2019-2020学年线代A填空题

一、

(1.) $p(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 & 0 \\ x^3 & x & 2 & 1 \\ -x^4 & 0 & x & 2 \\ 4 & 3 & 4 & x \end{vmatrix}$，则 $p(x)$ 中 x^7 的系数为 $\underline{-3}$.

解：行列式定义的考查 $D=\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{np_n}$.

$p(x)$ 中 x^7 的项有 $x^2\cdot x^3\cdot x\cdot x$ 和 $x^2\cdot 2\cdot(-x^4)\cdot x$，则对应的项为 $(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+(-1)^{\tau(2314)}a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$，故 x^7 的系数为.

$(-1)^{\tau(2134)}+(-1)^{\tau(2314)}\cdot(-2)=(-1)^1+(-1)^2\cdot(-2)=-3$

(2.) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{vmatrix}=\underline{2(a-1)(a-2)(a-3)}$

解. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \end{vmatrix}\xlongequal[c_2\leftrightarrow c_3]{c_1\leftrightarrow c_4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix}^T$

$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 4 & 9 & a^2 \\ 1 & 8 & 27 & a^3 \end{vmatrix}=(a-3)(a-2)(a-1)(3-2)(3-1)(2-1)$

$=2(a-1)(a-2)(a-3).$

行列式性质和范德蒙德行列式的考查.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=(a_n-a_{n-1})(a_n-a_{n-2})\cdots(a_n-a_1)(a_{n-1}-a_{n-2})\cdots(a_{n-1}-a_1)\cdots(a_2-a_1)$

$=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).$

3. $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$ 满足 $A^6=E$，则 $A^{11}=$ $\underline{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}}$.

解：$A^{12}=A^6\cdot A^6=A^{11}\cdot A=E$. 故 $A^{11}=A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$

$|A|=(\frac{1}{2})^2\cdot(1-(-3))=1$. $A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$

矩阵可逆和一些性质的考查.

特别注意. $|kA|=k^n|A|$.

4. A为3阶可逆矩阵. 将A的第3列减去第2列对应元素后得到矩阵B. 则 $B^{-1}A=$ $\underline{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$.

解：A经过一次初等列变换变成B. 即 $A\xrightarrow{C_3-C_2}B$，由初等方阵与初等变换之间的关系，即初等列变换对应右乘一个相应的初等方阵P.（P是由单位阵E,经过相同列变换得到的）. 即

$E\xrightarrow{C_3-C_2}P$，故 $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 故有 $AP=B$.

则 $B^{-1}APP^{-1}=B^{-1}BP^{-1}$. 得 $B^{-1}A=P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

初等方阵与初等变换之间关系的考查. “左行右列”. 即

左乘一个初等方阵. 相当于进行一次初等行变换，

右乘一个初等方阵 相当于进行一次初等列变换.

5. 3阶矩阵 $A=(a_{ij})$. 满足 $A^*=A^T$, 若 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=a>0$,

则 $a=$ $\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

解: $|A^*|=|A|^{3-1}=|A|^2$. 同时 $|A^*|=|A^T|=|A|$ 故 $|A|^2=|A|$.

得 $|A|=1$ 或 0, 此外. 由行列式展开定理. 可知. $|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}=A^T.$$ 故 $A_{11}=A_{12}=A_{13}=a$.

得 $|A|=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=3a^2$ 由于 $a>0$, 所以 $|A|=3a^2=1$ 得 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

— $AA^*=A^*A=|A|E$. 和 A^* 定义的考查. 由 $AA^*=A^*A=|A|E$.

可得 $|A^*|=|A|^{n-1}$. 特别地 当A可逆时. 易得 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$, $A^*=|A|\cdot A^{-1}$. 因此. 一般很少直接计算 A^*.

6. 过原点的L与 $L_1: x-1=y+2=-z-4$ 相交, 且与 $\pi: x-y+2z=3$

平行, 则L的标准方程为 $\underline{x=\frac{y}{3}=z}$.

解: L_1 的参数形式为 $\begin{cases} x=t+1 \\ y=t-2 \\ z=-t-4, \end{cases}$ 故设L与 L_1 的交点为 $(t_0+1, t_0-2, -t_0-4)$.

故L的方向向量 $\vec{s}=(t_0+1-0, t_0-2-0, -t_0-4-0)=(t_0+1, t_0-2, -t_0-4)$.

L与π平行, π的法向量为 $\vec{n}=(1,-1,2)$. 故 $\vec{s}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \vec{s}\cdot\vec{n}=0$

即 $t_0+1-(t_0-2)-2(t_0+4)=0$ 得 $t_0=-\frac{5}{2}$. 故 $\vec{s}=(-\frac{3}{2},-\frac{9}{2},-\frac{3}{2})$.

可取L的方向向量为 $(1,3,1)$. 故L为. $\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{3}=\frac{z-0}{1}$

空间直线和平面方程及相关概念的考查.

直线方程：①参数形式 $\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases}$ $\vec{s} = (l, m, n)$. 过点 (x_0, y_0, z_0).

较为常用

参数式常用 ②标准形式(点向式、对称式).

于已知中有交点出现的情况.

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

③一般式 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$ $\vec{s} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$

④两点式. $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

空间平面方程：①点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. $\vec{n} = (A, B, C)$ 过点 (x_0, y_0, z_0).

较为常用

②一般式：$Ax+By+Cz+D=0$.

③截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

④三点式：$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$.

