矩阵理论与方法

11月

内容提要 CONTENTS

- □ 课程信息
- □ 课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

  第2章 范数理论及其应用

第2章 范数理论及其应用

第 2 章 范数理论及其应用

在计算数学中，特别是在数值代数中，研究数值方法的收敛性、稳定性及误差分析等问题时，范数理论显得十分重要．本章主要讨论 n 维向量空间 $\mathbf{C}^n$ 中的向量范数与矩阵空间 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 中的矩阵范数的理论及其性质．

$$T^k \Rightarrow A^k$$

$$e^T \Rightarrow e^A$$

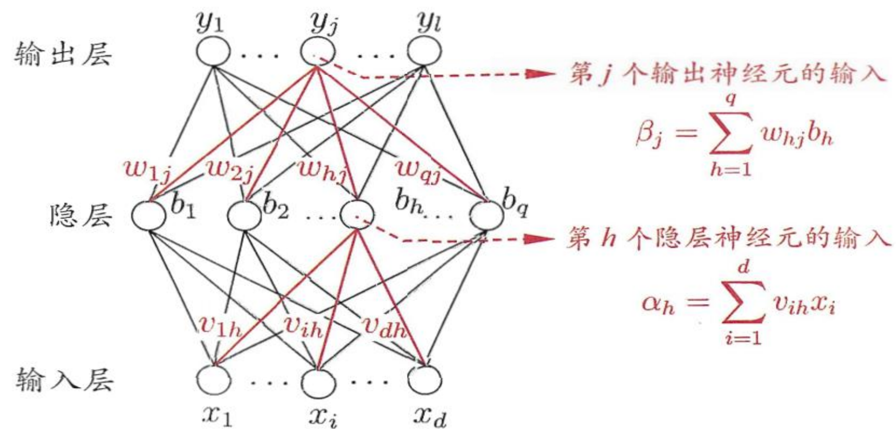
极限

导数

积分

第2章 范数理论及其应用

第 5 章　神经网络



$$E_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}(\hat{y}_j^k - y_j^k)^2 \ .$$

图 5.7　BP 网络及算法中的变量符号

BP 算法基于梯度下降(gradient descent)策略，以目标的负梯度方向对参数进行调整. 对式(5.4)的误差 E_k，给定学习率 η，有

$$\Delta w_{hj} = -\eta \frac{\partial E_k}{\partial w_{hj}} \ . \tag{5.6}$$

我们常会谈到两种“最优”：“局部极小”(local minimum)和“全局最小”(global minimum). 对 $\boldsymbol{w}^*$ 和 θ^*，若存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$\forall\ (\boldsymbol{w};\theta) \in \{(\boldsymbol{w};\theta) \mid \|(\boldsymbol{w};\theta) - (\boldsymbol{w}^*;\theta^*)\| \leqslant \epsilon\}\ ,$$

$$T^k \Rightarrow A^k$$

$$e^T \Rightarrow e^A$$

极限

导数

积分

$$A^{(k)} \to A \quad (k \to +\infty)$$

$$\Downarrow$$

$$x^{(k)} \to x \quad (k \to +\infty),\quad x^{(k)},\quad x \in V$$

$$x^{(k)} \to x \quad (k \to +\infty),\quad x^{(k)},\quad x \in V$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, k > N$时，有

$$\left\| x^{k} - x \right\| < \varepsilon$$

?

1、向量范数的概念

$a)$ R^n上的向量范数

$b)$ 线型空间V上的向量范数

$c)$ $R^{m\times n}$上的矩阵范数

向量范数的概念

§2.1 向量范数及其性质

一、向量范数的概念及 l_p 范数

设给定了 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的向量序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$，其中 $\boldsymbol{x}^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)})$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$. 如果每一个分量 $\xi_i^{(k)}$，当 $k \to \infty$ 时都有极限 ξ_i，即

$$\lim_{k\to\infty} \xi_i^{(k)} = \xi_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

记 $\boldsymbol{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，则称向量序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 有极限 $\boldsymbol{x}$，或称 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 收敛于 $\boldsymbol{x}$，简称 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ **收敛**，记为

