# 第二章 电阻电路的基本分析方法与定理

所谓电阻电路，是指电路只由电源（独立源、受控源）和电阻元件组成，而不包含电容、电感等元件。这类电路结构不管多复杂，电流和电压的约束关系是瞬时的，各支路每一时刻的电流（电压）只取决于该时刻电路的情况，而与历史时刻无关。因此，电阻电路是无记忆电路。电阻电路各个支路上电流和电压的约束关系即 VCR 只是代数方程。以下各节对于电阻电路基本性质、规律、定理以及分析方法进行详细介绍。

## 2-1 等效的概念及等效变换分析

等效是电路分析中一个非常重要的概念，它被广泛用于电路的化简、分析和计算。先说明等效的含义。设有两个二端网络（只有两个端钮与外电路相联接的网络，也称为单口网络）$N_1$、$N_2$，如图 2-1-1 所示，如果二端网络 $N_1$ 和二端网络 $N_2$ 的端口处电压、电流关系完全相同，亦即它们在 $u-i$ 平面上的伏安特性曲线完全重叠，则这两个二端网络是等效的。

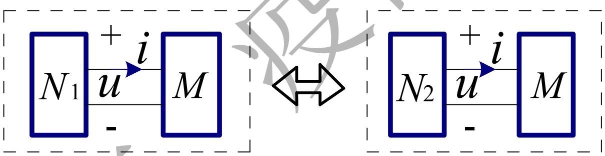



图 2-1-1 等效概念示意图

应注意的是，**等效概念是对外部电路而言**，即对外等效，也就是说，对于任一外电路 $M$，$N_1$、$N_2$ 具有完全相同的作用，没有任何区别。至于 $N_1$、$N_2$ 则可以是两个完全不同的电路，它们之间没有任何形式的电路元件或结构上的对应关系。

一般说来，我们将电路中较为复杂的部分通过等效关系变为较简单的形式，从而简化整个电路的分析计算。下面我们利用等效的概念来分析推导常用的等效变换关系。

### 2-1-1 电阻的串联与分压公式

设有两个二端网络 $N_1$ 和 $N_2$，如图 2-1-2 所示。其中 $N_1$ 由 $n$ 个电阻 $R_1,R_2,...,R_n$ 串联而成，而 $N_2$ 只有一个电阻 $R$。对于 $N_1$ 而言，端口处的 VCR 为

$$u = R_1 i + R_2 i + \ldots + R_n i = (R_1 + R_2 + \ldots + R_n) i$$

而对于 $N_2$，其 VCR 为

$$u = Ri$$

显然，如果有

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n \qquad (2\text{-}1\text{-}1)$$

则 $N_1$ 和 $N_2$ 的 VCR 必然完全相同，因而 $N_1$ 与 $N_2$ 等效。

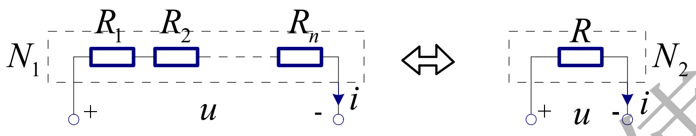



图 2-1-2 电阻的串联等效示意图

式（2-1-1）就是电阻的串联等效公式。$R$ 是 $R_1, R_2, \ldots, R_n$ 串联的等效电阻。

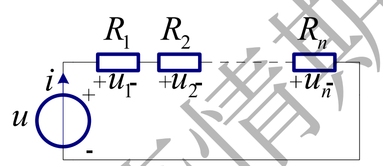



图 2-1-3 电阻的串联分压关系示意

由图 2-1-3 不难得出总电压与分电压的关系：

$$u_n = iR_n = \frac{R_n}{R} u$$

各分电压的比等于各分电阻之比，即

$$u_1 : u_2 : u_3 = R_1 : R_2 : R_3 \qquad (2\text{-}1\text{-}2)$$

## 2-1-2 电阻的并联与分流公式

若干电阻并联如图 2-1- 4 所示，则总的等效电阻 $R$ 可表示为

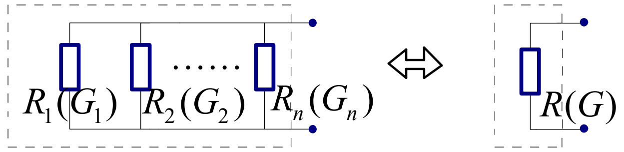



图 2-1-4 电阻的并联等效示意图

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} \qquad (2\text{-}1\text{-}3)$$

