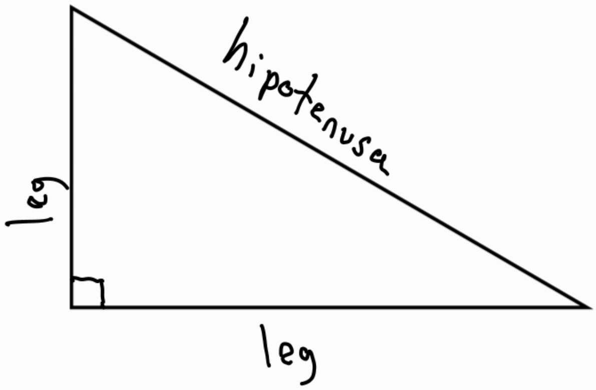
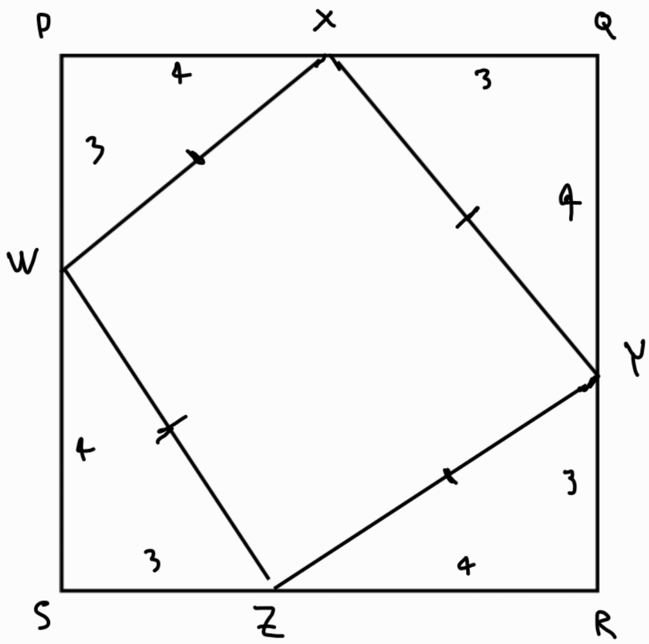
En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto le llamamos hipotenusa y los otros dos catetos (legs).

También podemos usar estos términos para referirnos a la longitud de sus lados.



Problemas

12.1)



4 triángulos rectángulos idénticos con catetos de 3 y 4 son puestos en las esquinas de un cuadrado.

(a) $\angle SWZ + \angle SZW = 90^\circ$

Ya que WSZ y XPW son idénticos $\angle PWX = \angle SZW$

Sustituyendo, tenemos $\angle SWZ + \angle PWX = 90°$.

Adicionalmente sabemos que $\angle XWZ = 90°$.

$$\begin{aligned}\angle PWS &= \angle SWZ + \angle PWX + \angle XWZ \\ &= 90° + 90° \\ &= 180°\end{aligned}$$

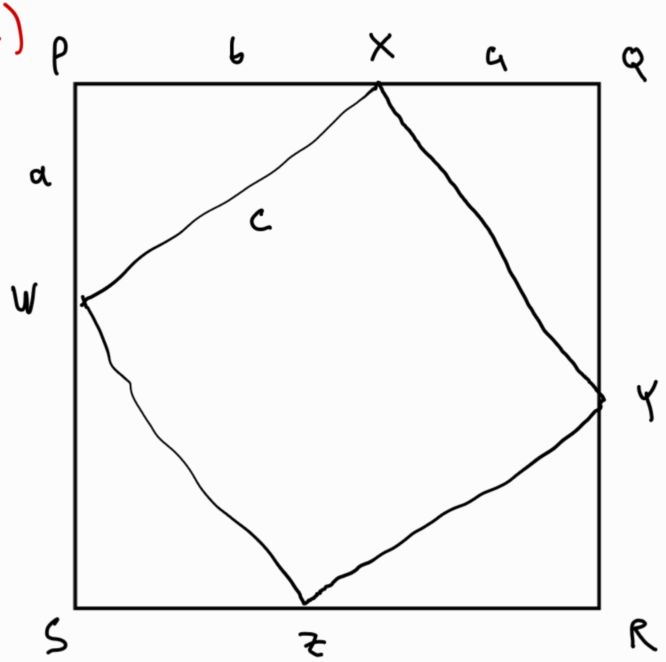
PQRS es un cuadrado porque todos sus ángulos son rectos y sus lados son congruentes (7 de longitud).

