矩阵理论与方法

12月

内容提要 CONTENTS

- □ 课程信息
- □ 课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

  第4章 矩阵分解

线性方程组求解

- 工程中许多问题涉及到线性方程组的求解
- 设 n 阶线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

或 $Ax = b$

其中 $A = (a_{ij})_{n\times n} \quad b = (b_j)_{n\times 1} \quad x = (x_i)_{n\times 1}$

⑩ 矩阵满秩 rank(A)=n

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

求矩阵A的秩：$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

求矩阵A的秩：$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}$

$$A \xrightarrow{r} A^{(1)} \xrightarrow{r} A^{(2)} = U$$

$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}$ $A^{(1)}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 5 & 0\end{bmatrix}$

求矩阵A的秩：$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$A \xrightarrow{r} A^{(1)} \xrightarrow{r} A^{(2)} = U$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad A^{(1)}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad A^{(2)}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \xrightarrow{r} A^{(1)} \xrightarrow{r} A^{(2)} = U$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{(1)} = L_1 A$$

第4章 矩阵分解

$$A \xrightarrow{r} A^{(1)} \xrightarrow{r} A^{(2)} = U$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{(2)} = L_2 A^{(1)}$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}\quad A^{(1)}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 5 & 0\end{bmatrix}\quad A^{(2)}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$L_1=\begin{bmatrix}1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ -1 & & 1\end{bmatrix}\quad L_2=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{(2)}=L_2L_1A$$

$$Ax = b,\quad 求\, x = ?$$

上三角矩阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad 0 \quad + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\ \cdots\cdots\cdots\ \cdots\cdots\cdots\ \cdots\cdots\cdots\ \cdots\cdots \\ \quad 0 \ + \ 0 \ + \ldots + 0 + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

上三角矩阵

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 + \dots + 0 + a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n = b_{n-1} \\ 0 + \dots + 0 + 0 + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - a_{nn}x_n}{a_{n-1n-1}} \\ x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

第4章 矩阵分解

1、高斯消去法

2、矩阵的三角分解

第4章 高斯消去法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

解　$Ax = b$

解 $Ax = b$

1、求： $L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1 A = U$

2、计算： $L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1 Ax = L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1 b$

3、解： $Ux = B$

第4章 高斯消去法

- 3 对应的方程组变成：

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases} \qquad （式2）$$

对此方程组进行回代， 就可求出方程组的解。

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_i = \dfrac{\left(b_i^{(i)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j\right)}{a_{ii}^{(i)}}, i = n-1, n-2, \cdots, 1 \end{cases} \qquad （式3）$$

元素$a_{kk}^{(k)}$称为约化的主元素。

• Gauss消去法计算量

1、消元计算

第k步	除法次数	乘法次数(消元)	乘法次数($b^{(k)}$)	加减法次数
1	$n-1$	$(n-1)^2$	$n-1$	
2	$n-2$	$(n-2)^2$	$n-2$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$n-1$	1	1	1	
合计	$n(n-1)/2$	$n(n-1)(2n-1)/6$	$n(n-1)/2$	~~忽略~~

$(n-k)^2$

$(n-k)$

完成全部消元计算共需要作

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}\text{次乘除法运算}$$

2、回代计算

完成回代计算共需要作

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k)=\frac{n(n+1)}{2}$$

次乘除法运算

则高斯消去法解 $Ax=b$的计算量为

$$\frac{n(n+1)}{2}+(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6})=\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}=O(n^3)$$

第4章 高斯消去法

- 乘除法耗时大大多于加减法耗时，故高斯消元法的计算量为$O(n^3)$。
- n=20时,顺序Gauss消去法只需3060次乘除法运算。
- 顺序*Gauss*消去法通常也简称为*Gauss*消去法。

第4章 矩阵分解

1、高斯消去法

2、矩阵的三角分解

第4章 矩阵LU分解

解 $Ax = b$

1、求： $L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1 A = U$

2、令： $L = L_1^{-1}\cdots L_{n-2}^{-1}L_{n-1}^{-1}$

3、有： $A = LU$

4、计算： $LUx = b$

5、解： $Ly = b$，$Ux = y$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_1 & 1 & \\ l_2 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -l_1 & 1 & \\ -l_2 & & 1 \end{bmatrix}$$

例：求矩阵A的LU分解：$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

求矩阵A的LU分解：$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$A \xrightarrow{r} A^{(1)} \xrightarrow{r} A^{(2)} = U$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad A^{(1)}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad A^{(2)}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第4章 矩阵LU分解

$$A \xrightarrow{\quad r \quad} A^{(1)} \xrightarrow{\quad r \quad} A^{(2)} = U$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \dfrac{5}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\dfrac{1}{2} & 1 & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{(1)} = L_1 A$$

$$A \xrightarrow{\quad r \quad} A^{(1)} \xrightarrow{\quad r \quad} A^{(2)} = U$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{(2)} = L_2 A^{(1)}$$

