2019-2020

过期

一．填空题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=$ ________.

答：e^{-2}

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x^3}-1}{\ln(1+x)\arctan x^2}=$ ________.

答：$\ln 2$

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{2020}{n}$，则 $f'(0)=$ ________.

答：2020

4. 设 $y=\dfrac{x^3}{1+x}$，当正整数 $n\geq 3$ 时，$y^{(n)}=$ ________.

答：$(-1)^{n-1}\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

5. 函数 $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 的马克劳林公式中，x^5 的系数为________.

答：$\dfrac{2}{5}$

6. 设函数 $F(x)=\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt$ 是 x^n 的同阶无穷小量，则 $n=$ ______.

答：4

7. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x^n+10)}=$ ________.

答：$\dfrac{1}{10}\left(\ln|x|-\dfrac{1}{n}\ln|x^n+10|\right)+C$

8. $\int_{-1}^{1}[x^2\sin x^5+\ln(2+x)]dx=$____________________.

答：$3\ln 3-2$

9. $\int_{0}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+2x+5}=$____________________.

答：$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1}{2}$

10. 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为__________________________.

答：$y=C_2+\dfrac{C_1}{x^2}$

二（10 分） 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内连续，且有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[f(x+1)+1+3\sin^2 x]}{\sqrt{1-x^2}-1}=-4$$

(1)求 $f(1)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)}{x^2}$；

(2)求 $f'(1)$，若又设 $f''(1)$ 存在，求 $f''(1)$.

解 由题设条件知 $\lim\limits_{x\to 0}\ln[f(x+1)+1+3\sin^2 x]=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}[f(x+1)+3\sin^2 x]=0 \Rightarrow f(1)=0 \qquad \textbf{（3 分）}$$

又在 $x=0$ 的某空心邻域内，$f(x+1)+3\sin^2 x\neq 0$，利用等价无穷小替换，当 $x\to 0$ 时，

$$\ln[1+f(x+1)+3\sin^2 x]\sim f(x+1)+3\sin^2 x$$

$$\sqrt{1-x^2}-1\sim -\frac{1}{2}x^2$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[f(x+1)+1+3\sin^2 x]}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)+3\sin^2 x}{-x^2/2}=-4$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x+1)+3\sin^2 x}{x^2}\right]=2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x^2}=-1$$ **（7 分）**

(2) $f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-(1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-(1)}{x^2}x=(-1)\cdot 0=0$

由 $f''(1)$ 存在,推出 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内可导

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x+1)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x+1)-f'(1)}{x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}f''(1)=-1$$
$$f''(1)=-2$$ **（10 分）**

三（8 分）. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数, 且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$, 若 $af(x)+bf(2x)-f(0)$ 在 $x\to 0$ 时是比 x 高阶的无穷小量, 试求 a,b 的值.

解 因为 $\lim_{x\to 0}[af(x)+bf(2x)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0$,

而 $f(0)\neq 0 \Rightarrow a+b-1=0$ （1） **（3 分）**

又因为 $\lim_{x\to 0}\frac{af(x)+bf(x)-f(0)}{x}=0$, 利用洛必达法则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{af'(x)+2bf'(x)}{1}=(a+2b)f'(0)=0$$

而 $f'(0)\neq 0 \Rightarrow a+2b=0$. （2） **（7 分）**

由(1), (2)解得 $a=2, b=-1$. **（8 分）**

四（10 分） 证明不等式 $\dfrac{2x}{x+2}<\ln(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ 当 $x\in(0,+\infty)$ 时成立.

证 令 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}-\ln(1+x),\quad x\geq 0$，则 $f(0)=0$.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{(x+1)-2\sqrt{x+1}+1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}>0,\forall x>0$$ **（3 分）**

由此可见 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 严格单调增加，从而当 $x>0$ 时，有

$f(x)>f(0)=0$，即得 $\ln(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$. **（5 分）**

令 $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{x+2},x\in[0,+\infty)$，则 $g(0)=0$.

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+4-4x-4}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}>0,\quad \forall x\in(0,+1)$$ **（8 分）**

于是 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增加, 从而 $g(x)>g(0)=0,\forall x>0$，故得

$$\frac{2x}{x+2}<\ln(1+x)$$

综上证明了所欲证不等式. **（10 分）**

五(12 分). 求下列不定积分.

(1) $\displaystyle\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$; (2) $\displaystyle\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$.

