

ANLIS - Spick

Johanna Koch

Contents

1 Grundlagen	7
1.1 Wurzeln	7
1.2 Potenzen	7
1.3 Brüche	8
1.4 Logarithmen	8
1.5 Binome	8
1.5.1 1. Binom	8
1.5.2 2. Binom	8
1.5.3 3. Binom	8
1.6 Quadratische Gleichung	8
1.7 Ableitungen/Integrationen	9
1.8 Vektoren	11
1.9 Beispiele	11
2 WX MAXIMA Cheatsheet	12
2.1 Grundlagen	12
2.1.1 Einfache Operationen	13
2.2 Systemvariablen	13
2.3 Logische Ausdrücke	14
2.4 Summen und Grenzwerte	14
2.5 Differenzieren und Integrieren	15
2.6 Gleichungen	15
2.6.1 Beispiele	16
2.7 Funktionen	16
3 SW01 Funktionen	17
3.1 Lineare Funktion	17
3.2 Polynomfunktion	17
3.3 Quadratische Funktionen	17
3.4 Exponentialfunktion	17
3.5 Logarithmusfunktion	17

4	SW02 Folgen und Reihen	18
4.1	Arithmetische Folgen und Reihen	18
4.1.1	Beispiele von Folgen	18
4.1.2	Summe der Glieder einer AF: Arithmetische Reihe	18
4.1.3	Nützliche andere Formeln	19
4.2	Geometrische Folgen	19
4.3	Geometrische Reihe	19
4.4	Rechnen mit Folgen, Eigenschaften	19
4.5	Folgen Eigenschaften	20
4.5.1	Konvergenz/Divergenz	20
4.5.2	Explizite Folge	20
4.5.3	Rekursive Folge	20
4.5.4	Nullfolge	20
4.5.5	Alternierende Folge	20
5	SW03 Grenzwerte und Stetigkeit	21
5.1	Grenzwert	21
5.1.1	Linksseitiger Grenzwert	21
5.1.2	Rechtsseitiger Grenzwert	21
5.1.3	Zweiseitiger Grenzwert	21
5.1.4	Uneigentliche Grenzwerte	21
5.1.5	Grundlegende Grenzwerte Theorem	21
5.1.6	Rechnen mit Grenzwerten	22
5.1.7	Squeezing-Theorem	23
5.2	Epsilon	23
5.3	Stetigkeit	23
5.3.1	Grenzwert einer Funktion von x - Theorem	24
5.3.2	Rechenregeln	24
5.3.3	Eigenschaften stetiger Funktionen	24
5.3.4	Regula Falsi	25
5.4	Beispiele	25
5.4.1	Geschickt erweitern	25
5.4.2	GW Polynom	25
5.4.3	GW Quotient	25
6	SW04 Differentialrechnung I – Tangente und Ableitung	26
6.1	Die Sekante	26
6.1.1	Sekante durch P und Q	26
6.2	Tangente und Ableitung	26
6.2.1	Beispiel Quadratische Funktion	26
6.3	Ableitung der Potenzfunktion	27
6.3.1	Beispiel Tangente	27
6.3.2	Newton-Raphson Verfahren	27
6.4	Einige Ableitungsregeln	28
6.4.1	Theorem Faktorregel	28
6.4.2	Theorem Produktregel	28

6.5	Quotientenregel	28
6.6	Formeln	28
6.6.1	Ableitungen	29
7	SW05 Differentialrechnung II — Kettenregel	30
7.1	Einseitige Ableitung	30
7.2	Kettenregel	30
7.3	Umkehrfunktion	30
7.4	Ableitung Logarithmus	31
7.5	Ableitung Wurzel	31
7.6	Ableitungen Arkusfunktionen	31
7.7	Ableitungen Areafunktionen	31
8	SW06 Differentialrechnung III – Differential, höhere Ableitungen	32
8.1	Implizite Ableitung	32
8.1.1	Beispiel	32
8.1.2	y nach x	33
8.2	Differential	33
8.2.1	Beispiel Differential	34
8.2.2	Rechenregeln für Differentiale	34
8.3	Monotonie	34
8.3.1	Lokale oder relative Extrema	35
8.4	Höhere Ableitungen	35
8.5	Krümmung	35
9	SW07 Differentialrechnung IV – Kurvendiskussion, Optimierung	36
9.1	Parameterdarstellung von Kurven	36
9.1.1	Beispiel	36
9.1.2	Ableitung eines Vektors	37
9.1.3	Ableitung einer in Parameterform gegebenen Funktion	37
9.1.4	Krümmungskreismittelpunkt	37
9.2	Kurven in Polarkoordinaten	38
9.2.1	Ableitung einer in Polarkoordinaten gegebene Funktion	38
9.3	Kurvendiskussion	39
9.3.1	Symmetrien Beispiele	39
9.3.2	Wende- und Sattelpunkte	40
9.3.3	Beispiel	40
9.4	Optimierungsproblem – Allgemeines Vorgehen	41
9.4.1	Brechungsgesetz	41
9.5	Regel von de l'Hôpital	41
9.5.1	Theorem – Regel von de l'Hôpital für unbestimmte Ausdrücke der Form $0/0$	41
9.5.2	Vorgehen	41
9.5.3	Vorgehen für weitere unbestimmte Ausdrücke	42

10 SW08 Integralrechnung I – Flächenberechnung und Integral	43
10.1 Stammfunktion	43
10.2 Umkehrung der Differentiation	43
10.3 Bestimmtes Integral Flächenberechnung	44
10.3.1 Beispiel Rechter Rand	44
10.3.2 Beispiel Linker Rand	44
10.4 Summen vereinfachen	45
11 SW09 Integralrechnung II – unbestimmtes Integral und Hauptsatz der Infinitesimalrechnung	46
11.1 Unbestimmtes Integral und Flächenfunktion	46
11.1.1 Theorem - unbestimmte Integrale	46
11.1.2 Beispiel	47
11.2 Delta x ändern	47
11.3 Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung Theorem . .	47
11.3.1 Beispiele	48
11.4 Berechnung bestimmter Integrale mit Stammfunktion	48
11.4.1 Beispiel	48
11.5 1. Substitutionsregel für unbestimmte Integrale - Theorem	49
11.5.1 Beispiele	49
11.6 1. Substitutionsregel für bestimmte Integrale - Theorem	49
11.6.1 Beispiele	50
12 SW10 Integralrechnung III – Integrationstechnik	51
12.1 2. Substitutionsregel	51
12.1.1 Theorem - 2. Substitutionsregel für unbestimmte Integrale .	51
12.1.2 Beispiele	52
12.1.3 Theorem - 2. Substitutionsregel für bestimmte Integrale . .	52
12.1.4 Beispiele	53
12.2 Häufige Integralsubstitutionen	54
12.3 Theorem - Partielle Integration - Produktintegration	55
12.3.1 Beispiel	56
12.3.2 Rekursionsbeziehung - Beispiel	56
12.3.3 Nur einen Faktor - Beispiel	57
12.3.4 Mehrfache partielle Integration - Beispiel	57
12.4 Theorem - Produktintegration für bestimmte Integrale	57
12.4.1 Beispiele	57
12.5 Mittelwerte	58
12.5.1 Theorem - lineare Mittelwert	58
12.5.2 Beispiel	58
12.5.3 Theorem - quadratische Mittelwert	59
12.5.4 Theorem - Mittelwertsatz der Integralrechnung	59

13 SW11 Integralrechnung IV– Anwendungen	60
13.1 Trapezregel	60
13.2 Trapezregel - kurz	60
13.2.1 Beispiel	61
13.3 Simpsonregel - kurz	61
13.3.1 Beispiel	61
13.4 Definition Bogenlänge	61
13.4.1 Beispiel	62
13.5 Kurven in Polarform	62
13.5.1 Beispiel	62
13.6 Kurven in Parameterform	62
13.7 Beispiel	63
14 SW12 Potenz- und Taylor-Reihen	64
14.1 Potenzreihe - Definition	64
14.1.1 Theorem - Konvergenzradius	64
14.2 Definition Taylor-Polynom	65
14.2.1 Beispiel 1	65
14.2.2 Beispiel 2	66
14.3 Definition - Taylor-Reihe	66
14.4 Definition - Restglied nach Lagrange	66
14.4.1 Theorem - Konvergenz von Taylor-Reihen	67
14.5 Definition Binomial-Reihe	67
14.5.1 Beispiel	67
14.6 Rechnen mit Potenzreihen	68
14.6.1 Beispiel - addieren, subtrahieren	68
14.6.2 Beispiel - differenzieren, integrieren	68
15 SW13 Mehrdimensionale Differentialrechnung I	69
15.1 Multivariate Funktionen	69
15.2 Konturlinie	69
15.2.1 Beispiel	69
15.3 Partielle Ableitung	70
15.3.1 Definition	70
15.3.2 Beispiel 1	71
15.3.3 Beispiel 2	71
15.3.4 Beispiel 3	71
15.4 Definition - Der Gradient	71
15.4.1 Beispiel 1	71
15.4.2 Beispiel 2	72
15.4.3 Eigenschaften des Gradienten	72
15.5 Richtungsableitung	73
15.5.1 Beispiel mit Richtungsvektor	73
15.5.2 Beispiel ohne Richtungsvektor	73
15.6 Richtungsableitung und Gradient	74
15.6.1 Beispiel	74

16 SW14 Mehrdimensionale Differentialrechnung II	76
16.1 Totales Differential	76
16.2 Linearisierung von Funktionen	76
16.2.1 ...mit einer Variable	76
16.2.2 ...mit mehreren Variablen	76
16.3 Tangente an die Konturlinie	77
16.4 Tangentialebene an die Konturfläche	77
16.5 Newton-Raphson Methode	77
16.6 Mehrdimensionale Newton-Raphson Methode	77
16.7 Kettenregel	78
16.7.1 Beispiel	78
16.8 Kettenregel mit Abhängigkeitsgraphen	78
16.8.1 Beispiel	79
16.9 Kritische Punkte Beispiel	79
16.10 Partielle Ableitungen zweiter Ordnung	80
16.10.1 Beispiel	80
16.11 Klassifikation kritischer Punkte - Theorem	80
16.11.1 Beispiel	81

Chapter 1

Grundlagen

1.1 Wurzeln

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

$$\sqrt{a^2 \times b} = a \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt[b]{a^b} = (a^b)^{\frac{1}{b}} = a$$

$$\sqrt[a]{x^b} = x^{\frac{b}{a}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-\frac{1}{n}}$$

1.2 Potenzen

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$

$$x^{ab} = x^{a \times b}$$

$$\frac{a}{bx^{-c}} = \frac{a}{b} x^{-c}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$\frac{a^x}{a^{x+1}} = \frac{1}{a}$$

1.3 Brüche

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{1}{5}x$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = \frac{ad-cb}{bd}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$$

$$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$\frac{4}{3}x^{-4} = \frac{4}{3x^4}$$

$$\frac{x^4}{9} = \frac{1}{9}x^4$$

1.4 Logarithmen

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$$

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

$$\log_b(x^y) = y \log_b(x)$$

1.5 Binome

1.5.1 1. Binom

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

1.5.2 2. Binom

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

1.5.3 3. Binom

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

1.6 Quadratische Gleichung

Für:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dann:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.7 Ableitungen/Integrationen

Wenn integrieren, $+C$ nicht vergessen!

$f(x)$	$f'(x)$
x	1
x^a	ax^{a-1}
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	x^a
$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$	$\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}, a \neq -1$
e^x	e^x
a^x	$(\ln(a))a^x (a < 0)$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x
$\ln(x) - x$	$\ln x$
$\ln x $	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
$a \times \ln(x)$	$\frac{a}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$-\cot x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} +$
$-\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$-\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 + \tanh^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

* falls $x \in (-1, 1)$

1.8 Vektoren

Länge eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Einheitsvektor \vec{a}_0 aus $\vec{a} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$:

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

1.9 Beispiele

$$\frac{2}{3\sqrt[4]{x^5}} = \frac{2}{3x^{-\frac{5}{4}}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{4}}$$

Chapter 2

WX MAXIMA Cheatsheet

Mehrzeilige Eingabe mit Enter. Shift-Enter um auszurechnen.

