矩阵理论与方法

2020年10月

内容提要 CONTENTS

- 课程信息
- 课程介绍
- 矩阵理论与方法

  第1章 线性空间与线性变换

  1.2 线性变换及其矩阵

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^{k}\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\ldots,e_n$下求向量坐标

问题c

问题a

1､2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\ldots,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,\ldots,E_n$下的矩阵A　　$T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)A$

$\boxed{\text{4、若}T\text{有}n\text{个线型无关特征向量，}}$则$A=P^{-1}\Lambda P$

问题b

$$T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)P^{-1}\Lambda P$$

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\ldots,e_n$下求向量坐标

问题c

1、2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\ldots,E_n$下的坐标

问题a

3、求T在基$E_1,\ldots,E_n$下的矩阵A　　$T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)A$

4、T不一定有n个线型无关特征向量，则$A=P^{-1}BP$

问题b'

$$T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)P^{-1}BP$$

1.2 线性变换及其矩阵

例：设x_1,x_2为线性空间V一组基， 线性变换T 在这组基下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

y_1,y_2 为V的另一组基，且

$$(y_1,y_2)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

（1）求T在y_1,y_2下的矩阵B.

（2）求 A^k.

1.2 线性变换及其矩阵

解：（1）T在基 y_1, y_2 下的矩阵

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

（2）由 $B=C^{-1}AC$，有 $A=CBC^{-1}$，

于是 $A^k=CB^kC^{-1}$.

$$\therefore\ A^k=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k+1 & k\\ -k & -k+1\end{pmatrix}.$$

$$A = P^{-1} J P$$

```
A =

    4.3872    3.2635   -1.4547   -0.3074   -4.7693    1.6548   -3.9557   -3.9182   -1.1640    3.4728
    2.1258    3.4875   -0.6553    1.1119   -7.8745    4.4948   -3.2054   -1.8387   -1.7347    2.3292
   -2.1871   -0.1931    0.6520   -0.6642    1.1895    1.0645    1.2764    0.9280    1.3828   -1.0056
   -2.6085   -1.3640   -0.6359    1.8504    4.3614   -1.4771    5.2970    3.4848    2.0870   -2.2626
    0.2592   -0.6483    0.7463   -0.3575    3.2197   -0.8695    0.5806    0.1821   -0.1522   -0.3388
    0.1116    0.0544    1.1101   -1.1550    2.3203   -0.4454   -0.5788   -0.1913   -0.0620    0.4830
    0.2678   -0.5523    0.5032   -0.1194    1.9010   -2.2007    2.7940    0.4232   -0.3210   -0.3197
    2.9058    2.6022   -1.4746    0.3259   -5.0467    1.0706   -4.1333   -1.8168   -1.4058    3.1983
   -0.0210    0.0737   -0.0756    0.4271   -0.7650    0.8645   -0.2924    0.3843    2.1042    0.1352
   -3.2000   -2.0375   -0.2184   -1.7735    9.1490   -4.4875    6.7559    3.1908    2.4801   -1.2331
```

```
>> norm(A-invP*J*P)

ans =

     0
```

```
invP=inv(P);
```

$$A = P^{-1}JP$$

invP =

0.0062	-0.0137	-0.0129	-0.0361	-0.0461	-0.0063	-0.0219	0.0455	0.0218	-0.0432
-0.1164	0.1338	0.0884	0.2932	0.4891	-0.2266	0.2953	-0.0909	0.1052	0.1724
-0.1404	0.2122	0.1453	0.3829	0.5701	-0.2968	0.4923	-0.1799	0.1896	0.2531
0.0779	-0.0959	-0.0802	-0.1488	-0.3423	0.1605	-0.2109	0.0729	-0.1051	-0.1733
-0.2123	0.3654	0.1193	0.4860	0.7700	-0.3217	0.6324	-0.2570	0.1625	0.3516
-0.1986	0.2435	0.0914	0.3165	0.5988	-0.2579	0.3402	-0.1850	0.1383	0.2704
-0.1098	0.1006	0.0169	0.0653	0.1532	-0.0472	0.0957	-0.0653	-0.0295	0.1004
-0.3591	0.3960	0.1878	0.6637	1.2468	-0.5797	0.8084	-0.3800	0.2505	0.5801
-0.2085	0.3170	0.1038	0.3995	0.6429	-0.2307	0.6026	-0.2699	0.0889	0.2756
0.0616	-0.0010	-0.0168	-0.1226	-0.2240	0.0947	-0.0782	0.0034	-0.0778	-0.0969

