北京邮电大学 2018-2019 学年第二学期

《高等数学》（下）期末考试试题（A）参考评分标准

一. 填空题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+2n}-\sqrt{n^3-n}}{n^{\alpha}(n+1)}$ 收敛，则参数 α 的取值范围____________.

答: $\alpha>-\frac{1}{2}$.

2 . 设函数 $f(x)=x^2$， $0\le x<1$， 其傅里叶级数是 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,\quad -\infty<x+\infty,$ 其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$ ， $n=1,2,3,\cdots$，则 $S(x)=$________________________________.

答： $S(x)=\begin{cases} x^2, & 0<x<1, \\ -x^2, & -1<x<0, \\ 0, & x=0,\pm 1 \end{cases}$

3. 设 $z=f(x,y)=\frac{\sin(xy)\cos\sqrt{y+2}-(y-1)\cos x}{1+\sin x+\sin(y-1)}$,则 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=$______.

答：-1

4. 函数 $u=x^2+y^2-z^2$ 在点 $(-1,1,2)$ 处沿 $\vec{l}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ 方向的方向导数等于__________________ .

答: -14/3

5.曲面$\sum$: $e^{\frac{x}{z}}+e^{\frac{y}{z}}=4$ 上点 $M(\ln 2,\ln 2,1)$ 处的切平面方程为 $\underline{x+y-(\ln 4)z=0}$.

6. 交换二重积分次序 $\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x=\underline{\int_{-1}^{1}dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy}$.

7. 设$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0\}$，则

$\iiint\limits_{\Omega}(y\sin x+2z)dv=$____________.

答: $\dfrac{\pi}{2}$

8. 已知$\vec{A}=(x^2-y^2)\vec{i}+2xy\vec{j}+z^2\vec{k}$，则$rot(rot\vec{A})=$____________ .

答: $rot(rot\vec{A})=rot(0,0,4y)=\{4,0,0\}$

9. 设Γ 为曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\ x+y+z=0\end{cases}$，计算$I=\int_{\Gamma}(x^2+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)\,\mathrm{d}s=$

____

答: $\dfrac{16}{3}\pi$

10. 设 L 为取正向的圆周 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$，则

$\oint\limits_{L}(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$ 的值是__________________ .

答: -10π

二.（10 分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}x^{n-1}$的和函数。

解: 收敛半径$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n}=2.$

当$x=2$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{n2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$，发散;

当$x=-2$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{n2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}$，收敛。

故级数的收敛域为$[-2,2)$。（3 分）

设$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n2^n}$，则$xs(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n2^n}$。两端求导，得

$$[xs(x)]'=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]'=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2-x}\text{。}$$

积分：$xs(x)=\int_0^x\frac{1}{2-x}dx=-\ln\left(2-x\right)+\ln 2.$

当 $x\neq 0$ 时，$s(x)=-\frac{1}{x}\ln(2-x)+\frac{1}{x}\ln 2=-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$ （6 分）

当 $x=0$ 时，$s(0)=\frac{1}{2}$。

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right), & -2\le x<0, 0<x<2\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$。 （1 分）

三.（10 分）每小题 5 分，共两小题

（1）求函数极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x\frac{\ln(1+xy)}{x+y}$。

解：利用 $\ln(1+xy)\sim xy$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}x\frac{\ln(1+xy)}{x+y}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x+y}$，

取路径 y=0，则极限等于 0；

取路径 $y=x^3-x$，则原式$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^5-x^3}{x^3}=-1$，

所以原式无极限。

（2）已知函数 $y=f(x,t)$，又由隐函数 F(x,y,t)=0 确定了函数 t=t(x,y)，分别求 y 和 t 的导函数。

解：分别对函数 $y=f(x,t)$ 和 F(x,y,t)=0 中的 x 求导，得出关于 x 导函数的方程组，$\begin{cases}\frac{dy}{dx}-f_2'\frac{dt}{dx}=f_1'\\ F_y\frac{dy}{dx}+F_t\frac{dt}{dx}=-F_x\end{cases}$，求解方程组得出

$$\frac{dy}{dx}=\frac{F_t f_1'-F_x f_2'}{F_y f_2'+F_t}, \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{F_y f_1'+F_x}{F_y f_2'+F_t}。$$

四．（**10 分**）求函数 $f(x,y,z)=2x+2y-z^2+5$ 在有界闭区域

$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 2\}$ 上的最大值与最小值。

解: $f(x,y,z)$ 在有界闭区域上连续，一定存在最大值与最小值。

$\frac{\partial f}{\partial x}=2,\frac{\partial f}{\partial y}=2,\frac{\partial f}{\partial z}=-2z$ ，在 Ω 内无驻点，因此 $f(x,y,z)$ 在 Ω 的边界上取最大值与最小值。 **(4 分)**

