矩阵理论与方法

12月

内容提要 CONTENTS

- □ 课程信息
- □ 课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

  第3章 矩阵分析及其应用

函数矩阵的导数与积分

函数矩阵的导数

函数矩阵的积分

函数矩阵的导数

函数矩阵的积分

函数矩阵的导数与积分

定义: 如果矩阵 $A(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_{m\times n}$,的每一个元素 $a_{ij}(t)$ 是变量t 的可微函数，则$A(t)$关于t的导数(微商)定义为

$$\frac{dA(t)}{dt}=\left(a'_{ij}(t)\right)_{m\times n}，\quad \text{或者} \quad A'(t)=\left(a'_{ij}(t)\right)_{m\times n}$$

定理8：设 $A(t),B(t)$ 可导，则有

（1）$\dfrac{d}{dt}\left[A(t)+B(t)\right]=\dfrac{d}{dt}A(t)+\dfrac{d}{dt}B(t)$

（2）$A_{m\times n},f(t)$ 可导 $\dfrac{d}{dt}\left[f(t)A(t)\right]=f'(t)A(t)+f(t)A'(t)$

（3）$A_{m\times n},A_{n\times l}:\dfrac{d}{dt}\left[A(t)B(t)\right]=A'(t)B(t)+A(t)B'(t)$

定理8：设 $A(t),B(t)$ 可导，则有

（1）$\frac{d}{dt}\left[A(t)+B(t)\right]=\frac{d}{dt}A(t)+\frac{d}{dt}B(t)$

（2）$A_{m\times n}, f(t)$ 可导 $\frac{d}{dt}\left[f(t)A(t)\right]=f'(t)A(t)+f(t)A'(t)$

（3）$A_{m\times n}, A_{n\times l}:\frac{d}{dt}\left[A(t)B(t)\right]=A'(t)B(t)+A(t)B'(t)$

证明：（3）左 $=\frac{d}{dt}\left(\sum_k a_{ik}(t)b_{kj}(t)\right)_{m\times l}$

$$=\left(\sum_k a'_{ik}(t)b_{kj}(t)+\sum_k a_{ik}(t)b'_{kj}(t)\right)_{m\times l}$$

$$=\left(\sum_k a'_{ik}(t)b_{kj}(t)\right)_{m\times l}+\left(\sum_k a_{ik}(t)b'_{kj}(t)\right)_{m\times l}=\text{右}$$

定理9：设 $A_{n\times n}$ 为数量矩阵，则有

（1） $$\frac{d}{dt}e^{tA}=Ae^{tA}=e^{tA}A$$

（2） $$\frac{d}{dt}\cos(tA)=-A\bullet\sin(tA)=-\sin(tA)\bullet A$$

（3） $$\frac{d}{dt}\sin(tA)=A\bullet\cos(tA)=\cos(tA)\bullet A$$

定理9：设 $A_{n\times n}$ 为数量矩阵，则有

（1） $$\frac{d}{dt}e^{tA}=Ae^{tA}=e^{tA}A$$

（2） $$\frac{d}{dt}\cos(tA)=-A\bullet\sin(tA)=-\sin(tA)\bullet A$$

（3） $$\frac{d}{dt}\sin(tA)=A\bullet\cos(tA)=\cos(tA)\bullet A$$

证明：（1）$e^{tA}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tA)^{n}$ 绝对收敛

$$\left(e^{tA}\right)_{ij}=\delta_{ij}+\frac{t}{1!}(A)_{ij}+\frac{t^{2}}{2!}\left(A^{2}\right)_{ij}+\cdots+\frac{t^{k}}{k!}\left(A^{k}\right)_{ij}+\cdots$$

绝对收敛

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)_{ij}=0+\left(A\right)_{ij}+\frac{t}{1!}\left(A^2\right)_{ij}+\cdots+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\left(A^k\right)_{ij}+\cdots$$

绝对收敛

$$\frac{d}{dt}e^{tA}=A+\frac{t}{1!}A^2+\cdots+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k+\cdots$$

绝对收敛

$$=\begin{cases} A\left[I+\frac{t}{1!}A+\cdots+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1}+\cdots\right] & =Ae^{tA} \\ \left[I+\frac{t}{1!}A+\cdots+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1}+\cdots\right]A & =e^{tA}A \end{cases}$$

函数矩阵的导数与积分

函数矩阵的导数

函数矩阵的积分

定义: 如果矩阵 $A(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_{m\times n}$ 的每一个元素 $a_{ij}(t)$ 在 $[t_0,t]$ 上可积，称$A(t)$可积，记为

$$\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau=\left(\int_{t_0}^{t} a_{ij}(\tau)d\tau\right)_{m\times n}$$

定义: 如果矩阵 $A(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_{m\times n}$ 的每一个元素 $a_{ij}(t)$ 在 $[t_0,t]$ 上可积，称$A(t)$可积，记为

$$\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau=\left(\int_{t_0}^{t} a_{ij}(\tau)d\tau\right)_{m\times n}$$

（1）$\int_{t_0}^{t}\left[A(\tau)+B(\tau)\right]d\tau=\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t} B(\tau)d\tau$

（2）A为常数矩阵：$\int_{t_0}^{t}\left[A\bullet B(\tau)\right]d\tau=A\bullet\left[\int_{t_0}^{t} B(\tau)d\tau\right]$

B为常数矩阵：$\int_{t_0}^{t}\left[A(\tau)\bullet B\right]d\tau=\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right]\bullet B$

（3）设$a_{ij}(t)\in C[t_0,t_1],a\in[t_0,t_1]$ 则：$\dfrac{d}{dt}\int_{a}^{t} A(\tau)d\tau=A(t)$

（4）设 $a_{ij}'(t)\in C[t_0,t_1]$， 则：$\int_{t_0}^{t_1} A'(\tau)d\tau=A(t_1)-A(t_0)$

作业（第五版）

1、定义：3.9、3.10

2、定理：3.8、3.9

3、习题3.4：4

作业（第三版）

1、定义：3.9、3.10

2、定理：3.8、3.9

3、习题3.4：4

下课，谢谢大家！