

矩阵理论与方法

复习

2020年12月

内容提要 CONTENTS

- 课程信息
- 课程介绍
- 矩阵理论与方法
- 复习

复习-第一章

设 V 是欧氏空间, T 是 V 上的一个线性变换, 求 $z = (T^k)(x)$, 其中 $x \in V$

复习-第一章

设 V 是欧氏空间， T 是 V 上的一个线性变换，求 $z = (T^k)(x)$ ，其中 $x \in V$

0、任意找一组基，利用Schmidt正交化方法得到

V 的一组标准正交基 e_1, \dots, e_n , $x = k_1 e_1 + \dots + k_n e_n$, 其中 $k_i = (x, e_i)$

0.1、求 T 在基 e_1, \dots, e_n 下的矩阵 $A_0 \Rightarrow T(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n)A_0$

0.2、其中 $A_0 = PJP^{-1}$, J 是Jordan标准型 $\Rightarrow T(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n)PJP^{-1}$

0.3、 $T(e_1, \dots, e_n)P = (e_1, \dots, e_n)PJ$

复习-第一章

设 V 是欧氏空间， T 是 V 上的一个线性变换，求 $z = (T^k)(x)$ ，其中 $x \in V$

1、得到一组新的基 $(E_1, \dots, E_n) = (e_1, \dots, e_n)P$,

2、通过坐标变换得到 $x = (E_1, \dots, E_n)P^{-1} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = (E_1, \dots, E_n) \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$

3、 T 在新基下的矩阵： $T(E_1, \dots, E_n) = (E_1, \dots, E_n)J$

4、 $T(x) = (E_1, \dots, E_n)J \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \Rightarrow (T^k)(x) = (E_1, \dots, E_n)J^k \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$

复习-第一章

例： 设矩阵空间 $R^{2 \times 2}$ 的子空间为

$$V = \{X = (x_{ij})_{2 \times 2} \mid x_{11} + x_{12} + x_{21} = 0, x_{ij} \in R\}$$

V 中的线性变换为 $T(X) = X + 2X^T$

$$\text{求}(T^3)(X), X = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \in V$$

$$\text{求}(T^k)(X), \forall X \in V$$

复习-第一章

P_{10} 例1.8、 P_{26} 例1.15、 P_{32} 例1.18、 P_{41} 例1.23、

P_{49} 例1.26、 P_{52} 例1.28、 P_{63} 例1.33、 P_{72} 例1.36

复习-第二章

定义 2.1 如果 V 是数域 K 上的线性空间, 且对于 V 的任一向量 x , 对应一个实值函数 $\|x\|$, 它满足以下三个条件:

(1) 非负性: 当 $x \neq 0$ 时, $\|x\| > 0$; 当 $x = 0$ 时, $\|x\| = 0$;

(2) 齐次性: $\|ax\| = |a| \|x\|$ ($a \in K, x \in V$);

(3) 三角不等式: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ($x, y \in V$).

则称 $\|x\|$ 为 V 上向量 x 的范数, 简称**向量范数**.

复习-第二章

线性空间 C^n ，设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in C^n$

1: $\|x\|_1 = \sum |\xi_i|$ 是一种向量范数，记为**1-范数**

2: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ 是一种向量范数，记**2-范数**

3: $\|x\| = \max_i |x_i|$ 是一种向量范数，记为 ∞ -范数

4: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$

是一种向量范数，记为**p-范数**或 l_p 范数

复习-第二章

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} = x \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, k > N$ 时, 有

$$\forall \|\cdot\|: \quad \|x^k - x\| < \varepsilon$$

定理 2.1 设 $\|x\|_\alpha$ 和 $\|x\|_\beta$ 为有限维线性空间 V 的任意两种向量范数(它们不限于 p -范数), 则存在两个与向量 x 无关的正常数 c_1 和 c_2 , 使得不等式

$$c_1 \|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq c_2 \|x\|_\beta \quad (\forall x \in V) \quad (2.1.9)$$

成立.

复习-第二章

一、矩阵范数的定义与性质

定义 2.3 设 $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$, 定义一个实值函数 $\|A\|$, 它满足以下三个条件

(1) 非负性: 当 $A \neq \mathbf{O}$ 时, $\|A\| > 0$; 当 $A = \mathbf{O}$ 时, $\|A\| = 0$;

(2) 齐次性: $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ ($\alpha \in \mathbf{C}$);

(3) 三角不等式: $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ($B \in \mathbf{C}^{m \times n}$).

(4) 相容性:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (B \in \mathbf{C}^{n \times l}) \quad (2.2.1)$$

则称 $\|A\|$ 为 A 的矩阵范数.

