

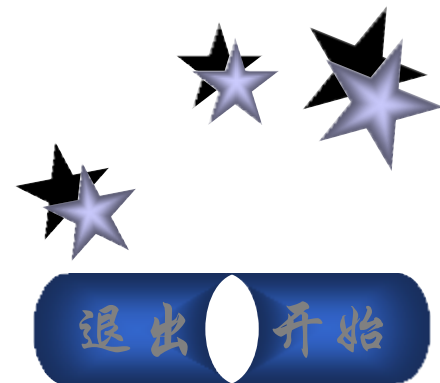
# ★ 第七章 集成运算放大器简介


---

## ★ ★ 7-3 集成电路的基本运算电路

电路与电子学基础

BUPT EE  
2012.1





分析运放电路时设集成运放为理想运放，因而其两个输入端的净输入电压和净输入电流均为零，即具有“虚短路”和“虚断路”两个特点，这是分析运算电路输出电压与输入电压运算关系的基本出发点。

- 比例运算电路
- 加减运算电路
- 积分运算电路
- 微分运算电路

# 一.比例运算电路

## 1.反相比例运算电路

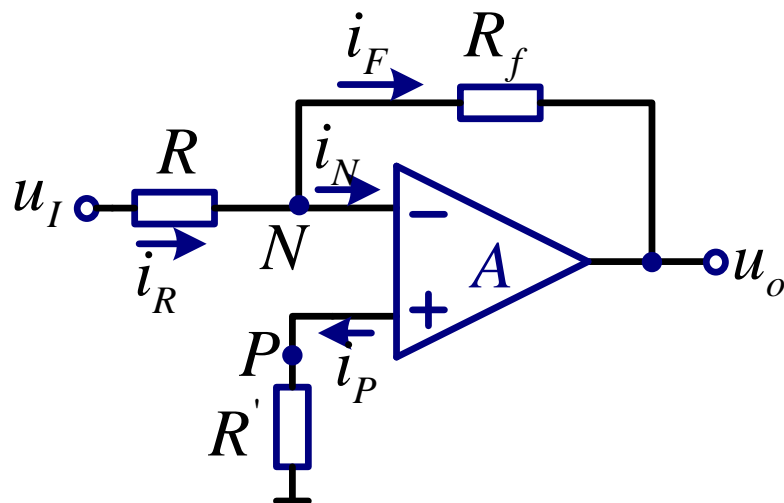
$R$  ——输入信号电阻

$R_f$  ——负反馈电阻

$R'$  ——平衡电阻

$R' = R // R_f$ ，保证了集成运放输入级差分放大电路的对称性。

电压并联负反馈



# 反相输入运算关系

理想运放的“虚断路”： $i_N = i_P = 0$

理想运放的“虚短路”： $u_N = u_P = 0$ ;

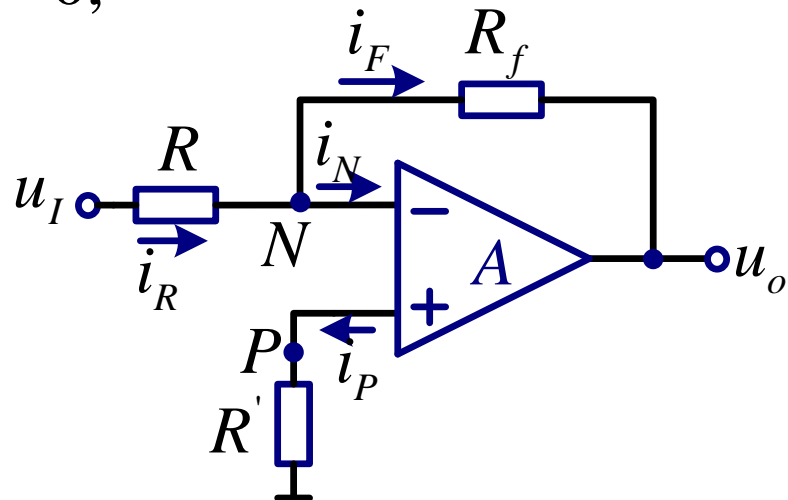
节点N的电流方程为

$$i_R = i_F \Rightarrow \frac{u_I - u_N}{R} = \frac{u_N - u_O}{R_f}$$

由于  $u_N = 0$ ，N点为虚地，所以：

$$u_O = -\frac{R_f}{R} u_I$$

$u_O$ 与 $u_I$ 成比例关系，比例系数为 $-R_f/R$ ，负号表示 $u_O$ 与 $u_I$ 反相。比例系数的数值可以任何值。

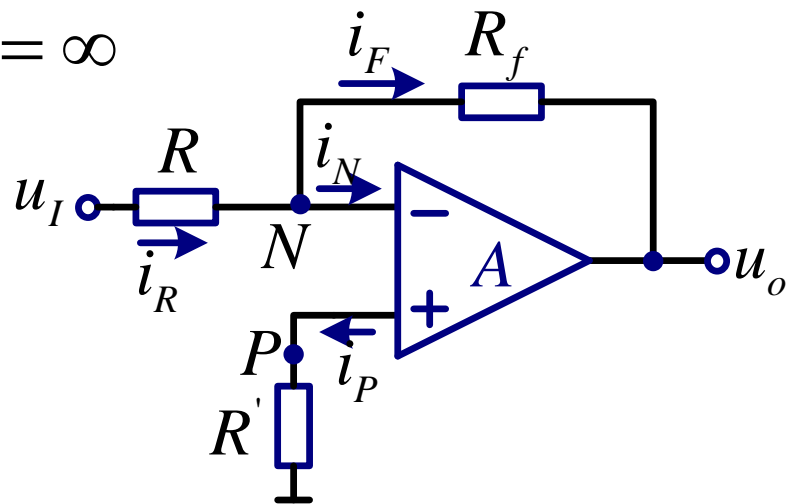


# 反相输入运算关系

电路引入深度电压负反馈:  $1 + AF = \infty$

$$\text{输出电阻 } R_{of} = \frac{R_o}{1 + AF} = 0 ,$$

电路带负载后运算关系不变。



电路的输入电阻为电路输入端和地之间看进去的等效电阻，其值等于输入端和虚地之间看进去的等效电阻:  $R_i = R$  。

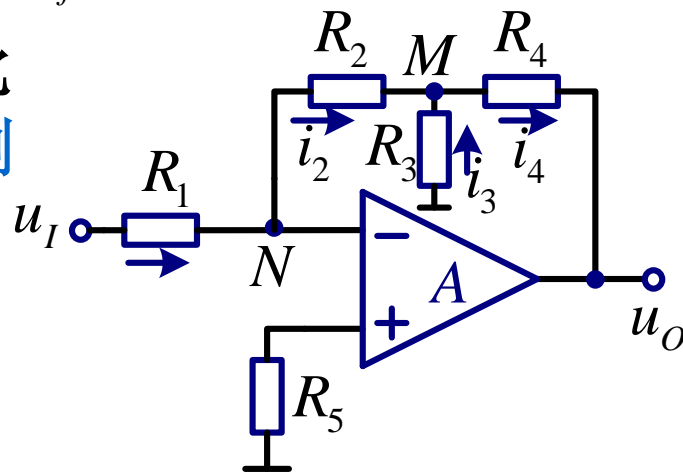
由此可见，尽管理想运放的输入电阻为无穷大，但是反相比例运算电路的输入电阻却不是无穷大，其值大小决定于电阻  $R$ 。

# 反相比例运算电路的改进

$$u_O = -\frac{R_f}{R} u_I$$

反相比例运算电路存在一个问题：为了增大输入电阻，且保持或得到更大的比例系数（即 $u_O$ 与 $u_I$ 的比例关系）， $R_f$ 必须是很大的电阻。例如，在比例系数为-50的情况下，若要求 $R_i = 10k\Omega$ ，即 $R = 10k\Omega$ ，则 $R_f = 500k\Omega$ 。

由此，我们提出另一种反相比例运算电路，即T型网络反相比例运算电路，可达到上述目的。



# T型网络反相比例运算电路

理想运放的“虚断路”： $i_N = i_p = 0$

理想运放的“虚短路”： $u_N = u_p = 0$ ;