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x}$$

向量范数的概念

不收敛的向量序列称为是**发散**的．例如向量序列

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2^k} \\ \dfrac{\sin k}{k} \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

是收敛的．因为当 $k \to \infty$ 时，$\dfrac{1}{2^k} \to 0$，$\dfrac{\sin k}{k} \to 0$，所以

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \begin{bmatrix} \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2^k} \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sin k}{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

而向量序列

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{2^i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{i} \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

是发散的．因为 $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{2^i} = \dfrac{1}{2} \dfrac{1-(1/2)^{k+1}}{1-1/2} \to 1$，而 $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{i} \to \infty$.

向量范数的概念

显然，如果向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛到向量x，则向量序列

$$\{x^{(k)}-x\}=\{(\xi_1^{(k)}-\xi_1,\ \xi_2^{(k)}-\xi_2,\ \cdots,\ \xi_n^{(k)}-\xi_n)\}$$

一定收敛到零向量$(0,\ 0,\ \cdots,0)$；反之亦然．

当$\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x$时，向量$x^{(k)}-x$的欧氏长度

$$\|x^{(k)}-x\|=\sqrt{(\xi_1^{(k)}-\xi_1)^2+(\xi_2^{(k)}-\xi_2)^2+\cdots+(\xi_n^{(k)}-\xi_n)^2}$$

收敛于零；

向量范数的概念

显然，如果向量序列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$收敛到向量$\boldsymbol{x}$，则向量序列

$$\{\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\}=\{(\xi_1^{(k)}-\xi_1,\ \xi_2^{(k)}-\xi_2,\ \cdots,\ \xi_n^{(k)}-\xi_n)\}$$

一定收敛到零向量$(0,\ 0,\ \cdots,0)$；反之亦然.

当$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{x}$时，向量$\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}$的欧氏长度

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\xi_1^{(k)}-\xi_1)^2+(\xi_2^{(k)}-\xi_2)^2+\cdots+(\xi_n^{(k)}-\xi_n)^2}$$

收敛于零；反之，若有一向量序列的欧氏长度收敛于零，则它的每一个分量一定收敛于零，从而该向量序列收敛于零向量.

由上述可见，向量的长度可用来刻画收敛的性质. 但是对于一般的线性空间，如何定义向量的长度呢？这就是所谓范数的概念. 范数是比长度更为广泛的概念，现定义于下.

向量范数的概念

定义 2.1 如果 V 是数域 K 上的线性空间，且对于 V 的任一向量 $\boldsymbol{x}$，对应一个实值函数 $\|\boldsymbol{x}\|$，它满足以下三个条件：

(1) 非负性：当 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|>0$；当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|=0$；

(2) 齐次性：$\|a\boldsymbol{x}\|=|a|\,\|\boldsymbol{x}\|$ $(a\in K,\ \boldsymbol{x}\in V)$；

(3) 三角不等式：$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V)$.

则称 $\|\boldsymbol{x}\|$ 为 V 上向量 $\boldsymbol{x}$ 的范数，简称**向量范数**.

向量的范数具有下列简单性质：

(1) 当 $\|x\| \neq 0$ 时，$\left\|\frac{1}{\|x\|}x\right\| = 1$ $\quad \because \left\|\frac{1}{\|x\|}x\right\| = \frac{1}{\|x\|}\|x\| = 1$

(2) $\forall x \in V$ ，$\|-x\| = \|x\|$ $\quad \because \|-x\| = |-1|\|x\| = \|x\|$

向量的范数具有下列简单性质：

(1) 当 $\|x\| \neq 0$ 时，$\left\| \frac{1}{\|x\|} x \right\| = 1$ $\quad \because \left\| \frac{1}{\|x\|} x \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1$

(2) $\forall x \in V$ ，$\|-x\| = \|x\|$ $\quad \because \|-x\| = |-1| \|x\| = \|x\|$

(3) $\forall x, y \in V$ ，$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$

$$\because \|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

(4) $\forall x, y \in V$ ，$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\| \quad \Rightarrow \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

同样 $\|\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$

向量范数的概念

例 2.1 在 n 维酉空间 $\mathbf{C}^n$ 上，复向量 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的长度

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_n|^2} \qquad (2.1.1)$$

就是一种范数.

