

ANLIS - Spick

Johanna Koch

# Contents

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1	Wurzeln . . . . .	3
1.2	Potenzen . . . . .	3
1.3	Brüche . . . . .	4
1.4	Logarithmen . . . . .	4
1.5	Binome . . . . .	4
1.5.1	1. Binom . . . . .	4
1.5.2	2. Binom . . . . .	4
1.5.3	3. Binom . . . . .	4
1.6	Quadratische Gleichung . . . . .	4
1.7	Beispiele . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Funktionen</b>	<b>6</b>
2.1	Lineare Funktion . . . . .	6
2.2	Polynomfunktion . . . . .	6
2.3	Quadratische Funktionen . . . . .	6
2.4	Exponentialfunktion . . . . .	6
2.5	Logarithmusfunktion . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	<b>7</b>
3.1	Arithmetische Folgen und Reihen . . . . .	7
3.1.1	Beispiele von Folgen . . . . .	7
3.1.2	Summe der Glieder einer AF . . . . .	7
3.1.3	Nützliche andere Formeln . . . . .	8
3.2	Geometrische Folgen und Reihen . . . . .	8
3.3	Rechnen mit Folgen, Eigenschaften . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Grenzwerte und Stetigkeit</b>	<b>9</b>
4.1	Grenzwert . . . . .	9
4.1.1	Linksseitiger Grenzwert . . . . .	9
4.1.2	Rechtsseitiger Grenzwert . . . . .	9
4.1.3	Zweiseitiger Grenzwert . . . . .	9
4.1.4	Uneigentliche Grenzwerte . . . . .	9
4.1.5	Grundlegende Grenzwerte Theorem . . . . .	9

4.1.6	Rechnen mit Grenzwerten . . . . .	10
4.1.7	Squeezing-Theorem . . . . .	11
4.2	Stetigkeit . . . . .	11
4.2.1	Grenzwert einer Funktion von $x$ - Theorem . . . . .	11
4.2.2	Rechenregeln . . . . .	12
4.2.3	Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	12
4.2.4	Regula Falsi . . . . .	12
4.3	Beispiele . . . . .	13
4.3.1	Geschickt erweitern . . . . .	13
4.3.2	GW Polynom . . . . .	13
4.3.3	GW Quotient . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Differentialrechnung I – Tangente und Ableitung</b>	<b>14</b>
5.1	Die Sekante . . . . .	14
5.1.1	Sekante durch P und Q . . . . .	14
5.2	Tangente und Ableitung . . . . .	14
5.2.1	Beispiel Quadratische Funktion . . . . .	14
5.3	Ableitung der Potenzfunktion . . . . .	15
5.3.1	Beispiel Tangente . . . . .	15
5.3.2	Newton-Raphson Verfahren . . . . .	15
5.4	Einige Ableitungsregeln . . . . .	16
5.4.1	Theorem Faktorregel . . . . .	16
5.4.2	Theorem Produktregel . . . . .	16
5.5	Quotientenregel . . . . .	16
5.6	Formeln . . . . .	16
5.6.1	Ableitungen . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Differentialrechnung III – Differential, höhere Ableitungen</b>	<b>18</b>
6.1	Implizite Ableitung . . . . .	18
6.1.1	Beispiel . . . . .	18
6.1.2	$y$ nach $x$ . . . . .	19
6.2	Differential . . . . .	19
6.2.1	Beispiel Differential . . . . .	20
6.2.2	Rechenregeln für Differentiale . . . . .	20
6.3	Monotonie . . . . .	20
6.3.1	Lokale oder relative Extrema . . . . .	21
6.4	Höhere Ableitungen . . . . .	21
6.5	Krümmung . . . . .	21

# Chapter 1

## Grundlagen

### 1.1 Wurzeln

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt{a^2 \times b} = a \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt[b]{a^b} = (a^b)^{\frac{1}{b}} = a$$

$$\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

### 1.2 Potenzen

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$

$$x^{a^b} = x^{a \times b}$$

$$\frac{a}{bx^{-c}} = \frac{a}{b} x^{-c}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$\frac{a^x}{a^{x+1}} = \frac{1}{a}$$