用电导表示，则并联结构的等效电导为：

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n \qquad (2\text{-}1\text{-}4)$$

对于图 2-1-5 各电阻上的电流与总电流的关系为：

$$i_n = G_n u = \frac{G_n}{G} i \qquad (2\text{-}1\text{-}5)$$

各分电流之比等于各电导之比，即

$$i_1 : i_2 : i_3 = G_1 : G_2 : G_3 \qquad (2\text{-}1\text{-}6)$$

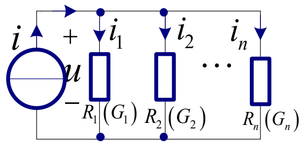



图 2-1-5 电阻的并联分流关系示意图

既有串联又有并联的电阻连接称为电阻的混联，可以分别用串并联关系依次合并化简。

【例题 2-1】 求图 2-1-6 混联电阻网络的等效电阻 $R_{eq}$ 。

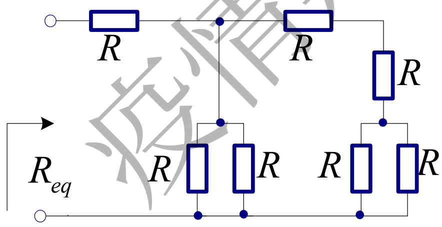



图 2-1-6 混联电路等效电阻的求解示意图

解：两个电阻的 $R$ 并联用 $R_1$ 表示，则 $R_1 = \dfrac{R^2}{R+R}$ 。所以

$$R_{eq} = \frac{R_1\left(R_1 + 2R\right)}{R_1 + 2R + R_1} + R = \frac{17}{12} R$$

## 2-1-3 电源的等效变换

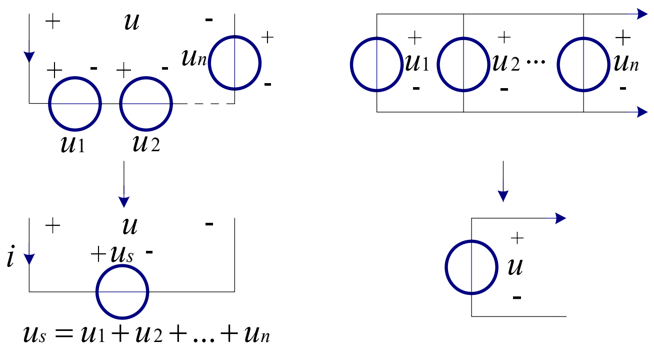
这里所说的电源模型为理想电压源或者理想电流源，简称电压源或者电流源。

### 1、电压源串联

数个电压源串联电路如图 2-1-7（a）所示，由 KVL 得

$$u_s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \qquad (2\text{-}1\text{-}7)$$

所等效的电压源电压等于各电压源电压值的代数和。




（a）　　　　(b)

图 2-1-7 电压源串联、并联等效变换图

2．电压源并联

当$u_1=u_2=\cdots=u_n=u_s$时，等效电路如图 2-1-7（b）所示，等效电压源电压是其中的任一电压值。当$u_1\neq u_2\neq\cdots\neq u_n$时，电路将产生无穷大的电流，从而烧毁电路。所以不同数值和极性的电压源不能并联。

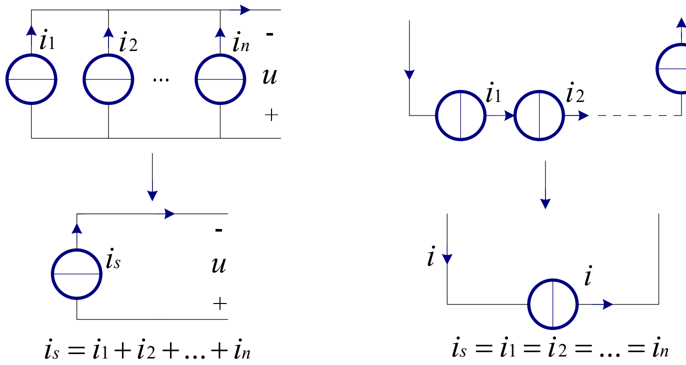
3．电流源并联

几个电流源并联，根据 KCL 可等效为一个电流源，该电流源的电流等于各个电流源电流值的代数和。如图 2-1-8（a）所示。由 KCL 得

$$i_s=i_1+i_2+\cdots+i_n \qquad (2\text{-}1\text{-}8)$$

4．电流源串联

当$i_1=i_2=\cdots=i_n$时，等效电路如图 2-1-8（b）所示，等效电流源电流是其中的任一电流值。当$i_1\neq i_2\neq\cdots=i_n$时，将产生无穷大的电压，烧毁电路。所以不同的电流源不能串联。