定义 2.1 如果 V 是数域 K 上的线性空间，且对于 V 的任一向量 $\boldsymbol{x}$，对应一个实值函数 $\|\boldsymbol{x}\|$，它满足以下三个条件：

(1) 非负性：当 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|>0$；当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|=0$；

(2) 齐次性：$\|a\boldsymbol{x}\|=|a|\,\|\boldsymbol{x}\|$ $(a\in K,\boldsymbol{x}\in V)$；

(3) 三角不等式：$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V)$.

则称 $\|\boldsymbol{x}\|$ 为 V 上向量 $\boldsymbol{x}$ 的范数，简称**向量范数**.

向量范数的概念

例 2.1 在 n 维酉空间 $\mathbf{C}^n$ 上，复向量 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的长度

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_n|^2} \qquad (2.1.1)$$

就是一种范数.

为了说明这里的 $\|\boldsymbol{x}\|$ 是范数，只需验证它满足范数的三个条件就行了. 事实上有：

(1) 对于 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_n|^2}$，当 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 时，显然 $\|\boldsymbol{x}\|>0$；当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 时，则 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{0^2+\cdots+0^2}=0$.

向量范数的概念

例 2.1 在 n 维酉空间 $\mathbf{C}^n$ 上，复向量 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的长度

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_n|^2} \tag{2.1.1}$$

就是一种范数．

为了说明这里的 $\|\boldsymbol{x}\|$ 是范数，只需验证它满足范数的三个条件就行了．事实上有：

(1) 对于 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_n|^2}$，当 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ 时，显然 $\|\boldsymbol{x}\|>0$；当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 时，则 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{0^2+\cdots+0^2}=0$.

(2) 对任意的复数 a，因为

$$a\boldsymbol{x}=(a\xi_1,a\xi_2,\cdots,a\xi_n)$$

所以

$$\|a\boldsymbol{x}\|=\sqrt{|a\xi_1|^2+|a\xi_2|^2+\cdots+|a\xi_n|^2}=$$

$$|a|\sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_n|^2}=|a|\,\|\boldsymbol{x}\|$$

向量范数的概念

(3) 对于任意两个复向量 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$，有

$$x+y=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots, \xi_n+\eta_n)$$

所以

$$\|x+y\|=\sqrt{|\xi_1+\eta_1|^2+|\xi_2+\eta_2|^2+\cdots+|\xi_n+\eta_n|^2}$$

$$\|x\|=\sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots|\xi_n|^2}$$

$$\|y\|=\sqrt{|\eta_1|^2+|\eta_2|^2+\cdots+|\eta_n|^2}$$

借助于 $\mathbf{C}^n$ 中内积式(1.3.24)及其性质，可得

$$\|x+y\|^2=(x+y, x+y)=(x, x)+2\mathrm{Re}(x, y)+(y, y)$$

因为

$$\mathrm{Re}(x, y)\leqslant|(x, y)|\leqslant\sqrt{(x, x)(y, y)}=\|x\|\|y\|$$

所以

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$$

即 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

向量范数的概念

例 2.1 在 n 维酉空间 $\mathbf{C}^n$ 上，复向量 $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的长度

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_n|^2} \qquad (2.1.1)$$

就是一种范数．

因此，式(2.1.1)是 $\mathbf{C}^n$ 上的一种范数．通常称这种范数为 **2-范数**，记作 $\|\boldsymbol{x}\|_2$．式(2.1.1)也是欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上的一种范数，这只要把复数域 $\mathbf{C}$ 改为实数域 $\mathbf{R}$ 即可．

向量范数的概念

例 2.2 证明 $\|x\| = \max_i |\xi_i|$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一种范数,这里 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n$.

称例 2.2 中的范数为 ∞ -范数,记为 $\|x\|_\infty$,即

$$\|x\|_\infty = \max_i |\xi_i| \tag{2.1.4}$$

向量范数的概念

例 2.2 证明 $\|x\| = \max\limits_i |\xi_i|$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一种范数，这里 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n$.