J =

1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	2	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	2	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	3	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	3	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	3

P =

-7	3	-7	-5	9	-4	-10	2	-5	8
3	2	-3	-2	8	4	1	-3	-5	7
-10	9	8	-10	-9	3	7	-7	2	6
-9	2	6	11	4	0	3	-2	-5	-5
0	6	-9	-7	-3	3	-7	-1	6	1
-9	-1	-3	-8	-2	5	-3	-8	9	-10
6	-2	0	-3	0	-7	1	1	4	-2
6	6	-2	-7	8	-8	9	-4	-4	-4
4	-9	3	-1	-2	9	-7	-3	3	-7
-8	-8	2	-4	9	-7	7	1	-8	-5

$$A = P^{-1}JP \qquad A^k = P^{-1}J^kP$$

```
J =

     1     1     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     2     1     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     2     1     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     2     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0    -1     1     0     0     0
     0     0     0     0     0     0    -1     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     3     1     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     3     1
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     3
```

```
>> norm(A-invP*J*P)

ans =

     0
```

```
>> norm(A^10-invP*J^10*P)

ans =

   1.9472e-09
```

```
J10 =

           1          10           0           0           0           0           0           0           0           0
           0           1           0           0           0           0           0           0           0           0
           0           0        1024        5120       11520           0           0           0           0           0
           0           0           0        1024        5120           0           0           0           0           0
           0           0           0           0        1024           0           0           0           0           0
           0           0           0           0           0           1         -10           0           0           0
           0           0           0           0           0           0           1           0           0           0
           0           0           0           0           0           0           0       59049      196830      295245
           0           0           0           0           0           0           0           0       59049      196830
           0           0           0           0           0           0           0           0           0       59049
```

$$A = P^{-1} J P$$

```
clc
clear

A = [-1 1 0;
     -4 3 0;
      1 0 2 ];

[invP,J] = jordan(A);
P = inv(invP);
A
invP
J
P
norm(A-invP*J*P)
```

$$=$$

```
A =

    -1     1     0
    -4     3     0
     1     0     2


invP =                J =                   P =

     0    -2     1        2     0     0        1.0000   -1.0000   -1.0000
     0    -4     0        0     1     1             0   -0.2500         0
    -1     2     1        0     0     1        1.0000   -0.5000         0



>> norm(A-invP*J*P)

ans =

     0
```

