunci $p(n) = O(n^k)$.

b. Dacă $k \leq d$, atunci $p(n) = \Omega(n^k)$.

c. Dacă $k = d$, atunci $p(n) = \Theta(n^k)$.

d. Dacă $k > d$, atunci $p(n) = o(n^k)$.

e. Dacă $k < d$, atunci $p(n) = \omega(n^k)$.

2-2 Creşteri asimptotice relative
Indicaţi, pentru fiecare pereche de expresii (A, B) din tabelul următor, dacă A este O, o, Ω, ω sau Θ de B. Presupuneţi că $k \geq 1$, $\epsilon > 0$ şi $c > 1$ sunt constante. Răspunsul trebuie să fie sub forma unui tabel, cu "da" sau "nu" scrise în fiecare rubrică.

	A	B	O	o	Ω	ω	Θ
a.	$\lg^k n$	n^ϵ					
b.	n^k	c^n					
c.	$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
d.	2^n	$2^{n/2}$					
e.	$n^{\lg m}$	$m^{\lg n}$					
f.	$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$					

2-3 Ordonarea după ratele de creştere asimptotică

a. Ordonaţi următoarele funcţii după ordinea de creştere; mai precis, găsiţi un aranjament de funcţii $g_1, g_2, \ldots g_{30}$ care să verifice $g_1 = \Omega(g_2)$, $g_2 = \Omega(g_3)$, $\ldots$, $g_{29} = \Omega(g_{30})$. Partiţionaţi lista în clase de echivalenţă astfel încât $f(n)$ şi $g(n)$ să fie în aceeaşi clasă de echivalenţă dacă şi numai dacă $f(n) = \Theta(g(n))$.

$\lg(\lg^* n)$	$2^{\lg^* n}$	$(\sqrt{2})^{\lg n}$	n^2	$n!$	$(\lg n)!$
$\left(\frac{3}{2}\right)^n$	n^3	$\lg^2 n$	$\lg(n!)$	2^{2^n}	$n^{1/\lg n}$
$\ln \ln n$	$\lg^* n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\lg \lg n}$	$\ln n$	1
$2^{\lg n}$	$(\lg n)^{\lg n}$	e^n	$4^{\lg n}$	$(n+1)!$	$\sqrt{\lg n}$
$\lg^*(\lg n)$	$2^{\sqrt{2 \lg n}}$	n	2^n	$n \lg n$	$2^{2^{n+1}}$

b. Daţi un exemplu de o singură funcţie nenegativă $f(n)$ astfel încât pentru toate funcţiile $g_i(n)$ de la punctul (a), $f(n)$ să nu fie nici $O(g_i(n))$ nici $\Omega(g_i(n))$.

2-4 Proprietăţi ale notaţiilor asimptotice

Fie $f(n)$ şi $g(n)$ funcţii asimptotic pozitive. Demonstraţi următoarele conjecturi sau demonstraţi că ele nu sunt adevărate.

a. $f(n) = O(g(n)$ implică $g(n) = O(f(n)$.

b. $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$.

c. $f(n) = O(g(n))$ implică $\lg(f(n)) = O(\lg(g(n)))$, unde $\lg(g(n)) > 0$ şi $f(n) \geq 1$ pentru orice n suficient de mare.

d. $f(n) = O(g(n))$ implică $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.

e. $f(n) = O((f(n))^2)$.

f. $f(n) = O(g(n))$ implică $g(n) = \Omega(f(n))$.

g. $f(n) = \Theta(f(n/2))$.

h. $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$.