2.1 Grundlagen

$a+b, a-b, a*b, a/b$	Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
$a**b$	Potenzierung
$\text{sqrt}(x), \text{exp}(x), \text{log}(x)$	Wurzel, Exponentialfunktion, natürlicher Logarithmus
$\sin(x), \cos(x), \tan(x)$	Winkelfunktionen
$\text{asin}(x), \text{acos}(x), \text{atan}(x)$	Arkusfunktionen
$\text{float}(x)$	Umwandlung aller Zahlen im Ausdruck x in Gleitkommazahlen
$\text{floor}(x), \text{round}(x)$	Abschneiden und Runden
$\%pi, \%e, \%i$	Pi, Eulersche Zahl und imaginäre Einheit

2.1.1 Einfache Operationen

a:b	Zuweisung; der Wert von b wird dem Symbol a zugewiesen.
kill(a)	a löschen
values	Liste aller mit einem Wert belegten Benutzervariablen
kill(x1,x2,. . .)	Löschen der Variablen x1, x2, . . .
ev(expr,opts)	Auswerten des Ausdrucks expr mit den optionalen Parametern opts
expr,opts	Verkürzte Form des Auswertebefehls. Optionen:var=val. . . Einsetzen eines Werteseval. . . . nochmaliges Auswerteninfeval. . . wiederholtes Auswertennumer. . . Gleitkommadarstellung
xthru(expr)	Auf gleichen Nenner bringen
ratsimp(expr)	Vereinfachen und auf gleichen Nenner bringen
expand(expr)	Expandieren (Ausmultiplizieren)
map(expand,expr)	Zähler und Nenner getrennt expandieren
num(expr),denom(expr)	Zähler bzw. Nenner von expr

2.2 Systemvariablen

fpprintprec	Anzahl der signifikanten Stellen bei der Ausgabe vonGleitkommazahlen
float	Umwandlung aller Zahlen in Gleitkom- mazahlen(Default:false)
numer	Wiefloat, veranlasst zusätzlich mathematischeFunktionen zur Auswertung in Gleitkom- madarstellung(Default:false)

2.3 Logische Ausdrücke

true,false	Logische Konstantenwahrundfalsch
=,#,i,i=,i,i=	Vergleichsoperatorengleich, ungleich, kleiner, kleinergleich, größer, größer gleich
and,or,not	Logische Operatoren und, oder, nicht
equal(a,b)	Überprüfung, ob die beiden Ausdrücke a und b denselben Wert ergeben
is(expr)	Auswerten des Vergleichsausdrucks expr zu true, false oder unknown

2.4 Summen und Grenzwerte

inf,minf	Symbole für unendlich und negativ unendlich
sum(expr,i,i0,i1)	Summe $\sum_{i=i0}^{i1} expr$
limit(expr,i,i0)	Grenzwert $\lim_{i \rightarrow i0} expr$
simpsum	Systemvariable, veranlasst die Berechnung von Summen mit symbolischen Indexgrenzen (zB inf) (Default:false)
Beispiel	sum(1/n**2,n,1,inf),simpsum=true;

2.5 Differenzieren und Integrieren

<code>diff(expr,x[,n])</code>	n-te Ableitung des Ausdrucks <code>expr</code> nach der Variablen <code>x</code> ; die Angabe von <code>n</code> ist optional, Default: 1.
<code>integrate(expr,x)</code>	Unbestimmtes Integral des Ausdrucks <code>expr</code> mit der Integrationsvariablen <code>x</code>
<code>integrate(expr,x,x0,x1)</code>	Bestimmtes Integral des Ausdrucks <code>expr</code> mit der Integrationsvariablen <code>x</code> zwischen den Grenzen <code>x0</code> und <code>x1</code>

2.6 Gleichungen

<code>solve(eqn,var)</code>	Lösen der algebraischen Gleichung <code>eqn</code> nach der Variablen <code>var</code>
<code>solve(eqns,vars)</code>	Lösen einer Liste <code>eqns</code> von algebraischen Gleichungen nach den Variablen in der Liste <code>vars</code>
<code>allroots(p)</code>	Numerische Berechnung aller Nullstellen des Polynoms <code>p</code>
<code>find_root(expr,x1,x2)</code>	Numerische Ermittlung einer Nullstelle des Ausdrucks <code>expr</code> innerhalb des Intervalls <code>x1...x2</code>

2.6.1 Beispiele

Eine quadratische Gleichung liefert zwei Lösungen.	<pre>(%i81) res1:solve((x+5)/(x^2-a)=2,x);</pre> <pre>(%o81) [x = -\frac{\sqrt{16a+41}-1}{4}, x = \frac{\sqrt{16a+41}+1}{4}]</pre>
Um eine Lösung als Wert zu erhalten, ist die entsprechende Variable mit dem Befehl ev und der Angabe der Lösung auszuwerten.	<pre>(%i82) ev(x,res1);</pre> <pre>(%o82) -\frac{\sqrt{16a+41}-1}{4}</pre>
Zwei lineare Gleichungen in zwei Variablen	<pre>(%i83) g1:2*x+y=3;</pre> <pre>(%o83) y+2 x=3</pre> <pre>(%i84) g2:2*x-4*y=5;</pre> <pre>(%o84) 2 x-4 y=5</pre>
Die Lösung für beide Variablen wird in einer doppelt geschachtelten Liste zurückgeliefert.	<pre>(%i85) res2:solve([g1,g2],[x,y]);</pre> <pre>(%o85) [[x = \frac{17}{10}, y = -\frac{2}{5}]]</pre>
Zugriff auf eine Lösungsvariable mit der Anweisung ev:	<pre>(%i86) ev(x,res2);</pre> <pre>(%o86) \frac{17}{10}</pre>
Quadratische Gleichung in zwei Variablen:	<pre>(%i87) g1:2*x^2+x-y^2=1;</pre> <pre>(%o87) -y^2+2 x^2+x=1</pre>
Auch für nichtlineare Gleichungssysteme können Lösungen gefunden werden.	<pre>(%i88) res3:solve([g1,g2],[x,y]);</pre> <pre>(%o88) [[x = -\frac{4\sqrt{23}+9}{14}, y = -\frac{\sqrt{23}+11}{7}], [x = \frac{4\sqrt{23}-9}{14}, y = \frac{\sqrt{23}-11}{7}]]</pre>
Für ein Polynom 5. Ordnung kann solve keine Nullstellen ermitteln.	<pre>(%i89) res4:solve(x^5-x^3+2*x^2+5*x-1=0,x);</pre> <pre>(%o89) [0 = x^5 - x^3 + 2 x^2 + 5 x - 1]</pre>
Numerische Berechnung der Nullstellen eines Polynoms:	<pre>(%i90) res5:allroots(x^5-x^3+2*x^2+5*x-1);</pre> <pre>(%o90) [x=0.187, x=0.719 %i -1.2334, x=-0.719 %i -1.2334, x=1.1496 %i +1.1398, x=1.1398 -1.1496 %i]</pre>
Berechnung einer Nullstelle einer transzendenten Funktion innerhalb eines Intervalls:	<pre>(%i91) res6:find_root(exp(-x)=x,x,0,10);</pre> <pre>(%o91) 0.567</pre>

2.7 Funktionen

$f(x_1, x_2, \dots) := \text{expr}$

Chapter 3

SW01 Funktionen

3.1 Lineare Funktion

$$f(x) = ax + b$$

a = Steigung

3.2 Polynomfunktion

Grad der Funktion: Höchster Exponent von x.

Nullstellen: Maximal so viele wie der Grad der Funktion.

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \dots$$

3.3 Quadratische Funktionen

Polynomfunktion zweites Grades

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

3.4 Exponentialfunktion

$$f(x) = a \times b^x$$

3.5 Logarithmusfunktion

Umkehrfunktion von Exponentialfunktion

$$f(x) = \log_b(x)$$

Chapter 4

SW02 Folgen und Reihen

4.1 Arithmetische Folgen und Reihen

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$
$$(a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Differenz d zweier beliebiger aufeinanderfolgender Glieder a_n, a_{n+1} ist konstant.

Eine AF ist eindeutig beschrieben durch zwei Grössen:

- beliebiges Glied a_n und Differenz d
- zwei beliebige Glieder a_n und a_{n+k}

Bildungsgesetz: Funktionsvorschrift nach welcher aus n das n -Glieder (a_n) berechnet werden kann.

4.1.1 Beispiele von Folgen

$$(a_n) = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots \text{ Bildungsgesetz: } a_n = -\frac{1}{2^n}$$

$$(a_n) = 1^3, 2^3, 3^3, \dots \text{ Bildungsgesetz: } a_n = n^3$$

$$(a_n) = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \text{ Bildungsgesetz: } a_n = \frac{n-1}{n}$$

4.1.2 Summe der Glieder einer AF: Arithmetische Reihe

$$\sum_{k=1}^n a_k = na_1 + d \frac{n(n-1)}{2} = n \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Wobei bei " $n \frac{a_1 + a_n}{2}$ " a_1 das erste Glied ist, a_n das letzte, n die Anzahl Glieder und 2 den Mittelwert vom ersten und letzten Glied bildet.

4.1.3 Nützliche andere Formeln

Gegeben: $a_n = v$, $a_{n+x} = z$

Gesucht d : $d = \frac{z-v}{(n+x)-n}$

4.2 Geometrische Folgen

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Die geometrische Folge ist dadurch charakterisiert, dass der Quotient q zweier beliebiger aufeinanderfolgender Glieder a_n und a_{n+1} konstant ist.

$$a_{n+1} = qa_n, n = 1, 2$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Eine GF ist eindeutig beschrieben durch zwei Grössen, entweder:

- durch ein beliebiges Glied a_n und den Quotienten q
- durch zwei beliebige Glieder a_n und a_{n+k}

4.3 Geometrische Reihe

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

4.4 Rechnen mit Folgen, Eigenschaften

- Folge (a_n) multipliziert man mit einer reellen Zahl λ , indem man jedes Glied der Folge mit dieser Zahl multipliziert:

$$\lambda(a_n) = (\lambda a_n)$$

- Zwei Folgen (a_n) und (b_n) addiert man, indem man entsprechende Glieder addiert:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$

- Eine Folge heisst **konstante Folge**, falls $a_n = c \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$
AF ist konstant wenn $d = 0$,
GF ist konstant wenn $q = 1$
- Eine Folge (a_n) ist **streng monoton zunehmend/abnehmend** falls $(a_{n+1} > a_n)$ bzw $(a_{n+1} < a_n)$
- Eine Folge (a_n) ist **beschränkt** (höhö) falls eine positive Zahl c existiert mit $|a_n| \leq c, \forall n$: alle Glieder der Folge liegen im Graphen unter einem Teppich der Breite $2c$. Anderfalls heisst die Folge (a_n) **unbeschränkt**

4.5 Folgen Eigenschaften

4.5.1 Konvergenz/Divergenz

Folge ist **konvergent**, wenn sie einen Grenzwert besitzt. Folge ist **divergent**, wenn es keinen Grenzwert gibt.

4.5.2 Explizite Folge

Beispiel: $(a_n)_n = (\frac{1}{n})_n$
 a_n für den Wert direkt erkennbar.

4.5.3 Rekursive Folge

Beispiel: $a_{n+1} = a_n + a_{n+1}$
 a_n ergibt sich aus den vorherigen Glieder der Rekursionsvorschrift.

4.5.4 Nullfolge

Folge konvergiert zum Grenzwert 0.

4.5.5 Alternierende Folge

Beinhaltet etwas in der Art $(-1)^n$. Fallunterscheidung machen für GW, weil wenn n gerade, dann Folgenglied positiv, wenn n ungerade, dann Folgenglied negativ.

Chapter 5

SW03 Grenzwerte und Stetigkeit

5.1 Grenzwert

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ oder $f(x) \rightarrow L$, falls $x \rightarrow a$.

5.1.1 Linksseitiger Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

5.1.2 Rechtsseitiger Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

5.1.3 Zweiseitiger Grenzwert

Der zweiseitige Grenzwert existiert genau dann, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und diese gleich sind:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ genau dann, wenn } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

5.1.4 Uneigentliche Grenzwerte

Grenzwert wächst bis über alle Grenzen wenn man x gegen a gehen lässt:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

5.1.5 Grundlegende Grenzwerte Theorem

$$\lim_{x \rightarrow a} k = k$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

5.1.6 Rechnen mit Grenzwerten

Theorem Summe

Falls $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ und

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ dann gilt:

Der GW einer Summe/Differenz ist gleich der Summe/Differenz der GWs; Konstanten kommen vor den GW:

$$\lim_{x \rightarrow a} [\mu f(x) \pm \nu g(x)] = \mu \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \nu \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \mu L_1 \pm \nu L_2$$

Theorem Produkt

Der GW eines Produkts ist gleich dem Produkt der GWs:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 L_2$$

Theorem Quotient

Ist $L_2 \neq 0$ und g in einer Umgebung von a verschieden von 0, dann ist der **GW des Quotienten gleich dem Quotienten der GWs:**

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

Siehe 5.4.3 GW Quotient für Beispiel.

Folgerungen Exponent

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} x \right)^n = a^n \qquad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$$

Folgerungen Polynom

Für ein Polynom $p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n = \sum_{k=0}^n c_kx^k$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = c_0 + c_1a + \dots + c_na^n = p(a)$$

Siehe 5.4.2 GW Polynom für Beispiel.

Folgerungen Quotient

Für eine rationale Funktion $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (dabei sind $p(x)$ und $q(x)$ Polynome) und eine $a \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) Falls $q(a) \neq 0$, dann ist $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = r(a)$
- (b) Falls $q(a) = 0$ und $p(a) \neq 0$, dann existiert $\lim_{x \rightarrow a} r(x)$ nicht.
- (c) Falls $q(a) = 0$ und $p(a) = 0$, dann kann der GW existieren, muss aber nicht!
Siehe 5.4.3 GW Quotient für Beispiel.

5.1.7 Squeezing-Theorem

Gilt für drei Funktionen f , g und h in einer Umgebung von c (evt. mit Ausnahme von c)

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ und } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$

dann gilt auch $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

5.2 Epsilon

$$|a_n - g| < \epsilon$$

a_n : Folgenglied

g : Grenzwert

ϵ : Abweichung von Folgenglied zu Grenzwert.

$$g - \epsilon < a_n < g + \epsilon$$

5.3 Stetigkeit

Salopp: Eine Funktion f heisst stetig, wenn man deren Graphen zeichnen kann, ohne den Stift absetzen zu müssen.

Genauer ist eine Funktion f stetig in a , falls:

- Die Funktion f dort existiert, d.h. falls $f(a)$ definiert ist.
- Links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und gleich sind

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

- Die genannten Grenzwerte mit dem Funktionswert übereinstimmen.

Zusammengefasst: f ist stetig in a , falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Eine Funktion heisst stetig, falls sie überall, d.h. $\forall x \in D(f)$ stetig ist.

5.3.1 Grenzwert einer Funktion von x - Theorem

Sei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Gilt dann $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ und ist f im Punkt L stetig, dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow c} g(x))$$

Insbesondere gilt zB

$$\lim_{x \rightarrow c} |g(x)| = |(\lim_{x \rightarrow c} g(x))|$$

falls $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ existiert!

