ANLIS - Spick

Johanna Koch

Contents

Chapter 1

Grundlagen

1.1 Wurzeln

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

$$\sqrt{a^2 \times b} = a \times \sqrt{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\sqrt[b]{a^b} = (a^b)^{\frac{1}{b}} = a$$

1.2 Potenzen

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

$$\frac{a}{bx^{-c}} = \frac{a}{b}x^{-c}$$

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$x^{a\,b} = x^{a \times b}$$

$$\frac{a^x}{a^{x+1}} = \frac{1}{a}$$

1.3 Brüche

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ab+cb}{bd} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = \frac{ab-cb}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1} \qquad \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3} \qquad \frac{4}{3}x^{-4} = \frac{4}{3x^{-4}}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{1}{5}x \qquad \frac{x^4}{9} = \frac{1}{9}x^4$$

1.4 Logarithmen

$$y = log_a(x) <=> x = a^y \qquad \log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

$$\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y) \qquad \log_b(x^y) = y \log_b(x)$$

1.5 Binome

1.5.1 1. Binom

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

1.5.2 2. Binom

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

1.5.3 3. Binom

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

1.6 Quadratische Gleichung

Für:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dann:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.7 Beispiele

$\frac{2}{3\sqrt[4]{x^5}} = \frac{2}{3x^{-\frac{5}{4}}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{4}}$

Chapter 2

Funktionen

2.1 Lineare Funktion

$$f(x) = ax + b$$

a = Steigung

2.2 Polynomfunktion

Grad der Funktion: Höchster Exponent von x.
Nullstellen: Maximal so viele wie der Grad der Funktion.

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2}...$$

2.3 Quadratische Funktionen

Polynomfunktion zweites Grades

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

2.4 Exponentialfunktion

$$f(x) = a \times b^x$$

2.5 Logarithmusfunktion

Umkehrfunktion von Exponentialfunktion

$$f(x) = log_b(x)$$

Chapter 3

Folgen und Reihen

3.1 Arithmetische Folgen und Reihen

$(a_n) = a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$

Differenz d zweier beliebiger aufeinanderfolgender Glieder a_n, a_{n+1} ist konstant.

Eine AF ist eindeutig beschrieben durch zwei Grössen:

- beliebiges Glied a_n und Differenz d
- zwei beliebige Glieder a_n und a_{n+k}

Bildungsgesetz: Funktionsvorschrift nach welcher aus n das n-Glied (a_n) berechnet werden kann.

3.1.1 Beispiele von Folgen

$(a_n) = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, ...$ Bildungsgesetz: $a_n = -\frac{1}{2n}$

$(a_n) = 1^3, 2^3, 3^3, ...$ Bildungsgesetz: $a_n = n^3$

$(a_n) = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...$ Bildungsgesetz: $a_n = \frac{n-1}{n}$

3.1.2 Summe der Glieder einer AF

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = na_1 + d\frac{n(n-1)}{2} = n\frac{a_1+a_n}{2}$

Wobei bei "$n\frac{a_1+a_n}{2}$" a_1 das erste Glied ist, a_n das letzte, n die Anzahl Glieder und 2 den Mittelwert vom ersten und letzten Glied bildet.

3.1.3 Nützliche andere Formeln

Gegeben: $a_n = v$, $a_{n+x} = z$ Gesucht d: $d = \frac{z-v}{(n+x)-n}$

3.2 Geometrische Folgen und Reihen

Die geometrische Folge ist dadurch charakterisiert, dass der Quotient q zweier beliebiger aufeinanderfolgender Glieder a_n und a_{n+1} konstant ist.

$a_{n+1} = qa_n, n = 1, 2$ $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Eine GF ist eindeutig beschrieben durch zwei Grössen, entweder:

- durch ein beliebiges Glied a_n und den Quotienten q
- durch zwei beliebige Glieder a_n und a_{n+k}

3.3 Rechnen mit Folgen, Eigenschaften

- Folge (a_n) multipliziert man mit einer reellen Zahl λ, indem man jedes Glied der Folge mit dieser Zahl multipliziert:

  $\lambda(a_n) = (\lambda a_n)$

- Zwei Folgen (a_n) und (b_n) addiert man, indem man entsprechende Glieder addiert:

  $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$

- Eine Folge heisst **konstante Folge**, falls $a_n = c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$
  AF ist konstant wenn $d = 0$,
  GF ist konstant wenn $q = 1$

- Eine Folge (a_n) ist **streng monoton zunehmend/abnehmend** falls $(a_{n+1} > a_n)$ bzw $(a_{n+1} < a_n)$

- Eine Folge (a_n) ist **beschränkt** (höhö) falls eine positive Zahl c existiert mit $|a_n| \leq c, \forall n$: alle Glieder der Folge liegen im Graphen unter einem Teppich der Breite $2c$. Anderfalls heisst die Folge (a_n) **unbeschränkt**

Chapter 4

Grenzwerte und Stetigkeit

4.1 Grenzwert

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ oder $f(x) \to L$, falls $x \to a$.