## 1.3 Brüche

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ab+cb}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{1}{5}x$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = \frac{ab-cb}{bd}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$\frac{4}{3}x^{-4} = \frac{4}{3x^{-4}}$$

$$\frac{x^4}{9} = \frac{1}{9}x^4$$

## 1.4 Logarithmen

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$$

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

$$\log_b(x^y) = y \log_b(x)$$

## 1.5 Binome

### 1.5.1 1. Binom

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

### 1.5.2 2. Binom

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

### 1.5.3 3. Binom

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

## 1.6 Quadratische Gleichung

Für:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dann:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## 1.7 Beispiele

$$\frac{2}{3\sqrt[4]{x^5}} = \frac{2}{3x^{-\frac{5}{4}}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{4}}$$

## Chapter 2

# Funktionen

### 2.1 Lineare Funktion

$$f(x) = ax + b$$

a = Steigung

### 2.2 Polynomfunktion

Grad der Funktion: Höchster Exponent von x.

Nullstellen: Maximal so viele wie der Grad der Funktion.

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \dots$$

### 2.3 Quadratische Funktionen

Polynomfunktion zweites Grades

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

### 2.4 Exponentialfunktion

$$f(x) = a \times b^x$$

### 2.5 Logarithmusfunktion

Umkehrfunktion von Exponentialfunktion

$$f(x) = \log_b(x)$$

## Chapter 3

# Folgen und Reihen

### 3.1 Arithmetische Folgen und Reihen

$$(a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Differenz d zweier beliebiger aufeinanderfolgender Glieder  $a_n, a_{n+1}$  ist konstant.

Eine AF ist eindeutig beschrieben durch zwei Grössen:

- beliebiges Glied  $a_n$  und Differenz  $d$
- zwei beliebige Glieder  $a_n$  und  $a_{n+k}$

**Bildungsgesetz:** Funktionsvorschrift nach welcher aus  $n$  das  $n$ -Glieder ( $a_n$ ) berechnet werden kann.

#### 3.1.1 Beispiele von Folgen

$$(a_n) = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots \text{ Bildungsgesetz: } a_n = -\frac{1}{2^n}$$

$$(a_n) = 1^3, 2^3, 3^3, \dots \text{ Bildungsgesetz: } a_n = n^3$$

$$(a_n) = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \text{ Bildungsgesetz: } a_n = \frac{n-1}{n}$$

#### 3.1.2 Summe der Glieder einer AF

$$\sum_{k=1}^n a_k = na_1 + d \frac{n(n-1)}{2} = n \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Wobei bei " $n \frac{a_1 + a_n}{2}$ "  $a_1$  das erste Glied ist,  $a_n$  das letzte,  $n$  die Anzahl Glieder und 2 den Mittelwert vom ersten und letzten Glied bildet.



### 3.1.3 Nützliche andere Formeln

Gegeben:  $a_n = v$ ,  $a_{n+x} = z$

Gesucht  $d$ :  $d = \frac{z-v}{(n+x)-n}$

## 3.2 Geometrische Folgen und Reihen

Die geometrische Folge ist dadurch charakterisiert, dass der Quotient  $q$  zweier beliebiger aufeinanderfolgender Glieder  $a_n$  und  $a_{n+1}$  konstant ist.

$$a_{n+1} = qa_n, n = 1, 2 \qquad q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Eine GF ist eindeutig beschrieben durch zwei Grössen, entweder:

- durch ein beliebiges Glied  $a_n$  und den Quotienten  $q$
- durch zwei beliebige Glieder  $a_n$  und  $a_{n+k}$

## 3.3 Rechnen mit Folgen, Eigenschaften

- Folge  $(a_n)$  multipliziert man mit einer reellen Zahl  $\lambda$ , indem man jedes Glied der Folge mit dieser Zahl multipliziert:

$$\lambda(a_n) = (\lambda a_n)$$

- Zwei Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  addiert man, indem man entsprechende Glieder addiert:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$

