



北京邮电大学

# 第7讲 量子 (Hamiltonian) 模拟

高 飞

网络空间安全学院





- Hamiltonian模拟的概念
- $k$ -Local型Hamiltonian模拟
- LCU型Hamiltonian模拟
- 典型Hamiltonian模拟结果总结



➤ 量子系统动态演化: 一个封闭量子系统的演化遵循薛定谔方程

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H(t)|\psi\rangle$$

当 $H$ 与时间无关时

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle$$

- $\hbar$ 是普朗克常数,  $t$ 是演化时间
- 封闭系统的Hamiltonian  $H(t)$ 是厄米矩阵, 此时 $e^{-iHt}$ 是酉矩阵
- 经典计算模拟量子系统的复杂度随着qubits数目指数级增长



- 量子系统动态演化：一个封闭量子系统的演化遵循薛定谔方程

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H(t)|\psi\rangle$$

当 $H$ 与时间无关时

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle$$

- $\hbar$ 是普朗克常数， $t$ 是演化时间
- 封闭系统的Hamiltonian  $H(t)$ 是厄米矩阵，此时 $e^{-iHt}$ 是酉矩阵
- 经典计算模拟量子系统的复杂度随着qubits数目指数级增长

- Feynman：提出利用量子计算机模拟量子系统的构想<sup>[1]</sup>

Hamiltonian 模拟：给定访问厄米矩阵 $H$ 的量子黑盒、任意时间 $t$ 以及误差 $\epsilon$ ，如何设计量子电路 $U$ 使其以精度 $\epsilon$ 近似酉操作 $e^{-iHt}$ ？

$$\|U - e^{-iHt}\| \leq \epsilon$$

视情形选某一种范数

- 给出量子态结果，尽管不像经典模拟那样给出数值解（信息更全面），但在需要量子末态（作为下一步的输入）时更优
- 应用：量子化学和材料科学；设计量子算法（如HHL<sup>[2]</sup>、PCA算法<sup>[3]</sup>）

[1] Feynman R P. Simulating physics with computers, IJTP, 1982. [2] Harrow et al., Quantum algorithm for linear systems of equations, PRL, 2009. [3] Lloyd et al., Quantum principal component analysis, Nature physics, 2014.



设  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]^T$  是向量空间  $C^n$  上的任一向量

(1) 1-范数  $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |\mathbf{x}_i|$

(2) 2-范数  $\|\mathbf{x}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |\mathbf{x}_i|^2 \right)^{1/2} = (\mathbf{x}^H \mathbf{x})^{1/2}$

$H$ 表示厄米共轭

(3)  $\infty$ -范数  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |\mathbf{x}_i|$

(4)  $p$ -范数  $\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |\mathbf{x}_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

$(p \geq 1)$

显然在 $p$ -范数中, 令 $p=1, p=2$ 或 $p \rightarrow \infty$ , 则它分别对应了向量的1-范数, 2-范数和 $\infty$ -范数



设 $C^m, C^n$ 上的同类向量范数为 $\|\cdot\|_V$ ，对矩阵 $A \in C^{m \times n}$ ，函数

$$\|A\|_V = \max_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V$$

是 $C^{m \times n}$ 上的矩阵范数。

量子信息中，常假定 $\|\psi\rangle\| = 1$ ，取的是向量的2-范数，对应的是矩阵的2-范数（又称为谱范数），定义为：

$$\|A\|_2 = \max_{|\varphi\rangle} \|A|\varphi\rangle\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$$

其中 $\lambda_1$ 为 $A^\dagger A$ 的最大特征值。



- Hamiltonian模拟的概念
- $k$ -Local型Hamiltonian模拟
- LCU型Hamiltonian模拟
- 典型Hamiltonian模拟结果总结



➤  $k$ -Local Hamiltonians: [1]

$$H = \sum_{j=1}^L H_j$$

- $H_j$  是只作用于少数  $k$  个 qubits 的 Hamiltonian (用  $I$  补齐  $e^{-iH_j t}$  的维度)
- 作用在小的子系统上的  $e^{-iH_j t}$  可以直接用量子线路来近似【假设其复杂度为  $O(1)$ 】
- 很多物理系统的  $H$  满足该特点, 例如 Hubbard 和 Ising 模型

➤  $e^{-iHt} = \prod_j e^{-iH_j t}$  是否成立? 若成立, 组合小系统的模拟线路即可

矩阵函数的一般化定义: 对可对角化的矩阵  $A$  (如酉矩阵、厄米矩阵), 设

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}, \text{ 则有 } f(A) = P \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix} P^{-1}$$

[1] Lloyd S. Universal Quantum Simulators. Science, 1996, 273(5278):1073-1078.





