北京邮电大学 2017-2018 学年

线性代数期末试题（A）

一. 填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 已知 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=27$，$D$ 的第二行元素的代数余子式依次为

$A_{21},A_{22},A_{23},A_{24}$，则 $A_{21}+A_{22}=$__________.

答案：18

2. 已知 A 是 3 阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，$|A|=\dfrac{1}{2}$，则 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=$________.

答案：$-\dfrac{16}{27}$

3. 设 $A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 10 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$，则 $(A-2E)^{-1}(A^2-4E)=$ _______.

答案：$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

4. 设 3 阶矩阵 $A=(a_{ij})$，P 为初等矩阵，若

$PA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，则 $AP=$________.

答案：$\begin{pmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}-a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

5. 直线 L：$x-1=y+2=-z-4$ 与平面 π：$x-z-5=0$ 的夹角为________.

答案：$\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

6. 已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_4=2\alpha_2-\alpha_3$，$b=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. 则方程组$Ax=b$的通解为________.

答案：　$x=k(0,2,-1,-1)^T+(1,1,1,1)^T$，$k$为任意实数

7. 已知矩阵A有特征值$\lambda=2$，$|A|=-3$，A^*是A的伴随矩阵，则$A+A^*$必有特征值$\mu=$________.

答案：$\dfrac{1}{2}$

8. 已知A是3阶矩阵，列向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$满足$A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=3\alpha_2$，$A\alpha_3=-2\alpha_3$，

可逆矩阵$P=(\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2)$，则$P^{-1}AP=$__________.

答案：$diag(-2,1,3)$

9. 已知$\alpha_1=(1,1,3,-1)$，$\alpha_2=(1,1,2,0)$，对α_1,α_2进行施密特正交化，得$\beta_1=\alpha_1$，

$\beta_2=$__________.

答案：$\dfrac{1}{3}(1,1,0,2)$

10. 已知A为实对称矩阵，λ为A的特征值，若$E+A$与$E-A$都是正定矩阵，则λ的取值范围是________.

答案：$|\lambda|<1$

二.（8分） 计算n阶行列式$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$（$n\geq 2$）.

解： $D_1 = x + a_1$， $n \geq 2$ 时，将 D_n 按第一列展开，得

$D_n = xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = xD_{n-1} + a_n$，由此递推可得

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1} + a_n \\ &= x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n = x^2 D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n = \cdots \\ &= x^{n-2}D_2 + a_3 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\ &= x^{n-1}D_1 + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\ &= x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n . \end{aligned}$$

三.（8 分）已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} -14 & 2 & 2 \\ -4 & -3 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{pmatrix}$，若矩阵 B 满足 $BA = A - 3B$，求 B.

解： $BA = A - 3B$， $BA + 3B = B(A + 3E) = A$， $B = A(A + 3E)^{-1}$，

$A + 3E = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，$(A + 3E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$，

$$B = \begin{pmatrix} -14 & 2 & 2 \\ -4 & -3 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ -6 & 4 & -9 \\ -12 & -3 & -23 \end{pmatrix}.$$

四．（8 分）已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关， $\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$ ， $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 + 7\alpha_4$， $\beta_3 = 5\alpha_1 + 8\alpha_2 + 7\alpha_3 + 7\alpha_4$，讨论 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的线性相关性.

解：设 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$，即

$(2x_1+x_2+5x_3)\alpha_1+(3x_1+2x_2+8x_3)\alpha_2+(x_1+5x_2+7x_3)\alpha_3+(7x_2+7x_3)\alpha_4=0$.

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，所以

$$\begin{cases}2x_1+x_2+5x_3=0\\3x_1+2x_2+8x_3=0\\x_1+5x_2+7x_3=0\\7x_2+7x_3=0\end{cases}$$. 该齐次线性方程组的系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&1&5\\3&2&8\\1&5&7\\0&7&7\end{pmatrix}$,

$A^T=\begin{pmatrix}2&3&1&0\\1&2&5&7\\5&8&7&7\end{pmatrix}$（行初等变换）$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&5&7\\0&1&9&14\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$r(A)=r(A^T)=2<3$，齐

次方程组 $Ax=0$ 有非零解，所以 β_1,β_2,β_3 线性相关.