2-5 Variaţii ale lui O şi Ω

Unii autori definesc Ω într-un mod uşor diferit de al nostru; să utilizăm $\overset{\infty}{\Omega}$ (se citeşte “omega infinit”) pentru această definiţie alternativă. Spunem că $f(n) = \overset{\infty}{\Omega} (g(n))$ dacă există o constantă pozitivă c astfel încât $f(n) \geq cg(n) \geq 0$ pentru infinit de mulţi n.

a. Arătaţi că pentru oricare două funcţii $f(n)$ şi $g(n)$ care sunt asimptotic nenegative, fie $f(n) = O(g(n))$, fie $f(n) = \overset{\infty}{\Omega} (g(n))$ fie amândouă, în timp ce această afirmaţie nu este adevărată dacă utilizăm Ω în loc de $\overset{\infty}{\Omega}$.

b. Descrieţi avantajele şi dezavantajele potenţiale ale utilizării lui $\overset{\infty}{\Omega}$ în locul lui Ω pentru a descrie timpii de execuţie ai programelor.

Unii autori îl definesc şi pe O într-un mod uşor diferit; să utilizăm O' pentru definiţia alternativă. Spunem că $f(n) = O'(g(n))$ dacă şi numai dacă $|f(n)| = O(g(n))$.

c. Ce se întâmplă cu fiecare dintre direcţiile lui "dacă şi numai dacă" din teorema 2.1 cu această nouă definiţie?

Unii autori definesc $\tilde{O}$ (se citeşte "o moale") ca însemnând O cu factorii logaritmici ignoraţi:

$$\tilde{O}(g(n)) = \{f(n) \;:\; \text{există constantele pozitive}, c, k \text{ şi } n_0 \text{ astfel încât } 0 \le f(n) \le cg(n)\lg^k(n) \text{ pentru orice } n \ge n_0\}.$$

d. Definiţi $\tilde{\Omega}$ şi $\tilde{\Theta}$ într-un mod analog. Demonstraţi proprietatea analogă corespunzătoare teoremei 2.1.

2-6 Funcţii iterate
Operatorul de iteraţie "*" utilizat în funcţia $\lg^*$ poate fi aplicat funcţiilor monoton crescătoare pe mulţimea numerelor reale. Pentru o funcţie f care satisface $f(n) < n$ definim funcţia $f^{(i)}$ recursiv pentru numerele întregi i nenegative prin

$$f^{(i)}(n) = \begin{cases} f(f(^{(i-1)}(n)) & \text{dacă } i > 0, \\ n & \text{dacă } i = 0. \end{cases}$$

Pentru o constantă dată $c \in \mathbf{R}$, definim funcţia iterată f_c^* prin

$$f_c^*(n) = \min\{i \ge 0 : f^{(i)}(n) \le c\},$$

care nu trebuie să fie bine-definită în toate cazurile. Cu alte cuvinte, cantitatea $f_c^*(n)$ este numărul de aplicaţii iterate ale funcţiei f necesare pentru a reduce argumentul la c sau la mai puţin.

Pentru fiecare dintre următoarele funcţii $f(n)$ şi constantele c, daţi o evaluare cât se poate de strânsă a lui $f_c^*(n)$.

	$f(n)$	c	$f_c^*(n)$
a.	$\lg n$	1	
b.	$n-1$	0	
c.	$n/2$	1	
d.	$n/2$	2	
e.	$\sqrt{n}$	2	
f.	$\sqrt{n}$	1	
g.	$n^{1/3}$	2	
h.	$n/\lg n$	2	

Note bibliografice

Knuth [121] investighează originea O-notaţiei şi afirmă că ea apare pentru prima dată într-un text de teoria numerelor al lui P. Bachmann din 1982. o-notaţia a fost inventată de către E. Landau în 1909 pentru discuţia distribuţiei numerelor prime. Notaţiile Ω şi Θ au fost introduse de către Knuth [124] pentru a corecta practica din literatură, populară dar derutantă din punct de vedere tehnic, de a utiliza O-notaţia atât pentru margini superioare cât şi pentru margini inferioare. Multă lume continuă să utilizeze O-notaţia acolo unde Θ-notaţia este mai precisă din punct de vedere tehnic. O altă discuţie pe tema istoriei şi dezvoltării notaţiilor asimptotice poate fi găsită în Knuth [121, 124] şi Brassard şi Bratley [33].