节点N的电流方程为  $\frac{u_I}{R_1} = \frac{-u_M}{R_2}$

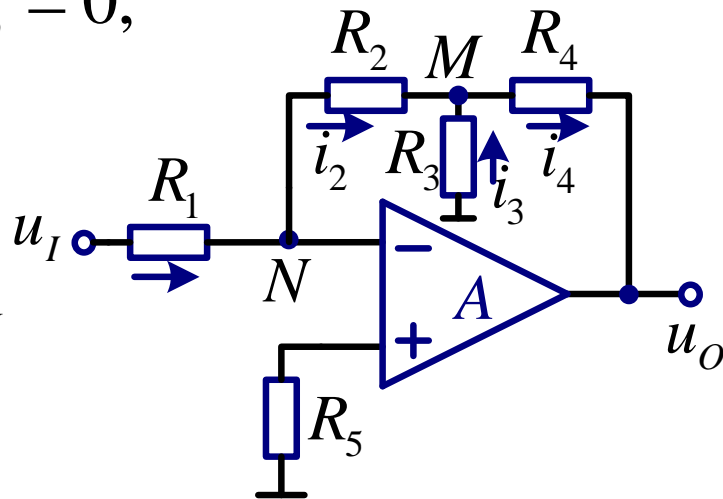
因而节点M的电位  $u_M = -\frac{R_2}{R_1} u_I$

$R_3$ 和 $R_4$ 的电流分别为

$$i_3 = -\frac{u_M}{R_3} = \frac{R_2}{R_1 R_3} u_I \quad i_4 = i_2 + i_3$$

输出电压  $u_o = -i_2 R_2 - i_4 R_4$

$$u_o = -\frac{R_2 + R_4}{R_1} \left(1 + \frac{R_2 // R_4}{R_3}\right) u_I$$

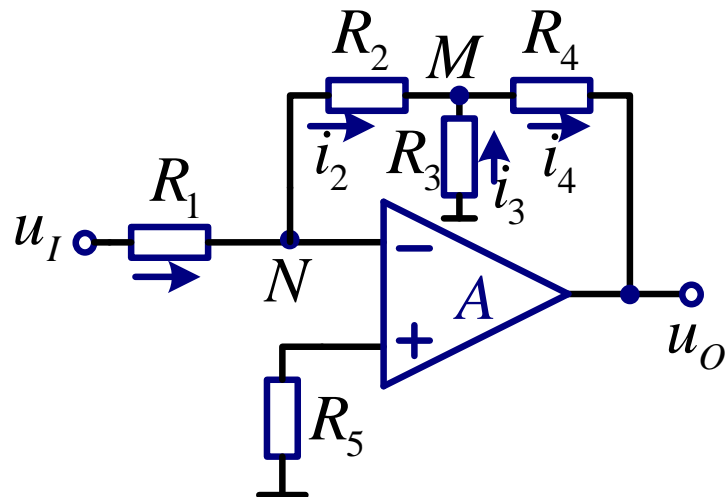


# T型网络反比例运算电路

$$u_o = -\frac{R_2 + R_4}{R_1} \left(1 + \frac{R_2 // R_4}{R_3}\right) u_I$$

当  $R_3 \rightarrow \infty$ ，比例关系与反向比例运算电路相同：

$$u_o = -\frac{R_2 + R_4}{R} u_I = -\frac{R_f}{R} u_I$$



比例系数为-50，若要求  $R_i = 10k\Omega$ ，即  $R = 10k\Omega$ ，则需要  $R_f = 500k\Omega$ 。而改进后，取  $R_2$  和  $R_4$  为  $10k\Omega$ ，有

$$\frac{u_o}{u_I} = -\frac{R_2 + R_4}{R_1} \left(1 + \frac{R_2 // R_4}{R_3}\right) = -50 \quad \Rightarrow R_3 = 208\Omega$$



## 2.同相比例运算电路能·

由理想运放的“虚短”和“虚断”，电路有共模输入电压：

$$u_P = u_N = u_I$$

净输入电流为零，所以：

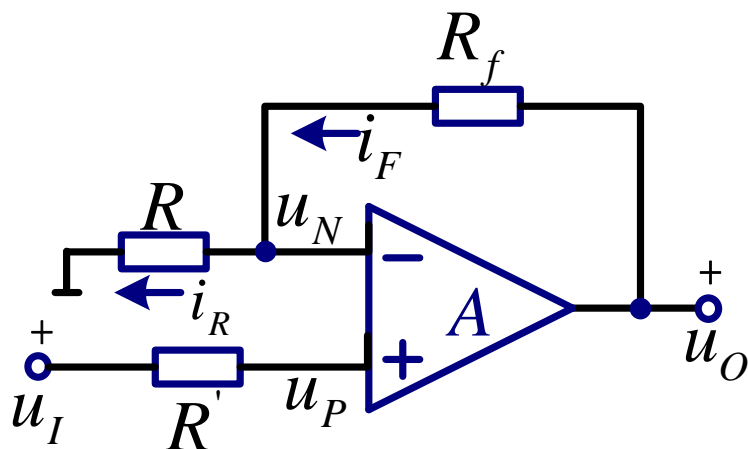
$$i_R = i_F$$

$$\frac{u_N - 0}{R} = \frac{u_O - u_N}{R_f}$$

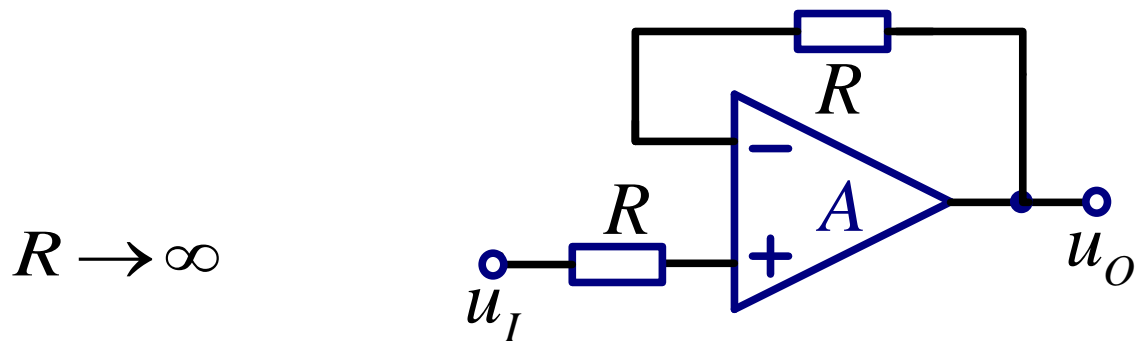
$$u_O = \left(1 + \frac{R_f}{R}\right)u_N = \left(1 + \frac{R_f}{R}\right)u_I$$

$$u_O = \left(1 + \frac{R_f}{R}\right)u_I \quad (u_O \text{ 与 } u_I \text{ 同相且 } u_O \text{ 大于 } u_I)$$

前面电路的输入端和接地端互换



### 3. 电压跟随器



由于  $u_O = u_N = u_P$ , 故输出电压与输入电压的关系为  $u_O = u_I$ 。

理想运放的输入电阻无穷大，输出电阻无穷小，因而电压跟随器具有比射极输出器好得多的跟随特性。

# 小结

分析单一信号作用的运算电路的运算关系：

- 首先列出关键节点的电流方程。所谓关键节点是指那些与输入电压和输出电压产生关系的节点，如N和P点；
- 然后根据“虚短”和“虚断”的原则，进行整理，即可得输出电压和输入电压的运算关系。