- Eine Folge heisst **konstante Folge**, falls  $a_n = c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$   
AF ist konstant wenn  $d = 0$ ,  
GF ist konstant wenn  $q = 1$
- Eine Folge  $(a_n)$  ist **streng monoton zunehmend/abnehmend** falls  $(a_{n+1} > a_n)$  bzw  $(a_{n+1} < a_n)$
- Eine Folge  $(a_n)$  ist **beschränkt** (höhö) falls eine positive Zahl  $c$  existiert mit  $|a_n| \leq c, \forall n$ : alle Glieder der Folge liegen im Graphen unter einem Teppich der Breite  $2c$ . Anderfalls heisst die Folge  $(a_n)$  **unbeschränkt**

## Chapter 4

# Grenzwerte und Stetigkeit

### 4.1 Grenzwert

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  oder  $f(x) \rightarrow L$ , falls  $x \rightarrow a$ .

#### 4.1.1 Linksseitiger Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

#### 4.1.2 Rechtsseitiger Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

#### 4.1.3 Zweiseitiger Grenzwert

Der zweiseitige Grenzwert existiert genau dann, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und diese gleich sind:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ genau dann, wenn } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

#### 4.1.4 Uneigentliche Grenzwerte

Grenzwert wächst bis über alle Grenzen wenn man  $x$  gegen  $a$  gehen lässt:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

#### 4.1.5 Grundlegende Grenzwerte Theorem

$$\lim_{x \rightarrow a} k = k$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

### 4.1.6 Rechnen mit Grenzwerten

#### Theorem Summe

Falls  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ,  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$  und

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$  und  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$  dann gilt:

**Der GW einer Summe/Differenz ist gleich der Summe/Differenz der GWs; Konstanten kommen vor den GW:**

$$\lim_{x \rightarrow a} [\mu f(x) \pm \nu g(x)] = \mu \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \nu \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \mu L_1 \pm \nu L_2$$

#### Theorem Produkt

**Der GW eines Produkts ist gleich dem Produkt der GWs:**

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 L_2$$

#### Theorem Quotient

Ist  $L_2 \neq 0$  und  $g$  in einer Umgebung von  $a$  verschieden von 0, dann ist der **GW des Quotienten gleich dem Quotienten der GWs:**

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

Siehe 4.3.3 GW Quotient für Beispiel.

#### Folgerungen Exponent

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = \left( \lim_{x \rightarrow a} x \right)^n = a^n \qquad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$$

#### Folgerungen Polynom

Für ein Polynom  $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n = \sum_{k=0}^n c_kx^k$  gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = c_0 + c_1a + \dots + c_na^n = p(a)$$

Siehe 4.3.2 GW Polynom für Beispiel.

### Folgerungen Quotient

Für eine rationale Funktion  $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  (dabei sind  $p(x)$  und  $q(x)$  Polynome) und eine  $a \in \mathbb{R}$  gilt:

- (a) Falls  $q(a) \neq 0$ , dann ist  $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = r(a)$
- (b) Falls  $q(a) = 0$  und  $p(a) \neq 0$ , dann existiert  $\lim_{x \rightarrow a} r(x)$  nicht.
- (c) Falls  $q(a) = 0$  und  $p(a) = 0$ , dann kann der GW existieren, muss aber nicht! Siehe 4.3.3 GW Quotient für Beispiel.

### 4.1.7 Squeezing-Theorem

Gilt für drei Funktionen  $f, g$  und  $h$  in einer Umgebung von  $c$  (evt. mit Ausnahme von  $c$ )

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ und } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$

dann gilt auch  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

## 4.2 Stetigkeit

Salopp: Eine Funktion  $f$  heisst stetig, wenn man deren Graphen zeichnen kann, ohne den Stift absetzen zu müssen.

Genauer ist eine Funktion  $f$  stetig in  $a$ , falls:

- Die Funktion  $f$  dort existiert, d.h. falls  $f(a)$  definiert ist.
  - Links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und gleich sind
- $$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$
- Die genannten Grenzwerte mit dem Funktionswert übereinstimmen.

Zusammengefasst:  $f$  ist stetig in  $a$ , falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Eine Funktion heisst stetig, falls sie überall, d.h.  $\forall x \in D(f)$  stetig ist.

