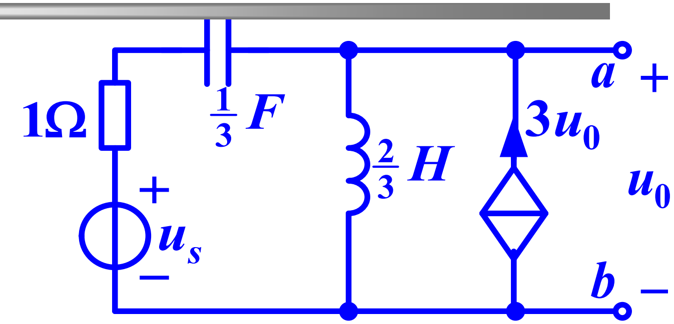
第四章
正弦稳态电路
的分析

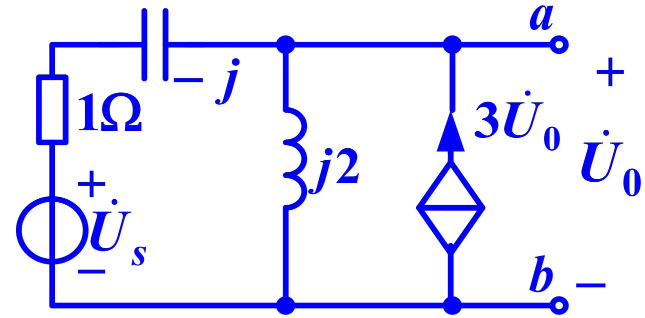
求戴维南等效电路，已知 $u_s = U_{sm}\cos 3t\,\mathrm{V}$。

解： **求开路电压**



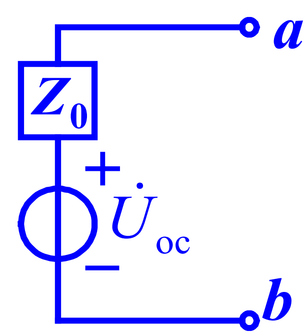
$$\dot{U}_{oc} = \frac{\dot{U}_s}{-2.5(1-j)} = \frac{U_s}{2.5\sqrt{2}}\angle -135^\circ\ \mathrm{V}$$

求短路电流



$$\dot{I}_{sc} = \frac{\dot{U}_s}{1-j} = \frac{U_s}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ\ \mathrm{A}$$

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_{oc}}{\dot{I}_{sc}} = \frac{\dfrac{U_s}{2.5\sqrt{2}}\angle -135^\circ}{\dfrac{U_s}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ} = -0.4\,\Omega$$



戴维南等效电路

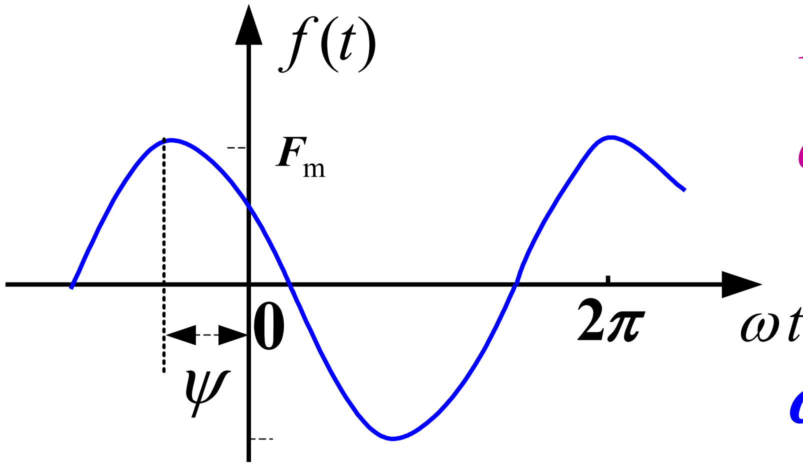
§4-1 正弦量

- 正弦量的三要素
- 同频率正弦量的比较
- 同频率正弦量的运算
- 周期信号的平均值和有效值

1. 正弦量的三要素

正弦(sinusoidal)量：随时间按正弦规律变化的量。

时域表示： $f(t)=F_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)$



F_{m}——振幅(幅值,amplitude)

$$\omega=\frac{\mathrm{d}(\omega t+\psi)}{\mathrm{d}t}\ \text{(rad/s)}$$

——角频率(radian frequency)

$\omega=2\pi/T$， $f=1/T$ (Hz＝1/秒)

ψ——初相角（位）。$t=0$时的相位，简称初相(initial phase)，其值在$\pm\pi$内。

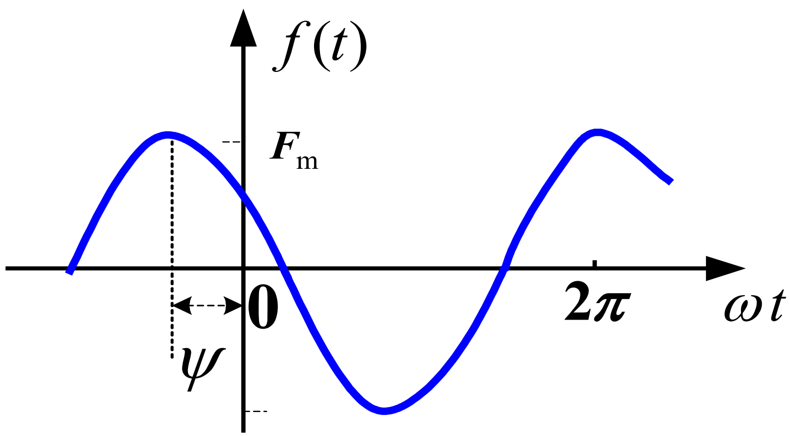
$f(0)=F_{\mathrm{m}}\cos\psi$ 初相角反映了正弦量初始值的大小。

1. 正弦量的三要素

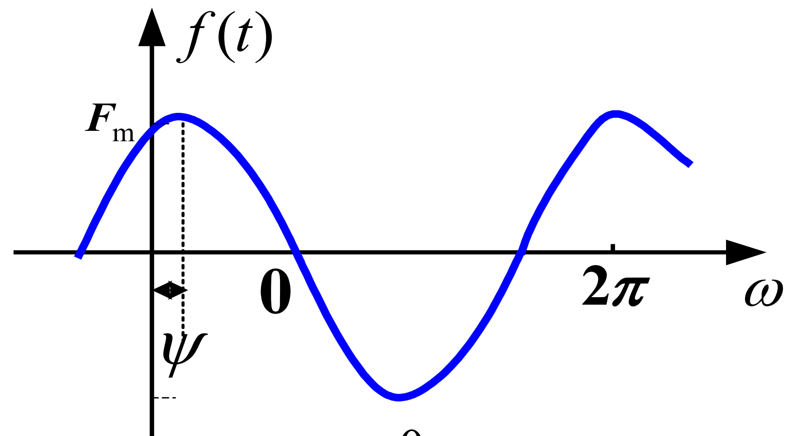
振幅(amplitude)、频率(frequency)、初相(initial phase)称为正弦量的三要素。

$\psi>0$：最大值发生在原点之左。

$\psi<0$：最大值发生在原点之右。



$\psi>0$



$\psi<0$

2. 同频率正弦量的比较

两个同频率的正弦量： $f_1(t) = F_{1m}\cos(\omega t + \psi_1)$

$$f_2(t) = F_{2m}\cos(\omega t + \psi_2)$$

定义相位差： $\varphi = (\omega t + \psi_1) - (\omega t + \psi_2) = \psi_1 - \psi_2$

$\varphi > 0$　　$f_1(t)$ 超前 $f_2(t)$

$\varphi < 0$　　$f_1(t)$ 滞后 $f_2(t)$

$\varphi = 0$　　**二者同相**

$\varphi = \pm\pi$　　**二者反相**

$\varphi = \pm\pi/2$　　**二者正交**

例题

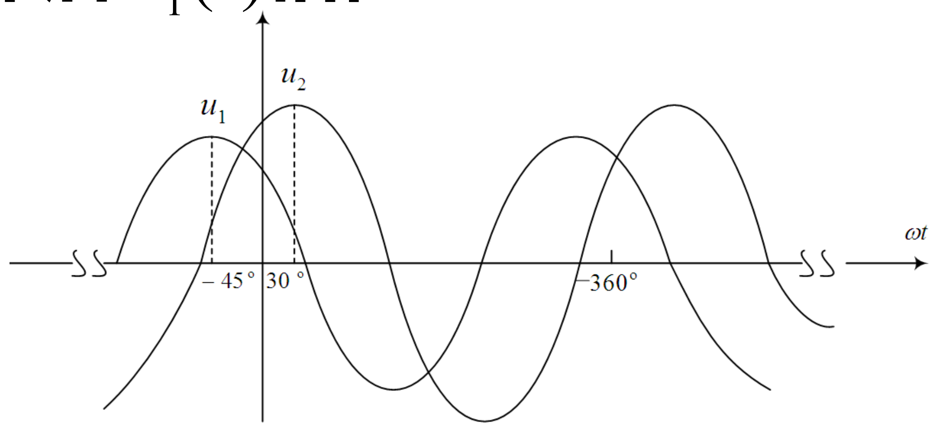
已知某正弦电路中的电压$u_1(t)=U_{1m}\cos(\omega t+45^\circ)$，$u_2(t)=U_{2m}\cos(\omega t-30^\circ)$，试说明二者的相位关系，并在一个坐标下画出波形，观察其相位关系。

解：$u_1(t)$与$u_2(t)$的相位差：

$$\varphi_{12}=45^\circ-(-30^\circ)=75^\circ>0$$

$\therefore u_1(t)$相位超前$u_2(t)$相位75°

或$u_2(t)$相位滞后$u_1(t)$相位75°



3. 同频率正弦量的运算

同频率正弦量的代数加、 微分、积分，其结果仍为同频率的正弦量。 只是幅度和相位发生了改变。

$$f(t) = F_{\mathrm{m}} \cos(\omega t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) = -\omega F_{\mathrm{m}} \sin(\omega t) = \omega F_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + 90^\circ)$$

4. 周期信号的平均值和有效值

4.1 平均值 (average value)

$$F_{\mathrm{av}} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

4.2 有效值 (effective value)：与周期信号在一个周期内产生的热效应相同的直流量的值。

(方均根值—root mean square value)

$$F^2RT = \int_0^T f^2(t)R\,\mathrm{d}t \qquad F = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

对于正弦量，如果：$u(t) = U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \psi_u)$

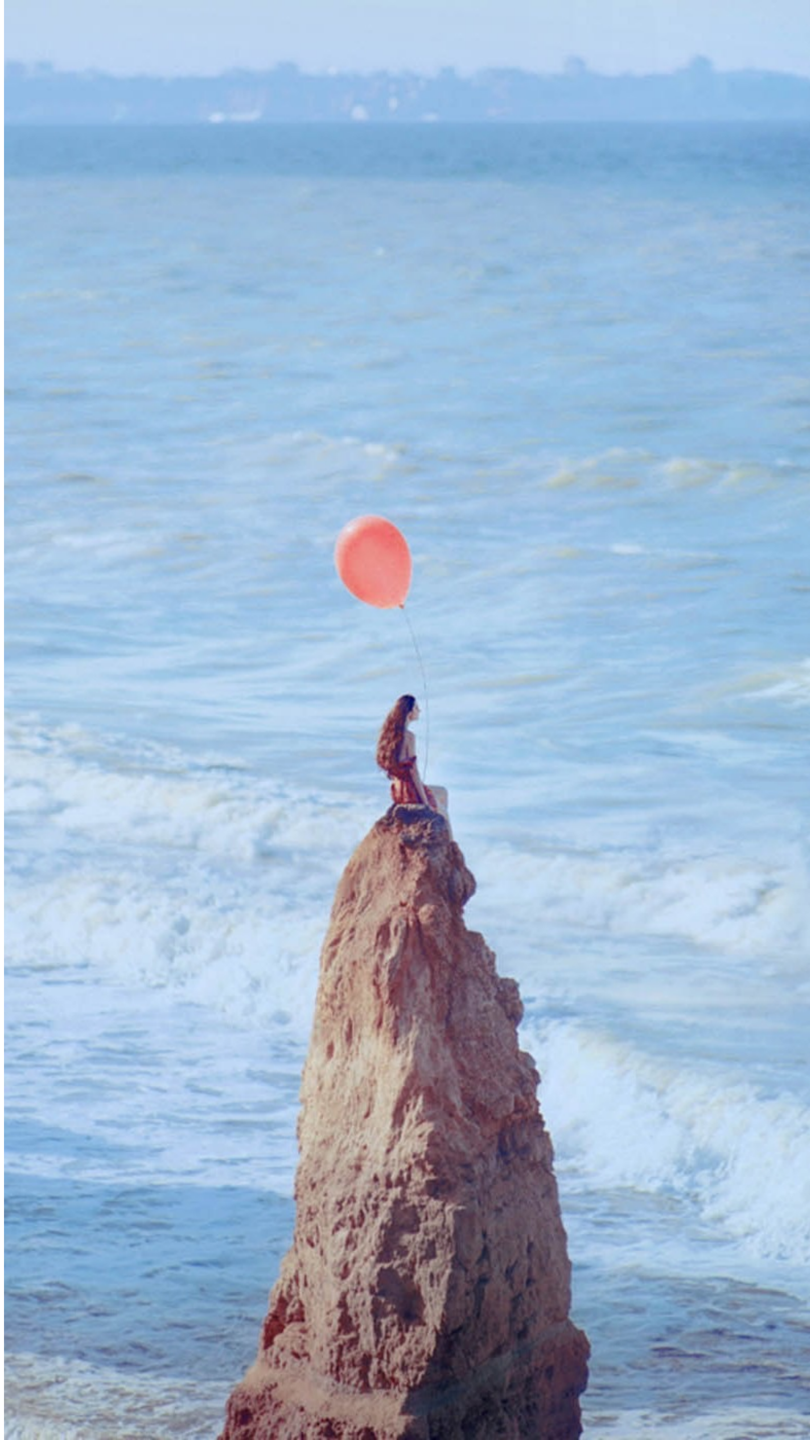
$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U^2{}_{\mathrm{m}}\cos^2(\omega t + \psi_u)\,\mathrm{d}t} = \frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} \approx 0.707U_{\mathrm{m}}$$

常用电路变量符号表示

电路中的量	符号表示示例	符号说明
纯直流量	I_M，U_M	变量名与角标都大写
纯交流量	i_m，u_m	变量名与角标都小写
有效值	I，U或者I_b，U_b	变量名大写，或者变量名大写角标小写
相量	$\dot{U}$　$\dot{I}$	变量名大写，并头部带点
带直流分量的交流总量	i_M，u_M	变量名小写，角标大写

