矩阵理论与方法

10月

内容提要 CONTENTS

- □ 课程信息
- □ 课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

  第1章 线性空间与线性变换

  1.2 线性变换及其矩阵

回顾

1、线型空间的定义

2、基、向量在基下的坐标

3、线型变换的定义和基本运算

4、线型变换在基下的矩阵

1、$x=(E_1,\ldots,E_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, y=(E_1,\ldots,E_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},$

2、$T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)A$

3、$y=T(x)=T(E_1,\ldots,E_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(E_1,\ldots,E_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

4、$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\ldots,e_n$下求向量坐标

1、2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\ldots,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,\ldots,E_n$下的矩阵A

4、若T有N个线型无关特征向量，则$A=P^{-1}\Lambda P$

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\dots,e_n$下求向量坐标

问题c

问题a

1,2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\dots,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,\dots,E_n$下的矩阵A

4、若T有N个线型无关特征向量，则$A=P^{-1}\Lambda P$

问题b

1.2 线性变换及其矩阵

问题a

设V是线性空间，$e_1,\ldots,e_n$是V的一组基，x是V的一个向量，

$$x=(e_1,\ldots,e_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

(通过坐标变换)求：向量x在基$E_1,\ldots,E_n$下的坐标$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

例：考虑线线空间R^3上的两组基：

(1)$e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)$

(2)$E_1=(1,0,0), E_2=(1,1,0), E_3=(1,1,1)$

求向量(2,3,5)在基E_1, E_2, E_3下的坐标

例：考虑线线空间R^3上的两组基：

(1)$e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)$

(2)$E_1=(1,0,0), E_2=(1,1,0), E_3=(1,1,1)$

显然,$(2,3,5)=(e_1,e_2,e_3)(2,3,5)^T$

求向量(2,3,5)在基E_1,E_2,E_3下的坐标

例：考虑线线空间R^3上的两组基：

$(1)e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$

$(2)E_1=(1,0,0),E_2=(1,1,0),E_3=(1,1,1)$

显然,$(2,3,5)=(e_1,e_2,e_3)(2,3,5)^T$

求向量$(2,3,5)$在基E_1,E_2,E_3下的坐标X

解：显然,

$$E_1=(e_1,e_2,e_3)(1,0,0)^T$$

$$E_2=(e_1,e_2,e_3)(1,1,0)^T$$

$$E_3=(e_1,e_2,e_3)(1,1,1)^T$$

例：考虑线线空间R^3上的两组基：

(1)$e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)$

(2)$E_1=(1,0,0), E_2=(1,1,0), E_3=(1,1,1)$

显然,$(2,3,5)=(e_1,e_2,e_3)(2,3,5)^T$

求向量(2,3,5)在基E_1,E_2,E_3下的坐标X

解：显然,

$$E_1=(e_1,e_2,e_3)(1,0,0)^T$$

$$E_2=(e_1,e_2,e_3)(1,1,0)^T$$

$$E_3=(e_1,e_2,e_3)(1,1,1)^T$$

$\Rightarrow$

$$(E_1,E_2,E_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=(e_1,e_2,e_3)C$$

例：考虑线线空间R^3上的两组基：

(1)$e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)$

(2)$E_1=(1,0,0), E_2=(1,1,0), E_3=(1,1,1)$

显然,$(2,3,5)=(e_1,e_2,e_3)(2,3,5)^T$

求向量(2,3,5)在基E_1,E_2,E_3下的坐标X

解：显然，

$$E_1=(e_1,e_2,e_3)(1,0,0)^T$$

$$E_2=(e_1,e_2,e_3)(1,1,0)^T$$

$$E_3=(e_1,e_2,e_3)(1,1,1)^T$$

$$\Rightarrow$$

$$(E_1,E_2,E_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=(e_1,e_2,e_3)C$$

$$X=C^{-1}(2,3,5)^T$$

定义：V为数域P上n维线性空间 $x_1,x_2,\cdots,x_n$；

$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为V中的两组基，且

$$(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

设 $x\in V$ 且x在基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与基 $y_1,y_2,\cdots,y_n$

下的坐标分别为 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 与 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，

即，

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix} \text{与} \quad x=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\vdots\\\eta_n\end{pmatrix}$$

则 $$\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\vdots\\\eta_n\end{pmatrix} \qquad (*)$$

或 $$\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\vdots\\\eta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_n\end{pmatrix} \qquad (**)$$

称(*)或(**)为向量x在基变换C下的**坐标变换公式**.