### 4.2.1 Grenzwert einer Funktion von $x$ - Theorem

Sei  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Gilt dann  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$  und ist  $f$  im Punkt  $L$  stetig, dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow c} g(x))$$

Insbesondere gilt zB

$$\lim_{x \rightarrow c} |g(x)| = |(\lim_{x \rightarrow c} g(x))|$$

falls  $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$  existiert!

### 4.2.2 Rechenregeln

- Summe und Differenz stetiger Funktionen sind stetig.
- Der Quotient zweier stetiger Funktionen ist dort stetig, wo der Nenner nicht verschwindet.
- Polynome  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  sind stetig.
- Rationale Funktionen  $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  sind dort stetig, wo das Nennerpolynom  $q(x)$  nicht verschwindet.
- Sinus- ( $\sin x$ ) und Kosinusfunktion ( $\cos x$ ) sind stetig.
- Der Tangens ( $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ) ist stetig, falls  $\cos x \neq 0$ , dh falls  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- Exponential- und Logarithmusfunktionen sind in ihrem Definitionsbereichen stetig.
- Zusammensetzung stetiger Funktionen ist stetig.
- Eine zusammengesetzte Funktion kann dort unstetig sein, wo eine der verwendeten Funktionen nicht stetig ist.

### 4.2.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

#### Theorem Zwischenwertsatz

Ist  $f$  im Intervall  $[a, b]$  stetig, dann nimmt  $f$  jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  (inklusive) mindestens einmal an.

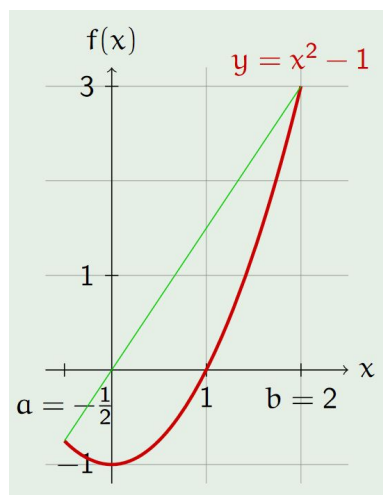
#### Corollary - Nullstellensatz von Bolzano

Ist  $f$  auf  $[a, b]$  stetig und gilt  $f(a)f(b) < 0$ , dann besitzt  $f$  in  $[a, b]$  wenigstens eine Nullstelle, dh.  $\exists x \in [a, b]$  mit  $f(x) = 0$

In anderen Worten: Wenn eine Funktion im Bereich  $[a, b]$  stetig ist und es vom Intervall  $a$  zu  $b$  einen Vorzeichenwechsel gibt, dann gibt es mindestens eine Nullstelle.

### 4.2.4 Regula Falsi

Basierend auf dem Nullstellensatz von Bolzano.



Der Schnittpunkt der Sekante (grün) durch  $(a, f(a))$  und  $(b, f(b))$  mit der x-Achse ergibt eine erste Näherung für die Nullstelle (NS) von f:

$$x = a - f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)} = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

Gilt dann  $f(x)f(a) < 0$ , dann liegt die NS im Intervall  $[a, x]$ , sonst in  $[b, x]$ .

Wiederhole die Prozedur mit dem Intervall welches die NS enthält!

## 4.3 Beispiele

### 4.3.1 Geschickt erweitern

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1 + 1 = 2$$

### 4.3.2 GW Polynom

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^7 - 2x^5 + 1)^{35} = (1^7 - 2 \times 1^5 + 1)^{35} = 0$$

### 4.3.3 GW Quotient

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3+4}{x-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 5x^3+4}{\lim_{x \rightarrow 2} x-3} \text{ und wegen der Regel für Polynome:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3+4}{x-3} = \frac{5 \times 2^3 + 4}{2-3} = -44$$

## Chapter 5

# Differentialrechnung I – Tangente und Ableitung

### 5.1 Die Sekante

Steigung:  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Wobei  $\Delta x = x_1 - x_0$  und  $\Delta y = y_1 - y_0$