4.1.1 Linksseitiger Grenzwert

$\lim_{x\to a^-} f(x)$

4.1.2 Rechtsseitiger Grenzwert

$\lim_{x\to a^+} f(x)$

4.1.3 Zweiseitiger Grenzwert

Der zweiseitige Grenzwert existiert genau dann, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert exisitieren und diese gleich sind:

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ genau dann, wenn $\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$

4.1.4 Uneigentliche Grenzwerte

Grenzwert wächst bis über alle Grenzen wenn man x gegen a gehen lässt:

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

4.1.5 Grundlegende Grenzwerte Theorem

$\lim_{x\to a} k = k$

$\lim_{x\to a} x = a$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

4.1.6 Rechnen mit Grenzwerten

Theorem Summe

Falls $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ und

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$ dann gilt:

Der GW einer Summe/Differenz ist gleich der Summe/Differenz der GWs; Konstanten kommen vor den GW:

$$\lim_{x \to a} [\mu f(x) \pm \nu g(x)] = \mu \lim_{x \to a} f(x) \pm \nu \lim_{x \to a} g(x) = \mu L_1 \pm \nu L_2$$

Theorem Produkt

Der GW eines Produkts ist gleich dem Produkt der GWs:

$$\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) = L_1 L_2$$

Theorem Quotient

Ist $L_2 \neq 0$ und g in einer Umgebung von a verschieden von 0, dann ist der **GW des Quotienten gleich dem Quotienten der GWs:**

$$\lim_{x \to a} [\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

Siehe 4.3.3 GW Quotient für Beispiel.

Folgerungen Exponent

$$\lim_{x \to a} x^n = (\lim_{x \to a} x)^n = a^n \qquad \lim_{x \to a} [f(x)]^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n$$

Folgerungen Polynom

Für ein Polynom $p(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k x^k$ gilt:

$$\lim_{x \to a} p(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n = p(a)$$

Siehe 4.3.2 GW Polynom für Beispiel.

Folgerungen Quotient

Für eine rationale Funktion $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (dabei sind $p(x)$ und $q(x)$ Polynome) und eine $a \in \mathbb{R}$ gilt:
(a) Falls $q(a) \neq 0$, dann ist $\lim\limits_{x \to a} r(x) = r(a)$
(b) Falls $q(a) = 0$ und $p(a) \neq 0$, dann existiert $\lim\limits_{x \to a} r(x)$ nicht.
(c) Falls $q(a) = 0$ und $p(a) = 0$, dann kann der GW existieren, muss aber nicht! Siehe 4.3.3 GW Quotient für Beispiel.

4.1.7 Squeezing-Theorem

Gilt für drei Funktionen f, g und h in einer Umgebung von c (evt. mit Ausnahme von c)

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ und $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = L$

dann gilt auch $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

4.2 Stetigkeit

Salopp: Eine Funktion f heisst stetig, wenn man deren Graphen zeichnen kann, ohne den Stift absetzen zu müssen.

Genauer ist eine Funktion f stetig in a, falls:

- Die Funktion f dort existiert, d.h. falls $f(a)$ definiert ist.
- Links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und gleich sind

  $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$
- Die genannten Grenzwerte mit dem Funktionswert übereinstimmen.

Zusammengefasst: f ist stetig in a, falls

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Eine Funktion heisst stetig, falls sie überall, d.h. $\forall x \in D(f)$ stetig ist.

4.2.1 Grenzwert einer Funktion von x - Theorem

Sei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Gilt dann $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$ und ist f im Punkt L stetig, dann gilt:

$\lim\limits_{x \to c} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x \to c} g(x))$

Insbesondere gilt zB

$\lim\limits_{x \to c} |g(x)| = |(\lim\limits_{x \to c} g(x)|$

falls $\lim_{x \to c} g(x)$ existiert!