# 例1

如下图所示，已知  $R_2 \gg R_4$ ,  $R_1 = R_2$ 。

试问：(1)  $u_o$  与  $u_I$  的比例系数为多少？

(2) 若  $R_4$  开路，则  $u_o$  与  $u_I$  的比例系数为多少？

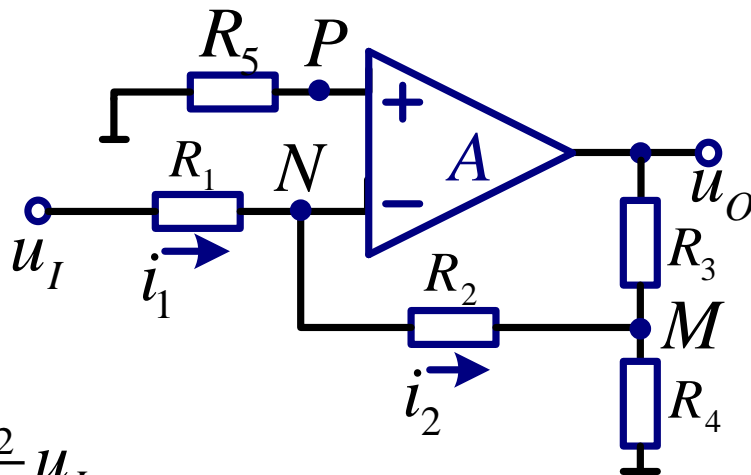
解：

(1) 由于  $u_N = u_P = 0$

$$i_2 = i_1 = \frac{u_I}{R_1}$$

M点的电位：

$$u_M = -i_2 R_2 = -\frac{R_2}{R_1} u_I$$



# 解 (续)

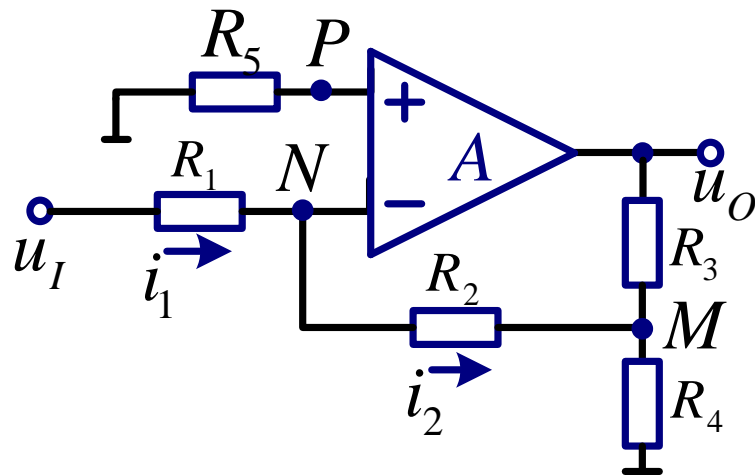
由于  $R_2 \gg R_4$ ，可以认为

$$u_M \approx \frac{R_4}{R_3 + R_4} u_O$$

即

$$u_O \approx \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) u_M$$

$$\Rightarrow u_O \approx -\frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) u_I$$



在上式中，由于  $R_1 = R_2$ ，故  $u_O$  与  $u_I$  的关系式为

$$u_O \approx -\left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) u_I$$

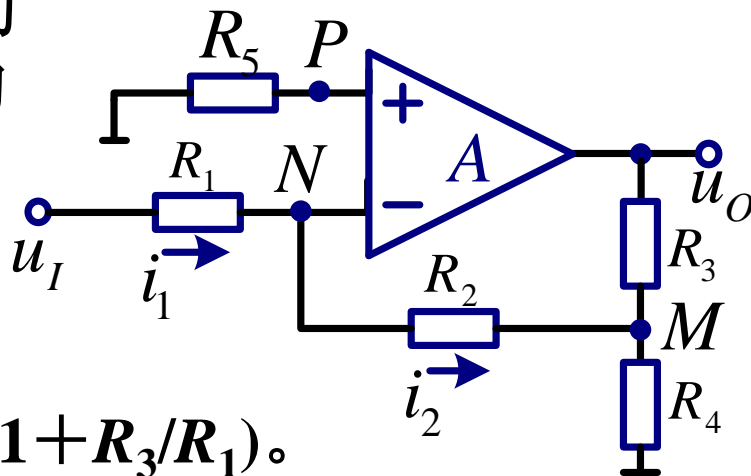
所以，比例系数约为  $-(1 + R_3/R_4)$ 。

## 解 (续)

(2) 若  $R_4$  开路, 则电路变为典型的反相比例运算电路,  $u_O$  与  $u_I$  的运算关系式为

$$u_O = -\frac{R_2 + R_3}{R_1} u_I$$

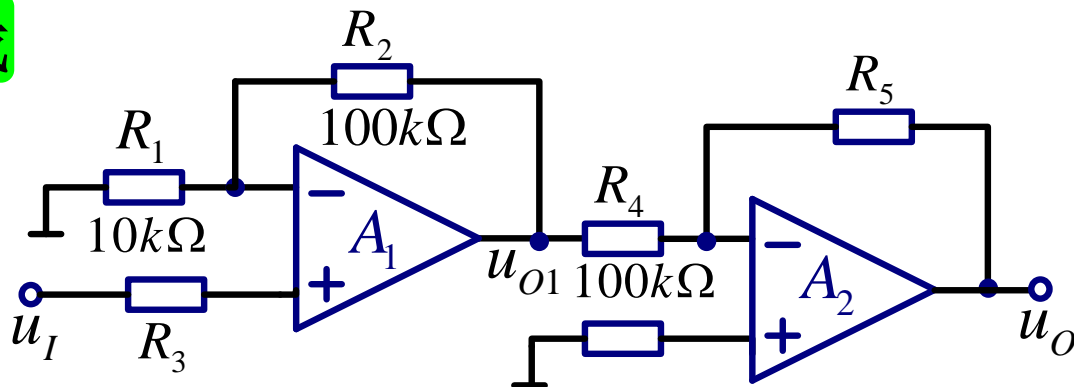
由于  $R_1 = R_2$ , 故比例系数为  $-(1 + R_3/R_1)$ 。



## 例2

电路如右图所示，已知 $u_O = -55u_I$ ，其余参数如图中所标注。试求出 $R_5$ 的值；并说明若 $u_I$ 与地接反，则输出电压与输入电压的关系将产生什么变化。

解：如图所示， $A_1$ 构成同相比例运算电路， $A_2$ 构成反相比例运算电路。因此有



$$u_{O1} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)u_I = \left(1 + \frac{100k\Omega}{10k\Omega}\right)u_I = 11u_I$$

