

LINAL - Spick

Johanna Koch

Contents

1	Vektoren, Matrizen und Gleichungssysteme	3
1.1	Skalare und Vektoren	3
1.1.1	Vektoraddition	3
1.1.2	Vektor mit Skalar multiplizieren	3
1.1.3	Rechenregeln für das Rechnen mit Vektoren	3
1.1.4	Skalarprodukt	4
1.1.5	Betrag (Länge) eines Vektors	4
1.1.6	Einheitsvektor	4
1.1.7	Rechenregeln für das Skalarprodukt und Einheitsvektor	4
1.1.8	Paarweise Senkrechte Vektoren	4
1.2	Matrizen	5
1.2.1	Matrizen addieren	5
1.2.2	Matrix mit einer Zahl multiplizieren	5
1.2.3	Rechnen mit Matrizen	5
1.2.4	Matrix mit Vektor multiplizieren	6
1.2.5	Matrixmultiplikation	6
1.3	Gleichungssysteme	8
1.3.1	Lineare Gleichung	8
2	Lineare Gleichungssysteme lösen 1: Gausselimination, Lösbarkeitskriterien	9
2.1	Begriffe	9
2.1.1	Leitkoeffizient	9
2.1.2	Zeilenstufenform ZFS	9
2.1.3	Pivotelemente	10
2.2	Gauss-Eliminationsverfahren	10
2.2.1	Beispiel	10
2.3	Lösbarkeit eines LGS	11
2.3.1	Definition Rang	11
2.3.2	Das Rangkriterium allgemein	12
2.3.3	Rangkriterium im Spezialfall	13
2.4	Schlüsselergebnisse	15

3	Lineare Gleichungssysteme lösen 2: Gausselimination und Optimierung beim Ermitteln der Lösung durch LU-Zerlegung	16
3.1	Einheitsmatrix	16
3.2	Transponierte Matrix	17
3.3	Invertierbare oder reguläre Matrix	17
3.3.1	Beispiel	17
3.4	Rechenregeln	18
3.5	Permutationsmatrix	18
3.5.1	Beispiel	18
3.6	TODO: LU-Zerlegung	18
4	Lineare Gleichungssysteme lösen 3: Optimierung der Lösungsbestimmung durch Gauss-Jordan-Elimination, Inverse Matrix, Determinante	19
4.1	Gauss-Jordan-Algorithmus Vorgehensweise	19
4.2	Gauss-Jordan-Algorithmus inverse Matrix	20
4.2.1	Beispiel	20
4.3	Determinante	20
4.3.1	Determinante einer 2x2-Matrix	20
4.3.2	Fläche mit Determinante	20
4.3.3	Determinante 3x3 Matrix	21
4.3.4	Determinante Regeln	21
4.3.5	Determinante äquivalente Aussagen	21

Chapter 1

Vektoren, Matrizen und Gleichungssysteme

1.1 Skalare und Vektoren

Skalar: ist eine reelle (oder komplexe) Zahl.

Vektor: hat einen (reellen) Betrag und eine Richtung.

Wir betrachten Vektoren in der Ebene $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$

1.1.1 Vektoraddition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}$$

1.1.2 Vektor mit Skalar multiplizieren

$$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{bmatrix}$$

1.1.3 Rechenregeln für das Rechnen mit Vektoren

Zusammen mit dem Nullvektor (Neutralelement der Vektoraddition), 0, gelten die folgenden Regeln für das Rechnen mit Vektoren:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ Kommutativgesetz
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ Assoziativgesetz
- $\vec{a} + 0 = \vec{a}$ Existenz eines Neutralelements 0
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$ Existenz des Inversen
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

- $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
- $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$
- $1\vec{a} = \vec{a}$

1.1.4 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist definiert durch $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \phi$. Dabei ist ϕ der Winkel zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Beachte den Unterschied zwischen den Symbolen " \bullet " (Skalarprodukt zweier Vektoren) und " \cdot " (normales Produkt zweier reellen Zahlen). Hier stehen $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ für die Längen von \vec{a} und \vec{b} .

