矩阵理论与方法

12月

内容提要 CONTENTS

- □ 课程信息
- □ 课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

第3章 矩阵分析及其应用

第3章 矩阵分析及其应用

- 矩阵序列
- 矩阵级数
- 矩阵函数

■ 矩阵序列

定理1：设 $A^{(k)}, A \in C^{m\times n}$，则

（1）$\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = 0 \iff \forall \|\bullet\|, \lim\limits_{k\to\infty} \left\| A^{(k)} \right\| = 0$

（2）$\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A \iff \forall \|\bullet\|, \lim\limits_{k\to\infty} \| A^{(k)} - A \| = 0$

定义：若 $A_{n\times n}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0_{n\times n}$，称$A$为收敛矩阵

定理2：A为收敛矩阵 $\iff \rho(A) < 1$

■ 矩阵级数

幂级数： 对函数 $f(z)=\sum c_k z^k, \left(|z|<r\right)$ 方阵 $A_{n\times n}$，

构造矩阵幂级数 $f(A)=\sum c_k A^k$

定理6： （1） $\rho(A)<r \quad \Rightarrow \sum c_k A^k$ 绝对收敛

（2） $\rho(A)>r \quad \Rightarrow \sum c_k A^k$ 发散

第3章 矩阵分析及其应用

- 矩阵序列
- 矩阵级数
- 矩阵函数

定义：设一元函数 $f(z)$ 能展开为z的幂级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k \quad \left(|z|<r, r>0\right)$$

其中r>0表示该幂级数的收敛半径。当n阶矩阵A的谱半径$\rho(A)<r$时，把收敛的矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k$ 的和为f(A), 即 $f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k$

性质(代入规则)：若$f(z)=g(z)$, 则$f(A)=g(A)$.

例1：

$$e^{z}=1+\frac{1}{1!}z+\cdots+\frac{1}{k!}z^{k}+\cdots\quad(r=+\infty)$$

$$e^{A}=I+\frac{1}{1!}A+\cdots+\frac{1}{k!}A^{k}+\cdots\quad(\forall A_{n\times n})$$

$$\sin z=z-\frac{1}{3!}z^{3}+\cdots+(-1)^{k}\frac{1}{(2k+1)!}z^{(2k+1)}+\cdots\quad(r=+\infty)$$

$$\sin A=A-\frac{1}{3!}A^{3}+\cdots+(-1)^{k}\frac{1}{(2k+1)!}A^{(2k+1)}+\cdots\quad(\forall A_{n\times n})$$

例2：$f(z)=\dfrac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k \quad \left(|z|<1\right)$， $f(A)=\dfrac{1}{1-A}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k \quad \left(\rho(A)<1\right)$

例2：$f(z)=\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}z^k \quad \left(|z|<1\right)$， $f(A)=\dfrac{1}{1-A}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k \quad \left(\rho(A)<1\right)$

例3： $\forall A_{n\times n}, e^{jA}=\cos A+j\sin A \quad \left(j=\sqrt{-1}\right)$

$$\cos A=\frac{1}{2}\left(e^{jA}+e^{-jA}\right), \qquad \cos\left(-A\right)=\cos A$$

$$\sin A=\frac{1}{2j}\left(e^{jA}-e^{-jA}\right), \qquad \sin\left(-A\right)=\sin A$$

例2：$f(z)=\dfrac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k \quad \left(|z|<1\right)$，$\quad f(A)=\dfrac{1}{1-A}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k \quad \left(\rho(A)<1\right)$

例3：$\forall A_{n\times n}, e^{jA}=\cos A+j\sin A \quad \left(j=\sqrt{-1}\right)$

$$\cos A=\frac{1}{2}\left(e^{jA}+e^{-jA}\right),\qquad \cos\left(-A\right)=\cos A$$

$$\sin A=\frac{1}{2j}\left(e^{jA}-e^{-jA}\right),\qquad \sin\left(-A\right)=\sin A$$

