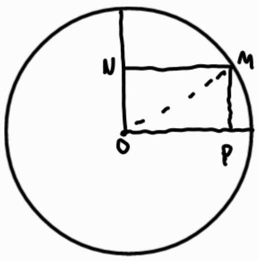
12.37)



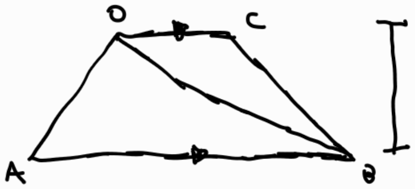
$NP = OM = \text{radio}$

$100\pi = \pi r^2$

$10 = r$

$NP = \boxed{10}$

12.38)



$AB + CD = 77$

$77 \cdot h = [ABCD]$

$[ABD] = 2.5[BCD]$

$\frac{AB \cdot h}{2} = 2.5\left(\frac{DC \cdot h}{2}\right) = AB = 2.5\,CD$

$AB + \frac{AB}{5/2} = 77$

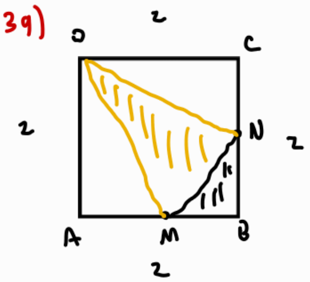
$\frac{5}{5}AB + \frac{2}{5}AB = 77$

$\frac{7}{5}AB = 77$

$AB = \frac{\cancel{77}^{11} \cdot 5}{\cancel{7}_1}$

$AB = \boxed{55}$

12.39)



$\text{Area}_1 = \frac{1}{2}$

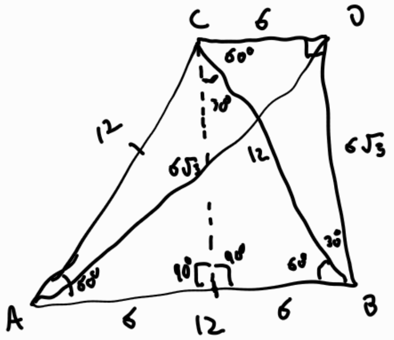
$\text{Area } 2 = 4 - \frac{1}{2} - 2(1)$

$= \frac{3}{2}$

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \boxed{\frac{1}{3}}$

$\boxed{1:3}$

12.40)



30:60:90

$1 : \sqrt{3} : 2 \longrightarrow 6 : 6\sqrt{3} : 12$

$c^2 = (6\sqrt{3})^2 + (12)^2$

$= 36 \cdot 3 + 144$

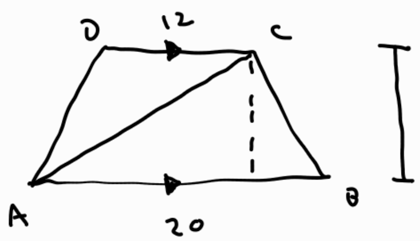
$= 108 + 144$

$c = \sqrt{252} = 3 \cdot 2\sqrt{7}$

$= \boxed{6\sqrt{7}}$

$252 = 63 \cdot 4 = 9 \cdot 7 \cdot 4$

12.41)

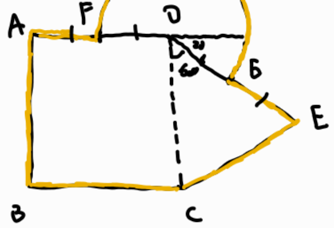


$\frac{32 \cdot h}{2} = \text{Area trapezoide}$

$\frac{20 \cdot h}{2} = \text{Area triángulo}$

$\frac{10h}{16h} = \boxed{\frac{5}{8}}$

12.42)



$1+2+2+2+1+\frac{7}{6}\pi$

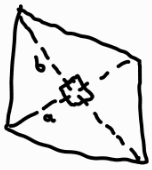
$\boxed{\frac{7}{6}\pi + 8}$ centímetros.