➤  $k$ -Local Hamiltonians: [1]

$$H = \sum_{j=1}^L H_j$$

- $H_j$  是只作用于少数  $k$  个 qubits 的 Hamiltonian (用  $I$  补齐  $e^{-iH_j t}$  的维度)
- 作用在小的子系统上的  $e^{-iH_j t}$  可以直接用量子线路来近似【假设其复杂度为  $O(1)$ 】
- 很多物理系统的  $H$  满足该特点, 例如 Hubbard 和 Ising 模型

➤  $e^{-iHt} = \prod_j e^{-iH_j t}$  是否成立?

No, 只有所有  $H_j$  对易才成立!

定理. 若两个厄米算子  $A$  和  $B$  对易, 即  $[A, B] = AB - BA = 0$ , 则

$$e^{-i(A+B)t} = e^{-iAt} e^{-iBt}$$

根据引理易证  
定理 (下页)

引理. 设  $A$  和  $B$  是厄米算子, 则

$A$  和  $B$  对易  $\Leftrightarrow$  存在一个标准正交基, 使  $A$  和  $B$  同时对角化



若 $AB$ 对易，则

$$A + B = P \begin{bmatrix} \lambda_1^A & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^A \end{bmatrix} P^{-1} + P \begin{bmatrix} \lambda_1^B & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^B \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{bmatrix} \lambda_1^A + \lambda_1^B & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^A + \lambda_n^B \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$e^{-i(A+B)t} = P \begin{bmatrix} e^{-i(\lambda_1^A + \lambda_1^B)t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{-i(\lambda_n^A + \lambda_n^B)t} \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{bmatrix} e^{-i\lambda_1^A t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{-i\lambda_n^A t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\lambda_1^B t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{-i\lambda_n^B t} \end{bmatrix} P^{-1} = e^{-iAt} e^{-iBt}$$

中间加 $P^{-1}P$



- Suzuki 公式：令  $A$  和  $B$  是厄米算子， $t$  取值足够小时，有

$$\left\| e^{-i(A+B)t} - e^{-iAt/2} e^{-iBt} e^{-iAt/2} \right\| = O(t^3)$$

□ 泰勒展开每个指数项即可证明：  $e^{iAt} = I + iAt - \frac{1}{2}A^2t^2 + O(t^3)$

□ 一个具体的界<sup>[1]</sup>：

$$\left\| e^{-i(A+B)t} - e^{-\frac{iAt}{2}} e^{-iBt} e^{-\frac{iAt}{2}} \right\| \leq t^3 * f(A, B)$$

其中  $f(A, B) = \frac{1}{12} \left( \|[A, B], B\| + \frac{1}{2} \|[A, B], A\| \right) \exp(\|iAt\| + \|iBt\|)$  为常数  
(注意  $t$  足够小)

- 推广到  $L$  个矩阵求和<sup>[2]</sup>：令  $H_j$  是厄米算子， $\max_j \|H_j\| = \Lambda = O(1)$ ，有

$$\left\| e^{-it \sum_{j=1}^L H_j} - \prod_{j=1}^L e^{-H_j t/2} \prod_{j'=L}^1 e^{-H_{j'} t/2} \right\| = O((Lt)^3)$$

其中  $t$  满足  $|2\Lambda t| \leq 1$ ,  
(即足够小)



$$\left[ e^{-iH_1 t/2} e^{-iH_2 t/2} \dots e^{-iH_{L-1} t/2} \right] e^{-iH_L t} \left[ e^{-iH_{L-1} t/2} \dots e^{-iH_2 t/2} e^{-iH_1 t/2} \right]$$



## ➤ Suzuki公式

$$\left\| e^{-it \sum_j^L H_j} - \left[ e^{-iH_1 t/2} e^{-iH_2 t/2} \dots e^{-iH_{L-1} t/2} \right] e^{-iH_L t} \left[ e^{-iH_{L-1} t/2} \dots e^{-iH_2 t/2} e^{-iH_1 t/2} \right] \right\| = O((Lt)^3)$$