证 当 $x \neq \mathbf{0}$ 时，有 $\|x\| = \max\limits_i |\xi_i| > 0$；当 $x = \mathbf{0}$ 时，显然有 $\|x\| = 0$.

又对任意的 $a \in \mathbf{C}$，有

$$\|ax\| = \max_i |a\xi_i| = |a| \max_i |\xi_i| = |a| \, \|x\|$$

对 $\mathbf{C}^n$ 的任意两个向量 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$，有

$$\|x+y\| = \max_i |\xi_i + \eta_i| \leqslant \max_i |\xi_i| + \max_i |\eta_i| = \|x\| + \|y\|$$

因此，$\|x\| = \max\limits_i |\xi_i|$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一种范数.

称例 2.2 中的范数为 ∞-范数，记为 $\|x\|_\infty$，即

$$\|x\|_\infty = \max_i |\xi_i| \tag{2.1.4}$$

向量范数的概念

例 2.3 证明 $\| x \| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$ 也是 $\mathbf{C}^n$ 上的一种范数，其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n$.

称例 2.3 中的范数为 **1**-范数，记为 $\| x \|_1$，即

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \tag{2.1.5}$$

向量范数的概念

例 2.3 证明 $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$ 也是 $\mathbf{C}^n$ 上的一种范数，其中 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n$.

证 当 $x \neq \mathbf{0}$ 时，显然 $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| > 0$；当 $x = \mathbf{0}$ 时，由于 x 的每一分量都是零，故 $\|x\| = 0$.

又对于任意 $a \in \mathbf{C}$，有

$$\|ax\| = \sum_{i=1}^{n} |a\xi_i| = |a| \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| = |a| \, \|x\|$$

对任意两个向量 $x, y \in \mathbf{C}^n$，有

$$\|x+y\| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i + \eta_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} (|\xi_i| + |\eta_i|) = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| + \sum_{i=1}^{n} |\eta_i| = \|x\| + \|y\|$$

于是由定义 2.1 知 $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一种范数.

向量范数的概念

线性空间 C^n，设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in C^n$

1：$\|x\|_1=\sum|\xi_i|$ 是一种向量范数，记为**1-范数**

2：$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ 是一种向量范数，记**2-范数**

3：$\|x\|=\max\limits_i|x_i|$ 是一种向量范数,记为 **∞ -范数**

向量范数的概念

线性空间C^n，设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in C^n$

1: $\|x\|_1=\sum|\xi_i|$ 是一种向量范数，记为**1-范数**

2: $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ 是一种向量范数，记**2-范数**

3: $\|x\|=\max\limits_i|x_i|$ 是一种向量范数,记为 **∞ -范数**

例：求向量$e=(1,2,-3)$的l_1,l_2和l_∞范数

向量范数的概念

线性空间 C^n，设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in C^n$

1: $\|x\|_1=\sum|\xi_i|$ 是一种向量范数，记为**1-范数**

2: $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ 是一种向量范数，记**2-范数**

3: $\|x\|=\max\limits_i|x_i|$ 是一种向量范数,记为 **∞ -范数**

例：求向量$e=(1,2,-3)$的l_1,l_2和l_∞范数

解:$\|e\|_1=6,\ \|e\|_2=\sqrt{14},\ \|e\|_\infty=3,$

lp范数

线性空间 C^n，设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \in C^n$

1：$\|x\|_1 = \sum|\xi_i|$ 是一种向量范数，记为**1-范数**

2：$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ 是一种向量范数，记**2-范数**

3: $\|x\| = \max_i |x_i|$ 是一种向量范数,记为 **∞ -范数**

4：$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \le p < \infty)$

是一种向量范数，记为*p*-范数或 l_p 范数

lp范数

称$\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{1/p}$为向量$\boldsymbol{x}$的$p$-范数或$l_p$范数，记为$\|\boldsymbol{x}\|_p$，$(1 \leqslant p < +\infty)$