1.2 线性变换及其矩阵

例： 设矩阵空间 $R^{2\times 2}$ 的子空间为

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2} \mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}$$

V中的线性变换为 $T(X)=X+X^T$

考虑V的两个基 $(1) X_1=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(2) Y_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, Y_2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Y_3=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

求 $T(Y_1)$ 在这两个基下的坐标

解：显然$T(Y_1)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(Y_1,Y_2,Y_3)=(X_1,X_2,X_3)C$

解：显然$T(Y_1)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$Y_1=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad Y_2=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad Y_3=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(Y_1,Y_2,Y_3)=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}=(X_1,X_2,X_3)C$$

解：显然$T(Y_1)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$

$$Y_1=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix},\quad Y_2=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\quad Y_3=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$(Y_1,Y_2,Y_3)=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=(X_1,X_2,X_3)C$$

$$T(Y_1)=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=(Y_1,Y_2,Y_3)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}=\dots\begin{pmatrix}-1\\ -\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

例： 设矩阵空间 $R^{2\times2}$ 的子空间为

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0,x_{ij}\in R\}$$

V中的线性变换为 $T(X)=X+X^T$

考虑V的两个基 $(1)X_1=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix},X_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$(2)Y_1=\begin{pmatrix}1&1\\-2&0\end{pmatrix},Y_2=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix},Y_3=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}$

求$T(Y_1),T(Y_2),T(Y_3)$在基Y_1,Y_2,Y_3下的坐标

解：显然$T(Y_1)=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$,

$T(Y_2)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$,

$T(Y_3)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$,

$T(Y_1,Y_2,Y_3)=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}=$

$(Y_1,Y_2,Y_3)\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}=\ldots\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ -3 & 5 & 1\\ -3 & 1 & 5\end{pmatrix}$

1.2 线性变换及其矩阵

例： 设矩阵空间 $R^{2\times2}$ 的子空间为

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times2}\,|\,x_{11}+x_{12}+x_{21}=0,x_{ij}\in R\}$$

V中的线性变换为 $T(X)=X+X^T$

考虑V的两个基 $(1)X_1=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},X_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$(2)Y_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix},Y_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},Y_3=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

求 T 在这两个基下的矩阵

解：$T(Y_1,Y_2,Y_3)=(Y_1,Y_2,Y_3)\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ -3 & 5 & 1\\ -3 & 1 & 5\end{pmatrix}=(Y_1,Y_2,Y_3)A$

$T(X_1,X_2,X_3)=(X_1,X_2,X_3)A_0$

解：$T(Y_1,Y_2,Y_3)=(Y_1,Y_2,Y_3)\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ -3 & 5 & 1\\ -3 & 1 & 5\end{pmatrix}=(Y_1,Y_2,Y_3)A$

$$T(X_1,X_2,X_3)C=(X_1,X_2,X_3)CA$$

$$T(X_1,X_2,X_3)=(X_1,X_2,X_3)A_0$$

解： $T(Y_1,Y_2,Y_3)=(Y_1,Y_2,Y_3)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ -3 & 5 & 1\\ -3 & 1 & 5\end{pmatrix}=(Y_1,Y_2,Y_3)A$

$$T(X_1,X_2,X_3)C=(X_1,X_2,X_3)CA$$

$$T(X_1,X_2,X_3)=(X_1,X_2,X_3)A_0$$

$$A_0=CAC^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ -3 & 5 & 1\\ -3 & 1 & 5\end{pmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\ldots,e_n$下求向量坐标

问题c

问题a

1,2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\ldots,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,\ldots,E_n$下的矩阵A

4、若T有N个线型无关特征向量，则$A=P^{-1}\Lambda P$

问题b

1.2 作业（第五版）

1、例题：1.7、1.8

2、习题1.1：7、8

3、习题1.2：7、11

1.2 作业（第三版）

1、例题：1.7、1.8

2、习题1.1：8、9

3、习题1.2：7、11

下课，谢谢大家！