五.（10 分）求下面方程组的通解.

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1\\3x_1+2x_2-8x_3+7x_4=-1\\x_1-x_2-6x_3-x_4=-2\end{cases}$$

解：对方程组的增广矩阵作初等行变换，化为行最简形，得

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&-8&7&-1\\1&-1&-6&-1&-2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&-1&-2&-2&-1\\0&-2&-4&-4&-2\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-4&1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

原方程组同解于$\begin{cases}x_1-4x_3+x_4=-1\\x_2+2x_3+2x_4=1\end{cases}$，取特解 $\eta=(-1,1,0,0)^T$,

对应齐次方程组$\begin{cases} x_1 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$的通解为

$x = x_3(4,-2,1,0)^T + x_4(-1,-2,0,1)^T$， x_3, x_4为任意实数.

所求方程组的通解为$x = k_1(4,-2,1,0)^T + k_2(-1,-2,0,1)^T + (-1,1,0,0)^T$，$k_1, k_2$为任意实数.

六.（8 分）设$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 3 & -8 & 3 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}$，

（1）求A的特征值；

（2）讨论A是否可以对角化.

解：（1）$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -8-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{(-1)c_1 + c_3} \begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & \lambda+5 \\ 3 & -8-\lambda & 0 \\ 6 & -6 & -(\lambda+5) \end{vmatrix}$

$= -(\lambda+5)^2(\lambda-1)$.

A的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = -5$，$\lambda_3 = 1$.

（2）$\lambda_1 = \lambda_2 = -5$是$A$的 2 重特征值，

$A + 5E = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \to$（行初等变换）$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$r(A+5E) = 1$，对应 2 重特征值$\lambda_1 = \lambda_2 = -5$，$A$有$3 - r(\mathrm{A} + 5\mathrm{E}) = 2$个线性无关的特征向量，$A$可以对角化.

七.（12 分）已知二次型$f = 4x_1^2 + 4x_2^2 + ax_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_3$在正交变换$x = Py$下化为标准形$f = 6y_1^2 + 5y_2^2 + by_3^2$，其中$x = (x_1, x_2, x_3)^T$，$y = (y_1, y_2, y_3)^T$.

（1）求实数a, b的值；

（2）求正交矩阵P.

解：（1） f 在 x 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$，

已知 $\lambda_2=5$ 是 A 的特征值，所以

$$|A-5E|=\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ -3 & -3 & a-5 \end{vmatrix}=-3(a+1)=0\text{，}\quad a=-1\text{，}$$

$trA=4+4-1=6+5+b$，　$b=-4$.

（注：$|A-6E|=0$ 与 a 无关）

（2） $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$，$A$ 的特征值为 $\lambda_1=6,\lambda_2=5,\lambda_3=-4$.

求解 $(A-6E)x=0$，得 A 的对应 $\lambda_1=6$ 的单位特征向量为 $p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$；

求解 $(A-5E)x=0$，得 A 的对应 $\lambda_2=5$ 的单位特征向量为 $p_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T$；

求解 $(A+4E)x=0$，得 A 的对应 $\lambda_3=-4$ 的单位特征向量为 $p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T$.（10分）

令 $P=(p_1,p_2,p_3)$，则在正交变换 $x=Py$ 下，f 化为标准形　$f=6y_1^2+5y_2^2-4y_3^2$.

八. (6 分) 已知 α,β 为 3 维实单位列向量，且 $(\alpha,\beta)=0$. 令 $A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$，求证：$A$ 与对角阵 $\Lambda=diag(1,-1,0)$ 相似.

证明：　因为特征值两两不同的矩阵一定可以对角化，所以只需证明 A 的特征值为 $1,-1,0$.

因为 $r(A)\le r(\alpha\beta^T)+r(\beta\alpha^T)\le 2$，所以 $|A|=0$，即 0 为 A 的特征值；

因为 $A\alpha=(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)\alpha=\beta$， $A\beta=(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)\beta=\alpha$，所以 $A(\alpha+\beta)=\beta+\alpha$， $A(\alpha-\beta)=\beta-\alpha=-(\alpha-\beta)$，即 $1,-1$ 也是 A 的特征值，所以 A 与对角阵 $\Lambda=diag(1,-1,0)$ 相似.