LINAL - Spick

Johanna Koch

Contents

Chapter 1

Vektoren, Matrizen und Gleichungssysteme

1.1 Skalare und Vektoren

Skalar: ist eine reelle (oder komplexe) Zahl.
Vektor: hat einen (reellen) Betrag und eine Richtung.
Wir betrachten Vektoren in der Ebene $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$

1.1.1 Vektoraddition

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}$

1.1.2 Vektor mit Skalar multiplizieren

$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{bmatrix}$

1.1.3 Rechenregeln für das Rechnen mit Vektoren

Zusammen mit dem Nullvektor (Neutralelement der Vektoraddition), 0, gelten die folgenden Regeln für das Rehcnen mit Vektoren:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ Kommuntativgesetz
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ Assoziativgesetz
- $\vec{a} + 0 = \vec{a}$ Existenz eines Neutralelements 0
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$ Existens des Inversen
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

- $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
- $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$
- $1\vec{a} = \vec{a}$

1.1.4 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert durch $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi$. Dabei ist ϕ der Winkel zwischen den Vektoren a und b. Beachte den Unterschied zwischen den Symbolen "$\bullet$" (Skalarprodukt zweier Vektoren) und "$\cdot$" (normales Produkt zweier reellen Zahlen). Hier stehen $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ für die Längen von a und b.

$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

1.1.5 Betrag (Länge) eines Vektors

Mit Hilfe des Skalarprodukts lässt sich der Betrag a des Vektors $\vec{a}$ wie folgt definieren:

$a \equiv |a| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}}$ oder $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \bullet \vec{a}$

Dann gilt im 2D-Fall (Satz von Pythagoras): $a \equiv |a| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

1.1.6 Einheitsvektor

$\vec{e} =$ Einheitsvektor
$|\vec{e}| = 1$

1.1.7 Rechenregeln für das Skalarprodukt und Einheitsvektor

Für beliebige reelle Zahlen λ sowie beliebige Vektoren $\vec{a}$,$\vec{b}$ und $\vec{c}$ gilt:

- $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ Kommuntativgesetz
- $\vec{a} \bullet (b + c) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$ Distributivgesetz
- $\lambda(\vec{a} \bullet \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b})$

1.1.8 Paarweise Senkrechte Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen genau dann senkrecht aufeinander, sind also orthogonal, falls ihr Skalarprodukt verschwindet.

$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$

Hier haben wir angenommen, dass der Nullvektor zu jedem Vektor senkrecht steht.

1.2 Matrizen

Eine $(m \times n)$-Matrix ist ein rechteckiges Schema von Zahlen. Es besteht aus m Zeilen und n Spalten. Das Element $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ steht in der i. Zeile und der j. Spalte.

Für eine quadratische Matrix gilt $m = n$

Der erste Index i von $a_{i,j}$ ist der Zeilenindex, der zweite j der Spaltenindex.

Man schreibt kurz auch $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,j} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,j} & a_{2,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,j} & a_{i,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,j} & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

1.2.1 Matrizen addieren

Matrixaddition ist nur definiert, wenn beide Matrizen dieselbe Dimension haben!

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{1,1} + b_{1,1}) & (a_{1,2} + b_{1,2}) \\ (a_{2,1} + b_{2,1}) & (a_{2,2} + b_{2,2}) \end{bmatrix}$$

1.2.2 Matrix mit einer Zahl multiplizieren

Eine $(m \times n)$-Matrizen $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ wird mit einer Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ multipliziert, indem man jedes Matrixelement mit dieser Zahl multipliziert.