5.3.2 Rechenregeln

- Summe und Differenz stetiger Funktionen sind stetig.
- Der Quotient zweier stetiger Funktionen ist dort stetig, wo der Nenner nicht verschwindet.
- Polynome $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ sind stetig.
- Rationale Funktionen $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ sind dort stetig, wo das Nennerpolynom $q(x)$ nicht verschwindet.
- Sinus- ($\sin x$) und Kosinusfunktion ($\cos x$) sind stetig.
- Der Tangens ($\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$) ist stetig, falls $\cos x \neq 0$, dh falls $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Exponential- und Logarithmusfunktionen sind in ihrem Definitionsbereichen stetig.
- Zusammensetzung stetiger Funktionen ist stetig.
- Eine zusammengesetzte Funktion kann dort unstetig sein, wo eine der verwendeten Funktionen nicht stetig ist.

5.3.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Theorem Zwischenwertsatz

Ist f im Intervall $[a, b]$ stetig, dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ (inklusive) mindestens einmal an.

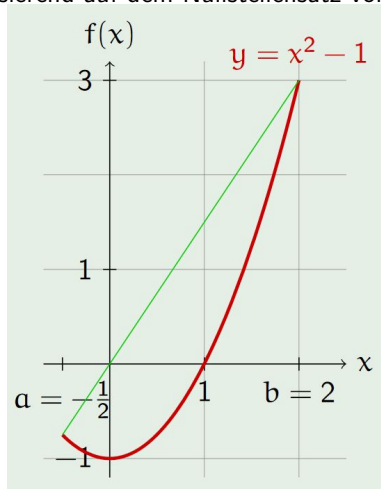
Corollary - Nullstellensatz von Bolzano

Ist f auf $[a, b]$ stetig und gilt $f(a)f(b) < 0$, dann besitzt f in $[a, b]$ wenigstens eine Nullstelle, dh. $\exists x \in [a, b]$ mit $f(x) = 0$

In anderen Worten: Wenn eine Funktion im Bereich $[a, b]$ stetig ist und es vom Intervall a zu b einen Vorzeichenwechsel gibt, dann gibt es mindestens eine Nullstelle.

5.3.4 Regula Falsi

Basierend auf dem Nullstellensatz von Bolzano.



Der Schnittpunkt der Sekante (grün) durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ mit der x-Achse ergibt eine erste Näherung für die Nullstelle (NS) von f :

$$x = a - f(a) \frac{b-a}{f(b)-f(a)} = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

Gilt dann $f(x)f(a) < 0$, dann liegt die NS im Intervall $[a, x]$, sonst in $[b, x]$.

Wiederhole die Prozedur mit dem Intervall welches die NS enthält!

5.4 Beispiele

5.4.1 Geschickt erweitern

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1 + 1 = 2$$

5.4.2 GW Polynom

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^7 - 2x^5 + 1)^{35} = (1^7 - 2 \times 1^5 + 1)^{35} = 0$$

5.4.3 GW Quotient

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3+4}{x-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 5x^3+4}{\lim_{x \rightarrow 2} x-3} \text{ und wegen der Regel für Polynome:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3+4}{x-3} = \frac{5 \times 2^3 + 4}{2-3} = -44$$

Chapter 6

SW04

Differentialrechnung I – Tangente und Ableitung

6.1 Die Sekante

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Wobei $\Delta x = x_1 - x_0$ und $\Delta y = y_1 - y_0$

6.1.1 Sekante durch P und Q

$P(x_0|f(x_0)), Q(x_1|f(x_1))$ auf dem Graphen $g(f)$

Steigung der Sekante durch P und Q:

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Sekantengleichung (Punkt-Richtungs-Form)

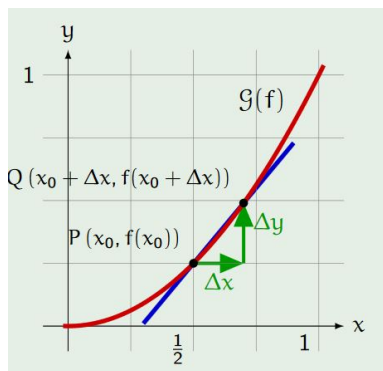
$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{Differenzquotient von } f \text{ an der Stelle } x_0$

6.2 Tangente und Ableitung

6.2.1 Beispiel Quadratische Funktion

Gegeben die Funktion (rot) $f(x) = x^2$. Gesucht der Differenzquotient von f an der Stelle x_0 :



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

Steigung der Sekante : $2x_0 + \Delta x$

Gleichung der Sekante:

$$y = x_0^2 + (2x_0 + \Delta x)(x - x_0) = (2x_0 + \Delta x)x - (x_0 + \Delta x)x_0.$$

Für die Tangente an der Stelle x_0 geht man mit dem Punkt Q immer näher an Punkt P, bis $\Delta x = 0$ (Weil die Tangente f nur an einer Stelle berührt)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0 = \text{Steigung der Tangente}$$

Damit Gleichung der Tangente an f:

$$(y - f(x_0)) = 2x_0(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + 2x_0(x - x_0) = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = 2x_0x - x_0^2$$

6.3 Ableitung der Potenzfunktion

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

6.3.1 Beispiel Tangente

Tangente $t(x)$ an der Stelle $P(1, 1)$ an der Kurve $f(x) = x^2$?

$$f(x) = x^2, f'(x) = 2x$$

$$P(1, 1), P(x_0/f(x_0))$$

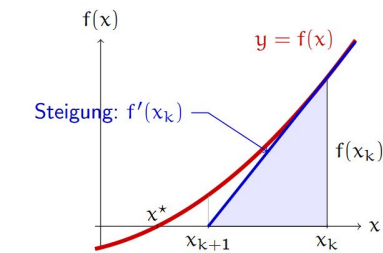
$$f'(x_0) = 2x_0 = 2 \times 1 = 2 = \text{Steigung Tangente}$$

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0)$$

$$= 1 + 2(x - 1) = 1 + 2x - 2 = 2x - 1$$

6.3.2 Newton-Raphson Verfahren

Wir wollen die (nichtlineare) Gleichung $f(x) = 0$ lösen, dh wir wollen ein x_* so finden, dass $f(x_*) = 0$. Idee: Starte mit x_0 , und berechne den Schnittpunkt x_1 der Tangente durch $(x_0, f(x_0))$ mit der x-Achse. Wiederhole diesen Schritt!



$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}} = \frac{f(x_k)}{-\Delta x_k}$$

Ausgehend von x_0 , iterieren wir über $k = 1, 2, \dots$

$$f'(x_k) \Delta x_k = -f(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k = x_k - [f'(x_k)]^{-1} f(x_k)$$

6.4 Einige Ableitungsregeln

6.4.1 Theorem Faktorregel

Falls $f'(x)$ existiert, dann darf ein konstanter Faktor $c \in \mathbb{R}$ vor die Ableitung gezogen werden.

$$[c \times f(x)]' = c \times f'(x) \text{ auch geschrieben als } \frac{d}{dx}[c \times f(x)] = c \times \frac{d}{dx}[f(x)]$$

6.4.2 Theorem Produktregel

Existieren die Ableitungen $u'(x)$ und $v'(x)$, dann gilt für die Ableitungen des Produkts die Regel:

$$[u(x) \times v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

auch geschrieben als

$$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = \frac{d}{dx}[u(x)]v(x) + u(x) \times \frac{d}{dx}[v(x)]$$

6.5 Quotientenregel

Existieren die Ableitungen $u'(x)$ und $v'(x)$, dann gilt für die Ableitungen des Quotienten von $u(x)$ und $v(x) \neq 0$ die Regel:

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \text{ kurz } \left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

auch geschrieben als

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{\frac{d}{dx}[u(x)]v(x) - u(x)\frac{d}{dx}[v(x)]}{(v(x))^2} \text{ kurz } \left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

6.6 Formeln

$$\text{Steigung: } m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\text{Tangenten Gleichung: } t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0)$$

Faktorregel: $[c \times f(x)]' = c \times f'(x)$

Produktregel: $[u(x) \times v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Quotientenregel: $[\frac{u(x)}{v(x)}]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$ kurz $[\frac{u}{v}]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

6.6.1 Ableitungen

f(x)	f'(x)
x^n	nx^{n-1}
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
e^x	e^x
e^{3x}	$3e^{3x}$
$c(c \in \mathbb{R})$	0
x	1
$\sum_{k=0}^n c_k x^k$	$\sum_{k=0}^n c_k x^{k-1}$

Chapter 7

SW05

Differentialrechnung II — Kettenregel

7.1 Einseitige Ableitung

Strebt Δx in der Definition der Ableitung von der positiven Seite gegen Null erhält man die **rechtsseitige Ableitung von der f an der Stelle x_0** :

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (\text{analog für die linksseitige Ableitung})$$

7.2 Kettenregel

Auch kombinierbar mit anderen Regeln:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \times g'(x)$$

7.3 Umkehrfunktion

Durch die Abbildung f wird der Punkt x auf $f(x)$ abgebildet. Die Umkehrabbildung f^{-1} bildet diesen Punkt wieder auf x ab, dh. es gilt $f(f^{-1}(x)) = Id(x) = x$ (die identische Abbildung Id bildet x auf x ab.)

Leite $f(f^{-1}(x)) = x$ nach x ab.

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

7.4 Ableitung Logarithmus

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(a \times \ln(x))' = \frac{a}{x}$$

7.5 Ableitung Wurzel

$$(\sqrt[n]{x^m})' = (x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

7.6 Ableitungen Arkusfunktionen

f(x)	f'(x)
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} *$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

* falls $x \in (-1, 1)$

7.7 Ableitungen Areafunktionen

f(x)	f'(x)
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 + \tanh^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Chapter 8

SW06

Differentialrechnung III – Differential, höhere Ableitungen

8.1 Implizite Ableitung

Explizite Form: $y = f(x)$

Man kann für jedes x den Funktionswert berechnen und die Kurve zeichnen.

Implizite Form: $F(x, y) = 0$

Oft ist eine Auflösung nach y nicht möglich. **Leite Gliedweise nach x ab, wobei $y = y(x)$ als Funktion von x betrachtet werden muss und mit der Kettenregel ableiten.**

8.1.1 Beispiel

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

$x^2 + (y(x))^2 - R^2 = 0$ | differenzieren nach x , Achtung: Leite sowohl was links als auch rechts vom "=" ist!!

$$2x + 2y(x) \times y'(x) - 0 = 0$$

$$y'(x) \times y(x) = -x$$

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

8.1.2 y nach x

Kettenregel

$$y^3 = (y(x))^3$$

$$3y(x)^2 y'(x) = 3y^2 y'$$

Produktregel Kettenregel

$$2xy^2 = 2x \times y^2 \mid \text{Produktregel!}$$

$$(2x)' \times y^2 + 2x \times (y^2)' \mid \text{Kettenregel für } (y^2)'$$

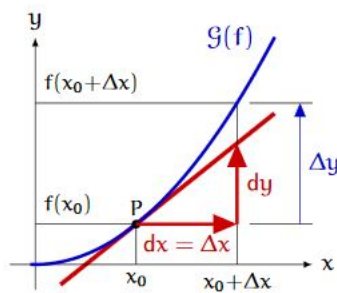
$$(2x)' \times y^2 + 2x \times (2y^2 \times y')$$

$$2y^2 + 2x \times 2yy' = 2y^2 + 4xyy'$$

8.2 Differential

Um wieviel verändert sich die Funktion $y = f(x)$, wenn man sich von x_0 um Δx entfernt?

Es gilt $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$!



Steigung der Tangente (blau) in x_0

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$

Die Symbole dx und dy nennt man **Differentiale**. Das **Differential von f an der Stelle x_0** ist

$$dy = f'(x_0)dx$$

Es gilt also approximativ:

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)dx$$

Statt dy und Δy verwendet man auch die Bezeichnung df und Δf .

- Das Differential $df = dy = f'(x)dx$ der Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x ist gleich der Änderungen des Ordinaten- oder y-Wertes der Tangente durch $P(x, f(x))$, wenn man den Abszissen- oder x-Wert um $dx = \Delta x$ ändert.
- Das Differential dy von $y = f(x)$ an der Stelle x wird verwendet, um die wahre Änderung von Δy zu approximieren

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx$$

Diese Approximation ist umso genauer, je kleiner $dx = \Delta x$ ist.

- Das Differential dy ist gleich der Änderung der an der Stelle x linearisierten Funktion, wenn sich x um $dx = \Delta x$ ändert.

- Für eine lineare Funktion gilt somit $dy = \Delta y$
- Vorteil gegenüber der exakten Änderung: die Berechnung für ein anderes $dx = \Delta x$ ist lediglich eine Multiplikation mit $f'(x)$

8.2.1 Beispiel Differential

Sei $f(x) = x^2 + e^{x-1}$. Um wieviel verändert sich f , wenn x von 1 auf 1.1 erhöht wird?

$$f(x) = x^2 + e^{x-1}$$

$$x_0 = 1, x_1 = 1.1$$

Exakt:

$$f(x_1) - f(x_0) = 1.1^2 + e^{1.1-1} - (1^2 + e^{1-1}) = 1.21 + e^{0.1} - 2 = 0.315$$

Approximativ:

$$f'(x) = 2x + e^{x-1} \times 1$$

$$f'(x_0) = 2 \times 1 + e^{1-1} = 3$$

$$f'(x) = 3 = \frac{dy}{dx}; dy = 3dx \mid \text{Differentialschreibweise}$$

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0); \Delta x = x_1 - x_0$$

$$\Delta y \approx dy = 3dx \approx \Delta x = 3 \times 0.1 = 0.3$$

8.2.2 Rechenregeln für Differentiale

Ableitungsregeln	Regeln für Differentiale
$[c]' = 0$	$d[c] = 0$
$[cf]' = cf'$	$d[cf] = cdf$
$[f + g]' = f' + g'$	$d[f + g] = df + dg$
$[fg]' = f'g + fg'$	$d[fg] = df \times g + f \times dg$
$[\frac{f}{g}]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	$d[\frac{f}{g}] = \frac{df \times g - f \times dg}{g^2}$

8.3 Monotonie

- Gilt $f'(x) > 0$ in einem Intervall I , dann ist f dort **streng monoton wachsend**.
- Gilt $f'(x) \geq 0$ in einem Intervall I , dann ist f dort **monoton wachsend**.
- Gilt $f'(x) < 0$ in einem Intervall I , dann ist f dort **streng monoton fallend**.
- Gilt $f'(x) \leq 0$ in einem Intervall I , dann ist f dort **monoton fallend**.