§4-2
正弦量的相量
相量法

- 变换方法的概念
- 正弦量的相量表示
- 相量的线性性质和微分性质
- 相量图



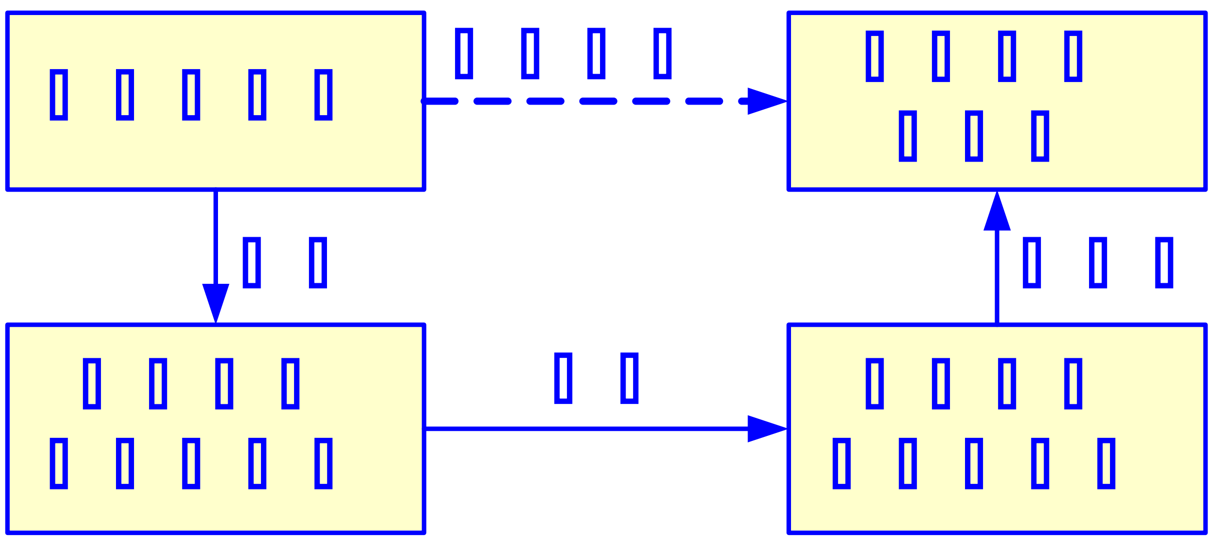
1. 变换方法的概念

变换方法的基本思路：

1）把原来的问题变换为一个比较容易处理的问题。

2）在变换域中求解问题。

3）对变换域中求得的解答进行反变换得到原来问题的解答。



1. 变换方法的概念

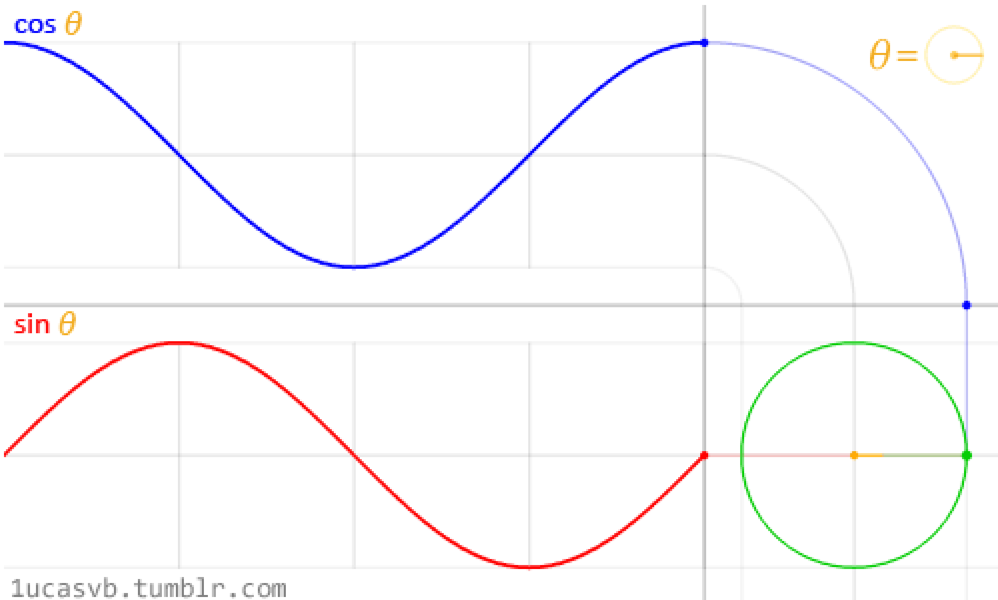
求解指数方程： $x^{2.65} = 5$

两边取对数 $2.65\lg x = \lg 5$

$$\lg x = \lg 5/2.65 = 0.2637$$

$$x = \lg^{-1} 0.2637 = 1.835$$

复数的表示 $j=\sqrt{-1}$



如果θ是一个变量，比如：$\theta = \omega t + \psi$

则：

$$A = \left|F_m\right| e^{j(\omega t+\psi)}$$

a、b变成函数：

$$f(t) = F_\mathrm{m}\cos(\omega t+\psi)$$

注意这个余弦的信息量和复数是相同的（三要素相同），因此可以一对一双向变换（映射）。

把圆理解为复平面的极坐标，则复数表示为：

$$A = |A| e^{j\theta} = |A| \angle\theta$$

复数的模：$|\mathrm{A}|=\sqrt{a^2+b^2}$

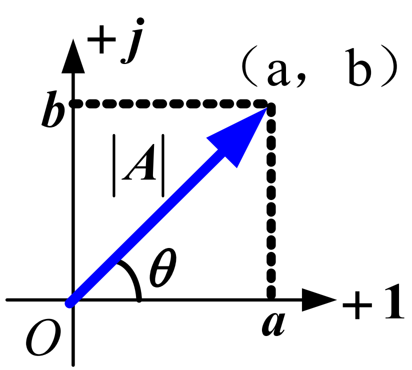
复数的幅角：$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

把圆理解为复平面的直角坐标，则复数表示为：

$$A = a + jb$$

横坐标：a=|A|cos θ

纵坐标：b=|A|sin θ



2. 正弦量的相量表示

欧拉公式： $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$

如果：$\boldsymbol{\theta=\omega t+\psi}$ 则：

$$F_m e^{j\omega t}=F_m\cos(\omega t+\psi)+jF_m\sin(\omega t+\psi)\Leftrightarrow$$

$$F_m\cos(\omega t+\psi)=\mathrm{Re}[F_m e^{j(\omega t+\psi)}]$$

可知，复指数函数和三角函数之间存在可逆的一对一变换（映射）关系：

$$F_m e^{j(\omega t+\psi)}=F_m e^{j\omega t}e^{j\psi}\leftrightarrow F_m\cos(\omega t+\psi)$$

如果忽略角频率（假设角频率是已知的或默认的）：

$$F_m=F_m e^{j\psi}=F_m\angle\psi\leftrightarrow F_m\cos(\omega t+\psi)$$

2. 正弦量的相量表示（向量？相量？）

$$\dot{F}_m = F_m e^{j\psi} = F_m \angle \psi \leftrightarrow F_m \cos(\omega t + \psi)$$

注意！等号和变换符号的区别

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \psi_u) \Leftrightarrow \dot{U}_{\mathrm{m}} = U_{\mathrm{m}} \angle \psi_u$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi_i) \Leftrightarrow \dot{I}_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}} \angle \psi_i$$

幅值相量

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \psi_u) \Leftrightarrow \dot{U} = U \angle \psi_u$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi_i) \Leftrightarrow \dot{I} = I \angle \psi_i$$

有效值相量

这种变换的意义何在？

2. 正弦量的相量表示（向量？相量？）

可知，复指数函数和三角函数之间存在可逆的一对一变换（映射）关系：

$$F_m e^{j(\omega t+\psi)} = F_m e^{j\omega t} e^{j\psi} \leftrightarrow F_m \cos(\omega t+\psi)$$

假如电路中所有电路变量都是**同频率**的，则变换（映射）关系可以简化为：

$$\dot{F}_m = F_m e^{j\psi} = F_m \angle \psi \leftrightarrow F_m \cos(\omega t+\psi)$$

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\psi_u) \Leftrightarrow \dot{U}_\mathrm{m} = U_\mathrm{m}\angle\psi_u$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i) \Leftrightarrow \dot{I}_\mathrm{m} = I_\mathrm{m}\angle\psi_i$$

幅值相量

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\psi_u) \Leftrightarrow \dot{U} = U\angle\psi_u$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i) \Leftrightarrow \dot{I} = I\angle\psi_i$$

有效值相量

2. 正弦量的相量表示

进一步，映射关系可以扩展： $A\times F_m e^{j(\omega t+\psi)} \leftrightarrow A\times F_m\cos(\omega t+\psi)$

如果电路中所有变量的**频率相同**：

$$F_{m1}e^{j(\omega_1 t+\psi_1)} \pm F_{m1}e^{j(\omega_1 t+\psi_2)}$$

$$=(F_m\cos(\omega_1 t+\psi_1)\pm F_m\cos(\omega_1 t+\psi_2))+j(F_m\sin(\omega_1 t+\psi_1)\pm F_m\sin(\omega_1 t+\psi_2))$$

$$\Leftrightarrow F_m\cos(\omega_1 t+\psi_1)\pm F_m\cos(\omega t_1+\psi_2)$$

若： $f_1(t)\Leftrightarrow \dot{F}_1=F_1\angle\psi_1$ ， $f_2(t)\Leftrightarrow \dot{F}_2=F_2\angle\psi_2$

设 a_1 和 a_2 是两个实数，则： $a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t) \Leftrightarrow a_1\dot{F}_1+a_2\dot{F}_2$

线性性质：表示若干个同频率正弦量线性组合的相量等于表示各个正弦量的相量的同一线性组合。

$a_1\dot{F}_1+a_2\dot{F}_2=?$ **如何计算?**

复数的代数运算

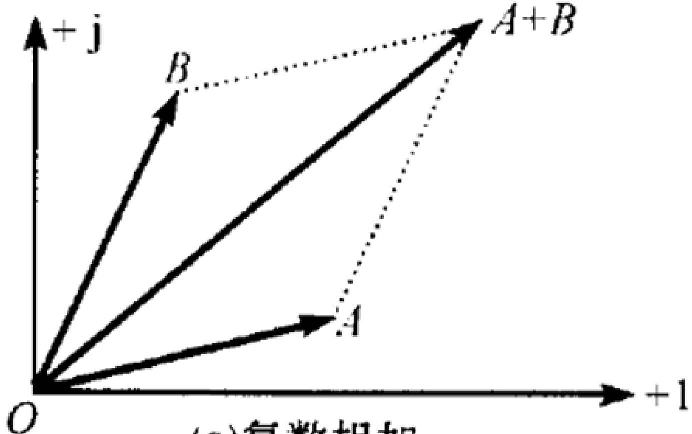
两个复数： $A_1 = a_1 + jb_1 = |A_1|\angle\theta_1$

$$A_2 = a_2 + jb_2 = |A_2|\angle\theta_2$$

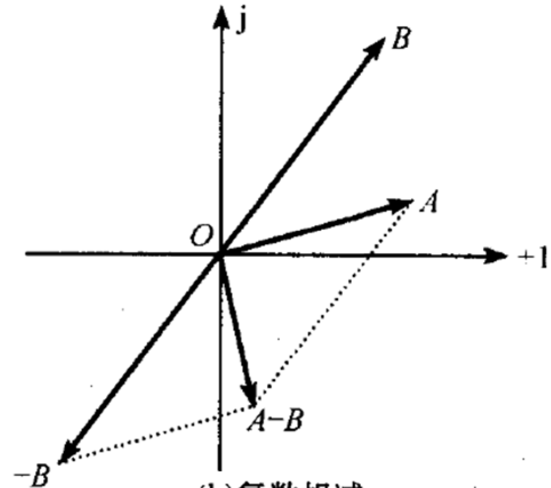
（1）相等： $a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$ **或** $|A_1| = |A_2|,\ \theta_1 = \theta_2$

（2）加减： $A_1 \pm A_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$

或在复平面用向量加减法



(a)复数相加



(b)复数相减

复数的代数运算

两个复数： $A_1 = a_1 + jb_1 = |A_1|\angle\theta_1$

$$A_2 = a_2 + jb_2 = |A_2|\angle\theta_2$$

（3）乘法： $A_1 A_2 = |A_1||A_2|\angle\theta_1 + \theta_2$

（4）除法： $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{|A_1|}{|A_2|}\angle\theta_1 - \theta_2$

（5）共轭： $\overset{*}{A}_1 = a_1 - jb_1 = |A_1|\angle -\theta_1$

微分性质

若：$f(t) \Leftrightarrow \dot{F} = F\angle\psi$

则：$f'(t) = \dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \mathrm{j}\omega\dot{F} = \omega F\angle(\psi + 90^\circ)$

推广到 n 阶导数：

$$f^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} \Leftrightarrow (\mathrm{j}\omega)^n \dot{F}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) = -\omega F_{\mathrm{m}} \sin(\omega t)$$

$$= \omega F_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + 90^\circ) \Leftrightarrow \mathrm{j}\omega\dot{F}_m$$

2. 正弦量的相量表示

正弦函数

- 加减乘除
- 乘系数
- 微分

结果仍然是正弦函数

结果相同

变换

反变换

为复指数函数

- 加减乘除
- 乘系数
- 乘$j\omega$

结果仍为复指数函数

回避了三角公式和微积分运算

例题1 已知 $u_1(t)=20\cos(\omega t-30^\circ)\mathrm{V}$

$$u_2(t)=40\cos(\omega t+60^\circ)\mathrm{V}$$

求 $u_1(t)+u_2(t)$。

解: $u_1(t)\Leftrightarrow \dot{U}_{1\mathrm{m}}=20\angle-30^\circ\mathrm{V}$，$u_2(t)\Leftrightarrow \dot{U}_{2\mathrm{m}}=40\angle 60^\circ\mathrm{V}$

根据线性性质:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{1\mathrm{m}}+\dot{U}_{2\mathrm{m}}&=20\angle-30^\circ+40\angle 60^\circ\\&=(17.32-\mathrm{j}10)+(20+\mathrm{j}34.64)\\&=37.32+\mathrm{j}24.64\\&=44.72\angle 33.43^\circ\mathrm{V}\end{aligned}$$

进行反变换得:

$$u_1(t)+u_2(t)=44.72\cos(\omega t+33.43^\circ)\mathrm{V}$$

例题2 已知$i_1(t)=5\sqrt{2}\cos(\omega t+53.1^\circ)\text{A}$，

$i_2(t)=4\sqrt{2}\sin\omega t\ \text{A}$。求$i(t)=i_1(t)+i_2(t)$。

解：写出正弦量的相量。

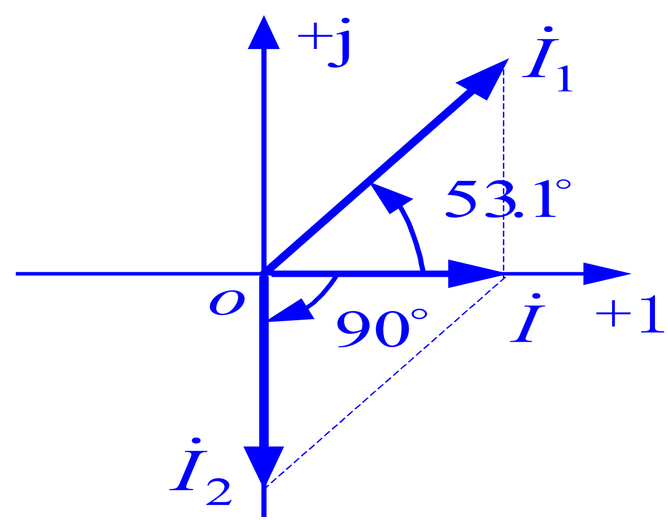
$$i_1(t)\leftrightarrow \dot{I}_1=5\angle 53.1^\circ\ \text{A}$$

$$i_2(t)=4\sqrt{2}\cos(\omega t-90^\circ)\text{A}\qquad i_2(t)\leftrightarrow \dot{I}_2=4\sqrt{2}\angle-90^\circ\ \text{A}$$

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=5\angle 53.1^\circ+4\angle-90^\circ=(3+\text{j}4)-\text{j}4=3\text{A}$$

$$i(t)=3\sqrt{2}\cos\omega t\ \text{A}$$

如果将相量在复平面上表示出来，则称为相量图。相量图表示了同频率的各正弦量之间的相位关系。



正弦信号的相量表示

- 同一电路中同频率正弦变量一定要变换成同名函数（余弦或正弦函数）后，才能用相量表示。
- 用振幅相量或有效值相量来表示一个正弦变量，它们与相应正弦变量间不存在相等的关系，只是对应关系。因为如果它们的角频率不相同，那么二者的旋转相量是不同的，则表示的相量是不同的。
- 用相量表示正弦量的目的是简化正弦电路分析。可以用复数的运算及相量图的几何运算取代正弦函数间的各种运算。

例题

已知正弦电压、电流如下，试分别写出它们的振幅相量及有效值相量。

$$i_1 = 10\cos(\omega t + 30^\circ)\,\text{mA} \qquad u_1 = 125\sin(\omega t - 60^\circ)\,\text{V}$$

$$i_2 = 2\sqrt{2}\cos(\omega t - 120^\circ)\,\text{A} \qquad u_2 = -3\cos(\omega t + 50^\circ)\,\text{V}$$

解：

$$u_1 = 125\cos(\omega t - 150^\circ)\,\text{V} \qquad u_2 = 3\cos(\omega t - 130^\circ)\,\text{V}$$