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} \\ \alpha a_{2,1} & \alpha a_{2,2} \end{bmatrix}$$

1.2.3 Rechnen mit Matrizen

- Durch die Matrixaddition wird zwei $(m \times n)$-Matrizen wieder eine $(m \times n)$-Matrix zugeordnet.
- Die **Nullmatrix** (d.h. eine Matrix mit lauter Nullen) ist das **Neutralelement** der Matrixaddition: $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
- Das Negative einer Matrix **A** ist die Matrix, bei der jedes Matrixelement mit (-1) multipliziert wird: $\mathbf{A} = (a_{i,j}) \rightarrow -\mathbf{A} = (-a_{i,j})$. Man nennt $\mathbf{A}$ das **Inverse** von $\mathbf{A}$ bezüglich Addition.
- Die Subtraktion ist definiert durch $\mathbf{A} - \mathbf{B} := \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B}$. Addiere zu $\mathbf{A}$ das Negative der Matrix $\mathbf{B}$
- **Assoziativgesetz**: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
- **Kommutativgesetz**: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

1.2.4 Matrix mit Vektor multiplizieren

Eine $(m \times n)$-Matrizen $\mathbf{A} = [a_{i,j}]$ wird mit einem n-dimensionalen (Spalten-) Vektor $\vec{x}$ wie folgt multipliziert:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 a_{1,1} & x_2 a_{1,2} \\ x_1 a_{2,1} & x_2 a_{2,2} \end{bmatrix}$$

1.2.5 Matrixmultiplikation

Das Produkt der (m×n)-Matrix $A = [a_{i,j}]$ und der (n×p)-Matrix $B = [ab_{i,j}]$ ist eine (m×p)-Matrix $C = [c_{i,j}]$ definiert durch:

$C = AB = [c_{i,j}]$ wobei $c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + ...a_{i,k}b_{k,j} = \sum\limits_{l=1}^{k} a_{i,l}b_{l,j}$

- $c_{i,j}$ ist das Skalarprodukt des i Zeilenvektors von A mit dem j. Spaltenvektor von B.
- Beachte: Anzahl Spalten von A (n) müssen mit der Anzahl Zeilen von B (n) übereinstimmen um die beiden Matrizen multiplizieren zu können.

Beispiel

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ und die Matrix $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$.

1. Spaltenvektor:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \\ & \\ & \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = c_{11}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \\ c_{21} & \\ & \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = c_{21}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \\ c_{21} & \\ c_{31} & \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} = c_{31}$$

2. Spaltenvektor:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & \\ c_{31} & \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = c_{12}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = c_{22}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} \quad \Bigg| \quad a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} = c_{32}$$

1.3 Gleichungssysteme

1.3.1 Lineare Gleichung

Allgemeine Form: $ax + b = 0$

Chapter 2

Lineare Gleichungssysteme lösen 1: Gausselimination, Lösbarkeitskriterien

2.1 Begriffe

2.1.1 Leitkoeffizient

Den ersten Eintrag einer Zeile, der nicht verschwindet, nennt man Leitkoeffizient (hier eingekreist).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 10 \end{array}\right]$$

2.1.2 Zeilenstufenform ZFS

Steht in einer Matrix jeder Leitkoeffizient weiter rechts als der Leitkoeffizient in der Zeile darüber und stehen alle Zeilen ohne Leitkoeffizient (also solche, in denen nur Nullen stehen) ganz unten, hat die Matrix die Zeilenstufenform (ZFS). (Hier eingekreist)

- Die Leitkoeffizienten müssen nicht zwangsläufig alle auf der Hauptdiagonalen stehen.
- Eine quadratische Matrix heisst obere Dreieckmatrix, wenn alle Einträge unter der Hauptdiagonalen Null sind.

- Analog dazu definiert man auch eine untere Dreieckmatrix.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2.1.3 Pivotelemente

Die Leitkoeffiziente, die man durch Vertauschen der Zeilen möglichst weit links bringt, nenn man Pivotelemente.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 3 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & -4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

2.2 Gauss-Eliminationsverfahren

Beim Gauss-Verfahren geht es darum, lineare Gleichungssysteme so umzuformen, dass sich eine Zeilenstufenform ergibt. Dann wird durch Rückwärtseinsetzen eine eindeutige Lösung bestimmt, falls das LGS lösbar ist. Dabei geht man Schritt für Schritt vor und wendet in jedem Schritt eine sogenannte elementare Zeilenstufenform (EZ) auf die EKM (erweiterte Koeffizientenmatrix) an. Davon gibt es drei Typen:

1. Man darf eine Zeile der EKM mit einem Faktor, der nicht Nul ist, multiplizieren.
2. Man darf zwei Zeilen der EKM vertauschen.
3. Man darf das Vielfache einer Zeile zu einer anderen addieren.