可由小系统上的模拟电路组合实现，但 $t$ 必须足够小才行：一方面 $t$ 足够小上式才成立；另一方面 $t$ 大的话误差 $O((Lt)^3)$ 太大

➤ 黄皮书P178：把 $t$ 分解成小段，分别模拟，可缩小误差！

盒子

4.1 中也证明，如果执行一系列的门运算 $V_1, \dots, V_m$ 来近似另外一系列门 $U_1, \dots, U_m$ ，则误差至多以线性相加，即

$$E(U_m U_{m-1} \dots U_1, V_m V_{m-1} \dots V_1) \leq \sum_{j=1}^m E(U_j, V_j) \quad (4.63)$$

误差函数： $E(U, V) \equiv \max_{|\varphi\rangle} \|(U - V)|\varphi\rangle\|_2$



➤ Suzuki公式

$$\left\| e^{-it \sum_j^L H_j} - \left[ e^{-iH_1 t/2} e^{-iH_2 t/2} \dots e^{-iH_{L-1} t/2} \right] e^{-iH_L t} \left[ e^{-iH_{L-1} t/2} \dots e^{-iH_2 t/2} e^{-iH_1 t/2} \right] \right\| = O((Lt)^3)$$

➤ 将时间  $t$  平分为  $2m$  小段，即  $t=2m\Delta t$ ，则  $2\Delta t$  时间段的酉操作：

$$e^{-iH 2\Delta t} = U_{2\Delta t} + O((L\Delta t)^3), \text{ 其中}$$

$$U_{2\Delta t} = \left[ e^{-iH_1 \Delta t} e^{-iH_2 \Delta t} \dots e^{-iH_{L-1} \Delta t} \right] e^{-iH_L 2\Delta t} \left[ e^{-iH_{L-1} \Delta t} \dots e^{-iH_2 \Delta t} e^{-iH_1 \Delta t} \right]$$

根据盒子4.1，门序列的整体误差最多是单个门误差的和，因此重复执行  $m$  次  $U_{2\Delta t}$ ，产生的误差为( $\alpha$ 是一常数):  $E(U_{2\Delta t}^m, e^{-iH 2m\Delta t}) \leq m\alpha(L\Delta t)^3$

对比——不分段时误差更大：对  $t=2m\Delta t$  直接模拟，误差  $\leq \alpha(L * 2m\Delta t)^3$



➤ Suzuki公式

$$\left\| e^{-it \sum_j^L H_j} - \left[ e^{-iH_1 t/2} e^{-iH_2 t/2} \dots e^{-iH_{L-1} t/2} \right] e^{-iH_L t} \left[ e^{-iH_{L-1} t/2} \dots e^{-iH_2 t/2} e^{-iH_1 t/2} \right] \right\| = O((Lt)^3)$$

➤ 将时间  $t$  平分为  $2m$  小段，即  $t=2m\Delta t$ ，则  $2\Delta t$  时间段的酉操作：

$$e^{-iH 2\Delta t} = U_{2\Delta t} + O((L\Delta t)^3), \text{ 其中}$$

$$U_{2\Delta t} = \left[ e^{-iH_1 \Delta t} e^{-iH_2 \Delta t} \dots e^{-iH_{L-1} \Delta t} \right] e^{-iH_L 2\Delta t} \left[ e^{-iH_{L-1} \Delta t} \dots e^{-iH_2 \Delta t} e^{-iH_1 \Delta t} \right]$$

根据盒子4.1，门序列的整体误差最多是单个门误差的和，因此重复执行  $m$  次  $U_{2\Delta t}$ ，产生的误差为( $\alpha$ 是一常数):  $E(U_{2\Delta t}^m, e^{-iH 2m\Delta t}) \leq m\alpha(L\Delta t)^3$

分多少段才行？ 若令  $m\alpha(L\Delta t)^3 = \epsilon$ ，则有  $m = O((Lt)^{3/2} \epsilon^{-1/2})$

$$t=2m\Delta t$$

算法的复杂度为  $O(L^{5/2} t^{3/2} \epsilon^{-1/2})$ ：每段要模拟  $L$  个  $H_l$ ，所以乘了  $L$   
当  $L, 1/\epsilon = O(\text{poly}(\log N))$  时，对于维数  $N$ ，相对经典算法有指数加速效果