Nu toţi autorii definesc notaţiile asimptotice în acelaşi mod, deşi diferitele definiţii concordă în cele mai comune situaţii. Unele dintre definiţiile alternative se aplică şi la funcţii care nu sunt asimptotic nenegative, dacă valorile lor absolute sunt mărginite în mod corespunzător.

Alte proprietăţi ale funcţiilor matematice elementare pot fi găsite în orice carte de referinţă de matematică, cum ar fi Abramowitz şi Stegun [1] sau Beyer [27], sau într-o carte de analiză, cum ar fi Apostol [12] sau Thomas şi Finney [192]. Knuth [121] conţine o mulţime de materiale despre matematica discretă, utilizată în informatică.

3 Sume

Când un algoritm conţine o structură de control iterativă cum ar fi un ciclu **cât timp** sau **pentru**, timpul său de execuţie poate fi exprimat ca suma timpilor necesari la fiecare execuţie a corpului ciclului. De exemplu, am văzut în secţiunea 1.2 că a j-a iteraţie a sortării prin inserţie a necesitat un timp proporţional cu j în cazul cel mai defavorabil. Adunând timpii necesari pentru fiecare iteraţie, am obţinut o sumă (sau serie)

$$\sum_{j=2}^{n} j.$$

Evaluarea sumei a dat o margine $\Theta(n^2)$ pentru timpul de execuţie al algoritmului în cazul cel mai defavorabil. Acest exemplu indică importanţa generală a înţelegerii manipulării şi delimitării sumelor. (După cum vom vedea în capitolul 4, sumele apar şi când utilizăm anumite metode pentru rezolvarea recurenţelor.)

Secţiunea 3.1 prezintă mai multe formule de bază în care intervin sume. Secţiunea 3.2 oferă tehnici utile pentru delimitarea sumelor. Formulele din secţiunea 3.1 sunt date fără demonstraţie, deşi demonstraţiile pentru unele dintre ele sunt prezentate în secţiunea 3.2, pentru a ilustra metodele acelei secţiuni. Majoritatea celorlalte demonstraţii pot fi găsite în orice manual de analiză.

3.1. Formule de însumare şi proprietăţi

Fiind dat un şir de numere $a_1, a_2, \ldots$, suma finită $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ poate fi scrisă

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Dacă $n = 0$, valoarea sumei este definită ca fiind 0. Dacă n nu este un număr întreg, mai presupunem că limita superioară este $\lfloor n \rfloor$. Analog, dacă suma începe cu $k = x$, unde x nu este un întreg, presupunem că valoarea iniţială pentru însumare este $\lfloor x \rfloor$. (În general, vom scrie în mod explicit părţile întregi inferioare sau superioare). Valoarea unei serii finite este întotdeauna bine definită, iar termenii săi pot fi adunaţi în orice ordine.

Fiind dat un şir de numere $a_1, a_2, \ldots$, suma infinită $a_1 + a_2 + \ldots$ poate fi scrisă

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

care este interpretată ca

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Dacă limita nu există, seria ***diverge***; altfel, ea ***converge***. Termenii unei serii convergente nu pot fi întotdeauna adunaţi în orice ordine. Putem rearanja, totuşi, termenii unei ***serii absolut convergente***, care este o serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pentru care seria $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge de asemenea.

Liniaritate

Pentru orice număr real c şi orice şiruri finite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$\sum_{k=1}^{n}(ca_k + b_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Proprietatea de liniaritate este verificată, de asemenea, şi de seriile infinite convergente.

Proprietatea de liniaritate poate fi exploatată pentru a manipula sumele care încorporează notaţii asimptotice. De exemplu,

$$\sum_{k=1}^{n}\Theta(f(k)) = \Theta\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right).$$

În această ecuaţie, Θ-notaţia din membrul stâng se aplică variabilei k, dar în membrul drept ea se aplică lui n. Astfel de manipulări pot fi aplicate şi seriilor infinite convergente.