2.2.1 Beispiel

Die EKM (erweiterte Koeffizientenmatrix) ist:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Das daraus resultierende LGS (lineare Gleichungssystem):
$x + 2y + z = 2$
$3x + 8y + z = 12$
$4y + z = 2$

Im EKS alle Elemente unterhalb der Diagonalen Null bekommen (eingekreist):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Zweite Zeile minus drei mal die erste Zeile:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Dritte Zeile minus zwei mal die zweite Zeile:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right]$$

Zweite Zeile durch 2 dividieren, dritte Zeile durch 5 dividieren:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Nun einfaches LGS auflösen:

$x + 2y + z = 2$
$y - z = 3$
$z = -2$
$\Rightarrow z = -2; y = 1; x = 2$

2.3 Lösbarkeit eines LGS

Bei der Beurteilung der Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen spielt der Rang zugeordneter Matrizen eine entscheidende Rolle. Der Rang einer Matrix ist eines ihrer grundlegendsten Merkmale. Es gibt mehrere gleichwertige Definitionen von Rang. Diesen Begriff werden wir später noch einmal aufnehmen, wenn wir uns mit Verktorräumen beschäftigen werden.

2.3.1 Definition Rang

Die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen oder Spalten einer Matrix A wird einfach als Rang von $\mathbf{A}$ genannt. Die Schreibweise ist $r(\mathbf{A})$
Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$r(\mathbf{A}) = 3$

Durch Linearkombination von Zeilen oder Spalten einer Matrix (Multiplikation einer

Zeile/Spalte mit einem Faktor und Addition oder Subtraktion zu einer anderen Zeile/Spalte) ändert sich der Rang der Matrix nicht. Um den Rang einer Matrix zu bestimmen, formt man diese daher mittels des Gauss-Verfahrens in eine äquivalente Matrix in Zeilentufenform um: Wenn die Umformung in einer Zeile stoppt, weil in den nachfolgenden Zeilen nur noch Nullen stehen, entspricht die Anzahl der Zeilenvektoren, die ungleich Null (0) sind, dann dem Rang der Matrix.

Beispiel

Mittels Eliminationsverfahren die Matrix $\mathbf{A}$ in eine äquivalente Matrix in Zeilenstufenform umformen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to II + I \cdot 2 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to III + I \cdot -2 \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \to III + II \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Anzahl der Zeilenvektoren, die ungleich Null (0) sind, entspricht dann dem Rang der Matrix. Diese Zahl ist hier 2: $r(\mathbf{A}) = 2$

Eigenschaften vom Rang

Seien $n, m \in \mathbb{N}$.

- Die einzige Matrix mit Rang 0 ist die Nullmatrix $0_{m \times n}$
- Für den Rang einer $(m \times n) - Matrix\mathbf{A}$ gilt: $r(\mathbf{A}) << min(m, n)$.
- Die $(n \times n)$-Einheitsmatrix E_n hat den Rang n
- Die Transponierte $\mathbf{A}^T$ einer Matrix $\mathbf{A}$ hat den selben Rang wie $\mathbf{A}$: $r(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A})$
- Subadditivität: Für zwei $(m \times n)$-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gilt: $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) << r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$

2.3.2 Das Rangkriterium allgemein

Die EKM ist eine $(m \times (n+1))$-Matrix $[\mathbf{A}|b]$:

$$[\mathbf{A}|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,j} & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,j} & a_{2,n} & b_2 \\ a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,j} & a_{i,n} & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,j} & a_{m,n} & b_m \end{array}\right]$$

- Ist $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|b)$, dann hat das GLS eine Lösung, wobei $n - r(\mathbf{A})$ Unbekannten frei gewählt werden können.
- Ist $r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A}|b)$, dann gibt es keine Lösung.