作函数 $L(x,y,z,\lambda)=2x+2y-z^2+5+\lambda(x^2+y^2+z^2-2)$

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=2+2\lambda x=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=2+2\lambda y=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}=-2z+2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2-2=0\end{cases}$$

解得驻点 $(-1,-1,0)$， $(1,1,0)$ **(5 分)**

计算 $f(-1,-1,0)=1,\ f(1,1,0)=9$。

因此 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上取最大值 9，最小值 1 **(1 分)**

五．（**10 分**）．计算二重积分 $I=\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\,dxdy,$ 其中积分区域

$D=\{(x,y)\,|\,|x|\le 1,|y|\le 1\}.$

解 将 D 分割成两部分 $D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 和

$D_2=\{(x,y)\,|\,|x|\le 1,|y|\le 1,x^2+y^2\ge 1\}$，

于是有

$$I=\iint\limits_{D_1}|x^2+y^2-1|\,dxdy+\iint\limits_{D_2}|x^2+y^2-1|\,dxdy$$ （**3 分**）

$$I_1=\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr=\frac{\pi}{2}$$ **（2 分）**

记 $D_3=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1, x^2+y^2\ge 1\}$，

由对称性可知

$$I_2=\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy=4\iint_{D_3}(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$=4\int_0^1dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^1(x^2+y^2-1)dy$$

$$=4\int_0^1[(x^2-1)-(x^2-1)\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx$$

$$=4\int_0^1[x^2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx$$

$$=-\frac{4}{3}+\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=-\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}.$$ **（5 分）**

所以　$I=\pi-\dfrac{4}{3}$。

六.（**10 分**）设 $f(x)$ 有连续的导数, $f(0)=-1$,且积分

$$\int_C[\tan x-f(x)]\frac{y}{\cos^2 x}dx+f(x)dy$$ 与路径无关,

求:(1) $f(x)$；(2)若 C 是从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的光滑曲线,求积分值.

解: (1) $P(x,y)=[\tan x-f(x)]\dfrac{y}{\cos^2 x},Q(x,y)=f(x)$.

由于积分与路径无关,所以应有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 得一阶微分方程阶

$$f'(x)+\frac{1}{\cos^2 x}f(x)=\frac{\tan x}{\cos^2 x}$$ **(4 分)**

得微分方程通解 $f(x)=\tan x-1+Ce^{-\tan x}$,

求得微分方程满足初始条件 $f(0)=-1$ 的特解为:

$$f(x)=\tan x-1 \qquad \textbf{(3 分)}$$

(2) 将 $f(x)=\tan x-1$带入，整理得

$$I=\int_C \frac{y}{\cos^2 x}dx+(\tan x-1)dy,$$

按折线段计算积分得

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,0)} +\int_{(1,0)}^{(1,1)} =0+\int_0^1(\tan 1-1)dy=\tan 1-1 \qquad \textbf{(3 分)}$$

七.（10 分）计算曲面积分 $I=\oiint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$， Σ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，方向指向坐标原点。

解: 在椭球面内作辅助小球面$\sum_1$: $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$，方向指向外侧，

则由高斯公式， **(3 分)**

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} -\oiint_{\Sigma_1}$$

$$=-\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dV \quad -\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}0dV-\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega}3dV \qquad \textbf{(5 分)}$$

$$=-\frac{3}{\varepsilon^3}\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 \quad =-4\pi \qquad \textbf{(2 分)}$$

八.（10 分）设 L 是平面 $x+y+z-4=0$ 与柱面 $|x|+|y|=2$ 的交线，从 z 轴正向看去, L 为逆时针方向，计算

$$I=\oint_L(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz+(y^2-z^2)dx$$

解：记 Σ 为平面 $x+y+z-4=0$ 上 边界线 L 所围部分的上侧,

D 为Σ在 xoy 面上的投影，由斯托克斯公式

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & 2z^2-x^2 & 3x^2-y^2\end{vmatrix}dS$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\oiint_{\Sigma}(4x+2y+3z)\,\mathrm{d}\,S$$ **(5 分)**

由于Σ：$x+y+z-4=0$， $(x,y)\in D$，D 为曲面投影的平面积分区域，

D：$|x|+|y|\le 2$

因此由积分曲面的对称性和形心公式，

$$\mathrm{I}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\oiint_{\Sigma}\left(12+x-y\right)dS$$

$$=-\frac{24}{\sqrt{3}}\oiint_{\Sigma}dS+0+0$$

$$=-\frac{24}{\sqrt{3}}\iint_{D}\sqrt{3}dxdy$$

$=-24\times 8=-192$ **(5 分)**

解法二： 曲线积分定义，找$|x|+|y|=2$边界对应的四条曲线的参数方程，$x+y=2,x-y=2,-x+y=2,-x-y=2$，

（1）$x+y=2$： 对应参数方程为$y=2-x,z=2$，。。。