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

1.1.5 Betrag (Länge) eines Vektors

Mit Hilfe des Skalarprodukts lässt sich der Betrag a des Vektors \vec{a} wie folgt definieren:

$$a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} \text{ oder } |\vec{a}|^2 = \vec{a} \bullet \vec{a}$$

Dann gilt im 2D-Fall (Satz von Pythagoras): $a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

1.1.6 Einheitsvektor

\vec{e} = Einheitsvektor

$$|\vec{e}| = 1$$

1.1.7 Rechenregeln für das Skalarprodukt und Einheitsvektor

Für beliebige reelle Zahlen λ sowie beliebige Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} gilt:

- $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ Kommutativgesetz
- $\vec{a} \bullet (b + c) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$ Distributivgesetz
- $\lambda(\vec{a} \bullet \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (\lambda\vec{b})$

1.1.8 Paarweise Senkrechte Vektoren

Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} stehen genau dann senkrecht aufeinander, sind also orthogonal, falls ihr Skalarprodukt verschwindet.

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$$

Hier haben wir angenommen, dass der Nullvektor zu jedem Vektor senkrecht steht.

1.2 Matrizen

Eine $(m \times n)$ -Matrix ist ein rechteckiges Schema von Zahlen. Es besteht aus m Zeilen und n Spalten. Das Element $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ steht in der i . Zeile und der j . Spalte.

Für eine quadratische Matrix gilt $m = n$

Der erste Index i von $a_{i,j}$ ist der Zeilenindex, der zweite j der Spaltenindex.

Man schreibt kurz auch $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,j} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,j} & a_{2,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,j} & a_{i,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,j} & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

1.2.1 Matrizen addieren

Matrixaddition ist nur definiert, wenn beide Matrizen dieselbe Dimension haben!

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{1,1} + b_{1,1}) & (a_{1,2} + b_{1,2}) \\ (a_{2,1} + b_{2,1}) & (a_{2,2} + b_{2,2}) \end{bmatrix}$$

1.2.2 Matrix mit einer Zahl multiplizieren

Eine $(m \times n)$ -Matrizen $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ wird mit einer Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ multipliziert, indem man jedes Matrixelement mit dieser Zahl multipliziert.

$$\alpha \mathbf{A} = \alpha \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} \\ \alpha a_{2,1} & \alpha a_{2,2} \end{bmatrix}$$

1.2.3 Rechnen mit Matrizen

- Durch die Matrixaddition wird zwei $(m \times n)$ -Matrizen wieder eine $(m \times n)$ -Matrix zugeordnet.
- Die **Nullmatrix** (d.h. eine Matrix mit lauter Nullen) ist das **Neutralelement** der Matrixaddition: $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
- Das Negative einer Matrix \mathbf{A} ist die Matrix, bei der jedes Matrixelement mit (-1) multipliziert wird: $\mathbf{A} = (a_{i,j}) \rightarrow -\mathbf{A} = (-a_{i,j})$. Man nennt \mathbf{A} das **Inverse** von \mathbf{A} bezüglich Addition.
- Die Subtraktion ist definiert durch $\mathbf{A} - \mathbf{B} := \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B}$. Addiere zu \mathbf{A} das Negative der Matrix \mathbf{B}
- **Assoziativgesetz:** $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
- **Kommutativgesetz:** $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

1.2.4 Matrix mit Vektor multiplizieren

Eine $(m \times n)$ -Matrizen $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ wird mit einem n -dimensionalen (Spalten-) Vektor \vec{x} wie folgt multipliziert:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 a_{1,1} & x_2 a_{1,2} \\ x_1 a_{2,1} & x_2 a_{2,2} \end{bmatrix}$$

1.2.5 Matrixmultiplikation

Das Produkt der $(m \times n)$ -Matrix $A = [a_{i,j}]$ und der $(n \times p)$ -Matrix $B = [ab_{i,j}]$ ist eine $(m \times p)$ -Matrix $C = [c_{i,j}]$ definiert durch:

$$C = AB = [c_{i,j}] \text{ wobei } c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{l=1}^k a_{i,l}b_{l,j}$$

- $c_{i,j}$ ist das Skalarprodukt des i Zeilenvektors von A mit dem j . Spaltenvektor von B .
- Beachte: Anzahl Spalten von A (n) müssen mit der Anzahl Zeilen von B (n) übereinstimmen um die beiden Matrizen multiplizieren zu können.