解 (1) $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx = \int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x dx$

$$= \int \frac{1}{x^2}\arctan x dx - \int \frac{1}{1+x^2}\arctan x dx$$

$$= \int\left(-\frac{1}{x}\right)'\arctan x dx - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 \qquad \text{(3 分)}$$

$$= -\frac{1}{x}\arctan x + \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

$$= -\frac{1}{x}\arctan x + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C \qquad \text{(6 分)}$$

(2) $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx = \int \frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)}dx = \int \frac{1}{xe^x(1+xe^x)}d(xe^x)$

(9 分)

$$= \int\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{1+xe^x}\right)d(xe^x) = \ln\frac{xe^x}{1+xe^x} + C \qquad \text{(12 分)}$$

六(12 分). 已知曲线 $y = a\sqrt{x}$ $(a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0, y_0) 处有公共切线, 求

(1) 常数 a 及切点 (x_0, y_0);

(2) 两曲线与 x 轴围成的平面图形 D 的面积;

(3) 平面图形 D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

解 (1) 两函数的导数分别为 $y' = \frac{a}{2\sqrt{x}}$ 和 $y' = \frac{1}{2x}$.

由于两曲线在点 (x_0, y_0) 有公共切线, 可得

$$\frac{a}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2x_0} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{a^2}$$

依题意代入两函数得 $a\sqrt{\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{a^2}\Rightarrow a=\frac{1}{e}$. **(2 分)**

从而 $x_0=e^2, y_0=a\sqrt{x_0}=ae=1$，所以切点 $(e^2,1)$. **(4 分)**

(2) 两曲线所围平面图形 D 的面积为

$$S=\int_0^{e^2}\frac{1}{e}\sqrt{x}dx-\int_1^{e^2}\frac{1}{2}\ln xdx$$

$$=\frac{1}{e}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{e^2}-\frac{1}{2}\left(x\ln x-x\right)\Big|_1^{e^2}=\frac{1}{6}e^2-\frac{1}{2}$$ **(8 分)**

(3) D 绕 x 轴所得旋转体的体积为

$$V_x=\pi\int_0^{e^2}\left(\frac{\sqrt{x}}{e}\right)^2dx-\pi\int_1^{e^2}\left(\ln\sqrt{x}\right)^2dx=\frac{\pi}{e^2}\int_0^{e^2}xdx-\frac{\pi}{4}\int_1^{e^2}\ln^2 xdx$$

$$=\frac{\pi}{e^2}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^{e^2}-\frac{\pi}{4}\left[x\ln^2 x\Big|_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x(\ln^2 x)'dx\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}e^2-\frac{\pi}{4}\left[4e^2-2\int_1^{e^2}\ln xdx\right]=\frac{\pi}{2}$$ **(12 分)**

七(12 分). 求微分方程 $y''-2y'=e^{2x}+4x$ 的通解.

解 特征方程为 $\lambda^2-\lambda=0$，特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2$，于是对应的齐次方程的通解为 $\overline{y}=C_1+C_2e^{2x}$. **(4 分)**

对于微分方程 $y''-2y'=e^{2x}$. 因为$\alpha=2$是特征根, 所以该方程有形如 $y_1^*=axe^{2x}$ 的特解. 代入方程解得 $a=\frac{1}{2}$，所以 $y_1^*=\frac{1}{2}xe^{2x}$. **(7 分)**

对于微分方程 $y''-2y'=4x$，因为$\alpha=0$是特征值. 所以该方程有形如 $y_2^*=ax^2+bx$ 的特解.

代入方程解得 $a=-1,b=-1$，所以 $y_2^*=-x^2-x$.　　　　　　**(10 分)**

所以微分方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}-x^2-x, C_1, C_2 \text{ 为任意常数.} \qquad \textbf{(12 分)}$$

八(6 分)．设 $0\le a<x<b$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

证　首先，根据拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad \textbf{(2 分)}$$

因此只要证明 $\exists\eta\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$,等价于

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\eta-\frac{a+b}{2}f'(\eta)=0$$

令
$$F(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{b+a}{2}f(x) \qquad \textbf{(4 分)}$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且

$$F(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{a^2}{2}-\frac{a+b}{2}f(a)=\frac{a^2f(b)-b^2f(a)}{2(b-a)}$$

$$F(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{b^2}{2}-\frac{b+a}{2}f(b)=\frac{a^2f(b)-b^2f(a)}{2(b-a)}$$

因此 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理条件，所以 $\exists\eta\in(a,b)$，使 $F'(\eta)=0$，

由此得
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta). \qquad \textbf{(6 分)}$$