矩阵理论与方法

9月

内容提要 CONTENTS

- □ 课程信息
- □ 课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

课程信息

矩阵理论与方法的教学目标是进一步深入学习矩阵理论，使学生掌握矩阵范数、矩阵函数、矩阵分解、矩阵广义逆、特征值的估计与扰动理论、若干特殊矩阵，为学生今后从事和矩阵理论与方法相关的研究和应用打下基础。。

课程信息

教材:

矩阵论（第5版），张凯院、徐仲 编著，西北工业大学出版社，2017年8月

参考书目:

矩阵计算（英文版·第4版），Gene H. Golub、Charles F. Van Loan 编著，人民邮电出版社，2017年11月

内容提要 CONTENTS

- □ 课程信息
- □ 课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

回顾高数：

考虑函数 $y = f(x)$ $x \in R$

学习矩阵理论与方法

回顾高数：

考虑函数 $y = f(x)$ $x \in R$

导数： $f'(x)$

积分： $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$

学习矩阵理论与方法

矩阵论学什么：

考虑函数 $y = f(A) \quad A \in R^{n\times n}$

学习矩阵理论与方法

矩阵论学什么：

考虑函数 $y = f(A) \quad A \in R^{n\times n}$

导数： $f'(A)$

积分： $\int_{t_0}^{t_1} f(A(t))dt$

矩阵函数： $y = f(A) \quad A \in R^{n\times n}$

例1: $e^A = ?,$ 其中$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

学习矩阵理论与方法

矩阵函数： $y = f(A) \quad A \in R^{n\times n}$

例1: $e^A = ?,$ 其中$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

解：$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \ldots$

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \ldots$$

矩阵函数： $y = f(A) \quad A \in R^{n\times n}$

例1: $e^A = ?,\quad$ 其中$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

解：$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \ldots$

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \ldots$$

$$= eA = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

学习矩阵理论与方法

矩阵函数： $y = f(A) \quad A \in R^{n\times n}$

例2: $e^A = ?,$ 其中$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

解： $$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \ldots$$

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \ldots$$

$$= ?$$

学习矩阵理论与方法

矩阵函数： $y = f(A) \quad A \in R^{n\times n}$

例2: $e^{A} = ?,$ 其中$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

解：$e^{A} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^{k} = I + A + \frac{1}{2!} A^{2} + \frac{1}{3!} A^{3} + \dots$

$$= I - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + A + \frac{1}{2!} A^{2} + \frac{1}{3!} A^{3} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + eA = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵函数： $y = f(A) \qquad A \in R^{n\times n}$

例3: $e^{A} = ?,\quad$ 其中$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

解：$e^{A} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^{k} = I + A + \frac{1}{2!} A^{2} + \frac{1}{3!} A^{3} + \ldots$

$= ?$

学习矩阵理论与方法

矩阵函数： $y = f(A) \quad A \in R^{n\times n}$

例3: $e^A = ?,\quad$ 其中$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

解：$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \ldots$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k$$

(1) $A^k = ?$ (2) $\lim_{N\to+\infty} B^{(N)}$

例3:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}=P^{-1}\Lambda P$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

(1) $A^k=?$

学习矩阵理论与方法

例3:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}=P^{-1}\Lambda P$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

(1) $A^k=P^{-1}\Lambda PP^{-1}\Lambda PP^{-1}\Lambda P\cdots P^{-1}\Lambda P$

$$=P^{-1}\Lambda^k P$$

学习矩阵理论与方法

例3: $e^A = ?,\quad$ 其中$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

解：$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \ldots$

$$= P^{-1} I P + P^{-1} \Lambda P + \frac{1}{2!} P^{-1} \Lambda^2 P + \frac{1}{3!} P^{-1} \Lambda^3 P + \ldots$$

学习矩阵理论与方法

例3: $e^{A}=?,\quad$ 其中$A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

解：$e^{A}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^{k}=I+A+\frac{1}{2!}A^{2}+\frac{1}{3!}A^{3}+\dots$

$$=P^{-1}IP+P^{-1}\Lambda P+\frac{1}{2!}P^{-1}\Lambda^{2}P+\frac{1}{3!}P^{-1}\Lambda^{3}P+\dots$$

$$=P^{-1}\begin{pmatrix} e^{-2} & & \\ & e & \\ & & e \end{pmatrix}P$$

$$e^{-2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(-2)^{k}$$

学习矩阵理论与方法

第一章: 求：$A^k=?$

第二章:

求：$\lim\limits_{k\to+\infty} B^{(k)} = \lim\limits_{k\to+\infty}\begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & \\ & k\cdot\sin\frac{1}{k} \end{pmatrix} = ?$

第三章: 求：$A(t)=\begin{pmatrix} \sin t & \\ & \cos t \end{pmatrix}, A'(t)=?$

学习矩阵理论与方法

第一章:　求：$A^k = ?$　　解：$A = P^{-1}\Lambda P$

第二章:

求：$\lim\limits_{k\to+\infty} B^{(k)} = \lim\limits_{k\to+\infty}\begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & \\ & k\cdot\sin\frac{1}{k} \end{pmatrix} = ?$

第三章:

学习矩阵理论与方法

第一章:　求：$A^k = ?$　　　　解：$A = P^{-1}\Lambda P$

第二章:

$$求:\lim_{k\to+\infty} B^{(k)} = \lim_{k\to+\infty}\begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & \\ & k\cdot\sin\frac{1}{k} \end{pmatrix} = ?$$

$$解:\lim_{k\to+\infty}\begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & \\ & k\cdot\sin\frac{1}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to+\infty}\frac{1}{2^k} & \\ & \lim\limits_{k\to+\infty} k\cdot\sin\frac{1}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

第三章:

求：$A(t)=\begin{pmatrix} \sin t & \\ & \cos t \end{pmatrix}, A'(t)=?$

解：$A'(t)=\begin{pmatrix} \sin' t & \\ & \cos' t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos t & \\ & -\sin t \end{pmatrix}$

内容提要 CONTENTS

- □ 课程信息
- □ 课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

  第1章 线性空间与线性变换

$$A = P^{-1}\Lambda P$$

为什么要研究矩阵？

$$A = P^{-1}\Lambda P$$

矩阵的来源

$$A = P^{-1}\Lambda P$$

矩阵的来源

由线性变换导出矩阵

由线性变换导出矩阵

例：复数$\alpha + i\beta = (1+i2)(3+i4)$

求$\alpha, \beta = ?$

由线性变换导出矩阵

例：复数$\alpha + i\beta = (1+i2)(3+i4)$

求$\alpha, \beta = ?$

解:$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

解：$\alpha + i\beta = (1+i2)(3+i4) = T(3+i4)$ T是线型变换

$1, i$ 是复数域C上的一组基，$3+i4 = (1, i)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 基和坐标

$$T(1) = (1+i2)\cdot 1 = (1, i)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, T(i) = (1+i2)\cdot i = (1, i)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(1, i) = (T(1), T(i)) = (1, i)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

线型变换性质

$$\therefore (1, i)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = T(3+i4) = T(1, i)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (1, i)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

由线性变换导出矩阵

例：在复数域C中，给定复数$k=a+ib,$

线性变换$T(z)=k\times z$，其中复数$z=x+iy,$

C的一组基为$E_1=1, E_2=i,$

求T在这组基下的矩阵$A:$

$$T(E_1, E_2)=(E_1, E_2)A$$

第1章 线性空间与线性变换

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，$E_1, E_2, \ldots, E_n$是V的一组基,

分别考虑$y = T(x)$和$z = \left(T^2\right)(x)$，其中$x \in V$

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，$E_1, E_2, ..., E_n$是V的一组基,
分别考虑$y = T(x)$和$z = \left(T^2\right)(x)$，其中$x \in V$

1、$x = (E_1, ..., E_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = (E_1, ..., E_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$

2、$T(E_1, ..., E_n) = (E_1, ..., E_n)A$

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，$E_1, E_2, ..., E_n$是V的一组基，
分别考虑$y = T(x)$和$z = \left(T^2\right)(x)$，其中$x \in V$

1、$x = (E_1, ..., E_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = (E_1, ..., E_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$

2、$T(E_1, ..., E_n) = (E_1, ..., E_n)A$

3、$y = T(x) = T(E_1, ..., E_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (E_1, ..., E_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

4、$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

第1章 线性空间与线性变换

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，$E_1,E_2,\dots,E_n$是V的一组基,

分别考虑$y=T(x)$和$z=\left(T^2\right)(x)$，其中$x\in V$

1、$x=(E_1,\dots,E_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, y=(E_1,\dots,E_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},$

2、$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)A$

3、$y=T(x)=T(E_1,\dots,E_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(E_1,\dots,E_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

