Muchas fracciones se pueden convertir en decimales pasando el denominador a una potencia de 10. Otras son más resistentes.

6.15)

(a) $\frac{1}{3}$, podemos intentar convertir el denominador en un múltiplo de 10.

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{3 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{10\frac{1}{3}}{10} = \frac{10/3}{10} = \frac{3\frac{1}{3}}{10}$$

$\frac{1}{3} = \frac{3\frac{1}{3}}{10}$, por lo que $\frac{1}{3}$ está entre $\frac{3}{10}$ y $\frac{4}{10}$, pero más cerca a $\frac{3}{10}$.

$\frac{1}{3}$ se aproxima a 0.3

(b) Ahora escribimos el denominador con 100:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot \frac{100}{3}}{3 \cdot \frac{100}{3}} = \frac{100/3}{100} = \frac{33\frac{1}{3}}{100}.$$

$\frac{1}{3}$ está entre 0.33 y 0.34, más cercana a 0.33.

(c) El patrón continúa: $\frac{1}{3} = \frac{1\frac{1000}{3}}{1000} = \frac{333\frac{1}{3}}{1000}$. $\frac{1}{3}$ se encuentra entre 0.333 y 0.334, más cercano a 0.333.

En general, $\frac{1}{3}$ siempre se escribirá de la forma:

$$\frac{1}{3} = \frac{\overbrace{33\ldots33}^{n\ 3's}\frac{1}{3}}{\underbrace{100\ldots00}_{n\ 0's.}}$$

Por lo que $\frac{1}{3}$ siempre se encontrará entre $\frac{33\ldots3}{10\ldots0}$ y $\frac{33\ldots4}{10\ldots0}$, redondeando a $0.33\ldots3$.

(d) Este patrón continúa por siempre, por lo que no podemos escribir $\frac{1}{3}$ como decimal finito:

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots$$

Importante: 0.333... es un decimal periódico infinito, opuesto a los decimales que terminan, o finitos.

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots = 0.\overline{3}$$

Problemas (Personal)

6.16)

(a) $\frac{5}{9} = 0.\overline{5}$

(b) $\frac{37}{90} = 0.4\overline{1}$

$$\begin{array}{r} 0.4111 \\ 37.0.. \overline{)90} \\ 360 \\ \hline 100 \\ 90 \\ \hline 100 \\ \vdots \end{array}$$

(c) $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$

(d) $\frac{19}{11} = 1 + \frac{8}{11} = 1 + 0.\overline{72}$
$= 1.\overline{72}$

$$\begin{array}{r} 0.\overline{72}72. \\ 8.00 \overline{)11} \\ 77 \\ \hline 30 \\ 22 \\ \hline 80 \\ 77 \\ \hline 30 \\ \vdots \end{array}$$

6.17)

(a) $0.\overline{2}$

$x = 0.\overline{2}$

$10x = 2.\overline{2}$

$$\begin{aligned} 10x &= 2.\overline{2} \\ -\ x &= 0.\overline{2} \\ \hline 9x &= 2 \\ x &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

(b) $0.\overline{51}$

$x = 0.\overline{51}$

$100x = 51.\overline{51}$

$$\begin{aligned} 100x &= 51.\overline{51} \\ -\ x &= 0.\overline{51} \\ \hline 99x &= 51 \end{aligned}$$

$x = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$

(c) $0.2\overline{8}$

$x = 0.2\overline{8}$

$$\begin{aligned} 100x &= 28.\overline{8} \\ -\ 10x &= 2.\overline{8} \\ \hline 90x &= 26 \end{aligned}$$

$x = \frac{26}{90} = \frac{13}{45}$

(d) $5.00\overline{25}$

$x = 5.00\overline{25}$

$100x = 500.\overline{25}$

$10000x = 50025.\overline{25}$

$$\begin{aligned} 10{,}000x &= 50025.\overline{25} \\ -\ 100x &= 500.\overline{25} \\ \hline 9{,}900x &= 49525 \end{aligned}$$

$x = \frac{49525}{9{,}900} = \frac{25 \cdot 1981}{25 \cdot 396}$

$= \frac{1981}{396}$

$$\begin{array}{r} 396 \\ 9'900 \overline{)25} \\ 75 \\ \hline 240 \\ 225 \\ \hline 150 \end{array}$$

6.18) (a)

Finito	Infinito	Finito	Finito	Infinito	Infinito
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$			
Finito	Infinito	Finito			

(b) $n \geq 2$. Dividir $\frac{1}{n}$ es dividir $100\ldots0$ entre n. Para que el decimal sea finito, n tiene que dividir a 100.00, con un número de 0's finitos.

$$10^K = 5^K \cdot 2^K \quad (K \text{ es el número de } 0\text{'s}).$$

Para que n divida $5^k \cdot 2^k$, debe tener solamente 2's y 5's en su factorización prima.