$$u_O = -\frac{R_5}{R_4}u_{O1} = -\frac{R_5}{100k\Omega} \times 11u_I = -55u_I$$

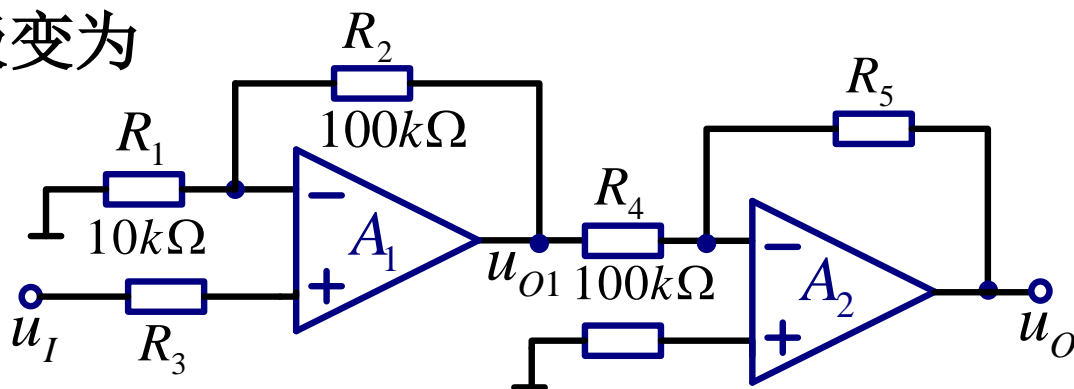
得出 $R_5 = 500 k\Omega$ 。

# 解（续）

若 $u_I$ 与地接反，则第一级变为反相比例运算电路。

$$\Rightarrow u_{O1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot u_I$$

$$u_{O1} = -\frac{100\text{k}\Omega}{10\text{k}\Omega} \cdot u_I = -10u_I$$



由于第二级电路的比例系数仍为 $-5$ ，所以输出电压与输入电压的比例系数变为**50**。



# 二. 加减运算电路

## 1. 求和运算电路

### (1) 反相求和运算电路

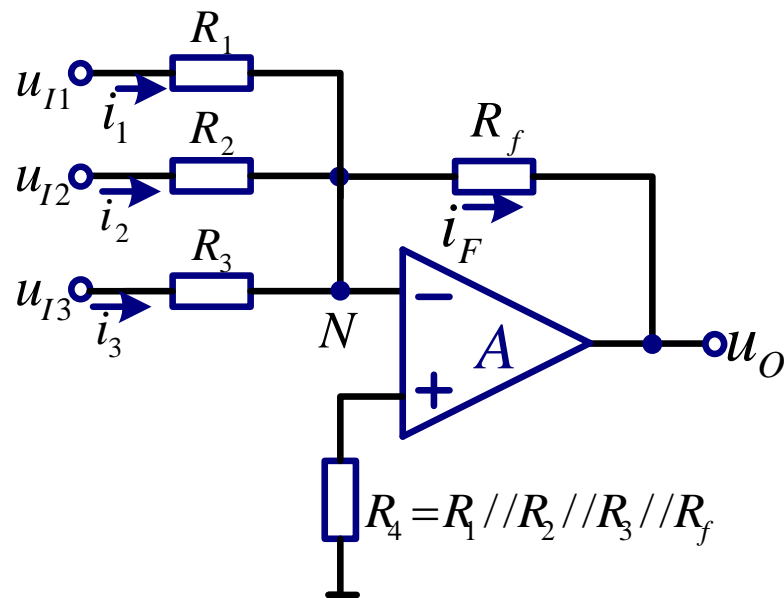
由“虚短”和“虚断”有

$$u_N = u_P = 0$$

$$i_1 + i_2 + i_3 = i_F$$

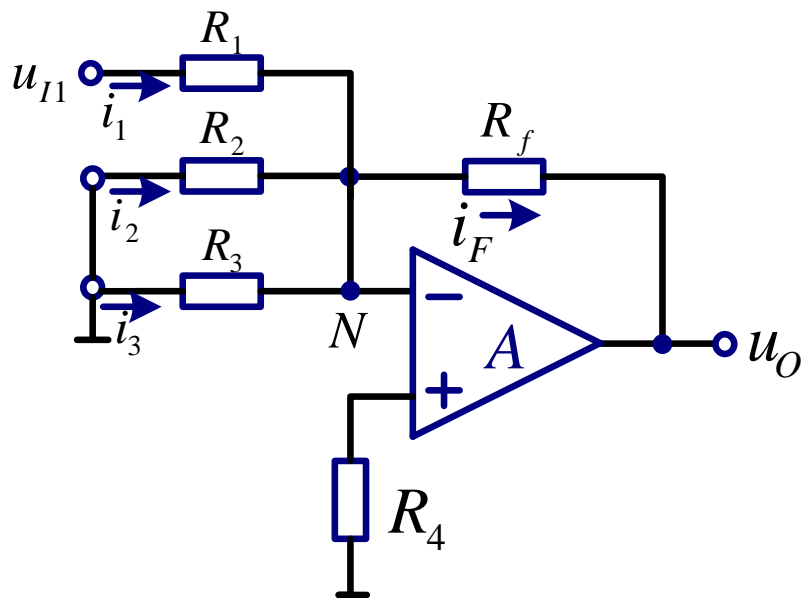
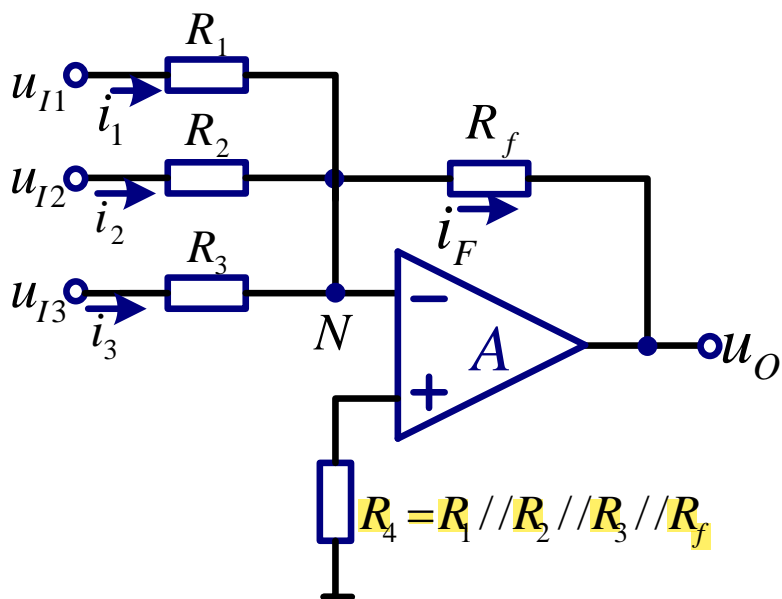
$$\frac{u_{I1}}{R_1} + \frac{u_{I2}}{R_2} + \frac{u_{I3}}{R_3} = -\frac{u_O}{R_f}$$

$$u_O = -R_f \left( \frac{u_{I1}}{R_1} + \frac{u_{I2}}{R_2} + \frac{u_{I3}}{R_3} \right)$$



# 利用叠加原理求解运算关系

对于多输入的电路除了用上述节点电流法求解外，还可利用叠加原理得到同样的结果。



## (2) 同相求和运算电路

节点P的电流方程为：

$$\dot{i}_1 + \dot{i}_2 + \dot{i}_3 = \dot{i}_4$$

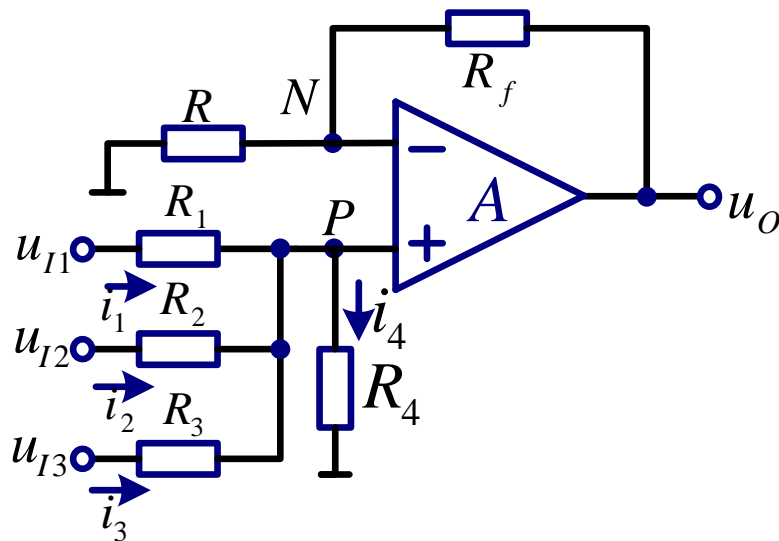
$$\frac{u_{I1} - u_P}{R_1} + \frac{u_{I2} - u_P}{R_2} + \frac{u_{I3} - u_P}{R_3} = \frac{u_P}{R_4}$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)u_P = \frac{u_{I1}}{R_1} + \frac{u_{I2}}{R_2} + \frac{u_{I3}}{R_3}$$

所以同相输入端电位为：

$$u_P = R_P \left( \frac{u_{I1}}{R_1} + \frac{u_{I2}}{R_2} + \frac{u_{I3}}{R_3} \right)$$

$$R_P = R_1 // R_2 // R_3 // R_4$$



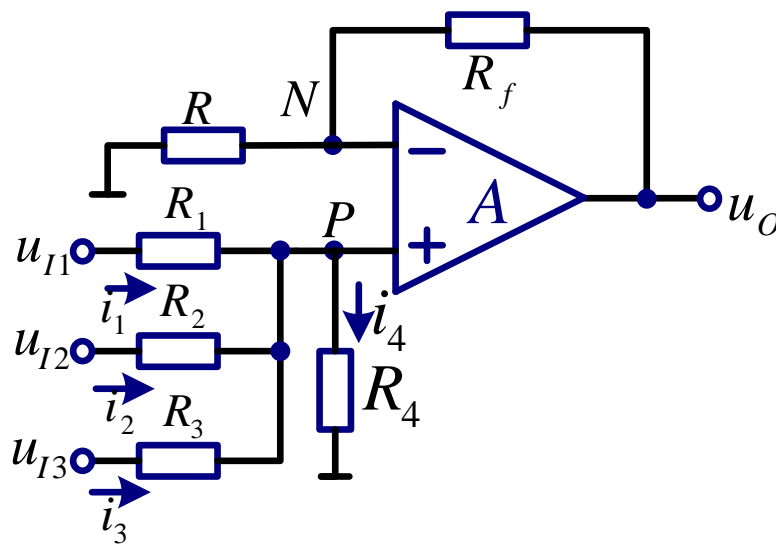
## (2) 同相求和运算电路

$$\frac{u_N - 0}{R} = \frac{u_O - u_N}{R_f} \quad u_O = \left(1 + \frac{R_f}{R}\right)u_N = \left(1 + \frac{R_f}{R}\right)u_P$$