(b) $7^2 = 49$

(c) $49 - \cancel{4}^{2}\left(\frac{3\cdot 4}{\cancel{2}_{1}}\right) = 49 - 24 = 25$

(d) $\sqrt{25} = 5$

12.2)



(a) c^2

(b) $(a+b)^2$

(c) $(a+b)^2 - 4\left(\frac{(ab)}{2}\right) = (a+b)^2 - 2ab$

(d) $(a+b)^2 - 2ab = c^2$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = c^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

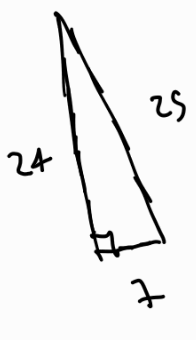
Importante:
Esta es solo una de las muchas pruebas que existen del teorema de pitágoras.

Concepto: Aveces los ejemplos específicos pueden usarse como guías para establecer pruebas.

El teorema de pitágoras también funciona al revés: si los lados de un triángulo satisfacen el teorema, el triángulo debe ser rectángulo.

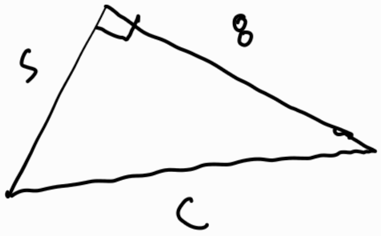
12.3)

(a)



$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$25^2 = 7^2 + b^2$$
$$625 - 49 = b^2$$
$$576 = b^2$$
$$\sqrt{576} = b$$
$$24 =$$

(b)



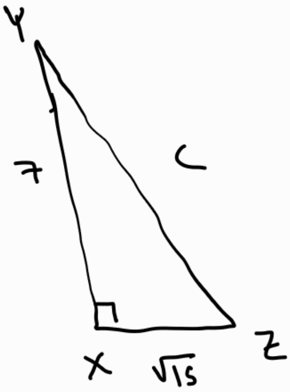
$c^2 = 8^2 + 5^2$

$c^2 = 64 + 25$

$c^2 = 89$

$c = \sqrt{89}$

(c)



$c^2 = 49 + 15$

$c^2 = 64$

$c = 8$

12.4) basados en el teorema de pitágoras,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Por lo tanto $c^2 > a^2$ y $c^2 > b^2$.

$c > a$ y $c > b$. sí

12.5) Hay muchos triángulos rectángulos donde los 3 lados son enteros. Para buscar algunos podemos listar los primeros 20 cuadrados perfectos.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225

256, 289, 324, 361, 400.

Ahora buscamos parejas que sumen a otro cuadrado:

1) $9 + 16 = 25$
$3^2 + 4^2 = 5^2$

2) $25 + 144 = 169$
$5^2 + 12^2 = 13^3$

3) $64 + 225 = 289$
$8^2 + 15^2 = 17^2$

Una tripleta pitagórica (pythagoren triple) es un grupo de trés enteros positivos que satisfacen la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$.

$\{3, 4, 5\}$, $\{5, 12, 13\}$, $\{8, 15, 17\}$, $\{7, 24, 25\}$

12.6)

(a)

$$(3\cdot 4)^2 + (4\cdot 4)^2 = c^2$$

$$9\cdot 16 + 16\cdot 16 = c^2$$

$$16(25) = c^2$$

$$4\cdot 5 = 20$$

(b)

$$(3\cdot 5)^2 + (4\cdot 5)^2 = c^2$$

$$9\cdot 5^2 + 16\cdot 5^2 = c^2$$

$$5^2(25) = c^2$$

$5 \cdot 5 = c$

(c)

$$(3 \cdot 2011)^2 + (4 \cdot 2011)^2 = c^2$$

$$3^2 \cdot 2011^2 + 4^2 \cdot 2011^2 = c^2$$

$$2011^2 \, (25) = c^2$$

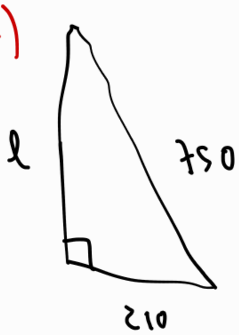
$$2011 \cdot 5 = c$$

Hay un patrón, tenemos que si los catetos de un triángulo son $3x$ y $4x$, la hipotenusa será $5x$.

