矩阵理论与方法

内容提要 CONTENTS

- □课程信息
- □课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

第4章 矩阵分解

第4章 矩阵分解

- 1、LU分解
- 2、QR分解
- 3、满秩分解
- 4、SVD分解

满秩分解

目的: 对 $A \in C_r^{m \times n}$ $(r \ge 1)$, 求 $F \in C_r^{m \times r}$, 及 $G \in C_r^{m \times r}$ 使A = FG 分解原理:

$$\operatorname{rank} A = r \Rightarrow A \xrightarrow{\text{ft}}$$
 阶梯形 $B = \begin{pmatrix} G \\ O \end{pmatrix} : G \in \mathbb{C}_r^{r \times n}$

⇒ 3有限个初等矩阵之积 $P_{m\times m}$, st.PA = B

$$\Rightarrow A = P^{-1}B = \left(F_{m \times r} \middle| S_{m \times (m-r)}\right) \begin{pmatrix} G \\ O \end{pmatrix} = FG : F \in \mathbb{C}_r^{m \times r}$$

例
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$
, 求 $A = FG$

例
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$
, 求 $A = FG$

$$A \xrightarrow{r} A^{(1)} \xrightarrow{r} A^{(2)}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = L_1^{-1}A$$
 $A^{(2)} = L_2^{-1}A^{(1)}$ $A = L_1L_2A^{(2)}$

$$A \xrightarrow{r} A^{(1)} \xrightarrow{r} A^{(2)}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad A^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = L_1^{-1}A$$
 $A^{(2)} = L_2^{-1}A^{(1)}$ $A = L_1L_2A^{(2)}$

$$L_{1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad L_{2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = L_1 L_2 A^{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = FG$$

作业 (第五版)

- 1、定义: 4.8
- 2、定理: 4.13
- 3、例题: 4.10
- 4、习题4.3:1

作业 (第三版)

- 1、定义: 4.8
- 2、定理: 4.13
- 3、例题: 4.10
- 4、习题4.3:1

下课, 谢谢大家!