四个正弦变量的振幅相量为：

$$\dot{I}_{1m} = 10\angle 30^\circ\,\text{mA} \qquad \dot{U}_{1m} = 125\angle -150^\circ\,\text{V}$$

$$\dot{I}_{2m} = 2\sqrt{2}\angle -120^\circ\,\text{A} \qquad \dot{U}_{2m} = 3\angle -130^\circ\,\text{V}$$

变量的有效值相量是振幅相量的 $1/\sqrt{2}$ **倍，即：**

$$\dot{I}_1 = 7.07\angle 30^\circ\,\text{mA} \qquad \dot{U}_1 = 88.38\angle -150^\circ\,\text{V}$$

$$\dot{I}_2 = 2\angle -120^\circ\,\text{A} \qquad \dot{U}_2 = 2.12\angle -130^\circ\,\text{V}$$

例题 已知某正弦电路中的几个支路电压的相量分别为 $\dot{U}_1 = 5\angle 30^\circ\text{V}$, $\dot{U}_{2m} = (-3+j4)\text{V}$, $\dot{U}_{3m} = -4\angle -\dfrac{\pi}{3}\text{V}$, 请在复平面上画出相量图，并写出相应的正弦电压表达式。

解：这三个正弦变量的振幅相量为：

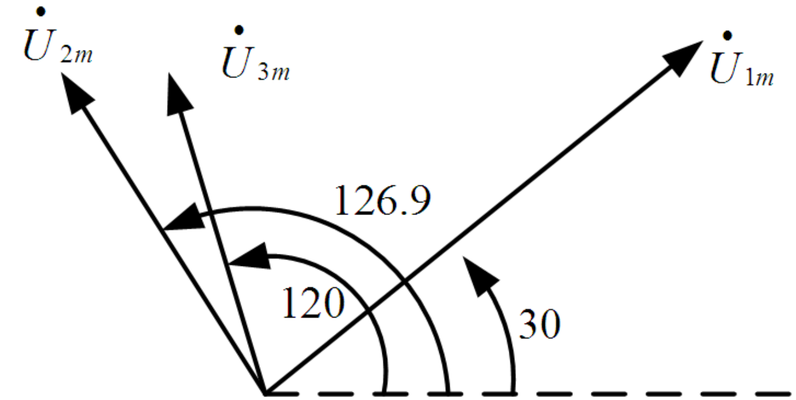
$$\dot{U}_{1m} = 5\sqrt{2}\angle 30^\circ\text{V},\ \dot{U}_{2m} = 5\angle 126.9^\circ\text{V},\ \dot{U}_{3m} = 4\angle 120^\circ\text{V}$$

相应的正弦电压的表达式为：

$$u_1(t) = 7.07\cos(\omega t + 30^\circ)\text{V},$$

$$u_2(t) = 5\cos(\omega t + 126.9^\circ)\text{V},$$

$$u_3(t) = 4\cos(\omega t + 120^\circ)\text{V},$$



相量图

3. 小结

（1）正弦信号是时间的函数（时域），而相量只包含了正弦信号的幅值（或有效值）和初相位（复数域），它只能**代表正弦量**，而**并不等于正弦量**。即：

$$\dot{I}_{\mathrm{m}} \neq i(t) \qquad \dot{U}_{\mathrm{m}} \neq u(t)$$

（2）在确定的频率下，正弦量和相量之间存在**一一对应关系**。给定了正弦量，可以得出表示它的相量；反之，由一已知的相量及其所代表的正弦量的频率，可以写出它所代表的正弦量。

§7-3
基尔霍夫定律
和
R、L、C元件VCR
的相量形式

1.基尔霍夫定律的相量形式

线性非时变电路在单一频率的正弦激励下（正弦电源可以有多个，但频率完全相同）进入稳态时，各处的电压、电流都为同频率的正弦量。

KCL的时域形式：$\sum_{k=1}^{K} i_k = 0$

$$\sum_{k=1}^{K} i_k = \sum_{k=1}^{K} \mathrm{Re}[\dot{I}_{km} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}[\sum_{k=1}^{K} \dot{I}_{km} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$= \mathrm{Re}[\left(\sum_{k=1}^{K} \dot{I}_{km}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}[\left(\sum_{k=1}^{K} \sqrt{2}\dot{I}_{k}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$= 0$$

1.基尔霍夫定律的相量形式

$$\sum_{k=1}^{K} \dot{I}_k = 0$$ ——KCL的相量形式

$$\sum_{k=1}^{K} \dot{U}_k = 0$$ ——KVL的相量形式

注意

$$\sum_{k=1}^{K} I_k \neq 0 \qquad \sum_{k=1}^{K} U_k \neq 0$$

2. R、L、C元件VCR的相量形式

2.1 电阻元件

设 $i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi_i)=\mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$

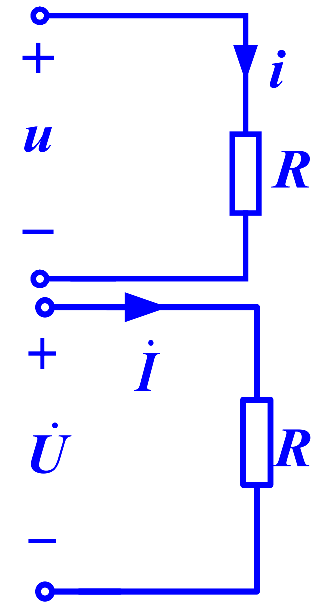
根据VCR：$u=Ri=\mathrm{Re}[\sqrt{2}R\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$

$$=\mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

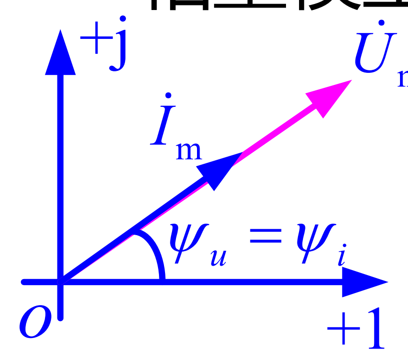
$\dot{U}=R\dot{I}$——电阻元件VCR的相量形式

$$\dot{U}=U\angle\psi_u=R\dot{I}=RI\angle\psi_i\qquad\begin{cases}U=RI\\ \psi_u=\psi_i\end{cases}$$

结论：电阻元件的电压与电流同相位。



相量模型

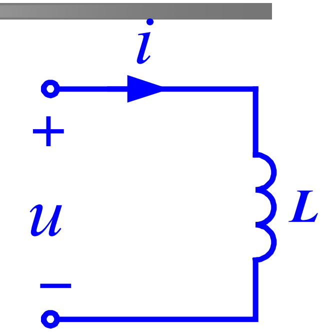


相量图

2. R、L、C元件VCR的相量形式

2.2 电感元件

设 $i(t)=I_m\cos(\omega t+\psi_i)=\mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$

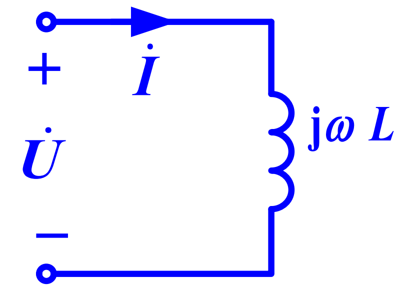


根据VCR：

$$u(t)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{I}e^{\mathrm{j}\omega t}]\}$$

$$=\mathrm{Re}[\sqrt{2}(\mathrm{j}\omega L\dot{I})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$=\mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$



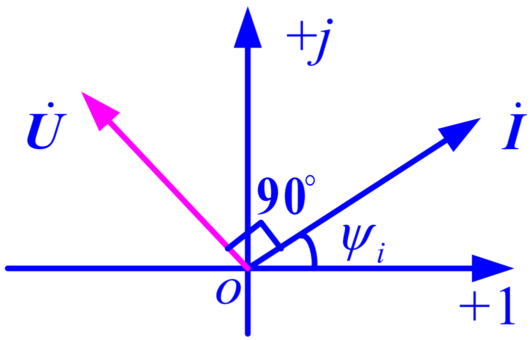
相量模型

$\dot{U}=\mathrm{j}\omega L\dot{I}$ ——电感元件VCR的相量形式

2.R、L、C元件VCR的相量形式

$$\dot{U}=U\angle\psi_u=\mathrm{j}\omega L\dot{I}=\mathrm{j}\omega LI\angle\psi_i$$

$$=\omega LI\angle\psi_i+90^\circ\quad\begin{cases}U=\omega LI\\ \psi_u=\psi_i+90^\circ\end{cases}$$



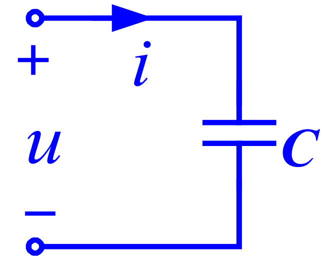
相量图

结论：电感元件的电压超前电流 90°，亦即电流滞后电压 90°。

2.R、L、C元件VCR的相量形式

3.电容元件

设 $u(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi_u)=\mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$

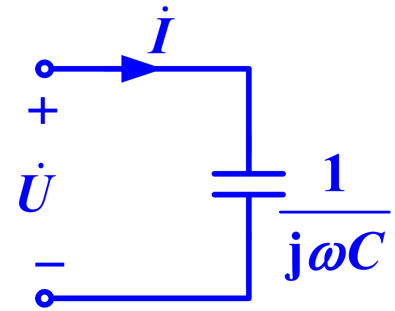


根据VCR：

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\mathrm{Re}[\sqrt{2}\dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\}$$

$$=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}(\mathrm{j}\omega C\dot{U})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$



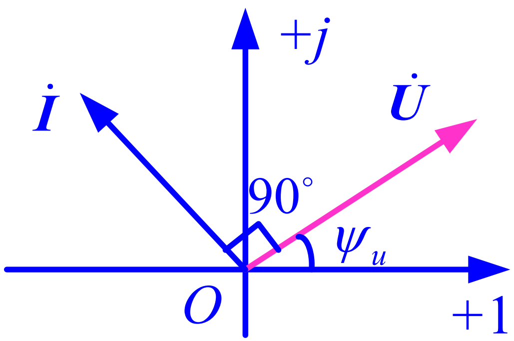
相量模型

$\dot{I}=\mathrm{j}\omega C\dot{U}$ ——电容元件VCR的相量形式

2.R、L、C元件VCR的相量形式

$$\dot{I} = I\angle\psi_i = \mathrm{j}\omega C\dot{U} = \mathrm{j}\omega CU\angle\psi_u$$

$$= \omega CU\angle\psi_u + 90^\circ \quad \begin{cases} I = \omega CU \\ \psi_i = \psi_u + 90^\circ \end{cases}$$



相量图

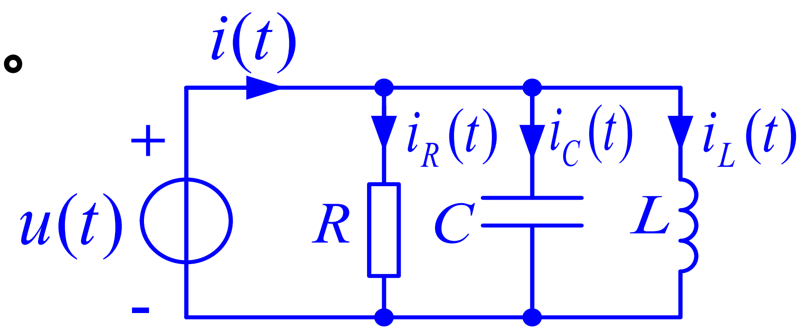
结论：电容元件的电流超前电压 90°

亦即电压滞后电流 。90°

例题1 电路如图所示，已知$R=15\Omega$，$C=83.3\mu F$，

$L=30mH$，$u(t)=120\sqrt{2}\cos(1000t+90^\circ)V$。

求电流 $i(t)$ 并画出相量图。



解: $\dot{U}=120\angle 90^\circ V$

$$\dot{I}_R=\frac{\dot{U}}{R}=\frac{120\angle 90^\circ}{15}$$

$$=8\angle 90^\circ=j8A$$

$$\dot{I}_C=j\omega C\dot{U}=j1000\times 83.3\times 10^{-6}\times 120\angle 90^\circ$$

$$=10\angle 180^\circ=-10A$$

$$\dot{I}_L=\frac{\dot{U}}{j\omega L}=\frac{120\angle 90^\circ}{1000\times 30\times 10^{-3}\angle 90^\circ}=4\angle 0^\circ A$$

解（续）

根据KCL：$\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_C+\dot{I}_L$

$$=\mathrm{j}8-10+4=-6+\mathrm{j}8=10\angle127^\circ\ \mathrm{A}$$

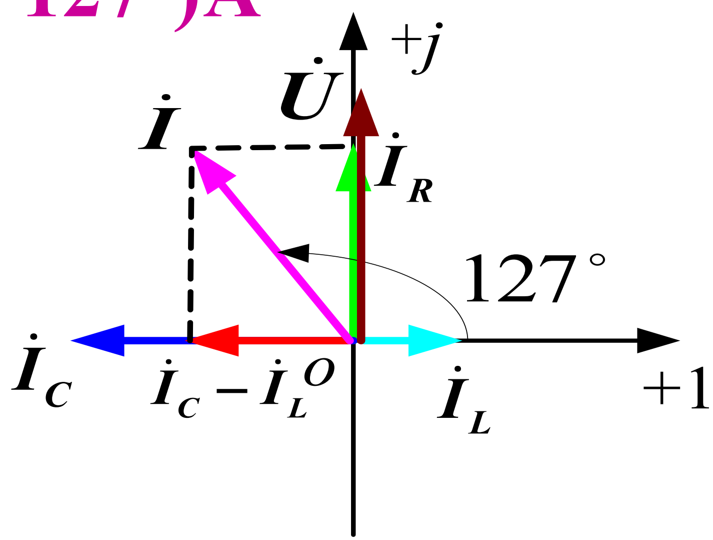
所以：$i(t)=10\sqrt{2}\cos(1000\,t+127^\circ)\mathrm{A}$

$$\dot{U}=120\angle90^\circ\ \mathrm{V}$$

$$\dot{I}_R=8\angle90^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_C=10\angle180^\circ\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_L=4\angle0^\circ\ \mathrm{A}$$



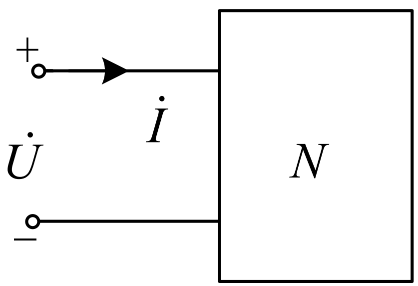
相量图

1. 欧姆定律的相量形式

将R、L、C元件VCR的相量形式重写如下：

$$\left.\begin{aligned}\dot{U}_{\mathrm{R}} &= R\dot{I}_{\mathrm{R}} \\ \dot{U}_{\mathrm{L}} &= \mathrm{j}\omega L\dot{I}_{\mathrm{L}} \\ \dot{U}_{\mathrm{C}} &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_{\mathrm{C}}\end{aligned}\right\} \dot{U} = Z\dot{I}$$

——**欧姆定律的相量形式**



一个无源线性支路，既有电阻元件又有电抗元件，在关联参考方向下，相量电压与相量电流之比称为阻抗：

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z$$

——**支路的阻抗**

（单位：欧姆）

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{Z}$$

——**支路的导纳**

（单位：西门子）

阻抗

阻抗是复数，可表示为：$Z=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}=R+jX=|Z|\angle\varphi_Z$