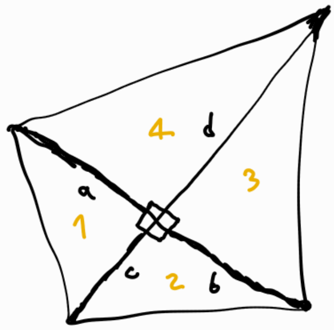
$\frac{C}{D} = \pi \qquad C = D\pi$

$8 + \frac{7}{6}\pi$

$\frac{7}{12}(2\pi) = \frac{7}{6}\pi.$

12.43)





Para cualquier cuadrilátero con diagonales perpendiculares podemos dividirlo en 4 rectángulos de la siguiente forma;

1) $\frac{a \cdot c}{2}$ 2) $\frac{b \cdot c}{2}$

3) $\frac{b \cdot d}{2}$ 4) $\frac{a \cdot d}{2}$

El área total de la figura es

$$\frac{ac}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{bd}{2} + \frac{ad}{2} = \frac{ac+bc+bd+ad}{2}$$

$$= \frac{c(a+b)+d(a+b)}{2} = \boxed{\frac{(a+b)(c+d)}{2}}.$$

Por lo tanto, el área de un cuadrilátero con diagonales perpendiculares siempre será la mitad del producto de las diagonales.

12.44)

(a) $\{3,4,5\}$, $\{5,12,13\}$, $\{7,24,25\}$.

- La diferencia entre 4^2 y 5^2 es 3^2.

La diferencia entre cuadrados perfectos adyacentes aumenta de 2 en 2.

La diferencia de 4 y 5 a 12 y 13 aumenta 16, lo que coincide con $5^2 - 3^2 = 16$.

$9^2 - 7^2 = 81 - 49 = 32$. Es decir que aumenta de 24-25 a 40-41.

$\boxed{\{9, 40, 41\}}$

Importante: En cada triple pitagórico de esta forma, observamos que $(\{a,b,c\})$ $b+c = a^2$.

(b)

(b)

$\{n, a, a+1\}$

$$(a+1)^2 = a^2 + n^2$$

$$a^2 + 2a + 1 = a^2 + n^2$$

$$2a + 1 = n^2$$

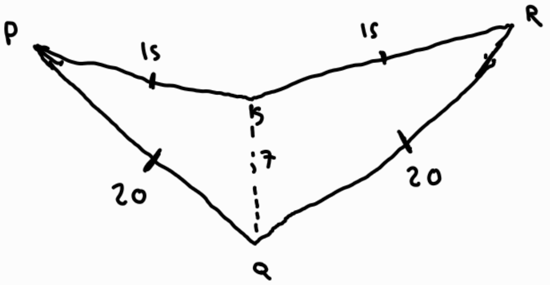
$2a+1$ siempre será impar, por lo tanto todo n impar tendrá un a y $a+1$ correspondiente.

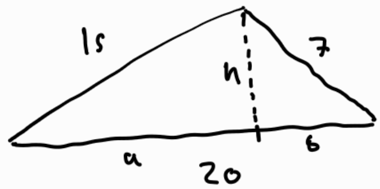
(c)

No, por ejemplo $\{8, 15, 17\}$.

Nótese que $\{6, 8, 10\}$ es un triple pitagórico, como $\{10, 24, 26\}$ y $\{12, 35, 37\}$.

12.45)