Beispiel

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ und die Matrix $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$.

1. Spaltenvektor:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} \quad \left| \quad a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = c_{11} \right.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} \quad \left| \quad a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = c_{21} \right.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{bmatrix} \quad \left| \quad a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} = c_{31} \right.$$

2. Spaltenvektor:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} \quad \left| \quad a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = c_{12} \right.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} \quad \left| \quad a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = c_{22} \right.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} \quad \left| \quad a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} = c_{32} \right.$$

1.3 Gleichungssysteme

1.3.1 Lineare Gleichung

Allgemeine Form: $ax + b = 0$

Chapter 2

Lineare Gleichungssysteme lösen 1: Gausselimination, Lösbarkeitskriterien

2.1 Begriffe

2.1.1 Leitkoeffizient

Den ersten Eintrag einer Zeile, der nicht verschwindet, nennt man Leitkoeffizient (hier eingekreist).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{2} & 5 & -2 & -3 \\ \textcircled{3} & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & \textcircled{8} & 10 \end{array} \right]$$

2.1.2 Zeilenstufenform ZFS

Steht in einer Matrix jeder Leitkoeffizient weiter rechts als der Leitkoeffizient in der Zeile darüber und stehen alle Zeilen ohne Leitkoeffizient (also solche, in denen nur Nullen stehen) ganz unten, hat die Matrix die Zeilenstufenform (ZFS). (Hier eingekreist)

- Die Leitkoeffizienten müssen nicht zwangsläufig alle auf der Hauptdiagonalen stehen.
- Eine quadratische Matrix heisst obere Dreieckmatrix, wenn alle Einträge unter der Hauptdiagonalen Null sind.

- Analog dazu definiert man auch eine untere Dreiecksmatrix.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \textcircled{2} & 5 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \textcircled{3} & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{8} & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

2.1.3 Pivotelemente

Die Leitkoeffiziente, die man durch Vertauschen der Zeilen möglichst weit links bringt, nennt man Pivotelemente.

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 3 & 8 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} \textcircled{2} & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & -4 & 3 & 8 \end{array} \right]$$

2.2 Gauss-Eliminationsverfahren

Beim Gauss-Verfahren geht es darum, lineare Gleichungssysteme so umzuformen, dass sich eine Zeilenstufenform ergibt. Dann wird durch Rückwärtseinsetzen eine eindeutige Lösung bestimmt, falls das LGS lösbar ist. Dabei geht man Schritt für Schritt vor und wendet in jedem Schritt eine sogenannte elementare Zeilenstufenform (EZ) auf die EKM (erweiterte Koeffizientenmatrix) an. Davon gibt es drei Typen:

1. Man darf eine Zeile der EKM mit einem Faktor, der nicht Null ist, multiplizieren.
2. Man darf zwei Zeilen der EKM vertauschen.
3. Man darf das Vielfache einer Zeile zu einer anderen addieren.