1.2 线性变换及其矩阵

```
A=[-1 1 0;-4 3 0;1 0 2];

[P,L]=eig(A)
```

```
命令行窗口
P =

        0    0.4082    0.4082
        0    0.8165    0.8165
   1.0000   -0.4082   -0.4082


L =

     2     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ & \lambda_2 & 1 \\ & & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

问题b'

1、求$A = P^{-1}BP$，其中B是三角矩阵

2、求$A = PJP^{-1}$，其中J是Jordan标准型

1.2 线性变换及其矩阵

P_{34} 1.17　定理：任意**n**阶矩阵**A**与三角矩阵相似

1.2 线性变换及其矩阵

Hamilton—Caylay定理 设 $A \in K^{n\times n}$ 其特征多项式

$$\varphi(\lambda)=\left|\lambda I-A\right|=\lambda^{n}+a_{1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_{n}$$

则 $\varphi(A)=A^{n}+a_{1}A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_{n}I=0.$

1.2 线性变换及其矩阵

Hamilton—Caylay定理 设 $A \in K^{n\times n}$ 其特征多项式

$$\varphi(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

则 $\varphi(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_n I = 0.$

证明:A的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ，即

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

必然存在可逆矩阵 $P_{n\times n}$ ，使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\varphi(P^{-1}AP)=(P^{-1}AP-\lambda_1 I)(P^{-1}AP-\lambda_2 I)\cdots(P^{-1}AP-\lambda_n I)$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2-\lambda_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n-\lambda_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda_2 & * & \cdots & * \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n-\lambda_2 \end{bmatrix}\cdots(P^{-1}AP-\lambda_n I)$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda_3 & * & * & \cdots & * \\ & \lambda_2-\lambda_3 & * & \cdots & * \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ & & & & \lambda_2-\lambda_3 \end{bmatrix}\cdots(P^{-1}AP-\lambda_n I)$$

$$=0$$

即 $P^{-1}\varphi(A)P=0 \quad \Rightarrow \varphi(A)=0$

1.2 线性变换及其矩阵

例: 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$,求 $2A^8-3A^5+A^4+A^2-4I$

例: 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,求 $2A^8-3A^5+A^4+A^2-4I$

解：A的特征多项式 $\varphi(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^3-2\lambda+1$

用$\varphi(\lambda)$去除 $2\lambda^8-3\lambda^5+\lambda^4+\lambda^2-4\lambda=g(\lambda)$, 得

$$g(\lambda)=\varphi(\lambda)(2\lambda^5+4\lambda^3-5\lambda^2+9\lambda-14)+(24\lambda^2-37\lambda+10)$$

$\because\ \varphi(A)=0,$

$\therefore\ 2A^8-3A^5+A^4+A^2-4I=24A^2-37A+10I$

$$=\begin{pmatrix}-3&48&-26\\0&95&-61\\0&-61&34\end{pmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

由哈密尔顿—凯莱定理，$\forall \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{K}^{n\times n}, \varphi(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$ 是**A**的特征多项式，则 $\varphi(A) = \mathbf{0}.$

因此，对任定一个矩阵 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{K}^{n\times n}$，总可以找到一个多项式 $\varphi(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$，使 $\varphi(A) = \mathbf{0}.$ 此时，也称多项式$\varphi(\boldsymbol{x})$ 以**A**为根.

1.2 线性变换及其矩阵

定义：设 $A \in K^{n\times n}$，在数域K上的以A为根的多项式中，次数最低的首项系数为1的那个多项式，称为**A的最小多项式**.常记做 $m(\lambda)$

显然 $m(\lambda)$ 的次数不大于特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 的次数

最小多项式的基本性质

定理：矩阵A的最小多项式$m(\lambda)$可以整除以A为根的任意首1多项式 $f(\lambda)$，且 $m(\lambda)$是唯一的.

定理：矩阵A的最小多项式$m(\lambda)$与其特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 的零点相同（不计重数）。

定理：相似矩阵具有相同的最小多项式.

定理： 设n阶矩阵A特征多项式$\varphi(\lambda)$，特征矩阵的$\lambda I-A$的全体$n-1$阶子式的最大公因式为$d(\lambda)$，则A最小多项式为

$$m(\lambda)=\frac{\det(\lambda I-A)}{d(\lambda)}$$

1.2 线性变换及其矩阵

例**2**、求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的最小多项式.

1.2 线性变换及其矩阵

解：A的特征多项式为

$$\varphi(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3$$

又 $A-I\neq 0,$

$$(A-I)^2=A^2-2A+I$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=0$$

$\therefore$ A的最小多项式为 $(\lambda-1)^2.$

最小多项式求法

1、对矩阵A，写出λ矩阵：　$A(\lambda)=\lambda I-A$

2、把λ矩阵$A(\lambda)$写成标准型，并写出不变因子$d_k(\lambda)$

3、最后一个不变因子就是A的最小多项式：$m(\lambda)=d_N(\lambda)$

最小多项式求法

$a)$定义λ矩阵，令$A(\lambda) = \lambda I - A$

最小多项式求法

$a)$定义λ矩阵，令$A(\lambda) = \lambda I - A$

讨论矩阵的 Jordan 标准形的求法，涉及如下形式的**多项式矩阵或 λ - 矩阵**

$$\mathbf{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \cdots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix} \tag{1.2.35}$$

的理论，其中 $a_{ij}(\lambda)$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 为数域 K 上的纯量 λ 的多项式．如果 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 是数域 K 上的 n 阶矩阵，则 $\mathbf{A}$ 的特征矩阵

$$\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.2.36}$$

就是一个特殊的多项式矩阵．

最小多项式求法

λ矩阵示例

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1\end{bmatrix} \qquad \lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2 & -3 & -4 \\ & \lambda-1 & -2 & -3 \\ & & \lambda-1 & -2 \\ & & & \lambda-1\end{bmatrix}$$