#### 5.1.1 Sekante durch P und Q

$P(x_0|f(x_0)), Q(x_1|f(x_1))$  auf dem Graphen  $g(f)$

Steigung der Sekante durch P und Q:

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

**Sekantengleichung (Punkt-Richtungs-Form)**

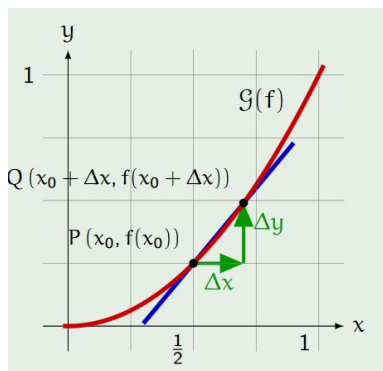
$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

Steigung:  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Differenzquotient von } f \text{ an der Stelle } x_0$

### 5.2 Tangente und Ableitung

#### 5.2.1 Beispiel Quadratische Funktion

Gegeben die Funktion (rot)  $f(x) = x^2$ . Gesucht der Differenzquotient von  $f$  an der Stelle  $x_0$ :



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

Steigung der Sekante :  $2x_0 + \Delta x$

Gleichung der Sekante:

$$y = x_0^2 + (2x_0 + \Delta x)(x - x_0) = (2x_0 + \Delta x)x - (x_0 + \Delta x)x_0.$$

Für die Tangente an der Stelle  $x_0$  geht man mit dem Punkt Q immer näher an Punkt P, bis  $\Delta x = 0$  (Weil die Tangente f nur an einer Stelle berührt)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0 = \text{Steigung der Tangente}$$

Damit Gleichung der Tangente an f:

$$(y - f(x_0)) = 2x_0(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + 2x_0(x - x_0) = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = 2x_0x - x_0^2$$

## 5.3 Ableitung der Potenzfunktion

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

### 5.3.1 Beispiel Tangente

Tangente  $t(x)$  an der Stelle  $P(1, 1)$  an der Kurve  $f(x) = x^2$ ?

$$f(x) = x^2, f'(x) = 2x$$

$$P(1, 1), P(x_0/f(x_0))$$

$$f'(x_0) = 2x_0 = 2 \times 1 = 2 = \text{Steigung Tangente}$$

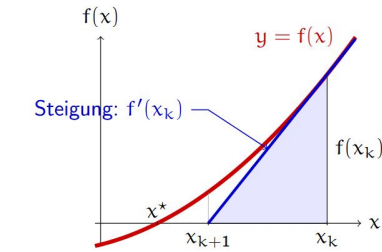
$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0)$$

$$= 1 + 2(x - 1) = 1 + 2x - 2 = 2x - 1$$

### 5.3.2 Newton-Raphson Verfahren

Wir wollen die (nichtlineare) Gleichung  $f(x) = 0$  lösen, dh wir wollen ein  $x_*$  so finden, dass  $f(x_*) = 0$ . Idee: Starte mit  $x_0$ , und berechne den Schnittpunkt  $x_1$  der Tangente durch  $(x_0, f(x_0))$  mit der x-Achse. Wiederhole diesen Schritt!





$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}} = \frac{x_k}{-\Delta x_k}$$

Ausgehend von  $x_0$ , iterieren wir über  $k = 1, 2, \dots$

$$f'(x_k)\Delta x_k = -f(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k = x_k - [f'(x_k)]^{-1}f(x_k)$$

## 5.4 Einige Ableitungsregeln

### 5.4.1 Theorem Faktorregel

Falls  $f'(x)$  existiert, dann darf ein konstanter Faktor  $c \in \mathbb{R}$  vor die Ableitung gezogen werden.

$$[c \times f(x)]' = c \times f'(x) \text{ auch geschrieben als } \frac{d}{dx}[c \times f(x)] = c \times \frac{d}{dx}[f(x)]$$

### 5.4.2 Theorem Produktregel

Existieren die Ableitungen  $u'(x)$  und  $v'(x)$ , dann gilt für die Ableitungen des Produkts die Regel:

$$[u(x) \times v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

auch geschrieben als

$$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = \frac{d}{dx}[u(x)]v(x) + u(x) \times \frac{d}{dx}[v(x)]$$