8.3.1 Lokale oder relative Extrema

Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von f in x_0 : $f'(x_0) = 0$ Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend, es ist erst ein **kritischer Punkt**

Wenn $f'(x_0) = 0$ **und**:

$f''(x_0) > 0$ dann liegt ein lokales (oder relatives) Minimum vor. $f''(x_0) < 0$ dann liegt ein lokales (oder relatives) Maximum vor.

8.4 Höhere Ableitungen

$$y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)] = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Geometrische Bedeutung: die 2. Ableitung ist positiv wenn die 1. Ableitung (also die Steigung) zunimmt wenn man sich in Richtung zunehmender x entlang der Kurve bewegt.

- Gilt $f''(x) > 0$ in einem Intervall I , dann weist f dort eine **Linkskrümmung** auf. Wir sagen f ist **konvex**.
- Gilt $f''(x) < 0$ in einem Intervall I , dann weist f dort eine **Rechtskrümmung** auf. Wir sagen f ist **konkav**.

8.5 Krümmung

Die Krümmung der Kurve $y = f(x)$ an der Stelle x ist:

$$K(x) = \frac{y''(x)}{[1+(y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}; \text{ Krümmungskreisradius } p(x) = \frac{1}{|K(x)|}$$

Für $K > 0$ hat man eine Links- und für $K < 0$ eine Rechtskrümmung.

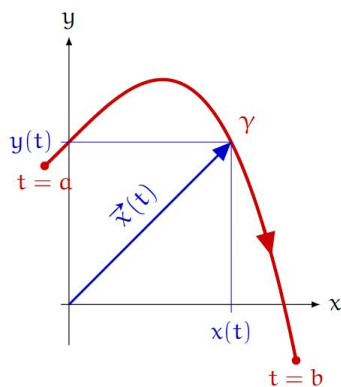
Chapter 9

SW07

Differentialrechnung IV – Kurvendiskussion, Optimierung

9.1 Parameterdarstellung von Kurven

Neben der Form $y = f(x)$ kann man Kurven auch in der Parameterform beschreiben. Jedem Wert des Parameters t wird dabei ein Punkt $\vec{x}(t)$ in der Ebene (oder auch im Raum) zugeordnet. Man nennt dies auch Parameterdarstellung der Kurve.



Eine Kurve γ ist eine Abb. der Form:

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Für $t = a$ ist man am Kurvenanfang, für ein beliebiges $t \in [a, b]$ an der Stelle $\vec{x}(t)$ und für $t = b$ am Kurvenende.

Für jeden Punkt \vec{x} auf der Kurve gibt es genau ein $t \in [a, b]$ so, dass $\vec{x}(t)$ (und auch die Umkehrung gibt!)

9.1.1 Beispiel

Funktion: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$

Parameter: $t = x$

Parameterform: $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}$

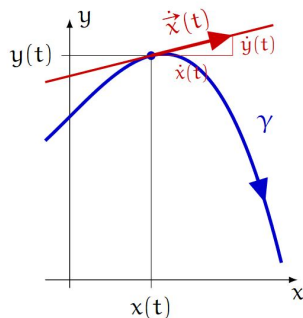
Funktion: $y = x^2$
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto x^2$

Kurve: $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+, t \mapsto \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$

9.1.2 Ableitung eines Vektors

Einen Vektor $\vec{x}(t)$ leitet man nach dem Parameter t ab, indem man jede Komponente des Vektors nach t ableitet.

9.1.3 Ableitung einer in Parameterform gegebenen Funktion



Parameterform der Kurve γ

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, a \leq t \leq b.$$

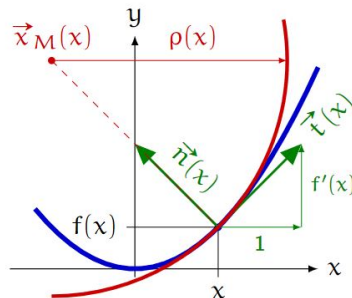
Ist γ gleich dem Graphen von $y = f(x)$ dann gilt für die Steigung der Tangente

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

wobei \dot{y} die Ableitung von $y(t)$, bzw \dot{x} von $x(t)$ nach t ist.

Beachte: die Steigung der Tangente an y' ist die selbe wie die Steigung des Vektors $\vec{x}(t)$. Und diese lässt sich aus den beiden Komponenten $\dot{y}(t)$ und $\dot{x}(t)$ berechnen.

9.1.4 Krümmungskreismittelpunkt



Punkt auf der Kurve $\vec{x}(t) = [x, y(x)]^T$, Tangente $\vec{t} = [1, y'(x)]^T$, Normale $\vec{n}(x) = [-y'(x), 1]^T$. Mittelpunkt des Krümmungskreises (rot):

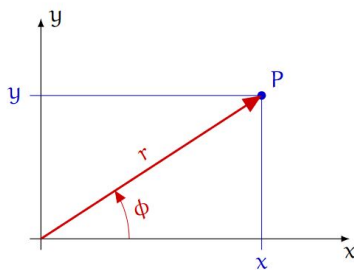
$$\vec{x}_M(x) = \vec{x}(x) + \frac{1}{K(x)} \frac{\vec{n}(x)}{|\vec{n}(x)|}$$

Damit hat man für den Krümmungskreismittelpunkt:

$$\vec{x}_M(x) = \begin{bmatrix} x_M(x) \\ y_M(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y'(x) \frac{1+(y'(x))^2}{y''(x)} \\ y(x) + \frac{1+(y'(x))^2}{y''(x)} \end{bmatrix} \quad \text{wobei } K(x) = \frac{y''(x)}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

9.2 Kurven in Polarkoordinaten

Oft verwendet man anstelle der kartesischen Koordinaten (x, y) Polarkoordinaten (r, ϕ) . Für die Koordinatentransformation gilt:



Polar- zu kartesischen Koordinaten:

$$x = r \cos \phi$$

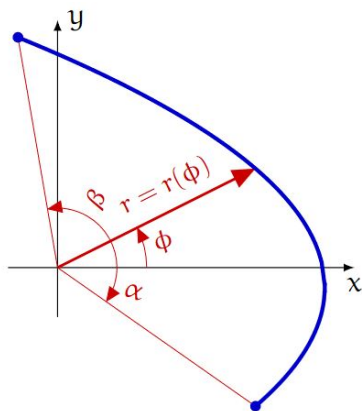
$$y = r \sin \phi$$

Kartesische zu Polarkoordinaten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \phi = \frac{y}{x}$$

Beachte: Verwendet man $\phi = \arctan(\frac{y}{x})$ erhält man $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Die Vorzeichen von x und y bestimmen, in welchem Quadranten der Punkt P liegt. Damit kann dann $\phi \in [0, 2\pi]$ bestimmt werden.



Eine in Polarkoordinaten gegebene Kurve γ wird durch folgende Abbildung spezifiziert:

$$\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}, \phi \mapsto r = r(\phi)$$

Jedem Winkel $\phi \in [\alpha, \beta]$ wird der Abstand der Kurve $r = r(\phi)$ vom Ursprung zugeordnet.

Beachte: Alle Winkel werden von der positiven x-Achse im Gegenuhrzeigersinn gemessen. Hier ist damit $\alpha < 0$ und $\beta > 0$.

9.2.1 Ableitung einer in Polarkoordinaten gegebene Funktion

Die gewöhnliche Ableitung einer Funktion wird bestimmt, indem man die Polarkoordinaten in Parameterform transformiert

$$x = x(\phi) = r(\phi) \cos \phi$$

$$y = y(\phi) = r(\phi) \sin \phi$$

Hier ist jetzt ϕ der Parameter. Formel $y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\phi}}{\frac{dx}{d\phi}} = \frac{\dot{r}(\phi) \sin \phi + r(\phi) \cos \phi}{\dot{r}(\phi) \cos \phi - r(\phi) \sin \phi}$$

9.3 Kurvendiskussion

Generelles Vorgehen:

- **Definitions- und Wertebereich, Definitionslücken, Unstetigkeitsstellen**
- **Symmetrien:** ist f gerade $f(x) = f(-x)$, ungerade $f(x) = -f(-x)$ oder T-periodisch $f(x+T) = f(x)$.
- **Nullstellen** $f(x) = 0$; **Schnittpunkte mit y-Achse** $f(0) = y$
- **Pole:** Nenner verschwindet; **senkrechte Asymptoten:** Polgeraden
- **Ableitungen** in der Regel bis zur 3. Ordnung
- **Relative Extremwerte** (Maxima, Minima): Notwendige Bedingung $f'(x) = 0$, $f''(x) > 0 = \text{Minima}$, $f''(x) < 0 = \text{Maxima}$.
- **Monotonieeigenschaften, Wendepunkte, Krümmung**
- **Asymptotisches Verhalten** für $x \rightarrow \pm\infty$
- **Krümmungskreismitelpunkt**
- **Graph G(f) der Funktion f skizzieren**

9.3.1 Symmetrien Beispiele

Funktion	Bemerkung
x^{2n}	Gerade: $x^2, x^4, x^6 \dots$
x^{2n-1}	Ungerade: $x, x^3, x^5 \dots$
$\cos 3x$	Periodisch: $T = \frac{2\pi}{3}$
e^{-x^2}	Gerade
$\sin 2x$	Ungerade, Periodisch $T = \pi$
$x^3 \sin x$	Gerade

In Quotient-funktion: Zähler gerade, Nenner ungerade = Funktion ungerade.

9.3.2 Wende- und Sattelpunkte

Notwendige und hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt der Funktion $y =$

$f(x)$ in x_0 :

$f''(x_0) = 0$, und $f'''(x_0) \neq 0$.

Gilt zudem $f'(x_0) = 0$, dann hat man in x_0 einen Sattelpunkt.

9.3.3 Beispiel

Funktion: $y = \frac{-5x^2+5}{x^3}$

Definitions- und Wertebereich:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, W = \mathbb{R}$$

Symmetrie:

Zähler gerade, Nenner ungerade = Funktion ungerade.

Nullstellen:

$$y = \frac{-5x^2+5}{x^3} = 5 \frac{1-x^2}{x^3} = 5 \frac{(1+x)(1-x)}{x^3}$$

$$x_{1,2} = -1, 1$$

Polstellen bei 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5x^2+5}{x^3} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-5x^2+5}{x^3} = \frac{5}{0^+} = \infty$$

Ableitungen:

$$y = \frac{-5x^2+5}{x^3}$$

$$y' = 5 \frac{x^2-3}{x^4}$$

$$y'' = 5 \frac{12-2x^2}{x^5}$$

$$y''' = 30 \frac{x^2-10}{x^6}$$

Extrema:

$$y' = 5 \frac{x^2-3}{x^4} = 0; x^2 - 3 = 0; x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

$$y''(x_1) = y''(\sqrt{3}) = 5 \frac{12-2\sqrt{3}^2}{\sqrt{3}^5} > 0 \text{ Minimum}$$

$$y''(x_2) = y''(-\sqrt{3}) = 5 \frac{12-2 \times -\sqrt{3}^2}{-\sqrt{3}^5} < 0 \text{ Maximum}$$

Wendepunkte:

$$y' = 5 \frac{12-2x^2}{x^4} = 0; 12 - 2x^2 = 0; 6 = x^2; x = \pm\sqrt{6}$$

$$y'''(\pm\sqrt{6}) = 30 \frac{(\pm\sqrt{6})^2-10}{(\pm\sqrt{6})^6} = 30 \frac{-4}{6^3} \neq 0$$

Wendepunkte bei $-\sqrt{6}$ und $\sqrt{6}$

Asymptotisches Verhalten:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-5x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 5 \frac{1-x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 5 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} \right) = 5 \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) = 0$$

9.4 Optimierungsproblem - Allgemeines Vorgehen

Bei Extremalwertprobleme (oder Extremwert- oder Extremalaufgaben) sucht man einen Extremwert für ein bestimmtes Problem, zB maximales Volumen, minimale Distanz, etc.

- Zuerst die Funktion bestimmen, welche das Problem beschreibt.
- Aus den Nullstellen der Ableitung ($f'(x) = 0$) erhält man Kandidaten für Extrempunkte x_0 (mit zugehörigen Extremwerten $f(x_0)$)
- Mit den höheren Ableitungen überprüft man, ob es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt:
Rel. Max in x_0 : $f^{(n)}(x_0) < 0$, n gerade und $f^{(k)}(x_0) = 0$, für $1 \leq k < n$
Rel. Min in x_0 : $f^{(n)}(x_0) > 0$, n gerade und $f^{(k)}(x_0) = 0$, für $1 \leq k < n$
Sattelpunkt x_0 : $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, n ungerade und $f^{(k)}(x_0) = 0$, für $2 \leq k < n$
- Die Funktionswerte der gefundenen Maxima (Minima) und die Werte der Funktion an den Rändern werden jetzt verglichen. Das grösste (kleinste) ist der gesuchte Extremwert.

9.4.1 Brechungsgesetz

???