证明：在 e^{jA} 中,视“jA”为整体,并按奇偶次幂分开

$$e^{jA}=\left[I+\frac{1}{2!}(jA)^2+\frac{1}{4!}(jA)^4+\cdots\right]+\left[\frac{1}{1!}(jA)+\frac{1}{3!}(jA)^3+\cdots\right]$$

$$=\cos A+j\sin A \quad \left(j=\sqrt{-1}\right)$$

例4： $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$， 求 e^{A}, e^{B} 及 e^{A+B}

例4： $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$， 求 e^{A}, e^{B} 及 e^{A+B}

解：$A^2 = A$： $e^{A}=I+\left(\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots\right)A = I+(e-1)A$

$$=\begin{bmatrix}e & e-1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$B^2 = B$： $e^{B}=I+\left(\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots\right)B = I+(e-1)B$

$$=\begin{bmatrix}e & 1-e\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

例4： $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$， 求 e^{A}, e^{B} 及 e^{A+B}

解： $A^2=A$： $e^{A}=I+\left(\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots\right)A=I+(e-1)A$

$$=\begin{bmatrix}e&e-1\\0&1\end{bmatrix}$$

$B^2=B$： $e^{B}=I+\left(\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots\right)B=I+(e-1)B$

$$=\begin{bmatrix}e&1-e\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} \qquad (A+B)^k=2^k\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$e^{A+B}=I+\left(\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\cdots\right)\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=I+(e^2-1)\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^2&0\\0&1\end{bmatrix}$$

注意：

$$e^{A+B}=\begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^A e^B=\begin{bmatrix} e^2 & -(e-1)^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad e^B e^A=\begin{bmatrix} e^2 & (e-1)^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{A+B}\neq e^A e^B \neq e^B e^A$$

定理7： $A_{n\times n}, B_{n\times n}, AB=BA \Rightarrow e^{A+B}=e^{A}e^{B}=e^{B}e^{A}$

证明： $e^{A}e^{B}=\left[I+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^{2}+\cdots\right]\left[I+\frac{1}{1!}B+\frac{1}{2!}B^{2}+\cdots\right]$

$$=I+\left(A+B\right)+\frac{1}{2!}\left(A^{2}+2AB+B^{2}\right)+\frac{1}{3!}\left(A^{3}+3AB^{2}+3A^{2}B^{2}+B^{3}\right)+\cdots$$

$$=I+\left(A+B\right)+\frac{1}{2!}\left(A+B\right)^{2}+\frac{1}{3!}\left(A+B\right)^{3}+\cdots$$

$$=e^{A+B}$$

同理： $e^{B}e^{A}=e^{B+A}=e^{A+B}$

注： （1） $e^{A}e^{-A}=e^{o}=I\Rightarrow\left(e^{A}\right)^{-1}=e^{-A}\quad\forall A$

（2） $\left(e^{A}\right)^{m}=e^{mA}\quad m=2,3,\cdots$

例5： $A_{n\times n}, B_{n\times n}, AB=BA$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

证明： $\cos A\cos B-\sin A\sin B=$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{jA}+e^{-jA}\right]\bullet\frac{1}{2}\left[e^{jB}+e^{-jB}\right]-\frac{1}{2j}\left[e^{jA}-e^{-jA}\right]\bullet\frac{1}{2j}\left[e^{jB}-e^{-jB}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[e^{j(A+B)}+\cdots+\cdots+e^{-j(A+B)}\right]+\frac{1}{4}\left[e^{j(A+B)}-\cdots-\cdots+e^{-j(A+B)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{j(A+B)}+e^{-j(A+B)}\right]$$

$$=\cos(A+B)$$

矩阵函数值的求法

1 待定系数法

2 数项级数求和法

3 对角形法

4 Jordan标准型法

矩阵函数值的求法

1.**待定系数法**:设n阶矩阵A 的特征多项式$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)$

