

第三章 动态电路的时域分析

3-1 引言

前面两章介绍了直流电阻电路的基本概念和分析方法。例如图 3-1-1 所示,电阻上的伏安关系(VCR)由欧姆定律所决定。开关动作之前电流 $i = u_{s1} / R$, 开关在 $t = 0$ 时, 由位置 1 倒向 2, 在开关接触 2 的瞬间, 由于电阻上的电流电压关系仍受欧姆定律约束, 所以电流瞬时变为 $i = u_{s2} / R$ 。由此可见, 开关在位置 1 时的电流与电压的约束关系不会影响开关在位置 2 的电流电压约束关系, 即电阻电路是“无记忆”的, 任一时刻的响应只与该时刻的激励有关。如第二章所述, 求解电阻电路所列写的电流电压方程都是代数方程。

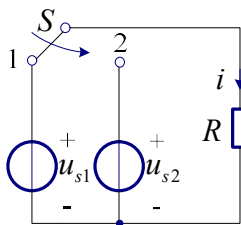


图 3-1-1 静态电路无记忆特性示意图

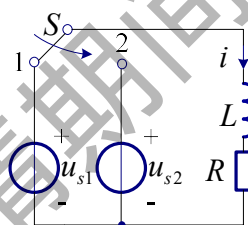


图 3-1-2 动态电路记忆特性示意图

实际电路中除了电阻元件之外, 常常还含有电容器、电感器类元件, 因而实际电路所对应的电路模型中就会包含电容元件和电感元件。

例如图 3-1-2 所示, 电路中包含一个电感元件。设在 u_{s1} 和 u_{s2} 分别作用下, 电感元件中的电流不一样, 当开关由 1 倒向 2 时, 电感上电流的变化会体现出“动态”“惯性”“记忆”等特性。这和纯电阻元件构成的电阻电路是迥然不同的。这是因为电容、电感元件上的 VCR 都涉及对电流、电压的微分或积分运算, 这种元件被称为动态元件。含有动态元件的电路仍然服从于基尔霍夫定律, 动态电路是用微、积分方程来描述的。

3-2 动态元件的基本特性

3-2-1 电容元件

1、电容元件定义

电路理论中的电容元件是实际电容器的理想化模型。在两块金属板间填充绝

缘介质后可构成一个简单的电容器如图 3-2-1 所示。如果电容器外接电源，两块极板上就分别聚集了等量的正负电荷，极板之间形成了电场，储存了电场能量。去掉了外电源，由于介质的绝缘作用，正负电荷间不会发生中和反应，理想情况下，电荷就会永远地储存在两个极板上。在电荷所建立的电场中存储着能量，因此，电容器是储能器件。。

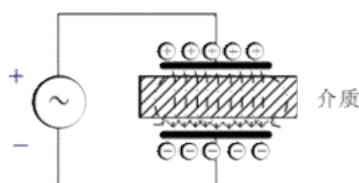


图 3-2-1 电容元件原理图

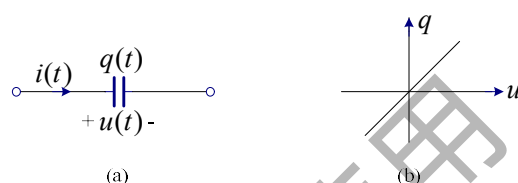


图 3-2-2 电容元件的符号与伏安关系

电路中电容元件的符号如图 3-2-2 (a) 所示，其只考虑了存储电荷从而建立电场的作用，也就是说，理想电容元件应该是一个电荷与电压相约束的二端元件。电容元件在任一时刻 t ，它的电荷 q 与端电压 u 的关系可用 $u-q$ 平面上的一条曲线确定。假如该曲线是一条通过原点的直线，如图 3-2-2 (b) 所示，且不随时间而变，则称该电容元件为线性时不变电容。即

$$q(t) = Cu_C(t) \quad (3-2-1)$$

C 为正值常量，是特性曲线的斜率，称为电容。电容的国际单位为法拉，单位符合为 F 。常用电容器的电容量一般较小，因此常用的计量单位还有微法 μF ($10^{-6} F$) 和皮法 pF ($10^{-12} F$)。

2、电容的伏安特性

在电路分析中，往往关注的是元件上电压、电流的关系的约束关系。当电容的电流和电压在关联参考方向下，如图 3-2-2 (a) 所示，有：

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{dCu_C(t)}{dt} = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad (3-2-2)$$

式 (3-2-2) 表明，某一时刻 t 电容的电流取决于端电压 u 的变化率，电压的变化率越大，电流也越大。如果端电压不随时间变化，即为直流电压，电压的变化率为零，电流也为零，此时电容相当于开路，因此电容具有隔直流作用。即使某一时刻电容电压为零，而若电压变化率不为零，则电容电流也不为零。这和电阻元件有本质不同，电阻两端只要有电压，电阻上就一定有电流。由于电容的电

流取决于该时刻的端电压的变化率，所以称电容为**动态**元件。

如对式（3-2-2）两边积分，整理得：

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\zeta) d\zeta \quad (3-2-3)$$

得到电容元件伏安关系的积分形式。如果讨论电容电压在某一时刻 t_0 的连续性，则有

$$u_c(t_0^+) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0^+} i_c(t) dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0^-} i_c(t) dt + \frac{1}{C} \int_{t_0^-}^{t_0^+} i_c(t) dt = u_c(t_0^-) + \frac{1}{C} \int_{t_0^-}^{t_0^+} i_c(t) dt$$

如果电容电流是有界函数，则

$$\frac{1}{C} \int_{t_0^-}^{t_0^+} i_c(t) dt = 0$$

所以

$$u_c(t_0^+) = u_c(t_0^-) \quad (3-2-4)$$

即电容电压在电流有界的情况下是连续变化而不能跃变。就此而言电容是一个**惯性**元件，其电压具有连续性质。

式（3-2-3）还表明，某一时刻 t 的电容电压值，不仅决定于 t 时刻的电流值，而且还与 $-\infty$ 到 t 时刻的所有电流作用有关，或者说与电流的全部作用过程有关，电容电压能记忆电流作用的历史，因此电容又是个**记忆**元件，可以记忆电流的历史作用。

如果任意选定一初始时刻 t_0 作为研究起点， t_0 以后的电压为

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\zeta) d\zeta = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\zeta) d\zeta + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\zeta) d\zeta = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\zeta) d\zeta \quad (3-2-5)$$

$u(t_0)$ 为电容在初始时刻 t_0 的初始电压，它反映了电容在初始时刻 t_0 以前的全部电流积累的效果。式（3-2-5）表示，如果已知电容电压初始值 $u(t_0)$ 和 t_0 以后的电容电流，就可以了解 t_0 以后的电容电压值。

3、电容的储能

当电容电压与电流为关联参考方向时，电容的瞬时功率为：

$$p(t) = u(t)i(t) = Cu(t) \frac{du_c(t)}{dt} \quad (3-2-6)$$

该瞬时功率可正可负，与电阻元件功率总为正的情况显然不同。当 $p > 0$ 时

功率为正，电容吸收能量；当 $p < 0$ 时功率为负，电容释放能量。

从 $t = -\infty$ 到 t 时刻，电容元件吸收的电场能量为

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_{-\infty}^t p(\zeta) d\zeta = \int_{-\infty}^t u(\zeta) i(\zeta) d\zeta = \int_{-\infty}^t Cu(\zeta) \frac{du(\zeta)}{d\zeta} d\zeta = C \int_{u(-\infty)}^{u(t)} u(\zeta) du(\zeta) \\ &= \frac{1}{2} Cu_c^2(t) - \frac{1}{2} Cu_c^2(-\infty) \end{aligned} \quad (3-2-7)$$

若视 $t = -\infty$ 时为电容初始状态，令 $u(-\infty) = 0$ ，则

$$W(t) = \frac{1}{2} Cu^2(t) \quad (3-2-8)$$

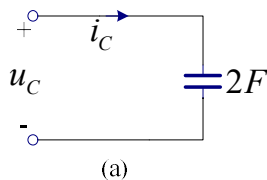
上式表明，电容在某一时刻的储能，只取决于该时刻的电压值。

如果讨论从时间 t_1 到 t_2 电容元件吸收的能量

$$W(t) = C \int_{u(t_1)}^{u(t_2)} u(\zeta) du(\zeta) = \frac{1}{2} Cu_c^2(t_2) - \frac{1}{2} Cu_c^2(t_1) = W(t_2) - W(t_1) \quad (3-2-9)$$

电容电压增加，电容充电，电容从外电路吸收能量转变为电场能量，储能增加；反之电容电压减小，电容放电，对外电路释放电场能量，储能减小。电容不会消耗能量，在某段时间吸收的能量在另一段时间又会退还回电路，所以电容是一种储能元件，只有储存和释放电场能量的作用。电容的这种特性和电阻有明显不同，电阻元件任意时刻都是在消耗能量，不可能向外提供能量，因而是耗能元件。

【例题 3-1】电路如图 3-2-3 (a) 所示，电容电压 $u_c(t)$ 波形如图 3-2-3 (b) 所示，求电容电流 $i_c(t)$ ，瞬时功率 $p_c(t)$ 和储能 $W_c(t)$ ，并画出各波形图。



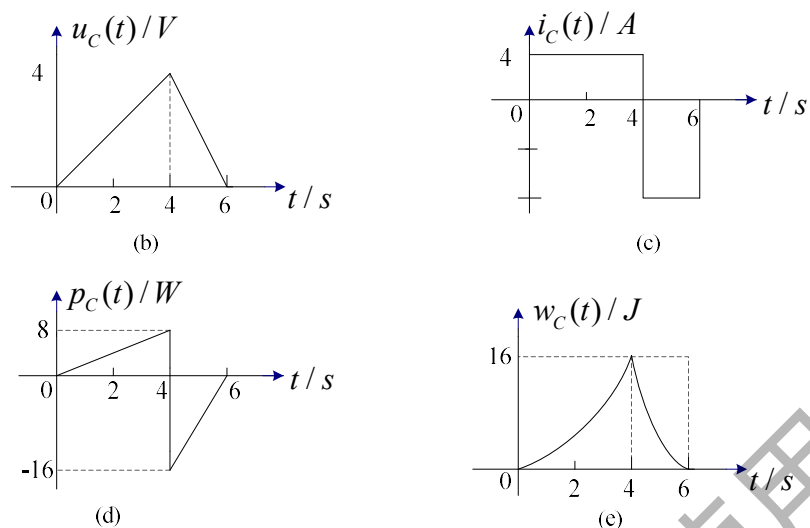


图 3-2-3 例题 3-1 图

解：由图 3-2-3 (b) 波形知

$$u_C(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \leq 4 \\ 12 - 2t & 4 \leq t \leq 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$

电流 $i_C(t) = C \frac{du_C}{dt}$

$$i_C(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2 & 0 < t < 4 \\ -4 & 4 < t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$

波形如图 3-2-3 (c) 所示

瞬时功率 $p_C(t) = u_C(t)i_C(t)$

$$p_C(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & 0 < t < 4 \\ -48 + 8t & 4 < t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$

波形如图 3-2-3 (d) 所示

瞬时储能 $W_C(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t)$

$$W_C(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2 & 0 \leq t < 4 \\ (12 - 2t)^2 & 4 \leq t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$

波形如图 3-2-3 (e) 所示

电容器在电子电路中的作用一般概括为：通交流、阻直流。电容器通常起滤

波、旁路、耦合、去耦、相移等作用。

电容的种类繁多，若按容量可分为：固定电容器、可调电容器、半可调电容器等；若按绝缘介质可分为：金属化纸介电容器、云母电容器、独石电容器、薄膜介质电容器、陶瓷电容器（绝缘性能好，可以制成高压电容器；介质损耗小，因此在高频电路中多采用瓷介电容器）、铝电解电容器、钽电解电容器、空气和真空电容器等。

3-2-2 电感元件

1、电感元件的定义

电路理论中的电感元件是实际电感器的理想化模型。通常把漆包线或纱包线等带有绝缘表层的导线绕制成线圈可制造出简单的实际电感器。电感元件中不带磁芯或铁芯的一般称为空心电感线圈，带有磁芯的则称作磁芯线圈或铁芯线圈。

当电感线圈通过电流时产生磁链 Ψ （ $\Psi = N\phi$ ， N 为线圈匝数， ϕ 为磁通），如图 3-2-4（a）所示。同时在周围建立起磁场，储存磁场能量。不考虑其它作用，只体现能够建立磁场进而储存磁能这一物理特性的电路模型就是电感元件，简称为电感，为储能元件。电感元件的电路符号如图 3-2-4（b）所示。