4、$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

1、线型空间

2、基和坐标

3、线性变换

4、$A=P^{-1}\Lambda P$

第1章 线性空间与线性变换

1、线型空间

2、基和坐标

3、线性变换

4、$A=P^{-1}\Lambda P$

1.1 线性空间

定义 1.1 设 V 是一个非空集合，它的元素用 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 等表示，并称之为向量；K 是一个数域，它的元素用 k, l, m 等表示．如果 V 满足下列条件：

(1) 在 V 中定义一个加法运算，即当 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ 时，有唯一的和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$，且加法运算满足下列性质

1) 结合律 $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$；

2) 交换律 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$；

3) 存在**零元素** $\boldsymbol{0}$，使 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$；

4) 存在**负元素**，即对任一向量 $\boldsymbol{x} \in V$，存在向量 $\boldsymbol{y} \in V$，使 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$，则称 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的负元素，记为 $-\boldsymbol{x}$，于是有

$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$$

(2) 在 V 中定义数乘（数与向量的乘法）运算，即当 $\boldsymbol{x} \in V$，$k \in K$ 时，有唯一的 $k\boldsymbol{x} \in V$，且数乘运算满足下列性质：

5) 数因子分配律 $k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=k\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{y}$；

6) 分配律 $(k+l)\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{x}$；

7) 结合律 $k(l\boldsymbol{x})=(kl)\boldsymbol{x}$；

8) $1\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

则称 V 为数域 K 上的**线性空间或向量空间**．

1.1 线性空间

定义 1.1 设 V 是一个非空集合，它的元素用 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ 等表示，并称之为向量；K 是一个数域，它的元素用 k, l, m 等表示．如果 V 满足下列条件：

(1) 在 V 中定义一个加法运算，即当 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ 时，有唯一的和 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$，且加法运算满足下列性质

1) 结合律 $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$；

2) 交换律 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$；

3) 存在**零元素** $\boldsymbol{0}$，使 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$；

4) 存在**负元素**，即对任一向量 $\boldsymbol{x} \in V$，存在向量 $\boldsymbol{y} \in V$，使 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$，则称 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的负元素，记为 $-\boldsymbol{x}$，于是有

$$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

(2) 在 V 中定义数乘(数与向量的乘法)运算，即当 $\boldsymbol{x} \in V$, $k \in K$ 时，有唯一的 $k\boldsymbol{x} \in V$，且数乘运算满足下列性质：

5) 数因子分配律 $k(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = k\boldsymbol{x} + k\boldsymbol{y}$；

6) 分配律 $(k + l)\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{x}$；

7) 结合律 $k(l\boldsymbol{x}) = (kl)\boldsymbol{x}$；

8) $1\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

则称 V 为数域 K 上的**线性空间或向量空间**．

1.1 线性空间

回顾：

1) 什么是集合?

2) 什么是数域?

3) 什么是变换?

1.1.1 集合与映射

1.集合

集合：作为整体看的一堆东西.

集合的元素：组成集合的事物.

设S表示集合，a表示S的元素，记为$a \in S$

读为a属于S；用记号 $a \notin S$ 表示a 不属于S.

1.1.1 集合与映射

集合的表示：(1) 列举法

$$S = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$$

(2) 特征性质法 $M = \{a | a\text{具有的性质}\}$

$$P = \{(x, y) | x + 2y = 1\}$$

1.1.1 集合与映射

空集合：不包含任何元素的集合，记为ϕ

子集合：设 S_1与S_2 表示两个集合，如果集合 S_1 都是集合 S_2 的元素，即由 $\forall a \in S_1 \Rightarrow a \in S_2$，那么就称 S_1是S_2 的子集合，记为

$$S_1 \subset S_2 \text{或} S_2 \supset S_1$$

1.1.1 集合与映射

相等：即 $\mathrm{S}_1 \subset \mathrm{S}_2$ 且 $\mathrm{S}_1 \supset \mathrm{S}_2 \Leftrightarrow \mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_2$

集合的交：$S_1 \cap S_2 = \{x | x \in S_1 \text{且} x \in S_2\}$

集合的并：$S_1 \cup S_2 = \{x | x \in S_1 \text{或} x \in S_2\}$

集合的和：$S_1 + S_2 = \{x + y | x \in S_1, y \in S_2\}$

例如

$$\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\{1,2,3\} + \{2,3,4\} = \{3,4,5,6,7\}$$

1.1.1 集合与映射

例： $S_1 = \{A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbf{R}\}$

$$S_2 = \{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbf{R}\}，\quad S_1 \neq S_2$$

$$S_1 \cap S_2 = \{A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \mid a_{11}, a_{22} \in \mathbf{R}\}$$

$$S_1 \cup S_2 = \{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mid a_{12}a_{21} = 0,\ a_{ij} \in \mathbf{R}\}$$

$$S_1 + S_2 = \{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbf{R}\}$$

2. 数域

数域：是一个含0和1,且对加，减，乘，除（0不为除数）封闭的数集.