9.5 Regel von de l'Hôpital

9.5.1 Theorem - Regel von de l'Hôpital für unbestimmte Ausdrücke der Form 0/0

Wir nehmen an f und g seien in einer Umgebung von $x = a$ differenzierbar und $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Dann gilt $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ falls die rechte Seite existiert oder $\pm\infty$ ist.

Weiter gilt die Regel auch für die Grenzübergänge $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$.

9.5.2 Vorgehen

- Überprüfe, ob $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ein unbestimmter Ausdruck der Form 0/0 ist.

- Wenn ja, leite f und g separat ab.
- bestimme den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Wenn dieser endlich ist oder $\pm\infty$, dann ist dies der gesuchte Grenzwert.

9.5.3 Vorgehen für weitere unbestimmte Ausdrücke

- Satz gilt entsprechend auch für unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{\infty}{\infty}$
- Unbestimmte Ausdrücke der Form $0 \times \infty$ bringt man mittels der Identität $f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ auf einen unbestimmten Ausdruck der Form $0/0$.
- Unbestimmte Ausdrücke der Form $\infty - \infty$ lassen sich oft durch geeignete algebraische Umformungen auf unbestimmte Ausdrücke der Form $0/0$ zurückführen.
- Unbestimmte Ausdrücke der Form $0^0, \infty^0, 1^\infty$ schreiben wir in der Form $y = f(x)^{g(x)}$, logarithmieren beide Seiten und erhalten dann mit $\ln y = g(x) \times \ln(f(x))$ einen der oben besprochenen Ausdrücke.

Chapter 10

SW08 Integralrechnung I – Flächenberechnung und Integral

Umkehrung der Differenzierung / Ableitung

10.1 Stammfunktion

Eine differenzierbare Funktion $F(x)$ heisst Stammfunktion von $f(x)$ falls:
 $F'(x) = f(x)$

Eigenschaften der Stammfunktion:

- Zu jeder stetigen Funktion $f(x)$ gibt es ∞ -viele Stammfunktionen
- Zwei beliebige Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante, dh
 $F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$
- Ist $F_1(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$, dann ist auch $F_2(x) = F_1(x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$) eine Stammfunktion von $f(x)$. Daher ist die Menge aller Stammfunktionen von der Form
 $F(x) = F_1(x) + C$, wobei C eine beliebige (reelle) Konstante ist.

10.2 Umkehrung der Differentiation

Für Polynomfunktion:

$$f(x) = x^n \rightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Für alle anderen Funktionen siehe: 6.6.1 Ableitungen
Konstante $+C$ dabei nicht vergessen!

10.3 Bestimmtes Integral Flächenberechnung

$$f(x), [a, b]$$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_k = a + k \Delta x$$

Wenn rechter Rand: f an der Stelle $x_k^* = x_k$

Wenn linker Rand: f an der Stelle $x_k^* = x_{k-1}$

$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$ auflösen bis alle k weg (siehe 10.4 Summen vereinfachen)

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ auflösen, Resultat gleich Fläche im Intervall $[a, b]$

10.3.1 Beispiel Rechter Rand

(siehe 10.4 Summen vereinfachen)

$$y = x^2, [0, 1], a = 0, b = 1$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_k = a + k \Delta x = 0 + k \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

$$\text{Rechter Rand: } x_k^* = x_k, f(x_k^*) = f(x_k) = x_k^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dots = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$$

10.3.2 Beispiel Linker Rand

(siehe 10.4 Summen vereinfachen)

$$y = x^3, [0, 2], a = 0, b = 2$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_k = a + k \Delta x = 0 + k \frac{2}{n} = \frac{2k}{n}$$

$$\text{Linker Rand: } x_k^* = x_{k-1}, f(x_k^*) = f(x_{k-1}) = x_{k-1}^3 = \left(\frac{2(k-1)}{n}\right)^3$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2(k-1)}{n}\right)^3 \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{n}\right)^3 (k-1)^3 \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{n}\right)^4 (k-1)^3$$

$$\left(\frac{2}{n}\right)^4 \sum_{k=1}^n (k-1)^3 = \left(\frac{2}{n}\right)^4 \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left(\frac{2}{n}\right)^4 \frac{(n(n-1))^2}{n^4} = 4\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 4\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 4$$

10.4 Summen vereinfachen

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^n (k-1)^3 = \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$

Chapter 11

SW09 Integralrechnung II – unbestimmtes Integral und Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

11.1 Unbestimmtes Integral und Flächenfunktion

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt$$

a ist ein bestimmter Wert, x ist unbestimmt. Darum unbestimmtes Integral.

11.1.1 Theorem - unbestimmte Integrale

- Das unbestimmte Integral $I(x) = \int_a^x f(t) dt$ stellt den Flächeninhalt zwischen $y = f(t)$ über dem Intervall $[a, x]$ in Abhängigkeit von der oberen Grenze x dar.
- Zu jeder Funktion $f(t)$ gibt es ∞ -viele unbestimmte Integrale, die sich nur durch ihre untere Grenze (a) unterscheiden.
- Die Differenz zweier unbestimmter Integrale $I_1(x)$ und $I_2(x)$ ist eine Konstante.

Die geom. Deutung als Fläche ist nur für $f(t) \geq 0$ und $x \geq a$ möglich. Man muss klar zwischen dem bestimmten Integral (das ist eine reelle Zahl) und dem unbestimmten Integral (das ist eine Funktion der oberen Grenze) unterscheiden!

11.1.2 Beispiel

Zwei unbestimmte Integrale der Normalparabel $f(t) = t^2$

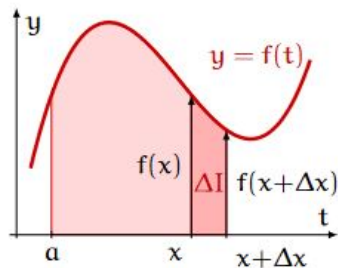
$$I_1(x) = \int_0^x t^2 dt \text{ und } I_2(x) = \int_1^x t^2 dt$$

Deuten Sie den Unterschied $I_1(x) - I_2(x)$ geometrisch!

$$A = I_1(x) - I_2(x) = \int_0^1 t^2 dt$$

11.2 Delta x ändern

Wir lassen die unterschiedliche Bezeichnung zwischen der Integrationsvariablen und der oberen Grenze fallen. Aus der Abb. liest man folgendes:



Einerseits hat man $\Delta I = I(x + \Delta x) - I(x)$ andererseits gilt die Approximation $\Delta I \approx f(x) \Delta x$. Also zusammengefasst:

$$f(x) \approx \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x}$$

Man kann zeigen, dass für stetige f gilt:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = I'(x)$$

Wegen $I'(x) = f(x)$ ist also das unbestimmte Integral (oder die Flächenfunktion) $I(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

11.3 Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung Theorem

Jedes unbestimmte Integral $\int_a^x f(t) dt$ der stetigen Funktion $f(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$:

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt \implies I'(x) = f(x).$$

Folgerungen aus dem Fundamentalsatz:

- $I(x)$ ist wegen $I'(x) = f(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion (falls f stetig).
- Jedes unbestimmte Integral hat die Form

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

wobei $F(x)$ irgendeine (spezielle) Stammfunktion von $f(x)$ und C_1 eine geeignete (reelle) Konstante bedeutet (die von a abhängt).

- Die Menge aller unbestimmter Integrale von $f(x)$ hat die Form $\int f(x)dx = F(x) + C$ ($F'(x) = f(x)$) wobei $F(x)$ irgendeine (spezielle) Stammfunktion von $f(x)$ ist und $C \in \mathbb{R}$ alle reellen Werte durchläuft. Man nennt C Integrationskonstante.
- Für stetige Funktionen sind Stammfunktionen und unbestimmtes Integral das selbe.

11.3.1 Beispiele

$$F_1(x) = \int (2x + 1)dx = x^2 + x + C$$

$$F_2(x) = \int e^x dx = e^x + C$$

$$F_3(x) = \int \frac{4}{1+x^2} dx = 4 \arctan(x) + C$$

$$F_4(x) = \int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C$$

11.4 Berechnung bestimmter Integrale mit Stammfunktion

Es gilt:

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

$$I(a) = \int_a^a f(x)dx = F(a) + C = 0 \rightarrow C = -F(a)$$

somit gilt:

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a), \text{ und schliesslich } \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Das Integral hängt nicht von der Wahl der Stammfunktion $F(x)$ ab: man kann irgendeine (spezielle) Stammfunktion wählen!

11.4.1 Beispiel

Berechnen Sie die bestimmten Integrale $\int_0^1 x^2 dx$.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + C \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}1^3 + C \right) - \left(\frac{1}{3}0^3 + C \right) = \frac{1}{3} + C - 0 - C = \frac{1}{3}$$

→ Hier beim bestimmten Integral zum Flächenberechnen kann man $+C$ weglassen (aber nur hier, da es sich immer rauskürzt)!

Berechnen Sie die bestimmten Integrale $\int_0^{\pi} \sin x dx$.

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -[\cos x]_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-2) = 2$$

11.5 1. Substitutionsregel für unbestimmte Integrale - Theorem

Es gilt:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \left[\int f(u)du \right]_{u=g(x)}$$

Vorgehen:

- Substituiere formal $g(x) = u, g'(x)dx = du$
- Integriere unbestimmt nach u
- Ersetze u wieder durch $g(x)$

11.5.1 Beispiele

Berechne das unbestimmte Integral $I = \int (x^2 + 1)^{50} 2x dx$

$$u = x^2 + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$du = 2x dx$$

$$I = \int (x^2 + 1)^{50} 2x dx = \int u^{50} du = \frac{1}{51} u^{51} + C = \frac{1}{51} (x^2 + 1)^{51} + C$$

Berechne das unbestimmte Integral $I = \int x \cos x^2 dx$

$$u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$du = 2x dx$$

$$\int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos(u) du = \frac{1}{2} \int \sin(u) + C = \frac{1}{2} \int \sin(x^2) + C$$

11.6 1. Substitutionsregel für bestimmte Integrale - Theorem

Es gilt:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Vorgehen:

- Substituiere formal $g(x) = u, g'(x)dx = du$
- Ersetze die x-Grenzen a,b durch die u-Grenzen $g(a), g(b)$
- Integriere

11.6.1 Beispiele

Berechne das bestimmte Integral $I = \int_0^2 x(x^2 + 1)^3 dx$

$$u = u(x) = x^2 + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$du = 2x dx$$

$$I = \int_0^2 x(x^2 + 1)^3 dx = \frac{1}{2} \int_0^2 2x(x^2 + 1)^3 dx$$

Intervallgrenzen: 2, 0. Neue Grenzen: $u(2) = 5, u(0) = 1$

$$\frac{1}{2} \int_1^5 u^3 du = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} u^4 \right]_1^5 = \frac{1}{8} [u^4]_1^5 = \frac{1}{8} (625 - 1) = 78$$

Berechne das bestimmte Integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1 + 4 \sin^2 x} dx$

$$u = u(x) = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x$$

$$du = \cos x dx$$

Intervallgrenzen: $\frac{\pi}{3}, 0$. Neue Grenzen: $u(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, u(0) = 0$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{a + 4u^2} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{a + (2u)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2du}{a + (2u)^2}$$

$$v = v(x) = 2u$$

$$\frac{dv}{du} = 2$$

$$dv = 2du$$

Intervallgrenzen: $\frac{\sqrt{3}}{2}, 0$, neue Grenzen: $v(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}, v(0) = 0$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dv}{1 + v^2} = \frac{1}{2} [\arctan(v)]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} (\arctan \sqrt{3} - \arctan 0) = \frac{\pi}{6}$$

Chapter 12

SW10 Integralrechnung III – Integrationstechnik

12.1 2. Substitutionsregel

Die 2. Substitutionsregel ist flexibler und auf beliebige Integrale anwendbar:

$$\int f(x)dx$$

indem man dort $x = u(t)$ setzt und somit wegen $dx = u'(t)dt$ schreiben kann.

$$\int f(x)dx = \left[\int f(u(t))u'(t)dt \right]_{t=u^{-1}(x)}$$

u muss im verwendeten t -Intervall umkehrbar sein, damit man $x = u(t)$ nach t auflösen, dh. durch x ausdrücken kann ($t = u^{-1}(x)$).