代数型　　指数型

阻抗的模　$|Z|=\sqrt{R^2+X^2}$

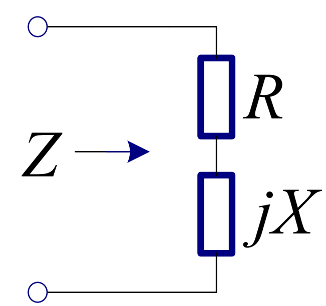
即支路电压与电流的振幅或有效值的比值。

阻抗角　$\varphi_Z=\arctan(X/R)=\psi_u-\psi_i$

即支路电压与电流之间的相位差。

阻抗的实部 $R=|Z|\cos\varphi_Z$为**等效电阻**；

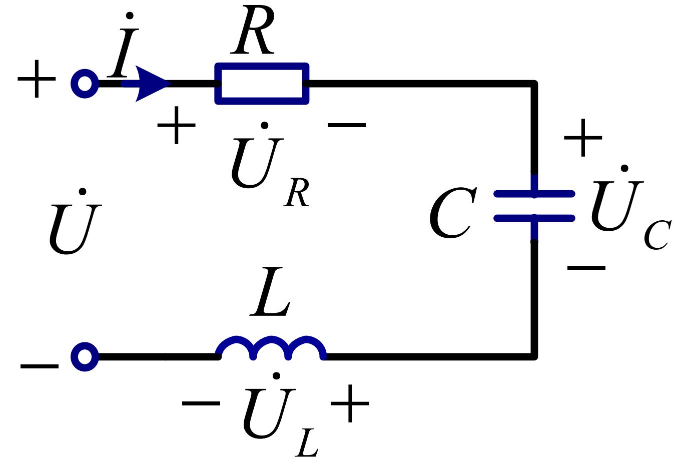
阻抗的虚部 $X=|Z|\sin\varphi_Z$为**等效电抗**。



例题 电路工作在正弦稳态下，求R、L、C串联电路的阻抗。

解：

$$\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_C+\dot{U}_L$$



$$\dot{U}=R\dot{I}+j\omega L\dot{I}+\frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})$$

$$=\frac{U}{I}\angle\psi_u-\psi_i=\frac{U}{I}\angle\varphi_{ui}$$

所以电路的等效阻抗为

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}\angle\arctan\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$$

解（续）

当 $X>0$ 时，Z为感性阻抗。

当 $X<0$ 时，Z为容性阻抗。

从阻抗角判断电路的性质：

当 $-90^\circ<\varphi_Z<0^\circ$ 时，Z为容性阻抗。

当 $0^\circ<\varphi_Z<90^\circ$ 时，Z为感性阻抗。

当 $\varphi_Z=0^\circ$ 时，Z为纯电阻性。

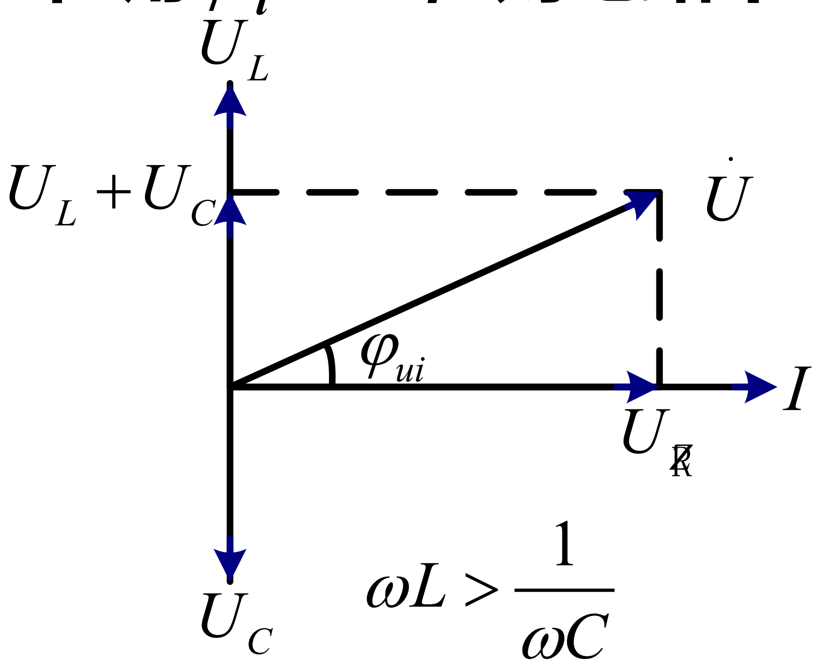
当 $\varphi_Z=90^\circ$ 时，Z为纯电感性。

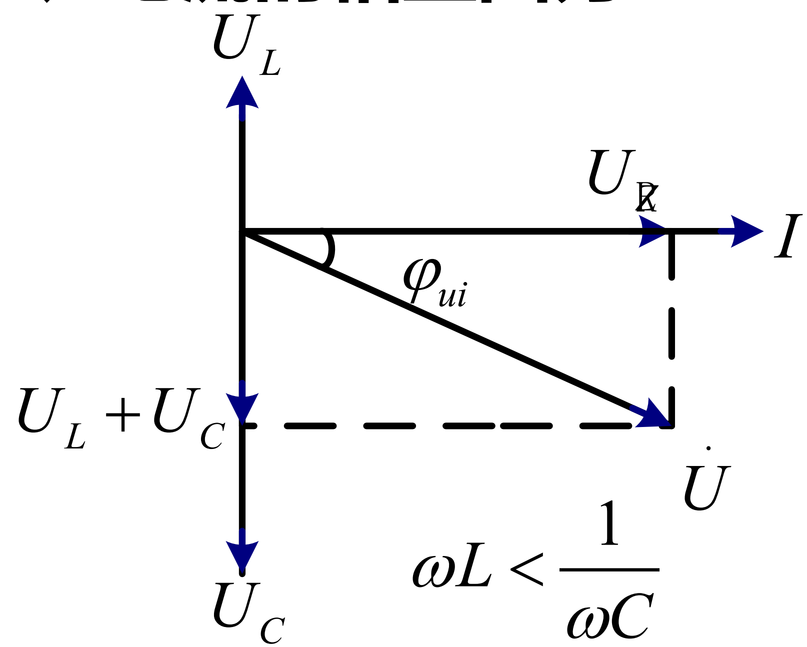
当 $\varphi_Z=-90^\circ$ 时，Z为纯电容性。

解（续）

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=R+j(\omega L-\frac{1}{\omega C})$$

选取支路电流 $\dot{I}$ 为参考相量，即假设电流 $\dot{I}$ 的相位角 $\psi_i=0$，则电路中电压、电流的相量图为：





导纳

导纳是复数，表示为：$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \underset{\text{代数型}}{G + jB} = \underset{\text{指数型}}{|Y|\angle\varphi_Y}$

导纳的模

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2}$$

即支路电流与电压的振幅或有效值的比值。

导纳角

$$\varphi_Y = \arctan\left(B/G\right) = \psi_i - \psi_u$$

即支路电流与电压之间的相位差。

导纳

阻抗的实部 $G=|Y|\cos\varphi_Y$ 为**等效电导;**
阻抗的虚部 $B=|Y|\sin\varphi_Y$ 为**等效电抗**。

$$Y_R=\frac{1}{R}=G$$

$$Y_C=j\omega C=jB_C$$

$$Y_L=\frac{1}{j\omega L}=-jB_L$$

容纳 ωC，用 B_C 表示。即：$B_C=\omega C$

感纳 $-\frac{1}{\omega L}$，用 B_L 表示。即：$B_L=-\frac{1}{\omega L}$

2. R、L、C元件的阻抗和导纳

2.2 导纳

$$Y_{\mathrm{R}} = \frac{1}{R} = G$$

$$Y_{\mathrm{L}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega L}$$

$$Y_{\mathrm{C}} = \mathrm{j}\omega C$$

导纳的虚部称为电纳(susceptance)，用符号B表示。

电感元件： $B_{\mathrm{L}} = -\dfrac{1}{\omega L}$ **——感纳(indctive susceptance)**

电容元件： $B_{\mathrm{C}} = \omega C$ **——容纳(capacitive susceptance)**

单个元件的阻抗和导纳互为倒数。

导纳

当$B > 0$时，Y为容性导纳。

当$B < 0$时，Y为感性导纳。

从导纳角判断电路的性质：

当$-90^\circ < \varphi_Y < 0^\circ$时，$Y$为感性导纳。

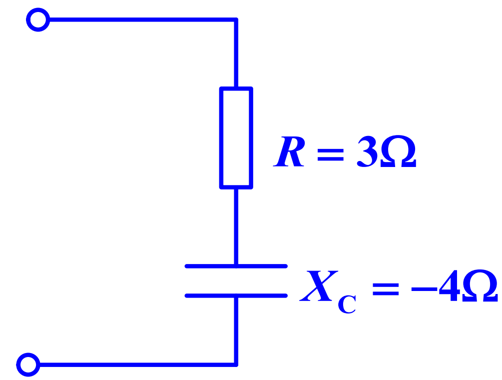
当 $0^\circ < \varphi_Y < 90^\circ$时，$Y$为容性导纳。

当 $\varphi_Y = 0^\circ$ 时，Y为纯电阻性导纳。

当 $\varphi_Y = -90^\circ$ 时，Y为纯电感性导纳。

当 $\varphi_Y = 90^\circ$ 时，Y为纯电容性导纳。

例题1 **求如图所示RC组成的单口网络的导纳。**



解： **端口阻抗：**

$$Z=3-\mathrm{j}4=5\angle-53.1^{\circ}\Omega$$

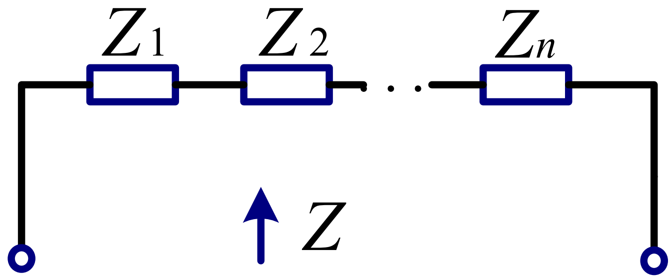
端口导纳：

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{1}{5\angle-53.1^{\circ}}=0.2\angle53.1^{\circ}\mathrm{S}=0.12+\mathrm{j}0.16\,\mathrm{S}$$

1. 两种等效模型

阻抗的串联

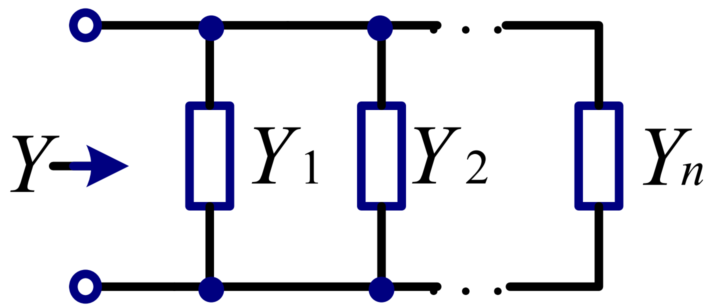
$$Z=\sum_{k=1}^{n}Z_k$$



$$Z=Z_1+Z_2+\ldots+Z_n$$

导纳的并联

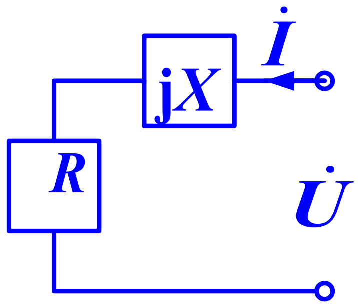
$$Y=\sum_{k=1}^{n}Y_k$$



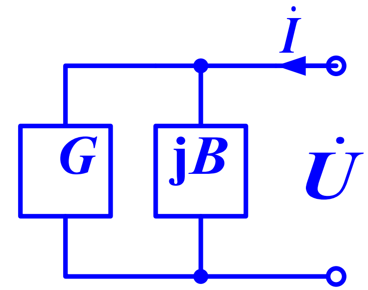
$$Y=Y_1+Y_2+\ldots+Y_n$$

1. 两种等效模型

$Z = \mathrm{Re}[Z] + \mathrm{jIm}[Z] = R + \mathrm{j}X$ $\quad$ $Y = \mathrm{Re}[Y] + \mathrm{jIm}[Y] = G + \mathrm{j}B$



串联模型



并联模型

若 $X>0$，则用电感元件等效，$X<0$，则用电容元件等效；若$B>0$，则用电容元件等效，$B<0$，则用电感元件等效。

注意

$$\begin{cases} R \neq \dfrac{1}{G} \\ X \neq \dfrac{1}{B} \end{cases} \qquad \begin{cases} G \neq \dfrac{1}{R} \\ B \neq \dfrac{1}{X} \end{cases}$$

2. 两种等效模型间的变换

根据VCR和等效的定义，若两模型间等效，则应有：

$$Y=\frac{1}{Z}=G+\mathrm{j}B$$

$$Y=\frac{1}{R+\mathrm{j}X}=\frac{R}{R^2+X^2}-\mathrm{j}\frac{X}{R^2+X^2}$$

所以：

$$G=\frac{R}{R^2+X^2}$$

$$B=-\frac{X}{R^2+X^2}$$

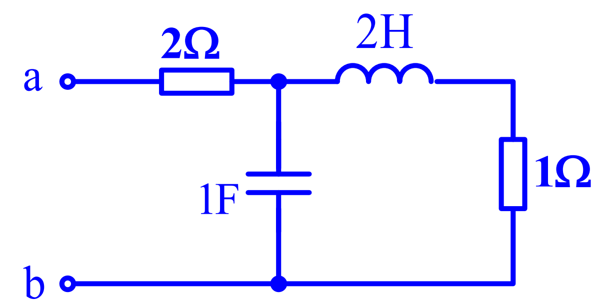
同理可得：

$$R=\frac{G}{G^2+B^2}$$

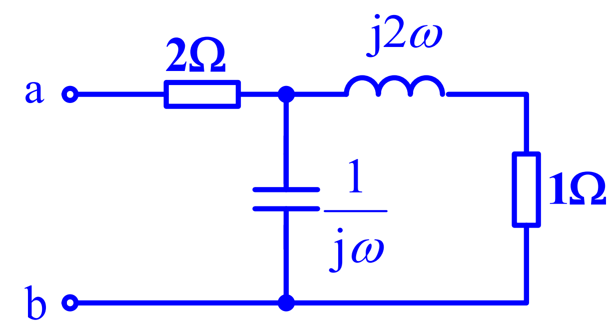
$$X=-\frac{B}{G^2+B^2}$$

串联模型⇔并联模型

例题1 求下图所示无源单口网络在 $\omega = 1\text{rad}/\text{s}$ 和 $\omega = 0.5\text{rad}/\text{s}$ 时的端口等效阻抗和等效导纳及其等效电路。



解： 画出电路的相量模型。



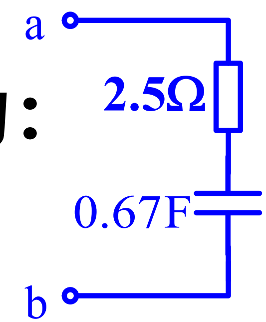
$$Z_{ab} = 2 + \frac{(1 + j2\omega)\dfrac{1}{j\omega}}{1 + j2\omega + \dfrac{1}{j\omega}} = 2 + \frac{1 + j2\omega}{1 - 2\omega^2 + j\omega}$$

当 $\omega = 1\text{rad}/\text{s}$ 时

$$Z_{ab} = 2 + \frac{1 + j2}{1 - 2 + j} = 2 + \frac{1 + j2}{-1 + j} = 2 + \frac{1 - j3}{2} = 2.5 - j1.5\Omega$$

解（续）

$$Z_{ab} = 2.5 - j1.5\Omega \rightarrow R = 2.5\Omega,\ X = -1.5\Omega$$



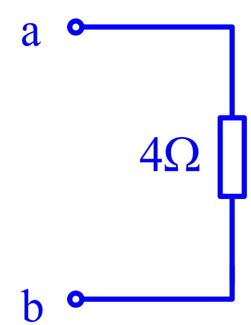
因为 $X < 0$，所以用电容元件等效，电容值为：

$$\frac{1}{\omega C} = 1.5 \qquad C = \frac{1}{1.5\omega} = \frac{1}{1.5} = 0.67\text{F}$$

