矩阵理论与方法

9月

内容提要 CONTENTS

- □ 课程信息
- □ 课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

第1章 线性空间与线性变换

1.2 线性变换及其矩阵

1.2 线性变换及其矩阵

定义 1.10 设 V 是数域 K 上的线性空间，T 是 V 到自身的一个映射，使对任意向量 $\boldsymbol{x} \in V$，V 中都有唯一的向量 $\boldsymbol{y}$ 与之对应，则称 T 是 V 的一个**变换**或**算子**，记为

$$T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

称 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 在 T 下的**象**，而 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{y}$ 的**原象**(或**象源**).

1.2 线性变换及其矩阵

定义 1.10 设 V 是数域 K 上的线性空间，T 是 V 到自身的一个映射，使对任意向量 $\boldsymbol{x} \in V$，V 中都有唯一的向量 $\boldsymbol{y}$ 与之对应，则称 T 是 V 的一个**变换**或**算子**，记为

$$T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

称 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 在 T 下的**象**，而 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{y}$ 的**原象**(或**象源**).

变换T： $V \to V$

$\therefore x \in V, T(x) \in V$

1.2 线性变换及其矩阵

定义 1.10 设 V 是数域 K 上的线性空间，T 是 V 到自身的一个映射，使对任意向量 $\boldsymbol{x} \in V$，V 中都有唯一的向量 $\boldsymbol{y}$ 与之对应，则称 T 是 V 的一个**变换**或**算子**，记为

$$T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

称 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 在 T 下的**象**，而 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{y}$ 的**原象**(或**象源**).

变换T：$V \to V$

$$\therefore x = (E_1, \ldots, E_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = T(x) = (E_1, \ldots, E_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

定义 1.11 如果数域 K 上的线性空间 V 的一个变换 T 具有下列性质：

$$T(k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y})=k(T\boldsymbol{x})+l(T\boldsymbol{y}) \tag{1.2.1}$$

其中，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in V$，k，$l\in K$. 则称 T 为 V 的一个**线性变换**或**线性算子**.

注： $T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=T\boldsymbol{x}+T\boldsymbol{y}$ 和 $T(k\boldsymbol{x})=k(T\boldsymbol{x})$.

1.2 线性变换及其矩阵

例： 在矩阵空间$R^{2\times2}$中，给定矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix},$$

证明: $T_1(X)=AX, T_2(X)=XB,\ (\forall \mathrm{X}\in \mathrm{R}^{2\times2})$

是线型变换

1.2 线性变换及其矩阵

例： 在矩阵空间$R^{2\times2}$中，给定矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix},$$

证明: $T_1(X)=AX, T_2(X)=XB,\ (\forall \mathrm{X}\in \mathrm{R}^{2\times2})$

是线型变换

证:(1)$T_1(X+Y)=A(X+Y)=AX+AY=T_1X+T_1Y$

$$T_1(kX)=A(kX)=kAX=k(T_1X)$$

1.2 线性变换及其矩阵

例： 在矩阵空间$R^{2\times2}$中，给定矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix},$$

证明: $T_1(X)=AX, T_2(X)=XB,\ (\forall \mathrm{X}\in \mathrm{R}^{2\times2})$

是线型变换

证:$(2)T_2(X+Y)=(X+Y)B=XB+YB=T_2X+T_2Y$

$$T_2(kX)=(kX)B=k(XB)=k(T_2X)$$

线性变换的简单性质

1．T 为V的线性变换，则

$$T(0)=0,\ \ T(-x)=-T(x).$$

2．线性变换保持线性组合及关系式不变，即

若 $x=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_rx_r,$

则 $T(x)=k_1T(x_1)+k_2T(x_2)+\cdots+k_rT(x_r).$

3．线性变换把线性相关的向量组的变成线性相关的向量组. 即

1.2 线性变换及其矩阵

定义 1.11 如果数域 K 上的线性空间 V 的一个变换 T 具有下列性质：

$$T(k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y})=k(T\boldsymbol{x})+l(T\boldsymbol{y}) \tag{1.2.1}$$

其中，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in V$，k，$l\in K$. 则称 T 为 V 的一个**线性变换**或**线性算子**.

注： $T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=T\boldsymbol{x}+T\boldsymbol{y}$ 和 $T(k\boldsymbol{x})=k(T\boldsymbol{x})$.

1.2 线性变换及其矩阵

定义 1.11 如果数域 K 上的线性空间 V 的一个变换 T 具有下列性质：

$$T(k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y})=k(T\boldsymbol{x})+l(T\boldsymbol{y}) \tag{1.2.1}$$

其中，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in V$，$k, l\in K$. 则称 T 为 V 的一个**线性变换**或**线性算子**.

注： $T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=T\boldsymbol{x}+T\boldsymbol{y}$ 和 $T(k\boldsymbol{x})=k(T\boldsymbol{x})$.

$$\therefore x=(E_1,\ldots,E_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

$$T(x)=T\left((E_1,\ldots,E_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)=(T(E_1),\ldots,T(E_n))\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

回顾　由线性变换T导出矩阵A的过程

例：复数$\alpha + i\beta = (1+i2)(3+i4) = T(3+i4)$

求$\alpha, \beta = ?$

T是线型变换

回顾　由线性变换T导出矩阵A的过程

解：$\alpha + i\beta = (1+i2)(3+i4) = T(3+i4)$

T是线型变换

$1, i$ 是复数域C上的一组基，$3+i4=(1,i)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

基和坐标

$$\alpha + i\beta = T(3+i4) = T\left((1,i)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)$$

线型变换性质

回顾　由线性变换T导出矩阵A的过程

T是线型变换

解：$\alpha + i\beta = (1+i2)(3+i4) = T(3+i4)$

基和坐标

$1, i$ 是复数域C上的一组基，$3+i4 = (1, i)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

线型变换性质

$$\alpha + i\beta = T(3+i4) = T\left((1, i)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

$$= T(1, i)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (T(1), T(i))\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

回顾 由线性变换T导出矩阵A的过程

解：$\alpha+i\beta=(1+i2)(3+i4)=T(3+i4)$ T是线型变换

$1,i$ 是复数域C上的一组基，$3+i4=(1,i)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ 基和坐标

$$\alpha+i\beta=T(3+i4)=T\left((1,i)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)$$

线型变换性质

$$=T(1,i)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=(T(1),T(i))\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=(1,i)\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$$T(1)=(1+i2)\cdot 1=(1,i)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},T(i)=(1+i2)\cdot i=(1,i)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

回顾　由线性变换T导出矩阵A的过程

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，$E_1, E_2, \ldots, E_n$是V的一组基,

分别考虑$y = T(x)$和$z = (T^2)(x)$，其中$x \in V$

1、$x = (E_1, \ldots, E_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = (E_1, \ldots, E_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$

2、$T(E_1, \ldots, E_n) = (E_1, \ldots, E_n)A$

3、$y = T(x) = T(E_1, \ldots, E_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (E_1, \ldots, E_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

4、$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

1、线型空间

2、基和坐标

3、线性变换

4、$A=P^{-1}\Lambda P$

1.2 作业（第五版教材）

1、定义：1.10、1.11

2、例题：1.10、1.11、1.12

3、习题1.1：10、12

习题1.2：1

1.2 作业（第三版教材）

1、定义：1.10、1.11

2、例题：1.10、1.11、1.12

3、习题1.1：10、12

习题1.2：1

下课，谢谢大家！