北京邮电大学 2015-2016 学年第二学期

《高等数学》（下）期末考试题

答案及参考评分标准

一．填空题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 设 $a_n > 0, p > 1,$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}[n^p(e^{\frac{1}{n}}-1)a_n]=1,$ 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 p 的取值范围是____________.

填：$(2,+\infty)$ 或 $p>2$

2. 设 $f(x,y)=x^2+y^2, \varphi(x,y)=x^2-y^2,$ 则 $\varphi[f(x,y),\varphi(x,y)]=$_______.

填： $4x^2y^2$

3. 设 $z=f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y,$ 且 $f(x,0)=x, f(0,y)=y^2,$ 则 $f(x,y)=$ ___________.

填：$\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+x+y^2$

4. 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z=1$，则点 P 的坐标是________________.

填：$P(1,1,2)$

5. 设 $(ax^2y^2-2xy^2)dx+(2x^3y+bx^2y+1)dy$ 为函数 $f(x,y)$ 的全微分，则 $a=$__________，$b=$__________.

填: $a=3, b=-2$

6. 设 $D: x^2+y^2\le\pi$，则 $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)dxdy=$______________.

填: $\dfrac{\pi}{2}(e^{\pi}+1)$

7. $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0,$ 则 $I=\iiint\limits_{\Omega}(2x^2+3y^2+5z^2+xy)dV=$______.

填: $\dfrac{4}{3}\pi$

8. 设 $\boldsymbol{A}=(x^2+y, yz, xe^z)$, 则 $\boldsymbol{rotA}|_{(1,1,1)}=$____________.

填: $\boldsymbol{rotA}|_{(1,1,1)}=-\boldsymbol{i}-e\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

9. 设 L 是以点 $(1,0)$ 为圆心, $R\,(>1)$ 为半径的圆周, L 取逆时针方向, 则

$I=\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=$ ________________.

填: 2π

10. 设曲面 S 为 $z=x^2+y^2 (0\le z\le 1)$ 取下侧, 则 $\iint\limits_{S} y^2dzdx+z^2dxdy=$_______________.

填: $-\dfrac{\pi}{3}$

二（8 分）. 设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$, 其中 f,φ 二阶可导, 求 dz 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解

$$dz=\left(-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+y\varphi'(x+y)\right)dx$$

$$+\left(f'(xy)++y\varphi'(x+y)\right)dy \qquad \textbf{（3 分）}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+y\varphi'(x+y) \qquad \textbf{（5 分）}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+y\varphi'(x+y)\right)$$

$$=-\frac{1}{x}f'(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)+yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$$

$$=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$$ **（8 分）**

三（8 分）. 计算二重积分 $I=\iint_D |x^2+y^2-1|\,dxdy,$ 其中积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

解 将 D 分割成两部分 $D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1, x^2+y^2\le 1\}$ 和 $D_2=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1, x^2+y^2\ge 1\}$.

于是有

$$I=\iint_{D_1}|x^2+y^2-1|\,dxdy+\iint_{D_2}|x^2+y^2-1|\,dxdy$$ **（2 分）**

$$I_1=\iint_{D_1}(1-x^2-y^2)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(1-r^2)rdr=\frac{\pi}{8}$$ **（4 分）**

$$I_2=\iint_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^1(x^2+y^2-1)dy$$

$$=\int_0^1[(x^2-1)-(x^2-1)\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx$$

$$=\int_0^1[x^2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]dx$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}.$$ **（7 分）**

所以 $I=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$ **（8 分）**

四（8 分）. 试将函数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$ 分别展开成 x 和 $(x-3)$ 的幂级数.

解 $$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-2}=\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}.$$ **（2 分）**

在 $x=0$ 处展成幂级数，得

$$f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}=-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x/2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)x^n,|x|<1 \qquad \textbf{（5 分）}$$

在 $x=3$ 处展成幂级数，得

$$f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2+(x-3)}+\frac{1}{5+(x-3)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{2}}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{5}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{2}\right)^n+\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{5}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{5^{n+1}}\right)(x-3)^n,\quad |x-3|<2. \qquad \textbf{（8 分）}$$

五（8 分）. 求曲线积分 $I=\int_L e^x[(y-\cos y)dx+\sin y dy]$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(\pi,0)$ 的一段弧.