## ➤ $k$ -Local型Hamiltonian模拟

哈密顿量的形式、前提条件	核心思想	复杂度
$H = \sum_{j=1}^L H_j$ ，即 $H$ 是以一些只作用于少数qubits上的哈密顿量 $H_j$ 之和， $\max_j \ H_j\  = O(1)$ ； 且 每个 $e^{-iH_j\Delta t}$ 都必需存在有效的量子线路实现。	1. 利用Suzuki公式，可将 $e^{-iHt}$ 近似分解为一系列（易实现的） $e^{-iH_jt}$ 的乘积  2. 可通过将模拟时间分段来降低误差	$O(L^{5/2}t^{3/2}\epsilon^{-1/2})$ ，  当 $L, 1/\epsilon = O(\text{poly}(\log N))$ 时对维数 $N$ 指数加速

分段方法并非万能：每个 $H_j$ 易模拟，所以 $U_{2\Delta t}$ 易实现；反之若不满足条件（可分解成易模拟的厄米算子之和），则不行

未来研究：若某类厄米算子可给出符合条件的分解，则能用该方法模拟



- Hamiltonian模拟的概念
- $k$ -Local型Hamiltonian模拟
- LCU型Hamiltonian模拟
- 典型Hamiltonian模拟结果总结





➤  $k$ -Local Hamiltonians:

$$H = \sum_{j=1}^L H_j$$

□  $H_j$  是只作用于少数  $k$  个 qubits 的 Hamiltonian (用  $I$  补齐维度)

□ 作用在小的子系统上的  $e^{-iH_j t}$  可以直接用量子线路来近似【假设其复杂度为  $O(1)$ 】

➤ 其实求和形式的  $H$ , 还有一种模拟思路

泰勒展开  
忽略  $k$  太大的项

$$U \equiv \exp(-iHt) \approx \sum_{k=0}^K \frac{(-iHt)^k}{k!} \equiv \tilde{U}$$

代入  $H$  的求和式, 发现这个酉操作是多个  $H_j$  及它们间乘积的线性组合

$$\tilde{U} = I + (-it) \sum_{j=1}^L H_j + \frac{(-it)^2}{2!} \left( \sum_{j=1}^L H_j \right)^2 + \frac{(-it)^3}{3!} \left( \sum_{j=1}^L H_j \right)^3 + \dots$$

如果每个  $H_j$  是容易实现的酉算子, 有办法可以实现这个  $\tilde{U}$ !



➤ LCU (Linear Combination of Unitaries) 型Hamiltonian:

$$H = \sum_{l=1}^L \alpha_l H_l$$

注：这里要保证 $H_l$ 是酉的，所以不能像 $k$ -local中那样把 $\alpha_l$ 吸收到 $H_l$ 中

其中， $\alpha_l$ 是一些正实数（如果是复数，相位可以吸收到 $H_l$ 中）， $H_l$ 是一些容易实现的酉矩阵

- 很多Hamiltonian都是以这样的形式给出，如一些Pauli矩阵构成的 $k$ -local型以及量子化学中的某些Hamiltonian等；
- 理论上，任意Hamiltonian都可以分解为酉矩阵的线性组合；但一般来说，若只给出 $H$ ，找到一个好的分解（ $L=O(\text{poly}(\log N))$ ）是难的
- 这里是酉矩阵的组合，不能用 $k$ -local方法模拟（ $H_l$ 是酉的，所以 $e^{-iH_l t}$ 不一定是酉的，不一定能实现）



➤ LCU (Linear Combination of Unitaries) 型Hamiltonian:

$$H = \sum_{l=1}^L \alpha_l H_l$$

泰勒展开  
取近似

$$U \equiv \exp(-iHt) \approx \sum_{k=0}^K \frac{(-iHt)^k}{k!} \equiv \tilde{U}$$

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= I + (-it) \sum_{l=1}^L \alpha_l H_l + \frac{(-it)^2}{2!} \left( \sum_{l=1}^L \alpha_l H_l \right)^2 + \frac{(-it)^3}{3!} \left( \sum_{l=1}^L \alpha_l H_l \right)^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^K \sum_{l_1, \dots, l_k=1}^L \frac{t^k}{k!} \alpha_{l_1} \cdots \alpha_{l_k} (-i)^k H_{l_1} \cdots H_{l_k} \end{aligned}$$

$k$ 表示该项有 $k$ 个 $H_l$ 的乘积  
 $l_1, \dots, l_k$ 表示是哪 $k$ 个 $H_l$

为表示展开中的不同项, 定义指标集  $\tilde{J} = \{(k, l_1, \dots, l_k) : k \leq K, l_1, \dots, l_k \in \{1, \dots, L\}\}$

则上式 =  $\sum_{(k, l_1, \dots, l_k)} \beta_{(k, l_1, \dots, l_k)} V_{(k, l_1, \dots, l_k)} = \sum_{j \in \tilde{J}} \beta_j V_j$  (或写为  $= \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j V_j$ )

明显, 上式为  $m = \sum_{k=0}^K L^k$  项酉算子的求和。如何实现酉算子的线性组合?