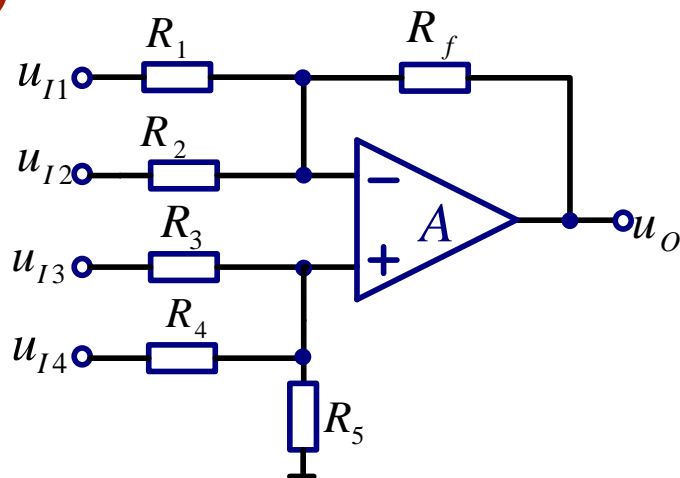
$$\begin{aligned} u_O &= \left(1 + \frac{R_f}{R}\right) \cdot R_P \cdot \left(\frac{u_{I1}}{R_1} + \frac{u_{I2}}{R_2} + \frac{u_{I3}}{R_3}\right) \\ &= \frac{R + R_f}{R} \cdot \frac{R_f}{R_f} \cdot R_P \cdot \left(\frac{u_{I1}}{R_1} + \frac{u_{I2}}{R_2} + \frac{u_{I3}}{R_3}\right) \\ &= R_f \cdot \frac{R_P}{R_N} \cdot \left(\frac{u_{I1}}{R_1} + \frac{u_{I2}}{R_2} + \frac{u_{I3}}{R_3}\right) \end{aligned}$$

式中  $R_N = R // R_f$ ，若  $R_N = R_P$ ，则：

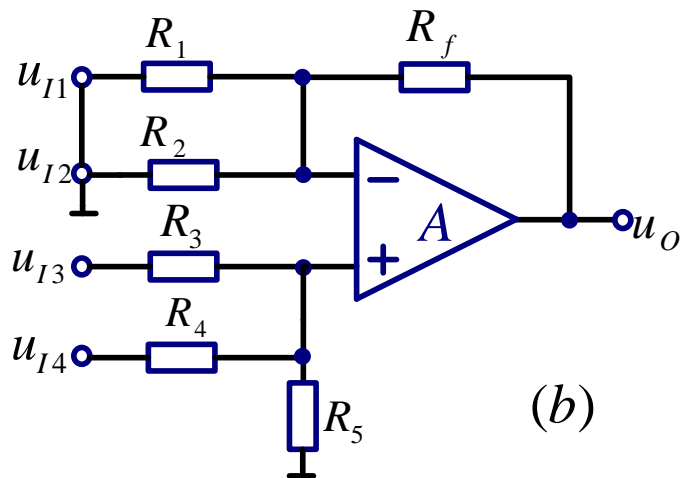
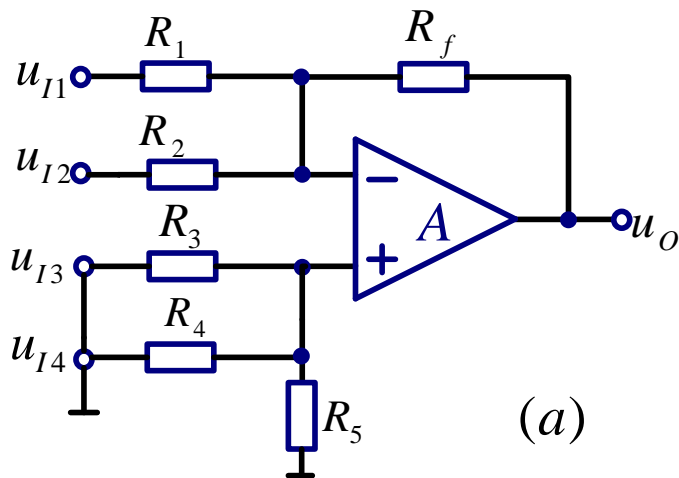
$$u_O = R_f \left(\frac{u_{I1}}{R_1} + \frac{u_{I2}}{R_2} + \frac{u_{I3}}{R_3}\right)$$



## 2. 加减运算电路



左图为四个输入的加减运算电路；  
下图所示的(a)和(b)表示反相输入端  
各信号作用和同相输入端各信号作  
用的电路，然后通过叠加定理  
求解加减运算电路。



## 2. 加减运算电路

由图(a)的反相求和运算电路，得输出电压为：

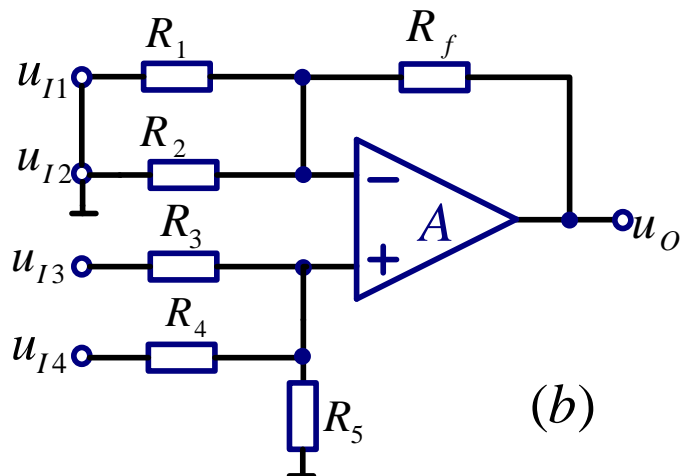
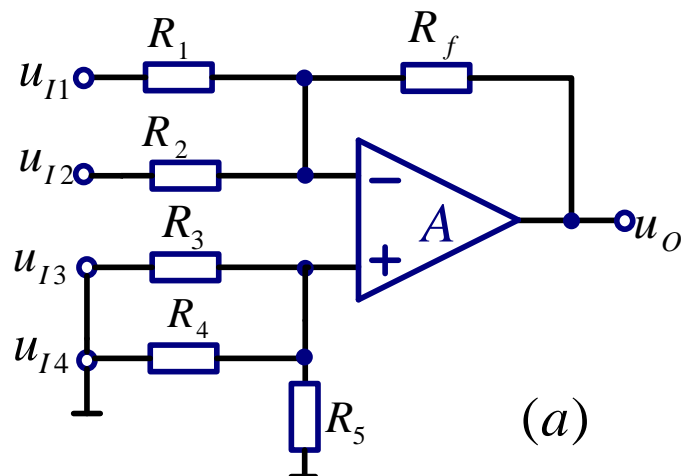
$$u_{O1} = -R_f \left( \frac{u_{I1}}{R_1} + \frac{u_{I2}}{R_2} \right)$$

由图(b)的同相求和运算电路，若  $R_1 // R_2 // R_f = R_3 // R_4 // R_5$ ，则输出电压为：

$$u_{O2} = R_f \left( \frac{u_{I3}}{R_3} + \frac{u_{I4}}{R_4} \right)$$

因此，所有输入信号同时作用时的输出电压为：

$$u_O = u_{O1} + u_{O2} = R_f \left( \frac{u_{I3}}{R_3} + \frac{u_{I4}}{R_4} - \frac{u_{I1}}{R_1} - \frac{u_{I2}}{R_2} \right)$$