第4章 矩阵LU分解

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&2&1\\2&4&3\end{bmatrix}\quad A^{(1)}=\begin{bmatrix}2&-1&3\\0&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\0&5&0\end{bmatrix}\quad A^{(2)}=\begin{bmatrix}2&-1&3\\0&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$L_1=\begin{bmatrix}1&&\\-\frac{1}{2}&1&\\-1&&1\end{bmatrix}\quad L_2=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&-2&1\end{bmatrix}$$

$$U=A^{(2)}=L_2L_1A$$

第4章 矩阵LU分解

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}\qquad L_1=\begin{bmatrix}1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ -1 & & 1\end{bmatrix}\qquad L_2=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad L_1^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 1 & & 1\end{bmatrix}\qquad L_2^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$L=L_1^{-1}L_2^{-1}\qquad A=LU$$

补充 行主元LU分解

例2： $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & -\dfrac{1}{2} & 1\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$

补充 行主元LU分解

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & -\frac{1}{2} & 1\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}\qquad \widetilde{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & 3\\ 2 & 4 & 1\end{bmatrix}\qquad A^{(1)}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

$$P_1=\begin{bmatrix}0 & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & 0\end{bmatrix}\qquad L_1=\begin{bmatrix}1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ -1 & & 1\end{bmatrix}$$

$$\widetilde{A}^{(1)}=AP_1\qquad A^{(1)}=L_1\widetilde{A}^{(1)}\qquad A^{(1)}=L_1AP_1$$

补充 行主元LU分解

$$A^{(1)}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 5 & 1\end{bmatrix}\qquad \widetilde{A}^{(2)}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 5\end{bmatrix}\qquad A^{(2)}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$P_2=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0 & 1\\ & 1 & 0\end{bmatrix}\qquad L_2=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & -\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}$$

$$\widetilde{A}^{(2)}=A^{(1)}P_2\qquad A^{(2)}=L_2\widetilde{A}^{(2)}\qquad A^{(2)}=L_2A^{(1)}P_2$$

补充 行主元LU分解

解 $Ax = b$

1、求： $L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1 AP_1\cdots P_{n-2}P_{n-1} = U$

2、令： $L = L_1^{-1}\cdots L_{n-2}^{-1}L_{n-1}^{-1}$， $P = P_1\cdots P_{n-2}P_{n-1}$

3、有： $A = LUP^{-1}$， $P^{-1} = P_{n-1}P_{n-2}\cdots P_1$

2、计算： $LUP^{-1}x = b$

3、解： $Ly = b$， $Uz = y$， $x = Pz$

补充 列主元高斯消去/列主元LU分解

例3：$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -\dfrac{1}{2} & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

补充 列主元高斯消去/列主元LU分解

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & -\frac{1}{2} & 1\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}\qquad \widetilde{A}^{(1)}=\begin{bmatrix}3 & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}\qquad A^{(1)}=\begin{bmatrix}3 & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & \frac{25}{6} & \frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

$$P_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1\end{bmatrix}\qquad L_1=\begin{bmatrix}1 & & \\ 0 & 1 & \\ -\frac{1}{3} & & 1\end{bmatrix}$$

$$\widetilde{A}^{(1)}=P_1A\qquad A^{(1)}=L_1\widetilde{A}^{(1)}\qquad A^{(1)}=L_1P_1A$$

补充 列主元高斯消去/列主元LU分解

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{25}{6} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \quad \widetilde{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{25}{6} & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{25}{6} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \frac{6}{25} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{A}^{(2)} = P_2 A^{(1)} \qquad A^{(2)} = L_2 \widetilde{A}^{(2)} \qquad A^{(2)} = L_2 P_2 A^{(1)}$$

补充 列主元高斯消去/列主元LU分解

解 $Ax = b$

1、求： $L_3P_3L_2P_2L_1P_1A = U$

2、求： $L_3P_3L_2P_2L_1P_2P_3\cdot(P_3P_2P_1)A = U$

3、记为： $L_3P_3L_2P_2L_1P_2P_3\cdot PA = U,$

令: $L = P_3P_2L_1^{-1}P_2L_2^{-1}P_3L_3^{-1}$

4、有： $PA = LU$, 计算 $PAx = Pb$

5、计算： $LUx = Pb,$ 解： $Ly = Pb$， $Ux = y$

补充 列主元高斯消去/列主元LU分解

$Matlab$中$lu()$函数：

$$[L,U,P]=lu(A)$$

满足$PA=LU$

第4章 矩阵分解

1、LDU分解

2、QR分解

3、满秩分解

4、SVD分解

$$A = LU$$

定义**4.1** 如果n阶矩阵A能够分解为一个下三角矩阵L和一个上三角矩阵U的乘积，则称其为三角分解或LU分解。如果方阵A可分解成$A=LDU$,其中L为一个单位下三角矩阵，D为对角矩阵，则称A可作LDU分解。