例如：有理数域$\boldsymbol{Q}$，实数域$\boldsymbol{R}$，复数域$\boldsymbol{C}$.

1.1.1 集合与映射

3. 映射

映射：设S 与S' 是两个集合，一个法则（规则）

$\sigma: S \to S'$ ，它使S中的每个元素a 都有S' 中一个确定的元素 a' 与之对应，记为

$$\sigma(a) = a' \text{ 或 } a \to a'$$

σ 称为集合S到 S' 的映射，a' 称为a 在映射σ下的象，而a 称为 a' 在映射σ下的一个原象.

1.1.1 集合与映射

变换：S到S自身的映射.

例： $S=\{A=(a_{ij})_{n\times n}\ |\ a_{ij}\in \mathrm{R}\}\quad (n\geq 2)$.

映射σ_1： $\sigma_1(A)=\det A\qquad (S\to \mathrm{R})$

变换σ_2： $\sigma_2(A)=(\det A)A\qquad (S\to S)$

相等：设 σ_1与σ_2 都是集合S到 S'的映射，如果对于 $\forall a \in S$ 都有$\sigma_1(a)=\sigma_2(a)$，则称 σ_1与σ_2相等，记为 $\sigma_1=\sigma_2$.

1.1.1 集合与映射

乘法：设 σ,τ 依次是集合S到 S_1， S_1到S_2 的映射，乘积 $\tau\sigma$ 定义如下

$$(\tau\sigma)(a)=\tau(\sigma(a)),\ a\in S$$

$\tau\sigma$ 是S到 S_2 的一个映射.

注： $\tau\sigma\neq\sigma\tau$， $\mu(\tau\sigma)=(\mu\tau)\sigma$ （μ是 S_2到S_3的映射）

1.1.2 线性空间及其性质

定义 1.1 设 V 是一个非空集合，它的元素用 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 等表示，并称之为向量；K 是一个数域，它的元素用 k, l, m 等表示．如果 V 满足下列条件：

(1) 在 V 中定义一个加法运算，即当 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ 时，有唯一的和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$，且加法运算满足下列性质

1) 结合律 $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$；

2) 交换律 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$；

3) 存在**零元素** $\mathbf{0}$，使 $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$；

4) 存在**负元素**，即对任一向量 $\boldsymbol{x} \in V$，存在向量 $\boldsymbol{y} \in V$，使 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$，则称 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的负元素，记为 $-\boldsymbol{x}$，于是有

$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$$

(2) 在 V 中定义数乘（数与向量的乘法）运算，即当 $\boldsymbol{x} \in V$，$k \in K$ 时，有唯一的 $k\boldsymbol{x} \in V$，且数乘运算满足下列性质：

5) 数因子分配律 $k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=k\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{y}$；

6) 分配律 $(k+l)\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{x}$；

7) 结合律 $k(l\boldsymbol{x})=(kl)\boldsymbol{x}$；

8) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

则称 V 为数域 K 上的**线性空间或向量空间**．

1.1.2 线性空间及其性质

定义 1.1 设 V 是一个非空集合，它的元素用 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ 等表示，并称之为向量；K 是一个数域，它的元素用 k, l, m 等表示．如果 V 满足下列条件：

(1) 在 V 中定义一个加法运算，即当 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ 时，有唯一的和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$，且加法运算满足下列性质

1) 结合律 $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$；

2) 交换律 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$；

3) 存在**零元素** $\mathbf{0}$，使 $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$；

4) 存在**负元素**，即对任一向量 $\boldsymbol{x} \in V$，存在向量 $\boldsymbol{y} \in V$，使 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$，则称 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的负元素，记为 $-\boldsymbol{x}$，于是有

$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$$

(2) 在 V 中定义数乘（数与向量的乘法）运算，即当 $\boldsymbol{x} \in V$，$k \in K$ 时，有唯一的 $k\boldsymbol{x} \in V$，且数乘运算满足下列性质：