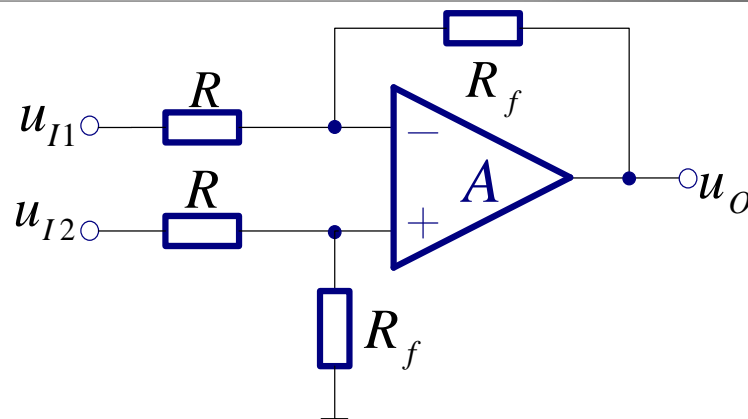


## 2. 加减运算电路

若电路只有两个输入，且参数对称，如图所示，则

$$u_O = \frac{R_f}{R} (u_{I2} - u_{I1})$$

电路实现了对输入差模信号的比例运算。

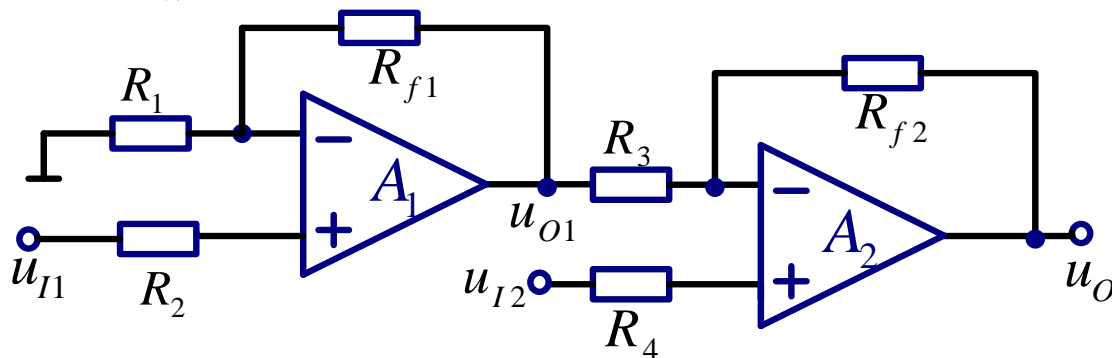


## 2. 加减运算电路

使用单个集成运放构成加减运算电路时存在两个缺点：

- 1) 电阻的选取和调整不方便；
- 2) 对于每个信号源的输入电阻均较小。

因此，必要时可采用两级电路。



第一级电路为同相比值运算电路： $u_{O1} = (1 + \frac{R_{f1}}{R_1})u_{I1}$

利用叠加定理，第二级输出为： $u_O = -\frac{R_{f2}}{R_3}u_{O1} + (1 + \frac{R_{f2}}{R_3})u_{I2}$

若  $R_1 = R_{f2}, R_3 = R_{f1}$ ，则  $u_O = (1 + \frac{R_{f2}}{R_3})(u_{I2} - u_{I1})$

实现差分比例运算。



## 例3

设计一个运算电路，要求输出电压和输入电压的运算关系式为  $u_O = 10u_{I1} - 5u_{I2} - 4u_{I3}$ 。

**解：** 根据已知的运算关系式可知，当采用单个集成运放构成电路时， $u_{I1}$  应作用于同相输入端，而  $u_{I2}$  和  $u_{I3}$  应作用于反相输入端，如下图所示。

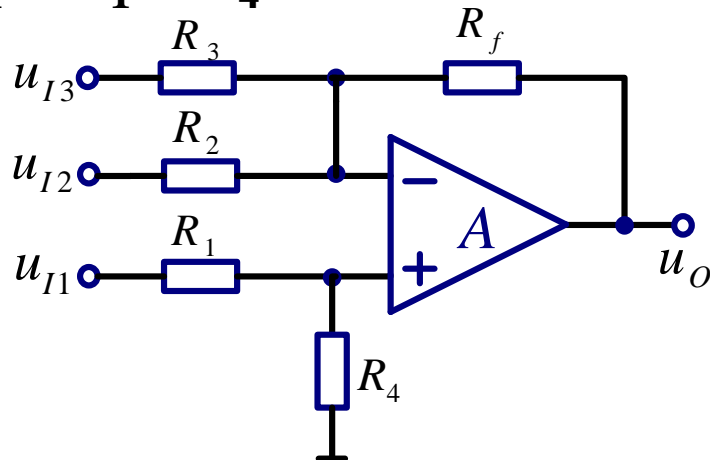
选取  $R_f = 100 \text{ k}\Omega$ ，若  $R_3 // R_2 // R_f = R_1 // R_4$ ，则

$$u_O = R_f \left( \frac{u_{I1}}{R_1} - \frac{u_{I2}}{R_2} - \frac{u_{I3}}{R_3} \right)$$

因为  $R_f/R_1 = 10$ ，故  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ；

因为  $R_f/R_2 = 5$ ，故  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ ；

因为  $R_f/R_3 = 4$ ，故  $R_3 = 25 \text{ k}\Omega$ 。

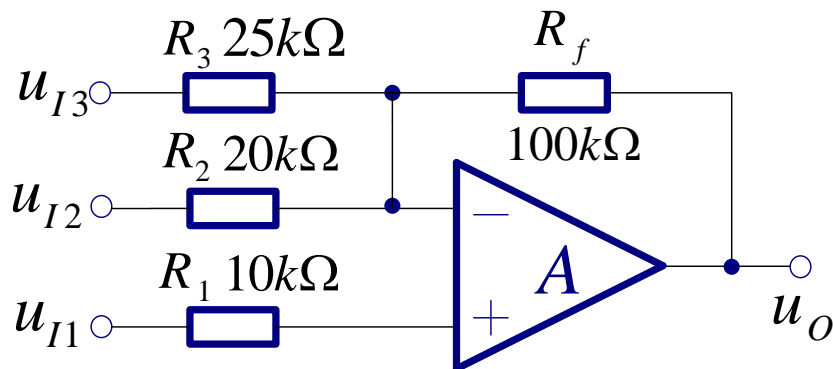
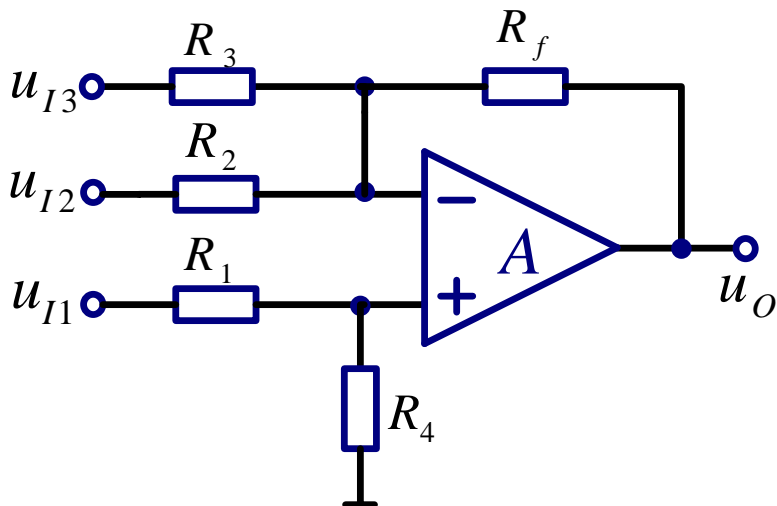


# 解 (续)

$$\frac{1}{R_4} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_1} = \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \frac{1}{100} - \frac{1}{10} \right) \text{k}\Omega^{-1} = 0 \text{k}\Omega^{-1}$$