（a）　　　　　　　　（b）

图 2-1-8　电流源的并联等效

**5. 电压源与二端网络 N 并联，电流源与二端网络 N 串联**

对于外电路而言，电压源$u_s$与某一二端网络 N 并联，只要这个二端网络 N 不是与该电压源不同数值的或极性相反的电压源，对外都可等效为电压源$u_s$。如图 2-1-9 所示。

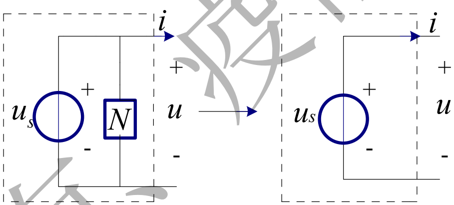



图 2-1-9 电压源与二端网络并联的等效电路图

根据理想电压源的特性，端口处的电压$u$始终等于$u_s$；由于电压源可提供任意大小的电流，N 的存在虽会使电压源电流有所改变，但不管 N 加入与否，电压源两端电压不会改变。我们看到，只要外接负载相同，端口对外输出的电流$i$就相同。所以，两者外部的 VCR 完全相同，可以等效表示。

同样地，对于外电路而言，电流源与任意二端网络（除了不同数值的和电流方向相反的电流源）串联的等效电路就是电流源本身，如图 2-1-10 所示。

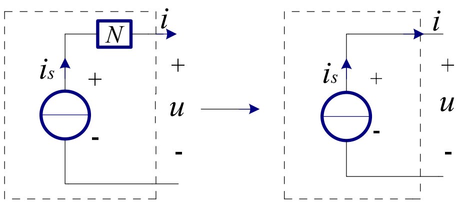


图 2-1-10 电流源与二端网络串联的等效电路图

### 6. 两种实际电源模型的等效转换

前文提到，由于实际电压源存在电源损耗，当外接负载后，有电流流过负载，实际电压源的端电压会随电流的增大而减小，实际电压源的端电压不是恒定不变的，因此实际电压源可用理想电压源与电阻的串联模型或理想电流源与电阻的并联模型来表示。

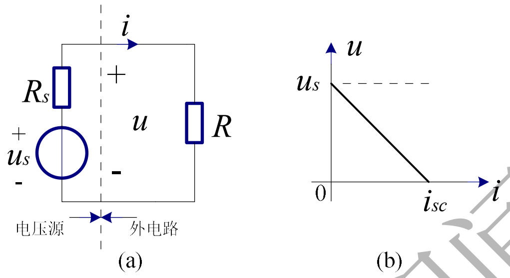



图 2-1-11 实际电压源的电路模型和 VCR 特性曲线图

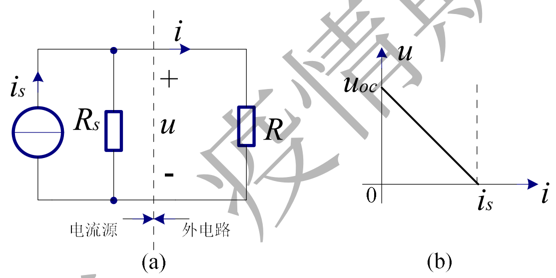



图 2-1-12 实际电流源的电路模型和 VCR 特性曲线图

根据等效的概念，如果两者的外特性完全相同，则它们可以进行等效互换。如果两者等效，则它们的 VCR 曲线应完全相同，由此可以得出等效条件为：

$$u_s = i_s R_s \tag{2-1-9}$$

$$i_s = \frac{u_s}{R_s} \tag{2-1-10}$$

如果已知实际电压源模型，由式（2-1-9）可以求出与它等效的实际电流源模型。反之，已知实际电流源模型，由式（2-1-10）可以求出与它等效的实际电压源模型。 在等效互换时要注意的是实际电压源的极性与实际电流源的方向之间的对应关系，如图 2-1-13 所示。

