矩阵理论与方法

10月

内容提要 CONTENTS

- □ 课程信息
- □ 课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

  第1章 线性空间与线性变换

  1.2 线性变换及其矩阵

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\dots,e_n$下求向量坐标

问题c

问题a

1、2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\dots,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,\dots,E_n$下的矩阵A

$$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)A$$

4、若T有n个线型无关特征向量，则$A=P^{-1}\Lambda P$

问题b

$$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)P^{-1}\Lambda P$$

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\dots,e_n$下求向量坐标

问题c

问题a

1、2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\dots,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,\dots,E_n$下的矩阵A　　$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)A$

4、T不一定有n个线型无关特征向量，则$A=P^{-1}BP$

问题b'

$$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)P^{-1}BP$$

1.2 线性变换及其矩阵

问题b'

1、求$A = P^{-1}BP$，其中B是三角矩阵

2、求$A = PJP^{-1}$，其中J是Jordan标准型

Jordan标准型

考虑准对角矩阵J

$$J=\begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

其中 $J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$

Jordan标准型

考虑准对角矩阵J

$$J=\begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

其中 $J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$

定理： 设矩阵A为复数域C的矩阵， 特征多项式的分解

$$\varphi(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

存在，则存在非奇异矩阵P 使得 $P^{-1}AP=J$

Jordan标准型

考虑准对角矩阵J

$$J=\begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix} \qquad \text{其中}\quad J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

定义:在上面的定义中J称为矩阵A的Jordan 标准形，

$J_i(\lambda_i)$ 为 $(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ 对应的Jordan 块。

Jordan标准型

定义:在上面的定义中J称为矩阵A的Jordan 标准形，

$J_i(\lambda_i)$ 为 $(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ 对应的Jordan 块。

如： $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ 都是若当块；

而下面的准对角形则是一个若当形矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(1,2) & & \\ & J(4,1) & \\ & & J(-i,3) \end{pmatrix}$$

Jordan标准型

定理： 设矩阵**A**为复数域**C**的矩阵， 特征多项式的分解

$$\varphi(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

存在，则存在非奇异矩阵P 使得 $\boldsymbol{P^{-1}AP=J}$

例 1.26　求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准形 .

例 1.26　求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准形.

解　求 $\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的初等因子组. 由于

$$\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ \lambda-3 & (\lambda+1)(\lambda-3)+4 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}\to$$

Jordan标准型

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

因此，所求的初等因子组为 $\lambda-2$，$(\lambda-1)^2$. 于是有

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jordan标准型

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

有$P^{-1}AP = J$

Jordan标准型

在复数域C上，求$A_{n\times n}$的若尔当标准型的步骤：

1、求特征矩阵 $\lambda I - A$ 的初等因子组$(\lambda-\lambda_i)^{m_i}, i=1,2,\ldots,s$

2、写出每个初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$对应的$Jordan$块

$$J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{m_i\times m_i} \quad (i=1,2,\cdots,s)$$

3、写出以这些$Jordan$块构成的$Jordan$标准型 $J=\begin{bmatrix}J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s)\end{bmatrix}$

Jordan标准型

1、求λ矩阵 $\lambda I-A$ 的初等因子组$(\lambda-\lambda_i)^{m_i}, i=1,2,\ldots,s$

a)定义λ矩阵，令$A(\lambda)=\lambda I-A$

b)定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子，如$(\lambda-1)^2(\lambda-2)^3$

c)定义初等因子，求$A(\lambda)$的初等因子，如$(\lambda-1)^2$和$(\lambda-2)^3$

d)$A(\lambda)$的所有初等因子，称为初等因子组

Jordan标准型

a)定义λ矩阵，令$A(\lambda) = \lambda I - A$

Jordan标准型

a)定义λ矩阵，令$A(\lambda) = \lambda I - A$

讨论矩阵的 Jordan 标准形的求法，涉及如下形式的**多项式矩阵或 λ - 矩阵**

$$\boldsymbol{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \cdots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix} \tag{1.2.35}$$

的理论，其中 $a_{ij}(\lambda)$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 为数域 K 上的纯量λ 的多项式．如果 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是数域 K 上的 n 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵

$$\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.2.36}$$

就是一个特殊的多项式矩阵．

Jordan标准型

λ矩阵示例

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1\end{bmatrix} \qquad \lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2 & -3 & -4 \\ & \lambda-1 & -2 & -3 \\ & & \lambda-1 & -2 \\ & & & \lambda-1\end{bmatrix}$$

Jordan标准型

a)定义λ矩阵$A(\lambda)$

b)定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

a)定义λ矩阵$A(\lambda)$

b)定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

多项式矩阵 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的标准形，是指使用矩阵的初等变换①将 $\mathbf{A}(\lambda)$ 化为如下形式的多项式矩阵：

$$\mathbf{A}(\lambda) \to \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_s(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2.37}$$

其中，，$d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda)$，$d_2(\lambda) \mid d_3(\lambda)$，…，$d_{s-1}(\lambda) \mid d_s(\lambda)$，$s \leqslant n$，且 $d_i(\lambda)$ ($i=1, 2, \cdots, s$) 是首 1 多项式(前面的几个 $d_i(\lambda)$ 可能是 1).