不是无用功: 原来 $H$ 是酉算子的线性组合, 现在把 $\exp(-iHt)$ 表示成了酉算子的线性组合



# 如何实现酉操作的叠加

➤ 先考虑最简单的情形： 令  $M = U_0 + U_1$ ，实现  $M|\psi\rangle$

1. 对初始态  $|0\rangle|\psi\rangle$  的第一量子比特做Hadamard变换：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi\rangle + |1\rangle|\psi\rangle)$$

2. 应用  $\text{select}(V) = |0\rangle\langle 0| \otimes U_0 + |1\rangle\langle 1| \otimes U_1$ ，得：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle U_0 |\psi\rangle + |1\rangle U_1 |\psi\rangle)$$

3. 对第一量子比特做Hadamard变换：

$$\frac{1}{2} [|0\rangle (U_0 + U_1) |\psi\rangle + |1\rangle (U_0 - U_1) |\psi\rangle]$$

当测量第一量子比特的结果为  $|0\rangle$  时，第二寄存器即为  $M|\psi\rangle$



➤  $\tilde{U} = \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j V_j$  可以用类似的线路来实现：

令  $B|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\beta_j} |j\rangle$ ，其中  $s = \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j$  为归一化因子

$$\text{select}(V) = \sum_{j=0}^{m-1} |j\rangle\langle j| \otimes V_j, \quad W = (B^\dagger \otimes \mathbb{I})[\text{select}(V)](B \otimes \mathbb{I})$$

$$\text{则} \quad W|0\rangle|\psi\rangle = \frac{1}{s}|0\rangle\tilde{U}|\psi\rangle + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}|\Phi\rangle$$

其中， $|\Phi\rangle$  中的辅助量子比特（即R1）与  $|0\rangle$  正交。

证明略



➤  $\tilde{U} = \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j V_j$  可以用类似的线路来实现：

令  $B|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\beta_j} |j\rangle$ ，其中  $s = \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j$  为归一化因子

$$\text{select}(V) = \sum_{j=0}^{m-1} |j\rangle\langle j| \otimes V_j, \quad W = (B^\dagger \otimes \mathbb{I})[\text{select}(V)](B \otimes \mathbb{I})$$

$$\text{则} \quad W|0\rangle|\psi\rangle = \frac{1}{s}|0\rangle\tilde{U}|\psi\rangle + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}|\Phi\rangle$$

其中， $|\Phi\rangle$  中的辅助量子比特（即R1）与 $|0\rangle$ 正交。

证明略

此时，测量R1，若全0（**概率为** $|1/s|^2$ ），则R2为 $\tilde{U}|\psi\rangle$ ，即实现了 $\tilde{U}$ 操作

**幅度放大：**利用特殊的Oblivious AA，当 $s=2$ 时，经过1次迭代，即可将R1测得全0的概率放大到1

细节略

➤ 对具体模拟时间  $t$  可以分段处理，小段时长可选为使得  $s=2$  成立的时长

□ 取满足  $(\alpha_1 + \dots + \alpha_L)t/r \approx \ln 2$  的  $r$ ，将模拟时间  $t$  平均分为  $r$  段，则  $s=2$



## ➤ 大致流程

- 每一时间段  $t/r$  分别进行模拟
- 模拟中用到OAA来提高成功概率

哈密顿量	核心思想	复杂度	注意
$H = \sum_{l=1}^L \alpha_l H_l$ <p>即<math>H</math>是以一些容易实现的酉矩阵的线性组合</p>	<p>用Taylor级数近似<math>e^{-iHt}</math>，然后用特殊方法实现酉算子的线性组合；</p> <p>用OAA实现幅度放大</p>	<p><math>O\left(L \frac{\alpha t \log(\alpha t / \epsilon)}{\log \log(\alpha t / \epsilon)}\right)</math> 个基本门；</p> <p><math>O\left(\frac{\alpha t \log(\alpha t / \epsilon)}{\log \log(\alpha t / \epsilon)}\right) \uparrow \text{C-select}(H)</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-top: 10px;"> <math display="block">\alpha = \sum_{l=1}^L \alpha_l</math> </div>	<p>(1)该方法适用于<math>L</math>不太大的情况（若<math>L</math>太大，复杂度就会比较高，效果不好）</p> <p>(2)根据实际情况，受控酉算子可以用更简单的量子线路等效实现</p>