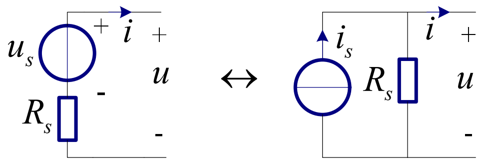


图 2-1-13 实际电流源电压源的等效互换电路图型和 VCR 特性曲线图

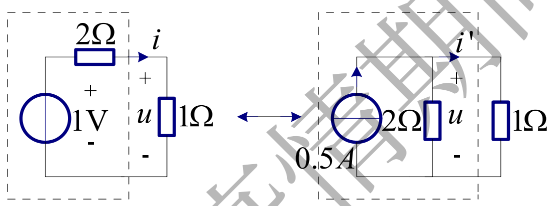
理想电压源与理想电流源不能进行等效互换，因为两者的 VCR 曲线截然不同。

【例题 2-2】已知图 2-1-14（a）电路，虚线框内是一个电压源与电阻串联电路，求虚线框内等效的电流源与电阻并联电路。

解：等效的电流源电流

$$i_s = \frac{u_s}{R_s} = \frac{1}{2} = 0.5A$$

等效电路如图 2-1-14（b）所示。



（a） （b）

图 2-1-14 例题 2-2

【例题 2-3】将图 2-1-15 电路简化成简单的电压源模型电路。

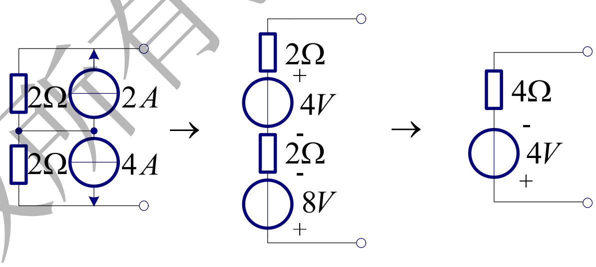


图 2-1-15 例题 2-3

解：根据电源等效变换规则，可依次化简为（b）（c）图。

【例题 2-4】将图 2-1-16 电路简化成简单的电流源模型电路。

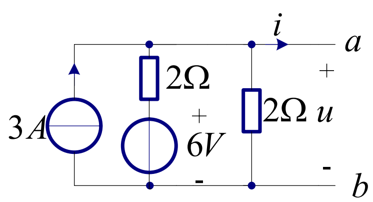


图 2-1-16 例题 2-4

解：先将电压源支路变换为电流源与电阻的并联支路，如图 2-1-17（a）所示。再将电流源和电阻进行合并，如图 2-1-17（b）所示，此为电流源电路的最简形式。

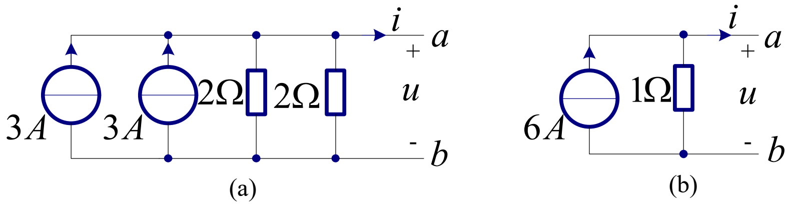



图 2-1-17 例题 2-4 的化简步骤

## 2-2 电路分析的一般方法

本节将要介绍线性电路的一般分析方法。所谓的一般分析方法，是指能求解任何线性电路，特别是复杂线性电路的方法。这种方法是依据 KCL、KVL 及元件电压和电流关系列方程、解方程，而且所列的方程又有一定的规律可循。

### 2-2-1 支路电流（电压）法

对于包含 b 条支路 n 个节点的电路，若以支路电流和支路电压为电路变量，则共有 2b 个未知量。由相关理论可知，利用 KCL 可列写(n-1)个独立电流方程、利用 KVL 可列写（b-n+1）个独立电压方程，而元件的 VCR 约束又可列出 b 个方程。方程数与未知数相等，可以求解电路方程中的电路变量。

进一步分析，由于各支路具有固定的 VCR 约束关系，在电阻电路中一旦求出各支路电流（电压），各支路电压（电流）则可由相应支路的 VCR 求得。因此，求解整个电路可以分二步进行，可先设法求得所有支路电流（电压），再由各支路的元件约束关系求出所有支路电压（电流）。这样，联立方程数目则减少为 b 个。

以支路电流法为例，先利用 KCL 可列写（n-1）个独立电流方程，利用 KVL 可列写（b-n+1）个独立电压方程。然后依据相关 VCR 约束，对 KVL 方程中的电压变量用电流变量代替。这样，可得到以 b 个支路电流为未知量的 b 个独立的 KCL 和 KVL 方程，即可由此求解支路电流。