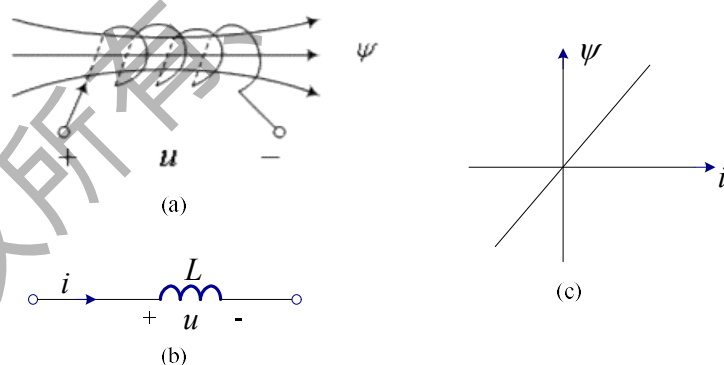


图 3-2-4 电感元件示意图

当电感元件在任一时刻 t ，它的磁链 $\Psi(t)$ 与它的电流 $i(t)$ 可用 $\Psi-i$ 平面的一条曲线来确定。如果 $\Psi-i$ 平面上的特性曲线是一条通过原点的直线，且不随时间而变化，如图 3-2-4（c）所示，则称此电感元件为线性时不变电感元件。当电感中磁链与电流的参考方向符合右手螺旋法则， Ψ 与 i 的关系表示为

$$\Psi(t) = Li(t) \quad (3-2-10)$$

其中 L 为正值常数，是 $\Psi-i$ 特性曲线的斜率，称为电感量，简称电感。

电感的国际单位是亨利（ H ），较小的单位还有毫亨（ mH ）、微亨（ μH ）。

$$1\text{亨利}(H) = \frac{1\text{韦伯}(wb)}{1\text{安培}(A)}$$

$$1H = 1000mH(\text{毫亨}) \quad 1mH = 1000\mu H(\text{微亨})$$

2、电感的伏安特性

如果通过电感的电流随时间变化，磁链也跟随变化，根据电磁感应定律，线圈两端产生感应电压，若电压与磁链参考方向符合右手螺旋法则，如图 3-2-4(a) 所示，则

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} \quad (3-2-11)$$

将式（3-2-10）代入上式可得

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (3-2-12)$$

（3-2-12）式为电感元件的伏安关系，推导过程中电感上电压、电流取关联参考方向。

（3-2-12）式表明，任意时刻电感电压 u 取决于该时刻电感电流 i 的变化率，与该时刻电流值无关。电感中电流变化率越大，电感电压越大。如果电感电流不随时间变化，是恒定值为直流电流，则电感电压为零，电感元件相当于短路。若某一时刻电感电流为零，但其变化率不为零，则电感电压也不为零。电感电流的变化率决定了电感电压的大小，就此而言，电感是**动态**元件。

对（3-2-12）式两边积分，可得电感元件伏安关系的积分形式

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi \quad (3-2-13)$$

如果选定任意时刻 t_0 作为研究起点， t_0 以后的电流为

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t_0} u(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(\xi) d\xi \quad (3-2-14)$$

其中 $i(t_0)$ 为 t_0 时刻的初始电流，它反映了电感电压 t_0 以前全部磁链积累的效果。电感在 t_0 时刻以后的电流 $i(t)$ ，由 $i(t_0)$ 和 $t > t_0$ 后的电压来决定。

之前我们曾介绍了电路的对偶特性和对偶变量的概念。若将电容和电感的 VCR 相比较，会发现若将电容电压和电流与电感电流和电压互换，并将 C 和 L

互换,则电容的 VCR 即和电感的 VCR 一致。因此,电容和电感是一对对偶量。另外,由电容、电感的定义可知电荷和磁链也是一对对偶量。由对偶特性不难得出,电感电流也具有连续性和记忆性。即若电感电压为有限值,电感电流必定是连续变化不能产生跃变。因此电感也是个**惯性**元件。由(3-2-13)式可知,某一时刻 t 的电感电流不仅取决于该时刻的电压值,还取决于从 $-\infty$ 到 t 的所有时间里的电压值,因此,电感电流能记忆电压的历史,电感元件也是个**记忆**元件。

由对偶关系可知,电感元件也是储能元件。在 t 时刻,电感储存的能量

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) \quad (3-2-16)$$

电感的特性与电容的特性正好相反,它具有通直流、阻交流的特性,频率越高,线圈对电流的阻碍作用越大。电感器在电路中经常和电容一起工作,构成 LC 滤波器、LC 振荡器等。另外,人们还利用电感的特性,制造了阻流圈、变压器、继电器等。

3-2-3 电容、电感的串、并联

1、电容的串、并联

(1) 电容的串联

图 3-2-5 所示,假设有 n 个电容元件串联,各电容的电压初始值分别是 $u_1(0)$ 、 $u_2(0)$ 、 $u_3(0)$ …… $u_n(0)$,电路的电流为 i ,各电容电压分别是 $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$ …… $u_n(t)$ 。

总电压 $u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_n(t)$

各电压为

$$u_1(t) = u_1(0) + \frac{1}{C_1} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$u_2(t) = u_2(0) + \frac{1}{C_2} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

……

$$u_n(t) = u_n(0) + \frac{1}{C_n} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

所以总电压为

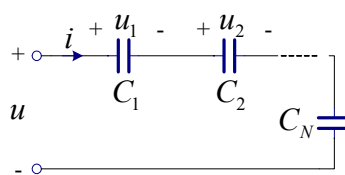


图 3-2-5 电容的串联

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C_s} \int_0^t i(\tau) d\tau = u_1(0) + u_2(0) + \dots + u_n(0) + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) \int_0^t i(\tau) d\tau \quad \text{即}$$

总初始电压

$$u(0) = u_1(0) + u_2(0) + \dots + u_n(0)$$

串联连接的总电容为：

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (3-2-17)$$

(2) 电容的并联

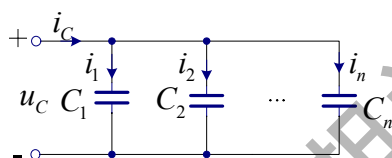


图 3-2-6 电容的并联

若 C_1, C_2, \dots, C_n 并联，根据 KCL 并联时总电流为

$$i_C = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

电容伏安关系

$$i_1 = C_1 \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$i_2 = C_2 \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$i_n = C_n \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$i_C = C_1 \frac{du_C(t)}{dt} + C_2 \frac{du_C(t)}{dt} + \dots + C_n \frac{du_C(t)}{dt} = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) \frac{du_C(t)}{dt} = C_p \frac{du_C(t)}{dt}$$

并联电容的总电容为

$$C_p = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (3-2-18)$$

2、电感的串、并联

(1) 电感的串联

若有几个电感串联，如图 3-2-7 所示，

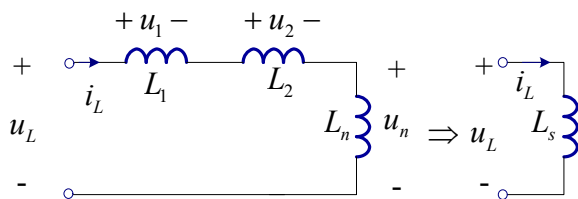


图 3-2-7 电感的串联

总电压为

$$u_L(t) = u_1 + u_2 + \dots + u_n = L_1 \frac{di_L}{dt} + L_2 \frac{di_L}{dt} + \dots + L_n \frac{di_L}{dt} = (L_1 + L_2 + \dots + L_n) \frac{di_L}{dt}$$

串联电感总电感为各电感之和

$$L_s = L_1 + L_2 + \dots + L_n \quad (3-2-19)$$

(2) 电感的并联

并联电感电路如图 3-2-8 所示，电路中各个电感的电流初始值分别为 $i_1(0)$ 、 $i_2(0)$... $i_n(0)$ 。

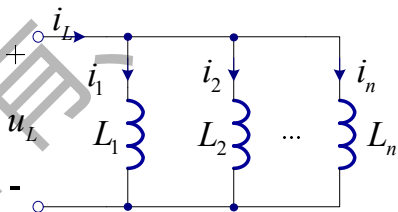


图 3-2-8 电感的并联

根据基尔霍夫电流约束定律可知：

$$\begin{aligned} i_L &= i_1 + i_2 + \dots + i_n \\ &= i_1(0) + \frac{1}{L_1} \int_0^t u_L dt + i_2(0) + \frac{1}{L_2} \int_0^t u_L dt + \dots + i_n(0) + \frac{1}{L_n} \int_0^t u_L dt \\ &= i_1(0) + i_2(0) + \dots + i_n(0) + \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \right) \int_0^t u_L dt \\ &= i_L(0) + \frac{1}{L_p} \int_0^t u_L dt \end{aligned}$$

即总初始电流为

$$i_L(0) = i_1(0) + i_2(0) + \dots + i_n(0)$$

并联连接的总电感为

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \quad (3-2-20)$$

3-3 换路定则及初始值的确定

当直流电路中各个元件上的电压和电流都不随着时间变化时,称电路进入了直流稳态。如果由于某种原因,例如电源或某部分电路的接通或断开、电路元件参数的改变等使电路由一种工作状态变化到另外一种工作状态,将这种工作状态的改变称为换路。

由于换路,会使电路中的电压、电流等发生变化,这种变化的过程会持续一段时间,时间的长短与电路中的元件参数有关。在换路后,电路中的电量随时间而变化,我们把这个变化的过程称为动态过程(或者称为过渡过程,有时也称为瞬态过程)。把对电路动态过程的分析称为电路的动态分析。

在换路的瞬间,电路中的某些电量会突然变化,而换路后瞬间的值对分析电路的动态过程非常重要。本节将讨论换路后瞬间这些电量值(称其为初始值)的确定。

为分析方便,总是假设换路发生在 $t=0$ 时刻,将换路前的这一瞬间用 $t=0^-$ 表示,换路后的这一瞬间用 $t=0^+$ 表示,所对应换路前后瞬间的电压、电流也分别表示为: $u(0^-)$ 、 $u(0^+)$ 、 $i(0^-)$ 、 $i(0^+)$ 。动态电路换路过程如图 3-3-1 所示,假设电路在换路前已经达到稳态(否则电路仍然处在过渡过程中),换路过程中有激励信号加入。

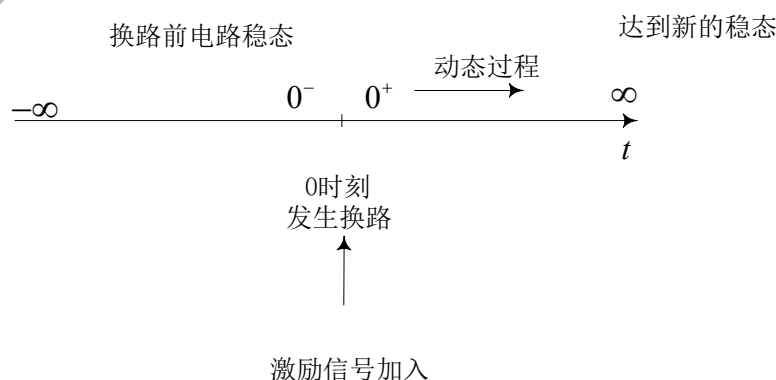


图 3-3-1 动态电路换路过程示意图

根据本章前两节的介绍可知：在电容电流和电感电压为有界值的情况下，电容电压不能跃变，电感电流不能跃变。这种不能跃变的性质称为换路定则，可用公式表示如下：

$$\begin{cases} u_C(0^+) = u_C(0^-) \\ i_L(0^+) = i_L(0^-) \end{cases} \quad (3-3-1)$$

$u_C(0^-)$ 、 $i_L(0^-)$ 是电路已处于稳定状态、且在换路前一瞬间的电容电压和电感电流的值（也称为初始状态）。因为在直流激励下，电容相当于开路，电感相当于短路，由此可以得到 0^- 时刻的等效电路，并据此计算初始状态 $u_C(0^-)$ 和 $i_L(0^-)$ 。

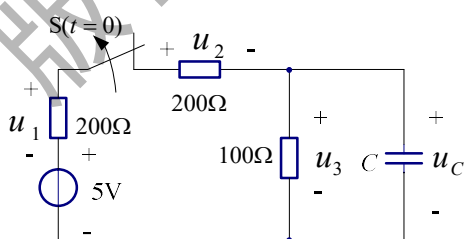
根据换路定则，在 0^+ 时刻的电容电压初始值 $u_C(0^+) = u_C(0^-)$ ，电感电流初始值 $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ 。由这两个初始值，可以计算出 0^+ 时刻其他各电量的初始值（initial value），其方法是根据 0^+ 时刻的电路求得。在 0^+ 时刻，根据替代定理，可将电路中的电容用电压值等于 $u_C(0^+)$ 的电压源替代，将电感用电流值等于 $i_L(0^+)$ 的电流源替代，独立源则取其在 0^+ 时的值，从而得到 0^+ 时刻的电路。

注意，除动态元件上的变量 $u_C(t)$ 和 $i_L(t)$ 满足换路定则，并由此确定其初始值外，电路中其他各电量的初始值均要由 0^+ 电路求得。

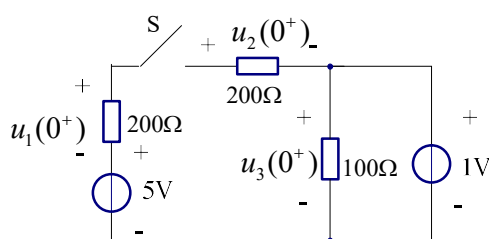
【例题 3-2】如图 3-3-2 (a) 所示电路，开关 S 在 $t=0$ 时刻打开，S 打开前电路已处于稳态，求开关打开后电路中各元件的电压值。

解：开关打开前，电路处于稳态，电容相当于开路，所以

$$u_C(0^-) = \frac{100}{200 + 200 + 100} \times 5V = 1V。$$



(a)



(b)

图 3-3-2 例 3-2

开关打开后的 0^+ 电路如图 3-3-2 (b) 所示。此时

$$u_c(0^+) = u_c(0^-) = 1\text{V}, \quad u_1(0^+) = u_2(0^+) = 0\text{V}, \quad u_3(0^+) = 1\text{V}$$

【例题 3-3】电路如图 3-3-3 (a) 所示, 开关闭合前电路处于稳态, 求开关闭合后的 $u_1(0^+)$ 、 $u_L(0^+)$ 、 $i_1(0^+)$ 和 $\frac{di_L(0^+)}{dt}$ 。