$a + b = 20$

$b = 20 - a$

$$15^2 = a^2 + h^2$$

$$15^2 = 7^2 - 400 + 40a$$

$$225 - 49 + 400 = 40a$$

$$576 = 40a$$

$$\frac{72}{5} = a$$

$$7^2 = b^2 + h^2$$

$$7^2 = (20-a)^2 + h^2$$

$$7^2 = 400 - 40a + a^2 + h^2$$

$$7^2 - 400 + 40a = a^2 + h^2$$

$$b = 20 - \frac{72}{5}$$

$$= \frac{100}{5} - \frac{72}{5} = \frac{28}{5}$$

$$7^2 = \left(\frac{28}{5}\right)^2 + h^2$$

$$49 - \frac{784}{25} = h^2$$

$$\frac{1225}{25} - \frac{784}{25} = h^2$$

$$\frac{441}{25} = h^2$$

$$\frac{\sqrt{9 \cdot 49}}{\sqrt{25}} = h$$

$$h = \frac{3 \cdot 7}{5} = \frac{21}{5}$$

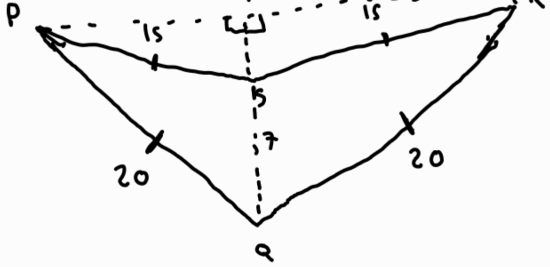
Área del triángulo es

$$\frac{\frac{21}{\cancel{5}_1}\left(\cancel{20}^{\cancel{4}\,2}\right)}{\cancel{2}_1} = 42.$$

$$42 \times 2 = \boxed{84}$$

Otra solución...

$[PQS] = \frac{QS \times PT}{}$



2

$$[RQS] = \frac{QS \times RT}{2}$$

Tenemos $PT = TR$, así que:

$$[RQS] = \frac{QS \times PT}{2}.$$ El área de ΔRQS es igual a la de ΔPQS.

Tenemos que el área del kite es $\left(\frac{QS \times PT}{2}\right) \times 2 = QS \times PT.$

Necesitamos saber PT. Con el teorema de pitágoras tenemos:

$$PT^2 + ST^2 = 225$$

Aplicando pitágoras a ΔPTQ tenemos:

$$PT^2 + QT^2 = 400$$

Ya que $TQ = ST + SQ = ST + 7$, tenemos $PT^2 + (ST+7)^2 = 400$:

$$PT^2 + ST^2 + 14ST + 49 = 400$$

ya que $PT^2 + ST^2 = 225$, sustituimos:

$$225 + 14\,ST + 49 = 400$$

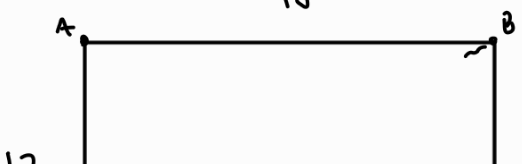
$$ST = 9.$$

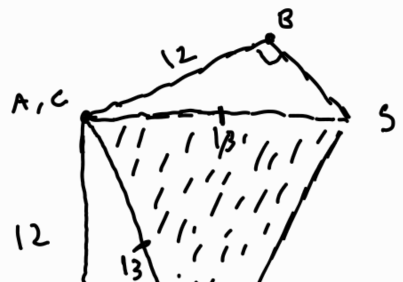
Sustituyendo ST es $PT^2 + ST^2 = 225$:

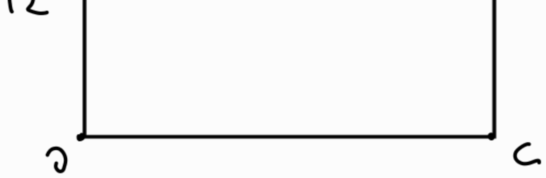
$$PT^2 + 81 = 225$$
$$PT^2 = 144$$
$$PT = 12$$

Finalmente, el área de $PQRS$ es $(SQ)(PT) = 7 \times 12 = 84.$

(12.46)







Ya que $AB = AD$ y la suma de los otros lados es igual

$AS + BS = AB$

$AS + BS = 18$

$AB = BC = 12$

$DT + AT = 18$

$AS + BS = DT + AT$

Tenemos $AT^2 = 12^2 + (18 - AT)^2$

$$AT^2 = 144 + 324 - 36AT + AT^2$$

$$36AT = 468$$

$$AT = \frac{468}{36} = 13$$

$AT^2 = 12^2 + DT^2$

$AT^2 = 12^2 + (18 - AT)^2$

Ahora hacemos el mismo proceso para $\triangle ABS$:

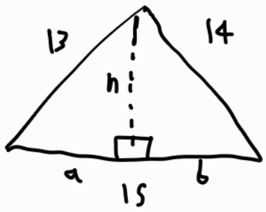
$$AS^2 = 12^2 + BS^2$$

$$AS^2 = 12^2 + (18 - AS)^2$$

Por el mismo proceso llegamos a $AS = 13$.

$$[AST] = \frac{13 \times 12}{2} = 13 \times 6 = \boxed{78} \text{ inches}^2$$

12.47)



$13^2 = h^2 + a^2$ $\qquad 14^2 = h^2 + b^2$

Sabemos que $a + b = 15$, por lo tanto:

$$13^2 = h^2 + (15 - b)^2$$

$$13^2 = h^2 + 225 - 30b + b^2$$

$$13^2 = 196 + 225 - 30b$$

$$30b = 196 + 225 - 169$$

$$30b = 252$$

$$b = \frac{252}{30} = \frac{126}{15} = \frac{42}{5}$$

$$14^2 = h^2 + \left(\frac{42}{5}\right)^2$$

$$196 - \frac{42^2}{25} = h^2$$

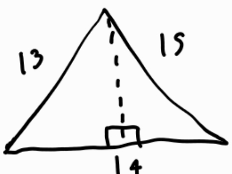
$$\frac{4900 - 1764}{25} = h^2$$

$$\frac{3136}{25} = h^2$$

$$h = \frac{56}{5}$$

$$\text{Área Triángulo} = \frac{\cancel{15}^{3} \times \cancel{56}^{28} / \cancel{5}_1}{\cancel{2}_1} = 3 \times 28 = \boxed{84}$$

Otra solución...



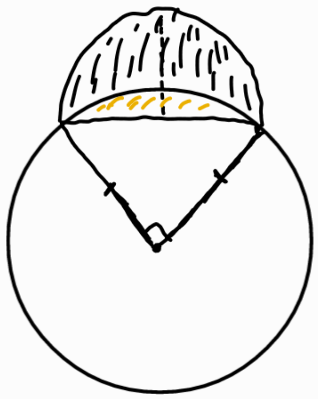
trazamos la altura tal que las hipotenusas de los triángulos sean parte de triples pitagóricos que ya conocemos:

$\{5, 12, 13\}$ y $\{9, 12, 15\}$.

ya que estas tripletas tienen un cateto en común, tomamos la altura como 12. Esto deja a los otros catetos como 5 y 9. $5+9=14$, lo cual coincide con la base.

$$\text{Área} = \frac{12 \times 14}{2} = 6 \times 14 = 84.$$

12.48)



Importante: El área sombreada se llama luna.

El radio del círculo le llamamos r.

El área del triángulo isosceles rectángulo es:

$$\frac{r \cdot r}{2} = \frac{r^2}{2}.$$

El semicírculo tiene como diámetro la hipotenusa del triángulo. Así que hallamos primero la hipotenusa:

$$c^2 = r^2 + r^2$$

$$c^2 = 2r^2$$

$$c = r\sqrt{2}$$

Por lo tanto el radio es $\frac{r\sqrt{2}}{2}$ y el área del semicírculo es

$$\frac{\pi \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi r^2 \cdot 2}{2 \cdot 4} = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Sin embargo para hallar la luna hay que restar la parte naranja que recubre parcialmente al semicírculo. El área naranja es la diferencia entre el sector que cubre el ángulo de 90° grados hasta el arco y el área del triángulo:

Área sector del círculo: $\frac{1}{4}\pi r^2$

Área Triángulo: $\frac{r^2}{2}$.

Área naranja: $\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{2r^2}{4}$

$$= \frac{\pi r^2 - 2r^2}{4}$$

$$= \frac{r^2(\pi - 2)}{4}.$$

El área sombreada es:

$$\frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi r^2 - 2r^2}{4} = \frac{\pi r^2 - \pi r^2 + 2r^2}{4}$$

$$= \frac{r^2}{2},$$ que es igual al área del triángulo rectángulo isósceles.