可以证明[1]，一个多项式矩阵 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的标准形式(1.2.37) 的对角线上的非零元素 $d_i(\lambda)$($i=1, 2, \cdots, s$) 不随矩阵的初等变换而改变．因此，通常称 $d_i(\lambda)$($i=1, 2, \cdots, s$) 为 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的**不变因子**或**不变因式**．

$a)$定义λ矩阵$A(\lambda)$

$b)$定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

例 1.25 试用初等变换化多项式矩阵

$$\mathbf{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda\\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda\\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

为标准形．

a)定义λ矩阵$A(\lambda)$

b)定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

例 1.25 试用初等变换化多项式矩阵

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

为标准形.

解 计算过程如下：

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\xrightarrow[{[3]+[1]}]{}\begin{bmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[1]\leftrightarrow[3]}]{}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+1\end{bmatrix}\xrightarrow[{(3)-(1)}]{}$$

a)定义λ矩阵$A(\lambda)$

b)定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

$$\begin{bmatrix} 1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(3)-(1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{[2]-(2\lambda-1)[1] \\ [3]+(\lambda-1)[1]}]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[{[2]\leftrightarrow[3]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[{[3]-\lambda[2]}]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda^3-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{(-1)[3] \\ (3)-(\lambda+1)(2)}]{}$$

$a)$定义λ矩阵$A(\lambda)$

$b)$定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[{[3]-\lambda[2]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda^3-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{(-1)[3] \\ (3)-(\lambda+1)(2)}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda \end{bmatrix}$$

最后所得矩阵是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的标准形，此时，$d_1(\lambda)=1$，$d_2(\lambda)=\lambda$，$d_3(\lambda)=\lambda^3+\lambda$.

Jordan标准型

a)定义λ矩阵$A(\lambda)$

b)定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

c)定义初等因子，求$A(\lambda)$的初等因子

$a)$定义λ矩阵$A(\lambda)$

$b)$定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

$c)$定义初等因子，求$A(\lambda)$的初等因子

b）

可以证明[1]，一个多项式矩阵$\mathbf{A}(\lambda)$的标准形式(1.2.37)的对角线上的非零元素$d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,s)$不随矩阵的初等变换而改变．因此，通常称$d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,s)$为$\mathbf{A}(\lambda)$的**不变因子**或**不变因式**．

如$d_1(\lambda)=(\lambda-2), d_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2, d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^3$

$a)$定义λ矩阵$A(\lambda)$

$b)$定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

$c)$定义初等因子，求$A(\lambda)$的初等因子

b） 可以证明[1]，一个多项式矩阵 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的标准形式(1.2.37)的对角线上的非零元素 $d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,s)$ 不随矩阵的初等变换而改变．因此，通常称 $d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,s)$ 为 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的**不变因子或不变因式**．

如$d_1(\lambda)=(\lambda-1),d_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2,d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^3$

c） 把 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的每个次数大于零的不变因子 $d_i(\lambda)$ 分解为不可约因式的乘积，这样的不可约因式(连同它们的幂指数)称为 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的一个**初等因子**，初等因子的全体称为 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的**初等因子组**．

a)定义λ矩阵$A(\lambda)$

b)定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

c)定义初等因子，求$A(\lambda)$的初等因子

b） 可以证明[1]，一个多项式矩阵 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的标准形式(1.2.37)的对角线上的非零元素 $d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,s)$ 不随矩阵的初等变换而改变．因此，通常称 $d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,s)$ 为 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的**不变因子**或**不变因式**．

如$d_1(\lambda)=(\lambda-1), d_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2, d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^3$

c） 把 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的每个次数大于零的不变因子 $d_i(\lambda)$ 分解为不可约因式的乘积，这样的不可约因式(连同它们的幂指数)称为 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的一个**初等因子**，初等因子的全体称为 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的**初等因子组**．

$d_1(\lambda)$:　$(\lambda-1)$

$d_2(\lambda)$:　$(\lambda-1)$，　$(\lambda-2)^2$

$d_3(\lambda)$:　$(\lambda-1)^2$，$(\lambda-2)^3$

$a)$定义λ矩阵$A(\lambda)$

$b)$定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

$c)$定义初等因子，求$A(\lambda)$的初等因子

b) 可以证明[1]，一个多项式矩阵 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的标准形式(1.2.37)的对角线上的非零元素 $d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,s)$ 不随矩阵的初等变换而改变．因此，通常称 $d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,s)$ 为 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的**不变因子**或**不变因式**．

如$d_1(\lambda)=(\lambda-1),d_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2,d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^3$

c) 把 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的每个次数大于零的不变因子 $d_i(\lambda)$ 分解为不可约因式的乘积，这样的不可约因式（连同它们的幂指数）称为 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的一个**初等因子**，初等因子的全体称为 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的**初等因子组**．