## 5.5 Quotientenregel

Existieren die Ableitungen  $u'(x)$  und  $v'(x)$ , dann gilt für die Ableitungen des Quotienten von  $u(x)$  und  $v(x) \neq 0$  die Regel:

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \text{ kurz } \left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

auch geschrieben als

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{\frac{d}{dx}[u(x)]v(x) - u(x)\frac{d}{dx}v(x)}{(v(x))^2} \text{ kurz } \left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

## 5.6 Formeln

$$\text{Steigung: } m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\text{Tangenten Gleichung: } t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0)$$

Faktorregel:  $[c \times f(x)]' = c \times f'(x)$

Produktregel:  $[u(x) \times v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Quotientenregel:  $[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$  kurz  $[\frac{u}{v}]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

### 5.6.1 Ableitungen

f(x)	f'(x)
$x^n$	$nx^{n-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$e^x$	$e^x$
$e^{3x}$	$3e^{3x}$
$c(c \in \mathbb{R})$	0
$x$	1
$\sum_{k=0}^n c_k x^k$	$\sum_{k=0}^n c_k x^{k-1}$

## Chapter 6

# Differentialrechnung III – Differential, höhere Ableitungen

### 6.1 Implizite Ableitung

**Explizite Form:**  $y = f(x)$

Man kann für jedes  $x$  den Funktionswert berechnen und die Kurve zeichnen.

**Implizite Form:**  $F(x, y) = 0$

Oft ist eine Auflösung nach  $y$  nicht möglich. **Leite Gliedweise nach  $x$  ab, wobei  $y = y(x)$  als Funktion von  $x$  betrachtet werden muss und mit der Kettenregel ableiten.**

#### 6.1.1 Beispiel

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

$x^2 + (y(x))^2 - R^2 = 0$  | differenzieren nach  $x$ , Achtung: Leite sowohl was links als auch rechts vom " = " ist!!

$$2x + 2y(x) \times y'(x) - 0 = 0$$

$$y'(x) \times y(x) = -x$$

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

## 6.1.2 y nach x

### Kettenregel

$$y^3 = (y(x))^3$$

$$3y(x)^2 y'(x) = 3y^2 y'$$

### Produktregel Kettenregel

$$2xy^2 = 2x \times y^2 \mid \text{Produktregel!}$$

$$(2x)' \times y^2 + 2x \times (y^2)' \mid \text{Kettenregel für } (y^2)'$$

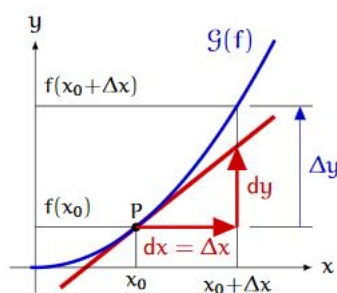
$$(2x)' \times y^2 + 2x \times (2y^2 \times y')$$

$$2y^2 + 2x \times 2yy' = 2y^2 + 4xyy'$$

## 6.2 Differential

Um wieviel verändert sich die Funktion  $y = f(x)$ , wenn man sich von  $x_0$  um  $\Delta x$  entfernt?

Es gilt  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ !



Steigung der Tangente (blau) in  $x_0$

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$

Die Symbole  $dx$  und  $dy$  nennt man **Differentiale**. Das **Differential von  $f$  an der Stelle  $x_0$**  ist

$$dy = f'(x_0)dx$$

Es gilt also approximativ:

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)dx$$

Statt  $dy$  und  $\Delta y$  verwendet man auch die Bezeichnung  $df$  und  $\Delta f$ .

- Das Differential  $df = dy = f'(x)dx$  der Funktion  $y = f(x)$  an der Stelle  $x$  ist gleich der Änderungen des Ordinaten- oder y-Wertes der Tangente durch  $P(x, f(x))$ , wenn man den Abszissen- oder x-Wert um  $dx = \Delta x$  ändert.
- Das Differential  $dy$  von  $y = f(x)$  an der Stelle  $x$  wird verwendet, um die wahre Änderung von  $\Delta y$  zu approximieren

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx$$

Diese Approximation ist umso genauer, je kleiner  $dx = \Delta x$  ist.