故可省去 $R_4$ 。

所设计电路如下图所示。



# 三.积分运算电路和微分运算电路

## 1.积分运算电路

$R'$  接地,  $u_P = u_N = 0$  为“虚地”。

$$i_C = i_R = \frac{u_I}{R}$$

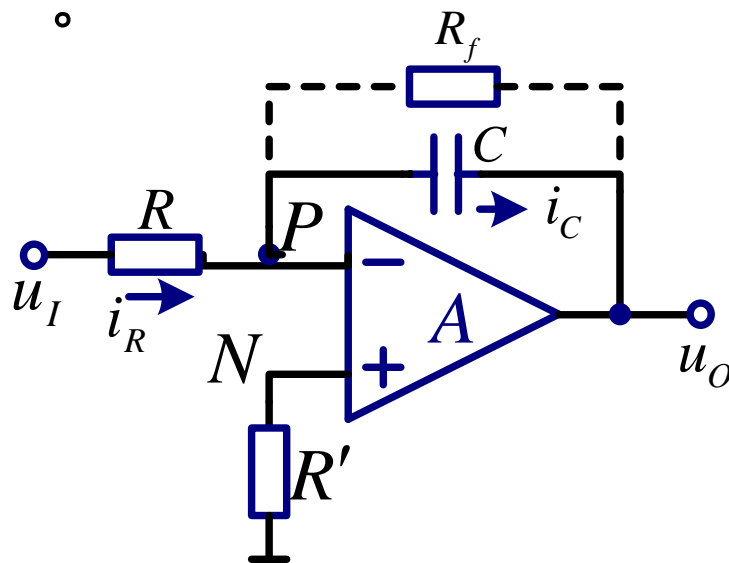
$$u_O = -u_C$$

$$u_O = -\frac{1}{C} \int i_C dt = -\frac{1}{RC} \int u_I dt$$

在求解 $t_1$ 到 $t_2$ 时间段的积分值时

$$u_O = -\frac{1}{RC} \int_{t_1}^{t_2} u_I dt + u_O(t_1)$$

当 $u_I$ 为常量时, 输出电压  $u_O = -\frac{1}{RC} u_I(t_2 - t_1) + u_O(t_1)$



## 2.微分运算电路

### (1) 基本微分运算电路

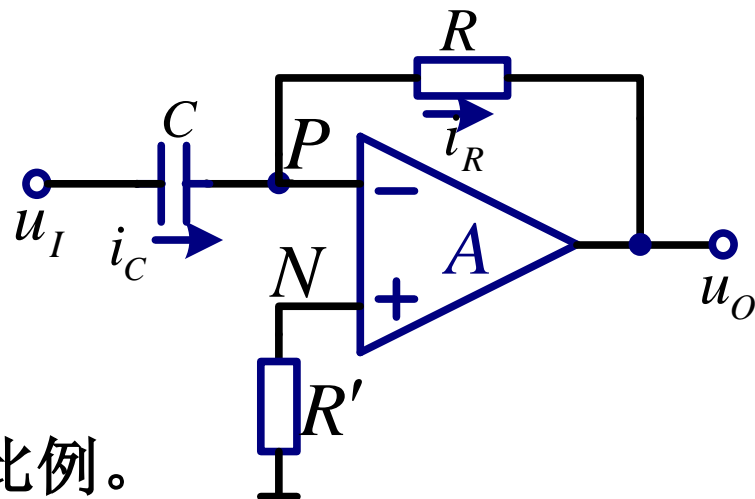
由“虚短”和“虚断”可知， $u_P = u_N = 0$ 为“虚地”。

$$u_C = u_I$$

$$i_R = i_C = C \frac{du_I}{dt}$$

$$u_O = -i_R R = -RC \frac{du_I}{dt}$$

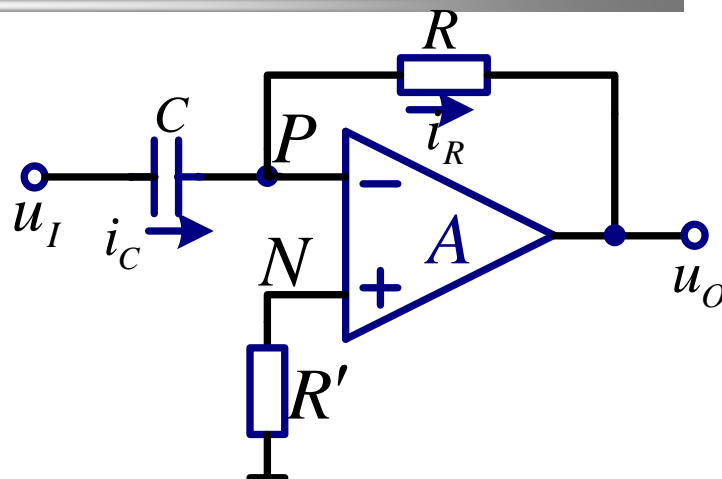
输出电压与输入电压的变化率成比例。



# 基本微分运算电路的缺点

若输入电压产生阶跃变化，或脉冲式大幅值干扰，会使得集成运放内部的放大管进入饱和或截止状态，以至于即使信号消失，管子还不能脱离原状态回到放大区，出现阻塞现象，电路不能正常工作；

同时由于反馈网络为滞后影响，当它与集成运放内部的滞后影响相叠加，可能满足自激振荡的条件，从而使电路不稳定。

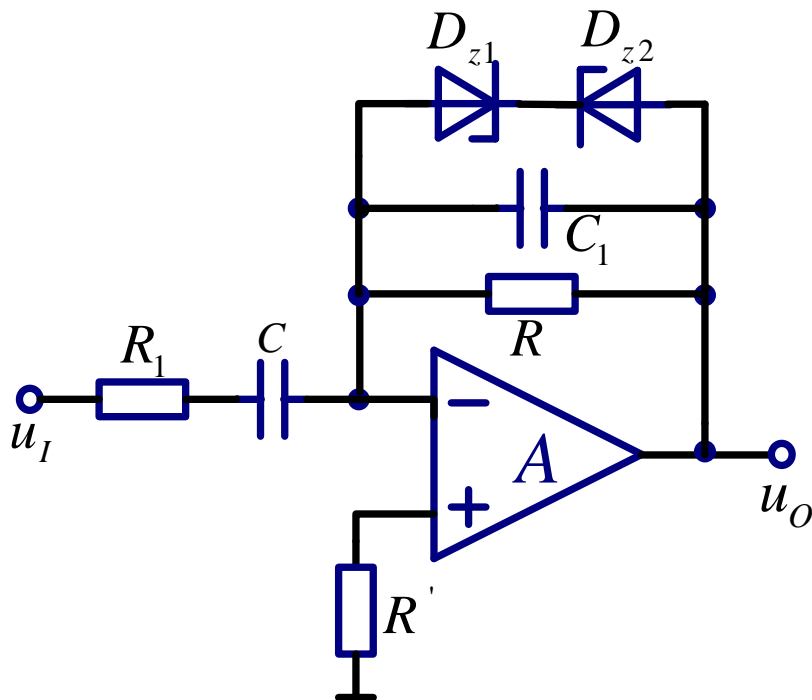
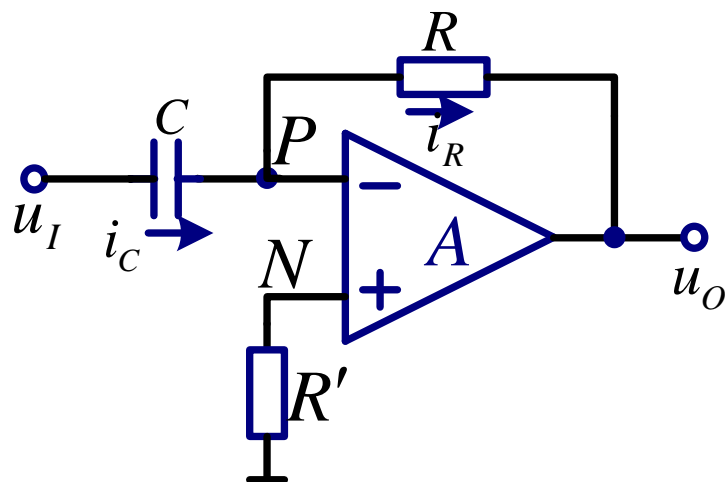