12.1.1 Theorem - 2. Substitutionsregel für unbestimmte Integrale

$$\text{Es gilt: } \int f(x)dx = \left[\int f(u(t))u'(t)dt \right]_{t=u^{-1}(x)}$$

Vorgehen:

- Wähle eine geeignete invertierbare Substitutionsfunktion u
- Substituiere formal $x = u(t)$, $dx = u'(t)dt$
- Integriere nach t
- Drücke t durch x aus

12.1.2 Beispiele

Berechne $I = \int x^2 \sqrt{x-1} dx$

$$u = x - 1$$

$$x = u + 1$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 \sqrt{x-1} dx = \int (u+1)^2 \sqrt{u} du = \int (u^2 + 2u + 1) u^{\frac{1}{2}} du = \int (u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}) du \\ &= \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \left(\frac{2}{7} u^{\frac{6}{2}} + \frac{2}{5} u^{\frac{4}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{2}{2}} \right) u^{\frac{1}{2}} + C = \left(\frac{2}{7} u^{\frac{6}{2}} + \frac{2}{5} u^{\frac{4}{2}} + \frac{2}{3} u^{\frac{2}{2}} \right) \sqrt{u} + C = \left(\frac{2}{7} u^3 + \frac{2}{5} u^2 + \frac{2}{3} u \right) \sqrt{u} + C \\ &= \left(\frac{2}{7} (x-1)^3 + \frac{2}{5} (x-1)^2 + \frac{2}{3} (x-1) \right) \sqrt{x-1} + C \end{aligned}$$

Berechne $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ es werden zwei Substitutionen benötigt.

$$u = e^x$$

$$\frac{du}{dx} = e^x$$

$$du = e^x dx \implies dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{\frac{du}{u}}{\sqrt{1+u}} = \int \frac{du}{u\sqrt{1+u}}$$

$$v = \sqrt{1+u}$$

$$v^2 = 1+u \implies u = v^2 - 1$$

$$\frac{du}{dv} = 2v$$

$$du = 2v dv$$

$$\int \frac{2v dv}{(v^2-1)v} = 2 \int \frac{dv}{v^2-1} = \frac{1}{2} 2 \log \left| \frac{v-1}{v+1} \right| + C = \log \left| \frac{\sqrt{1+u}-1}{\sqrt{1+u}+1} \right| + C = \log \left| \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} \right| + C$$

12.1.3 Theorem - 2. Substitutionsregel für bestimmte Integrale

$$\text{Es gilt: } \int_a^b f(x) dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t)) u'(t) dt$$

Vorgehen:

- Wähle eine geeignete invertierbare Substitutionsfunktion u
- Substituiere formal $x = u(t), dx = u'(t) dt$
- Ersetze die x -Grenzen a, b durch die t -Grenzen $u^{-1}(a), u^{-1}(b)$
- Integriere

12.1.4 Beispiele

Berechne $I = \int_1^2 x^2 \sqrt{x-1} dx$

$$t = x - 1$$

$$x = t + 1$$

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

$$dx = dt$$

Alte Grenzen: $a = 1, b = 2$ neue Grenzen: $t(a) = 0, t(b) = 1$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (t+1)^2 \sqrt{t} dt &= \int_0^1 (t^2 + 2t + 1) t^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 (t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}) dt = \left[\frac{2}{7} t^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5} t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{7} + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} - 0 = \frac{184}{105} \end{aligned}$$

Berechne $I = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ es werden zwei Substitutionen benötigt.

$$u = e^x$$

$$x = \ln u$$

$$dx = \frac{1}{u} du$$

$$I = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int_0^{\ln 3} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$$

Alte Grenzen: $a = 0, b = \ln 3$, neue Grenzen: $u(\ln 3) = 3, u(0) = 1$

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{1+u}} \times \frac{1}{u} du$$

$$v = \sqrt{1+u}$$

$$v^2 = 1+u$$

$$u = v^2 - 1$$

$$\frac{du}{dv} = 2v$$

$$du = 2v dv$$

Alte Grenzen: $a = 1, b = 3$, neue Grenzen: $v(1) = \sqrt{2}, v(3) = 2$

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{v} \frac{1}{v^2-1} 2v dv = 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dv}{v^2-1} = 2 \left[\frac{1}{2} \log \left| \frac{v-1}{v+1} \right| \right]_{\sqrt{2}}^2 \approx 0.6641$$

12.2 Häufige Integralsubstitutionen

A) Integraltyp	Substitution
$\int f(ax + b)dx$	$u = ax + b$ $dx = \frac{du}{a}$

Merkmal: Die Variable x tritt in der linearen Form $ax + b$ auf
($a \neq 0$)

A) Beispiele	Substitution
$\int (2x - 3)^6 dx$	$u = 2x - 3$
$\int \sqrt{4x + 5} dx$	$u = 4x + 5$
$\int e^{4x+2} dx$	$u = 4x + 2$

B) Integraltyp	Substitution
$\int f(x)f'(x)dx$	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$

Merkmal: Der Integrand ist das Produkt aus einer Funktion $f(x)$ und ihrer Ableitung $f'(x)$

B) Beispiele	Substitution
$\int \sin(x) \cos(x) dx$	$u = \sin x$
$\int \frac{\ln x}{x} dx$	$u = \ln x$

C) Integraltyp	Substitution
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$	$u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$

Merkmal: Im Zähler steht die Ableitung des Nenners.

C) Beispiele	Substitution
$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1} dx$	$u = x^2 - 3x + 1$
$\int \frac{e^x}{e^x+5} dx$	$u = e^x + 5$

D) Integraltyp	Substitution
$\int f(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx$	$x = a \sin u$ $dx = a \cos(u) du$ $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos u$
Merkmal: Der Integrand enthält eine Wurzel vom Typ $\sqrt{a^2 - x^2}$	
D) Beispiele	Substitution
$\int \sqrt{r^2 - x^2} dx$	$x = r \sin u$
$\int x \times \sqrt{r^2 - x^2} dx$	$x = r \sin u$
$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$	$x = 2 \sin u$
E) Integraltyp	Substitution
$\int f(x; \sqrt{a^2 + x^2}) dx$	$x = a \sinh u$ $dx = a \cosh(u) du$ $\sqrt{a^2 + x^2} = a \cosh u$
Merkmal: Der Integrand enthält eine Wurzel vom Typ $\sqrt{a^2 + x^2}$	
E) Beispiele	Substitution
$\int \sqrt{x^2 + 1} dx$	$x = \sinh u$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$	$x = 2 \sinh u$
F) Integraltyp	Substitution
$\int f(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx$	$x = a \cosh u$ $dx = a \sinh(u) du$ $\sqrt{x^2 - a^2} = a \sinh u$
Merkmal: Der Integrand enthält eine Wurzel vom Typ $\sqrt{x^2 - a^2}$	
F) Beispiele	Substitution
$\int \sqrt{x^2 - 9}$	$x = 3 \cosh u$
$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 25}} dx$	$x = 5 \cosh u$

12.3 Theorem - Partielle Integration - Produktintegration

Es gilt: $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x), dx$

Vorgehen (Ziel: das Integral auf der Rechten Seite muss einfacher sein):

- Zerlege den Integranden in ein Produkt von zwei Faktoren
- Ein Faktor ist $u'(x)$, der andere ist $v(x)$

- Der erste Faktor $u'(x)$ kommt auf die rechte Seite überall in integrierter Form, dh als $u(x)$ vor
- Der zweite Faktor $v(x)$ kommt auf der rechten Seite nur unter dem Integral in abgeleiteter Form, dh als $v'(x)$ vor

Ausserdem:

$$\begin{aligned}(uv)' &= u'v + uv' \\ uv &= \int u'v dx + \int uv' dx \\ uv - \int u'v dx &= \int uv' dx\end{aligned}$$

12.3.1 Beispiel

Berechne $I = \int x \cos(x) dx$

$$u = x$$

$$u' = 1$$

$$v = \sin x$$

$$v' = \cos x$$

$$\rightarrow uv - \int u'v dx = \int uv' dx$$

$$\begin{aligned}I &= \int x \cos(x) dx = x \sin x - \int 1 \sin x dx = x \sin x - (-\cos x) + C \\ &= x \sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

$$\text{Probe: } (x \sin x + \cos x + C)' = 1 \sin x + x \cos x - \sin x + 0 = x \cos(x) dx$$

12.3.2 Rekursionsbeziehung - Beispiel

Bei Integralen vom Typus $\int x^n \exp(\lambda x) dx$, $\int x^n \sin x dx$ und $\int x^n \cos x dx$, ($n \in \mathbb{N}$) lässt sich der vorkommende Exponent durch partielle oder Produktintegration um eins erniedrigen und somit rekursiv auf Null bringen.

Beispiel:

Leite eine Rekursionsbeziehung her, um $I_n = \int x^n \exp(\lambda x) dx$ zu berechnen.

$$u = x^n$$

$$u' = nx^{n-1}$$

$$v = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$$

$$v' = e^{\lambda x}$$

$$\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} x^n - \int nx^{n-1} \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} x^n - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx$$

$$I_{n-1} = \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx$$

$$I_n = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} x^n - \frac{n}{\lambda} I_{n-1}; I_0 = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + C$$

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} x^1 - \frac{1}{\lambda} I_0 = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} x^1 - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + C \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} x^1 - \frac{1}{\lambda^2} e^{\lambda x} - \frac{C}{\lambda}; -\frac{C}{\lambda} = C_1\end{aligned}$$

12.3.3 Nur einen Faktor - Beispiel

Künstlich ein Produkt herstellen um partielle oder Produktintegration anwenden.

Berechne mit Hilfe partieller Integration $I = \int \ln x dx$.

$$I = \int \ln x dx = \int 1 \times \ln x dx$$

$$u = \ln x$$

$$u' = \frac{1}{x}$$

$$v = x$$

$$v' = 1$$

$$\int 1 \times \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - x + C$$

$$\text{Probe: } (x \ln x - x + C)' = 1 \ln x + x \frac{1}{x} - 1 + 0 = \ln x$$

12.3.4 Mehrfache partielle Integration - Beispiel

Oft muss man mehrere Male hintereinander partiell integrieren!

Berechne mit Hilfe partieller Integration $I = \int e^{\alpha x} \sin(\beta x) dx$

$$u = \sin(\beta x)$$

$$u' = \beta \cos(\beta x)$$

$$v = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$$

$$v' = e^{\alpha x}$$

$$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\beta}{\alpha} \int e^{\alpha x} \cos(\beta x) dx$$

$$u = \cos(\beta x)$$

$$u' = -\beta \sin(\beta x)$$

$$v = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$$

$$v' = e^{\alpha x}$$

$$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \sin(\beta x) - \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos(\beta x) + \frac{\beta}{\alpha} \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx \right)$$

wat

12.4 Theorem - Produktintegration für bestimmte Integrale

$$\text{Es gilt: } \int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Das Vorgehen ist (fast) exakt gleich bei unbestimmten Integralen ausser dass bei bestimmten Integralen die obere und untere Integrationsgrenze ins Spiel kommt.

12.4.1 Beispiele

Berechne mit Hilfe partieller Integration $I = \int_0^R x e^{-x} dx$.

$$u = x$$

$$u' = 1$$

$$v = -e^{-x}$$

$$v' = e^{-x}$$

$$[-xe^{-x}]_0^R + \int_0^R e^{-x} dx = -Re^{-R} + [-e^{-x}]_0^R = -Re^{-R} - e^{-R} - (-1) = 1 - (1 + R)e^{-R} = 1 - \frac{1+R}{e^R}$$

Berechne mit Hilfe partieller Integration $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$

$$I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi} \sin x \sin x dx$$

$$u = \sin x$$

$$u' = \cos x$$

$$v = -\cos x$$

$$v' = \sin x$$

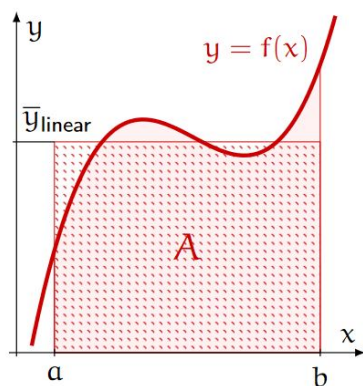
$$[-\sin x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = 0 + \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$I = [x]_0^{\pi} - I$$

$$2I = \pi$$

$$I = \frac{\pi}{2}$$

12.5 Mittelwerte



Der lineare Mittelwert \bar{y}_{linear} der Funktion $y = f(x)$ über dem Intervall $[a, b]$ gibt an, welchen Wert diese Funktion im Mittel hat.

Die Fläche des Rechtecks der Höhe \bar{y} ist gleich der Fläche der Kurve $y = f(x)$

$$A = \bar{y}_{linear}(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

12.5.1 Theorem - lineare Mittelwert

Der lineare Mittelwert von f über $[a, b]$: $\bar{y}_{linear} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

12.5.2 Beispiel

Berechne den linearen Mittelwert der Funktion $y = \ln x$ im Intervall $[1, 5]$

$$\bar{y}_{linear} = \frac{1}{5-1} \int_1^5 \ln x dx = \frac{1}{4} [x(\ln x)]_1^5 = \frac{1}{4} (5(\ln 5 - 1)) - 1(0 - 1) \approx 1.012$$

12.5.3 Theorem - quadratische Mittelwert

Der quadratische Mittelwert von $y = f(x)$ über dem Intervall $[a, b]$ ist definiert durch:

$$\bar{y}_{\text{quadratisch}} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

Sowohl lineare wie auch quadratische Mittelwerte werden oft im Zusammenhang mit periodischen Funktionen verwendet. In diesem Fall ist das Intervall $[a, b]$ meist ein Intervall von der Länge einer Periode T . Dabei ist es egal, welches der unendlich vielen Intervalle mit dieser Eigenschaft verwendet wird. Meist verwendet man deshalb das Intervall $[0, T]$.

12.5.4 Theorem - Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist f auf dem Intervall $[a, b]$ stetig, dann gibt es einen Punkt $\epsilon \in [a, b]$ so, dass gilt:

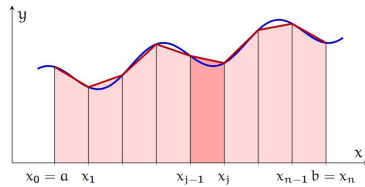
$$f(\epsilon)(b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

Chapter 13

SW11 Integralrechnung IV– Anwendungen

13.1 Trapezregel

Unterteile das Intervall $[a, b]$ in n gleich grosse Teilintervalle $[x_{j-1}, x_j], j = 1, 2, \dots, n$.



In jedem Teilintervall approximiere man die Funktion f durch eine lineare Funktion. Das Integral über jedes Teilintervall wird approximiert durch die Trapezfläche.