2.2.1 Beispiel

Die EKM (erweiterte Koeffizientenmatrix) ist:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Das daraus resultierende LGS (lineare Gleichungssystem):

$$x + 2y + z = 2$$

$$3x + 8y + z = 12$$

$$4y + z = 2$$

Im EKS alle Elemente unterhalb der Diagonalen Null bekommen (eingekreist):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ \textcircled{3} & 8 & 1 & 12 \\ \textcircled{0} & \textcircled{4} & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Zweite Zeile minus drei mal die erste Zeile:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Dritte Zeile minus zwei mal die zweite Zeile:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array} \right]$$

Zweite Zeile durch 2 dividieren, dritte Zeile durch 5 dividieren:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Nun einfaches LGS auflösen:

$$x + 2y + z = 2$$

$$y - z = 3$$

$$z = -2$$

$$\Rightarrow z = -2; y = 1; x = 2$$

2.3 Lösbarkeit eines LGS

Bei der Beurteilung der Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen spielt der Rang zugeordneter Matrizen eine entscheidende Rolle. Der Rang einer Matrix ist eines ihrer grundlegendsten Merkmale. Es gibt mehrere gleichwertige Definitionen von Rang. Diesen Begriff werden wir später noch einmal aufnehmen, wenn wir uns mit Vektorräumen beschäftigen werden.

2.3.1 Definition Rang

Die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen oder Spalten einer Matrix A wird einfach als Rang von A genannt. Die Schreibweise ist $r(A)$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r(A) = 3$$

Durch Linearkombination von Zeilen oder Spalten einer Matrix (Multiplikation einer

Zeile/Spalte mit einem Faktor und Addition oder Subtraktion zu einer anderen Zeile/Spalte) ändert sich der Rang der Matrix nicht. Um den Rang einer Matrix zu bestimmen, formt man diese daher mittels des Gauss-Verfahrens in eine äquivalente Matrix in Zeilentufenform um: Wenn die Umformung in einer Zeile stoppt, weil in den nachfolgenden Zeilen nur noch Nullen stehen, entspricht die Anzahl der Zeilenvektoren, die ungleich Null (0) sind, dann dem Rang der Matrix.

Beispiel

Mittels Eliminationsverfahren die Matrix \mathbf{A} in eine äquivalente Matrix in Zeilenstufenform umformen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow II + I \cdot 2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow III + I \cdot -2 \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow III + II \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Anzahl der Zeilenvektoren, die ungleich Null (0) sind, entspricht dann dem Rang der Matrix. Diese Zahl ist hier 2: $r(\mathbf{A}) = 2$

Eigenschaften vom Rang

Seien $n, m \in \mathbb{N}$.

- Die einzige Matrix mit Rang 0 ist die Nullmatrix $0_{m \times n}$
- Für den Rang einer $(m \times n)$ -Matrix \mathbf{A} gilt: $r(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.
- Die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix E_n hat den Rang n
- Die Transponierte \mathbf{A}^T einer Matrix \mathbf{A} hat den selben Rang wie \mathbf{A} : $r(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A})$
- Subadditivität: Für zwei $(m \times n)$ -Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} gilt: $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$

2.3.2 Das Rangkriterium allgemein

Die EKM ist eine $(m \times (n + 1))$ -Matrix $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,j} & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,j} & a_{2,n} & b_2 \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,j} & a_{i,n} & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,j} & a_{m,n} & b_m \end{array} \right]$$

- Ist $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, dann hat das GLS eine Lösung, wobei $n - r(\mathbf{A})$ Unbekannten frei gewählt werden können.
- Ist $r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, dann gibt es keine Lösung.

Beispiele

- zum Fall 1: $x + y + z = 3$ und $2x - y - z = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & -1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Die Gleichung hat eine Lösung, weil $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$. Aber die Anzahl der Unbekannten ist 3. Somit kann $3 - 2 = 1$ Unbekannte frei gewählt werden. Gemäss des Gauss-Verfahrens rechnen wir $\text{II} + \text{I}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 3 & 0 & 0 & | & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \frac{4}{3}$$

Wir wählen nun $y = s$, $s \in \mathbb{R}$ frei und lösen I für z auf: $z = \frac{5}{3} - s$. Die Lösung lautet:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ s \\ \frac{5}{3} - s \end{bmatrix}$$

- zum Fall 2: $w + x + y - z = 1$, $2w - x + y + z = 3$, $3w + 2y = 5$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Wir führen das Gauss-Verfahren zur Rangbestimmung aus. Wir berechnen $\text{III} - 3\text{I}$ und $\text{II} - 2\text{I}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 & | & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Wir stellen fest, dass die zweite und dritte Zeilen in \mathbf{A} linear abhängig sind aber in der EKM nicht. Daher $r(\mathbf{A}) = 2 < 3 = r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$. Das System hat keine Lösung. Wie begründen Sie das?