4.2.2 Rechenregeln

- Summe und Differenz stetiger Funktionen sind stetig.
- Der Quotient zweier stetiger Funktionen ist dort stetig, wo der Nenner nicht verschwindet.
- Polynome $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind stetig.
- Rationale Funktionen $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ sind dort stetig, wo das Nennerpolynom $q(x)$ nicht verschwindet.
- Sinus- $(\sin x)$ und Kosinusfunktion $(\cos x)$ sind stetig.
- Der Tangens $(\tan x = \frac{\sin x}{\cos x})$ ist stetig, falls $\cos x \neq 0$, dh falls $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Exponential- und Logarithmusfunktionen sind in ihrem Definitionsbereichen stetig.
- Zusammensetzung stetiger Funktionen ist stetig.
- Eine zusammegesetzte Funktion kann dort unstetig sein, wo eine der verwendeten Funktionen nicht stetig ist.

4.2.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Theorem Zwischenwertsatz

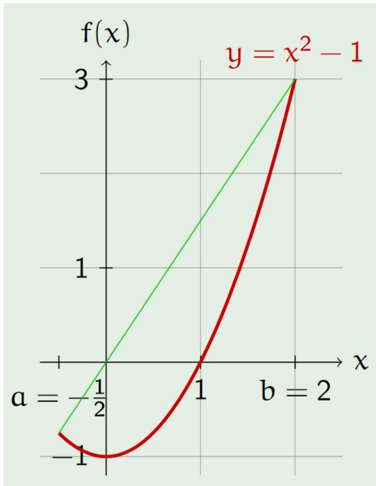
Ist f im Interval $[a, b]$ stetig, dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ (inklusive) mindestens einmal an.

Corollary - Nullstellensatz von Bolzano

Ist f auf $[a, b]$ stetig und gilt $f(a)f(b) < 0$, dann besitzt f in $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle, dh. $\exists x \in [a, b]$ mit $f(x) = 0$
In anderen Worten: Wenn eine Funktion im Bereich $[a, b]$ stetig ist und es vom Intervall a zu b einen Vorzeichenwechsel gibt, dann gibt es mindestens eine Nullstelle.

4.2.4 Regula Falsi

Basierend auf dem Nullstellensatz von Bolzano.



Der Schnittpunkt der Sekante (grün) durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ mit der x-Achse ergibt eine erste Näherung für die Nullstelle (NS) von f:

$x = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

Gilt dann $f(x)f(a) < 0$, dann liegt die NS im Intervall $[a, x]$, sonst in $[b, x]$.
Wiederhole die Prozedur mit dem Intervall welches die NS enthält!

4.3 Beispiele

4.3.1 Geschickt erweitern

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} =$

$\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1) = \lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x} + \lim\limits_{x\to 1} 1 = 1 + 1 = 2$

4.3.2 GW Polynom

$\lim\limits_{x\to 1}(x^7 - 2x^5 + 1)^{35} = (1^7 - 2 \times 1^5 + 1)^{35} = 0$

4.3.3 GW Quotient

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{5x^3+4}{x-3} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} 5x^3+4}{\lim\limits_{x\to 2} x-3}$ und wegen der Regel für Polynome:

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{5x^3+4}{x-3} = \frac{5\times 2^3+4}{2-3} = -44$

Chapter 5

Differentialrechnung I – Tangente und Ableitung

5.1 Die Sekante

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Wobei $\Delta x = x_1 - x_0$ und $\Delta y = y_1 - y_0$

5.1.1 Sekante durch P und Q

$P(x_0|f(x_0)), Q(x_1|f(x_1))$ auf dem Graphen $g(f)$

Steigung der Sekante durch P und Q:

$m = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

Sekantengleichung (Punkt-Richtungs-Form)

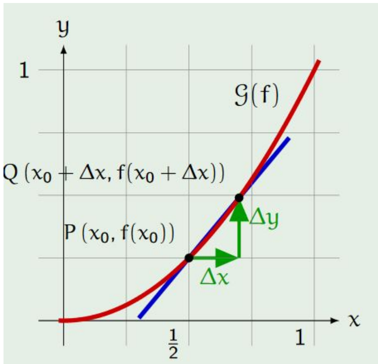
$(y - y_0) = m(x - x_0)$

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = **Differenzquotient von f an der Stelle** x_0

5.2 Tangente und Ableitung

5.2.1 Beispiel Quadratische Funktion

Gegeben die Funktion (rot) $f(x) = x^2$. Gesucht der Differenzquotient von f an der Stelle x_0:



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$

$\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-x_0^2}{\Delta x}$

$\frac{2x_0\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$

Steigung der Sekante : $2x_0 + \Delta x$

Gleichung der Sekante:
$y = x_0^2 + (2x_0 + \Delta x)(x - x_0) = (2x_0 + \Delta x)x - (x_0 + \Delta x)x_0$.