# 基本微分运算电路的改进

为了解决上述问题，可在输入端串联一个小阻值的电阻 $R_1$ ，以限制输入电流，也就限制了 $R$ 中电流；

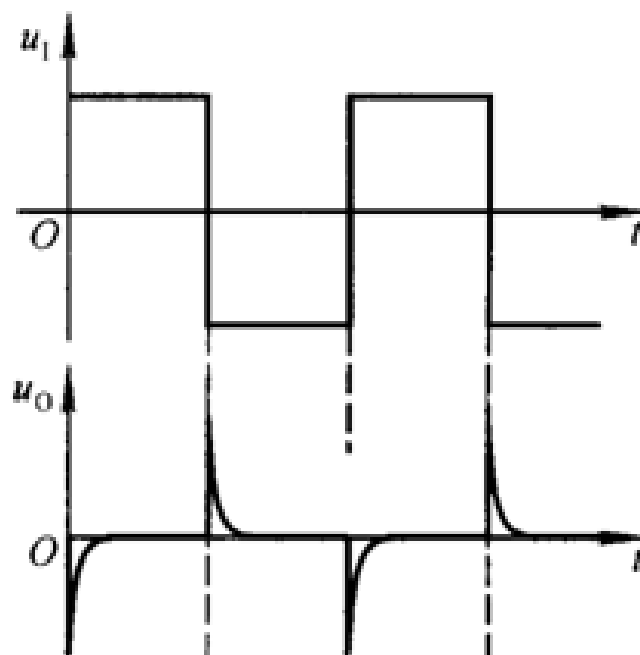
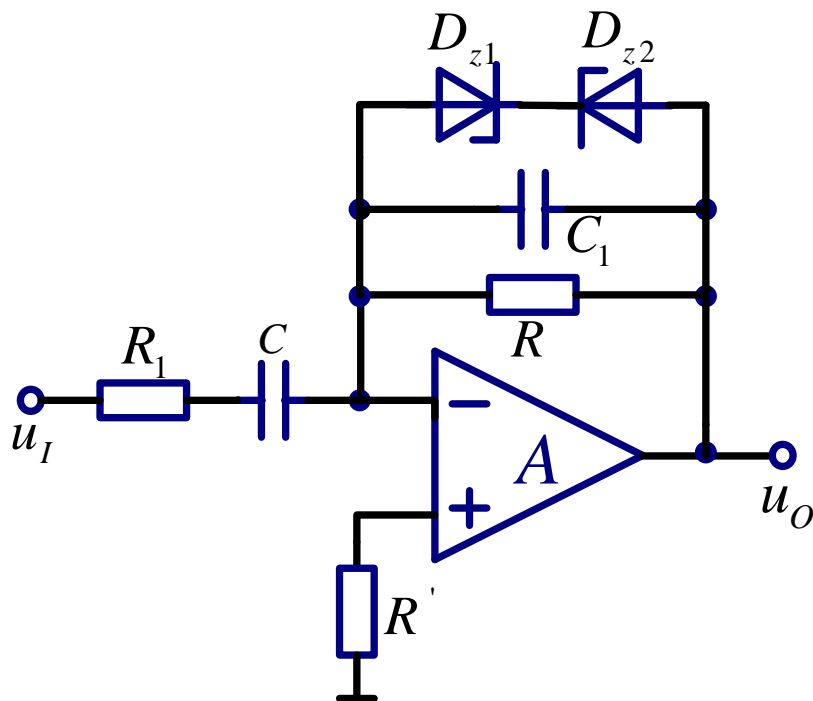
在反馈电阻 $R$ 上并联稳压二极管，以限制输出电压幅值，保证集成运放中的放大管始终工作在放大区；

在 $R$ 上并联小容量电容 $C_1$ ，起相位补偿作用，提高电路的稳定性。



# 实际微分运算电路

该电路的输出电压与输入电压成近似微分关系。若输入电压为方波，且  $RC \ll \frac{T}{2}$  ( $T$  为方波的周期)，则输出为尖顶波。



## 例4

电路如图所示， $C_1 = C_2 = C$ 。试求出 $u_O$ 与 $u_I$ 的运算关系式。

解：因“虚短”和“虚断”，在结点N上，电流方程为  $i_1 = i_{C1}$

$$-\frac{u_N}{R} = C \frac{d(u_N - u_O)}{dt} = C \frac{du_N}{dt} - C \frac{du_O}{dt} \Rightarrow C \frac{du_O}{dt} = C \frac{du_N}{dt} + \frac{u_N}{R}$$

在结点P上，电流方程为  $i_2 = i_{C2}$

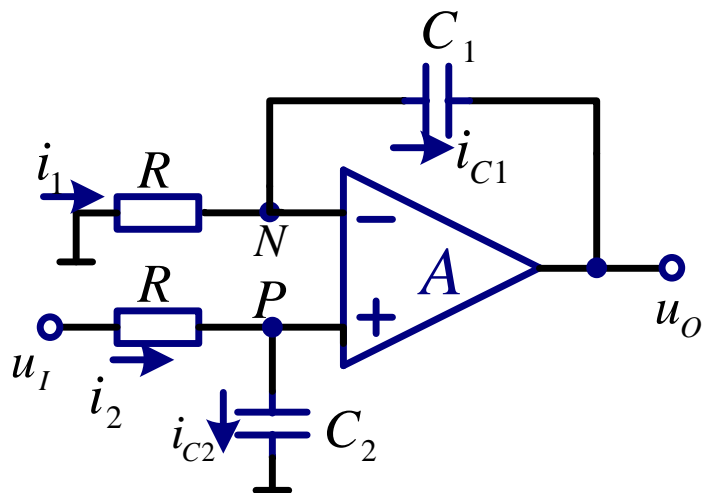
$$\frac{u_I - u_P}{R} = C \frac{du_P}{dt} \quad \frac{u_I}{R} = C \frac{du_P}{dt} + \frac{u_P}{R}$$

$$\because u_P = u_N \Rightarrow C \frac{du_O}{dt} = \frac{u_I}{R}$$

$$\therefore u_O = \frac{1}{RC} \int u_I dt$$

在 $t_1 \sim t_2$ 时间段中， $u_O$ 的表达式为  $u_O = \frac{1}{RC} \int_{t_1}^{t_2} u_I dt + u_O(t_1)$

电路实现了同相积分运算。





# 例5

在自动控制系统中，常采用下图所示的PID调节器，试分析输出电压与输入电压的运算关系式。

解：因“虚短”和“虚断”， $u_P = u_N = 0$ 为虚地。

N点的电流方程为： $i_F = i_1 + i_{C1}$

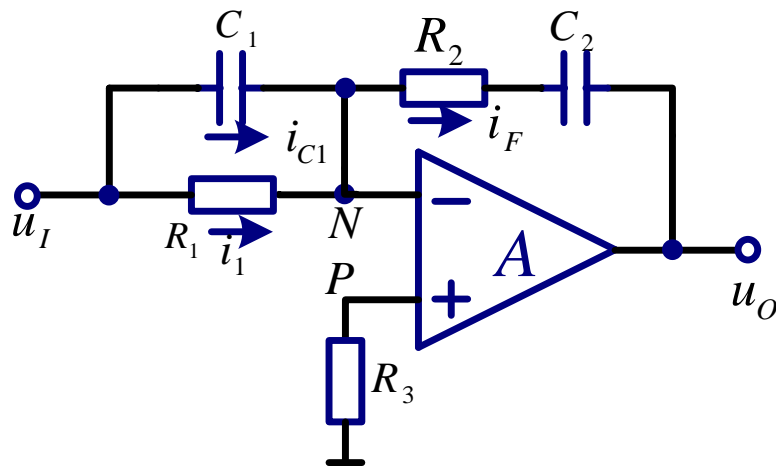
$$i_{C1} = C_1 \frac{du_I}{dt} \quad i_1 = \frac{u_I}{R_1}$$


$$u_{R2} = i_F R_2 = \frac{R_2}{R_1} u_I + R_2 C_1 \frac{du_I}{dt}$$

$$u_O = -(u_{R2} + u_{C2})$$

$$u_{C2} = \frac{1}{C_2} \int i_F dt = \frac{1}{C_2} \int \left( C_1 \frac{du_I}{dt} + \frac{u_I}{R_1} \right) dt = \frac{C_1}{C_2} u_I + \frac{1}{R_1 C_2} \int u_I dt$$

$$\therefore u_O = -\left( \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} \right) u_I - R_2 C_1 \frac{du_I}{dt} - \frac{1}{R_1 C_2} \int u_I dt$$





---

$$u_O = -\left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2}\right)u_I - R_2C_1 \frac{du_I}{dt} - \frac{1}{R_1C_2} \int u_I dt$$

因电路中含有比例、积分和微分运算，故称之为**PID**调节器。

当  $R_2 = 0$  时，电路只有比例和积分运算部分，称为**PI**调节器；  
当  $C_2$  短路时，电路只有比例和微分运算部分，称为**PD**调节器；  
根据控制中的不同需要，采用不同的调节器。

# 总结

在运算电路中，无论输入电压，还是输出电压，均对“地”而言。在求解运算关系式时，多采用节点电流法；对于多输入的电路，还可利用叠加原理。

为实现输出电压信号与输入电压信号的加、减、乘、除、微分与积分运算关系，运算电路中的集成运放应当工作在线性区。为了稳定输出电压，需引入电压负反馈。由于集成运放优良的指标参数，不管引入电压串联负反馈，还是引入电压并联负反馈，均为深度负反馈。