当 $\omega = 0.5\text{rad/s}$ 时

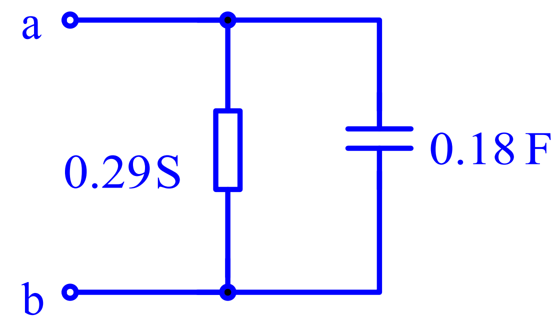
$$Z_{ab} = 2 + \frac{1 + j2\times 0.5}{1 - 2\times 0.5^2 + j0.5} = 2 + \frac{1+j}{0.5+j0.5} = 2 + 2 = 4\Omega \rightarrow$$

$$R = 4\Omega,\quad X = 0$$



解（续）

端口等效导纳为：$Y_{ab} = \dfrac{1}{Z_{ab}}$



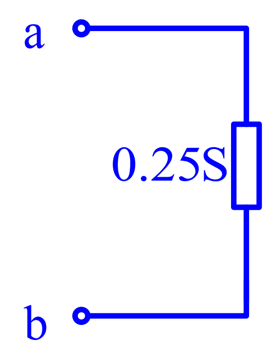
当 $\omega = 1\text{rad/s}$ 时

$$Y_{ab} = \frac{1}{2.5 - \text{j}1.5} = 0.29 + \text{j}0.18\text{S} \rightarrow$$

$$G = 0.29\text{S}, \quad B = 0.18\text{S}$$

因为$B > 0$，所以用电容元件等效，电容值为：

$$\omega C = 0.18 \qquad C = \frac{0.18}{\omega} = \frac{0.18}{1} = 0.18\text{F}$$



当 $\omega = 0.5\text{rad/s}$ 时

$$Y_{ab} = \frac{1}{Z_{ab}} = \frac{1}{4} = 0.25\text{S} \rightarrow G = 0.25\text{S}, \quad B = 0$$

小结

时域模型：以R、L、C等原参数来表征元件的模型。

相量模型：是一种与原电路拓扑结构相同，但电路元件用阻抗或导纳表示的**假想的模型。**

单口网络的输入阻抗（或导纳）：对于不含独立电源、且由线性非时变元件组成的单口网络，其输入阻抗（或导纳）为网络端钮的电压相量与电流相量（或电流相量与电压相量）之比。

串联阻抗:$Z=\sum_{k=1}^{n} Z_k$　　**并联导纳:**$Y=\sum_{k=1}^{n} Y_k$

利用相量法对正弦稳态电路进行分析的基本步骤:

1.写出已知正弦量的相量;
2.画出原电路的相量模型（若给出的已经是相量形式，则此步不再需要）；
3.应用合适的分析方法或定理求出待求量的相量形式;
4.根据所求得的相量写出相应的正弦量（若题目没有特别要求，也可以保持相量形式）。

时域模型	$u(t)$	$i(t)$	R	L	C
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
相量模型	$\dot{U}$	$\dot{I}$	R	$\mathrm{j}\omega L$	$\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$

相量分析方法

相量法解题步骤

(1) 写出已知正弦量的相量。

(2) 作出原电路的相量模型，求出电路中各相量间的关系。

(3) 根据所求得的相量，写出相应的正弦量。

相量图法

有时只需计算有效值和相位差，对这类问题，更适合于用相量图法求解。

相量图法：先定性地画出相量图，然后根据图形特征解决问题的一种方法。

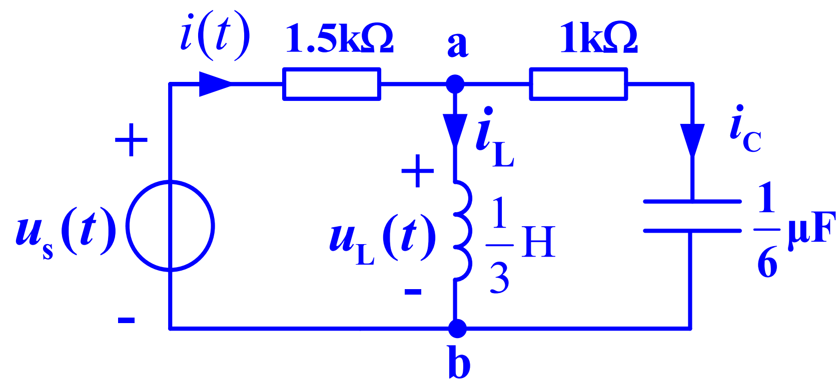
(1)串联电路通常以电流作为参考相量，并联电路通常以电压作为参考相量，参考相量初相为零。

(2) 测量仪表的读数为有效值。

(3) 根据电路元件的VCR确定各相量间的相位关系。

(4) 根据实部、虚部的正负确定相量所在的象限，从而确定相位角。

例题1 如图所示电路，已知 $u_s(t)=40\sqrt{2}\cos(3000t)\text{V}$，求$i(t)$、$i_C(t)$及$i_L(t)$。



解：写出正弦量的相量

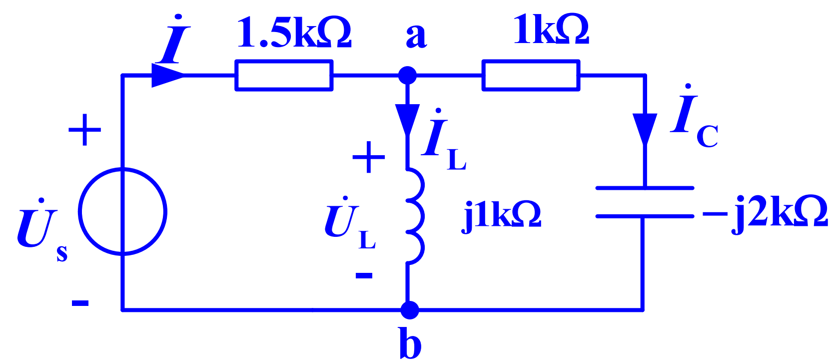
$$\dot{U}_s=40\angle 0^\circ\ \text{V}$$

作相量模型

$$\text{j}\omega L=\text{j}3000\times\frac{1}{3}=\text{j}1\text{k}\Omega$$

$$\frac{1}{\text{j}\omega C}=\frac{1}{\text{j}3000\times\frac{1}{6}\times 10^{-6}}$$

$$=-\text{j}2\text{k}\Omega$$



解（续）

$$Z = 1.5 + Z_{\mathrm{ab}}$$

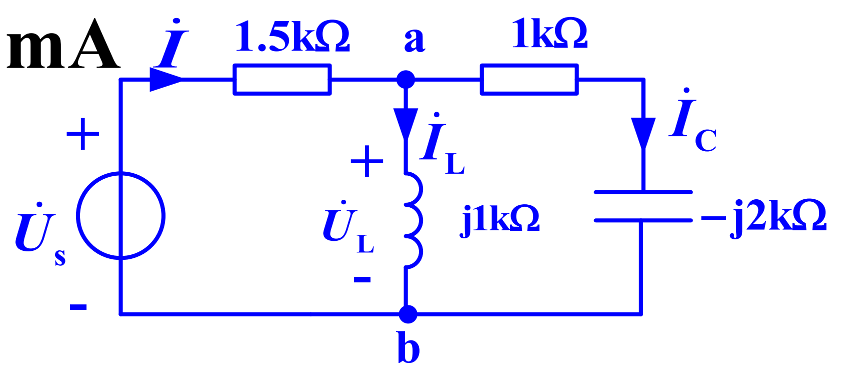
$$= 1.5 + \frac{\mathrm{j}1(1-\mathrm{j}2)}{\mathrm{j}1+1-\mathrm{j}2} = 1.5 + \frac{2+\mathrm{j}1}{1-\mathrm{j}1} = 2+\mathrm{j}1.5\Omega$$

$$= 2.5\angle 36.9^\circ \mathrm{k}\Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{\mathrm{s}}}{Z} = \frac{40\angle 0^\circ}{2.5\angle 36.9^\circ} = 16\angle -36.9^\circ \mathrm{mA}$$

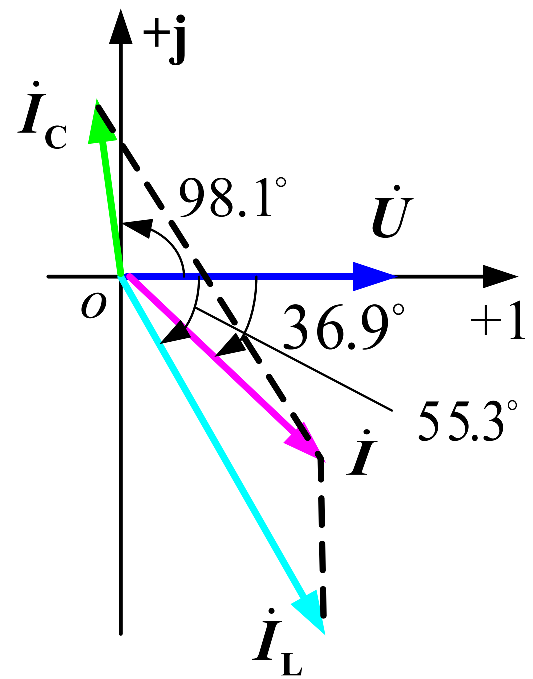
$$\dot{I}_{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{j}1}{\mathrm{j}1+1-\mathrm{j}2}\dot{I} = 11.3\angle 98.1^\circ \mathrm{mA}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{L}} = \frac{1-\mathrm{j}2}{\mathrm{j}1+1-\mathrm{j}2}\dot{I} = 25.3\angle -55.3^\circ \mathrm{mA}$$



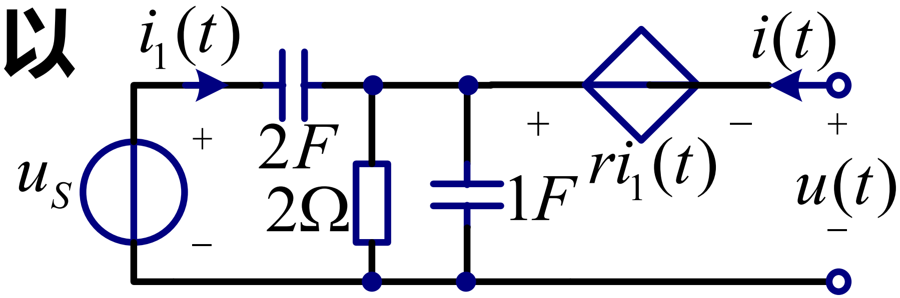
解（续）

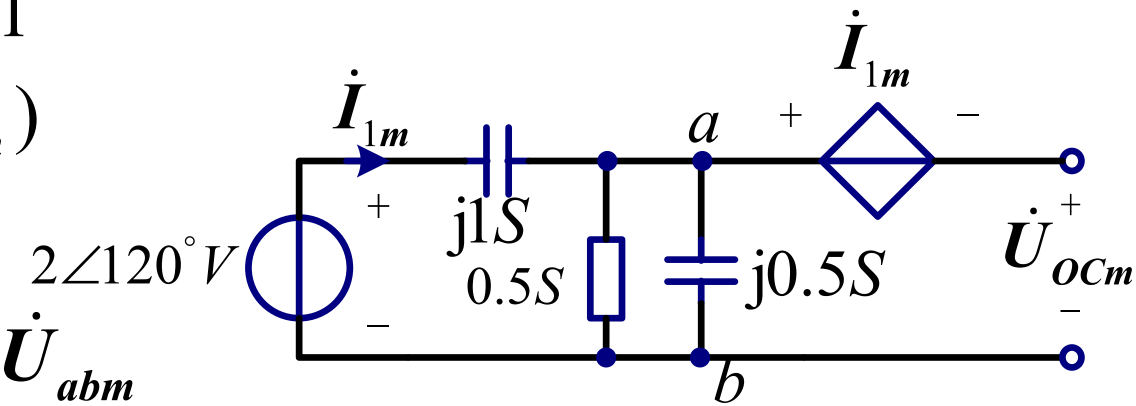
$$i(t)=16\sqrt{2}\cos(3000t-36.9^{\circ})\,\mathrm{mA}$$
$$i_{\mathrm{C}}(t)=11.3\sqrt{2}\cos(3000t+98.1^{\circ})\,\mathrm{mA}$$
$$i_{\mathrm{L}}(t)=25.3\sqrt{2}\cos(3000t-55.3^{\circ})\,\mathrm{mA}$$



例题 求如图所示的正弦稳态电路的戴维南等效电路，已知 $u_s=2\cos(0.5t+120^\circ)V, r=1\Omega$。

解:(1) 求 $\dot U_{OCm}$。首先画出以导纳表示的模型。





$$\dot U_{abm}=\frac{j1\times \dot U_{sm}}{0.5+j0.5+j1}$$

$$\dot I_{1m}=j1\times(\dot U_{sm}-\dot U_{abm})$$

$$\dot U_{OCm}=-\dot I_{1m}+\dot U_{abm}$$

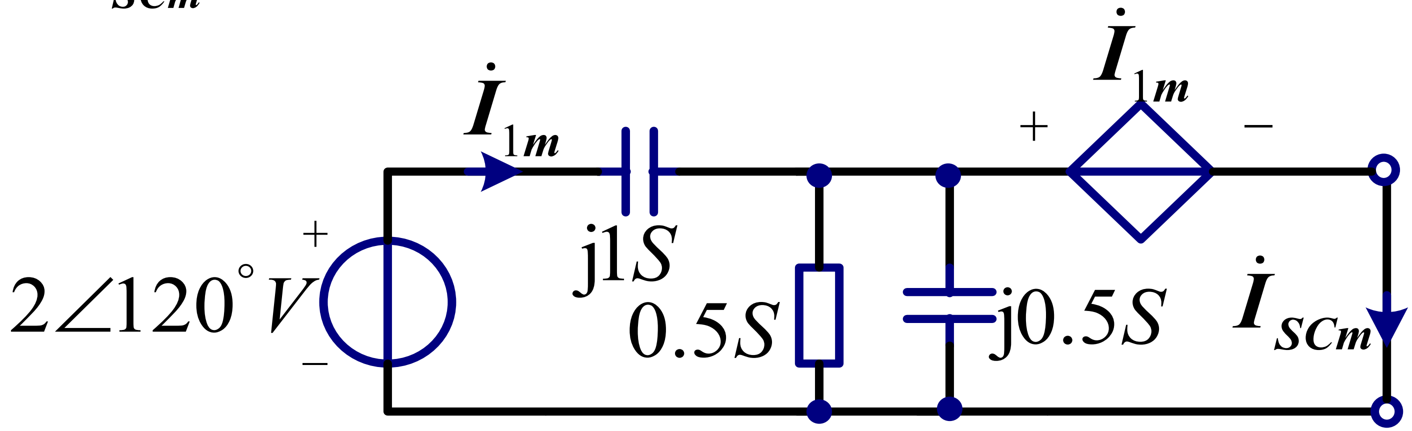
$$=-j(\dot U_{sm}-\dot U_{abm})+\dot U_{abm}$$

$$=-j\dot U_{sm}+(1+j)\frac{j\dot U_{sm}}{0.5+j1.5}$$

$$=j\dot U_{sm}(-1+\frac{1+j}{0.5+j1.5})=0.894\angle 93.44^\circ$$

解（续）

(2) 求$\dot{I}_{SCm}$。首先画出以导纳表示的模型。



$$\dot{I}_{1m} = j1\times(\dot{U}_{sm} - \dot{I}_{1m}) \qquad \therefore \dot{I}_{1m} = \frac{j}{1+j}\dot{U}_{sm}$$

$$\dot{I}_{SCm} = \dot{I}_{1m} - 0.5\dot{I}_{1m} - j0.5\dot{I}_{1m}$$

$$= (1 - 0.5 - j0.5)\frac{j}{1+j}\dot{U}_{sm} = 0.5\dot{U}_{sm}$$

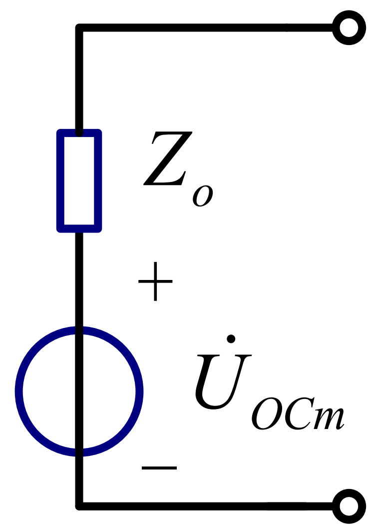
解（续）

(3) **求等效内阻。**

$$Z_{eq}=\frac{\dot{U}_{OCm}}{\dot{I}_{SCm}}=(-j+(1+j)\frac{j}{0.5+j1.5})\dot{U}_{sm}\times\frac{1}{0.5\dot{U}_{sm}}$$

