矩阵理论与方法

10月

内容提要 CONTENTS

- 课程信息
- 课程介绍
- 矩阵理论与方法

  第1章 线性空间与线性变换

  1.2 线性变换及其矩阵

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\ldots,e_n$下求向量坐标

问题c

问题a

1､2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\ldots,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,\ldots,E_n$下的矩阵A $\quad T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)A$

4、T不一定有n个线型无关特征向量，则$A=P^{-1}BP$

问题b'

$$T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)P^{-1}BP$$

1.2 线性变换及其矩阵

问题b'

1、求$A = P^{-1}BP$，其中B是三角矩阵

2、求$A = PJP^{-1}$，其中J是Jordan标准型

$$P = ?$$

在复数域 $\mathbf{C}$ 上，求 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的 Jordan 标准形的步骤如下：

第一步：求特征矩阵的 $\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的初等因子组，设为

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{m_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 可能有相同的，指数 $m_1,m_2,\cdots,m_s$ 也可能有相同的，且

$$m_1+m_2+\cdots+m_s=n$$

第二步：写出每个初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 对应的 Jordan 块

$$\boldsymbol{J}_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{m_i\times m_i}\quad (i=1,2,\cdots,s)$$

1.2 线性变换及其矩阵

第三步：写出以这些 Jordan 块构成的 Jordan 标准形

$$J = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

第四步：

假如

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ & \lambda_2 & 1 \\ & & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

其中 $P = (x_1, x_2, x_3)$，于是有

1.2 线性变换及其矩阵

第四步： 假如

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ & \lambda_2 & 1\\ & & \lambda_2\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$，于是有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ & \lambda_2 & 1\\ & & \lambda_2\end{bmatrix}$$

即

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3)=(\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\lambda_2\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2+\lambda_2\boldsymbol{x}_3)$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_1&=\boldsymbol{0}\\(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_2&=\boldsymbol{0}\\(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_3&=-x_2\end{aligned}\right\}\qquad(1.2.39)$$

从而 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 依次是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1，λ_2 的特征向量．$\boldsymbol{x}_3$ 是式(1.2.39)最后一个非齐次线性方程组的解向量．求出这些解向量就得到了所需要的矩阵 $\boldsymbol{P}$.

第四步： 又如

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & 1\\ & & \lambda_1\end{bmatrix},\quad P=(x_1,x_2,x_3)$$

则有

$$A(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & 1\\ & & \lambda_1\end{bmatrix}$$

即

$$(Ax_1,Ax_2,Ax_3)=(\lambda_1x_1,x_1+\lambda_1x_2,x_2+\lambda_1x_3)$$

由此可得

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_1 I-A)x_1&=0\\(\lambda_1 I-A)x_2&=-x_1\\(\lambda_1 I-A)x_3&=-x_2\end{aligned}\right\}\qquad(1.2.40)$$

从而 x_1 是 A 的属于 λ_1 的特征向量．x_2，x_3 是式(1.2.40)后两个非齐次线性方程组的解向量．这样，又得到了所需要的矩阵 P.

在一般情况下，如果 λ_1 是 A 的 k 重特征值，则 x_1，x_2，…，x_k 可由解下面各方程组

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_1 I-A)x_1&=0\\(\lambda_1 I-A)x_i&=-x_{i-1}\quad(i=2,3,\cdots,k)\end{aligned}\right\}\qquad(1.2.41)$$

而获得．这样得到的 x_1，x_2，…，x_k 线性无关(其证明过程冗长，从略)，于是就得到 P. 称 x_2，x_3，…，x_k 为 A 的属于 λ_1 的**广义特征向量**.

1.2 线性变换及其矩阵

例 1.28 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准形.

解 求 $\lambda I-A$ 的初等因子组. 由于

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ \lambda-3 & (\lambda+1)(\lambda-3)+4 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}\rightarrow$$

1.2 线性变换及其矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

因此,所求的初等因子组为 $\lambda-2$, $(\lambda-1)^2$. 于是有

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解方程组

$$(2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_3 = -\boldsymbol{x}_2$$

得特征向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 及广义特征向量 $\boldsymbol{x}_3$ 依次为

$$\boldsymbol{x}_1 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{x}_2 = (1, 2, -1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{x}_3 = (0, 1, -1)^{\mathrm{T}}$$

故所求的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A \sim J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