如果首1多项式 $\psi(\lambda)=\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\ldots+a_{m-1}\lambda+a_m\ (1\le m\le n)$

满足 $\psi(\lambda)\,|\,\varphi(\lambda)$ ，分解

$$\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}\quad \lambda_i\ne\lambda_j,\sum m_i=m$$

因为λ_i 是A的特征值，所以 $|\lambda_i|\le\rho(A)<r$ ，从而

$f(\lambda_i)=\sum c_k\lambda_i^k$ 绝对收敛。

设 $f(z)==\sum c_k z^k=\psi(z)g(z)+r(z)$

$$r(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_{m-1}z^{m-1}$$

由 $\psi(\lambda_i)=0, \psi^{(1)}(\lambda_i)=0, \cdots, \psi^{(m_i-1)}(\lambda_i)=0$ 可得

$$r(\lambda_i)=f(\lambda_i) \qquad i=1,2,\cdots,s$$

$$r'(\lambda_i)=f'(\lambda_i)$$

$$\cdots$$

$$r^{(m_i-1)}(\lambda_i)=f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$$

解此方程组得出 $b_0, b_1, \cdots, b_{m-1}$。因为 $\psi(A)=O$ 所以

$$f(A)=\sum c_k A^k=\psi(A)g(A)+r(A) \quad =r(A)$$

即 $$f(A)=b_0 I+b_1 A+\cdots+b_{m-1}A^{m-1}$$

例6： $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$， 求 $e^{A}, e^{tA} \quad (t \in R)$

例6： $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$， 求 $e^{A}, e^{tA} \quad (t \in R)$

解：$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^{3}$

$$(A-2I)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},(A-2I)^{2}=O$$

取 $\psi(\lambda)=m(\lambda)=(\lambda-2)^{2}$

例6: $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{bmatrix}$, 求 $e^A, e^{tA} \quad (t\in R)$

解: $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3$

$$(A-2I)=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&-1&1\\1&-1&1\end{bmatrix},(A-2I)^2=O$$

取 $\psi(\lambda)=m(\lambda)=(\lambda-2)^2$

（1） $f(\lambda)=e^\lambda=\psi(\lambda)g(\lambda)+(a+b\lambda)$

$$f'(\lambda)=e^\lambda=[\psi(\lambda)g(\lambda)]'+b$$

$$\left.\begin{array}{l}f(2)=e^2:(a+2b)=e^2\\ f'(2)=e^2:b=e^2\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a=-e^2\\ b=e^2\end{array}\right.$$

$$e^A=e^2(A-I)=e^2\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$$

例6： $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{bmatrix}$， 求 $e^A, e^{tA}\quad (t\in R)$

（2） $f(\lambda)=e^{t\lambda}=\psi(\lambda)g(\lambda)+(a+b\lambda)$

$$f'(\lambda)=te^{t\lambda}=\left[\psi(\lambda)g(\lambda)\right]'+b$$

$$\left.\begin{aligned}&f(2)=e^{2t}:(a+2b)=e^{2t}\\&f'(2)=te^{2t}:b=te^{2t}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&a=(1-2t)e^{2t}\\&b=te^{2t}\end{aligned}\right.$$

$$e^{tA}=e^{2t}\left[(1-2t)I+tA\right]=e^{2t}\begin{bmatrix}1&0&0\\t&1-t&t\\t&-t&1+t\end{bmatrix}$$

矩阵函数值的求法

1 待定系数法

2 数项级数求和法

3 对角形法

4 Jordan标准型法

2. 数项级数求和法。

利用首一多项式 $\psi(\lambda)$ ，且满足 $\psi(A)=0$，即

$$A^m + b_1 A^{m-1} + \cdots + b_{m-1}A + b_m I = 0$$

或者 $A^m = k_0^{(0)} I + k_1^{(0)} A + \cdots + k_{m-1}^{(0)} A^{m-1} \quad \left(k_i^{(0)} = -b_{m-i}\right)$

