1.5 欧几里德空间与酉空间

1.5.1 欧几里德空间的定义及性质

定义 设V是实数域P上的线性空间，在V上定义一个二元实函数，称为内积， 记为(α,β)，它具有以下性质：

（1）$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$；

（2）$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$；

（3）$(a\alpha,\beta)=a(\alpha,\beta)$；

（4）$(\alpha,\alpha)\geq 0$，当且仅当$\alpha=0$时，$(\alpha,\alpha)=0$，

这样的线性空间V称为**Euclid**空间，简称为欧氏空间.

1.5.3　正交矩阵与正交变换

定义　如果 n 阶实矩阵 A 满足

$$A^T A = AA^T = E,$$

则称 A 为正交矩阵.

1.5.3 正交矩阵与正交变换

定义　如果n阶实矩阵A满足

$$A^T A = AA^T = E,$$

则称A为正交矩阵.

定义　设T是n维欧氏空间V的线性变换，若T能保持V中向量的内积不变，即对任意$\alpha, \beta \in V$，都有

$$(T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta)$$

则称T为V上的正交变换.

1.5.4　对称矩阵与对称变换

　　定义　　设 T 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换，若对任意 $\alpha,\beta\in V$，都有

$$(T\alpha,\beta)=(\alpha,T\beta)$$

则称 T 为 V 上的对称变换.

1.5.4 对称矩阵与对称变换

定义　设 T 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换，若对任意 $\alpha,\beta\in V$，都有

$$(T\alpha,\beta)=(\alpha,T\beta)$$

则称 T 为 V 上的对称变换.

定理　设 T 是 n 维欧氏空间 V 上的线性变换，则 T 是对称变换的充分必要条件是 T 在 V 的任意一个标准正交基下的矩阵是对称矩阵.

1.5.5 酉矩阵与酉变换

定义 设V是复数域P上的线性空间，在V上定义一个二元复函数，称为内积， 记为(α,β)，它具有以下性质：

（1）$(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$；

（2）$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$；

（3）$(a\alpha,\beta)=a(\alpha,\beta)$；

（4）$(\alpha,\alpha)\geq 0$，当且仅当$\alpha=0$时，$(\alpha,\alpha)=0$，

这样的线性空间V称为酉空间.

1.5.5 酉矩阵与酉变换

定义　设V是复数域P上的线性空间，在V上定义一个二元复函数，称为内积，记为(α,β)，它具有以下性质：

（1）$(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$；

（2）$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$；

（3）$(a\alpha,\beta)=a(\alpha,\beta)$；

（4）$(\alpha,\alpha)\geq 0$，当且仅当$\alpha=0$时，$(\alpha,\alpha)=0$，

这样的线性空间V称为酉空间.

例 11　考虑线性空间C^n，对任意的$\alpha,\beta\in C^n$，不妨设

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)，\quad \beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n),$$

规定$(\alpha,\beta)=a_1\overline{b_1}+a_2\overline{b_2}+\cdots+a_n\overline{b_n}$，易验证线性空间$C^n$对于如上规定的运算构成一个酉空间.

定义　如果 n 阶复矩阵 A 满足

$$A^H A = AA^H = E$$

则称 A 为酉矩阵．这里 A^H 是 A 的共轭转置．

定义　如果n阶复矩阵A满足

$$A^H A = AA^H = E$$

则称A为酉矩阵．这里A^H是A的共轭转置．

定义　设T是n维酉空间V的线性变换，若T能保持V中向量的内积不变，即对任意$\alpha, \beta \in V$，都有

$$(T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta)$$

则称T为V的酉变换．

定义　如果n阶复矩阵A满足

$$A^H A = AA^H = E$$

则称A为酉矩阵．这里A^H是A的共轭转置．

定义　设T是n维酉空间V的线性变换，若T能保持V中向量的内积不变，即对任意$\alpha, \beta \in V$，都有

$$(T(\alpha), T(\beta)) = (\alpha, \beta)$$

则称T为V的酉变换．

定义　设T是n维酉空间V的线性变换，若对任意$\alpha, \beta \in V$，都有

$$(T\alpha, \beta) = (\alpha, T\beta)$$

则称T为V上的 **Hermite** 变换．

定义　如果n阶复矩阵A满足

$$A^H A = AA^H$$

则称A为正规矩阵．这里A^H是A的共轭转置．

定义 如果 n 阶复矩阵 A 满足

$$A^H A = AA^H$$

则称 A 为正规矩阵．这里 A^H 是 A 的共轭转置．

定理1.42 : $A \in C^{n\times n}$，则A酉相似于对角矩阵 $\Leftrightarrow A^H A = AA^H$

$A \in R^{n\times n}$，且A特征值都是实数，

则A正交相似于对角矩阵 $\Leftrightarrow A^T A = AA^T$