Für die Tangente an der Stelle x_0 geht man mit dem Punkt Q immer näher an Punkt P, bis $\Delta x = 0$ (Weil die Tangente f nur an einer Stelle berührt)

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0 =$ Steigung der Tangente

Damit Gleichung der Tangente an f:

$(y - f(x_0)) = 2x_0(x - x_0)$

$y = f(x_0) + 2x_0(x - x_0) = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = 2x_0x - x_0^2$

5.3 Ableitung der Potenzfunktion

$f(x) = x^n$

$f'(x) = nx^{n-1}$

5.3.1 Beispiel Tangente

Tangente $t(x)$ an der Stelle $P(1, 1)$ an der Kurve $f(x) = x^2$?

$f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

$P(1, 1)$, $P(x_0/f(x_0))$

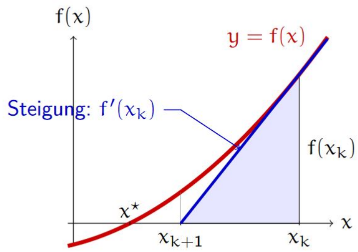
$f'(x_0) = 2x_0 = 2 \times 1 = 2 =$ Steigung Tangente

$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0)$

$= 1 + 2(x - 1) = 1 + 2x - 2 = 2x - 1$

5.3.2 Newton-Raphson Verfahren

Wir wollen die (nichtlineare) Gleichung $f(x) = 0$ lösen, dh wir wollen ein x_* so finden, dass $f(x_*) = 0$. Idee: Starte mit x_0, und berechne den Schnittpunkt x_1 der Tangente durch $(x_0, f(x_0))$ mit der x-Achse. Wiederhole diesen Schritt!



$f'(x_k) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}} = \frac{x_k}{-\Delta x_k}$

Ausgehend von x_0, iterieren wir über $k = 1, 2, ...$

$f'(x_k)\Delta x_k = -f(x_k)$

$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k = x_k - [f'(x_k)]^-1 f(x_k)$

5.4 Einige Ableitungsregeln

5.4.1 Theorem Faktorregel

Falls $f'(x)$ existiert, dann darf ein konstanter Faktor $c \in \mathbb{R}$ vor die Ableitung gezogen werden.

$[c \times f(x)]' = c \times f'(x)$ auch geschrieben als $\frac{d}{dx}[c \times f(x)] = c \times \frac{d}{dx}[f(x)]$

5.4.2 Theorem Produkteregel

Existieren die Ableitungen $u'(x)$ und $v'(x)$, dann gilt für die Ableitungen des Produkts die Regel:

$[u(x) \times v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

auch geschrieben als

$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = \frac{d}{dx}[u(x)]v(x) + u(x) \times \frac{d}{dx}[v(x)]$

5.5 Quotientenregel

Existieren die Ableitungen $u'(x)$ und $v'(x)$, dann gilt für die Ableitungen des Quotienten von $u(x)$ und $v(x) \neq 0$ die Regel:

$[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$ kurz $[\frac{u}{v}]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

auch geschrieben als

$\frac{d}{dx}[\frac{u(x)}{v(x)}] = \frac{\frac{d}{dx}[u(x)]v(x) - u(x)\frac{d}{dx}v(x)}{(v(x))^2}$ kurz $[\frac{u}{v}]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

5.6 Formeln

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Tangenten Gleichung: $t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0)$

Faktorregel: $[c \times f(x)]' = c \times f'(x)$

Produkteregel: $[u(x) \times v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Quotientenregel: $[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$ kurz $[\frac{u}{v}]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

5.6.1 Ableitungen

f(x)	f'(x)
x^n	nx^{n-1}
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
e^x	e^x
e^{3x}	$3e^{3x}$
$c(c \in \mathbb{R})$	0
x	1
$\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$	$\sum_{k=0}^{n} c_k x^{k-1}$