5) 数因子分配律 $k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=k\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{y}$；

6) 分配律 $(k+l)\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{x}$；

7) 结合律 $k(l\boldsymbol{x})=(kl)\boldsymbol{x}$；

8) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

则称 V 为数域 K 上的**线性空间或向量空间**．

C是R上的线性空间

R^n是R上的线性空间

$R^{m\times n}$是R上的线性空间

1.1.2 线性空间及其性质

$K=\mathbf{R}$ 时，$\mathbf{R}^n$—向量空间；　　$\mathbf{R}^{m\times n}$—矩阵空间

$P_n[t]$—多项式空间；　$C[a,b]$—函数空间

$K=\mathbf{C}$ 时，$\mathbf{C}^n$—复向量空间；　　$\mathbf{C}^{m\times n}$—复矩阵空间

1.1.2 线性空间及其性质

例： 集合 $\mathbf{R}^{+}=\{m \mid m\text{是正实数}\}$，数域 $\mathbf{R}=\{k \mid k\text{是实数}\}$.

加法：$m,n\in\mathbf{R}^{+}$，$m\oplus n=mn$

数乘：$m\in\mathbf{R}^{+},k\in\mathbf{R}$，$k\otimes m=m^{k}$

验证 $\mathbf{R}^{+}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

1.1.2 线性空间及其性质

例： 集合 $\mathbf{R}^+ = \{m \mid m\text{是正实数}\}$，数域 $\mathbf{R} = \{k \mid k\text{是实数}\}$.

加法： $m, n \in \mathbf{R}^+$， $m \oplus n = mn$

数乘： $m \in \mathbf{R}^+, k \in \mathbf{R},\ k \otimes m = m^k$

验证 $\mathbf{R}^+$ 是 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

证： 加法封闭，且(1)～(2)成立.

(3) $m \oplus \theta = m \Rightarrow m\theta = m \Rightarrow \theta = 1$

(4) $m \oplus (-m) = \theta \Rightarrow m(-m) = 1 \Rightarrow (-m) = 1/m$

数乘封闭，(5)～(8)成立. 故 $\mathbf{R}^+$ 是 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

1.1.2 线性空间及其性质

定理1.1 线性空间 V 有唯一的零元素，任一元素也有唯一的负元素.

减法运算：线性空间$\boldsymbol{V}$ 中， $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y})$.

线性空间还有如下性质：

若 $x \in V, k \in K$,则$0x=0, k0=0,(-1)x=-x$.

1.1.2 线性空间及其性质

1、线型空间

线性相关:　$1+i,\quad 1,\quad i$

线性无关:　$1+i,\quad 1-i$

2、基和坐标

1.1.2 线性空间及其性质

我们知道，线性代数中讲的向量空间是一种特殊的线性空间，现在我们把线性代数中线性组合，线性相关、线性无关，基等概念推广到线性空间中。

定义1.2：如果 $x_1,\cdots,x_m$ 为线性空间 V 中的 $\boldsymbol{m}$ 个元素，$x\in V$,且存在数域 K 中一组数 $c_1,\cdots,c_m$

使 $$x=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m$$

则称 x 为元素组 $x_1,\cdots,x_m$ 的线性组合，也称元素 x 可由 $x_1,\cdots,x_m$ 线性表示.

1.1.2 线性空间及其性质

定义1.3 对于$x_1,\cdots,x_m \in V$，如果存在不全为零的m个数 $c_1,\cdots,c_m \in K$ ，使 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m=0$ 则称元素组 $x_1,\cdots,x_m$ 线性相关，否则称其为线性无关.

仅当 $c_1,\cdots,c_m$ 全为零时，才有$c_1x_1+\cdots+c_mx_m=0$，则称 $x_1,\cdots,x_m$ 线性无关.

1.1.2 线性空间及其性质

线性代数中的相关结论推广后仍然成立，例如：

部分相关则全体相关；全体无关则部分无关；

包含零元素肯定相关；相关集中至少有一元素可

由其它元素线性表示 等等。

部分相关则全体相关:

$$1+i,\quad 1,\quad i,\quad 1-i,\quad 2+3i,\quad 4-5i$$

1.1.2 线性空间及其性质

1、线型空间

线型相关：　$1+i,\quad 1,\quad i$

线型无关：　$1+i,\quad 1-i$

2、基和坐标

1.1.3 线性空间的基与坐标

定义**1.4** 如果 $x_1,\cdots,x_m$ 是线性空间 V 中的 $\boldsymbol{m}$ 个元素且满足

（1） $x_1,\cdots,x_m$ 线性无关；

（2） $\forall x\in V$ 可由 $x_1,\cdots,x_m$ 线性表示.

