Ahora trabajaremos en raíces cuadradas de enteros que no son cuadrados perfectos.

Empecemos con $\sqrt{2}$. ¿Hay un número cuyo cuadrado sea 2?

Sabemos que no existe un entero cuyo cuadrado sea 2.

¿Hay una fracción cuyo cuadrado sea 2?

Los antiguos griegos creyeron que sí por un largo tiempo. Cuenta la leyenda que el hombre que por fin probó que no existe tal cociente fue ahogado en el mar!

Importante:
1) La raíz cuadrada de 2 no es entero.
2) La raíz cuadrada de 2 no es una fracción.
3) La raíz cuadrada de 2 es una nueva clase de número llamado irracional.

Definición: Un número irracional es un número que no puede ser expresado como el cociente de dos enteros.

Problemas

9.8)

a) $(\sqrt{5})^2 = 5$

b) $(\sqrt{8})^6 = (\sqrt{8})^{3\cdot 2} = \left((\sqrt{8})^2\right)^3 = 8^3 = 512$

9.9)

(a) $\sqrt{2} < 1.5$ $\qquad 1.5^2 = 2.25.$

El cuadrado de 1.5 es 2.25. Ya que $2.25 > 2$, sabemos que $\sqrt{2.25} > \sqrt{2}$

$1.5 > \sqrt{2}$

(b)

$$\begin{array}{r} 1.4 \\ \times 1.4 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 1.96 \end{array}$$

$1.4^2 = 1.96$. $\quad 2 > 1.96$, $\sqrt{2} > 1.4$

$1.5 > \sqrt{2} > 1.4.$

$$\begin{array}{r} 1.45 \\ \times 1.45 \\ \hline 725 \\ 580 \\ 145 \\ \hline 2.1025 \end{array}$$

$1.45^2 = 2.1025$

$2.1025 > 2$, $1.45 > \sqrt{2}$

Esto nos dice que $\sqrt{2}$ está más cerca a 1.4 que 1.5, por lo tanto $\sqrt{2} \approx 1.4$

9.10)

$\sqrt{49} = 7.$

$\sqrt{64} = 8.$

Todos los enteros entre 49 y 64 exclusivo tienen raíces cuadradas entre 7 y 8.

9.11)

$\sqrt{13}$ y $\sqrt{131}$. $\sqrt{131} > x > \sqrt{13}$. El próximo entero es 4, así hasta 11 ($11^2 = 121$).

Hay 8 enteros.

9.12)

$$\sqrt{80{,}999{,}599} < \sqrt{81{,}000{,}000}$$

$$\hookrightarrow \sqrt{81 \cdot (10^3)^2} = 9 \cdot 10^3 = 9000.$$

$$8999^2 = 9000^2 - 9000 - 8999$$
$$= 81{,}000{,}000 - 9000 - 8999$$
$$= \underbrace{80{,}991{,}000 - 8999.}_{x}$$

$x < 80{,}999{,}599$.

Por lo tanto el entero más grande es 8999.

9.13)

$7 \cdot \sqrt{11}$ o $6 \cdot \sqrt{15}$

- Sabemos por regla que si $a > b$, $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.
- También sabemos que si $a > b$, $a^2 > b^2$.

Supongamos que

$$7\sqrt{11} > 6\sqrt{15}.$$
$$(7\sqrt{11})^2 > (6\sqrt{15})^2$$
$$49 \cdot 11 > 36 \cdot 15$$
$$539 > 540.$$

Contradicción, por lo tanto $6\sqrt{15} > 7\sqrt{11}$.

Ejercicios

9.2.1)

(a) $\sqrt{78}$ $8 < \sqrt{78} < 9$ $8.5^2 = 72.25$

$8.5 < \sqrt{78} < 9$

(b) $\sqrt{200}$ $14 < \sqrt{200} < 15$

$14 < \sqrt{200} < 14.5$ 14

(c) $\sqrt{4004}$ $63 < \sqrt{4004} < 64$

$63 < \sqrt{4004} < 63.5$

9.2.2)

$\sqrt{7}$ y $\sqrt{220}$ $2 < \sqrt{7} < 3$

$14 < \sqrt{220} < 15$ $3, 4, \dots, 14.$

$\boxed{12}$

9.2.3)

$\sqrt{83} - \sqrt{35} > \sqrt{81} - \sqrt{36}$

$9 - 6$

$\sqrt{83} - \sqrt{35} > \boxed{3}$

9.2.4)

$(\sqrt{14})^4 = (\sqrt{14}^2)^2 = 14^2 = \boxed{196}$

9.2.5)

$4\sqrt{5}$

$$\begin{array}{r} 2.2 \\ \times\ 4 \\ \hline 8.8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1} \\ 2.3 \\ \times\ 4 \\ \hline 9.2 \end{array}$$

$2.2 < \sqrt{5} < 2.3$

$4 \times 2.2 < 4\sqrt{5} < 4 \times 2.3$

$8.8 < 4\sqrt{5} < 9.2$

$\boxed{9}$

9.2.6)

$108{,}868{,}356 = x$

$100{,}000{,}000 = 10^8 = (10^4)^2$

$\sqrt{(10^4)^2} = 10^4.$ $10^{10} > x \quad \dots \quad \sqrt{10^{10}} = 10^5$

$10^4 < \sqrt{x} < 10^5$

$\sqrt{x}$ tiene $\boxed{5}$ dígitos.

$4x + 8\sqrt{}$

9.2.7)

$\sqrt{30} + \sqrt{50}$

$5 < \sqrt{30} < 6$

$12 < \sqrt{30} + \sqrt{50} < 14.$

$7 < \sqrt{50} < 8$

$\sqrt{30} + \sqrt{50}$

$5.5^2 = 30.25 \dots$ $5 < \sqrt{30} < 5.5$

$7.1^2 = 50.41 \dots$ $7 < \sqrt{50} < 7.1$

$12 < \sqrt{30} + \sqrt{50} < 12.6$

Entre $\boxed{12 \text{ y } 13}$

9.2.8)

$\boxed{\sqrt{75}}$, $\frac{75}{9}$, 50%. $\frac{68}{4}$

3

$5\sqrt{3}$, $\frac{25}{3}$, $\frac{17}{2}$

$8\frac{1}{3} < 8\frac{1}{2}$

$8,5^2 = 72.25$

$8,5 < \sqrt{75}$

$8\frac{1}{2} < \boxed{\sqrt{75}}$.