- Das Differential  $dy$  ist gleich der Änderung der an der Stelle  $x$  linearisierten Funktion, wenn sich  $x$  um  $dx = \Delta x$  ändert.
- Für eine lineare Funktion gilt somit  $dy = \Delta y$
- Vorteil gegenüber der exakten Änderung: die Berechnung für ein anderes  $dx = \Delta x$  ist lediglich eine Multiplikation mit  $f'(x)$

### 6.2.1 Beispiel Differential

Sei  $f(x) = x^2 + e^{x-1}$ . Um wieviel verändert sich  $f$ , wenn  $x$  von 1 auf 1.1 erhöht wird?

$$f(x) = x^2 + e^{x-1}$$

$$x_0 = 1, x_1 = 1.1$$

**Exakt:**

$$f(x_1) - f(x_0) = 1.1^2 + e^{1.1-1} - (1^2 + e^{1-1}) = 1.21 + e^{0.1} - 2 = 0.315$$

**Approximativ:**

$$f'(x) = 2x + e^{x-1} \times 1$$

$$f'(x_0) = 2 \times 1 + e^{1-1} = 3$$

$$f'(x) = 3 = \frac{dy}{dx}; dy = 3dx \mid \text{Differentialschreibweise}$$

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0); \Delta x = x_1 - x_0$$

$$\Delta y \approx dy = 3dx \approx \Delta x = 3 \times 0.1 = 0.3$$

### 6.2.2 Rechenregeln für Differentiale

Ableitungsregeln	Regeln für Differentiale
$[c]' = 0$	$d[c] = 0$
$[cf]' = cf'$	$d[cf] = cdf$
$[f + g]' = f' + g'$	$d[f + g] = df + dg$
$[fg]' = f'g + fg'$	$d[fg] = df \times g + f \times dg$
$[\frac{f}{g}]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	$d[\frac{f}{g}] = \frac{df \times g - f \times dg}{g^2}$

## 6.3 Monotonie

- Gilt  $f'(x) > 0$  in einem Intervall  $I$ , dann ist  $f$  dort **streng monoton wachsend**.
- Gilt  $f'(x) \geq 0$  in einem Intervall  $I$ , dann ist  $f$  dort **monoton wachsend**.

- Gilt  $f'(x) < 0$  in einem Intervall I, dann ist f dort **streng monoton fallend**.
- Gilt  $f'(x) \leq 0$  in einem Intervall I, dann ist f dort **monoton fallend**.

### 6.3.1 Lokale oder relative Extrema

Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von f in  $x_0$ :  $f'(x_0) = 0$  Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend, es ist erst ein **kritischer Punkt**

Wenn  $f'(x_0) = 0$  **und**:

$f''(x_0) > 0$  dann liegt ein lokales (oder relatives) Minimum vor.  $f''(x_0) < 0$  dann liegt ein lokales (oder relatives) Maximum vor.

## 6.4 Höhere Ableitungen

$$y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)] = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

**Geometrische Bedeutung:** die 2. Ableitung ist positiv wenn die 1. Ableitung (also die Steigung) zunimmt wenn man sich in Richtung zunehmender x entlang der Kurve bewegt.

- Gilt  $f''(x) > 0$  in einem Intervall I, dann weist f dort eine **Linkskrümung** auf. Wir sagen f ist **konvex**.
- Gilt  $f''(x) < 0$  in einem Intervall I, dann weist f dort eine **Rechtskrümung** auf. Wir sagen f ist **konkav**.

## 6.5 Krümmung

Die Krümmung der Kurve  $y = f(x)$  an der Stelle x ist:

$$K(x) = \frac{y''(x)}{[1+(y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}} ; \text{ Krümmungskreisradius } p(x) = \frac{1}{|K(x)|}$$

Für  $K > 0$  hat man eine Links- und für  $K < 0$  eine Rechtskrümmung.