Die Summe der Trapezflächen ist dann eine gute Approximation des bestimmten Integrals, vor allem wenn man n genügend gross wählt:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n \frac{h}{2} (f(x_{j-1}) + f(x_j)) \text{ wobei } h = \frac{b-a}{n}.$$

Der bei der Trapezregel

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + 2f(x_n)) = I_T(h)$$

gemachte Fehler ϵ_T ist für genügend anständige (zB stückweise stetige) Funktion f beschränkt durch

$$|\epsilon_T| = \left| \int_a^b f(x) dx - I_T(h) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{a \leq \epsilon \leq b} |f''(\epsilon)|$$

13.2 Trapezregel - kurz

Funktion: $f(x)$

Intervall: $[a, b]$

Anzahl Teilintervalle: n

Fläche: $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \frac{b-a}{n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$

y_i also die versch. y in Formel oben: $y_i = f(x_i) = f(a + i \frac{b-a}{n}); 0 \leq i \leq n$

13.2.1 Beispiel

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

$$[a, b] = [1, 4]$$

$$n = 3$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \frac{b-a}{n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) = \frac{1}{2} \frac{4-1}{3} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + y_3)$$

Die versch. y herausfinden mit: $y_i = f(x_i) = f(a + i \frac{b-a}{n})$

$$y_0 = f(x_0) = f(1 + 0 \frac{4-1}{3}) = f(1) = 3$$

$$y_1 = f(x_1) = f(1 + 1 \frac{4-1}{3}) = f(2) = 1.5$$

$$y_2 = f(x_2) = f(1 + 2 \frac{4-1}{3}) = f(3) = 1$$

$$y_3 = f(x_3) = f(1 + 3 \frac{4-1}{3}) = f(4) = 0.75$$

Einsetzen:

$$\frac{1}{2} \frac{4-1}{3} (3 + 2(1.5) + 2(1) + 0.75) = 4.375$$

13.3 Simpsonregel - kurz

Funktion: $f(x)$

Intervall: $[a, b]$

Anzahl Teilintervalle: n

$$\text{Fläche: } \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

y_i also die versch. y in Formel oben: $y_i = f(x_i) = f(a + i \frac{b-a}{2n}); 0 \leq i \leq 2n$

13.3.1 Beispiel

Gleiches Vorgehen wie bei der Trapezregel!

13.4 Definition Bogenlänge

Ist $y = f(x)$ eine glatte Kurve (f' ist stetig) im Intervall $[a, b]$, dann ist die Länge dieser Kurve über $[a, b]$ gegeben durch:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

13.4.1 Beispiel

Berechne die Bogenlänge L der Kurve $y = x^{\frac{3}{2}}$ von $(1, 1)$ nach $(2, 2\sqrt{2})$.

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 x^{\frac{1}{2}}^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$$

$$t = 1 + \frac{9}{4}x$$

$$dt = \frac{9}{4}dx$$

$$dx = \frac{4}{9}dt$$

$$= \int_{\frac{13}{4}}^{\frac{22}{4}} \sqrt{t} \frac{4}{9} dt = \int_{\frac{13}{4}}^{\frac{22}{4}} t^{\frac{1}{2}} \frac{4}{9} dt$$

$$\int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4}{9} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{13}{4}}^{\frac{22}{4}} = \frac{8}{27} \left(\left(\frac{22}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{13}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{8}{27(8)} (22 \times \sqrt{22} - 13 \times \sqrt{13})$$

13.5 Kurven in Polarform

Das Bogenelement ist

$$(ds)^2 = (rd\phi)^2 + (dr)^2 = \sqrt{(r(\phi))^2 + (r'(\phi))^2} d\phi$$

Integration von α bis β liefert die Bogenlänge.

Die Bogenlänge einer in Polarkoordinaten gegebenen glatten Kurven (dh r' stetig)

$r = r(\phi)$ mit $\alpha \leq \phi \leq \beta$ ist gegeben durch:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\phi))^2 + (r'(\phi))^2} d\phi$$

13.5.1 Beispiel

Man hat $r(\phi) = R$ und damit, weil r gar nicht von ϕ abhängt $r'(\phi) = 0$. Also findet man für den Umfang des Kreises mit Radius R :

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(\phi))^2 + (r'(\phi))^2} d\phi = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0^2} d\phi = \int_0^{2\pi} R d\phi = 2\pi R$$

13.6 Kurven in Parameterform

Das infinitesimale Bogenelement der Kuve in Parameterform

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch

$$ds = |\dot{\vec{x}}(t)| dt = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt$$

Integration von $t = a$ bis $t = b$ liefert die Bogenlänge der in Parameterform gegebene Kurve

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b |\dot{\vec{x}}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt$$

13.7 Beispiel

$$\gamma = \begin{pmatrix} R \cos(t) \\ R \sin(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}(t) = R \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$(\dot{x}(t))^2 = (-R \sin(t))^2 = R^2 \sin^2 t$$

$$(\dot{y}(t))^2 = (R \cos(t))^2 = R^2 \cos^2 t$$

$$(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 = R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t = R^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) = R^2$$

$$L = \int_a^b \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2} dt = \int_0^{2\pi} R dt = \dots = 2\pi R$$

Chapter 14

SW12 Potenz- und Taylor-Reihen

14.1 Potenzreihe - Definition

Eine Potenzreihe in Potenzen von $(x - x_0)$ ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \dots$$

Hier sind die a_k ($k = 0, 1, \dots$) die Koeffizienten, x_0 der Entwicklungspunkt und x die Variable der Potenzreihe.

14.1.1 Theorem - Konvergenzradius

Für jede Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \dots$$

gibt es eine reelle $R \geq 0$, genannt Konvergenzradius, sodass die Potenzreihe konvergiert, falls $|x - x_0| < R$, und divergiert, falls $|x - x_0| > R$ (für $|x - x_0| = R$ kann die Reihe entweder konvergieren oder divergieren). Dabei gilt:

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|, \text{ bzw. } R = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1}$$

falls einer oder beide dieser Grenzwerte existiert.

Beispiel

Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{3^k} = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} (x - x_0)^k$$

wobei: $a_k = \frac{1}{3^k}, x_0 = 0$

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{3^k}}{\frac{1}{3^{k+1}}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{3^k} \frac{3^{k+1}}{1} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |3| = 3$$

$$R = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1} = \frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{1}{3^k} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{R} = \frac{1}{3} \longrightarrow R = 3$$

Konvergenzradius = 3

14.2 Definition Taylor-Polynom

Wir nehmen an, dass die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ genügend oft stetig differenzierbar ist. Dann ist das Taylor-Polynom n-ten Grades von f an der Stelle x_0 definiert durch:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

Ist $x = 0$, nennt man $T_n(x)$ auch Maclaurin-Polynom n-ten Grades von f .

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

14.2.1 Beispiel 1

Bestimmen sie die Taylor-Polynome 2-ten und 3-ten Grades von $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ (auch Maclaurin-Polynome genannt).

k	$f^k(x)$	$f^k(x_0)$
0	e^x	1
1	e^x	1
2	e^x	1
3	e^x	1

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (x - 0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

14.2.2 Beispiel 2

Bestimmen sie die Taylor-Polynome 2-ten und 3-ten Grades von $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3; x_0 = 0$

k	$f^k(x)$	$f^k(x_0)$
0	$x^3 + 2x^2 - x + 3$	3
1	$3x^2 + 4x - 1$	-1
2	$6x + 4$	4
3	6	6
4	0	0

$$T_0(x) = f^{(0)}(x_0) = 3$$

$$T_1(x) = f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + f^{(0)}(x_0) = 3 - (x - 0) = 3 - x$$

$$T_2(x) = T_1(x) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} = 3 - x + \frac{4}{2}(x - x_0)^2 = 3 - x + 2x^2$$

$$T_3(x) = 3 - x + 2x^2 + x^3 = f(x)$$

14.3 Definition - Taylor-Reihe

Wir nehmen an, die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ sei beliebig oft differenzierbar. Dann ist die Taylor-Reihe von f an der Stelle x_0 definiert durch:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \dots$$

Ist $x_0 = 0$, dann nennt man $T(x)$ auch Maclaurin-Reihe von f .

Die ersten zwei Terme ergeben die lineare Approximation der Funktion f an der Stelle x_0 bzw 0.

14.4 Definition - Restglied nach Lagrange

Die Frage ist, ob die Taylor-Reihe einer Funktion wirklich gleich der Funktion ist. Kann man also schreiben $T(x) = f(x)$?

Die Antwort liefert das Restglied nach Lagrange: Es ist gleich dem Fehler, den wir machen, wenn wir die Funktion f durch das n-te Taylor-Polynom ersetzen.

Falls die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ mindestens $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar ist, dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

wobei das Restglied nach Lagrange gegeben ist durch:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \text{ mit } c \text{ zwischen } x \text{ und } x_0$$

14.4.1 Theorem - Konvergenz von Taylor-Reihen

Die Taylor-Reihe von f an der Stelle x_0 konvergiert in ihrem Konvergenzbereich genau dann gegen $f(x)$ wenn das n . Restglied nach Lagrange:

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ gegen } 0 \text{ konvergiert.}$$

Wir schreiben dann:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Eine beliebig oft differenzierbare Funktion von f lässt sich in einer Umgebung $(x_0 - R, x_0 + R)$ von x_0 in eine konvergente Taylor-Reihe entwickeln, falls gilt:

$$|f^{(n)}(x)| \leq KM^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Dabei dürfen die Konstanten K und M nicht von n und x abhängen.

14.5 Definition Binomial-Reihe

Binomial-Reihe:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \text{ mit } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Ist definiert für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$

14.5.1 Beispiel

Wie lautet die Binomial-Reihe von $\sqrt{1+x}$? Schreiben sie die ersten 3 Glieder auf.

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k$$

$$\sqrt{1+x} \approx \binom{\frac{1}{2}}{0} x^0 + \binom{\frac{1}{2}}{1} x^1 + \binom{\frac{1}{2}}{2} x^2$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-2+1)}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{8}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

14.6 Rechnen mit Potenzreihen

- Potenzreihen lassen sich im Konvergenzbereich gliedweise addieren und subtrahieren.
- Potenzreihen lassen sich im Konvergenzbereich gliedweise differenzieren und integrieren.

14.6.1 Beispiel - addieren, subtrahieren

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$e^x + e^{-x} = 2 + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} + 2 \cdot \frac{x^5}{5!} + \dots$$

14.6.2 Beispiel - differenzieren, integrieren

Zeigen sie, dass man die Potenzreihe von $\sin x$ erhält, wenn man die Potenzreihe von $\cos x$ gliedweise integriert.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \dots$$

$$(\sin x)' = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \frac{9x^8}{9!} \dots$$

$$= 1 - \frac{3x^2}{3 \cdot 2!} + \frac{5x^4}{5 \cdot 4!} - \frac{7x^6}{7 \cdot 6!} + \frac{9x^8}{9 \cdot 8!} \dots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \dots = \cos x$$

Chapter 15

SW13 Mehrdimensionale Differentialrechnung I

15.1 Multivariate Funktionen

$f(x, y) = x + y$, wobei $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{R}^2 weil zwei Argumente, (x, y))

15.2 Konturlinie

Um Kontur- oder Niveaulinien für irgend ein Niveau c zu zeichnen, muss man die Gleichung $f(x, y) = c$ nach (x, y) auflösen.

15.2.1 Beispiel

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

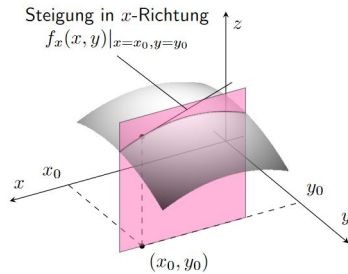
Konturlinie: $f(x, y) = c = \text{const}$

$$x^2 - y^2 = c$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 - c}$$

$$x = \pm\sqrt{y^2 + c}$$

15.3 Partielle Ableitung



Sei f eine reellwertige Funktion von zwei Variablen. Wir betrachten die Ebene $y = y_0$ für eine Konstante y_0 . Dann hängt die Funktion

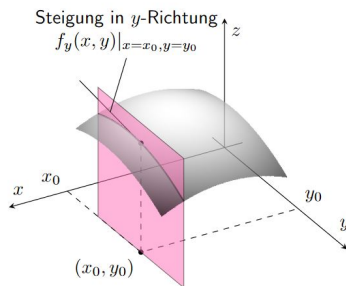
$$g(x) = f(x, y_0)$$

nur noch von der einen Variablen x ab. Diese Funktion können wir mit den bereits bekannten Methoden nach x ableiten. Das Resultat ist nichts anderes, als die partielle Ableitung von f nach x .

$$g'(x) = f_x(x, y_0) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{x, y=y_0}$$

an der Stelle $(x, y = y_0)$.

Hier bezeichnen f_x , oder $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, die partielle Ableitung von f nach der Variablen x .



Analog können wir $x = x_0$ fixieren und erhalten eine Funktion, die nur noch von y abhängt:

$$h(y) = f(x_0, y)$$

Die gewöhnliche Ableitung von h nach y ist dann nichts anderes, als die partielle Ableitung von f nach y

$$h'(y) = f_y(x_0, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{x=x_0, y}$$

an der Stelle $(x = x_0, y)$.

Wieder bezeichnen f_y , oder $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, die partielle Ableitung von f nach der Variablen y .

15.3.1 Definition

Die partiellen Ableitungen von f nach x und y an der Stelle (x_0, y_0) sind nach dem oben Gesagten wie folgt definiert:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) =$$

Änderungsrate von f bezüglich x in (x_0, y_0)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} = f_y(x_0, y_0) =$$

Änderungsrate von f bezüglich y in (x_0, y_0)

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

15.3.2 Beispiel 1

Sei $f(x, y) = \frac{x^2}{y+1}$. Gesucht $f_x(3, 2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y+1} \cdot 2x = \frac{2x}{y+1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(3,2)} = \frac{2 \cdot 3}{2+1} = 2$$

15.3.3 Beispiel 2

$$f(x, y) = (3xy + 2x)^5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5(3xy + 2x)^4 \cdot (3y + 2) \quad (\text{nach } x \text{ abgeleitet})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 5(3xy + 2x)^4 \cdot (3x) \quad (\text{nach } y \text{ abgeleitet})$$

15.3.4 Beispiel 3

$$f(x, y) = e^{x+3y} \sin(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+3y} \cdot 1 \cdot \sin(x, y) + e^{x+3y} \cdot \cos(x, y) \cdot y = e^{x+3y} (\sin(x, y) + y \cos(x, y))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+3y} \cdot 3 \cdot \sin(x, y) + e^{x+3y} \cdot \cos(x, y) \cdot x = e^{x+3y} (3 \sin(x, y) + x \cos(x, y))$$

15.4 Definition - Der Gradient

Sei f eine reellwertige Funktion (ein Skalar) welche von zwei Variablen x und y abhängt.