- Hamiltonian模拟的概念
- $k$ -Local型Hamiltonian模拟
- LCU型Hamiltonian模拟
- 典型Hamiltonian模拟结果总结

- [1] Lloyd S. Universal Quantum Simulators. Science, 1996, 273(5278):1073-1078.
- [2] D. W. Berry, A. M. Childs, R. Cleve, R. Kothari, and R. D. Somma, “Simulating Hamiltonian Dynamics with a Truncated Taylor Series,” Physical Review Letters 114, 090502 (2015).
- [3] G. H. Low and I. L. Chuang, “Optimal Hamiltonian Simulation by Quantum Signal Processing,” Physical Review Letters 118, 010501 (2017).
- [4] S. Lloyd, M. Mohseni, and P. Rebentrost, “Quantum principal component analysis,” Nature Physics 10, 631 (2014).
- [5] Patrick Rebentrost, Adrian Steffens, and Seth Lloyd, Quantum singular value decomposition of non-sparse low-rank matrices, arXiv: 1607:05404
- [6] Low, Guang Hao, and Isaac L. Chuang. Hamiltonian simulation by qubitization. Quantum 3 (2019): 163
- [7] Chakraborty S, Gilyén A, Jeffery S. The Power of Block-Encoded Matrix Powers: Improved Regression Techniques via Faster Hamiltonian Simulation. ICALP 2019.



哈密顿量类型		前提	方法	复杂度
K-local [1] $H = \sum_{j=1}^L H_j$ , $H_j$ 是只作用于不大于 $k$ 个 qubits		<ul style="list-style-type: none"><li><math>\max_j \ H_j\  = O(1)</math></li><li>每个 <math>H_j</math> 都易模拟, 即 <math>e^{-iH_j t}</math> 可有效实现</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>用Suzuki公式分解 <math>e^{-iHt}</math></li><li>分段模拟</li></ul>	$O(Lt^{3/2}\epsilon^{-1/2})$
LCU [2] $H = \sum_{l=1}^L \alpha_l H_l$		$H_l$ 是易实现的酉矩阵	<ul style="list-style-type: none"><li>用Taylor级数近似 <math>e^{-iHt}</math>, 然后用LCU 线路实现</li><li>分段模拟</li></ul>	$O\left(L \frac{\alpha t \log(\alpha t / \epsilon)}{\log \log(\alpha t / \epsilon)}\right)$ + 若干 C-select(H)
$d$ 稀疏 [3]		访问H中任意元素和非零元素位置的两个黑盒	量子信号处理	$O\left(\tau + \frac{\log(1/\epsilon)}{\log \log(1/\epsilon)}\right)$
$d = poly(logN)$ 时指数加速				
密度算子模拟 [4]		给定多份未知量子态 $\rho$	分段+Swap模拟	$O\left(\frac{t^2}{\epsilon} poly(logN)\right)$
$A/N$ 模拟 [5]		访问A 元素的oracle	分段+Swap模拟	$O\left(\frac{\ A\ _{\max}^2 t^2}{\epsilon} poly(logN)\right)$
Block encoding:[6,7]	$d$ 稀疏	存在访问H中任意元素和非零元素位置的两个 oracle	设计对应于不同类型的H的block encoding	$O(\tau + \log(1/\epsilon))$
	LCU:	存在可制备关于 $\alpha_l$ 和 $H_l$ 的酉算子	$N$ : 维度; $t$ : 时间 $\epsilon$ : 误差/encoding参数 $d$ : 稀疏度; $\tau$ : $d\ H\ _{\max}t$ ; $\alpha$ : $\sum_l \alpha_l$ $\mu$ : block-encoding参数	$O(\alpha t + \log(1/\epsilon))$
	密度算子 $\rho$	存在黑盒可以制备对应于 $\rho$ 的量子态		$O(t + \log(1/\epsilon))$
	稠密矩阵	矩阵以特定的数据结构进行存储, 并用QRAM访问		$O(\mu t polylog(N/\epsilon))$
非指数加速				



# 谢谢!