Beispiele

- zum Fall 1: $x + y + z = 3$ und $2x - y - z = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A}|\mathrm{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Die Gleichung hat eine Lösung, weil $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|b) = 2$. Aber die Anzahl der Unbekannten ist 3. Somit kann $3 - 2 = 1$ Unbekannte frei gewählt werden. Gemäss des Gauss-Verfahrens rechnen wir $\mathrm{II} + \mathrm{I}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right], \qquad x = \frac{4}{3}$$

Wir wählen nun $y = s$, $s \in \mathbb{R}$ frei und lösen I für z auf: $z = \frac{5}{3} - s$. Die Lösung lautet:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ s \\ \frac{5}{3} - s \end{bmatrix}$$

- zum Fall 2: $w + x + y - z = 1$, $2w - x + y + z = 3$, $3w + 2y = 5$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A}|\mathrm{b}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Wir führen das Gauss-Verfahren zur Rangbestimmung aus. Wir berechnen $\mathrm{III} - 3\mathrm{I}$ und $\mathrm{II} - 2\mathrm{I}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A}|\mathrm{b}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

Wir stellen fest, dass die zweite und dritte Zeilen in $\mathbf{A}$ linear abhängig sind aber in der EKM nicht. Daher $r(\mathbf{A}) = 2 < 3 = r(\mathbf{A}|b)$. Das System hat keine Lösung. Wie begründen Sie das?

Wiedersprüchliche Lösung!

2.3.3 Rangkriterium im Spezialfall

Rangkriterium im Speziallfall, nämlich für quadratische $(n \times n)$-Matrizen. Das heisst, dass im Folgenden das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ genau n Unbekannte und n Gleichungen hat. Dann ist die Koeffizientenmatrix eine $(n \times n)$-Matrix und die EKM eine $(n \times (n + 1))$-Matrix.
Ein Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ hat:

- Genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|b) = n$ gilt. Die Lösung ist dann gegeben durch $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1]}\mathbf{b}$

- Unendlich viele Lösungen, wenn $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|b) < n$
- Keine Lösung, wenn $r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A}|b)$

Beispiele

- Zum Fall 3: $x + 2y = 3$ und $2x + 5y = 8$. Das System hat zwei Gleichungen und zwei unbekannten.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A}|\mathrm{b}) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{array}\right]$$

Zur Rangbestimmung von KM und EKM führen wir das Gauss-Verfahren durch. Es ergibt sich eine obere Dreieckmatrix über $\mathrm{II} - 2\mathrm{I}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Somit erhalten wir $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|b) = 2$. Da dieser Rang gleich der Anzahl der Unbekannten (2) ist, hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung.

- Zum Fall 4: $x + 2y = 3$ und $2x + 4y = 6$. Das System hat zwei Gleichungen und zwei unbekannten.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A}|\mathrm{b}) = \left[\begin{array}{ccc|} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

Der Rang $r(\mathbf{A}) = 1 < 2$, weil die zweite Spalte linear von der ersten Spalte abhängt:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Der Rang $r(\mathbf{A}|b) = 1 < 2$, weil die dritte Spalte auch linear von der ersten Spalte abhängt:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Da $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|b) = 1 < 2$, wird für die Lösung $(2 - 1 = 1)$ eine Unbekannte frei gewält: $y = s,\ s \in \mathbb{R}$. Die Lösung ist dann:$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3-2s \\ s \end{bmatrix}$.

- Zum Fall 5: $x + 2y = 3$ und $2x + 4y = 7$ Das System hat zwei Gleichungen und zwei unbekannten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A}|b) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{array}\right]$$

Der Rang von $\mathbf{A}$ ist $r(\mathbf{A}) = 1 < 2$, weil die zweite Spalte linear von der ersten Spalte abhängt (s. vorherige Folie). Zur Bestimmung des Rangs von $(\mathbf{A}|b)$ führen wir das Gauss-Verfahren durch. Es ergibt sich eine obere Dreieckmatrix über $\mathrm{II} - 2\mathrm{I}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Somit $r(\mathbf{A}|b) = 2$. Da $r(\mathbf{A}) = 1 < 2 = r(\mathbf{A}|b)$, hat demnach das Gleichungssystem keine Lösung. Wie begründen Sie das?