有$P^{-1}AP = J$

1.2 线性变换及其矩阵

2017年4月 长治学院学报 Apr. ,2017
第34卷 第2期 Journal of Changzhi University Vol.34,No.2

Jordan标准形及其过渡矩阵的Jordan链求法

王 娇

（长治学院 数学系,山西 长治 046011）

摘 要:任何一个矩阵 A 总是相似于一个与其相应的Jordan标准形,文章就Jordan标准形的过渡矩阵的求法进行了探讨。介绍了矩阵 A 的根向量,即广义特征向量,并把的Jordan链与根向量一一对应起来,使得求Jordan链组归结为求根向量组。同时,给出根向量组的性质及求法,并总结Jordan标准形和变换矩阵的求法。

关键词:Jordan标准形;过渡矩阵;根向量;Jordan链

中图分类号:O151.21 **文献标识码**:A **文章编号**:1673-2014(2017)02-0030-03

（二）关于变换矩阵T

在求出A的**Jordan**标准型后，相应的相似变换矩阵就可以求得了。由 $A=TJT^{-1}$ 或 $AT=TJ$。将T按J的对角线上的**Jordan**块相应地分块为

$$T=\left(T_1,T_2,\cdots,T_k\right)$$

其中T_i为$n\times n_i$型矩阵。则

$$A\left(T_1,T_2,\cdots,T_k\right)=\left(T_1,T_2,\cdots,T_k\right)\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

显然，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 中可能有相同者。注意到，

$$AT_i=T_iJ_{n_i}(\lambda_i) \qquad \text{（2-44）}$$

如果记 $T_i=\left(t_1^i,t_2^i,\cdots,t_{n_i}^i\right)$，于是得到

1.2 线性变换及其矩阵

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{t}_1^i,\boldsymbol{t}_2^i,\cdots,\boldsymbol{t}_{n_i}^i\right)=\left(\boldsymbol{t}_1^i,\boldsymbol{t}_2^i,\cdots,\boldsymbol{t}_{n_i}^i\right)\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}，即$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}_1^i=\lambda_i\boldsymbol{t}_1^i \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{t}_2^i=\lambda_i\boldsymbol{t}_2^i+\boldsymbol{t}_1^i, \quad \boldsymbol{t}_j^i\in\boldsymbol{C}^n, \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{t}_{n_i}^i=\lambda_i\boldsymbol{t}_{n_i}^i+\boldsymbol{t}_{n_i-1}^i\end{cases} \qquad \begin{aligned} & i=1,2,\cdots,k, \\ & j=1,2,\cdots,n_i。\end{aligned}$$

我们称向量组 $\boldsymbol{t}_1^i,\boldsymbol{t}_2^i,\cdots,\boldsymbol{t}_{n_i}^i$ 为关于特征值 λ_i 的长度为 $\boldsymbol{n}_i$ 的 **Jordan** 链。

1.2 线性变换及其矩阵

显然，该**Jordan**链的第一个向量就是矩阵$\boldsymbol{A}$的关于特征值λ_i的特征向量，称其为链首。而链中的第j个向量则可由等价的方程

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{t}_j^i=\boldsymbol{t}_{j-1}^i,\quad j=2,3,\cdots,n_i \qquad \text{(2-45)}$$

但是应当注意:

1）**Jordan**链的链首 $\boldsymbol{t}_1^i$ 不仅要求是一个特征向量，而且还要求利用（**2-45**）可以求出**Jordan**链中的其它向量 $\boldsymbol{t}_2^i,\cdots,\boldsymbol{t}_{n_i}^i$（ 即不是任何一个特征向量都可作为**Jordan**链的链首）。

2）对应于某个特征值λ_i的**Jordan**链虽然一定存在， 但当与λ_i相对应的线性无关的特征向量的个数大于或等于2时，关于特征λ_i值的那些特征向量中的任何一个有可能都不能作为链首。

1.2 线性变换及其矩阵

因此我们必须从 λ_i的特征子空间中选取适当的向量作为**Jordan**链的链首。

例4 求出本节例**2**中将矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ 化成Jordan标准型的变换矩阵T。

解 由于已经得到

$$J=\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1)_{1\times1} & \\ & J_2(\lambda_2)_{2\times2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_1(-1)_{1\times1} & \\ & J_2(-1)_{2\times2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

则有

$$AT=TJ,\quad A\left(T_1\,T_2\right)=\left(T_1\,T_2\right)\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

令 $\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{t}^1\in\boldsymbol{R}^3$，$\boldsymbol{T}_2=\left(\boldsymbol{t}_1^2,\boldsymbol{t}_2^2\right)\in\boldsymbol{R}^{3\times2}$。首先求出 $\lambda_1=-1$ 所对应的线性无关的特征向量，其**Jordan**链的长度为**1**。即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}^1=-\boldsymbol{t}^1$，