Importante: Con un poco más de teoría numérica, podemos probar que si a y b son enteros positivos y $b > 1$, $\frac{a}{b}$ es un decimal finito solo si b tiene solamente 2 y 5 en su factorización prima.

6.19) $\frac{3}{7}$.

$$
\begin{array}{l}
\,0.\overline{428571} \\
3.0 \overline{)\,7} \\
\underline{28} \\
\ \ 20 \\
\ \ \underline{14} \\
\ \ \ 60 \\
\ \ \ \underline{56} \\
\ \ \ \ 40 \\
\ \ \ \ \underline{35} \\
\ \ \ \ \ 50 \\
\ \ \ \ \ \underline{49} \\
\ \ \ \ \ \ 10 \\
\ \ \ \ \ \ \underline{7} \\
\ \ \ \ \ \ \ 30
\end{array}
$$

$$\frac{3}{7} = 0.\overline{\overset{1}{4}\overset{2}{2}\overset{3}{8}\overset{4}{5}\overset{5}{7}\overset{0}{1}}$$

Posición Modulo 6 nos dice el número en la posición.

$$
\begin{array}{l}
\,16 \\
100 \overline{)\,6} \\
\underline{6} \\
40 \\
\underline{36} \\
\ \ 4 \text{ residuo.}
\end{array}
$$

5

6.20) $0.\overline{9}$

$x = 0.\overline{9}$

$10x = 9.\overline{9}$

$$
\begin{array}{rl}
10x &= 9.\overline{9} \\
- \quad x &= 0.\overline{9} \\
\hline
9x &= 9 \\
x &= 1
\end{array}
$$

1

Ejercicios

6.4.1)

(a) $\frac{2}{11} = 0.\overline{18}$

$$\begin{array}{r} 0.\overline{18} \\ 20 \;\big)\; 11 \\ 11 \\ \hline 90 \\ 88 \\ \hline 20 \end{array}$$

(b) $\frac{21}{11} = 1 + \frac{10}{11}$

$= 1.\overline{90}$

$$\begin{array}{r} 0.\overline{90} \\ 100 \;\big)\; 11 \\ 99 \\ \hline 100 \end{array}$$

(c) $\frac{1}{30} = 0.0\overline{3}$

$$\begin{array}{r} 0.033 \\ 1.00 \;\big)\; 30 \\ 90 \\ \hline 100 \end{array}$$

(d) $\frac{5}{33} = 0.\overline{15}$

$$\begin{array}{r} 0.\overline{15} \\ 5.0 \;\big)\; 33 \\ 33 \\ \hline 170 \\ 165 \\ \hline 50 \end{array}$$

(e) $\frac{71}{90} = 0.7\overline{8}$

$$\begin{array}{r} 0.7\overline{8} \\ 71.0 \;\big)\; 90 \\ 630 \\ \hline 800 \\ 720 \\ \hline 800 \\ \vdots \end{array}$$

(f) $\frac{118}{55} = 2 + \frac{8}{55}$

$= 2.1\overline{45}$

$$\begin{array}{r} 0.1\overline{45} \\ 8.0 \;\big)\; 55 \\ 55 \\ \hline 250 \\ 220 \\ \hline 300 \\ 275 \\ \hline 250 \end{array}$$

6.4.2)

$\frac{1}{13} = 0.\overline{076923}$ (1 2 3 4 5 0)

$$\begin{array}{r} 0.\overline{076923} \\ 1.0.0 \;\big)\; 13 \\ 91 \\ \hline 90 \\ 78 \\ \hline 120 \\ 117 \\ \hline 30 \\ 26 \\ \hline 40 \\ 39 \\ \hline 100 \end{array}$$

$19 \div 6$ tiene modulo 2.