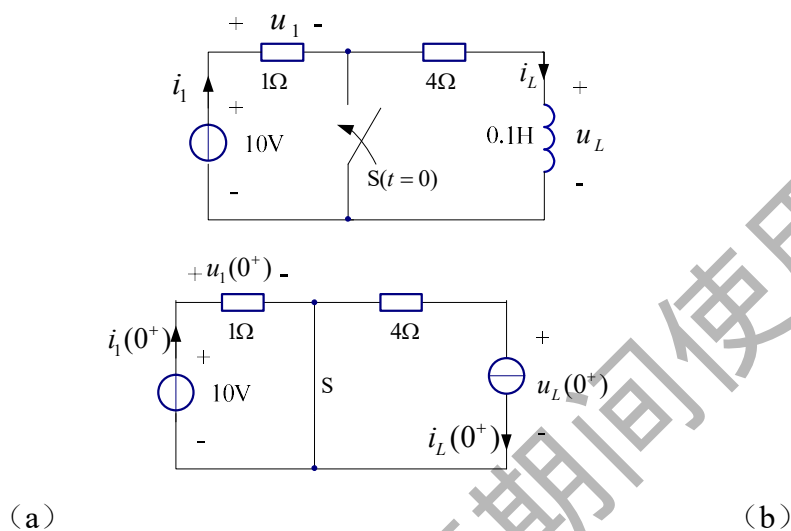


图 3-3-3 例 3-3

解: $t=0$ 时, 开关闭合。

$t=0^-$ 时, 开关未闭合, 电路处于稳态, 电感相当于短路, $i_L(0^-) = \frac{10}{1+4} = 2\text{A}$

$t=0^+$ 时: $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2\text{A}$, 0^+ 时刻电路如图 3-3-3 (b) 所示。

$$u_1(0^+) = 10\text{V}, \quad u_L(0^+) = -4 \times 2 = -8\text{V}, \quad i_1(0^+) = \frac{10}{1} = 10\text{A}$$

因为 $u_L = L \frac{di_L(t)}{dt}$, 所以 $\frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{u_L(0^+)}{L} = \frac{-8}{0.1} = -80\text{V/H} = -80\text{A/s}$

$\frac{di_L(0^+)}{dt}$ 的单位换算说明如下: $\frac{\text{V}}{\text{H}} = \frac{\text{V}}{\frac{\text{Wb}}{\text{A}}} = \frac{\text{V} \cdot \text{A}}{\text{V} \cdot \text{s}} = \frac{\text{A}}{\text{s}}$

【例题 3-4】如图 3-3-4 (a) 所示电路中的, 已知 $u_c(0^-) = 5\text{V}$, $i_L(0^-) = 0$,

求 $i(0^+)$ 、 $u(0^+)$ 、 $u_c(0^+)$ 、 $\frac{di(0^+)}{dt}$ 、 $\frac{du(0^+)}{dt}$ 。开关闭合前电路处于稳态。

解: 0^+ 等效电路如图 3-3-4 (b) 所示。

$$i(0^+) = i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0, \quad u_c(0^+) = u_c(0^-) = 5\text{V}, \quad u(0^+) = i(0^+) \cdot R = 0$$

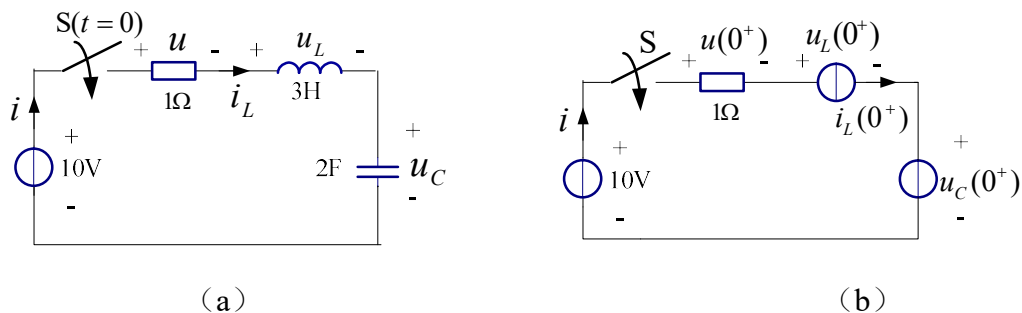


图 3-3-4 例 3-4 图

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{di_L(0^+)}{dt} = \frac{u_L(0^+)}{L}$$

根据 KVL: $u_L(0^+) = 10 - u(0^+) - u_C(0^+) = 10 - 0 - 5 = 5V$

$$\text{所以, } \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{5}{3} A/s$$

由此可见, $t = 0^+$ 时, 虽然 $i(0^+) = 0$, 但电流变化率不为零。

$$\text{因为 } u(0^+) = i(0^+) \cdot R = 0, \text{ 所以, } \frac{du(0^+)}{dt} = R \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{5}{3} \cdot 1 = \frac{5}{3} V$$

通过对前面例题的求解, 可以总结出求初始值的计算步骤如下:

- 1) 由 $t = 0^-$ 等效电路计算 $u_C(0^-)$ 和 $i_L(0^-)$;
- 2) 根据换路定则, $u_C(0^+) = u_C(0^-)$, $i_L(0^+) = i_L(0^-)$;
- 3) 画出 0^+ 等效电路, 其中, 电容用电压值为 $u_C(0^+)$ 的电压源代替, 电感用电流值为 $i_L(0^+)$ 的电流源代替;
- 4) 用分析直流电路的方法计算待求量。

3-4 一阶电路的零输入响应

由于动态元件电压与电流之间存在微积分关系, 此时电路方程就需要用微分方程进行描述。含有一个独立的动态元件的电路用一阶微分方程描述, 称其为一阶动态电路。同理, 将用二阶微分方程描述的动态电路称为二阶动态电路, 依此类推。通常把二阶以上的动态电路统称为高阶动态电路。本章通过介绍一阶动态电路来说明动态电路的基本分析过程。

如果已知电容电压和电感电流在初始时刻的值, 则根据该时刻的输入就能确定电路中的任何变量在随后时刻的值, 我们将具有这种特性的量, 即电容电压和

电感电流称为状态变量（state variable）。在动态电路中，通常都以状态变量作为未知量来列写方程。

如图 3-4-1（a）所示电路中，开关闭合前电容已有初始储能，为了求得开关闭合后电容电压的变化情况，我们可以利用叠加定理把电路分成如图（b）和（c）所示两个电路的叠加。

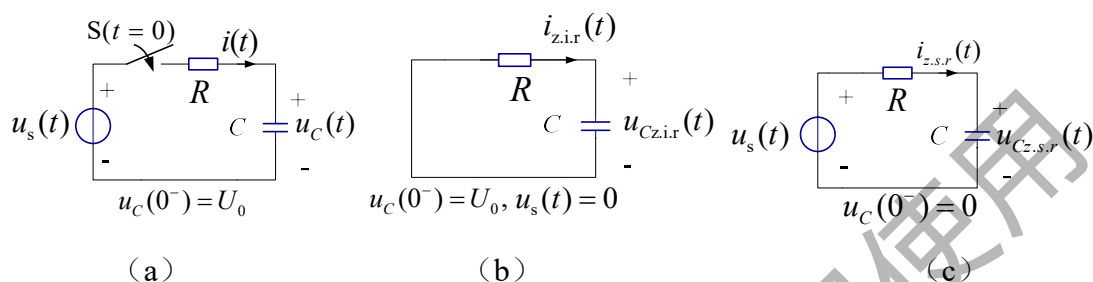


图 3-4-1 电路的分解

在图（b）所示电路中，外加激励为零，响应仅仅是由动态元件的初始储能产生的，将这种情况下的响应称为零输入响应（zero-input response----z.i.r）。而在图（c）所示电路中，动态元件的初始储能为零，响应仅仅是由外加激励产生的，称这种情况下的响应为零状态响应（zero-state response----z.s.r）。二者之和称为电路的全响应（complete response----c.r），亦即电路的全响应是在动态元件处于非零初始状态时，电路在外加激励作用下的响应。

3-4-1 一阶 RC 电路的零输入响应

在如图 3-4-2 所示电路中，已知电容在开关闭合前已储存有电荷，开关在 $t=0$ 时刻闭合，电容电压 $u_C(0^-)=U_0$ ，可以推测电路的工作过程，换路时 $u_C(0^+)=u_C(0^-)=U_0$ ，换路瞬间电容电压保持不变，随后电容储存的电荷通过电阻放电，电容释放能量，电阻消耗能量，电容电压逐渐下降，电路电流逐渐减小，随着时间的推移，当 $t \rightarrow \infty$ 时，电容放电结束，此时 $u_C(\infty)=0, i(\infty)=0, u_R(\infty)=0$ ，通过以下分析，可以获知电容通过电阻的放电规律。

已知 $u_C(0^-)=U_0$ ，开关在 $t=0$ 时刻闭合，求开关闭合后，即 $t \geq 0^+$ 时的 $u_C(t)$ 、 $i(t)$ 和 $u_R(t)$ 。

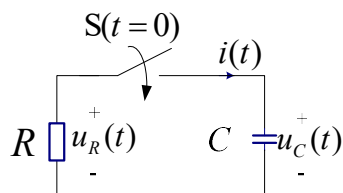


图 3-4-2 一阶 RC 电路的零输入响应

根据 KVL 列方程如下：

$$u_R - u_C = 0$$

因为： $u_R = -R \cdot i$ ， $i = C \frac{du_C}{dt}$ ，将此二式带入上式整理后可得：

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0$$

这是一个一阶常系数线性齐次微分方程，其特征方程为：

$$RCs + 1 = 0;$$

特征根为： $s = -\frac{1}{RC}$

其解的形式为： $u_C(t) = Ae^{st} = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$

其中 A 为积分常数，可由初始条件确定。

根据换路定则： $u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$ ，所以 $t = 0^+$ 时： $u_C(0^+) = Ae^{-\frac{1}{RC}0^+} = A = U_0$ ，因此得到方程的解为：

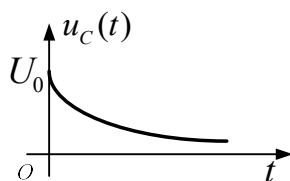
$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} = u_C(0^+) e^{-\frac{1}{RC}t}, \quad t \geq 0^+ \quad (3-4-1)$$

根据电路中的电压电流关系可得：

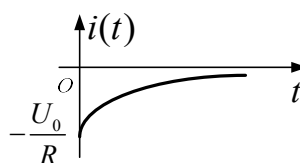
$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = C \cdot U_0 \left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-\frac{1}{RC}t} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}, \quad t \geq 0^+$$

$$u_R(t) = u_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}, \quad t \geq 0^+$$

根据电压、电流的表达式可画出他们的响应曲线，如图 3-4-3 (a)、(b) 所示。



(a)



(b)

图 3-4-3 一阶 RC 电路零输入响应的电压、电流曲线

由图可以看出，电容电压和电流都随时间的增长而逐渐衰减为零，所以，RC 电路的零输入响应是一个放电过程，这是因为开关闭合后，电容与电阻构成一个回路，电容中的储能被电阻消耗，最终趋于零，即 $u_C(\infty)=0$ 。当电容放电完毕，电路达到新的稳态，此时电容相当于开路，所以 $i(\infty)=0$ 。

由 $u_C(t)$ 、 $i(t)$ 和 $u_R(t)$ 的表达式可以看出，他们都按照相同的指数规律变化，且变化的快慢由电路参数 R、C 决定。如果 R、C 值一定，则过渡过程的快慢也就决定了；同时，改变 R、C 值，就可以改变过渡过程的快慢程度。

由于 RC 具有时间的量纲，所以，把 RC 称为时间常数（time constant），并用 τ 表示，即：

$$\tau = RC \quad (3-4-2)$$

当 R 的单位为欧姆，C 的单位为法拉时， τ 的单位为秒。令

$$s = -\frac{1}{\tau} \quad (3-4-3)$$

则 s 具有频率的量纲，将 s 称为电路的固有频率（natural frequency）。所谓“固有频率”即表示了网络本身固有的特性。

观察 $u_C(t)$ 、 $i(t)$ 和 $u_R(t)$ 的表达式可知，指数前面的系数就是这些量的初始值，所以，任何量的零输入响应都可以写为如下标准形式：

$$y(t) = y(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0^+ \quad (3-4-5)$$

因此，只要知道了该量的初始值和电路的时间常数，就能够得到该量在过渡过程中的变化规律。

3-4-2 一阶 RL 电路的零输入响应

在如图 3-4-4 所示电路中，开关 S 打开前电路已处于稳态，分析开关打开后的 $i_L(t)$ 、 $u_L(t)$ 和 $u_R(t)$ 。

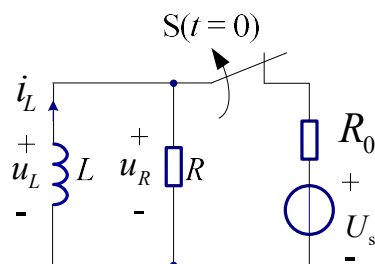


图 3-4-4 一阶 RL 电路的零输入响应

开关打开前电路已处于稳定状态，所以电感相当于短路， $i_L(0^-) = \frac{U_s}{R_0} = I_0$ 。

开关打开后，根据 KVL 有： $u_R - u_L = 0$

因为： $u_R = -R \cdot i_L$ ， $u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$ ，将此二式带入上式整理后可得：

$$L \frac{di_L}{dt} + R i_L(t) = 0$$

这是一个一阶常系数线性齐次微分方程，其特征方程为：

$$Ls + R = 0;$$

特征根为： $s = -\frac{R}{L}$

其解的形式为： $i_L(t) = A e^{st} = A e^{-\frac{R}{L}t}$

其中 A 为积分常数，由初始条件确定。

根据换路定则： $i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$ ，所以 $t = 0^+$ 时：

$i_L(0^+) = A e^{-\frac{R}{L} \cdot 0^+} = A = I_0 = \frac{U_s}{R_0}$ ，因此得到方程的解为：

$$i_L(t) = \frac{U_s}{R_0} e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = i_L(0^+) e^{-\frac{R}{L}t}, \quad t \geq 0^+ \quad (3-4-6)$$