可以求出 $A^{m+1} = A^m A = k_0^{(1)} I + k_1^{(1)} A + \cdots + k_{m-1}^{(1)} A^{m-1}$

$$\vdots$$

$$A^{m+l} = k_0^{(l)} I + k_1^{(l)} A + \cdots + k_{m-1}^{(l)} A^{m-1}$$

$$\vdots$$

于是 $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = \left(c_0 I + c_1 A + \cdots + c_{m-1} A^{m-1}\right) + c_m\left(k_0^{(0)} I + k_1^{(0)} A + \cdots + k_{m-1}^{(0)} A^{m-1}\right) + \cdots$

$$= \left(c_0 + \sum_{l=0}^{\infty} c_{m+l} k_0^{(l)}\right) I + \left(c_1 + \sum_{l=0}^{\infty} c_{m+l} k_1^{(l)}\right) A + \cdots + \left(c_{m-1} + \sum_{l=0}^{\infty} c_{m+l} k_{m-1}^{(l)}\right) A^{m-1}$$

例 3.6 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\pi & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\pi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，求 $\sin\boldsymbol{A}$.

例 3.6 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\pi & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\pi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，求 $\sin\boldsymbol{A}$.

解 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\lambda^4-\pi^2\lambda^2$. 由于 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，所以

$\boldsymbol{A}^4=\pi^2\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^5=\pi^2\boldsymbol{A}^3$，$\boldsymbol{A}^7=\pi^4\boldsymbol{A}^3$，…. 于是有

$$\sin\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}-\frac{1}{3\,!}\boldsymbol{A}^3+\frac{1}{5\,!}\boldsymbol{A}^5-\frac{1}{7\,!}\boldsymbol{A}^7+\frac{1}{9\,!}\boldsymbol{A}^9-\cdots=$$

$$\boldsymbol{A}-\frac{1}{3\,!}\boldsymbol{A}^3+\frac{1}{5\,!}\pi^2\boldsymbol{A}^3-\frac{1}{7\,!}\pi^4\boldsymbol{A}^3+\frac{1}{9\,!}\pi^6\boldsymbol{A}^3-\cdots=$$

$$\boldsymbol{A}+\left(-\frac{1}{3\,!}+\frac{1}{5\,!}\pi^2-\frac{1}{7\,!}\pi^4+\frac{1}{9\,!}\pi^6-\cdots\right)\boldsymbol{A}^3=$$

$$\boldsymbol{A}+\frac{\sin\pi-\pi}{\pi^3}\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}-\pi^{-2}\boldsymbol{A}^3=$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

矩阵函数值的求法

1 待定系数法

2 数项级数求和法

3 对角形法

4 Jordan标准型法

3. 对角阵法

设 $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \Lambda$， 则 $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$,

且有 $$\sum_{k=0}^{N} c_k A^k = P\sum_{k=0}^{N} c_k \Lambda^k P^{-1}$$

$$= P\operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{N} c_k \lambda_1^k, \cdots, \sum_{k=0}^{N} c_k \lambda_n^k\right)P^{-1}$$

于是

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = P \bullet \operatorname{diag}\left(f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)\right) \bullet P^{-1}$$

例8： $P^{-1}AP = \Lambda$ ：

$$e^{A} = P \bullet \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}\right) \bullet P^{-1}$$

$$e^{tA} = P \bullet \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}\right) \bullet P^{-1}$$

$$\sin A = P \bullet \mathrm{diag}\left(\sin \lambda_1, \cdots, \sin \lambda_n\right) \bullet P^{-1}$$

例 3.7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$，求 e^{A}，e^{tA}（$t \in \mathbf{R}$）及 $\cos \boldsymbol{A}$.

例 3.7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix}$,求 e^{A}, $\mathrm{e}^{tA}(t\in\mathbf{R})$ 及 $\cos\boldsymbol{A}$.