$d_1(\lambda)$:　$(\lambda-1)$

$d_2(\lambda)$:　$(\lambda-1)$，　$(\lambda-2)^2$

$d_3(\lambda)$:　$(\lambda-1)^2$，$(\lambda-2)^3$

$d)$　$A(\lambda)$的所有初等因子，称为初等因子组

$(\lambda-1)$，　$(\lambda-1)$，　$(\lambda-2)^2$，　$(\lambda-1)^2$，$(\lambda-2)^3$

Jordan标准型

在复数域C上，求$A_{n\times n}$的若尔当标准型的步骤:

1、**求特征矩阵** $\lambda I - A$ **的**初等因子组$(\lambda-\lambda_i)^{m_i}, i=1,2,\dots,s$

$(\lambda-1)$，$(\lambda-1)$，$(\lambda-2)^2$，$d_3(\lambda)$，$(\lambda-1)^2$，$(\lambda-2)^3$

2、写出每个初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$对应的$Jordan$块

$$\boldsymbol{J}_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{m_i\times m_i} \quad (i=1,2,\cdots,s)$$

3、写出以这些$Jordan$块构成的$Jordan$标准型 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s)\end{bmatrix}$

Jordan标准型

例 1.26　求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准形．

Jordan标准型

例 1.26　求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准形．

解　求 $\lambda I-A$ 的初等因子组．由于

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ \lambda-3 & (\lambda+1)(\lambda-3)+4 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}\to$$

Jordan标准型

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

因此，所求的初等因子组为 $\lambda-2$，$(\lambda-1)^2$. 于是有

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jordan标准型

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

有$P^{-1}AP = J$

Jordan标准型

例： 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ 的若当标准形.

Jordan标准型

例： 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$ 的若当标准形.

解： $\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 1 & -2\\ -3 & \lambda+3 & -6\\ -2 & 2 & \lambda-4\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}\lambda-1 & 1 & -2\\ -\lambda^2-2\lambda & 0 & 2\lambda\\ -2\lambda & 0 & \lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & \lambda-1\\ 0 & 2\lambda & -\lambda^2-2\lambda\\ 0 & \lambda & -2\lambda\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2\lambda & -\lambda^2-2\lambda\\ 0 & \lambda & -2\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda\\ 0 & \lambda & -2\lambda\end{pmatrix}$$

Jordan标准型

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda\\ 0 & \lambda & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2)\end{pmatrix}$$

$\therefore A$ 的初等因子为 $\lambda,\ \lambda,\ \lambda-2.$

故 **A**的若当标准形为 $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$

Jordan标准型

例： 已知12级矩阵A的不变因子为

$$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{9个},(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2(\lambda+1),(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2$$

求A的若当标准形.

Jordan标准型

例： 已知12级矩阵A的不变因子为

$$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{9\text{个}},(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2(\lambda+1),(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2$$

求A的若当标准形.

解：依题意，A的初等因子为

$$(\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda+1),$$

$$(\lambda+1),\ (\lambda-i)^2,\ (\lambda+i)^2$$

Jordan标准型

$\therefore A$的若当标准形为

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & & & & & & & & & & \\
0 & 1 & & & & & & & & & & \\
& & 1 & 1 & & & & & & & & \\
& & 0 & 1 & & & & & & & & \\
& & & & 1 & 1 & & & & & & \\
& & & & 0 & 1 & & & & & & \\
& & & & & & -1 & & & & & \\
& & & & & & & -1 & & & & \\
& & & & & & & & i & 1 & & \\
& & & & & & & & & i & & \\
& & & & & & & & & & -i & 1 \\
& & & & & & & & & & & -i
\end{pmatrix}
$$

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=(T^k)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\dots,e_n$下求向量坐标

问题c

1,2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\dots,E_n$下的坐标

问题a

3、求T在基$E_1,\dots,E_n$下的矩阵A　　$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)A$

4、T不一定有n个线型无关特征向量，则$A=PJP^{-1}$

问题b'

$$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)PJP^{-1}$$

问题b'

1、求$A=P^{-1}BP$，其中B是三角矩阵

2、求$A=PJP^{-1}$，其中J是Jordan标准型

$$P=?$$

补充（最小多项式）：

定理：矩阵A的最小多项式是A的最后一个不变因子

补充（最小多项式）：

定理：矩阵A的最小多项式是A的最后一个不变因子

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda\\ 0 & \lambda & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2)\end{pmatrix}$$

最小多项式为$\lambda(\lambda-2)$

1.2 作业(第五版)

1、定义：P45 1.21

2、定理：1.29、1.30

2、例题：1.26

3、本ppt例题：P36

4、习题1.2：16、19

1.2 作业(第五版)

1、定义：P63 1.21

2、定理：1.29、1.30

2、例题：P69 1.28

3、本ppt例题：P36

4、习题1.2：16、19

下课，谢谢大家！