类似地，若将上述(n-1)个独立的 KCL 方程中的电流变量用支路电压代替，即可得到以 b 个支路电压为未知量的 b 个独立的 KCL 和 KVL 方程，可由此求解支

路电压。

【例题 2-4】根据图 2-2-1 所示电路，列出求解电路的支路电流方程，并计算各支路电流。

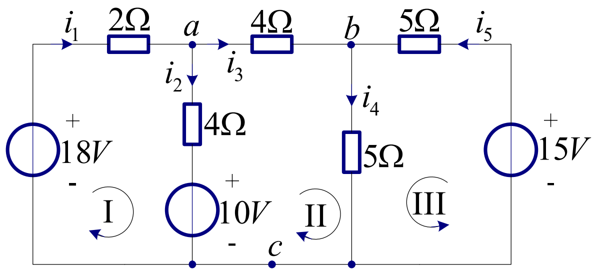



图 2-2-1 例题 2-7

解： 首先标出各支路电流及参考方向，如图 2-2-1 所示。因为电路具有 3 个节点，5 条支路，所以可列出 2 个独立的节点电流方程和 3 个独立的回路电压方程

对于节点 $a$ 和 $b$，因为每个节点都包含一个独有的电流变量，因此，各方程必定彼此独立。

由节点 $a$ 有 $$-i_1+i_2+i_3=0$$

由节点 $b$ 有 $$-i_3+i_4-i_5=0$$

按图中所示列写回路 I，II，III 的 KVL 方程，由于各回路包含独有的支路电压，因而各个 KVL 方程也彼此独立，有：

I： $$2i_1+4i_2=18-10$$

II： $$-4i_2+4i_3+5i_4=10$$

III： $$5i_4+5i_5=15$$

上述方程经整理后有

$$-i_1+i_2+i_3=0$$

$$-i_3+i_4-i_5=0$$

$$2i_1+4i_2=8$$

$$-4i_2+4i_3+5i_4=10$$

$$5i_4+5i_5=15$$

解方程组得

$$i_1 = 2A, i_2 = 1A, i_3 = 1A, i_4 = 2A, i_5 = 1A$$

利用独立的 KCL 与 KVL 方程是分析线性电路的一种最基本的方法。在方程数目不多的情况下可以使用。当方程数较多，且规律性不强，手工求解比较繁琐时，有必要寻求更简便，规律性更强的系统化求解电路的方法。

## 2-2-2 网孔电流法

网孔电流法是求解线性网络的一个重要方法，它只适用于平面网络。网孔电流法以网孔电流作为电路的独立变量。

对于 b 个支路 n 个节点的平面网络，共有 b-n+1 个网孔。设电路中每个网孔中都有一个环绕网孔流动的电流，如果网孔电流求出，就可以求取所有的支路电流。沿每个网孔（回路）列写 KVL 方程。再将各网孔涉及的电阻支路电压以网孔电流与电阻的乘积表示，则可由 b-n+1 个独立方程求解 b-n+1 个网孔电流变量。再根据 KCL、元件的 VCR 求出全部支路电流及电压。下面举例说明网孔方程的列写过程。

### 1、网孔电流法的列写

【例题 2-5】已知电路如图 2-2-2 所示

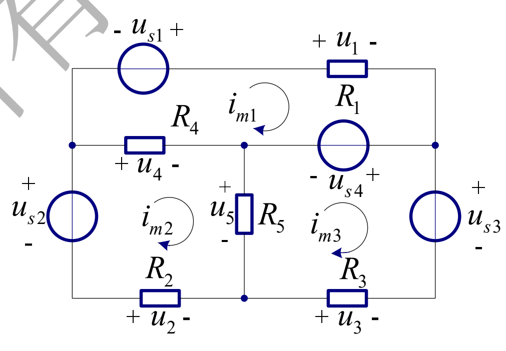



图 2-2-2　网孔方程列写推导用

在如图2-2-2所示的电路中，设网孔电流为$i_{m1}, i_{m2}, i_{m3}$，方向如图2-2-2所示。列写各网孔回路的 KVL 方程：

$$\begin{cases} u_1 - u_4 = u_{s1} - u_{s4} \\ -u_2 + u_4 + u_5 = u_{s2} \\ -u_3 - u_5 = -u_{s3} + u_{s4} \end{cases} \tag{2-2-1}$$

