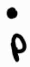
Vamos ahora a estudiar algunos conceptos de geometría. Unicamente trataremos con Figuras planares. (los que puedes dibujar en un papel).

Ahora hablaremos de Ángulos.

la unidad más pequeña en el espacio le llamamos Punto : 

En un punto no te puedes mover de arriba a abajo o de Izquierda a derecha. Es aburrido!



Esto es un punto.

Por convención llamamos los puntos con letras mayúsculas.

Esto es un segmento

Ya que un punto es aburrido, viajamos a otro punto.

Un camino directo de un punto a otro se llama segmento de linea o segmento. Los dos puntos u los extremos de un segmento se llaman endpoints (puntos finales)

Usamos estos puntos para nombrar el segmento. $\overline{AB}$

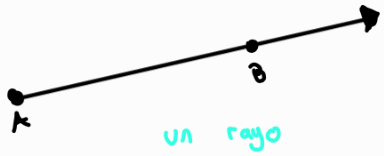
Si extendemos un segmento más allá de sus puntos finales indefinidamente, formamos una linea.

$\overleftrightarrow{AB}$ o K

Una linea

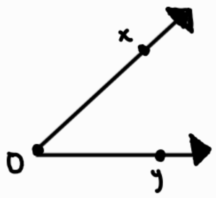
las flechas en los extremos de la linea simbolizan que se extiende indefinidamente en ambos direcciones.

Si solo decidimos continuar el segmento en una dirección formamos un ray (rayo).



lo representamos como $\overrightarrow{AB}$.
A es el punto de origen.

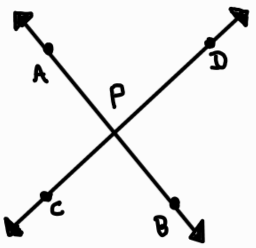
Cuando dos rayos comparten un mismo origen forman un ángulos.



Los rayos $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ comparten el origen O.
El punto de origen en común se llama Vertex (vértice) del ángulo, y los rayos $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ son llamados lados del ángulo.

Usamos el símbolo $\angle$ para indicar un ángulo y usamos un punto a cada lado del vértice para identificar el ángulo.

El ángulo de la figura lo podemos llamar $\angle XOY$. Si es evidente el ángulo al que nos referimos, lo podemos llamar $\angle O$.



Dos lineas que se intersectan también forman ángulos.
Las lineas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ se intersectan en el punto P.

No podemos hablar de $\angle P$ porque hay varios ángulos posibles, por ejemplo $\angle APC$, $\angle APD$.

Segmentos que se intersectan también forman ángulos.

Usualmente medimos la apertura de un ángulo con una escuadra. Esta es usualmente un semi-círculo dividido en 180 partes iguales. Cada parte es 1 grado.

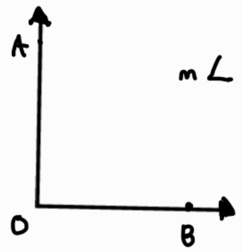
- Un semicírculo tiene 180 grados.

- Un círculo tiene 360 grados. (360°).

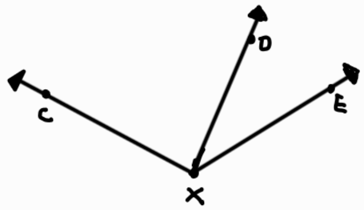
Algunas veces las medidas de ángulos se escriben con una m antes del $\angle$ para indicar medición: $m\angle YOZ = 62^\circ$.

Problemas

10.1)



$m\angle AOB = 90^\circ$



$m\angle CXD = 80^\circ$

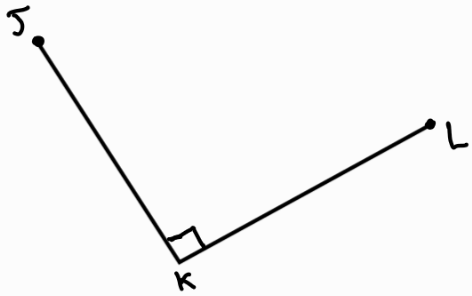
$m\angle CXE = 116^\circ$

$\angle DXE = 116^\circ - 80^\circ$
$= 36^\circ$

Def. Los ángulos de 90° grados se les llama Right angles/ ángulos rectos.