(d)

$$\frac{5}{100101} \qquad\qquad \frac{\;}{42}$$

12.7)



buscamos la razón entre el cateto y la hipotenusa, esperando que sea uno de los triples que conocemos:

$$\frac{210}{750} = \frac{21}{75} = \frac{7}{25}$$

Esta razón nos recuerda a $\{7, 24, 25\}$, por lo tanto el otro cateto es $24 \cdot 30 = \underline{720}$.

Ejercicios

12.1.1)

(a) $a^2 = 12^2 - 9^2$ $\qquad a = \sqrt{63}$

$= 144 - 81$ $\quad\quad$ $= \boxed{3\sqrt{7}}$

$= 63$

(b)

$\{5, 12, 13\}$

$5 \cdot 3,\ 12 \cdot 3,\ 13 \cdot 3$ $\quad\quad$ $13 \cdot 3 = \boxed{39}$

(c)

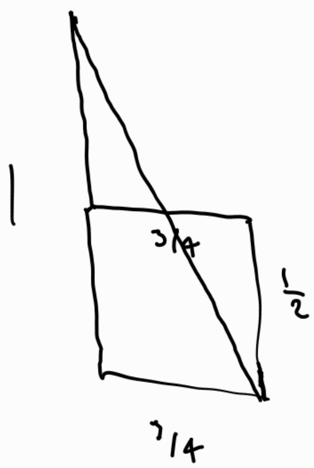
$a^2 = 81 - 64$ $\quad\quad$ $\ell^2 = 17^2 - 8^2$

$a = \sqrt{17}$ $\quad\quad$ $\ell^2 = 289 - 64$

$\ell^2 = 225$

$\boxed{15 + \sqrt{17}}$ $\quad\quad$ $\ell = 15$

12.1.2)

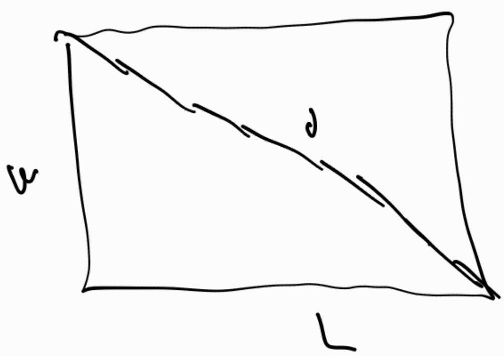


$c^2 = 1 + \frac{9}{16}$

$c^2 = \frac{25}{16}$

$c = \boxed{\frac{5}{4}}$

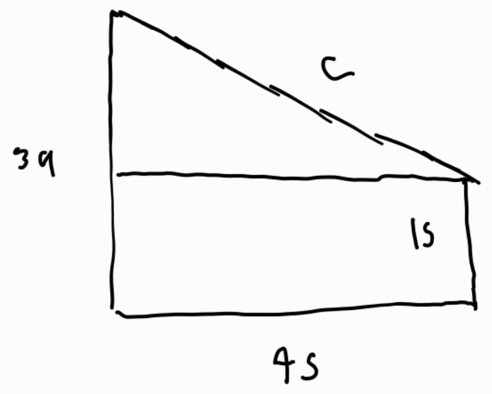
12.1.3)



$d^2 = w^2 + \ell^2$

$\boxed{d = \sqrt{w^2 + \ell^2}}$

12.1.4)



$c^2 = 24^2 + 45^2$

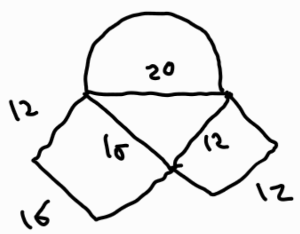
$c^2 = 576 + 2025$

$c = \sqrt{2601}$

$c = 3\sqrt{289}$

$c = 3 \cdot 17 = 51$

12.1.5)



$12 \cdot 16 + 12 \cdot 12 + 200\pi + 12 \cdot 8$

$12(16 + 12 + 8) + 50\pi$

$12(36) + 50\pi$

$432 + 50\pi$

12.1.6)

$$\frac{4900049}{6300063} = \frac{700007 \cdot 7}{700007 \cdot 9}$$

$7 \cdot n : 9 \cdot n : \sqrt{130} \cdot n$

$c^2 = 81 + 49$

$c^2 = 130$

$c = \sqrt{130}$

$\sqrt{130} \cdot 700007$

$+8600+\sqrt{130}$