Widersprüchliche Lösung!

2.3.3 Rangkriterium im Spezialfall

Rangkriterium im Spezialfall, nämlich für quadratische $(n \times n)$ -Matrizen. Das heisst, dass im Folgenden das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ genau n Unbekannte und n Gleichungen hat. Dann ist die Koeffizientenmatrix eine $(n \times n)$ -Matrix und die EKM eine $(n \times (n + 1))$ -Matrix.

Ein Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ hat:

- Genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$ gilt. Die Lösung ist dann gegeben durch $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

- Unendlich viele Lösungen, wenn $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A|b}) < n$
- Keine Lösung, wenn $r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A|b})$

Beispiele

- Zum Fall 3: $x + 2y = 3$ und $2x + 5y = 8$. Das System hat zwei Gleichungen und zwei unbekannten.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{A|b}) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{array} \right]$$

Zur Rangbestimmung von KM und EKM führen wir das Gauss-Verfahren durch. Es ergibt sich eine obere Dreiecksmatrix über $\text{II} - 2\text{I}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Somit erhalten wir $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A|b}) = 2$. Da dieser Rang gleich der Anzahl der Unbekannten (2) ist, hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung.

- Zum Fall 4: $x + 2y = 3$ und $2x + 4y = 6$. Das System hat zwei Gleichungen und zwei unbekannten.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{A|b}) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array} \right]$$

Der Rang $r(\mathbf{A}) = 1 < 2$, weil die zweite Spalte linear von der ersten Spalte abhängt:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Der Rang $r(\mathbf{A|b}) = 1 < 2$, weil die dritte Spalte auch linear von der ersten Spalte abhängt:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Da $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A|b}) = 1 < 2$, wird für die Lösung ($2 - 1 = 1$) eine Unbekannte frei

gewählt: $y = s$, $s \in \mathbb{R}$. Die Lösung ist dann: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 - 2s \\ s \end{bmatrix}$.

- Zum Fall 5: $x + 2y = 3$ und $2x + 4y = 7$ Das System hat zwei Gleichungen und zwei unbekannten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{array} \right]$$

Der Rang von \mathbf{A} ist $r(\mathbf{A}) = 1 < 2$, weil die zweite Spalte linear von der ersten Spalte abhängt (s. vorherige Folie). Zur Bestimmung des Rangs von $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ führen wir das Gauss-Verfahren durch. Es ergibt sich eine obere Dreiecksmatrix über $\text{II} - 2\text{I}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Somit $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$. Da $r(\mathbf{A}) = 1 < 2 = r(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, hat demnach das Gleichungssystem keine Lösung. Wie begründen Sie das?

2.4 Schlüsselergebnisse

- Das Gauss-Verfahren bringt Koeffizientenmatrix und erweiterte Koeffizientenmatrix der linearen Gleichungssysteme in Zeilenstufenform.
- Das Endergebnis des Gauss-Verfahren ist in der Regel eine obere oder untere Dreiecksmatrix.
- Das Gauss-Eliminationsverfahren ändert die Lösungen der ursprünglichen Matrix nicht.
- Das Gauss-Eliminationsverfahren ändert die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen oder Spalten nicht.
- Für den Rang einer $(m \times n)$ -Matrix \mathbf{A} gilt: $r(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$
- Für LGS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit n Gleichungen und n unbekannten, ist \mathbf{A} eine quadratische $(n \times n)$ -Matrix. Wenn $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$, dann hat das GLS eine eindeutige Lösung, die durch $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ gegeben ist.
- Ist der Rang einer quadratischen Matrix gleich ihrer Zeilen- und Spaltenzahl, hat sie vollen Rang und ist regulär (invertierbar).

