矩阵理论与方法

11月

内容提要 CONTENTS

- □ 课程信息
- □ 课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

  第1章 线性空间与线性变换

  1.3 两个特殊的线性空间

1.3 两个特殊的线性空间

问题c

V是数域K上的线性空间，对任意$x \in V$

求一组基$e_1,\ldots,e_n$，和x在这组基下的坐标

解:0、定义V的内积运算(X, Y)

1）内积

1、求出V的一组基$e_1,\ldots,e_n$

2）Schmidt正交化方法

使得$(e_i, e_i) = 1, (e_i, e_j) = 0, i \neq j$

2、$x = k_1 e_1 + k_2 e_2 + \ldots + k_n e_n$，求$k_1, k_2, \ldots, k_n$

$\therefore k_i = (x, e_i)$,

1.3 两个特殊的线性空间

1）内积

2）Schmidt正交化方法

1.3 两个特殊的线性空间

定义 1. 26　如果欧氏空间中一组非零向量两两正交,则称为**正交向量组**.

1.3 两个特殊的线性空间

定义 1.26 如果欧氏空间中一组非零向量两两正交，则称为**正交向量组**.

定理 1.32 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是正交向量组，则它们必线性无关.

1.3 两个特殊的线性空间

定义 1.26 如果欧氏空间中一组非零向量两两正交，则称为**正交向量组**.

定理 1.32 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是正交向量组，则它们必线性无关.

证 假定它们之间有线性关系

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_m x_m = 0$$

欲证明一切 $k_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 都必须为零. 为此，用 $x_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 与上式两端作内积，得到

$$k_i (x_i, x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

由于 $x_i \neq 0$，故 $(x_i, x_i) \neq 0$，从而 $k_i = 0\ (i = 1, 2, \cdots, m)$.

证毕

1.3 两个特殊的线性空间

定义 1.27 在欧氏空间 V^n 中，由 n 个非零向量组成的正交向量组称为 V^n 的**正交基**；由单位向量组成的正交基称为**标准正交基**或**法正交基**.

设 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 为标准正交基，

$$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{当 } i = j \text{ 时}) \\ 0 & (\text{当 } i \neq j \text{ 时}) \end{cases}$$

1.3 两个特殊的线性空间

定理 1.33 对于欧氏空间 V^n 的任一基 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$，都可找到一个标准正交基 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$. 换言之，任一非零欧氏空间都有正交基和标准正交基.

施密特正交化

定理 1.33 对于欧氏空间 V^n 的任一基 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$，都可找到一个标准正交基 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$. 换言之，任一非零欧氏空间都有正交基和标准正交基.

证 应用下面论述的关于向量组的 Schmidt 正交化方法（或过程），给出定理的构造性证明. 为此取 $\boldsymbol{y}_1' = \boldsymbol{x}_1$，作为所求正交基中的第一个向量.

施密特正交化

定理 1.33 对于欧氏空间 V^n 的任一基 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$，都可找到一个标准正交基 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$. 换言之，任一非零欧氏空间都有正交基和标准正交基.

$$\boldsymbol{y}_1' = \boldsymbol{x}_1$$

再令

$$\boldsymbol{y}_2' = \boldsymbol{x}_2 + k\boldsymbol{y}_1'$$

由正交条件$(\boldsymbol{y}_2', \boldsymbol{y}_1') = 0$来决定待定常数 k.

施密特正交化

定理 1.33 对于欧氏空间 V^n 的任一基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，都可找到一个标准正交基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 换言之，任一非零欧氏空间都有正交基和标准正交基.

$$y_1' = x_1$$

再令

$$y_2' = x_2 + ky_1'$$

由正交条件 $(y_2', y_1') = 0$ 来决定待定常数 k.

$$(x_2 + ky_1', y_1') = (x_2, y_1') + k(y_1', y_1') = 0$$

得

$$k = -\frac{(x_2, y_1')}{(y_1', y_1')}$$

定理 1.33 对于欧氏空间 V^n 的任一基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，都可找到一个标准正交基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 换言之，任一非零欧氏空间都有正交基和标准正交基.

$$y_1' = x_1 \qquad y_2' = x_2 + k y_1'$$

$$(x_2 + k y_1', y_1') = (x_2, y_1') + k(y_1', y_1') = 0$$

得
$$k = -\frac{(x_2, y_1')}{(y_1', y_1')}$$

又令
$$y_3' = x_3 + k_2 y_2' + k_1 y_1'$$

再由正交条件 $(y_3', y_2') = 0$ 及 $(y_3', y_1') = 0$ 来决定出 k_1 和 k_2 为

$$k_2 = -\frac{(x_3, y_2')}{(y_2', y_2')}, \quad k_1 = -\frac{(x_3, y_1')}{(y_1', y_1')}$$