则 $x_1,\cdots,x_m$ 称为 V 的一个基，$\boldsymbol{m}$ 称 V 的维数记 $\dim V=m$. 维数为 $\boldsymbol{m}$ 的线性空间 V 记 V^m ，当 $m=+\infty$ 时称为无限维线性空间.

1.1.3 线性空间的基与坐标

从定义可以看出基就相当于向量组的极大线性无关组，因此性质也类似，比如：

性质一：基不唯一，但是不同基中所含元素个数相同，即维数是唯一确定的。

性质二：**n**维线性空间**V**中任意**n**个无关元的集都是**V**的一个基。

特别的，如果**V**中只有零元素，称**V**是零维的。

1.1.3 线性空间的基与坐标

例： 矩阵空间 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 中，易见

(1) $E_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 线性无关；

(2) $A=(a_{ij})_{m\times n}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$.

故 $E_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 的一个基,

$\dim\mathbf{R}^{m\times n}=mn$.

1.1.3 线性空间的基与坐标

定义1.5 设线性空间**Vⁿ**的一个基 $x_1,\cdots,x_n$,$x \in V^n$

$$x=\xi_1 x_1+\xi_2 x_2,\cdots,+\xi_n x_n$$

则称 $\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_n$ 为$\boldsymbol{x}$ 在该基下的坐标，记为

$$(\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_n)^T$$

1.1.3 线性空间的基与坐标

例：给定线型空间

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}$$

求V的一个基

令$x_{11}=-x_{12}-x_{21}$

1.1.3 线性空间的基与坐标

例：给定线型空间

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}$$

求V的一个基

题目解读:

1、V这么写叫集合

2、数域K是什么?

3、加法怎么定义的?

4、数乘怎么定义的?

1.1.3 线性空间的基与坐标

例：　设矩阵空间 $R^{2\times 2}$ 的子空间为

$$V = \{X = (x_{ij})_{2\times 2} \mid x_{11} + x_{12} + x_{21} = 0, x_{ij} \in R\}$$

求V的一个基

定义：线性空间$\boldsymbol{V}$中，若子集$\boldsymbol{V}_1$非空，且对$\boldsymbol{V}$中的线性运算封闭，即

(1) $\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}_1 \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}_1$

(2) $\forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}_1, \forall\ \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{K} \Rightarrow \boldsymbol{kx} \in \boldsymbol{V}_1$

称$\boldsymbol{V}_1$为$\boldsymbol{V}$的线性子空间，简称为子空间.

例： 设矩阵空间 $R^{2\times 2}$ 的子空间为

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0,x_{ij}\in R\}$$

求V的一个基

1.1.3 线性空间的基与坐标

例： 设矩阵空间 $R^{2\times2}$ 的子空间为

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}$$

求V的一个基

解:(1) $X_1=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, X_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(2) $Y_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, Y_2=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, Y_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

1.1.5 线性子空间

生成子空间：（考虑子空间的生成问题）

设 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是线性空间 V 的一组向量，则集合

$$V_1=\{k_1x_1+\cdots+k_mx_m \mid k_i\in K, i=1,2,\cdots,m\}$$

是V的线性子空间，称为由 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 生成的子空间，记为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\{k_1x_1+\cdots+k_mx_m \mid k_i\in K, i=1,2,\cdots,m\}$$

1.1.3 线性空间的基与坐标

例： 设矩阵空间 $R^{2\times 2}$ 的子空间为

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0,x_{ij}\in R\}$$

考虑V的一个基 $X_1=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},X_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$(1)V=L(X_1,X_2,X_3)$$

$$(2)L(X_1,X_2)\cap L(X_1,X_3)=L(X_1)$$

1.1 作业（第五版教材）

1、定义1.1 线性空间的定义

定义1.3-1.4

2、例题：1.2、1.4、1.5

3、习题1.1：6、11

1.1 作业（第三版教材）

1、定义1.1 线性空间的定义

定义1.3-1.4

2、例题：1.2、1.4、1.5

3、习题1.1：7、11

下课，谢谢大家！