Los ángulos $\angle CXD$ y $\angle DXE$ comparten un lado y un vértice. Se les llama ángulos adyacentes.

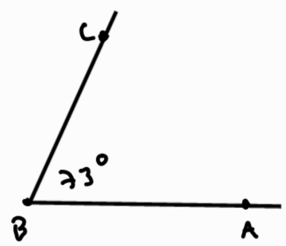
Dos lineas, rayos o segmentos que formen un ángulo recto se les llama perpendiculares entre sí.



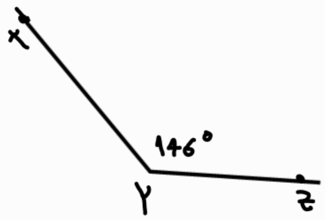
Usamos la caja para indicar que el ángulo es recto.

Usamos el símbolo $\perp$ para indicar que los segmentos son perpendiculares:

$\overline{JK} \perp \overline{KL}$



Ángulo Agudo/Acute

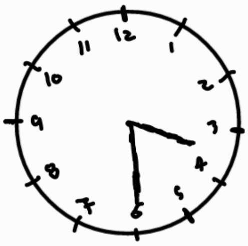


Ángulo obtuso/obtuse

- Ángulos menores a 90°
- Ángulos mayores a 90°

se les llama agudos. se les llama obtusos.

10.2)



Este reloj muestra las 3:30.

(a) A las 5:00, la hora estará justo en el 5 y el minutero justo en el 12.

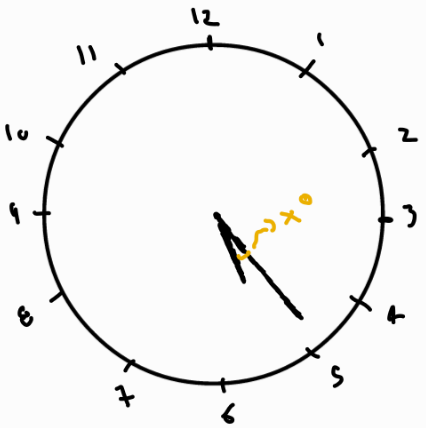
Idea: Ya que un círculo tiene $360°$ y un reloj divide $360°$ en 12 partes iguales, cada parte tiene

$$\frac{360°}{12} = 30°.$$

El ángulo formado será de $30° \times 5 = \underline{150°}$

(b) En este caso ninguna manecilla se para directamente sobre un entero, por lo que no podemos aplicar la estrategia de (a). Sin embargo, podemos saber fácilmente cuantos grados forma el ángulo de la siguiente manera:

1) El minutero marca 24 minutos sobre la hora, ya que 60 minutos son $360°$ grados, existe una proporción:



$$360° : 60 \text{ min} = h° : 24 \text{ minutos}$$

Nótese que $30°$ equivalen a 5 minutos.

$$24 \text{ minutos} \times \frac{\overset{6}{\cancel{30}}°}{\cancel{5} \text{ minutos}} = 144°.$$

2) La hora se encuentra entre 5 y 6. Exactamente, ha recorrido $\frac{2}{5}$ de la distancia entre 5 y 6.

En total, su apertura a partir de 12 es

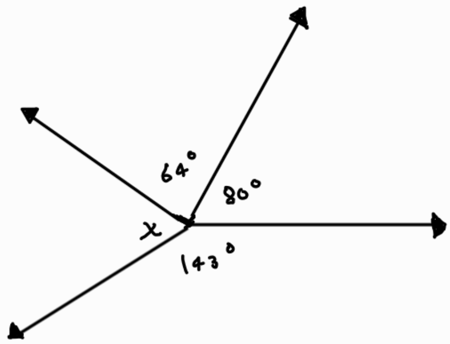
$$30° \times 5 + \frac{2}{\cancel{5}}\,\overset{6}{\cancel{30}}° = 150° + 12° = 162°.$$

Con la información obtenida en (1) y (2) sabemos que el ángulo interno formado por las manecillas es $162° - 144° = \underline{18°}$.