2.4 Schlüsselergebnisse

- Das Gauss-Verfahren bringt Koeffizientenmatrix und erweiterte Koeffizientenmatrix der linearen Gleichungssysteme in Zeilenstufenform.
- Das Endergebnis des Gauss-Verfahren ist in der Regel eine obere oder untere Dreieckmatrix.
- Das Gauss-Eliminationsverfahren ändert die Lösungen der ursprünglichen Matrix nicht.
- Das Gauss-Eliminationsverfahren ändert die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen oder Spalten nicht.
- Für den Rang einer $(m \times n)$-Matrix $\mathbf{A}$ gilt: $r(\mathbf{A}) << min(m, n)$
- Für LGS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit n Gleichungen und n unbekannten, ist $\mathbf{A}$ eine quadratische $(n \times n)$-Matrix. Wenn $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|b) = n$, dann hat das GLS eine eindeutige Lösung, die durch $\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}b}$ gegeben ist.
- Ist der Rang einer quadratischen Matrix gleich ihrer Zeilen- und Spaltenzahl, hat sie vollen Rang und ist regulär (invertierbar).

Chapter 3

Lineare Gleichungssysteme lösen 2: Gausselimination und Optimierung beim Ermittelnder Lösung durch LU-Zerlegung

3.1 Einheitsmatrix

Eine quadratische Matrix, in deren Hauptdiagonale nur Einsen stehen und deren sämtliche andere Einträge verschwinden (Null sind), nennt mann Einheitsmatrix (engl. identity matrix). Hat so eine Matrix die Dimension $n \times n$, so schreibt man für sie eins der Symbole $_En$ oder I_n.

$$\mathbf{E_4} = \mathbf{I_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eine Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ hat die Eigenschaft, dass $\mathbf{EA} = \mathbf{AE} = \mathbf{A}$. Einheitsmatrizen sind also neutrale Elemente bezgl. der Matrizenmultiplikation.

3.2 Transponierte Matrix

Eine Matrix $\mathbf{A}$ ist transponiert, wenn man die Matrix an ihrer Hauptdiagonalen spiegelt. In anderen Worten: Eine Matrix $\mathbf{A}$ ist transponiert, wenn man ihre Zeilen und Spalten von der Matrix $\mathbf{A}$ vertauscht. Transponierte Matrix $\mathbf{A}$ schreibt man $\mathbf{A^T}$. Es gibt einen wichtigen Zusammenhang zwischen Transposition und Matrizenmultiplikation:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -2 & -2 & 8 \\ -1 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & -6 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 7 \\ 5 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

3.3 Invertierbare oder reguläre Matrix

Sei $\mathbf{A}$ eine quadratische $n \times n$-Matrix. $\mathbf{A}$ heisst eine invertierbare oder reguläre (auch non-singuläre) Matrix, wenn es eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{B}$ existiert so, dass:

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = I_n = E_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

Dann nennt man $\mathbf{B}$ die inverse Matrix zu $\mathbf{A}$ und schreibt sie als $\mathbf{A}^{-1}$

3.3.1 Beispiel

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4 Rechenregeln

$\mathbf{AB} \cdot (\mathbf{AB})^{-1} = I$

$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{B^{-1}}$

$(\mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{B^{-1}}) \cdot \mathbf{AB} = I$

3.5 Permutationsmatrix

Die Permutationsmatrix $\mathbf{P}$ ist eine quadratische $(n \times n)$-Matrix, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau einen Eintrag von eins (1) und an anderer Stelle Nullen (0) hat. Die Multiplikation jeder Matrix $\mathbf{A}$ mit der Matrix $\mathbf{P}$ führt zum Vertauschen der Zeilen oder Spalten der Matrix $\mathbf{A}$. Zur Permutation der Zeilen oder Spalten der Matrix $\mathbf{A}$ wird $\mathbf{PA}$ (Vormultiplizieren) oder $\mathbf{AP}$ (Nachmultiplizieren) durchgeführt. Mit anderen Worten: Die Permutationsmatrix $\mathbf{P}$ ist eine Einheitsmatrix, wo die Zeilen umgeordnet sind.

3.5.1 Beispiel

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$ Permutationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3.6 TODO: LU-Zerlegung