此外. 平面束方程. 平面过直线L $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$

则该平面可设为 $\mu(A_1x+B_1y+C_1z+D_1) + \lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

7. $\vec{\alpha}_1=(1,-1,0)$，$\vec{\alpha}_2=(4,2,a+2)$，$\vec{\alpha}_3=(2,4,3)$，$\vec{\alpha}_4=(1,a,1)$。
若$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$中任意两个向量与另外两个均等价，则$a=$ <u>1</u>

解：由条件易得任意3个向量都线性相关，为了求a，可选
$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$。3个三维向量线性相关，其行列式为0，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & a \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4-3+0-0-3a+2=0 \text{ 得 } a=1$$

线性相关性质定理的考查，及向量组等价定义的考查。

$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m$线性相关 $\Leftrightarrow r(\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_m)<m$。（$m$个$n$维列向量）

或 $r(\vec{\alpha}_1^T,\cdots,\vec{\alpha}_m^T)<m$）（$m$个$n$维行向量）。

$\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$线性相关 $\Leftrightarrow |\vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n|=0$。（$n$个$n$维列向量）。

（或 $|\vec{\alpha}_1^T,\cdots,\vec{\alpha}_n^T|=0$）（$n$个$n$维行向量）。

8. $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$|A|=0$。$|A|$的元素a_{ij}的余子式为M_{ij}，若$M_{11}\neq 0$，
则 $Ax=0$ 的通解为 <u>$x=k(M_{11},-M_{12},\cdots,(-1)^{n+1}M_{1n})^T$</u>。

解：由$AA^*=|A|\cdot E=0$，可知A^*的列向量均为$Ax=0$的解。

由 $r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$ 由题已知$|A|=0$，故$r(A)<n$。

因此$r(A^*)$只能为1或0，又因为只有零矩阵的秩才为0，而已知
$M_{11}\neq 0$。（$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}\neq 0$），可知$A^*$为非零矩阵，故$r(A^*)=1$。
相应地，$r(A)=n-1$，由$r(A)+\dim S=n$ 可得 $\dim S=1$，即$Ax=0$
的基础解系中只有一个非零解向量，选A^*的第1列作为基础解系

即 $\xi=(A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n})^T=(M_{11},-M_{12},\cdots,(-1)^{1+n}M_{1n})^T$.

故通解 $x=k\xi$.

齐次线性方程组相关知识的考查.

$r(A)+\dim S=n$.（n 为未知量的个数或 A 的列数）.

证明: $r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$ A^* 的秩只有3种可能.

证明: $AA^*=A^*A=|A|E$. 当 $r(A)=n$ 时. $|A|\neq 0$. 易得

$|AA^*|=||A|E|$ 即 $|A|\cdot|A^*|=|A|^n\cdot|E|$ 得 $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$.

故 $r(A^*)=n$; 当 $r(A)<n$ 时, $|A|=0$, 可得.

$AA^*=0\cdot E=0$, 由此可知 $r(A)+r(A^*)\leq n$

当 $r(A)=n-1$ 时, 由上式可知 $r(A^*)\leq 1$. 即 $r(A^*)=0$ 或 1,

但只有零矩阵的秩为0. 某而由 $r(A)=n-1$ 可知, A 至少存在1

个 $n-1$ 阶非零子式, 而由 A^* 的定义可知, A^* 至少有1个元素不为零.

即 $A^*\neq 0$. 故当 $r(A)=n-1$ 时 得 $r(A^*)=1$

当 $r(A)<n-1$ 时, 可直接由 A^* 的定义知. A^* 的所有元素 (A 中的元素的代数余子式) 都为0, 即 $A^*=0$. 故当 $r(A)<n-1$ 时 得 $r(A^*)=0$.

综上得证.

(9.) 3阶实对称A与 $diag(1,-2,5)$ 相似，x为任意3维单位列向量，则 x^TAx 的最大值为 <u>5</u>

解：由已知可知存在正交矩阵Q，使得 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&&\\&-2&\\&&5\end{pmatrix}$.

即存在正交变换 $x=Qy$，使 $f(x_1,x_2,x_3)=f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-2y_2^2+5y_3^2$.

易得当 $(y_1,y_2,y_3)^T=(0,0,1)^T$ 时，取得最大值5.

(其中由于正交变换为可逆变换，且不改变向量长度，所以把单位向量变成单位向量).

■ 二次型在正交变换化为标准形相关考查

$f=x^TAx \xrightarrow{x=Qy} f=y^T\Lambda y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$ (其中 λ_i 为A的特征值，$x=Qy$ 为正交变换). 另外，取 $\lambda^*=max\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$.

则 $f=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\le\lambda^*(y_1^2+\cdots+y_n^2)$. 那么当 $y=(y_1,\cdots,y_n)^T$ 为单位向量时，$f\le\lambda^*(y_1^2+\cdots+y_n^2)=\lambda^*$. 即此时二次型的最大值为最大特征值，类似地，最小值为A的最小特征值.

(10.) 设 $f=2x^2+y^2+kz^2+2xy-4yz$，已知 $f(x,y,z)=1$ 的图形是椭球面，则k的取值范围是 <u>$k>8$</u>

解：椭球面为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，即表示f经过正交变换可化为正定二次型，f对应的实对称矩阵A为正定矩阵，由霍尔维茨定理，

可知 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&-2\\0&-2&k\end{pmatrix}$. $|A|=2k+0+0-0-k-8>0$.

即 $k>8$.

■ 霍尔维茨定理的考查 顺序主子式均>0 ⇔ 正定矩阵.