$$=0.894\angle-25.56^{\circ}\,\Omega$$

(4) **得到戴维南等效电路的相量模型。**



例题4 求戴维南等效电路，已知 $u_s = U_{sm}\cos 3t\ \mathrm{V}$。

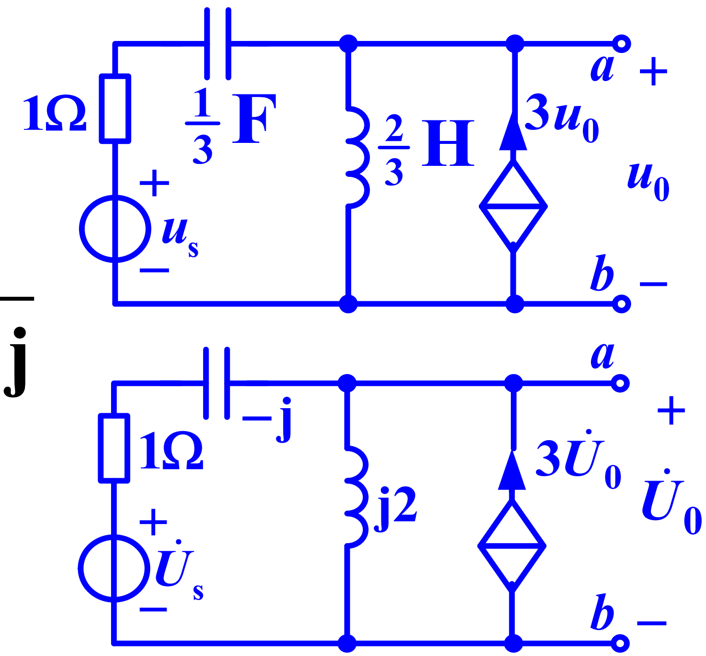
解：求开路电压

$$\dot U_{oc} = \dot U_0$$

$$\dot U_{oc}\left(\frac{1}{1-\mathrm{j}} + \frac{1}{\mathrm{j}2}\right) = 3\dot U_{oc} + \frac{\dot U_s}{1-\mathrm{j}}$$

$$\dot U_{oc} = \frac{\dot U_s}{-2.5(1-\mathrm{j})}$$

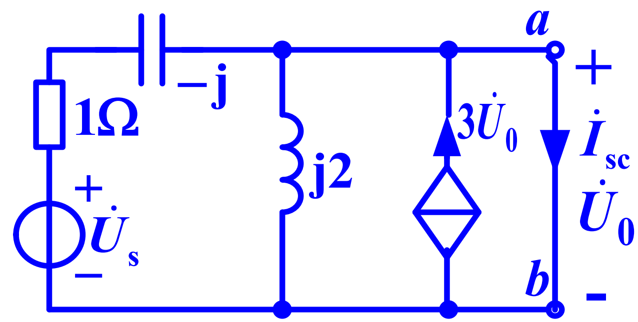
$$= \frac{U_s}{2.5\sqrt{2}}\angle -135^\circ\ \mathrm{V}$$



解（续）

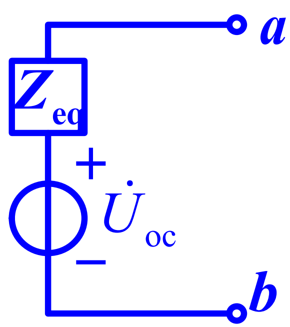
求短路电流

$$\dot{I}_{sc}=\frac{\dot{U}_s}{1-j}=\frac{U_s}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ\ \text{A}$$

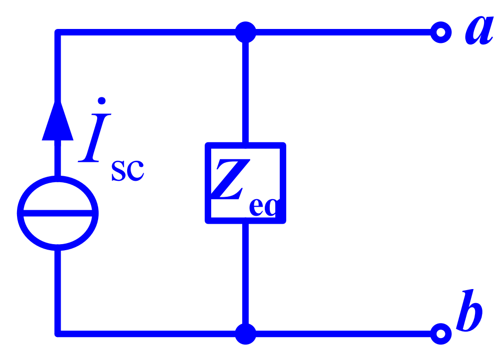


等效阻抗

$$Z_{eq}=\frac{\dot{U}_{oc}}{\dot{I}_{sc}}=\frac{\dfrac{U_s}{2.5\sqrt{2}}\angle -135^\circ}{\dfrac{U_s}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ}=-0.4\,\Omega$$



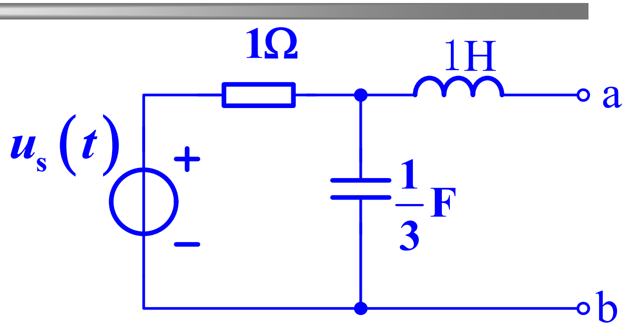
戴维南等效电路



诺顿等效电路

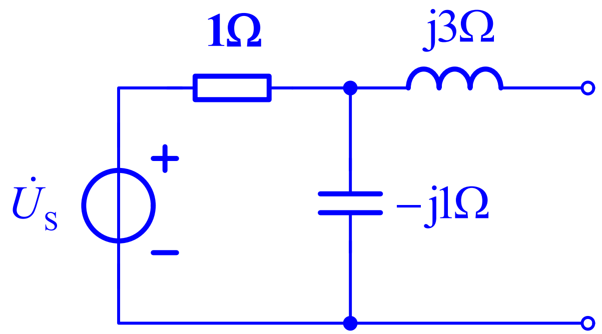
例题5 求下图所示单口网络的戴维南等效电路。

已知 $u_s(t)=10\sqrt{2}\cos 3t\ \text{V}$。



解：$\dot{U}_s=10\angle 0^\circ\ \text{V}$

画出电路的相量模型。



$$j\omega L = j3\times 1 = j3\Omega$$

$$-j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{3\times\frac{1}{3}} = -j1\Omega$$

开路电压：

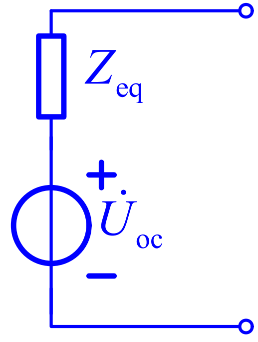
$$\dot{U}_{oc}=\frac{-j}{1-j}\dot{U}_s=\frac{1\angle-90^\circ}{\sqrt{2}\angle-45^\circ}\times 10\angle 0^\circ=5\sqrt{2}\angle-45^\circ\,\text{V}$$

解（续）

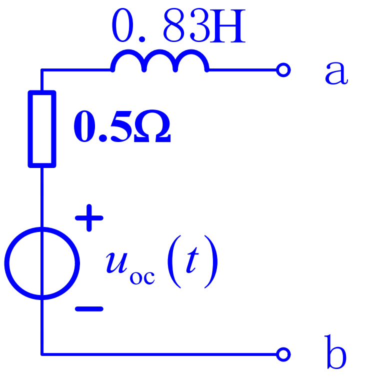
等效阻抗：

$$Z_{eq} = j3 + \frac{1\cdot(-j1)}{1-j1} = j3 + \frac{1-j}{2} = 0.5 + j2.5 = 2.55\angle 78.7^{\circ}\,\Omega$$

戴维南等效电路：



相量形式的等效电路

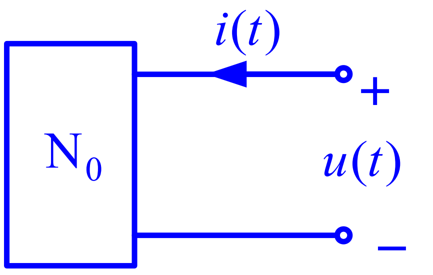


时域形式的等效电路

例题6 已知无源单口网络 N_0的端口电压和电流分别为

$$u(t)=10\sqrt{2}\cos(10^3t+60^\circ)\mathrm{V},\ i(t)=5\sqrt{2}\cos(10^3t)\mathrm{A}。$$

试求该单口网络的阻抗Z及等效的R、L或C参数。



解：$\dot{U}=10\angle 60^\circ\ \mathrm{V}\quad \dot{I}=5\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$

单口网络的阻抗：

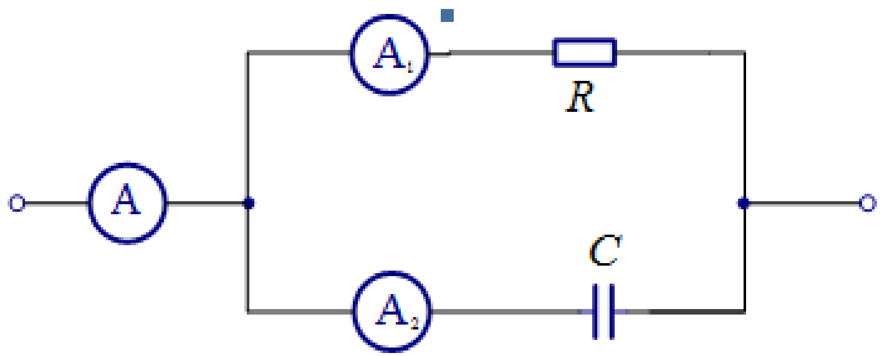
$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{10\angle 60^\circ}{5\angle 0^\circ}=2\angle 60^\circ=1+\mathrm{j}1.73\Omega$$

因为$X>0$，所以电路呈电感性。

$$R=1\Omega\qquad X_{\mathrm{L}}=\omega L=1.73\Omega$$

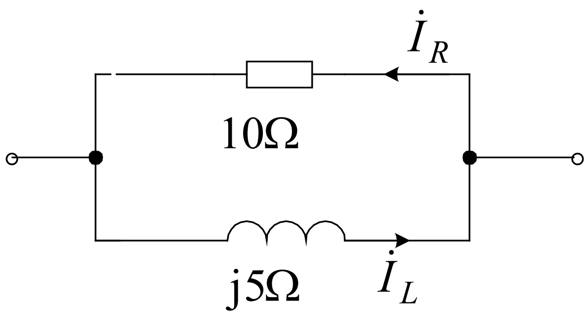
$$L=\frac{X_{\mathrm{L}}}{\omega}=\frac{1.73}{10^3}=1.73\mathrm{mH}$$

有电流表 **A**、**A1** 和 **A2**，已知电流表 **A** 的读数为 $8\mathrm{A}$， $R=2\Omega$， $\omega C=0.5\Omega$。则电流表 **A2** 的读数为



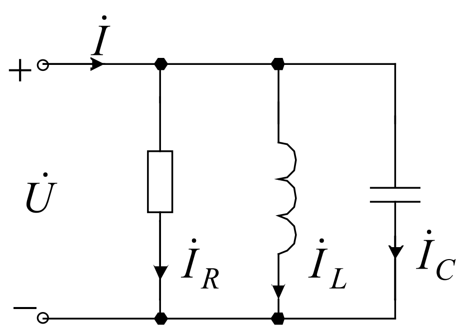
$4\sqrt{2}\mathrm{A}$

图示正弦交流电路中，已知 $\dot{I}_R = 2\angle -\dfrac{\pi}{3}$ A，求 $\dot{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{L}}$



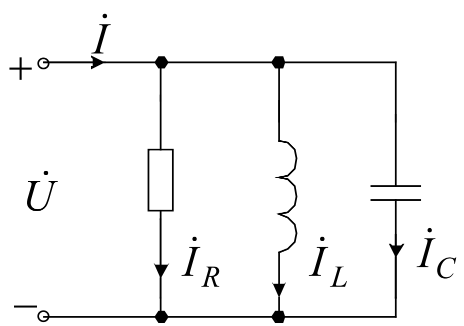
图示正弦交流电路中，已知电流有效值分别为 $I = 5$ A，$I_R = 5$ A，$i_L = 3$ A，求 I_C；

若 $I = 5$ A，$I_R = 4$ A，$I_L = 3$ A，再求 I_C。



图示正弦交流电路中，已知电流有效值分别为$I=5$ A，$I_R=5$ A，$i_L=3$ A，求I_C；

若$I=5$ A，$I_R=4$ A，$I_L=3$ A，再求I_C。



(Answer) ①由 $\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_L+\dot{I}_C$ $\qquad I=I_R=5$ A

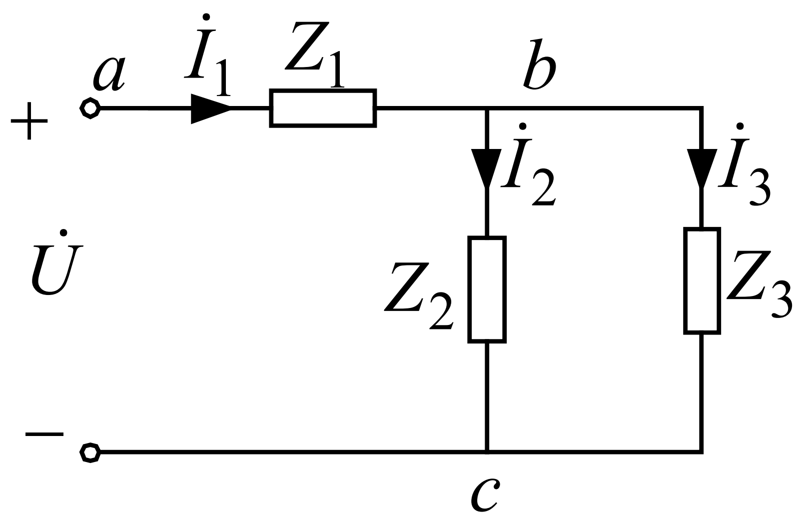
可知 $\dot{I}_L+\dot{I}_C=0 \qquad I_C=3$ A

② 由 $\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_L+\dot{I}_C$ $\qquad I=5$ A $\qquad I_R=4$ A

可知 $\left|\dot{I}_L+\dot{I}_C\right|=3$ A $\qquad \therefore I_C=6$ A

$Z_2 = \left(6 + j6\sqrt{3}\right)\mathrm{K\Omega}$， $Z_3 = 12K\Omega$，有效值 $I_2 = 10\,\mathrm{mA}$，

$U = 60\sqrt{3}\,\mathrm{V}$，$\dot{I}_2$的相位滞后$\dot{U}\,\dfrac{\pi}{6}$，求$Z_1 = ?$



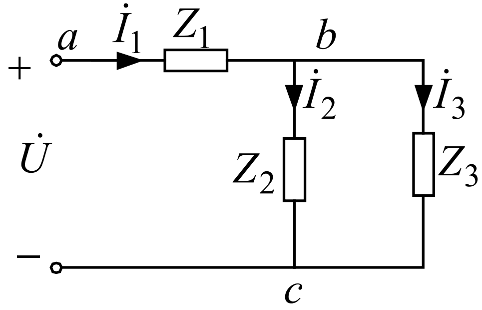
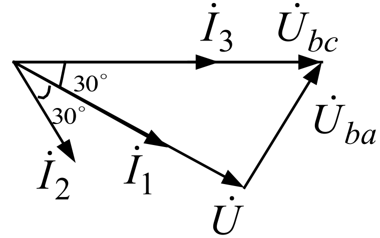


图 3



解： 以$\dot U_{bc}$为参考相量 $\dot U_{bc}=120\angle 0^\circ\ \mathrm{V}$ 2 分

$$\dot I_2=10\angle-60^\circ\ \mathrm{mA}，\quad \dot I_3=\frac{\dot U_{bc}}{Z_3}=\frac{120}{12}=10\,\mathrm{mA}$$

2 分

由题意 $\dot U=60\sqrt{3}\angle-30^\circ\ \mathrm{V}$， $\therefore \boldsymbol{\dot U_{ab}=-60\angle 60^\circ}\ \mathrm{V}$ 2 分

$$\dot I_1=\dot I_2+\dot I_3=10\angle-60^\circ+10=10\sqrt{3}\angle-30^\circ\ \mathrm{mA}$$