Serii aritmetice

Suma

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n,$$

care a apărut când am analizat sortarea prin inserţie, este o ***serie aritmetică*** şi are valoarea

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) \tag{3.1}$$

$$= \Theta(n^2) \tag{3.2}$$

Serii geometrice

Pentru orice $x \neq 1$ real, suma

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

este o ***serie geometrică*** sau ***exponenţială*** şi are valoarea

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}. \tag{3.3}$$

Când suma este infinită şi $|x| < 1$ avem seria geometrică infinită descrescătoare

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}. \tag{3.4}$$

Serii armonice

Pentru întregi pozitivi n, al n-lea ***număr armonic*** este

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + O(1). \tag{3.5}$$

Integrarea şi diferenţierea seriilor

Se pot obţine formule suplimentare prin integrarea sau diferenţierea formulelor de mai sus. De exemplu, diferenţiind ambii membri ai seriei geometrice infinite (3.4) şi înmulţind cu x, obţinem

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \tag{3.6}$$

Serii telescopante

Pentru orice şir $a_0, a_1, \ldots, a_n$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 \tag{3.7}$$

deoarece fiecare dintre termenii $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ este adunat exact o dată şi scăzut exact o dată. Spunem că suma ***telescopează***. Analog,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_n.$$

Ca un exemplu de sumă telescopantă, să considerăm seria

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Deoarece putem rescrie fiecare termen ca

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

obţinem

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Produse

Produsul finit $a_1 a_2 \cdots a_n$ poate fi scris

$$\prod_{k=1}^{n} a_k.$$

Dacă $n = 0$, valoarea produsului este definită ca fiind 1. Putem converti o formulă cu un produs într-o formulă cu o sumă, utilizând identitatea

$$\lg \left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \lg a_k.$$

Exerciţii

3.1-1 Găsiţi o formulă simplă pentru $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$.

3.1-2 $\star$ Arătaţi că $\sum_{k=1}^{n} 1/(2k-1) = \ln(\sqrt{n}) + O(1)$ manipulând seria armonică.

3.1-3 $\star$ Arătaţi că $\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)/2^k = 0$.

3.1-4 $\star$ Evaluaţi suma $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)x^{2k}$.

3.1-5 Utilizaţi proprietatea de liniaritate a însumării pentru a demonstra că $\sum_{k=1}^{n} O(f_k(n)) = O\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(n)\right)$.

3.1-6 Demonstraţi că $\sum_{k=1}^{\infty} \Omega(f(k)) = \Omega\left(\sum_{k=1}^{\infty} f(k)\right)$.

3.1-7 Evaluaţi produsul $\prod_{k=1}^{n} 2 \cdot 4^k$.

3.1-8 $\star$ Evaluaţi produsul $\prod_{k=2}^{n}(1 - 1/k^2)$.

3.2. Delimitarea sumelor

Există multe tehnici disponibile pentru delimitarea sumelor care descriu timpii de execuţie ai algoritmilor. Iată câteva dintre metodele cel mai frecvent utilizate.

Inducţia matematică

Cea mai simplă cale de a evalua o serie este utilizarea inducţiei matematice. De exemplu, să demonstrăm că seria aritmetică $\sum_{k=1}^{n} k$ are valoarea $\frac{1}{2}n(n+1)$. Putem verifica uşor pentru $n = 1$, aşa că facem ipoteza de inducţie că formula este adevărată pentru orice n şi demonstrăm că are loc pentru $n + 1$. Avem