解 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$. 对应 $\lambda_1=-2$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$;对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 构造矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-2} & & \\ & \mathrm{e} & \\ & & \mathrm{e} \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-2} & 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{-2} & 0 \\ \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e} & 2\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e} & 0 \\ \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e} & 2\mathrm{e}^{-2} - 2\mathrm{e} & \mathrm{e} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{t\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & & \\ & \mathrm{e}^{t} & \\ & & \mathrm{e}^{t} \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-2t} & 2\mathrm{e}^{t} - 2\mathrm{e}^{-2t} & 0 \\ \mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{t} & 2\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{t} & 0 \\ \mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{t} & 2\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{t} \end{bmatrix}$$

$$\cos\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \cos(-2) & & \\ & \cos 1 & \\ & & \cos 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 2\cos 1 - \cos 2 & 2\cos 1 - 2\cos 2 & 0 \\ \cos 2 - \cos 1 & 2\cos 2 - \cos 1 & 0 \\ \cos 2 - \cos 1 & 2\cos 2 - 2\cos 1 & \cos 1 \end{bmatrix}$$

矩阵函数值的求法

1 待定系数法

2 数项级数求和法

3 对角形法

4 Jordan标准型法

4. Jordan 标准形法

设 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为 $\boldsymbol{J}$，则有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{J}_s \end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

1

可求得

$$f(\boldsymbol{J}_i)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\boldsymbol{J}_i^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\begin{bmatrix}\lambda_i^k & \mathrm{C}_k^1\lambda_i^{k-1} & \cdots & \mathrm{C}_k^{m_i-1}\lambda_i^{k-m_i+1}\\ & \lambda_i^k & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \mathrm{C}_k^1\lambda_i^{k-1}\\ & & & \lambda_i^k\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i)\\ & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i)\\ & & & f(\lambda_i)\end{bmatrix}$$

1

4.Jordan标准型法

设 $P^{-1}AP=J=\mathrm{diag}\left(J_1,\cdots,J_s\right),\ J_i=\lambda_1 I+I^{(1)}$

易证 $I^{(k)}I^{(1)}=I^{(1)}I^{(k)}=I^{(k+1)},I^{(m_i)}=O$

$$k\le m_i-1: J_i^k=\lambda_i^k I+C_k^1\lambda_i^{k-1}I^{(1)}+\cdots+C_k^{k-1}\lambda_i I^{(k-1)}+I^{(k)}$$

$$k\ge m_i: J_i^k=\lambda_i^k I+C_k^1\lambda_i^{k-1}I^{(1)}+\cdots+C_k^{m_i-1}\lambda_i^{k-m_i+1}I^{(m_i-1)}$$

$$f\left(J_i\right)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k J_i^k=f\left(\lambda_i\right)I+\frac{f'\left(\lambda_i\right)}{1!}I^{(1)}+\cdots+\frac{f^{(m_i-1)}\left(\lambda_i\right)}{(m_i-1)!}I^{(m_i-1)}$$

$$f\left(A\right)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k A^k=P\bullet\sum_{k=0}^{\infty}c_k J^k\bullet P^{-1}=P\bullet diag\left(f(J_1),\cdots,f(J_s)\right)\bullet P^{-1}$$

例 3.6 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\pi & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\pi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，求 $\sin\boldsymbol{A}$.

例 3.6 设 $A = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，求 $\sin A$.

例如，例 3.6 中的矩阵 A 是一个 Jordan 标准形，它的三个 Jordan 块为

$$J = \pi, \quad J_2 = -\pi, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

根据式(3.3.16)，求得

$$\sin J_1 = \sin \pi = 0$$
$$\sin J_2 = \sin(-\pi) = 0$$

例 3.6 设 $A=\begin{bmatrix}\pi & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\pi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，求 $\sin A$.