2 分

$$\therefore Z_1=\frac{\dot U_{ab}}{\dot I_1}=\frac{-60\angle 60^\circ}{10\sqrt{3}\angle-30^\circ}=-j2\sqrt{3}\,\mathrm{K\Omega}=-j3.46\,\mathrm{K\Omega}$$

§4-4　正弦稳态电路的功率

- 瞬时功率和平均功率
- 单口网络的平均功率
- 单口网络的无功功率
- 单口网络的视在功率

1 瞬时功率和平均功率

在电压、电流为关联参考方向下，元件或单口网络的瞬时功率定义为：

$$p(t)=\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)\cdot i(t)$$

$p(t)>0$，**元件或单口网络吸收功率。**

$p(t)<0$，**元件或单口网络产生功率。**

在 $[t_1,t_2]$ **时间段内，元件或单口网络的能量为：**

$$w(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}u(t)\cdot i(t)\mathrm{d}t=w(t_2)-w(t_1)$$

$w(t_1,t_2)>0$，**元件或单口网络吸收能量。**

$w(t_1,t_2)<0$，**元件或单口网络释放能量。**

1 瞬时功率和平均功率

平均功率(average power)是瞬时功率在一个时间段内的平均值。用P表示。

$$P=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}p(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}u(t)\cdot i(t)\mathrm{d}t$$

对于周期信号作用下的电路，通常以一个周期内的平均功率进行衡量。

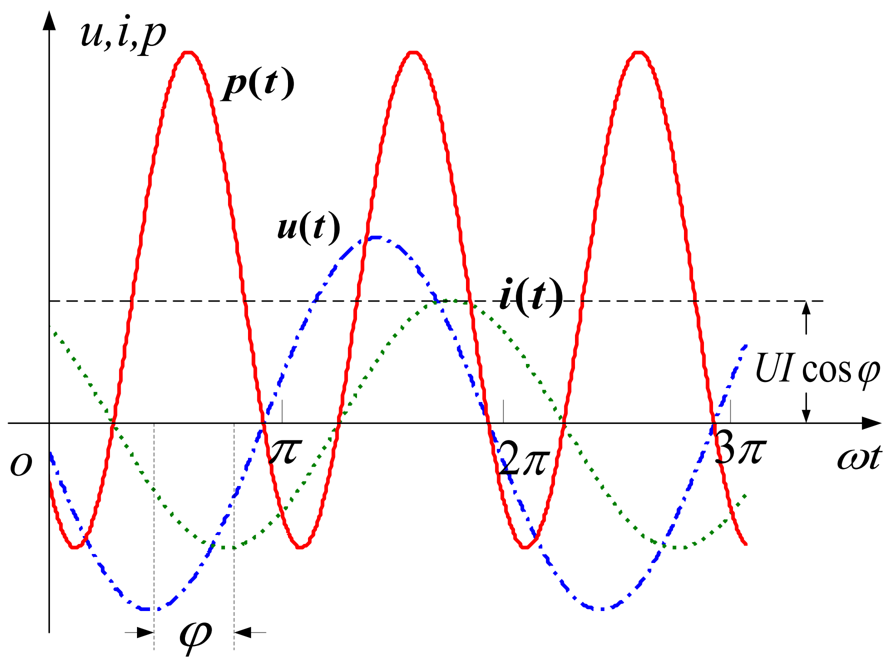
$$P=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}p(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}u(t)\cdot i(t)\mathrm{d}t$$

2. 单口网络的平均功率

$$u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\psi_u),\qquad i(t)=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)$$

在u、i为关联参考方向下：

$$p(t)=ui=2UI\cos(\omega t+\psi_u)\cos(\omega t+\psi_i)$$
$$=UI\cos\left(\psi_u-\psi_i\right)+UI\cos\left(2\omega t+\psi_u+\psi_i\right)$$
$$=UI\cos\varphi+UI\cos(2\omega t+\psi_u+\psi_i)\quad(\varphi=\psi_u-\psi_i)$$



2. 单口网络的平均功率

在u、i为关联参考方向下，单口网络的平均功率为：

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T[UI\cos\varphi+UI\cos(2\omega t+\psi_u+\psi_i)]\mathrm{d}t$$

$$=UI\cos\varphi$$

平均功率是瞬时功率中的恒定分量。

平均功率表示单口网络实际消耗或产生的功率，所以又称为有功功率(active power)。

$\lambda=\cos\varphi$ ——功率因数　　φ——功率因数角

功率因数反映了发电设备容量的利用率。

一般情况下：$0<\cos\varphi<1$

注意：功率因数 $\cos\varphi$ 不能体现电路的性质，所以，通常加上“感性”、“容性”或“超前”、“滞后”等文字进行说明。

3. 单口网络的无功功率

将瞬时功率改写为如下形式：

$$p(t)=UI\cos\varphi+UI\cos(2\omega t+2\psi_u-\varphi)$$

$$=UI\cos\varphi+UI\cos\varphi\cdot\cos(2\omega t+2\psi_u)\ +UI\sin\varphi\cdot\sin(2\omega t+2\psi_u)$$

$$=UI\cos\varphi\cdot\{1+\cos[2(\omega t+\psi_u)]\}+UI\sin\varphi\cdot\sin[(2(\omega t+\psi_u)]$$

≥ 0 不可逆的部分，表示网络消耗的功率　　**可逆部分，表示网络与外电源间能量交换情况**

无功功率(reactive power):表示网络与外加电源间能量交换的规模。用Q表示。

$$Q=UI\sin\varphi$$

单位：乏(Var) ←伏特·安培

千乏(kVar)，毫乏(mVar)

4. 单口网络的视在功率

视在功率(apparent power):单口网络端口电压和电流有效值的乘积。用S表示.

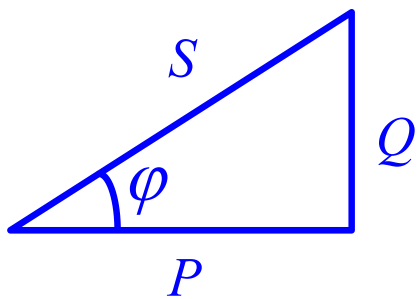
$$S = UI$$

单位:伏安（VA），千伏安（kVA）

视在功率表示了设备的容量，即可能发出的最大有功功率。

S、P、Q之间满足直角三角关系。

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$



功率三角形

6. 单口网络功率的其他计算方法

无源单口网络的有功功率为网络中所有**电阻元件**消耗的功率之和，也等于端口所接电源提供的有功功率。

$$P = \sum_k P_{\mathrm{R}k}$$

根据功率守恒法则：网络的总瞬时功率守恒，网络的总平均功率守恒，网络的总无功功率守恒。

$$p = \sum_k p_k = 0 \quad P = \sum_k P_k = 0 \quad Q = \sum_k Q_k = 0$$

视在功率不满足功率守恒法则，即：$\sum_k S_k \neq 0$

7. 特殊性质电路中的功率和能量

纯电阻电路

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0,\quad \cos\varphi = 1,\quad P = UI,\quad Q = 0,\quad S = UI = P$$

表明电源发出的功率全部被负载消耗，电源和负载之间没有能量交换。

纯电感电路

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 90^\circ,\quad \cos\varphi = 0,\quad P = 0,\quad Q = UI,\quad S = UI = Q$$

表明电源发出的功率全部用于电源和负载之间进行能量交换，而没有能量的消耗。

纯电容电路

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^\circ,\quad \cos\varphi = 0,\quad P = 0,\quad Q = -UI,\quad S = UI = -Q$$

表明电源发出的功率全部用于电源和负载之间进行能量交换，而没有能量的消耗。

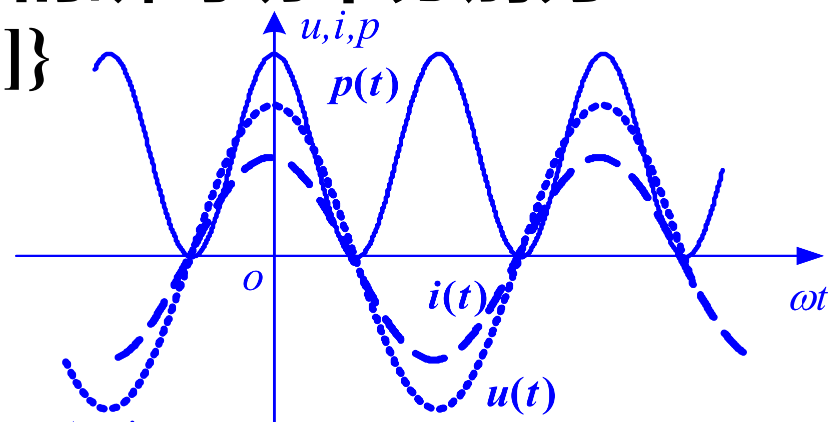
7. 特殊性质电路中的功率和能量

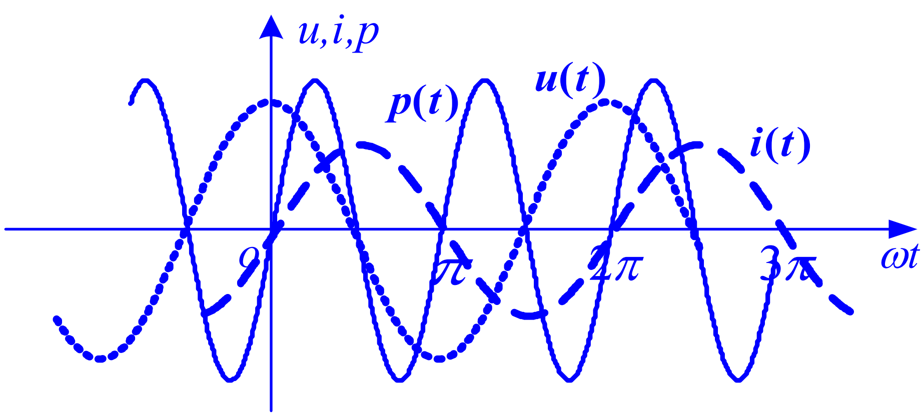
纯电感电路和纯电容电路的有功功率均为零，说明电感元件和电容元件不消耗能量，只进行能量的储存和释放。电阻、电感和电容元件的瞬时功率分别为：

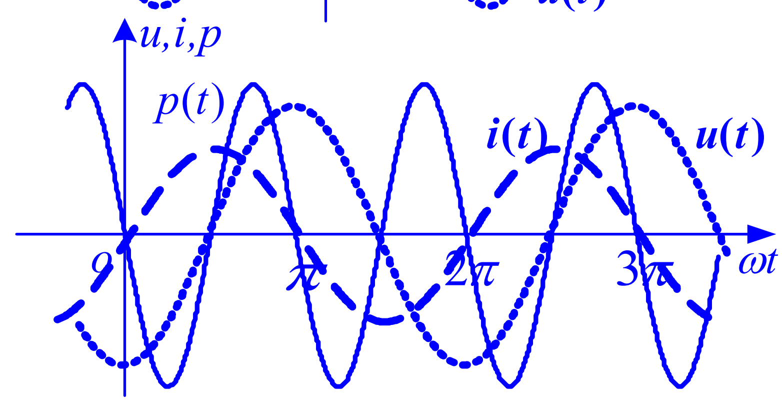
$$p_R(t) = UI\{1+\cos[2(\omega t+\psi_u)]\}$$

$$p_L(t) = UI\sin[2(\omega t+\psi_u)]$$

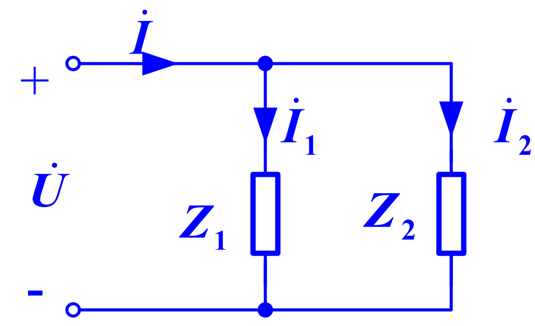
$$p_C(t) = -UI\sin[2(\omega t+\psi_u)]$$







例题1 两个阻抗并联的单口网络如下图所示，已知 $I=16\ \text{A}$，$\cos\varphi=0.9$（感性），Z_1 吸收的功率 $P_1=500\text{W}$，$I_2=10\text{A}$，$\cos\varphi_2=0.8$（感性）。试求通过 Z_1 的电流 I_1、功率因数 $\cos\varphi_1$ 和总电压 U。



解：令 $\dot{U}=U\angle 0^\circ\ \text{V}$

$$\varphi=\cos^{-1}0.9=25.84^\circ=\psi_u-\psi_i$$

$$\dot{I}=16\angle-25.84^\circ\ \text{A}$$

$$\varphi_2=\cos^{-1}0.8=36.9^\circ=\psi_{2u}-\psi_{2i}\qquad \dot{I}_2=10\angle-36.9^\circ\ \text{A}$$

根据KCL:

$$\dot{I}_1=\dot{I}-\dot{I}_2=16\angle-25.84^\circ-10\angle-36.9^\circ$$

$$=14.4-\text{j}6.97-(8-\text{j}6)=6.4-\text{j}0.97$$

$$=6.33\angle-8.62^\circ\ \text{A}$$

解（续）

$$I_1 = 6.33\,\text{A}$$

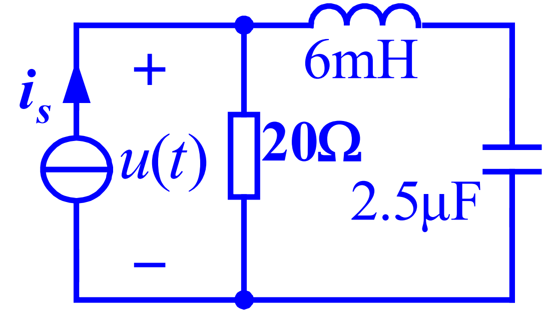
$$\cos\varphi_1 = \cos(0° - 8.62°) = 0.99$$

$$P_1 = UI_1\cos\varphi_1$$

$$U = \frac{P_1}{I_1\cos\varphi_1} = \frac{500}{6.33\times 0.99} = 79.79\,\text{V}$$

例题2 已知 $i_s(t)=5\sqrt{2}\sin(10^4 t-20^\circ)\,\mathrm{A}$，

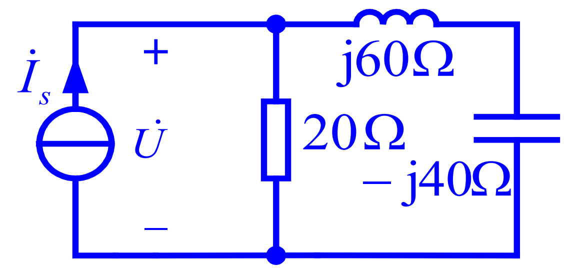
试求电路的*P*、*S*和λ。



解：画出电路的相量模型

$$i_s(t)=5\sqrt{2}\cos(10^4 t-110^\circ)\,\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_s=5\angle-110^\circ\,\mathrm{A}$$



*LC*支路阻抗

$$Z_{串}=\mathrm{j}10^4\times6\times10^{-3}-\mathrm{j}\frac{1}{10^4\times2.5\times10^{-6}}$$

$$=\mathrm{j}60-\mathrm{j}40=\mathrm{j}20\,\Omega$$

总阻抗： $Z=\dfrac{20\times\mathrm{j}20}{20+\mathrm{j}20}=10\sqrt{2}\angle45^\circ\,\Omega$

解（续）

$$\dot{U} = \dot{I}_s Z = 5\angle -110^\circ \times 10\sqrt{2}\angle 45^\circ = 50\sqrt{2}\angle -65^\circ \text{ V}$$

有功功率 $P = UI_s \cos(45^\circ) = 250 \text{ W}$

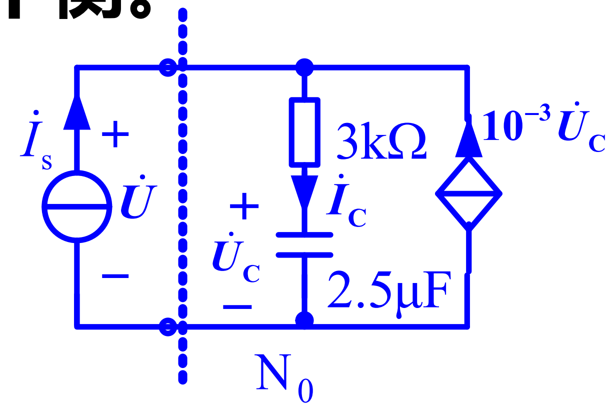
视在功率 $S = UI_s = 250\sqrt{2} = 353.55 \text{ VA}$