Dann ist der Gradient von f derjenige Vektor, dessen Komponenten die partiellen Ableitungen von f nach den einzelnen Variablen sind, dh:

$$\nabla f(\chi) = \begin{bmatrix} f_x(\chi) \\ f_y(\chi) \end{bmatrix} \quad \text{oder ein bisschen ausführlicher} \quad \nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{bmatrix}$$

15.4.1 Beispiel 1

Gesucht ist der Gradient von $f(x, y) = x + e^y$. Wie lautet der Gradient an der Stelle $(1, 1)$.

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 1$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = e^y$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^y \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(1,1) = \nabla f|_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix}$$

15.4.2 Beispiel 2

Gesucht ist der Gradient von $f(x,y) = 3x^2y$ für einen beliebigen Punkt. Wie lautet der Gradient an der Stelle $(1,1)$.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 6xy$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2$$

$$\nabla(x,y) = \begin{bmatrix} 6xy \\ 3x^2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla(1,1) = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

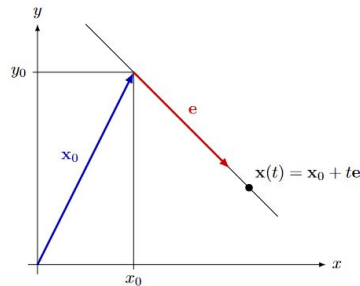
$$\nabla(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

15.4.3 Eigenschaften des Gradienten

Ist f eine anständige Funktion, dh insbesondere im Punkt (x_0, y_0) differenzierbar mit dem Gradienten $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, dann ist:

- die Richtung des Gradienten $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$
 - senkrecht (orthogonal) zu den Konturlinien von f durch (x_0, y_0) , dh den Kurven mit $f(x_0, y_0) = f(x, y)$
 - in Richtung der maximalen Zunahme von f
- der Betrag des Gradienten $||\nabla f(x_0, y_0)||$ ist
 - ist gleich der maximalen Änderungsrate von f in diesem Punkt
 - ist gross, wenn die Konturlinien nahe beieinander sind und klein, wenn sie weit auseinander liegen.

15.5 Richtungsableitung



Die Änderungsrate wird Richtungsableitung von f im Punkt x_0 in Richtung von e genannt und bezeichnet mit:

$$D_e f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

15.5.1 Beispiel mit Richtungsvektor

Berechne die Richtungsableitung von $f(x, y) = x + y$ (Ebene) im Punkt $x_0 = [0, 0]^T$ in Richtung des Einheitsvektors $e = [\cos \psi, \sin \psi]^T$. Ist e ein Einheitsvektor?

$$f(x, y) = x + y$$

$$P(0/0)$$

$$e = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$$

$\|e\|$ bedeutet Länge von e

$$\|e\|^2 = \cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1$$

$\|e\| = 1$ Vektor e ist Einheitsvektor, weil Länge = 1

Ableitung von f im Punkt P mit Richtung e :

$$f(\mathbf{p} + t\mathbf{e}) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} t \cos \psi \\ t \sin \psi \end{pmatrix}\right) = f(t \cos \psi, t \sin \psi) = t \cos \psi + t \sin \psi = t(\cos \psi + \sin \psi)$$

$$f(\mathbf{p}) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f(0, 0) = 0 + 0 = 0$$

$$D_e f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{p} + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{p})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\cos \psi + \sin \psi)}{t} = \cos \psi + \sin \psi$$

15.5.2 Beispiel ohne Richtungsvektor

Für einfachere Berechnung siehe 15.6 Richtungsableitung und Gradient Bestimme die Richtungsableitung von $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^3 + z^2$ in $x_0 = [2, 1, 3]^T$ in Richtung von $a = [1, 0, -2]^T$. Beachte, a ist kein Richtungsvektor.

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^3 + z^2$$

$$P(2/1/3)$$

$$|a| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$a_0 = e = \frac{a}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{p} + t\mathbf{e}) = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 2 + \frac{t}{\sqrt{5}} \\ 1 \\ 3 - \frac{2t}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\right) = f\left(2 + \frac{t}{\sqrt{5}}, 1, 3 - \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)$$

$$x(t) = 2 + \frac{t}{\sqrt{5}}$$

$$y(t) = 1$$

$$z(t) = 3 - \frac{2t}{\sqrt{5}}$$

$$f(t) = 2(x(t))^2 + 3(y(t))^3 + (z(t))^2 = 2\left(2 + \frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2 + 3(1)^3 + \left(3 - \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2 = \mathbf{f}(\mathbf{p} + t\mathbf{e})$$

$$D_e f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+te) - f(p)}{t} = \dots = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

Falls wir uns vom Punkt p in Richtung des Vektors a um eine Einheit bewegen, nimmt die Funktion um $-\frac{4}{\sqrt{5}}$ ab.

15.6 Richtungsableitung und Gradient

Für eine anständige (sprich differenzierbare) Funktion kann die Richtungsableitung von f im Punkt p in Richtung des Einheitsvektors e mit Hilfe des Gradienten bestimmt werden:

$$D_e f(p) = \nabla f(p) \cdot e = |\nabla f(p)| \cos \phi$$

15.6.1 Beispiel

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^3 + z^2$$

$$P(2/1/3)$$

$$|a| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$e = \frac{a}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x \\ 9y^2 \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(2, 1, 3) = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 D_e f(2, 1, 3) &= \nabla f(2, 1, 3) \cdot e = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot ((8 \cdot 1) + (9 \cdot 0) + (6 \cdot -2)) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (8 + 0 - 12) = \frac{-4}{\sqrt{5}}
 \end{aligned}$$

Chapter 16

SW14 Mehrdimensionale Differentialrechnung II

16.1 Totales Differential

"Komplete" Ableitung von Funktion mit mehreren Variablen $f(x, y)$:

$$df = f_x(a, b)dx + f_y(a, b)dy \text{ oder in Kurzform } df = f_x dx + f_y dy$$

16.2 Linearisierung von Funktionen

16.2.1 ...mit einer Variable

$f(x), t(x)$ ist die Linearisierung (Tangente), x_0 ist der Punkt wo linearisiert wird/Tangente anliegt

$$t(x) = mx + b \text{ oder } t(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0$$

$$m = f'(x_0)$$

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

16.2.2 ...mit mehreren Variablen

$$g(x, y)$$

$$L(x, y) = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\nabla g(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} g_x(x_0, y_0) \\ g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$$L(x, y) = g(x_0, y_0) + \nabla g(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$h(x, y, z)$$

$$\nabla h(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} h_x(x_0, y_0, z_0) \\ h_y(x_0, y_0, z_0) \\ h_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

$$M(x, y, z) = h(x_0, y_0, z_0) + \nabla h(x_0, y_0, z_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

16.3 Tangente an die Konturlinie

$$f(x, y)$$

$$p(x_0, y_0)$$

Gleichung der Tangente an die Konturlinie von f im Punkt p ist:

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

16.4 Tangentialebene an die Konturfläche

$$f(x, y, z)$$

$$p(x_0, y_0, z_0)$$

Gleichung der Tangentialebene an die Konturfläche:

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

16.5 Newton-Raphson Methode

Wir wollen die nichtlineare Gleichung $f(x) = 0$ lösen.

Startpunkt: x_n

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1}$$

Prozess beliebig wiederholen mit x_{n+1} etc, bis man Nullstelle gefunden hat.

16.6 Mehrdimensionale Newton-Raphson Methode

Wird eher nicht an der Prüfung kommen.

16.7 Kettenregel

Falls f, g, h differenzierbar sind und falls $z = f(x, y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$, dann ist die Ableitung von f nach t :

$$f(x, y)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

16.7.1 Beispiel

Sei $z = f(x, y) = x \sin y$, wobei $x = t^2$ und $y = 2t + 1$. Sei $\bar{f}(t) = f(x(t), y(t))$. Berechnen sie $\bar{f}'(t)$ einerseits direkt und andererseits mit der Kettenregel.

$$f(x, y) = x \sin y$$

$$x = t^2$$

$$y = 2t + 1$$

Direkt (Produkt- und Kettenregel):

$$\bar{f}(x(t), y(t)) = x(t) \sin(y(t)) = t^2(\sin(2t + 1))$$

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = 2t \sin(2t + 1) + t^2 \cos(2t + 1) \cdot 2$$

Kettenregel:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos y$$

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = 2t$$

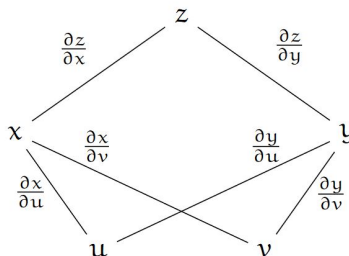
$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = 2$$

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = \sin(2t + 1) \cdot 2t + t^2 \cos(2t + 1) \cdot 2$$

16.8 Kettenregel mit Abhängigkeitsgraphen

Um die partielle Ableitung einer zusammengesetzten Funktion mit mehreren Variablen zu berechnen, hilft der Abhängigkeitsgraph, welcher aufzeigt, wie die Variablen voneinander abhängen.

- Zeichne einen Graphen, in welchem die Beziehungen zwischen den Variablen ersichtlich werden. Knoten sind die Variablen und auf den Kanten wird die entsprechende partielle Ableitung eingetragen.
- Für jeden Pfad zwischen zwei Variablen werden die partiellen Ableitungen auf den Kanten multipliziert.
- Dann werden die Beträge der jeweiligen Pfade addiert.



Falls f, g, h differenzierbar sind und falls $z = f(x, y), x = g(u, v), y = h(u, v)$, dann gilt:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

16.8.1 Beispiel

$$z = x^2 e^y$$

$$x = 4u$$

$$y = 3u^2 - 2v$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= 2xe^y \cdot 4 + x^2 e^y \cdot 6u = 8xe^y + 6ux^2 e^y = 2xe^y(4 + 3ux) = 2 \cdot 4u \cdot e^{3u^2 - 2v} (4 + 3u \cdot 4u) = 8ue^{3u^2 - 2v} (4 + 12u^2) = 32ue^{3u^2 - 2v} (1 + 3u^2)$$

zv gleich berechnen!

16.9 Kritische Punkte Beispiel

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(x^4 - 2x^2 + y^4 - 2y^2)$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} x^3 - x \\ y^3 - y \end{pmatrix} \quad \text{Kritische Punkte: } \nabla f = 0$$

$$I : x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0 \longrightarrow x = 0; x = 1; x = -1$$

$$II : y^3 - y = y(y^2 - 1) = 0 \longrightarrow y = 0; y = 1; y = -1$$

x und y wild kombinieren für alle kritischen Punkte!

16.10 Partielle Ableitungen zweiter Ordnung

Die partiellen Ableitungen einer Funktion sind meist wieder Funktionen und können deshalb wieder abgeleitet werden. Dadurch entstehen die zweiten partiellen Ableitungen oder die partiellen Ableitungen 2. Ordnung. Diesen Prozess kann man natürlich wiederholen!

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx} = (f_x)_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy} = (f_y)_y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy} = (f_x)_y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx} = (f_y)_x$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung haben etwas mit der **Krümmung** der Funktion zu tun.

16.10.1 Beispiel

$$f(x, y) = xy^2 + 3x^2e^y$$

$$f_x = y^2 + 6xe^y$$

$$f_{xx} = 6e^y$$

$$f_{xy} = 2y + 6xe^y$$

$$f_y = 2xy + 3x^2e^y$$

$$f_{yy} = 2x + 3x^2e^y$$

$$f_{yx} = 2y + 6xe^y = f_{xy}$$

16.11 Klassifikation kritischer Punkte - Theorem

Die Funktion $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ habe stetige partielle Ableitungen bis und mit 2. Ordnung und (x_0, y_0) sei ein kritischer Punkt von f . Wir definieren:

$$D = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$$

Dann gilt:

- Falls $D > 0$ und $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, dann ist f minimal in (x_0, y_0) ,
- Falls $D > 0$ und $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, dann ist f maximal in (x_0, y_0) ,

- Falls $D < 0$, dann ist (x_0, y_0) ein Sattelpunkt,
- Falls $D = 0$, dann kann ohne weitere Untersuchungen nichts gesagt werden.

16.11.1 Beispiel

Bestimme die lokale Minima, Maxima und Sattelpunkte von $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$$

$$f_x = 4y - 4x^3$$

$$f_{xx} = -12x^2$$

$$f_{xy} = 4$$

$$f_y = 4x - 4y^3$$

$$f_{yy} = -12y^2$$

$$f_{yx} = 4$$

$$I. 4y - 4x^3 = 0; y - x^3 = 0; x^3 = y$$

$$II. 4x - 4y^3 = 0; x - y^3 = 0; y^3 = x$$

Kritische Punkte: $x = 0, x = 1, x = -1$ und $y = 0, y = 1, y = -1$

Kritische Punkte (x_0, y_0)	$f_{xx}(x_0, y_0)$	$f_{yy}(x_0, y_0)$	$f_{xy}(x_0, y_0)$	$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$
(0,0)	0	0	4	-16
(1,1)	-12	-12	4	128
(-1,-1)	-12	-12	4	128