复习-第二章

定理：设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，则

(1) 列和范数： $\|A\|_1 = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right\}$

(2) 谱范数： $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}, \lambda_1 = \max \left\{ \lambda(A^H A) \right\}$

(3) 行和范数： $\|A\|_\infty = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}$

复习-第二章

三、矩阵的谱半径及其性质

矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的谱半径在特征值估计、广义逆矩阵、数值分析以及数值代数等理论的建树中,都占有极其重要的地位. 现论述如下.

定义 2.5 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 称

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i| \quad (2.3.3)$$

为 A 的谱半径.

定理9: $\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \forall \|\cdot\|_M$, 有 $\rho(A) \leq \|A\|_M$

复习-第二章

$P_{85}1$ 、 $P_{92}1$ 、 P_{32} 例1.18、 P_{95} 例2.10、

复习-第三章

- 矩阵序列
- 矩阵级数
- 矩阵函数

复习-第三章

■ 矩阵序列

定理1: 设 $A^{(k)}, A \in C^{m \times n}$, 则

$$(1) \lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \forall \|\bullet\|, \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{(k)}\| = 0$$

$$(2) \lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = A \quad \longleftrightarrow \quad \forall \|\bullet\|, \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^{(k)} - A\| = 0$$

定义: 若 $A_{n \times n}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0_{n \times n}$, 称 A 为收敛矩阵

定理2: A 为收敛矩阵 $\longleftrightarrow \rho(A) < 1$

复习-第三章

■ 矩阵级数

幂级数： 对函数 $f(z) = \sum c_k z^k, (|z| < r)$ 方阵 $A_{n \times n}$,

构造矩阵幂级数 $f(A) = \sum c_k A^k$

定理6： (1) $\rho(A) < r \Rightarrow \sum c_k A^k$ 绝对收敛

(2) $\rho(A) > r \Rightarrow \sum c_k A^k$ 发散

复习-第三章

■ 矩阵函数

- 1 待定系数法
- 2 数项级数求和法
- 3 对角形法
- 4 Jordan标准型法

复习-第三章

函数矩阵的导数

$$A'(t) = \left(a'_{ij}(t) \right)_{m \times n}$$

函数矩阵的积分

$$\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = \left(\int_{t_0}^t a_{ij}(\tau) d\tau \right)_{m \times n}$$

复习-第三章

P_{100} 例3.1、 $P_{105}1$ 、 P_{109} 例3.5

复习-第四章

- 1、LU分解
- 2、QR分解
- 3、满秩分解
- 4、SVD分解

复习-第四章

$$A = LU$$

定义4.1 如果 n 阶矩阵 A 能够分解为一个下三角矩阵 L 和一个上三角矩阵 U 的乘积，则称其为三角分解或 LU 分解。如果方阵 A 可分解成 $A=LDU$,其中 L 为一个单位下三角矩阵， D 为对角矩阵，则称 A 可作 LDU 分解。

复习-第四章

定义 4.6 如果实(复)非奇异矩阵 A 能够化成正交(酉)矩阵 Q 与实(复)非奇异上三角矩阵 R 的乘积,即

$$A = QR \quad (4.2.7)$$

则称式(4.2.7)为 A 的 **QR 分解**.

复习-第四章

满秩分解

目的：对 $A \in C_r^{m \times r}$ ($r \geq 1$), 求 $F \in C_r^{m \times r}$, 及 $G \in C_r^{m \times r}$ 使 $A = FG$

分解原理：

$$\text{rank} A = r \Rightarrow A \xrightarrow{\text{行}} \text{阶梯形 } B = \begin{pmatrix} G \\ O \end{pmatrix} : G \in C_r^{r \times n}$$

$$\Rightarrow \exists \text{有限个初等矩阵之积 } P_{m \times m}, \text{st. } PA = B$$

$$\Rightarrow A = P^{-1}B = \left(F_{m \times r} \mid S_{m \times (m-r)} \right) \begin{pmatrix} G \\ O \end{pmatrix} = FG : F \in C_r^{m \times r}$$

复习-第四章

定理 4.16 设 $A \in \mathbf{C}_r^{m \times n} (r > 0)$, 则存在 m 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V , 使得

$$U^H A V = \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (4.4.4)$$

其中 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, 而 $\sigma_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 为矩阵 A 的全部非零奇异值.

复习-第四章

P_{133} 例4.1、 P_{146} 例4.6、 P_{156} 例4.10

P_{162} 例4.14

复习-第六章

广义逆矩阵

复习-第六章

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 其奇异值分解 $A = V_r \Delta U_r^H$,

$\Delta = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$, 则

$$A^+ = U_r \Delta^{-1} V_r^H$$

复习-第六章

P_{244} 例6.10

课程结束，谢谢大家！

祝大家考出好成绩！