功率因数 $\lambda = \cos(45^\circ) = 0.71$

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{50^2 \times 2}{20} = 250 \text{ W}$$

例题3 如图所示电路，已知 $\omega = 100\,\text{rad/s}$

$\dot{I}_s = 10\sqrt{2}\angle 0^\circ\,\text{mA}$，试验证功率平衡。



解： 根据KCL：

$$\dot{I}_C = \dot{I}_s + 10^{-3}\dot{U}_C = 10\sqrt{2}\times 10^{-3} + 10^{-3}\dot{U}_C$$

根据电容元件的VCR：

$$\dot{I}_C = j\omega C\dot{U}_C$$

$$= j100\times 2.5\times 10^{-6}\dot{U}_C = j25\times 10^{-5}\dot{U}_C$$

以上两式联立求解得：

$$\dot{U}_C = 13.72\angle -166^\circ\,\text{V}$$

$$\dot{I}_C = 3.43\angle -76^\circ\,\text{mA}$$

受控电流源的电流： $10^{-3}\dot{U}_C = 13.72\angle -166^\circ\,\text{mA}$

解（续）

受控电流源的电流： $10^{-3}\dot{U}_{\mathrm{C}} = 13.72\angle -166^{\circ}\ \mathrm{mA}$

电流源两端的电压：

$$\dot{U} = \left(3\times10^{3} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\right)\dot{I}_{C} = \left(3\times10^{3} - \mathrm{j}\frac{1}{100\times2.5\times10^{-6}}\right)\times3.43\times10^{-3}\angle -76^{\circ}$$

$$= (3-\mathrm{j}4)\times3.43\angle -76^{\circ} = 17.15\angle -129.1^{\circ}\ \mathrm{V}$$

各元件的功率分别为：

电阻： $P_{\mathrm{R}} = 3\times10^{3} I_{\mathrm{C}}^{2} = 3\times10^{3}\times(3.43\times10^{-3})^{2} = 35.29\mathrm{mW}$

$Q_{\mathrm{R}} = 0$

电容： $P_{\mathrm{C}} = 0$

$Q_{\mathrm{C}} = -U_{\mathrm{C}} I_{\mathrm{C}} = -13.72\times3.43\times10^{-3} = -47.06\mathrm{mVar}$

受控源： $P_{控} = -U\times10^{-3}U_{\mathrm{C}}\cos[(-129.1^{\circ})-(-166^{\circ})] = -188.16\mathrm{mW}$

$Q_{控} = -U\times10^{-3}U_{\mathrm{C}}\sin[(-129.1^{\circ})-(-166^{\circ})] = -141.28\mathrm{mVar}$

解（续）

电流源：$P_s = -U \times I_s \cos(-129.1^\circ - 0^\circ)$

$$= -17.15 \times 10\sqrt{2} \times 10^{-3} \cos(-129.1^\circ) = 152.96\text{mW}$$

$$Q_s = -U \times I_s \sin(-129.1^\circ - 0^\circ)$$

$$= -17.15 \times 10\sqrt{2} \times 10^{-3} \sin(-129.1^\circ) = 188.22\text{mVar}$$

$$\sum P_k = P_R + P_C + P_{控} + P_s$$

$$= 35.29 + 0 + (-188.16) + 152.96 = 0.09 \approx 0$$

$$\sum Q_k = Q_R + Q_C + Q_{控} + Q_s$$

$$= 0 + (-47.06) + (-141.28) + 188.22 = -0.12 \approx 0$$

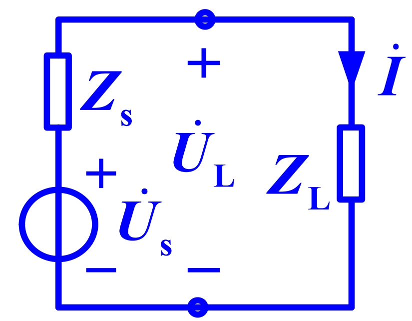
可见，有功功率和无功功率分别平衡。

正弦稳态最大功率传递定理
(可自阅)

最大功率传递定理

电源内阻抗： $Z_s = R_s + jX_s$

负载阻抗： $Z_L = R_L + jX_L$



Z_L为何值时可得到最大功率？最大功率是多少？

1. 负载的电阻及电抗均可独立变化

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_s}{Z_s + Z_L} = \frac{\dot{U}_s}{(R_s + R_L) + j(X_s + X_L)}$$

$$I = \frac{U_s}{\sqrt{(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2}}$$

最大功率传递定理

$$P_L = I^2 R_L = \frac{U_s^2}{(R_s + R_L)^2 + (X_s + X_L)^2} \cdot R_L$$

欲使P_L最大，首先应使分母最小。

当电抗之和 $X_s + X_L = 0$，即 $X_L = -X_s$ 时，分母 最小。

对P_L求导，确定使P_L为最大值的R_L值。

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{(R_s + R_L)^2 - 2(R_s + R_L)R_L}{(R_s + R_L)^4} U_s^2 = 0 \quad \text{解得：} R_L = R_s$$

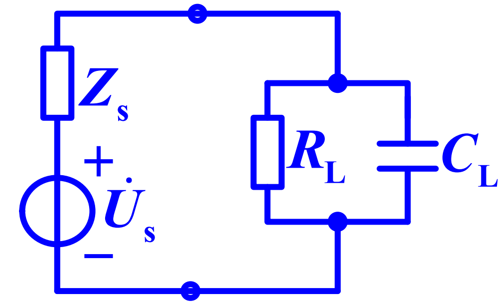
负载获得最大功率的条件：$Z_L = R_s - jX_s = Z_s^*$ 共轭匹配

获得的最大功率：$P_{L\max} = \dfrac{U_s^2}{4R_s}$

例题1 已知 $Z_s = 5 + j5\Omega$，$\dot{U}_s = 10\angle 0^\circ \text{V}$， $\omega = 1\text{rad/s}$，

求当R_L、C_L为何值时，负载可得到最大功率？

$P_{L\max} = ?$



解：当$Z_L = Z_s^* = 5 - j5$时，负载获得最大功率。

亦即 $Y_L = \dfrac{1}{Z_L} = \dfrac{1}{Z_s^*} = \dfrac{1}{5 - j5} = \dfrac{5 + j5}{50} = \dfrac{1}{10} + j\dfrac{1}{10}$

因为 $Y_L = \dfrac{1}{R_L} + j\omega C_L$

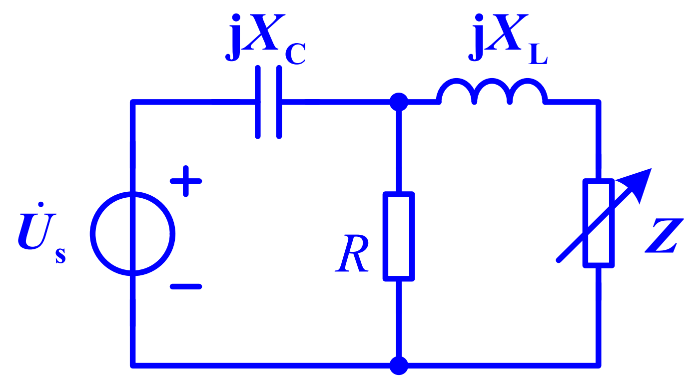
所以：$\dfrac{1}{R_L} = \dfrac{1}{10}$ $R_L = 10\Omega$

解（续）

$$\omega C_{\mathrm{L}} = \frac{1}{10}, \quad C_{\mathrm{L}} = 0.1\,\mathrm{F}$$

$$P_{\mathrm{L\,max}} = \frac{U_{\mathrm{s}}^2}{4R_{\mathrm{s}}} = \frac{10^2}{4\times 5} = 5\,\mathrm{W}$$

例题2 电路如图所示，已知 $\dot{U}_s = 24\angle 0^\circ\,\text{V}$，$R = 10\text{k}\Omega$，$X_C = -5\text{k}\Omega$，$X_L = 20\text{k}\Omega$ 求负载获得最大功率的条件及负载得到的最大功率。



解： 将负载移去，求剩下的单口网络的戴维南等效电路。

$$\dot{U}_{oc} = \frac{\dot{U}_s R}{R + jX_C} = \frac{24\angle 0^\circ \times 10^4}{10^4 - j5\times 10^3}$$

$$= 21.47\angle 26.57^\circ\,\text{V}$$

$$Z_{eq} = jX_L + \frac{R\cdot jX_C}{R + jX_C} = j20\times 10^3 + \frac{10^4(-j5\times 10^3)}{10^4 - j5\times 10^3}$$

$$= j20\times 10^3 + 4.47\times 10^3\angle -63.43^\circ = j20\times 10^3 + 2\times 10^3 - j4\times 10^3$$

$$= 2 + j16\text{k}\Omega$$

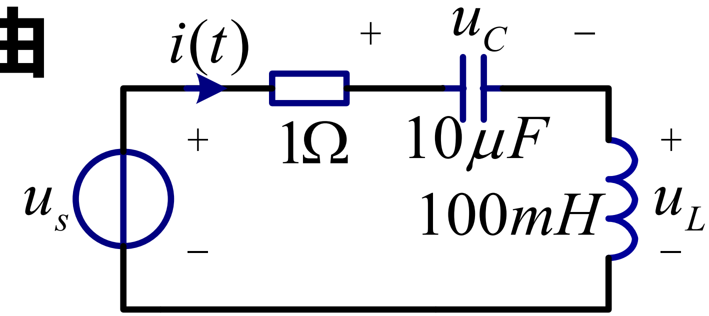
解（续）

当 $Z = Z_{eq}^{*} = 2 - j16\Omega$ 时，Z 获得最大功率。

$$P_{max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{21.47^2}{4\times 2} = 57.62\text{mW}$$

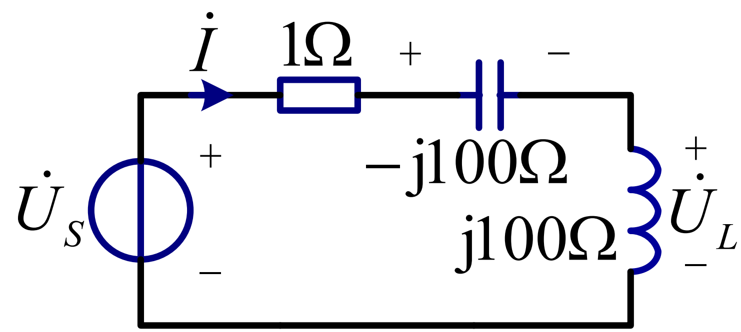
RLC串联谐振电路

当 $u_s = 10\sqrt{2}\cos(1000t)\mathrm{V}$ **时，由相量模型可知电路阻抗为**



$$Z = (1 - j100 + j100) = 1\angle 0^\circ\ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z} = \frac{10\angle 0^\circ}{1\angle 0^\circ} = 10\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$$



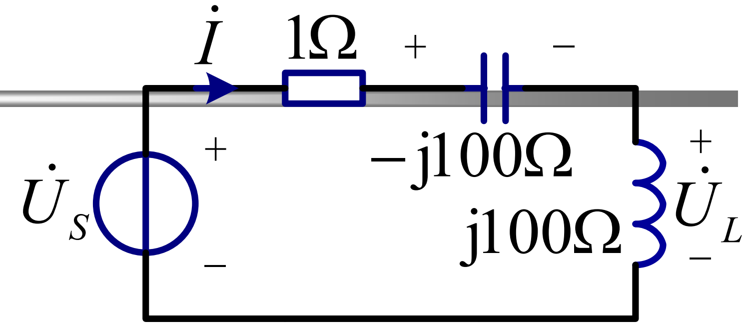
$$\dot{U}_C = \dot{I}(-j100) = 1000\angle -90^\circ\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_L = \dot{I}(j100) = 1000\angle 90^\circ\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_C + \dot{U}_L = 0$$

某个激励信号频率时，对激励源而言电路的阻抗表现为纯电阻性，L、C串联相当于短路，电路的总阻抗最小，电流最大。L、C上电压有效值是激励源的100倍，局部形成高压，但它们的电压相互抵消。

RLC串联谐振电路



$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$$

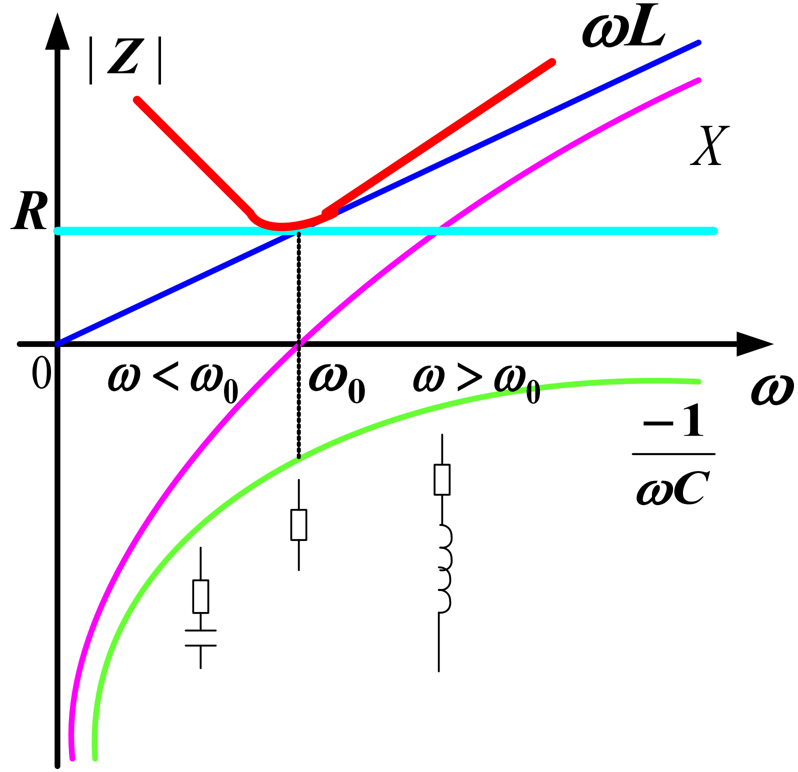
当X=0时，电路呈现纯电阻性，$\dot{I}$与$\dot{U}$同相位，此时电路处于谐振（resonance)状态。

谐振条件： $\omega_0 L - \dfrac{1}{\omega_0 C} = 0$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$ ——**串联谐振频率**

1. 谐振条件及谐振频率

RLC串联电路阻抗与频率的关系



2. 谐振时电路的特点

（1）电路呈现纯电阻性，$Z = R$，电路的阻抗最小。

（2）电流最大，$I_0 = \dfrac{U_s}{R}$。

（3）感抗与容抗相等。

（4）电感电压与电容电压大小相等，方向相反，相互抵消。

正弦稳态电路总结

相量

- 相量表示和运算
  - 注意模值相位和实部虚部两种方式的转换
  - 相量图，以及判断相量之间的相对关系
- 如何判断两个相量的超前和滞后关系？
  - 容性感性的判断
  - 端口电流、电压关系的判断
  - 无功功率的正负

两类约束

- KCL、KVL的相量形式
- RLC元件VCR和阻抗的相量形式
  - 电压电流超前滞后关系
  - 阻抗随频率变化而变化的规律（导纳？）
  - 利用电路变量的相对关系解题
- 端口的阻抗和导纳
  - 感性和容性
  - 阻抗模型和导纳模型的转换
  - 阻抗导纳数值->等效元件的串并联
- 参考：谐振的情况（10-3和10-4节）

功率

- 瞬时功率和平均功率
- 有功功率和品质因数的概念
- 无功功率
- 视在功率和复功率
- 功率的守恒

	电容	电感
VCR	$\dot{U}_{\mathrm{C}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_{\mathrm{C}}$	$\dot{U}_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}\omega L\dot{I}_{\mathrm{L}}$
U-i相位关系 阻抗角	电流超前电压90度 -90	电压超前电流90度 90
阻抗	$Z_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}\omega L$	$Z_{\mathrm{C}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}$
无功功率	$Q = -UI$	$Q = UI,$