解 添加辅助直线段 $\overline{AO}$，方向从 A 到 O. 记 $\overline{AO}$ 与 L 所围区域为 D. 令

$$P=e^x(y-\cos y),\quad Q=\sin y.$$

得 $$I=\int_{L+\overline{AO}}e^x[(y-\cos y)dx+\sin y dy]-\int_{\overline{AO}}e^x[(y-\cos y)dx+\sin y dy]$$

$$=I_1-I_2. \qquad \textbf{（2 分）}$$

由格林公式，并注意到曲线是顺时针方向,有

$$I_1=\int_{L+\overline{AO}}e^x[(y-\cos y)dx+\sin y dy]$$

$$=-\iint_D[e^x\sin y-e^x(1+\sin y)]dxdy=-\iint_D e^x dxdy$$

$$=-\int_0^{\pi}dx\int_0^{\sin x}e^x dy=-\int_0^{\pi}e^x\sin x dx=-\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$$ **（6 分）**

$$I_2=\int_{\overline{AO}}e^x[(y-\cos y)dx+\sin y dy]=-\int_{\pi}^{0}e^x dx$$

$$=\int_0^{\pi}e^x dx=e^{\pi}-1$$

所以 $I=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}e^{\pi}.$ **（8 分）**

六（8 分）．计算 $I=\iint\limits_S(xy+yz+zx)dS,$ 积分曲面 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截得的部分.

解 $dS=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$

S 在 xoy 平面上的投影区域是 $x^2+y^2\le 2x$. **（2 分）**

于是

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2-2x\le 0}[xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}]\sqrt{2}dxdy$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{x^2+y^2-2x\le 0}x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$ **（6 分）**

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\cdot rdr$$

$$=8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta d\theta=\frac{64\sqrt{2}}{15}$$ **（8 分）**

七（10 分）．过椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限内的点 M 作切平面，使此切平面与 3 个坐标面在第一卦限内围成的四面体的体积最小，求 M 点的坐标及

此最小体积.

解 设切点为$M(\xi,\eta,\zeta)$，于是切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{2\xi}{a^2},\frac{2\eta}{b^2},\frac{2\zeta}{c^2}\right),$$

切平面的方程为 $\frac{2\xi}{a^2}(x-\xi)+\frac{2\eta}{b^2}(y-\eta)+\frac{2\zeta}{c^2}(z-\zeta)=0$

三个截距分别为 $X=\frac{a^2}{\xi},Y=\frac{b^2}{\eta},Z=\frac{c^2}{\zeta}$ **（2 分）**

四面体的体积为

$$V=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{\xi\eta\zeta},0<\xi<a,0<\eta<b,0<\zeta<c.$$ **（3 分）**

下面求函数$U=\xi\eta\zeta$ 在约束条件$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$下的最大值.令

$$F(\xi,\eta,\zeta,\lambda)=\xi\eta\zeta+\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right)$$ **（5 分）**

由方程组 $$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial\xi}=\eta\zeta+\frac{2\lambda\xi}{a^2}=0\\ \frac{\partial F}{\partial\eta}=\xi\zeta+\frac{2\lambda\eta}{b^2}=0\\ \frac{\partial F}{\partial\zeta}=\xi\eta+\frac{2\lambda\zeta}{c^2}=0\\ \frac{\partial F}{\partial\lambda}=\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1=0\end{cases}$$

解得在第一卦限内的唯一的驻点为$\xi=\frac{a}{\sqrt{3}},\eta=\frac{b}{\sqrt{3}},\zeta=\frac{c}{\sqrt{3}}$. **（8 分）**

因为在第一卦限内V 必存在最小值，令在第一卦限有唯一的驻点，此驻点必为最小值点，最小值为 $V_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$. **（10 分）**

八(10 分)．设 S 是空间立体 V：$x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$，$x^2+y^2 \le z^2$ (含 z 轴部分)的整个表面外侧，计算 $I=\oiint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$.

解 由

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2Rz \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases} \text{得两曲面的交线为} \begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=R \end{cases}$$

圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的半顶解为 $\dfrac{\pi}{4}$. **(4 分)**

由高斯公式有

$$I=\iiint\limits_V (3x^2+3y^2+3z^2)dv \quad \text{(用球面坐标)} \qquad \textbf{(7 分)}$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}r^2\cdot r^2\sin\theta dr$$

$$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2R\cos\theta}r^2\cdot r^2\sin\theta dr$$

$$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^{2R\cos\theta}d\theta=\frac{1}{5}\cdot 32\cdot 6\pi R^5\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cdot\cos^5\theta d\theta$$

$$=-\frac{32\pi}{5}R^5\cos^6\theta\,\Big|_0^{\pi/4}=\frac{28}{5}\pi R^5 \qquad \textbf{(10 分)}$$