定理 1.33 对于欧氏空间 V^n 的任一基 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$，都可找到一个标准正交基 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$. 换言之，任一非零欧氏空间都有正交基和标准正交基．

$$\boldsymbol{y}_1' = \boldsymbol{x}_1 \qquad \boldsymbol{y}_2' = \boldsymbol{x}_2 + k\boldsymbol{y}_1' \qquad \boldsymbol{y}_3' = \boldsymbol{x}_3 + k_2\boldsymbol{y}_2' + k_1\boldsymbol{y}_1'$$

令 $$\boldsymbol{y}_{m+1}' = \boldsymbol{x}_{m+1} + l_m\boldsymbol{y}_m' + l_{m-1}\boldsymbol{y}_{m-1}' + \cdots + l_2\boldsymbol{y}_2' + l_1\boldsymbol{y}_1'$$

使用 m 个正交条件

$$(\boldsymbol{y}_{m+1}', \boldsymbol{y}_i') = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$(\boldsymbol{x}_{m+1}, \boldsymbol{y}_i') + l_i(\boldsymbol{y}_i', \boldsymbol{y}_i') = 0$$

$$l_i = -\frac{(\boldsymbol{x}_{m+1}, \boldsymbol{y}_i')}{(\boldsymbol{y}_i', \boldsymbol{y}_i')} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

施密特正交化

定理 1.33 对于欧氏空间 V^n 的任一基 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$，都可找到一个标准正交基 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$. 换言之，任一非零欧氏空间都有正交基和标准正交基.

采用上述 Schmidt 正交化方法，可由已知基构造出 n 个两两正交的非零向量 $\boldsymbol{y}_1', \boldsymbol{y}_2', \cdots, \boldsymbol{y}_n'$. 根据定理 1.32，知 $\boldsymbol{y}_1', \boldsymbol{y}_2', \cdots, \boldsymbol{y}_n'$ 线性无关，从而它们形成 V^n 的一个正交基. 再以 $|\boldsymbol{y}_i'|$ 除 $\boldsymbol{y}_i'$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，就得到定理所要求的标准正交基

$$\boldsymbol{y}_i = \frac{1}{|\boldsymbol{y}_i'|}\boldsymbol{y}_i' \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

证毕

施密特正交化

例 1.33 试把向量组 $\boldsymbol{x}_1=(1,1,0,0)$，$\boldsymbol{x}_2=(1,0,1,0)$，$\boldsymbol{x}_3=(-1,0,0,1)$，$\boldsymbol{x}_4=(1,-1,-1,1)$ 正交单位化.

施密特正交化

例 1.33 试把向量组 $x_1=(1,1,0,0)$，$x_2=(1,0,1,0)$，$x_3=(-1,0,0,1)$，$x_4=(1,-1,-1,1)$ 正交单位化．

解 先把它们正交化．使用式(1.3.18)，可得

$$y_1'=x_1=(1,1,0,0)$$

$$y_2'=x_2-\frac{(x_2,y_1')}{(y_1',y_1')}y_1'=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right)$$

$$y_3'=x_3-\frac{(x_3,y_2')}{(y_2',y_2')}y_2'-\frac{(x_3,y_1')}{(y_1',y_1')}y_1'=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right)$$

$$y_4'=x_4-\frac{(x_4,y_3')}{(y_3',y_3')}y_3'-\frac{(x_4,y_2')}{(y_2',y_2')}y_2'-\frac{(x_4,y_1')}{(y_1',y_1')}y_1'=(1,-1,-1,1)$$

施密特正交化

再单位化，便有

$$\boldsymbol{y}_1 = \frac{1}{|\boldsymbol{y}_1'|}\boldsymbol{y}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \frac{1}{|\boldsymbol{y}_2'|}\boldsymbol{y}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)$$

$$\boldsymbol{y}_3 = \frac{1}{|\boldsymbol{y}_3'|}\boldsymbol{y}_3' = \left(-\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{3}{\sqrt{12}}\right)$$

$$\boldsymbol{y}_4 = \frac{1}{|\boldsymbol{y}_4'|}\boldsymbol{y}_4' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

1.3 作业（第五版）

1、定义：1.28、1.29、1.30

2、定理：1.33、1.36、1.38

3、例题：1.33

4、习题1.3：5

1.3 作业（第三版）

1、定义：1.28、1.29、1.30

2、定理：1.33、1.36、1.38

3、例题：1.33

4、习题1.3：5

下课，谢谢大家！