LINAL - Spick

Johanna Koch

Contents

1 Vektoren, Matrizen und Gleichungssysteme 2
1.1 Skalare und Vektoren 2
1.1.1 Vektoraddition 2
1.1.2 Vektor mit Skalar multiplizieren 2
1.1.3 Rechenregeln für das Rechnen mit Vektoren 2
1.1.4 Skalarprodukt 3
1.1.5 Betrag (Länge) eines Vektors 3
1.1.6 Einheitsvektor 3
1.1.7 Rechenregeln für das Skalarprodukt und Einheitsvektor . . . 3
1.1.8 Paarweise Senkrechte Vektoren 3
1.2 Matrizen 4
1.2.1 Matrizen addieren 4
1.2.2 Matrix mit einer Zahl multiplizieren 4
1.2.3 Rechnen mit Matrizen 4
1.2.4 Matrix mit Vektor multiplizieren 5
1.2.5 Matrixmultiplikation 5
1.3 Gleichungssysteme 7
1.3.1 Lineare Gleichung 7

2 Lineare Gleichungssysteme lösen 1: Gausselimination, Lösbarkeitskriterien 8
2.1 Begriffe 8
2.1.1 Leitkoeffizient 8
2.1.2 Zeilenstufenform ZFS 8
2.1.3 Pivotelemente 9
2.2 Gauss-Eliminationsverfahren 9
2.2.1 Beispiel 9
2.3 Lösbarkeit eines LGS 10

Chapter 1

Vektoren, Matrizen und Gleichungssysteme

1.1 Skalare und Vektoren

Skalar: ist eine reelle (oder komplexe) Zahl.
Vektor: hat einen (reellen) Betrag und eine Richtung.
Wir betrachten Vektoren in der Ebene $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$

1.1.1 Vektoraddition

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}$

1.1.2 Vektor mit Skalar multiplizieren

$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{bmatrix}$

1.1.3 Rechenregeln für das Rechnen mit Vektoren

Zusammen mit dem Nullvektor (Neutralelement der Vektoraddition), 0, gelten die folgenden Regeln für das Rehcnen mit Vektoren:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ Kommuntativgesetz
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ Assoziativgesetz
- $\vec{a} + 0 = \vec{a}$ Existenz eines Neutralelements 0
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$ Existens des Inversen
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$

- $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
- $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$
- $1\vec{a} = \vec{a}$

1.1.4 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert durch $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi$. Dabei ist ϕ der Winkel zwischen den Vektoren a und b. Beachte den Unterschied zwischen den Symbolen "$\bullet$" (Skalarprodukt zweier Vektoren) und "$\cdot$" (normales Produkt zweier reellen Zahlen). Hier stehen $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ für die Längen von a und b.

$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

1.1.5 Betrag (Länge) eines Vektors

Mit Hilfe des Skalarprodukts lässt sich der Betrag a des Vektors $\vec{a}$ wie folgt definieren:

$a \equiv |a| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$ oder $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \bullet \vec{a}$

Dann gilt im 2D-Fall (Satz von Pythagoras): $a \equiv |a| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

1.1.6 Einheitsvektor

$\vec{e} =$ Einheitsvektor
$|\vec{e}| = 1$

1.1.7 Rechenregeln für das Skalarprodukt und Einheitsvektor

Für beliebige reelle Zahlen λ sowie beliebige Vektoren $\vec{a}$,$\vec{b}$ und $\vec{c}$ gilt:

- $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ Kommuntativgesetz
- $\vec{a} \bullet (b + c) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$ Distributivgesetz
- $\lambda(\vec{a} \bullet \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b})$

1.1.8 Paarweise Senkrechte Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen genau dann senkrecht aufeinander, sind also orthogonal, falls ihr Skalarprodukt verschwindet.

$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$

Hier haben wir angenommen, dass der Nullvektor zu jedem Vektor senkrecht steht.

1.2 Matrizen

Eine $(m \times n)$-Matrix ist ein rechteckiges Schema von Zahlen. Es besteht aus m Zeilen und n Spalten. Das Element $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ steht in der i. Zeile und der j. Spalte.

Für eine quadratische Matrix gilt $m = n$

Der erste Index i von $a_{i,j}$ ist der Zeilenindex, der zweite j der Spaltenindex.

Man schreibt kurz auch $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,j} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,j} & a_{2,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,j} & a_{i,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,j} & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

1.2.1 Matrizen addieren

Matrixaddition ist nur definiert, wenn beide Matrizen dieselbe Dimension haben!

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{1,1} + b_{1,1}) & (a_{1,2} + b_{1,2}) \\ (a_{2,1} + b_{2,1}) & (a_{2,2} + b_{2,2}) \end{bmatrix}$$

1.2.2 Matrix mit einer Zahl multiplizieren

Eine $(m \times n)$-Matrizen $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ wird mit einer Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ multipliziert, indem man jedes Matrixelement mit dieser Zahl multipliziert.