Chapter 3

Lineare Gleichungssysteme lösen 2: Gausselimination und Optimierung beim Ermittelnder Lösung durch LU-Zerlegung

3.1 Einheitsmatrix

Eine quadratische Matrix, in deren Hauptdiagonale nur Einsen stehen und deren sämtliche andere Einträge verschwinden (Null sind), nennt man Einheitsmatrix (engl. identity matrix). Hat so eine Matrix die Dimension $n \times n$, so schreibt man für sie eins der Symbole E_n oder I_n .

$$\mathbf{E}_4 = \mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eine Einheitsmatrix \mathbf{E} hat die Eigenschaft, dass $\mathbf{EA} = \mathbf{AE} = \mathbf{A}$. Einheitsmatrizen sind also neutrale Elemente bezgl. der Matrizenmultiplikation.

3.2 Transponierte Matrix

Eine Matrix \mathbf{A} ist transponiert, wenn man die Matrix an ihrer Hauptdiagonalen spiegelt. In anderen Worten: Eine Matrix \mathbf{A} ist transponiert, wenn man ihre Zeilen und Spalten von der Matrix \mathbf{A} vertauscht. Transponierte Matrix \mathbf{A} schreibt man \mathbf{A}^T . Es gibt einen wichtigen Zusammenhang zwischen Transposition und Matrizenmultiplikation:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -2 & -2 & 8 \\ -1 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 7 \\ 5 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

3.3 Invertierbare oder reguläre Matrix

Sei \mathbf{A} eine quadratische $n \times n$ -Matrix. \mathbf{A} heisst eine invertierbare oder reguläre (auch non-singuläre) Matrix, wenn es eine $n \times n$ -Matrix \mathbf{B} existiert so, dass:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n = \mathbf{E}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

Dann nennt man \mathbf{B} die inverse Matrix zu \mathbf{A} und schreibt sie als \mathbf{A}^{-1}

Die inverse Matrix einer quadratischen ($n \times n$)-Matrix \mathbf{A} (falls sie existiert) ist eine ($n \times n$)-Matrix \mathbf{A}^{-1} , wenn:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n \text{ (eine linke Inverse) und}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n \text{ (eine rechte Inverse)}$$

Wichtig!! Der Algorithmus zur Prüfung der Invertierbarkeit einer Matrix \mathbf{A} ist das Gauss-Jordan-Eliminationsverfahren: \mathbf{A} muss n (von Null verschiedene) Pivotelemente haben.

3.3.1 Beispiel

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4 Rechenregeln

$$\mathbf{AB} \cdot (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{I}$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1}$$

$$(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1}) \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{I}$$

3.5 Permutationsmatrix

Die Permutationsmatrix \mathbf{P} ist eine quadratische $(n \times n)$ -Matrix, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen Eintrag von eins (1) und an anderer Stelle Nullen (0) hat. Die Multiplikation jeder Matrix \mathbf{A} mit der Matrix \mathbf{P} führt zum Vertauschen der Zeilen oder Spalten der Matrix \mathbf{A} . Zur Permutation der Zeilen oder Spalten der Matrix \mathbf{A} wird \mathbf{PA} (Vormultiplizieren) oder \mathbf{AP} (Nachmultiplizieren) durchgeführt. Mit anderen Worten: Die Permutationsmatrix \mathbf{P} ist eine Einheitsmatrix, wo die Zeilen umgeordnet sind.

3.5.1 Beispiel

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{Permutationsmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3.6 TODO: LU-Zerlegung

Chapter 4

Lineare Gleichungssysteme lösen 3: Optimierung der Lösungsbestimmung durch Gauss-Jordan- Elimination, Inverse Matrix, Determinante

4.1 Gauss-Jordan-Algorithmus Vorgehensweise

Startpunkt: Nachdem man ein LGS auf Zeilenstufenform gebracht hat, kann man es optional noch weiter mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen modifizieren. Daraus lässt sich dann die Lösung des LGS direkt (ohne Rückwärtseinsetzen) ablesen.