亦即

$$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{t}^1=\boldsymbol{0}\iff\begin{pmatrix}4&0&8\\3&0&6\\-2&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\iff\begin{cases}x_1+2x_3=0\\x_1+2x_3=0\\x_1+2x_3=0\end{cases}$$

解之，线性无关的向量为：

$$\boldsymbol{t}_1^1=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\quad\text{和}\quad\boldsymbol{t}_2^1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

这样以 $\lambda_1=-1$长度为1的**Jordan**链的链首和链尾就可二者中任取其一。 即 $\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{t}_1^1$ 或 $\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{t}_2^1$。

1.2 线性变换及其矩阵

其次确定 $\lambda_2=-1$ 长度为2的**Jordan**链的链首。 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{J}$

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{t}_1^2\ \boldsymbol{t}_2^2\right)=\left(\boldsymbol{t}_1^2\ \boldsymbol{t}_2^2\right)\begin{pmatrix}-1 & 1\\ & -1\end{pmatrix}=\left(-\boldsymbol{t}_1^2,\boldsymbol{t}_1^2-\boldsymbol{t}_2^2\right)$$

首先求出 $\lambda_1=-1$所对应的线性无关的特征向量， 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}_1^2=-\boldsymbol{t}_1^2$，

亦即

$$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{t}_1^2=\boldsymbol{0}\iff\begin{pmatrix}4 & 0 & 8\\ 3 & 0 & 6\\ -2 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\iff\begin{cases}x_1+2x_3=0\\ x_1+2x_3=0\\ x_1+2x_3=0\end{cases}$$

解之，线性无关的向量为:

$$\boldsymbol{t}_{11}^2=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\quad 和\quad \boldsymbol{t}_{12}^2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

不难验证，若以 $\boldsymbol{t}_{11}^2$ 或 $\boldsymbol{t}_{12}^2$ 为链首时都无法求出另外一个向量来构成**Jordan**链。即

$$(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}_{11}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_3=0 \\ x_1+2x_3=1 \\ x_1+2x_3=0 \end{cases}，无解；$$

$$(-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}_{12}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_3=2 \\ x_1+2x_3=0 \\ x_1+2x_3=-1 \end{cases}，无解。$$

为此，必须找出 $\boldsymbol{y}\in \mathrm{span}\{\boldsymbol{t}_{11}^2,\boldsymbol{t}_{12}^2\}$ 使得 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}$ 有解。

1.2 线性变换及其矩阵

为此，令 $\boldsymbol{y}=k_1\boldsymbol{t}_{11}^2+k_2\boldsymbol{t}_{12}^2=\left(2k_2,k_2,-k_1\right)^T$，由

$$\left(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{y}\right)=\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{y}\right)=\begin{pmatrix}4&0&8&2k_1\\3&0&6&k_2\\-2&0&-4&-k_1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&2&\dfrac{k_1}{2}\\1&0&2&\dfrac{k_2}{3}\\1&0&2&\dfrac{k_1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&\dfrac{k_1}{2}\\0&0&0&\dfrac{k_1}{2}-\dfrac{k_2}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

为使 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}$ 有非零解， 只须k_1 、k_2满足$2k_2-3k_1=0$即可。

1.2 线性变换及其矩阵

从而可取 $k_1=2$, $k_2=3$, 此时 $\boldsymbol{y}=(4,3,-2)^T$为链首，由如下方程组：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}\mid\boldsymbol{y})\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

解出 $\boldsymbol{z}=(1,0,0)^T$作为链尾。

则变换矩阵$\boldsymbol{T}$ 为:

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2),\ \boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{t}_1^1=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{T}_2=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=\begin{pmatrix}4&1\\3&0\\-2&0\end{pmatrix}$$

链首 链尾 链首 链尾

或

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2),\ \boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{t}_2^1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{T}_2=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=\begin{pmatrix}4&1\\3&0\\-2&0\end{pmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

即有，变换矩阵：

$$T=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\qquad T^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{2}{3} & -1\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

或

$$T=\begin{pmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}\qquad T^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\ldots,e_n$下求向量坐标

问题c

1、2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\ldots,E_n$下的坐标

问题a

3、求T在基$E_1,\ldots,E_n$下的矩阵A

$$T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)A$$

4、A相似于若尔当标准型，则$A=PJP^{-1}$

问题b'

$$T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)PJP^{-1}$$

1.2 作业（第五版）

1、例题：P52 例1.28

1.2 作业（第三版）

1、例题：P73 例1.28

下课，谢谢大家！