例如，例 3.6 中的矩阵 A 是一个 Jordan 标准形，它的三个 Jordan 块为

$$J_1=\pi,\quad J_2=-\pi,\quad J_3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

根据式(3.3.16)，求得

$$\sin J_1=\sin\pi=0$$

$$\sin J_2=\sin(-\pi)=0$$

也可用待定系数法计算

$$\sin J_3=\begin{bmatrix}\sin 0 & \frac{1}{1!}\cos 0\\ 0 & \sin 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\sin \boldsymbol{J}_1 = \sin \pi = 0$$

$$\sin \boldsymbol{J}_2 = \sin(-\pi) = 0$$

$$\sin \boldsymbol{J}_3 = \begin{bmatrix} \sin 0 & \frac{1}{1!}\cos 0 \\ 0 & \sin 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

再由式(3.3.17),可得(取 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$)

$$\sin \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \sin \boldsymbol{J}_1 & & \\ & \sin \boldsymbol{J}_2 & \\ & & \sin \boldsymbol{J}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = P \bullet \sum_{k=0}^{\infty} c_k J^k \bullet P^{-1} = P \bullet diag\left(f(J_1), \cdots, f(J_s)\right) \bullet P^{-1}$$

四、矩阵函数的性质

(1) $f(z)=f_1(z)+f_2(z) \Rightarrow f(A)=f_1(A)+f_2(A)$

$$f^{(l)}(\lambda_i)=f_1^{(l)}(\lambda_i)+f_2^{(l)}(\lambda_i)$$

$$\Rightarrow f^{(l)}(J_i)=f_1^{(l)}(J_i)+f_2^{(l)}(J_i)$$

$$f(A)=P\bullet\left\{\begin{bmatrix} f_1(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f_1(J_s)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} f_2(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f_2(J_s)\end{bmatrix}\right\}\bullet P^{-1}$$

$$=f_1(A)+f_2(A)$$

(2) $\quad f(z)=f_1(z)\bullet f_2(z)$

$$\Rightarrow f(A)=f_1(A)\bullet f_2(A)=f_2(A)\bullet f_1(A)$$

$$f_1(J_i)\bullet f_2(J_i)=\left[f_1\bullet I+f_1'\bullet I^{(1)}+\frac{f_1''}{2!}\bullet I^{(2)}+\cdots+\frac{f_1^{(m_i-1)}}{(m_i-1)!}\bullet I^{(m_i-1)}\right]\bullet$$

$$\left[f_2\bullet I+\frac{f'}{1!}\bullet I^{(1)}+\frac{f_2''}{2!}\bullet I^{(2)}+\cdots+\frac{f_2^{(m_i-1)}}{(m_i-1)!}\bullet I^{(m_i-1)}\right]$$

$$=(f_1f_2)\bullet I+\frac{f_1'f_2+f_1f_2'}{1!}\bullet I^{(1)}+\frac{f_1''f_2+2f_1'f'+f_1f_2''}{2!}\bullet I^{(2)}+\cdots$$

$$=(f_1f_2)\bullet I+\frac{(f_1f_2)'}{1!}\bullet I^{(1)}+\frac{(f_1f_2)''}{2!}\bullet I^{(2)}+\cdots+\frac{(f_1f_2)^{(m_i-1)}}{(m_i-1)!}\bullet I^{(m_i-1)}$$

$$=f(J_i)$$

$$f(A)=P\begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_s) \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=P\begin{bmatrix} f_1(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f_1(J_s) \end{bmatrix}P^{-1}\bullet P\begin{bmatrix} f_2(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f_2(J_s) \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=f_1(A)\bullet f_2(A)$$

作业（第五版）

1、定义：3.7

2、定理：3.7

3、例题：3.3-3.5、3.7

4、习题3.3：5、6

作业（第三版）

1、定义：3.7

2、定理：3.7

3、例题：3.3-3.5、3.7

4、习题3.3：5、6

下课，谢谢大家！