Idea: En el problema se pidió la medida del ángulo interno, esto es

Porque existe otro ángulo formado por las manecillas, el formado por tomar el "camino largo" (ángulo externo). Este ángulo se llama Reflex Angle.

10.3)



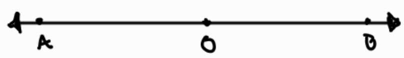
La suma de los 4 ángulos forma un círculo:

$$64° + 80° + 143° + x = 360°$$

$$287° + x = 360°$$

$$x = \underline{73°}$$

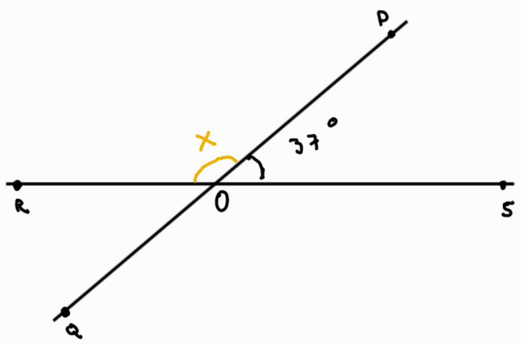
10.4)



$\angle AOB$ es 180° (un semicírculo).

A los ángulos de 180° se les llama ángulos llanos / straight.

10.5)



$\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{RS}$ se intersectan en O y sabemos que $\angle SOP = 37°$. Cuanto es $\angle POR$?

La suma de $\angle SOP$ y $\angle POR$ forman un ángulo llano:

$$37° + \angle POR = 180°$$

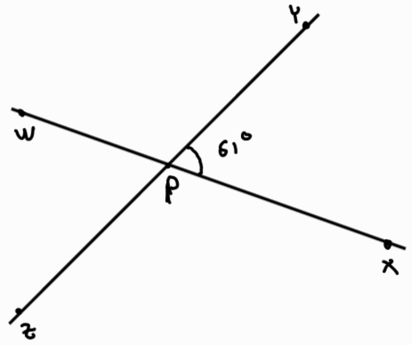
$$\angle POR = 143°$$

Definición: Dos ángulos cuya suma es 180° se les llama ángulos suplementarios, y cada ángulo es el suplemento del otro.

Cuando dos líneas se intersectan, se forman dos ángulos adyacentes. Dos ángulos adyacentes forman ángulos suplementarios porque juntos forman una línea recta.

Definición Ángulos que sumen 90° se les llama complementarios, y cada ángulo es el complemento del otro.

10.6)



$\angle YPW$ es suplementorio de $\angle YPX$, por lo que $\angle YPW = 119°$.

Así mismo, $\angle WPZ$ es suplementorio de $\angle YPW$, por lo que $\angle WPZ = 61°$.

Nótese que $\angle WPZ = \angle YPX$.

10.7)

Ya que $\overleftrightarrow{WPX}$ es una línea, sabemos que:

$$\angle YPX = 180° - \angle WPY.$$

Ya que $\overleftrightarrow{YPZ}$ en una línea, sabemos que:

$$\angle WPZ = 180° - \angle WPY.$$

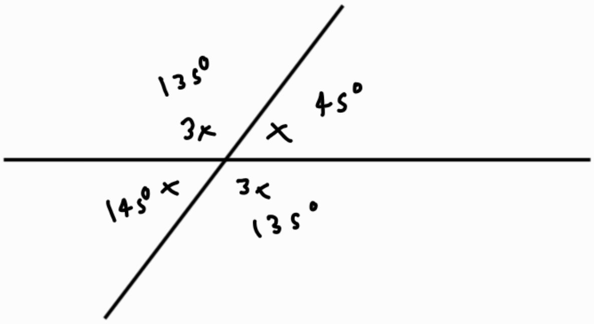
Por lo que $\angle YPX = \angle WPZ$.