$\boxed{7}$

6.4.3) $\frac{1}{10+x}$

$x = \boxed{6}$

6.4.4)

(a) $0.\overline{7}$

$x = 0.\overline{7}$

$10x = 7.\overline{7}$

$9x = 7$

$x = \boxed{\frac{7}{9}}$

(b) $0.\overline{12}$

$x = 0.\overline{12}$

$100x = 12.\overline{12}$

$99x = 12$

$x = \frac{12}{99} = \boxed{\frac{4}{33}}$

(c) $0.\overline{16}$

$x = 0.\overline{16}$

$100x = 16.\overline{16}$

$99x = 16$

$x = \boxed{\frac{16}{99}}$

(d) $0.\overline{45}$

$x = 0.\overline{45}$

$100x = 45.\overline{45}$

$99x = 45$

$x = \frac{45}{99} = \boxed{\frac{5}{11}}$

(e) $0.\overline{912}$

$x = 0.\overline{912}$

$1000x = 912.\overline{912}$

$-x = 0.\overline{912}$

$999x = 912$

$x = \frac{912}{999} = \boxed{\frac{304}{333}}$

$$\begin{array}{r} 304 \\ 912 \;\big)\; 3 \\ 9 \\ \hline 012 \end{array}$$

(f) $0.00\overline{1}$ $\quad x = 0.00\overline{1}$

$$\begin{array}{r} 1000x = 1.\overline{1} \\ -\ 100x = 0.\overline{1} \\ \hline 900x = 1 \end{array}$$

$$x = \boxed{\frac{1}{900}}$$

(g) $0.3\overline{6}$ $\quad x = 0.3\overline{6}$

$$\begin{array}{r} 100x = 36.\overline{6} \\ -\ 10x = 3.\overline{6} \\ \hline 90x = 33 \end{array}$$

$$x = \frac{33}{90} = \boxed{\frac{11}{30}}$$

(h) $0.0\overline{9}$ $\quad x = 0.0\overline{9}$

$$0.\overline{1} = \frac{1}{9} \qquad \boxed{\frac{1}{10}}$$

$$\frac{1}{9}(9) = 0.\overline{9}$$

$$\frac{1}{10} = 0.0\overline{9}$$

(i) $2.\overline{02}$

$$0.\overline{02} = x$$

$$\begin{array}{r} 100x = 2.\overline{02} \\ -\ x = 0.\overline{02} \\ \hline 99x = 2 \end{array}$$

$$x = \frac{2}{99}$$

$$2 + \frac{2}{99} = \frac{198+2}{99} = \boxed{\frac{200}{99}}$$

6.4.5)

$$\underset{1}{1.2345},\ \underset{5}{1.234\overline{5}},\ \underset{4}{1.23\overline{45}},\ \underset{3}{1.2\overline{345}},\ \underset{2}{1.\overline{2345}}$$

6.4.6)

$$\begin{array}{r} 0.\overline{63} \\ -\ 0.63 \\ \hline 0.00\overline{63} \end{array}$$

$$0.00\overline{63} = x$$

$$\begin{array}{r} 10{,}000x = 63.\overline{63} \\ -\ 100x = 0.\overline{63} \\ \hline 9900x = 63 \end{array}$$

$$x = \frac{63}{9900} = \boxed{\frac{7}{1100}}$$

$$\begin{array}{r} 1100 \\ 9\overline{)9900} \\ 99 \\ \hline 00 \end{array}$$

6.4.7)

$$\frac{.\overline{48}}{.\overline{15}}$$

$$\frac{16/33}{5/33} = \frac{16 \cdot 33}{5 \cdot 33} = \frac{16}{5} = \boxed{3\frac{1}{5}}$$

$$x = 0.\overline{48}$$

$$\begin{array}{r} 100x = 48.\overline{48} \\ -\ x = 0.\overline{48} \\ \hline 99x = 48 \end{array}$$

$$x = \frac{48}{99} = \frac{16}{33}$$

$$y = 0.\overline{15}$$

$$\begin{array}{r} 100x = 15.\overline{15} \\ -\ x = 0.\overline{15} \\ \hline 99x = 15 \end{array}$$

$$x = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$$

Otra solución es notar:

$$\frac{0.\overline{48}}{0.\overline{15}} = \frac{0.4848\ldots}{0.1515\ldots} = \frac{48(0.010101\ldots)}{15(0.010101\ldots)} = \frac{48}{15} = 3\frac{1}{5}.$$