# 矩阵理论与方法

12月

# 内容提要 CONTENTS

- 课程信息
- 课程介绍
- 矩阵理论与方法

  **第4章 矩阵分解**

# 第4章 矩阵分解

1、LU分解

2、QR分解

3、满秩分解

4、SVD分解

# 第4章 QR分解

**定义 4.6** 如果实(复)非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能够化成正交(酉)矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与实(复)非奇异上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的乘积,即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR} \tag{4.2.7}$$

则称式(4.2.7)为 $\boldsymbol{A}$ 的 **QR 分解**.

**定理 4.6**　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶实(复)非奇异矩阵,则存在正交(酉)矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和实(复)非奇异上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$,使 $\boldsymbol{A}$ 有 QR 分解式(4.2.7);且除去相差一个对角元素的绝对值(模)全等于1的对角矩阵因子外,分解式(4.2.7)是唯一的.

**定理 4.6** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶实(复)非奇异矩阵，则存在正交(酉)矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和实(复)非奇异上三角矩阵 $\boldsymbol{R}$，使 $\boldsymbol{A}$ 有 QR 分解式(4.2.7)；且除去相差一个对角元素的绝对值(模)全等于1的对角矩阵因子外，分解式(4.2.7)是唯一的.

**证** 记矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个列向量依次为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，所以这 $n$ 个列向量线性无关. 将它们按 Schmidt 正交化方法正交化之，可得到 $n$ 个标准正交列向量 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n$.

对 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 正交化，可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - k_{21}\boldsymbol{b}_1 \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_n - k_{n,n-1}\boldsymbol{b}_{n-1} - \cdots - k_{n1}\boldsymbol{b}_1 \end{cases}$$

其中，$k_{ij} = \dfrac{(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j)}{(\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{b}_j)} \quad (j < i)$. 将上式改写为

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 = k_{21}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{a}_n = k_{n1}\boldsymbol{b}_1 + k_{n2}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + k_{n,n-1}\boldsymbol{b}_{n-1} + \boldsymbol{b}_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 = k_{21}\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 \\ \quad \vdots \\ \boldsymbol{a}_n = k_{n1}\boldsymbol{b}_1 + k_{n2}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + k_{n,n-1}\boldsymbol{b}_{n-1} + \boldsymbol{b}_n \end{cases}$$

用矩阵形式表示为

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n)\boldsymbol{C}$$

其中

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ & 1 & \cdots & k_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

再对 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ 单位化,可得

$$\boldsymbol{q}_i = \frac{1}{|\boldsymbol{b}_i|}\boldsymbol{b}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

于是有

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n)\boldsymbol{C} =$$

$$(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n)\begin{bmatrix} |\boldsymbol{b}_1| & & & \\ & |\boldsymbol{b}_2| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\boldsymbol{b}_n| \end{bmatrix}\boldsymbol{C}$$

令

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Q} &= (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n) \\ \boldsymbol{R} &= \operatorname{diag}(|\boldsymbol{b}_1|, |\boldsymbol{b}_2|, \cdots, |\boldsymbol{b}_n|) \cdot \boldsymbol{C} \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.8)$$

则 $\boldsymbol{Q}$ 是正交(酉)矩阵,$\boldsymbol{R}$ 是上三角矩阵,且有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$.

为了证明唯一性，设 $\boldsymbol{A}$ 有两个分解式

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}_1$$

由此得

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}$$

式中，$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}^{-1}$ 仍为实非奇异上三角矩阵．于是

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$$

这表明 $\boldsymbol{D}$ 不仅为正交矩阵，而且还是对角元素的绝对值全为 1 的对角矩阵．从而 $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{DR}$，$\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{QD}^{-1}$． 证毕

**例 4.6** 试用 Schmidt 正交化方法求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

的 QR 分解.

**例 4.6** 试用 Schmidt 正交化方法求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

的 QR 分解 .

**解** 令 $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 1, 2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_3 = (2, 2, 1)^{\mathrm{T}}$, 正交化可得

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{1}{3}\boldsymbol{b}_2 - \frac{7}{6}\boldsymbol{b}_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

**例 4.6** 试用 Schmidt 正交化方法求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

的 QR 分解 .

**解** 令 $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 1, 2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}_3 = (2, 2, 1)^{\mathrm{T}}$, 正交化可得

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{1}{3}\boldsymbol{b}_2 - \frac{7}{6}\boldsymbol{b}_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3) = (b_1 \quad b_2 \quad b_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3) = (b_1 \quad b_2 \quad b_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3) = (\frac{b_1}{|b_1|} \quad \frac{b_2}{|b_2|} \quad \frac{b_3}{|b_3|})\begin{pmatrix} |b_1| & & \\ & |b_2| & \\ & & |b_3| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (q_1 \quad q_2 \quad q_3)\left(\begin{pmatrix} |b_1| & & \\ & |b_2| & \\ & & |b_3| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = QR$$

$$Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix} \sqrt{6} & & \\ & \sqrt{3} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{6} \\ & 1 & \frac{1}{3} \\ & & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} & \frac{7}{\sqrt{6}} \\ & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$.

# 作业（第五版）

1、定义：4.6

2、定理：4.6、4.7

3、例题：4.6

4、习题4.2：1

# 作业（第三版）

1、定义：4.6

2、定理：4.6、4.7

3、例题：4.6

4、习题4.2：1

下课，谢谢大家！