Esta es una manera larga de decir "ya que $\angle YPX$ y $\angle WPZ$ son suplementorios al mismo ángulo, deben ser iguales.".

Cuando dos líneas se intersectan, los ángulos opuestos uno al otro son llamados Ángulos Verticales, y siempre tienen la misma medida.

Los Ángulos Congruentes son ángulos que tienen la misma medida. Usualmente usamos arcos para marcar ángulos congruentes.

10.8)



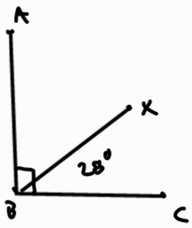
$3x + x = 180$

$4x = 180$

$x = 45°$

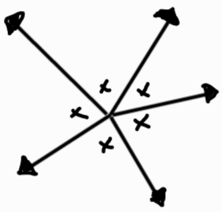
Ejercicios

10.1.1)



$\angle ABX = 90° - 28° = \boxed{62°}$

10.1.2)

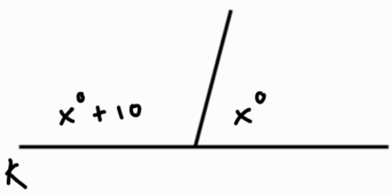


$360° = 5x$

$\frac{360°}{5} = \boxed{72°}$

10.1.3) extendemos las lineas con una regla.

10.1.4)

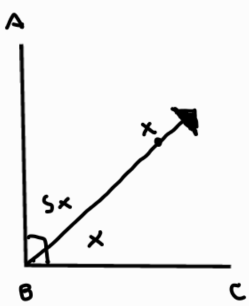


$x° + 10 + x° = 180°$

$2x = 170°$

$x = \boxed{85°}$

10.1.5)



$6x = 90°$

$x = \boxed{15°}$

10.1.6)

$15 + 2x + x = 180°$

$3x + 15 = 180°$

$3x = 165$

$x = 55°$

$110 + 15 = 125°$

$165 \div 3 = 55$

15

$\underline{15}$

10.1.7)

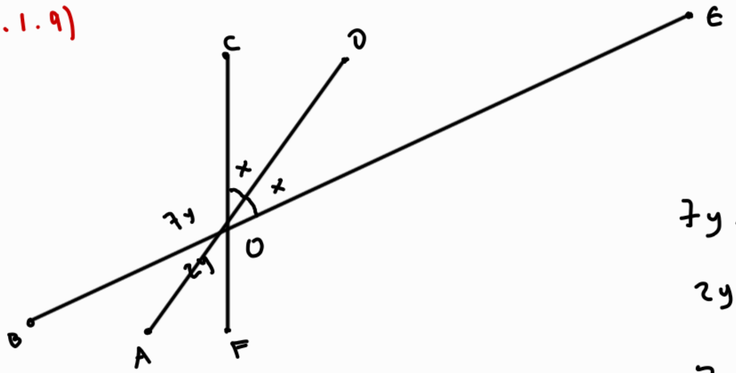
Ya que el ángulo interno es 18°, el reflex ángulo es $360° - 18° = 342°$

10.1.8)

$500\,c = 360°$

$\overset{1}{\cancel{90°}} \times \dfrac{500c}{\underset{4}{\cancel{360°}}} = 125\,c$

10.1.9)



$7y + 2x = 180°$

$2y = 2x$

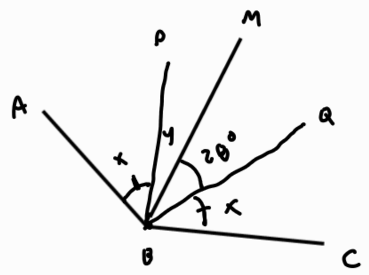
$7y + 2y = 180°$

$9y = 180°$

$y = 20°$

$20°$

10.1.10)



$y = 28°$

$x = 2(28°) = 56°$

$56° + 56° = 112°$