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Nu trebuie să ghicim valoarea exactă a unei sume pentru a utiliza inducţia matematică. Inducţia poate fi utilizată şi pentru a demonstra o delimitare. De exemplu, să demonstrăm că seria geometrică $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ este $O(3^n)$. Mai precis, să demonstrăm că $\sum_{k=0}^{n} 3^k \le c \cdot 3^n$ pentru o anumită constantă c. Pentru condiţia iniţială $n = 0$ avem $\sum_{k=0}^{0} 3^k = 1 \le c \cdot 1$, cât timp $c \ge 1$. Presupunând că delimitarea are loc pentru n, să demonstrăm că are loc pentru $n + 1$. Avem

$$\sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3^{n+1} \le c \cdot 3^n + 3^{n+1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{c}\right) c \cdot 3^{n+1} \le c \cdot 3^{n+1}$$

cât timp $(1/3 + 1/c) \le 1$ sau, echivalent, $c \ge 3/2$. Astfel, $\sum_{k=0}^{n} 3^k = O(3^n)$, ceea ce am dorit să arătăm.

Trebuie să fim prudenţi când utilizăm notaţii asimptotice pentru a demonstra delimitări prin inducţie. Considerăm următoarea demonstraţie vicioasă a faptului că $\sum_{k=1}^{n} k = O(n)$. Desigur, $\sum_{k=1}^{1} k = O(1)$. Acceptând delimitarea pentru n, o demonstrăm acum pentru $n + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &= O(n) + (n+1) \qquad \Longleftarrow \textit{\textbf{greşit!}} \\ &= O(n+1). \end{aligned}$$

Greşeala în argumentaţie este aceea că O ascunde o "constantă" care creşte în funcţie de n şi deci nu este constantă. Nu am arătat că aceeaşi constantă e valabilă pentru ***toţi*** n.

Delimitarea termenilor

Uneori, o limită superioară bună a unei serii se poate obţine delimitând fiecare termen al seriei, şi este, de multe ori, suficient să utilizăm cel mai mare termen pentru a-i delimita pe ceilalţi. De exemplu, o limită superioară rapidă a seriei aritmetice (3.1) este

$$\sum_{k=1}^{n} k \le \sum_{k=1}^{n} n = n^2.$$

În general, pentru o serie $\sum_{k=1}^{n} a_k$, dacă punem $a_{max} = \max_{1 \le k \le n} a_k$, atunci

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \le n a_{max}.$$

Tehnica delimitării fiecărui termen dintr-o serie prin cel mai mare termen este o metodă slabă când seria poate fi, în fapt, delimitată printr-o serie geometrică. Fiind dată seria $\sum_{k=0}^{n} a_k$, să presupunem că $a_{k+1}/a_k \le r$ pentru orice $k \ge 0$, unde $r < 1$ este o constantă. Suma poate fi delimitată printr-o serie geometrică descrescătoare infinită, deoarece $a_k \le a_0 r^k$, şi astfel,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \le \sum_{k=0}^{\infty} a_0 r^k = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k = a_0 \frac{1}{1-r}.$$

Putem aplica această metodă pentru a delimita suma $\sum_{k=1}^{\infty}(k/3^k)$. Primul termen este $1/3$, iar raportul termenilor consecutivi este

$$\frac{(k+1)/3^{k+1}}{k/3^k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{k+1}{k} \leq \frac{2}{3},$$

pentru toţi $k \geq 1$. Astfel, fiecare termen este mărginit superior de $(1/3)(2/3)^k$, astfel încât

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-2/3} = 1.$$

O greşeală banală în aplicarea acestei metode este să arătăm că raportul termenilor consecutivi este mai mic decât 1 şi apoi să presupunem că suma este mărginită de o serie geometrică. Un exemplu este seria armonică infinită, care diverge, deoarece

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \Theta(\lg n) = \infty.$$

Raportul termenilor $k+1$ şi k în această serie este $k/(k+1) < 1$, dar seria nu e mărginită de o serie geometrică descrescătoare. Pentru a delimita o serie printr-o serie geometrică, trebuie să arătăm că raportul este mărginit de o constantă subunitară; adică trebuie să existe un $r < 1$, care este ***constant***, astfel încât raportul tuturor perechilor de termeni consecutivi nu depăşeşte niciodată r. În seria armonică nu există nici un astfel de r, deoarece raportul devine arbitrar de apropiat de 1.