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{1/p} \tag{2.1.7}$$

在式(2.1.7)中，令$p=1$，便得$\|\boldsymbol{x}\|_1$；令$p=2$，便得$\|\boldsymbol{x}\|_2$；并且还有

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|\boldsymbol{x}\|_p$$

向量空间中向量范数

前面讲的是C^n的向量范数

问题：V^n的向量范数怎么构造？

向量空间中向量范数

例2.6 给定线性空间 V^n 的基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，设 $x \in V^n$ 在该基下的坐标向量为 $\tilde{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$，那么

$$\| x \|_p = \| \tilde{x} \|_p \quad (1 \leqslant p < +\infty)$$

满足范数定义的三个条件．因此，它是 V^n 上的范数，也称为 x 的 **p-范数**．

按照例 2.6 的方式，可以在线性空间 V^n 上定义多种不同的向量范数．这样的向量范数不仅依赖于 $\mathbf{C}^n(\mathbf{R}^n)$ 上的向量范数，而且与 V^n 中基的选取密切相关．

$$\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = x \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, k > N$时，有

$$\left\| x^k - x \right\| < \varepsilon$$

?

1、向量范数

2、向量范数的等价性

向量范数的等价性

定义：有限维线性空间 V^n 中任意两个向量范数 $\|x\|_\alpha$ 和 $\|x\|_\beta$，如果存在着正常数 c_1 和 c_2，使得 $c_1\|x\|_\beta \le \|x\|_\alpha \le c_2\|x\|_\beta \qquad (\forall x \in V^n)$

则称范数 $\|x\|_\alpha$ 与 $\|x\|_\beta$ 等价

向量范数的等价性

定义：有限维线性空间 V^n 中任意两个向量范数 $\|x\|_\alpha$ 和 $\|x\|_\beta$，如果存在着正常数 c_1 和 c_2，使得 $c_1\|x\|_\beta \le \|x\|_\alpha \le c_2\|x\|_\beta \qquad (\forall x \in V^n)$

则称范数 $\|x\|_\alpha$ 与 $\|x\|_\beta$ 等价

（1）自反性：$1\cdot\|x\|_\alpha \le \|x\|_\alpha \le 1\cdot\|x\|_\alpha, \forall x \in V^n$

（2）对称性：$\dfrac{1}{c_2}\|x\|_\alpha \le \|x\|_\beta \le \dfrac{1}{c_1}\|x\|_\alpha, \forall x \in V^n$

（3）传递性：$\left.\begin{array}{l} c_1\|x\|_\beta \le \|x\|_\alpha \le c_2\|x\|_\beta \\ c_3\|x\|_\gamma \le \|x\|_\beta \le c_4\|x\|_\gamma \end{array}\right\} \quad \forall x \in V^n$

$$\Rightarrow c_5\|x\|_\gamma \le \|x\|_\alpha \le c_6\|x\|_\gamma$$

向量范数的等价性

二、线性空间 V^n 上的向量范数的等价性

前面已经指出，在数域 K 上的线性空间 V，特别是在 $\mathbf{C}^n$ 上可以定义各种各样的向量范数，其数值大小一般不同．但是，在各种向量范数之间存在下述重要关系．

定理 2.1 设 $\|\boldsymbol{x}\|_\alpha$ 和 $\|\boldsymbol{x}\|_\beta$ 为有限维线性空间 V 的任意两种向量范数（它们不限于 p-范数），则存在两个与向量 $\boldsymbol{x}$ 无关的正常数 c_1 和 c_2，使得不等式

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|_\beta \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_\alpha \leqslant c_2\|\boldsymbol{x}\|_\beta \quad (\forall \boldsymbol{x} \in V) \quad (2.1.9)$$

成立．

$$\lim_{k\to+\infty} x^{(k)} = x \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, k > N$时，有

$\forall \|\cdot\|$：$\left\|x^{k} - x\right\| < \varepsilon$

作业（第五版）

1、定义：2.1、2.2

2、定理：2.1、2.2

3、例题：2.1-2.3， 2.6

4、习题2.1：1

作业（第三版）

1、定义：2.1、2.2

2、定理：2.1、2.2

3、例题：2.1-2.3， 2.6

4、习题2.1：1

下课，谢谢大家！