根据电路中的电压电流关系可得：

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = L \frac{U_s}{R_0} \left(-\frac{R}{L}\right) e^{-\frac{R}{L}t} = -I_0 R e^{-\frac{R}{L}t}, \quad t \geq 0^+$$

$$u_R(t) = u_L(t) = -I_0 R e^{-\frac{R}{L}t}, \quad t \geq 0^+$$

根据电压、电流的表达式可画出他们的响应曲线，如图 3-4-5 (a)、(b) 所示。

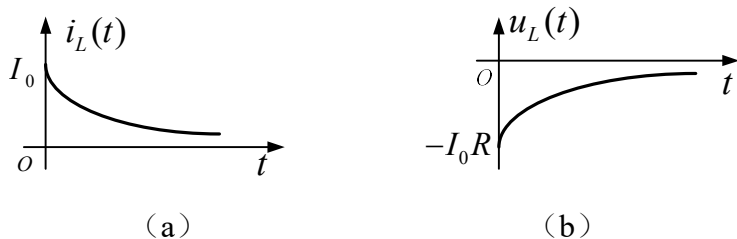


图 3-4-5 一阶 RL 电路零输入响应的电压、电流曲线

与分析 RC 电路零输入响应过程一样，电感电压和电流都随时间的增长而逐渐衰减为零，所以，RL 电路的零输入响应也是一个放电过程。电感中的储能被电阻消耗，最终趋于零，即 $i_L(\infty)=0$ 。当电感放电完毕，电路达到一个新的稳态，此时电感相当于短路，所以 $u_L(\infty)=0$ 。

电路中的其它各量也都按照与电感电流相同的指数规律变化，且变化的快慢由电路参数 R、L 决定。如果 R、L 值一定，则过渡过程的快慢也就决定了；改变 R、L 值，就可以改变过渡过程的快慢程度。

由于 $\frac{L}{R}$ 具有时间的量纲，所以，把 $\frac{L}{R}$ 也称为时间常数，并用 τ 表示，即

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (3-4-7)$$

当 R 的单位为欧姆，L 的单位为亨利时， τ 的单位为秒。令

$$s = -\frac{1}{\tau} \quad (3-4-8)$$

则 s 具有频率的量纲，称其为电路的固有频率。

进一步观察 $i_L(t)$ 、 $u_L(t)$ 和 $u_R(t)$ 的表达式可以发现，他们符合式 (3-4-5) 的形式。因此，无论是 RC 电路还是 RL 电路，只要知道了待求量的初始值和电路的时间常数就能够得到该量在过渡过程中的变化规律。所以，今后求解一阶动态电路的零输入响应时，不必再列写微分方程求解，直接套用公式 (3-4-5) 即可，需要注意的是：RC 电路和 RL 电路的时间常数的计算公式不同。

线性非时变电路的零输入响应满足叠加性，即如果初始值增加 K 倍，则响应也增加 K 倍。

时间常数 τ

时间常数是动态电路分析中一个重要的参数，无论 RC 电路还是 RL 电路，它都具有时间的量纲。说明如下：

$$RC: \text{欧姆} \cdot \text{法拉} = \frac{\text{伏}}{\text{安}} \cdot \frac{\text{库}}{\text{伏}} = \frac{\text{伏}}{\text{安}} \cdot \frac{\text{安} \cdot \text{秒}}{\text{伏}} = \text{秒}$$

$$\frac{L}{R}: \frac{\text{亨利}}{\text{姆}} = \frac{\text{伏} \cdot \text{秒}}{\text{安}} \cdot \frac{\text{安}}{\text{伏}} = \text{秒}$$

下面以电容电压为例对时间常数作进一步的介绍。

(1) 过渡过程与时间常数的关系

过渡过程是电路从一种稳定状态转向另一种稳定状态的变化过程, 从前面得到的电路变量的表达式可知, 理论上讲只有当 $t = \infty$ 时, 过渡过程才能结束。表 3-1 列出了从 $t = 0$ 开始, 经过不同时间后的电容电压值。由表可以看出, $t = \tau$ 时, $u_C(t)$ 下降到初始值的 36.8%; 经过 $t = 4\tau$ 后, 电容电压已下降为初始值的 1.83%; 经过 $t = 5\tau$ 后, 电容电压已下降为初始值的 0.67%; 经过 $t = 6\tau$ 后, 电容电压已下降为初始值的 0.09%, 所以工程上一般认为经过 $t = (3 \sim 5)\tau$ 时间后, 过渡过程基本结束, 电路进入另一种稳定状态。

表 3-1 电容电压的衰减情况

时间 t	电容电压 $u_C(t)$
$t = \tau$	$0.368 u_C(0^+)$
$t = 2\tau$	$0.135 u_C(0^+)$
$t = 3\tau$	$0.0498 u_C(0^+)$
$t = 4\tau$	$0.0183 u_C(0^+)$
$t = 5\tau$	$0.0067 u_C(0^+)$
$t = 6\tau$	$0.0009 u_C(0^+)$

时间常数影响过渡过程的快慢, 时间常数越小, 过渡过程越快; 反之, 时间常数越大, 过渡过程越慢。所以, 改变时间常数可以改变过渡过程所用的时间。图 3-4-6 所示为不同时间常数对应的电容电压变化曲线的示意图。

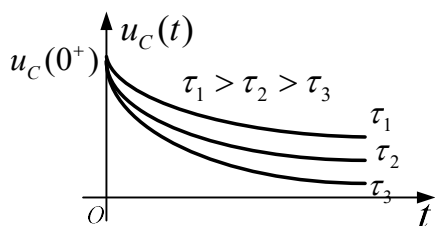


图 3-4-6 时间常数与过渡过程的关系

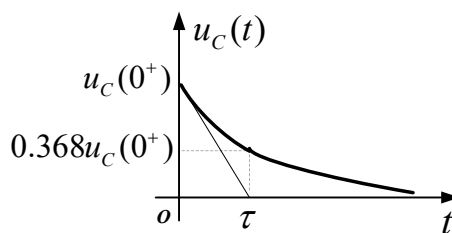


图 3-4-7 时间常数的测量

(2) 时间常数的测定与计算

时间常数的测定可以根据前面讲过的当 $t = \tau$ 时, $u_C(t)$ 下降到初始值的 36.8% 这个事实进行测量, 即在 $u_C(t)$ 的曲线上测量 $0.368u_C(0^+)$ 所对应的时间, 此即为时间常数; 也可以过 $u_C(0^+)$ 作切线, 则切线与时间轴的交点即为时间常数, 因为切线斜率为:

$$\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left(-\frac{1}{\tau} \right) u_C(0^+) e^{-\frac{t}{\tau}} \bigg|_{t=0} = -\frac{u_C(0^+)}{\tau}$$

两种方法均示于图 3-4-7 中。

时间常数的计算也有几种方法, 一是如果已知电路的微分方程, 则根据特征方程的特征根与时间常数互为负倒数, 即 $\tau = -1/s$ 的关系确定; 二是如果已知函数表达式, 根据 $u_C(t)|_{t=\tau} = u_C(0^+) e^{-\frac{t}{\tau}}|_{t=\tau} = u_C(0^+) e^{-1} = 0.368u_C(0^+)$ 确定; 三是根据电路, 即公式 $\tau = RC$ 和 $\tau = L/R$ 计算, 但通常的电路并不像我们前面讨论的那么简单, 即电路中不可能只含有一个电阻元件和一个电源, 此时的 R 如何确定? 通常我们要利用戴维南定理或诺顿定理将除动态元件以外的电路用戴维南等效电路或诺顿等效电路替代, 则 R 即为与动态元件连接的戴维南等效电阻或诺顿等效电阻。具体方法通过例题说明。

【例题 3-5】 求 $t \geq 0^+$ 时图 3-4-8 所示电路的时间常数 τ 。

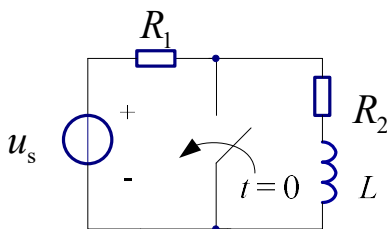


图 3-4-8 例 3-5 电路

解： 开关闭合后电路变为两个独立的部分，即 u_s 与 R_1 的串联和 R_2 与 L 的串联，所以， $\tau = \frac{L}{R_2}$

【例题 3-6】 如图 3-4-9 所示电路中，已知 $u_s(t) = 140\text{V}, t < 0$ ； $u_s(t) = 0, t \geq 0$ 。

求 $t \geq 0$ 时的 $i_C(t)$ 和 $u(t)$ 。

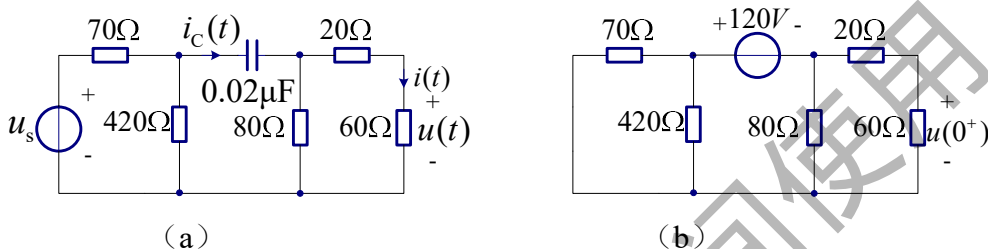


图 3-4-9 例题 3-6 电路

解： $t < 0$ 时，电容开路

$$u_C(0^-) = \frac{u_s(t)}{70 + 420} \times 420 = \frac{140 \times 420}{490} = 120\text{V}$$

$t \geq 0$ 时， $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 120\text{V}$ ，与电容连接的等效电阻为：

$$R_{\text{eq}} = 70 // 420 + (20 + 60) // 80 = \frac{70 \times 420}{490} + 40 = 60 + 40 = 100\Omega$$

所以， $\tau = R_{\text{eq}} C = 100 \times 0.02 \times 10^{-6} = 2 \times 10^{-6} \text{s}$

$$u_C(t) = u_C(0^+) e^{-\frac{t}{\tau}} = 120 e^{-5 \times 10^5 t} \text{V}$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = 0.2 \times 10^{-6} \times 120 \times (-5 \times 10^5) e^{-5 \times 10^5 t} = -1.2 e^{-5 \times 10^5 t} \text{A}$$

$$i(t) = \frac{1}{2} i_C(t) = -0.6 e^{-5 \times 10^5 t} \text{A}$$

$$u(t) = i(t) \times 60 = -36 e^{-5 \times 10^5 t} \text{V}$$

或根据 0^+ 时的等效电路求 $u(0^+)$ ，如图 3-4-9 (b) 所示。

$$u(0^+) = -\frac{60}{20 + 60} \times \frac{(20 + 60) // 80}{70 // 420 + (20 + 60) // 80} \times 120 = -\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times 120 = -36\text{V}$$

$$u(t) = u(0^+) e^{-\frac{t}{\tau}} = -36 e^{-5 \times 10^5 t} \text{V}$$

【例题 3-7】 如图 3-4-10 所示电路中，电感元件已有初始储能， $i_L(0^-) = 1.2\text{A}$ ，

求 $t \geq 0^+$ 时的 $u_{AB}(t) = ?$

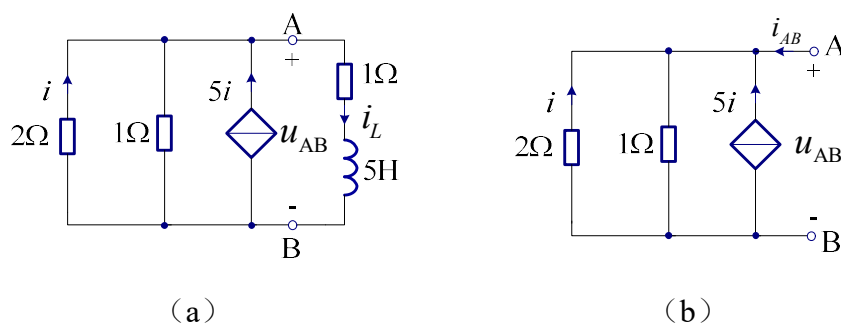


图 3-4-10 例题 3-7 电路

解 先求 AB 左端网络的等效电阻, 如图 3-4-10 (b) 所示。

$$u_{AB} = 1 \times (i + 5i + i_{AB}) = 6i + i_{AB}$$

$$u_{AB} = -2i$$

由以上二式可得 $4u_{AB} = i_{AB}$, 所以 $R_{AB} = \frac{u_{AB}}{i_{AB}} = \frac{1}{4} \Omega$

与电感连接的等效电阻为: $R_{eq} = R_{AB} + 1 = \frac{5}{4} \Omega$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = 5 \times \frac{4}{5} = 4s, \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1.2A$$

$$i_L(t) = i_L(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 1.2e^{-0.25t} A$$

$$u_{AB} = 1 \times i_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} = 1.2e^{-0.25t} + 5 \times 1.2 \times (-0.25)e^{-0.25t} = -0.3e^{-0.25t} V$$

由例题可以看出, 同一电路中各量的时间常数是相同的。因为同一电路中含有指数函数 $e^{-\frac{t}{\tau}}$ 的加减乘除以及微分与积分运算, 除了 $e^{-\frac{t}{\tau}}$ 函数前面的系数有所改变外, 都不会改变 $e^{-\frac{t}{\tau}}$ 指数函数本身的衰减规律。这是动态电路特有的性质。同理, 后面将要介绍的零状态响应和全响应都具有这种特点。

3-5 一阶电路的零状态响应

3-5-1 一阶 RC 电路的零状态响应

如图 3-5-1 所示电路, 假设开关闭合前电容元件没有储能, 即 $u_C(0^-)$ 为零, 则开关 S 闭合后电路的响应就是零状态响应。根据 KVL 可列出开关闭合后电路