Partiţionarea sumelor

Delimitări pentru o sumare dificilă se pot obţine exprimând seria ca o sumă de două sau mai multe serii, partiţionând domeniul indicelui şi apoi delimitând fiecare dintre seriile rezultate. De exemplu, să presupunem că încercăm să găsim o limită inferioară pentru seria aritmetică $\sum_{k=1}^{n} k$, despre care s-a arătat deja că are limita superioară n^2. Am putea încerca să minorăm fiecare termen al sumei prin cel mai mic termen, dar deoarece acest termen este 1, găsim o limită inferioară de n pentru sumă – foarte departe de limita noastră superioară, n^2.

Putem obţine o limită inferioară mai bună, partiţionând întâi suma. Să presupunem, pentru comoditate, că n este par. Avem

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n/2} k + \sum_{k=n/2+1}^{n} k \geq \sum_{k=1}^{n/2} 0 + \sum_{k=n/2+1}^{n} (n/2) \geq (n/2)^2 = \Omega(n^2)$$

care este o limită asimptotic strânsă, deoarece $\sum_{k=1}^{n} k = O(n^2)$.

Pentru o sumă care apare din analiza unui algoritm, putem partiţiona adesea suma şi ignora un număr constant de termeni iniţiali. În general, această tehnică se aplică atunci când fiecare termen a_k din suma $\sum_{k=0}^{n} a_k$ este independent de n. Atunci pentru orice $k_0 > 0$ constant putem scrie

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{n} a_k = \Theta(1) + \sum_{k=k_0}^{n} a_k,$$

deoarece termenii iniţiali ai sumei sunt toţi constanţi şi numărul lor este constant. Apoi, putem utiliza alte metode pentru a delimita $\sum_{k=k_0}^{n} a_k$. De exemplu, pentru a găsi o limită superioară asimptotică pentru

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k},$$

observăm că raportul termenilor consecutivi este

$$\frac{(k+1)^2/2^{k+1}}{k^2/2^k} = \frac{(k+1)^2}{2k^2} \le \frac{8}{9},$$

dacă $k \ge 3$. Astfel, suma poate fi partiţionată în

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} = \sum_{k=0}^{2} \frac{k^2}{2^k} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \le O(1) + \frac{9}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^k = O(1),$$

deoarece a doua sumă este o serie geometrică descrescătoare.

Tehnica partiţionării sumelor poate fi utilizată pentru a găsi delimitări asimptotice în situaţii mult mai dificile. De exemplu, putem obţine o delimitare $O(\lg n)$ a seriei armonice (3.5)

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Ideea este să partiţionăm domeniul de la 1 la n în $\lfloor \lg n \rfloor$ părţi şi să delimităm superior contribuţia fiecărei părţi prin 1. Astfel,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{1}{2^i+j} \le \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \sum_{j=0}^{2^i-1} \frac{1}{2^i} \le \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 1 \le \lg n + 1. \tag{3.8}$$

Aproximarea prin integrale

Când o sumă poate fi exprimată ca $\sum_{k=m}^{n} f(k)$, unde $f(k)$ este o funcţie monoton crescătoare, o putem aproxima prin integrale:

$$\int_{m-1}^{n} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n+1} f(x)dx. \tag{3.9}$$

Justificarea pentru această aproximare este arătată în figura 3.1. Suma este reprezentată prin aria dreptunghiurilor din figură, iar integrala este regiunea haşurată de sub curbă. Când $f(k)$ este o funcţie monoton descrescătoare, putem utiliza o metodă similară pentru a obţine marginile

$$\int_{m}^{n+1} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m-1}^{n} f(x)dx \tag{3.10}$$

Aproximaţia integrală (3.10) dă o estimare strânsă pentru al n-lea număr armonic. Pentru o limită inferioară, obţinem

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ge \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1). \tag{3.11}$$