最小多项式求法

a)定义λ矩阵$A(\lambda)$

b)定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

$a)$定义λ矩阵$A(\lambda)$

$b)$定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

多项式矩阵 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的标准形，是指使用矩阵的初等变换①将 $\mathbf{A}(\lambda)$ 化为如下形式的多项式矩阵：

$$\mathbf{A}(\lambda) \rightarrow \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_s(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2.37}$$

其中，，$d_1(\lambda) \mid d_2(\lambda)$，$d_2(\lambda) \mid d_3(\lambda)$，$\cdots$，$d_{s-1}(\lambda) \mid d_s(\lambda)$，$s \leqslant n$，且 $d_i(\lambda)$ $(i=1, 2, \cdots, s)$ 是首 1 多项式(前面的几个 $d_i(\lambda)$ 可能是 1).

可以证明[1]，一个多项式矩阵 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的标准形式(1.2.37)的对角线上的非零元素 $d_i(\lambda)(i=1, 2, \cdots, s)$ 不随矩阵的初等变换而改变．因此，通常称 $d_i(\lambda)(i=1, 2, \cdots, s)$ 为 $\mathbf{A}(\lambda)$ 的**不变因子或不变因式**．

$a)$定义λ矩阵$A(\lambda)$

$b)$定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

例 1.25 试用初等变换化多项式矩阵

$$\mathbf{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

为标准形 .

$a)$定义λ矩阵$A(\lambda)$

$b)$定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

例 1.25 试用初等变换化多项式矩阵

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

为标准形.

解 计算过程如下：

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\xrightarrow[{[3]+[1]}]{}\begin{bmatrix}-\lambda+1 & 2\lambda-1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[{[1]\leftrightarrow[3]}]{}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+1\end{bmatrix}\xrightarrow[(3)-(1)]{}$$

a)定义λ矩阵$A(\lambda)$

b)定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

$$\begin{bmatrix} 1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 1 & \lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(3)-(1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2\lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{[2]-(2\lambda-1)[1] \\ [3]+(\lambda-1)[1]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[[2]\leftrightarrow[3]]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[[3]-\lambda[2]]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda^3-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{(-1)[3] \\ (3)-(\lambda+1)(2)}]{}$$

$a)$定义λ矩阵$A(\lambda)$

$b)$定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[{[3]-\lambda[2]}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & -\lambda^3-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{(-1)[3] \\ (3)-(\lambda+1)(2)}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+\lambda \end{bmatrix}$$

最后所得矩阵是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的标准形，此时，$d_1(\lambda) = 1$，$d_2(\lambda) = \lambda$，$d_3(\lambda) = \lambda^3 + \lambda$.

1.2 线性变换及其矩阵

a)定义λ矩阵$A(\lambda)$

b)定义不变因子，求$A(\lambda)$的不变因子

c)最后一个不变因子就是A的最小多项式：$m(\lambda) = d_N(\lambda)$

有$m(A) = 0$

例 1.26改　**求矩阵**

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

的最小多项式

例 1.26改　**求矩阵**

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

的最小多项式

解　求 $\lambda I-A$ 的初等因子组. 由于

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ \lambda-3 & (\lambda+1)(\lambda-3)+4 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{bmatrix}\to$$

1.2 线性变换及其矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

不变因子为$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=1, d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$

最后一个不变因子就是A的最小多项式：$m(\lambda)=d_3(\lambda)$

有$m(A)=0$

1.2 线性变换及其矩阵

例：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$ 的最小多项式

1.2 线性变换及其矩阵

例： 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$ 的最小多项式

解： $\lambda I - A=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 1 & -2\\ -3 & \lambda+3 & -6\\ -2 & 2 & \lambda-4\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}\lambda-1 & 1 & -2\\ -\lambda^2-2\lambda & 0 & 2\lambda\\ -2\lambda & 0 & \lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & \lambda-1\\ 0 & 2\lambda & -\lambda^2-2\lambda\\ 0 & \lambda & -2\lambda\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2\lambda & -\lambda^2-2\lambda\\ 0 & \lambda & -2\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda\\ 0 & \lambda & -2\lambda\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda\\ 0 & \lambda & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2)\end{pmatrix}$$

不变因子为$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda, d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$

最后一个不变因子就是A的最小多项式：$m(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$

有$m(A)=0$

1.2 作业（第五版）

1、定义：P38 1.19

2、定理：1.17、1.18、1.20、1.21

3、例题：1.20、1.21

4、本ppt例题：P5、P17、P22、P30、P35、P38

5、习题1.2：14

1.2 作业（第三版）

1、定义：P54 1.19

2、定理：1.17、1.18、1.20、1.21

3、例题：1.20、1.21

4、本ppt例题：P5、P17、P22、P30、P35、P38

5、习题1.2：14

下课，谢谢大家！