方程为：

$$Ri(t) + u_C(t) = u_s(t)$$

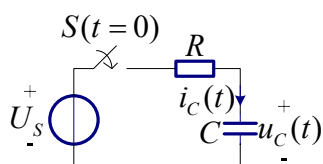


图 3-5-1 一阶 RC 电路

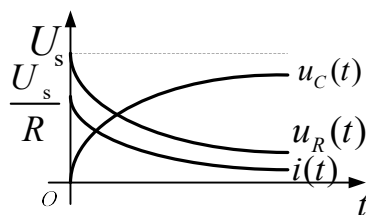


图 3-5-2 一阶 RC 电路的零状态响应曲线

将 $i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$ 代入上式可得：

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_s(t)$$

上式为一阶常系数线性非齐次微分方程。其解由两部分组成：一个是对应齐次微分方程的通解 u_{ch} ，称为齐次解；另一个是非齐次微分方程的特解 u_{cp} 。通解具有如下形式：

$$u_{ch}(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$

其中待定常数 A 根据初始条件确定。

特解具有与激励相同的函数形式。在此只讨论直流激励下的动态电路，因此微分方程等号的右端为一常数，则特解也应为一常数，且满足微分方程。设 $u_s = U_s$ ， $u_{cp} = B$ ，代入微分方程得：

$$0 + B = U_s$$

所以 $B = U_s$ 。

电容电压的完全解为 $u_C(t) = u_{ch}(t) + u_{cp}(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t} + U_s$ 。因为 $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ ，所以有：

$$u_C(t)|_{t=0^+} = u_C(0^+) = A + U_s = 0, \quad A = -U_s$$

由此得到电路的零状态响应为：

$$u_C(t) = -U_s e^{-\frac{1}{RC}t} + U_s = U_s(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) = U_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0^+ \quad (3-5-1)$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = C(-U_s) \left(-\frac{1}{RC}\right) e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0^+$$

$$u_R(t) = Ri(t) = U_s e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0^+$$

其中 $\tau = RC$ 为电路的时间常数。

电压和电流的响应曲线如图 3-5-2 所示。由图可以看出，电容电压值随着时间的增长而增加，并逐渐趋近于电源电压值，所以，RC 电路的零状态响应是一个充电过程，在该过程中电容储存了能量。开关闭合瞬间，电路中的电流 $i(0^+) = \frac{U_s}{R}$ ，电源通过电阻对电容充电，在这一过程中电源的一部分能量存储于电容中，另一部分被电阻消耗掉。充电结束时，电路达到一个新的稳态，此时电容相当于开路， $u_C(\infty) = U_s$ ， $i(\infty) = 0$ 。这时存储在电容中的能量为：

$$w_C(\infty) = \frac{1}{2} C u_C^2(\infty) = \frac{1}{2} C U_s^2$$

充电过程中电阻消耗的能量为：

$$W_R = \int_0^\infty i^2(t) R dt = \int_0^\infty \frac{U_s^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{U_s^2}{R} \left(-\frac{RC}{2}\right) e^{-\frac{2t}{RC}} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} C U_s^2$$

可见，充电过程结束后，电容中储存的能量与电阻消耗的能量相等，所以充电效率为 50%。

根据上一节对时间常数的讨论可知， $u_C(t)$ 、 $i(t)$ 和 $u_R(t)$ 也都按照相同的指数规律变化，即他们具有相同的时间常数，且变化的快慢由时间常数的大小决定。这由他们的表达式也可以看出。

3-5-2 一阶 RL 电路的零状态响应

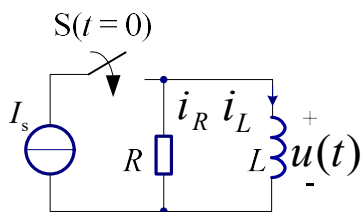


图 3-5-3 一阶 RL 电路

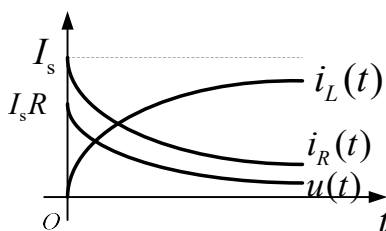


图 3-5-4 一阶 RL 电路的零状态响应曲线

考虑如图 3-5-3 所示 RL 电路，假设开关 S 闭合前电感中没有初始储能，即 $i_L(0^-)$ 为零，则开关闭合后电路的响应就是零状态响应。根据 KCL 可列出开关闭合后的电路方程为：

$$i_R(t) + i_L(t) = I_s$$

将 $i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{L}{R} \frac{di_L(t)}{dt}$ 代入上式可得：

$$\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = I_s$$

上式为一阶常系数非齐次微分方程。同样可求得特解 $i_{Lp} = I_s$ ，通解具有如下形式：

$$i_{Lh}(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

电感电流的完全解为 $i_L(t) = i_{Lh}(t) + i_{Lp}(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + I_s$ 。由初始条件 $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$ 求得待定常数 $A = -I_s$ ，由此得到电路的零状态响应为：

$$i_L(t) = -I_s e^{-\frac{R}{L}t} + I_s = I_s(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = I_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0^+ \quad (3-5-2)$$

$$u(t) = L \frac{di_L}{dt} = L(-I_s)\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t} = I_s R e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0^+$$

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = I_s e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad t \geq 0^+$$

其中 $\tau = \frac{L}{R}$ 为电路的时间常数。

电压和电流的响应曲线如图 3-5-4 所示。由图可以看出，电感电流随着时间的增长而增加，并逐渐趋于电源电流，所以，RL 电路的零状态响应也是一个储存能量过程。开关闭合瞬间，电感上的电压 $u(0^+) = I_s R$ ，电源对电感充磁，在这一过程中电源的一部分能量存储于电感中，另一部分被电阻消耗掉。充磁过程结束时，电路达到一个新的稳态，此时电感相当于短路， $i_L(\infty) = I_s$ ， $u(\infty) = 0$ 。这时存储在电感中的能量为：

$$w_L(\infty) = \frac{1}{2} L i_L^2(\infty) = \frac{1}{2} L I_s^2$$

电感储能过程中电阻消耗的能量为：

$$W_R = \int_0^\infty i_R^2(t) R dt = \int_0^\infty I_s^2 R e^{-\frac{2Rt}{L}} dt = I_s^2 R \left(-\frac{L}{2R} \right) e^{-\frac{2Rt}{L}} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} L I_s^2$$

可见，储能过程结束后，电感中储存的能量与电阻消耗的能量相等，所以储能的效率为 50%。

同样， $i_L(t)$ 、 $i_R(t)$ 和 $u(t)$ 也都按照相同的指数规律变化，即他们具有相同的时间常数，且变化的快慢由时间常数的大小决定。

考察式 (3-5-1) 和 (3-5-2) 可以发现，他们都可以写为如下形式：

$$y(t) = y(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad t \geq 0^+ \quad (3-5-3)$$

这个式子具有一定的意义，即对于任何一阶 RC 和 RL 电路来说，电容电压和电感电流的零状态响应都具有式 (3-5-3) 所示的形式，因此，只要求得电容电压和电感电流在 $t \rightarrow \infty$ 时的值（称其为终值），以及电路的时间常数，就可以得到电容电压和电感电流的变化规律。但需要注意的是，这个公式只适用于电容电压和电感电流，对其他量不适用。因为在零状态下，只有电容电压和电感电流满足换路定则，初始值 $y(0^+) = 0$ 。零状态响应的公式就是状态变量（电容电压和电感电流）从零值逐渐达到稳态值 $y(\infty)$ 的过渡过程。对于非状态变量初始值不一定为零，在 $y(0^+) \neq 0$ 的情况下，就不可能满足式 (3-5-3) 了。

今后求解动态电路的零状态响应不必再列方程求解，直接套用公式 (3-5-3) 即可求得状态变量的零状态响应。如果还需求其他量的零状态响应，则可根据电路结构和元件的电压电流关系得到。**注意：**RC 电路和 RL 电路的时间常数的计算公式不同。

线性时不变电路的零状态响应满足叠加性，即如果激励增加 K 倍，则响应也增加 K 倍。

充电过程的快慢也由时间常数决定，经过 $t = \tau$ 时间后，电容电压或电感电流就充电到稳态值的 63.2%；经过 $t = 4\tau$ 后，充电到稳态值的 98.17%；经过 $t = 5\tau$ 后，充电到稳态值的 99.33%，所以工程上一般认为经过 $t = (3 \sim 5)\tau$ 时间后，充电完毕。

与零输入响应相同，电路的时间常数同样可以通过作曲线的切线进行测量，也可以根据 $y(t)|_{t=\tau} = y(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})|_{t=\tau} = y(\infty)(1 - e^{-1}) = 0.632y(\infty)$ 进行测量或计算，此处不在赘述。

当电路比较复杂时,通常也先利用戴维南定理或诺顿定理将除动态元件以外的电路用戴维南等效电路或诺顿等效电路替代,所以,公式 $\tau = RC$ 和 $\tau = \frac{L}{R}$ 中的 R 即为与动态元件连接的戴维南等效电阻或诺顿等效电阻。

【例题 3-8】 图 3-5-5 所示电路在 $t < 0$ 时处于稳态, $u_C(0^-) = 0$ 。求开关 S 闭合后的 $u_C(t)$ 和 $u_0(t)$ 并画出他们的变化曲线。

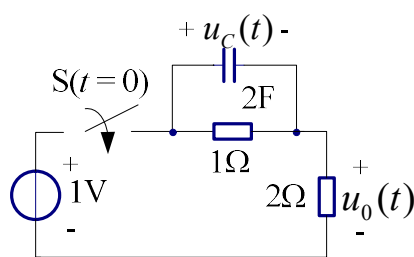


图 3-5-5 例图 3-8 电路

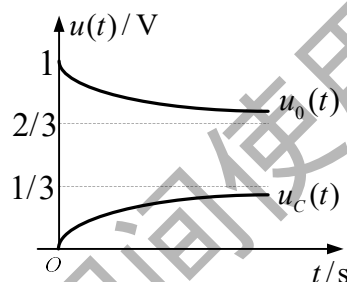


图 3-5-6 电压变化曲线

解: 开关 S 闭合后电路再达稳态时, 电容相当于开路, 所以电容电压的稳态值为:

$$u_C(\infty) = \frac{1}{1+2} \times 1 = \frac{1}{3} \text{ V}$$

与电容连接的等效电阻为:

$$R_{\text{eq}} = 1 // 2 = \frac{1 \times 2}{1+2} = \frac{2}{3} \Omega$$

所以, 电路的时间常数为:

$$\tau = R_{\text{eq}} C = \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3} \text{ s}$$

根据式 (3-5-3), 电容电压为:

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{1}{3}(1 - e^{-\frac{3}{4}t}) \text{ V}, \quad t \geq 0^+$$

根据电路结构, 有: $1 = u_C(t) + u_0(t)$, 所以

$$u_0(t) = 1 - u_C(t) = 1 - \frac{1}{3}(1 - e^{-\frac{3}{4}t}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{4}t} \text{ V}, \quad t \geq 0^+$$

$u_C(t)$ 和 $u_0(t)$ 的变化曲线如图 3-5-6 所示。

【例题 3-9】 图 3-5-7 所示电路在 $t < 0$ 时处于稳态, $i_L(0^-) = 0$ 。求开关 S

闭合后的 $i_L(t)$ 和 $u_1(t)$ 并画出他们的变化曲线。

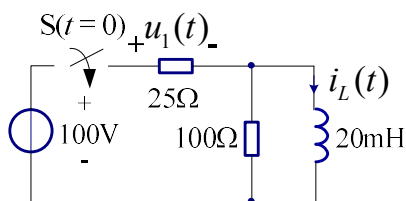


图 3-5-7 例 3-9 电路

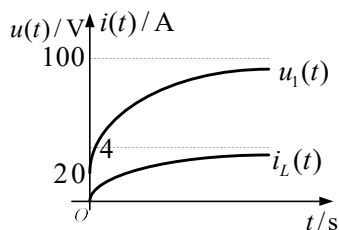


图 3-5-8 电压、电流变化曲线

化曲线

解： 开关 S 闭合后电路再达稳态时，电感相当于短路，所以电感电流的稳态值为：

$$i_L(\infty) = \frac{100}{25} = 4\text{A}$$

与电感连接的等效电阻为：

$$R_{\text{eq}} = 25 // 100 = \frac{100 \times 25}{100 + 25} = 20\Omega$$

所以，电路的时间常数为：

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{eq}}} = \frac{0.02}{20} = 0.001\text{s}$$

根据式 (3-5-3)，电感电流为：

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 4(1 - e^{-1000t})\text{A}, \quad t \geq 0^+$$

根据电路结构，有： $100 = u_1(t) + u_L(t) = u_1(t) + L \frac{di_L(t)}{dt}$ ，所以

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 100 - L \frac{di_L(t)}{dt} \\ &= 100 - 0.02 \times (-4) \times (-1000)e^{-1000t} = 100 - 80e^{-1000t}\text{V}, \quad t \geq 0^+ \end{aligned}$$

$i_L(t)$ 和 $u_1(t)$ 的变化曲线如图 3-5-8 所示。

【例题 3-10】 图 3-5-9 所示电路在 $t < 0$ 时处于稳态， $i_L(0^-) = 0$ ， $u_C(0^-) = 0$ 。

求开关 S 闭合后的 $i_L(t)$ 和 $u_C(t)$ 。

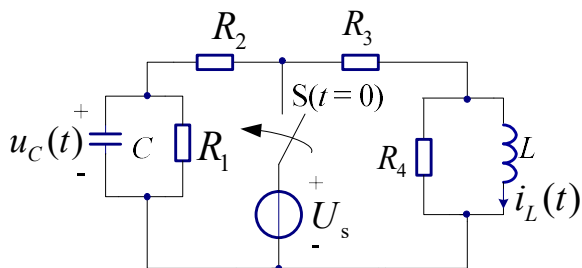


图 3-5-9 例题 3-10 电路

解：开关闭合后，因为左右两条支路的端电压相等且恒定不变，所以左右两部分电路是两个独立的部分，可以分别考虑。当电路在达到稳态时，电感相当于短路，电容相当于开路，所以有：

$$i_L(\infty) = \frac{U_s}{R_3}, \quad u_C(\infty) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_s$$