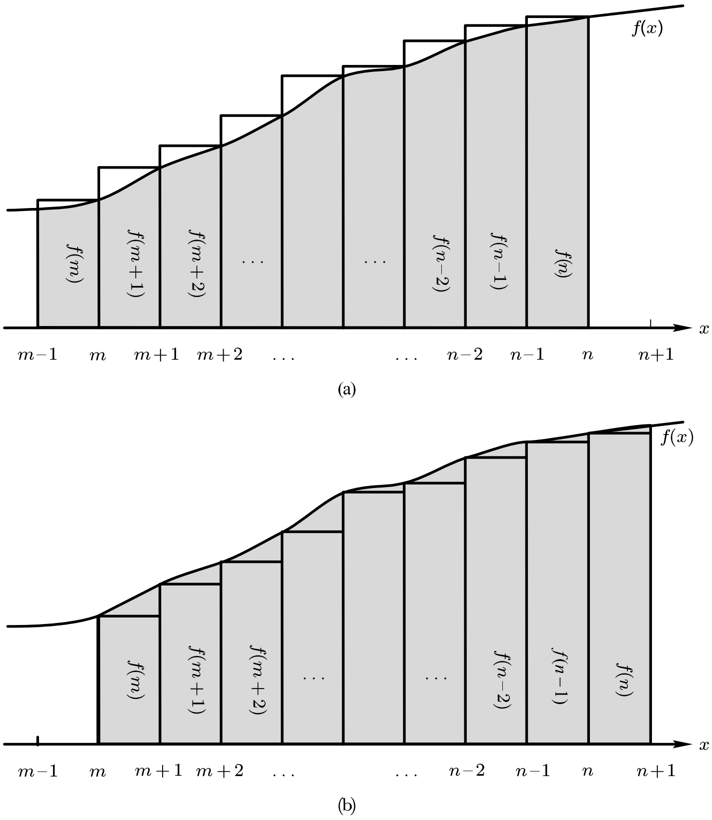

Figura 3.1 Aproximarea lui $\sum_{k=m}^{n} f(k)$ prin integrale. Aria fiecărui dreptunghi este indicată în interiorul dreptunghiului, iar aria tuturor dreptunghiurilor reprezintă valoarea sumei. Integrala este reprezentată prin aria haşurată de sub curbă. Comparând ariile în **(a)**, obţinem $\int_{m-1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=m}^{n} f(k)$, şi apoi, deplasând dreptunghiurile cu o unitate la dreapta, obţinem $\sum_{k=m}^{n} f(k) \leq \int_{m}^{n+1} f(x)dx$ din **(b)**.

Pentru limita superioară, deducem inegalitatea

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \quad \leq \quad \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} = \ln n,$$

care dă limita

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n + 1 \tag{3.12}$$

Exerciţii

3.2-1 Arătaţi că $\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$ este mărginită superior de o constantă.

3.2-2 Găsiţi o margine superioară a sumei

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \lceil n/2^k \rceil.$$

3.2-3 Arătaţi că al n-lea număr armonic este $\Omega(\lg n)$, partiţionând suma.

3.2-4 Aproximaţi $\sum_{k=1}^{n} k^3$ printr-o integrală.

3.2-5 De ce nu am utilizat aproximaţia integrală (3.10) direct pentru $\sum_{k=1}^{n} 1/k$ pentru a obţine o margine superioară pentru al n-lea număr armonic?

Probleme

3-1 Delimitarea sumelor
Daţi delimitări asimptotice strânse pentru următoarele sume. Presupuneţi că $r \geq 0$ şi $s \geq 0$ sunt constante.

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^r.$

b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lg^s k.$

c. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^r \lg^s k.$

Note bibliografice

Knuth [121] este o referinţă excelentă pentru materialul prezentat în acest capitol. Proprietăţi de bază ale seriilor pot fi găsite în orice carte bună de analiză, cum ar fi Apostol [12] sau Thomas şi Finney [192].