Wichtig!! Das LGS bzw. dessen erweiterte Koeffizientenmatrix (EKM) ist bereits in Zeilenstufenform. Unser Ziel ist es, in den Spalten oberhalb der Leitkoeffizienten Nullen zu erzeugen:

- Während wir beim Erzeugen der Zeilenstufenform (Gauss-Verfahren) das LGS bzw. dessen EKM von oben nach unten und von links nach rechts durchgearbeitet haben, gehen wir nun von rechts nach links und von unten nach oben vor.

- Es werden keine Zeilen mehr umgetauscht. Der Leitkoeffizient, der gerade daran ist, ist zwangsläufig das Pivotelement.
- Alle diese Pivotelemente werden als Erstes (durch Multiplikation der Zeile mit dem Kehrwert) auf den Wert eins gebracht.

TODO: Beispiel??

4.2 Gauss-Jordan-Algorithmus inverse Matrix

4.2.1 Beispiel

Berechne die inverse Matrix von \mathbf{A} mit dem Gauss-Jordan Algorithmus.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow II - 2I \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow I - 3II \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\text{Probe: } \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3 Determinante

Eine reguläre Matrix ist invertierbar und eine nicht reguläre Matrix ist nicht invertierbar.

Wichtig!! Der algebraische Test für Invertierbarkeit der Matrix \mathbf{A} ist die Determinante von \mathbf{A} : $\det(\mathbf{A})$ darf nicht Null sein.

Die Determinante ist der Flächeninhalt bzw. Volumeninhalt der 2x2Matrix bzw. 3x3Matrix im geometrischen Raum.

4.3.1 Determinante einer 2x2-Matrix

$$\text{Gegeben: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = ad - bc$$

4.3.2 Fläche mit Determinante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = ad - bc = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4$$

Die Fläche von dieser Matrix ist 4.

4.3.3 Determinante 3x3 Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Volumeninhalt bzw Determinante von \mathbf{A} :

$$a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3$$

Anders kann man auch sagen: Seien \mathbf{a}, \mathbf{b} und \mathbf{c} drei Vektoren im Raum. Das Volumen von diesen dreie Vektoren aufgespannten Parallelogramm lässt sich so berechnen:

$$||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| \cdot \mathbf{c}$$

Dies entspricht der Determinante der (3×3) -Matrix deren Spalten \mathbf{a}, \mathbf{b} und \mathbf{c} sind (siehe oben).

4.3.4 Determinante Regeln

- Determinanten von Matrizen in Dreiecksform: das Produkt der Diagonalelemente. Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \det(A) = 2 \cdot 1 \cdot 5$$

- Vertauschen zwei Zeilen: ändert das Vorzeichen der Determinante
- Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor: vergrößert/verkleinert die Determinante um diesen Faktor
- Durch die Addition das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile ändert sich die Determinante nicht.
- Beim Transponieren der Matrizen ändert sich die Determinante nicht. Die oben genannten Regeln gelten auch für die Spalten.

4.3.5 Determinante äquivalente Aussagen

Sei \mathbf{A} eine quadratische $(n \times n)$ -Matrix:

- \mathbf{A} ist regulär
- \mathbf{A}^T ist regulär
- Die Determinante von \mathbf{A} ist nicht null.
- Der Nullvektor ist die einzige Lösung von $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$
- Der Rang von \mathbf{A} ist gleich n

- Der algorithmische Test für die Invertierbarkeit ist das Eliminationsverfahren:
 \mathbf{A} muss n (von Null verschiedene) Pivotelemente haben
- Der algebraische Test für die Invertierbarkeit ist die Determinante von \mathbf{A} :
 $\det(\mathbf{A})$ darf nicht Null sein
- Die Gleichung, die die Invertierbarkeit tests, ist $\mathbf{Ax} = 0 : x = 0$ muss die einzige Lösung sein.