与电感连接的等效电阻为：

$$R_{eq34} = R_3 // R_4 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

右边电路的时间常数为：

$$\tau_L = \frac{L}{R_{eq34}} = \frac{L(R_3 + R_4)}{R_3 R_4}$$

与电容连接的等效电阻为：

$$R_{eq12} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

左边电路的时间常数为：

$$\tau_C = R_{eq12} C = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$$

根据式 (3-5-3)，电感电流为：

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}) = \frac{U_s}{R_3}(1 - e^{-\frac{R_3 R_4}{L(R_3 + R_4)}t}), \quad t \geq 0^+$$

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}) = \frac{R_1 U_s}{R_1 + R_2}(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}t}), \quad t \geq 0^+$$

3-6 一阶电路的全响应

当线性非时变动态电路中的动态元件既有初始储能，电路又有外加激励时，电路响应既含有零输入响应，也包含零状态响应，此时的响应称为全响应。全响

应可以看作是零输入响应与零状态响应之和，即：全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

对如图 3-6-1 所示电路，假设开关 S 闭合前电容已有初始储能， $u_C(0^-) = U_0 \neq 0$ ，则开关闭合后的响应就是全响应。其中零输入响应为：

$$u_{Cz.i.s}(t) = u_C(0^+)e^{-\frac{1}{RC}t} = U_0e^{-\frac{1}{\tau}t}, \quad t \geq 0^+$$

零状态响应为：

$$u_{Cz.s.r}(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) = U_s(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}), \quad t \geq 0^+$$

则全响应为：

$$u_C(t) = u_{Cz.i.r}(t) + u_{Cz.s.r}(t) = U_0e^{-\frac{1}{\tau}t} + U_s(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}), \quad t \geq 0^+ \quad (3-6-1)$$

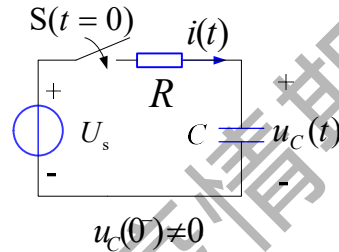


图 3-6-1 一阶 RC 电路

下面再从求解动态电路微分方程的角度，来说明全响应的求解过程。此方法是数学上求解微分方程的方法，所以称为经典法。

根据 KVL 和元件的 VCR 可得到开关闭合后的电路方程为：

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = U_s$$

这个方程与 3-3 中 RC 电路的微分方程形式一样，但状态变量的初始条件不同。可以求得特解为：

$$u_{Cp} = U_s$$

通解仍为指数形式：

$$u_{Ch}(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$

根据初始条件可以求得待定常数 A 为：

$$A = u_C(0^+) - U_s = u_C(0^-) - U_s = U_0 - U_s$$

所以电容电压的全响应为：

$$u_c(t) = u_{ch}(t) + u_{cp}(t) = U_s + (U_0 - U_s)e^{-\frac{1}{\tau}t}, \quad t \geq 0^+ \quad (3-6-2)$$

式 (3-6-1) 整理后与式 (3-6-2) 完全一样。

根据数学求解微分方程特解可知, 当激励为常数时, 特解是一恒定量, 它也是电路达到新的稳定状态时的电容电压值, 所以称其为稳态响应 (steady-state response)。又因为它是由激励决定的, 所以又称为响应的强制分量 (forced component)。通解具有指数形式, 随着时间增长, 它会逐渐趋于零, 所以将其称为暂态响应 (transient response)。又因为其衰减规律仅与电路结构和元件参数有关, 所以又称为响应的自由分量 (natural component)。

在这一过渡过程中, 电容是充电还是放电, 取决于电容电压的初始值 U_0 和激励的电压值 U_s , 如果 $U_0 > U_s$, 则电容放电; 反之, 如果 $U_0 < U_s$, 则电容充电; 如果 $U_0 = U_s$, 则没有过渡过程, 因为此时暂态响应为零。

通过以上的讨论可知: 全响应可以看作是零输入响应与零状态响应的叠加, 也可以看作是稳态响应 (强制分量) 与暂态响应 (自由分量) 的叠加。

【例题 3-10】 图 3-6-2 所示电路在开关闭合前已处于稳态, 求开关 S 闭合后的电容电压 $u_c(t)$, 指出其零输入响应、零状态响应、稳态响应和暂态响应并画出它们的波形图。

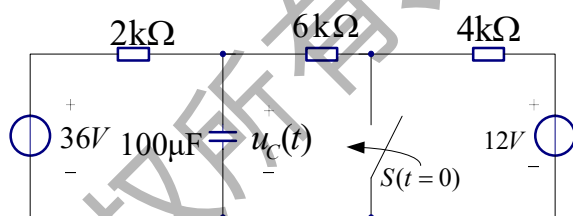


图 3-6-2 例 5-16 电路

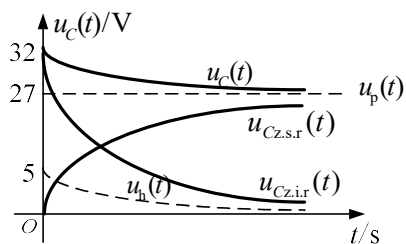


图 3-6-3 响应曲线

解: 因为开关 S 闭合前电路已处于稳态, 所以电容相当于开路。

$$u_c(0^-) = 36 - \frac{36-12}{(2+6+4) \times 10^3} \times 2 \times 10^3 = 32\text{V}$$

开关 S 闭合后, 原电路被分为两个独立的部分, 由 12V 电压源和 4Ω 电阻组成的右半部分与电容无关, 故不再考虑。对左半部分,

$$u_c(0^+) = u_c(0^-) = 32\text{V}, \quad u_c(\infty) = \frac{6}{2+6} \times 36 = 27\text{V}$$

$$\tau = \frac{2 \times 6}{2 + 6} \times 10^3 \times 100 \times 10^{-6} = 0.15\text{s}$$

$$\text{零输入响应为: } u_{Cz.i.r.}(t) = u_C(0^+)e^{-\frac{1}{\tau}t} = 32e^{-\frac{20}{3}t}\text{V}, \quad t \geq 0^+$$

$$\text{零状态响应为: } u_{Cz.s.r.}(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}) = 27(1 - e^{-\frac{20}{3}t})\text{V}, \quad t \geq 0^+$$

$$\text{全响应为: } u_C(t) = u_{Cz.i.r.}(t) + u_{Cz.s.r.}(t) = 32e^{-\frac{20}{3}t} + 27(1 - e^{-\frac{20}{3}t}) = 27 + 5e^{-\frac{20}{3}t}\text{V}, \quad t \geq 0^+$$

$$\text{其中稳态响应为: } u_p(t) = 27\text{V}, \quad t \geq 0^+$$

$$\text{暂态响应为: } u_h(t) = 5e^{-\frac{20}{3}t}\text{V}, \quad t \geq 0^+$$

各响应的波形如图 3-6-3 所示。

如果 12V 电压源改为 24V 电压源，则对响应会有什么影响呢？根据前面的分析可知，开关闭合后电路分为两个独立的部分，所以 12V 电压源只影响 $u_C(t)$ 的

$$\text{初始值, } u_C(0^+) = u_C(0^-) = 36 - \frac{36 - 24}{(2 + 6 + 4) \times 10^3} \times 2 \times 10^3 = 34\text{V}, \text{ 而对稳态值没有影}$$

响。所以只有 $u_C(t)$ 的零输入响应发生改变， $u_{Cz.i.r.}(t) = 34e^{-\frac{20}{3}t}\text{V}$ ，而零状态响应保持不变。

如果 36V 电压源变为 48V 电压源，则将对 $u_C(t)$ 的零输入响应和零状态响应

$$\text{都有影响, 此时, } u_C(0^+) = u_C(0^-) = 48 - \frac{48 - 12}{(2 + 6 + 4) \times 10^3} \times 2 \times 10^3 = 42\text{V},$$

$$u_C(\infty) = \frac{6}{2 + 6} \times 48 = 36\text{V}, \text{ 全响应为 } u_C(t) = 42e^{-\frac{20}{3}t} + 36(1 - e^{-\frac{20}{3}t}) = 36 + 6e^{-\frac{20}{3}t}\text{V}。$$

3-7 一阶电路的三要素法

总结上述动态电路的分析过程，把上一节用两种方法求解的 RC 电路的电容电压列写如下：

$$\text{零输入、零状态法: } u_C(t) = u_{Cz.i.r.}(t) + u_{Cz.s.r.}(t) = U_0 e^{-\frac{1}{\tau}t} + U_s(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}), \quad t \geq 0^+$$

$$\text{经典法: } u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp}(t) = U_s + (U_0 - U_s)e^{-\frac{1}{\tau}t}, \quad t \geq 0^+$$

在经典法中我们已知特解就是 $u_C(t)$ 的稳态值，即 $u_{Cp} = U_s = u_C(\infty)$ ，而待定

常数 A 为 $A = u_C(0^+) - U_s = u_C(0^+) - u_C(\infty)$ 。因此式 (3-6-2) 可写为如下形式：

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0^+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-6-3)$$

由此可见，只要知道了 $u_C(t)$ 的初始值、稳态值和时间常数，就可以根据式 (3-6-3) 得到电容电压的全响应。

需要说明的是，式 (3-6-3) 不仅适用于状态变量，也适用于非状态变量，即在直流激励下，一阶动态电路中任一支路的电压、电流都可利用式 (3-6-3) 求解。由于只需知道待求量的初始值、稳定值和电路的时间常数三个量就能得到该量的解，所以将这种方法称为三要素法 (three-element method)。用一般形式表示如下：

$$y(t) = y(\infty) + [y(0^+) - y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3-6-4)$$

【例 3-11】 图 3-6-4 (a) 所示 RL 电路中的电压源电压如图(b)所示，且 $i_L(0^-) = 0$ ，试求 $t \geq 0^+$ 的 $i(t)$ ，并绘出变化曲线。

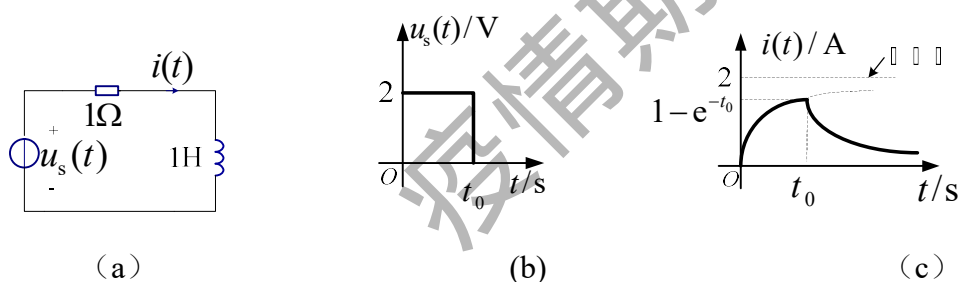


图 3-6-4 例 3-11 电路及响应曲线

解： 因为激励只作用于 $(0, t_0)$ 区间，所以需要分段求响应。由于 $i_L(0^-) = 0$ ，所以在 $0 \leq t \leq t_0$ 区间的 $i(t)$ 为零状态响应；当 $t > t_0$ 时，因为没有了外加激励，而且由于前一段的充磁，电感中已有储能，所以 $i(t)$ 为零输入响应。下面分别求解。

$$0 \leq t \leq t_0: i(0^+) = i_L(0^-) = 0, \quad i_L(\infty) = 2A, \quad \tau = \frac{L}{R} = 1s$$

$$i(t) = i(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 2(1 - e^{-t})A, \quad t \geq 0^+$$

$$t > t_0: u_s(t) = 0, \quad i_L(\infty) = 0, \quad \tau = \frac{L}{R} = 1s, \quad i(0^+) = i(t_0^+) = 2(1 - e^{-t_0})$$

$$i(t) = i(t_0^+)e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} = 2(1 - e^{-t_0})e^{-(t-t_0)}A, \quad t \geq t_0^+$$