定理4.1 矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 的分解式唯一的充要条件为A的顺序主子式 $\Delta_k\neq 0$ 。 $A=LDU$，其中L是单位下三角矩阵，U是单位上三角矩阵，D是对角矩阵，并且

$$D=\operatorname{diag}\left(d_1,d_2,\cdots,d_n\right),d_k=\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}},k=1,2,\cdots,n\quad\left(\Delta_0=1\right)$$

推论 设A是n阶非奇异矩阵，A有三角分解$A=LU$，

的充要条件是A的顺序主子式 $\Delta_k\neq 0\quad k=1,2,\cdots,n$

例：求矩阵A的LDU分解：$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

求矩阵A的LDU分解：$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix}$

$$A \xrightarrow{r} A^{(1)} \xrightarrow{r} A^{(2)} = U$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix} \qquad A^{(1)}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 5 & -1\end{bmatrix} \qquad A^{(2)}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A \xrightarrow{\ r\ } A^{(1)} \xrightarrow{\ r\ } A^{(2)} = U$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \dfrac{5}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\dfrac{1}{2} & 1 & \\ -1 & & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{(1)} = L_1 A$$

第4章 矩阵LU分解

$$A \xrightarrow{r} A^{(1)} \xrightarrow{r} A^{(2)} = U$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{(2)} = L_2 A^{(1)}$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}\quad A^{(1)}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 5 & -1\end{bmatrix}\quad A^{(2)}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$L_1=\begin{bmatrix}1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ -1 & & 1\end{bmatrix}\quad L_2=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{(2)}=L_2L_1A$$

第4章 矩阵LU分解

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$L_1=\begin{bmatrix}1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ -1 & & 1\end{bmatrix}$$

$$L_2=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{(2)}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$L_1^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 1 & & 1\end{bmatrix}$$

$$L_2^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$L=L_1^{-1}L_2^{-1}$$

$$A=LA^{(2)}$$

第4章 矩阵LU分解

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = LA^{(2)} = LDU$$

定义 4.2 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有唯一的 LDU 分解．若把 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LDU}$ 中的 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{U}$ 结合起来，并且用 $\hat{\boldsymbol{U}}$ 来表示，就得到唯一的分解

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{DU})=\boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{U}} \tag{4.1.23}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的 **Doolittle 分解**；若把 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LDU}$ 中的 $\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 结合起来，并且用 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 来表示，就得到唯一的分解

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{LD})\boldsymbol{U}=\hat{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{U} \tag{4.1.24}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的 **Crout 分解**．

当 $\boldsymbol{A}$ 为实对称正定矩阵时

$$\widetilde{\boldsymbol{D}} = \mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \cdots, \sqrt{d_n})$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\widetilde{\boldsymbol{D}}^2\boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\widetilde{\boldsymbol{D}}^2\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{L}\widetilde{\boldsymbol{D}})(\boldsymbol{L}\widetilde{\boldsymbol{D}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \qquad (4.1.32)$$

定义 4.3 称式(4.1.32)为实对称正定矩阵的 **Cholesky 分解**（**平方根分解、对称三角分解**）.

当 $\boldsymbol{A}$ 为实对称正定矩阵时，$\Delta_k > 0$ $(k=1, 2, \cdots, n)$. 于是 $\boldsymbol{A}$ 有唯一的 LDU 分解，即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LDU}$$

其中，$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，且 $d_i > 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$. 令

$$\widetilde{\boldsymbol{D}} = \mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \cdots, \sqrt{d_n})$$

于是有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\widetilde{\boldsymbol{D}}^2\boldsymbol{U}$$

由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$ 得到

$$\boldsymbol{L}\widetilde{\boldsymbol{D}}^2\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{D}}^2\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$$

再由分解的唯一性有

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$$

因而有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\widetilde{\boldsymbol{D}}^2\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}} \tag{4.1.31}$$

或者

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\widetilde{\boldsymbol{D}}^2\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{L}\widetilde{\boldsymbol{D}})(\boldsymbol{L}\widetilde{\boldsymbol{D}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{GG}^{\mathrm{T}} \tag{4.1.32}$$

这里 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{L}\widetilde{\boldsymbol{D}}$ 是下三角矩阵.

定义 4.3 称式(4.1.32)为实对称正定矩阵的 **Cholesky 分解（平方根分解、对称三角分解）**.

作业（第五版）

1、定义：4.1、4.2、4.3

2、例题：4.1、4.2

3、习题4.1：1、4

作业（第三版）

1、定义：4.1、4.2、4.3

2、例题：4.1、4.2

3、习题4.1：1、4

下课，谢谢大家！