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} \\ \alpha a_{2,1} & \alpha a_{2,2} \end{bmatrix}$$

1.2.3 Rechnen mit Matrizen

- Durch die Matrixaddition wird zwei $(m \times n)$-Matrizen wieder eine $(m \times n)$-Matrix zugeordnet.
- Die **Nullmatrix** (d.h. eine Matrix mit lauter Nullen) ist das **Neutralelement** der Matrixaddition: $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
- Das Negative einer Matrix **A** ist die Matrix, bei der jedes Matrixelement mit (-1) multipliziert wird: $\mathbf{A} = (a_{i,j}) \to -\mathbf{A} = (-a_{i,j})$. Man nennt $\mathbf{A}$ das **Inverse** von $\mathbf{A}$ bezüglich Addition.
- Die Subtraktion ist definiert durch $\mathbf{A} - \mathbf{B} := \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B}$. Addiere zu $\mathbf{A}$ das Negative der Matrix $\mathbf{B}$
- **Assoziativgesetz**: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
- **Kommutativgesetz**: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

1.2.4 Matrix mit Vektor multiplizieren

Eine $(m \times n)$-Matrizen $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ wird mit einem n-dimensionalen (Spalten-) Vektor $\vec{x}$ wie folgt multipliziert:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 a_{1,1} & x_2 a_{1,2} \\ x_1 a_{2,1} & x_2 a_{2,2} \end{bmatrix}$$

1.2.5 Matrixmultiplikation

Das Produkt der (m×n)-Matrix $A = [a_{i,j}]$ und der (n×p)-Matrix $B = [ab_{i,j}]$ ist eine (m×p)-Matrix $C = [c_{i,j}]$ definiert durch:

$C = AB = [c_{i,j}]$ wobei $c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + ...a_{i,k}b_{k,j} = \sum\limits_{l=1}^{k} a_{i,l}b_{l,j}$

- $c_{i,j}$ ist das Skalarprodukt des i Zeilenvektors von A mit dem j. Spaltenvektor von B.
- Beachte: Anzahl Spalten von A (n) müssen mit der Anzahl Zeilen von B (n) übereinstimmen um die beiden Matrizen multiplizieren zu können.

Beispiel

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ und die Matrix $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$.

1. Spaltenvektor:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \\ & \\ & \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = c_{11}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \\ c_{21} & \\ & \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = c_{21}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \\ c_{21} & \\ c_{31} & \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} = c_{31}$$

2. Spaltenvektor:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & \\ c_{31} & \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = c_{12}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = c_{22}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} = c_{32}$$

1.3 Gleichungssysteme

1.3.1 Lineare Gleichung

Allgemeine Form: $ax + b = 0$

Chapter 2

Lineare Gleichungssysteme lösen 1: Gausselimination, Lösbarkeitskriterien

2.1 Begriffe

2.1.1 Leitkoeffizient

Den ersten Eintrag einer Zeile, der nicht verschwindet, nennt man Leitkoeffizient (hier eingekreist).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 10 \end{array}\right]$$

2.1.2 Zeilenstufenform ZFS

Steht in einer Matrix jeder Leitkoeffizient weiter rechts als der Leitkoeffizient in der Zeile darüber und stehen alle Zeilen ohne Leitkoeffizient (also solche, in denen nur Nullen stehen) ganz unten, hat die Matrix die Zeilenstufenform (ZFS). (Hier eingekreist)

- Die Leitkoeffizienten müssen nicht zwangsläufig alle auf der Hauptdiagonalen stehen.
- Eine quadratische Matrix heisst obere Dreieckmatrix, wenn alle Einträge unter der Hauptdiagonalen Null sind.

- Analog dazu definiert man auch eine untere Dreieckmatrix.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2.1.3 Pivotelemente

Die Leitkoeffiziente, die man durch Vertauschen der Zeilen möglichst weit links bringt, nenn man Pivotelemente.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 3 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & -4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

2.2 Gauss-Eliminationsverfahren

Beim Gauss-Verfahren geht es darum, lineare Gleichungssysteme so umzuformen, dass sich eine Zeilenstufenform ergibt. Dann wird durch Rückwärtseinsetzen eine eindeutige Lösung bestimmt, falls das LGS lösbar ist. Dabei geht man Schritt für Schritt vor und wendet in jedem Schritt eine sogenannte elementare Zeilenstufenform (EZ) auf die EKM (erweiterte Koeffizientenmatrix) an. Davon gibt es drei Typen:

1. Man darf eine Zeile der EKM mit einem Faktor, der nicht Nul ist, multiplizieren.
2. Man darf zwei Zeilen der EKM vertauschen.
3. Man darf das Vielfache einer Zeile zu einer anderen addieren.

2.2.1 Beispiel

Die EKM (erweiterte Koeffizientenmatrix) ist:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Das daraus resultierende LGS (lineare Gleichungssystem):
$x + 2y + z = 2$
$3x + 8y + z = 12$
$4y + z = 2$

Im EKS alle Elemente unterhalb der Diagonalen Null bekommen (eingekreist):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Zweite Zeile minus drei mal die erste Zeile:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Dritte Zeile minus zwei mal die zweite Zeile:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right]$$

Zweite Zeile durch 2 dividieren, dritte Zeile durch 5 dividieren:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Nun einfaches LGS auflösen:

$x + 2y + z = 2$
$y - z = 3$
$z = -2$
$\Rightarrow z = -2; y = 1; x = 2$

2.3 Lösbarkeit eines LGS

TODO