$i(t_0^+)$ 是第一段在 t_0 时刻的值，此即为第二段的初始值。

变化曲线如图 3-6-4 (c) 所示。

【例题 3-12】 已知 $t < 0$ 时图 3-6-5 (a) 所示电路已处于稳态。求 $t \geq 0^+$ 时的 $u_{ab}(t)$ 。

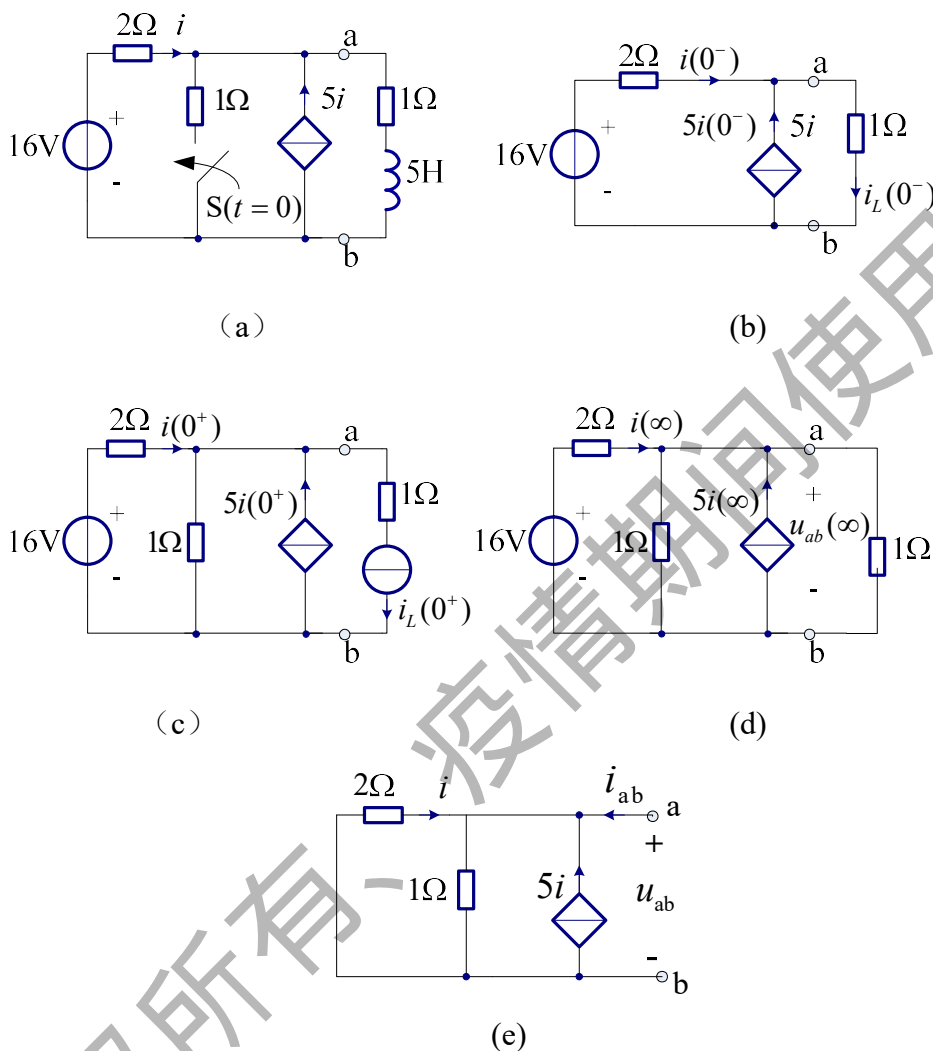


图 3-6-5 例题 3-12 电路

解：因为 $t < 0$ 时电路已处于稳态，所以电感相当于短路，此时的电路如图 3-6-5 (b) 所示。

$$i_L(0^-) = 6i(0^-)$$

$$\text{而 } 16 = 2i(0^-) + 6i(0^-) \times 1, \quad i(0^-) = 2\text{A}$$

$$\text{所以 } i_L(0^-) = 6 \times 2 = 12\text{A}$$

为求出 $u_{ab}(t)$ 的初始值 $u_{ab}(0^+)$ ，画出 0^+ 时刻的等效电路，如图 3-6-5 (c) 所示。其中电感用电流值为 $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 12\text{A}$ 的电流源替代。

$$u_{ab}(0^+) = 1 \times [6i(0^+) - i_L(0^+)] = 6i(0^+) - 12$$

$$\text{而 } 16 = 2i(0^+) + 6i(0^+) - i_L(0^+) = 8i(0^+) - 12, \quad i(0^+) = 3.5\text{A}$$

$$\text{所以 } u_{ab}(0^+) = 6 \times 3.5 - 12 = 9\text{V}$$

为求出 $u_{ab}(t)$ 的稳态值 $u_{ab}(\infty)$ ，画出 ∞ 时刻的等效电路，如图 3-6-5 (d) 所示。因为电路又达到稳态，所以电感相当于短路。

$$u_{ab}(\infty) = (1/1) \times 6i(\infty) = 3i(\infty)$$

$$\text{而 } 16 = 2i(\infty) + (1/1) \times 6i(\infty) = 5i(\infty), \quad i(\infty) = 3.2\text{A}$$

$$\text{所以 } u_{ab}(\infty) = 3 \times 3.2 = 9.6\text{V}$$

为求时间常数，先求 ab 左端网络的等效电阻 R_{ab} ，如图 3-6-5 (e) 所示。

$$\text{因为 } u_{ab} = 1 \times (6i + i_{ab}), \quad u_{ab} = -2i$$

$$\text{由以上二式可得: } 4u_{ab} = i_{ab}, \quad R_{ab} = \frac{u_{ab}}{i_{ab}} = 0.25\Omega$$

$$\text{与电感连接的等效电阻为: } R_{eq} = 1 + 0.25 = 1.25\Omega$$

$$\text{电路的时间常数为: } \tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{5}{1.25} = 4\text{s}$$

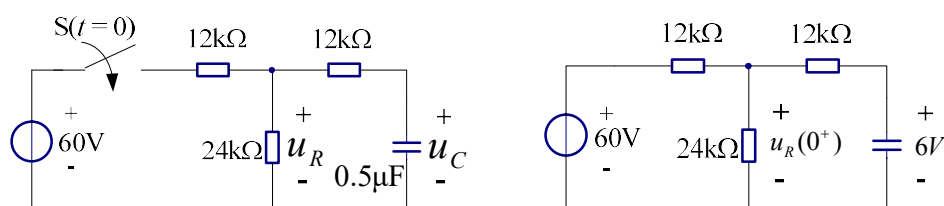
根据三要素公式可得：

$$\begin{aligned} u_{ab}(t) &= u_{ab}(\infty) + [u_{ab}(0^+) - u_{ab}(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 9.6 + (9 - 9.6)e^{-\frac{1}{4}t} = 9.6 - 0.6e^{-\frac{1}{4}t}\text{V}, \quad t \geq 0^+ \end{aligned}$$

【例题 3-13】 已知如图 3-6-6 (a) 所示电路中， $u_C(0^-) = 6\text{V}$ ，开关闭合前电路处于稳态。求开关闭合后：

1) 电容电压的全响应、稳态响应、暂态响应、零输入响应、零状态响应并画其波形。

2) $24\text{k}\Omega$ 电阻上的电压 $u_R(t)$ 。



(a)

(b)

图 3-6-6 例题 3-13 电路

解： 1) $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 6\text{V}$, $u_C(\infty) = \frac{24}{12+24} \times 60 = 40\text{V}$

与电容连接的等效电阻为: $R_{\text{eq}} = 12 + \frac{12 \times 24}{12+24} = 12 + 8 = 20\text{k}\Omega$

时间常数为: $\tau = R_{\text{eq}}C = 20 \times 10^3 \times 0.5 \times 10^{-6} = 0.01\text{s}$

所以: $u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0^+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 40 + (6 - 40)e^{-100t} = 40 - 34e^{-100t}\text{V}, t \geq 0^+$

稳态响应为: 40V

暂态响应为: $-34e^{-100t}\text{V}$

零输入响应为: $6e^{-100t}\text{V}$

零状态响应为: $40(1 - e^{-100t})\text{V}$

响应曲线如图 3-6-7 所示。

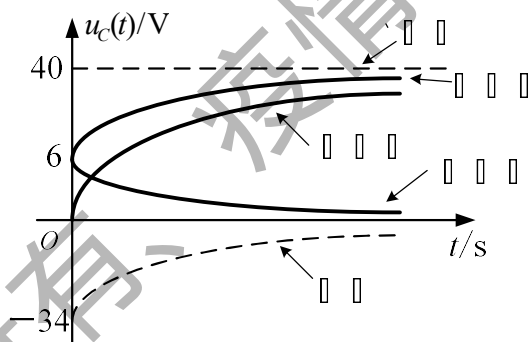


图 3-6-7 电容电压的响应曲线

2) 方法一: 根据电路结构和元件的 VCR

$$\begin{aligned} u_R(t) &= 12 \times 10^3 \times i_C(t) + u_C(t) = 12 \times 10^3 \times C \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) \\ &= 12 \times 10^3 \times 0.5 \times 10^{-6} (-34)(-100)e^{-100t} + 40 - 34e^{-100t} \\ &= 20.4e^{-100t} + 40 - 34e^{-100t} = 40 - 13.6e^{-100t}\text{V}, \quad t \geq 0^+ \end{aligned}$$

方法二: 直接应用三要素法

由等效电路, 如图 3-6-6 (b) 所示, 求 $u_R(t)$ 的初始值 $u_R(0^+)$ 。

由节点电压法得: $u_R(0^+) = \frac{\frac{60}{12} + \frac{6}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{12}} = 26.4\text{V}$

$$\text{稳态值为: } u_R(\infty) = \frac{24}{12+24} \times 60 = 40\text{V}$$

所以

$$u_R(t) = u_R(\infty) + [u_R(0^+) - u_R(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 40 + (26.4 - 40)e^{-100t} = 40 - 13.6e^{-100t}\text{V}, \quad t \geq 0^+$$

可见两种方法所得结果一致。具体用那种方法则根据实际情况考虑，通常选用比较简便的方法。对本题来说，因为已经求出了 $u_C(t)$ ，所以用方法一更简便。

【例题 3-14】 已知图 3-6-8 桥型电路中的电容电压和电感电流的初始值都为零， $t=0$ 时合上开关，设 $R_1 R_2 = \frac{2L}{C}$ ，电压表的内阻无限大，求开关闭合后：

- 1) 流过开关的电流 $i(t)$ ；
- 2) 电压表读数达到最大值的时间；
- 3) 电压表的最大读数。

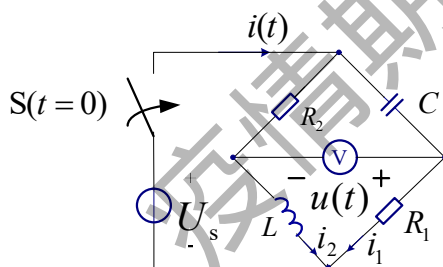


图 3-6-8 例题 3-14 电路

解： 因为电压表的内阻为无限大，所以电压表连接的两节点间相当于开路，开关闭合后 R_2 、 L 串联支路与 R_1 、 C 串联支路具有相同的电压，它们各自与电压源构成回路。

$$1) \text{ 当电路达到稳态时, } i_2(\infty) = \frac{U_s}{R_2}, \quad u_C(\infty) = U_s$$

$$\text{所以 } i_2(t) = \frac{U_s}{R_2} (1 - e^{-\frac{R_2}{L}t}), \quad u_C(t) = U_s (1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}}), \quad i_1(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{U_s}{R_1} e^{-\frac{t}{R_1 C}}$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{U_s}{R_1} e^{-\frac{t}{R_1 C}} + \frac{U_s}{R_2} (1 - e^{-\frac{R_2}{L}t}), \quad t \geq 0^+$$

$$2) \quad u(t) = R_1 i_1 - L \frac{di_2}{dt} = U_s (e^{-\frac{t}{R_1 C}} - e^{-\frac{R_2}{L}t}), \quad t \geq 0^+$$

当 $\frac{du}{dt} = 0$ 时, $u(t)$ 达到最大值时, 此时有: $\frac{1}{R_1 C} e^{-\frac{t}{R_1 C}} = \frac{R_2}{L} e^{-\frac{R_2}{L} t}$

整理得: $\frac{L}{C} e^{-\frac{t}{R_1 C}} = R_1 R_2 e^{-\frac{R_2}{L} t}$

因为 $R_1 R_2 = \frac{2L}{C}$, 所以有: $2e^{-\frac{R_2}{L} t} = e^{-\frac{t}{R_1 C}}$

对上式两边取自然对数得: $\ln 2 + (-\frac{R_2}{L} t) = -\frac{t}{R_1 C}$

整理得: $\ln 2 = \frac{R_1 R_2 C - L}{L R_1 C} t$

有已知条件 $R_1 R_2 = \frac{2L}{C}$, 可得 $R_1 R_2 C = 2L$

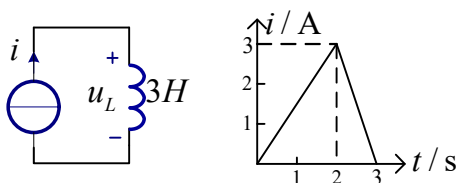
因此上式又变为: $\ln 2 = \frac{1}{R_1 C} t$

所以 $t = R_1 C \cdot \ln 2$, 即此时电压表读数达到最大值。

$$3) u_{\max} = U_s (e^{-\frac{R_1 C \cdot \ln 2}{R_1 C}} - e^{-\frac{R_2}{L} R_1 C \cdot \ln 2}) = U_s (e^{-\ln 2} - e^{-2 \ln 2}) = U_s (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} U_s$$

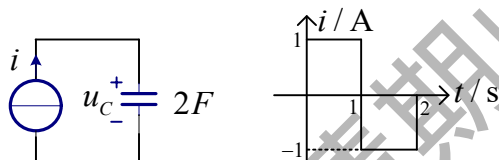
习 题

3-1 电路和电流源的波形如题图 3-1 所示, 若电感无初始储能, 试写出 $u_L(t)$ 的表达式。



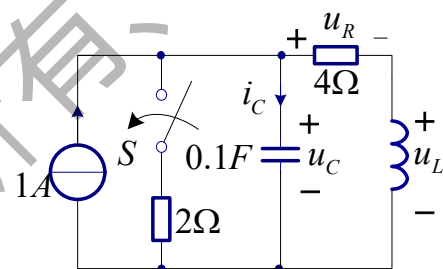
题图 3-1

3-2 电路和电流源的波形如题图 3-2 所示, 若电容无初始储能, 试写出 $u_C(t)$ 的表达式。



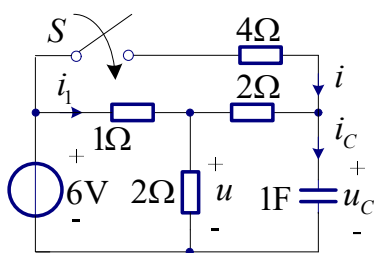
题图 3-2

3-3 根据题图 3-3 所示的电路, $t=0$ 时开关 S 闭合, 求初始值 $u_R(0^+)$ 、 $i_C(0^+)$ 、 $i_L(0^+)$ 及 $u_L(0^+)$ 。



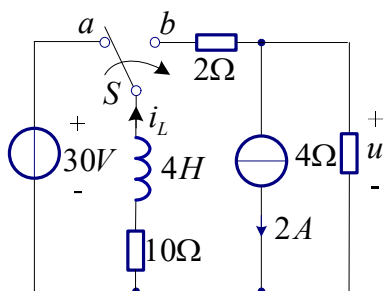
题图 3-3

3-4 根据题图 3-3 所示的电路, $t=0$ 时开关 S 闭合, 求初始值 $i(0^+)$ 、 $u(0^+)$ 、 $i_C(0^+)$ 及 $i_1(0^+)$ 。



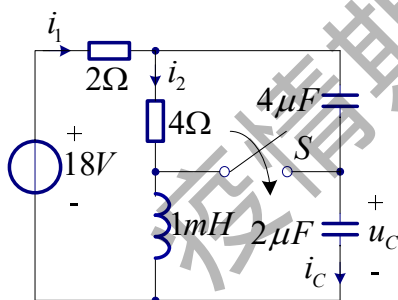
题图 3-4

3-5 根据题图 3-5 所示的电路, $t = 0$ 时开关 S 由 a 打向 b , 求初始值 $i_L(0^+)$ 、 $u(0^+)$ 。



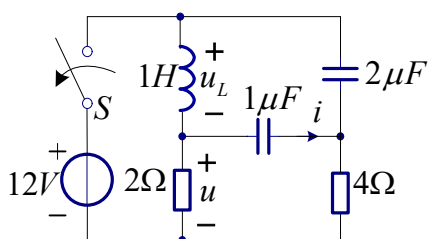
题图 3-5

3-6 根据题图 3-6 所示的电路, $t = 0$ 时开关 S 闭合, 求初始值 $i_1(0^+)$ 、 $i_2(0^+)$ 、 $u_C(0^+)$ 。



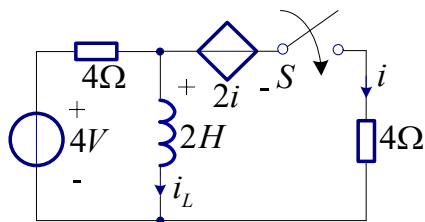
题图 3-6

3-7 根据题图 3-7 所示的电路, $t = 0$ 时开关 S 断开, 求初始值 $i(0^+)$ 、 $u_L(0^+)$ 、 $u(0^+)$ 。



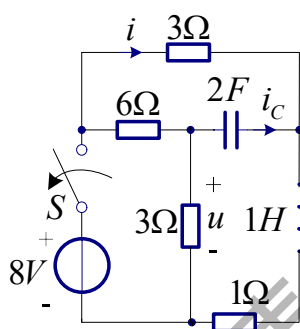
题图 3-7

3-8 根据题图 3-8 所示的电路, $t = 0$ 时开关 S 闭合, 求初始值 $i(0^+)$ 、 $i_L(0^+)$ 和时常数 τ 。



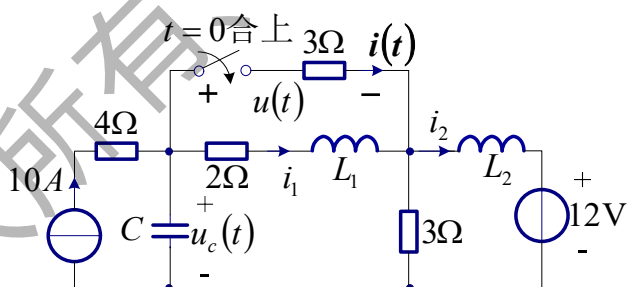
题图 3-8

3-9 根据题图 3-9 所示的电路, $t = 0$ 时开关 S 断开, 求初始值 $i(0^+)$ 、 $u(0^+)$ 、 $i_C(0^+)$ 、 $u_L(0^+)$ 。



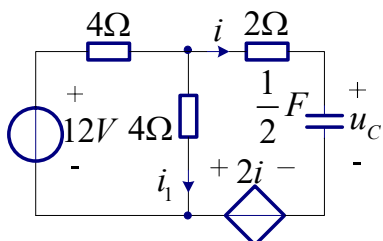
题图 3-9

3-10 如题图 3-10 所示电路, $t < 0$ 电路已处于稳态, $t = 0$ 合上开关。试求初值 $i_2(0^+)$ 、 $u_C(0^+)$ 和 $u(0^+)$ 。



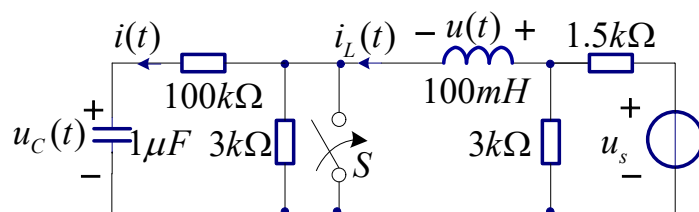
题图 3-10

3-11 根据题图 3-11 所示的电路, 求电路时间常数 τ 。



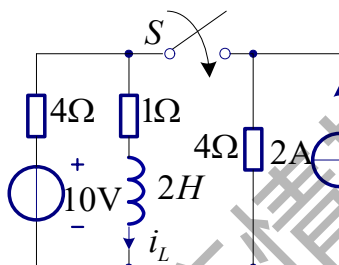
题图 3-11

3-12 根据题图 3-12 所示的电路, $t=0$ 时开关 S 闭合, 开关闭合前 $u_s = 60V$, 开关闭合后 $u_s = 0V$, 求 $i_L(0^+)$, $u_C(0^+)$, 并求出 $t \geq 0$ 以后的 $u_C(t)$ 和 $u(t)$ 。



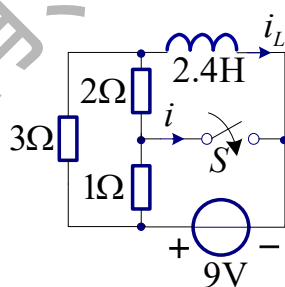
题图 3-12

3-13 根据题图 3-13 所示的电路, $t=0$ 时开关 S 闭合, 求 $t \geq 0$ 以后的 $i_L(t)$ 和电压 $u(t)$ 。



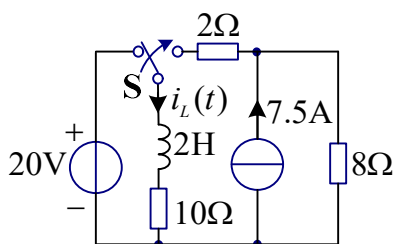
题图 3-13

3-14 根据题图 3-14 所示的电路, $t=0$ 时开关 S 闭合, 求 $t \geq 0$ 以后的 $i(t)$ 。



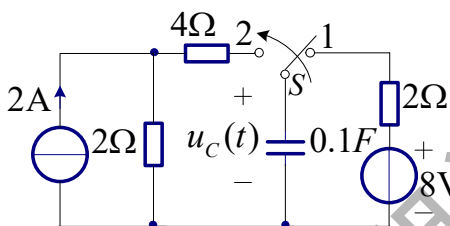
题图 3-14

3-15 题图 3-15 中所示电路, $t=0$ 时开关 S 由 1 打向 2, 求 $t \geq 0$ 以后电流 $i_L(t)$ 的全响应, 零输入响应, 零状态响应。



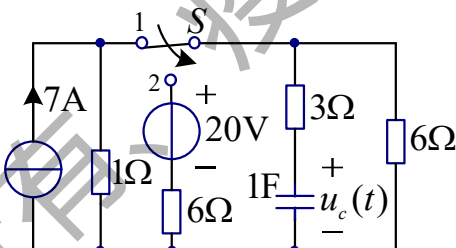
题图 3-15

3-16 题图 3-16 所示电路, $t=0$ 时开关 S 由 1 打向 2, 求 $t \geq 0$ 以后电压 $u_c(t)$ 的全响应, 零输入响应, 零状态响应。



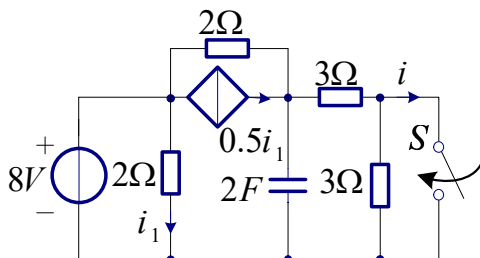
题图 3-16

3-17 题图 3-17 所示电路, $t=0$ 时开关 S 由 1 打向 2, 求 $t \geq 0$ 以后电压 $u_c(t)$ 的全响应, 零输入响应, 零状态响应。



题图 3-17

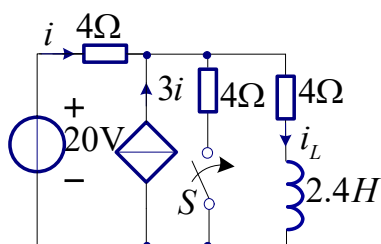
3-18 根据题图 3-18 所示的电路, $t=0$ 时开关 S 闭合, 求 $t \geq 0$ 以后的电流 $i(t)$ 的零输入响应与零状态响应。



题图 3-18

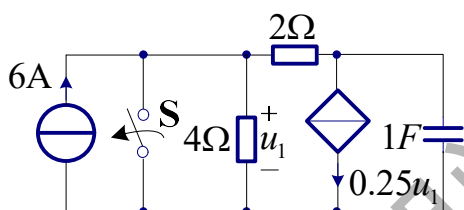
3-19 电路如题图 3-19 所示, $t=0$ 时开关 S 闭合, 求 $t \geq 0$ 以后的电流 $i_L(t)$ 的零

输入响应、零状态响应及完全响应。



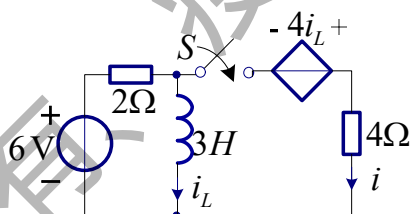
题图 3-19

3-20 根据题图 3-20 所示的电路, $t=0$ 时开关 S 断开, 求 $t \geq 0$ 以后的电压 $u_1(t)$ 。



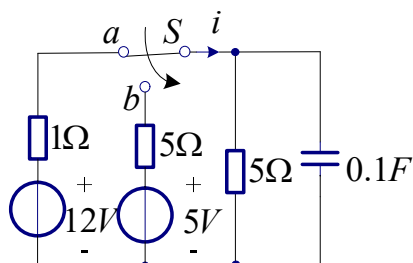
题图 3-20

3-21 根据题图 3-21 所示的电路, $t=0$ 时开关 S 闭合, 求 $t \geq 0$ 以后电流 $i(t)$ 的零输入响应 $i_x(t)$ 、零状态响应 $i_f(t)$ 及完全响应 $i(t)$ 。



题图 3-21

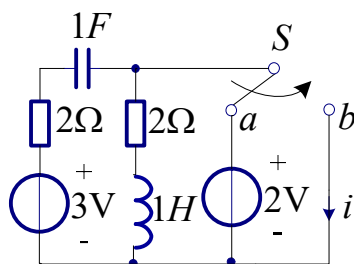
3-22 根据题图 3-22 所示的电路, $t=0$ 时开关 S 由 a 打向 b , 求 $t \geq 0$ 以后电流 $i(t)$ 的零输入响应、零状态响应和完全响应。



题图 3-22

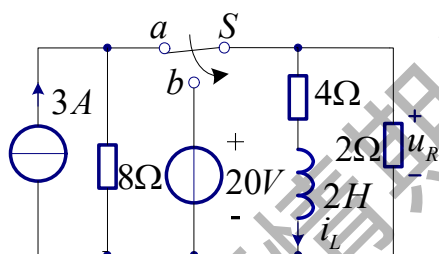
3-23 根据题图 3-23 所示的电路, $t=0$ 时开关 S 由 a 打向 b , 求 $t \geq 0$ 以后的电流

$i(t)$ 。



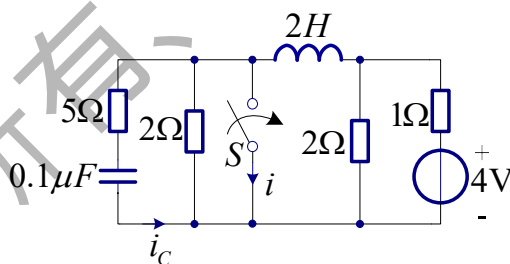
题图 3-23

3-24 根据题图 3-24 所示的电路, $t=0$ 时开关 S 由 a 打向 b , 求 $t \geq 0$ 以后的 $i_L(t)$ 和 $u_R(t)$ 。



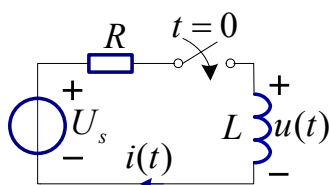
题图 3-24

3-25 根据题图 3-25 所示的电路, $t=0$ 时开关 S 闭合, 求 $t \geq 0$ 以后的 $i(t)$ 、 $i_C(t)$ 。



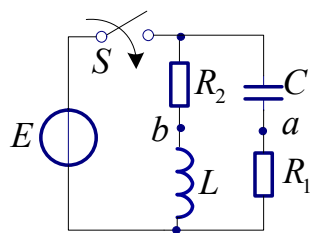
题图 3-25

3-26 若题图 3-26 所示 RL 电路的零状态响应 $i(t) = (10 - 10e^{-200t})A$, $t \geq 0$, $u(t) = (500e^{-200t})V$, $t \geq 0$, 求 U_s , R , L 及时间常数 τ 。



题图 3-26

3-27 如题图 3-27 所示电路, $t < 0$ 无初始储能, $t = 0$ 闭合开关, 求 u_{ab} 。



题图 3-27

版权所有、疫情期间使用