将各支路电压表示为网孔电流与电阻的乘积：

$u_1 = R_1 i_{m1} \quad u_2 = -R_2 i_{m2} \quad u_3 = -R_3 i_{m3}$

$u_4 = R_4 (i_{m2} - i_{m1})$

$$u_5 = R_5 (i_{m2} - i_{m3}) \tag{2-2-2}$$

将式（2-2-2）代入式（2-2-1）中，整理得：

$$\begin{cases} (R_1 + R_4) i_{m1} - R_4 i_{m2} = u_{s1} - u_{s4} \\ -R_4 i_{m1} + (R_2 + R_4 + R_5) i_{m2} - R_5 i_{m3} = u_{s2} \\ -R_5 i_{m2} + (R_3 + R_5) i_{m3} = -u_{s3} + u_{s4} \end{cases} \tag{2-2-3}$$

由此可求得各个网孔电流。

可将网孔电流法推广到一般形式，对于具有 m 个网孔的任一平面网络，则网孔电流方程的标准形式为：

$$\begin{cases} R_{11} i_{m1} + R_{12} i_{m2} + \cdots + R_{1m} i_{mm} = u_{s11} \\ R_{21} i_{m1} + R_{22} i_{m2} + \cdots + R_{2m} i_{mm} = u_{s22} \\ \qquad \cdots \\ R_{m1} i_{m1} + R_{m2} i_{m2} + \cdots + R_{mm} i_{mm} = u_{smm} \end{cases} \tag{2-2-4}$$

其中，方程左边下标相同的电阻 $R_{ii}$ 为各网孔的自电阻，其等于各网孔包含的所有电阻之和，该值总为正；下标不同的电阻 $R_{jk}$ 为网孔 j 与 k 之间公共支路的互电阻，且 $R_{jk} = R_{kj}$，当公共支路上网孔 j 与网孔 k 电流方向相反时互电阻为负，否则为正。若两网孔间没有公共支路，或有公共支路但公共电阻为零，如电压源支路，则互电阻等于零；$u_{sjj}$ 为网孔 j 所有电压源电压的代数和，若沿网孔电流方向电源电压的参考极性由负到正，即电压升，则电压源前取正号；若沿网孔电流方向电源电压的参考极性由正到负，即电压降，则电压源前取负号。

需要说明的是，网孔电流的方向可任意选择，一般同时选择为顺时针或者逆时针方向，这样选取，则网孔间的互电阻统一都为负值。

**网孔电流法的列写规则**

用网孔电流法列写方程的规则可表述为：

本网孔电流乘以自电阻，加上相邻网孔的网孔电流乘以本网孔与相邻网孔之间的互电阻，等于本网孔包含的所有电压源的代数和。

【例题 2-6】列写图 2-2-3 所示电路的网孔电流方程。

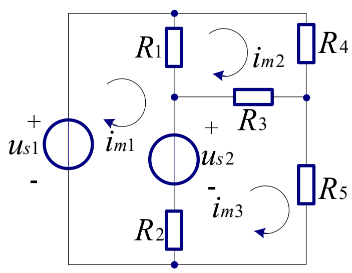



图 2-2-3　例题 2-9

解：选取网孔电流方向如图 2-2-3 所示，根据网孔电流方程的标准形式和列写规则，则有：

$$\begin{cases}(R_1+R_2)i_{m1}-R_1 i_{m2}-R_2 i_{m3}=u_{s1}-u_{s2}\\-R_1 i_{m1}+(R_1+R_4+R_3)i_{m2}-R_3 i_{m3}=0\\-R_2 i_{m1}-R_3 i_{m2}+(R_2+R_3+R_5)i_{mm}=u_{s2}\end{cases}$$

**2、特殊情况的处理**

下面通过例题对网孔方程在列写过程中可能遇到的各种情况做进一步讨论。

**（1）若某一支路出现了理想电流源**

网孔电流方程中每项的量纲为电压，若某支路中出现了理想电流源，此时无法按标准形式列写方程。在不改变电路结构的前提下，解决方法是：假设电流源的端电压$u$，将电流源看作电压为$u$的某段支路，即可按照一般方法列写方程。因为电压$u$是未知量，因此需增加一个表示网孔电流与电流源电流关系的约束方程。

【例题 2-7】列写图 2-2-4 电路中的各网孔电流方程。

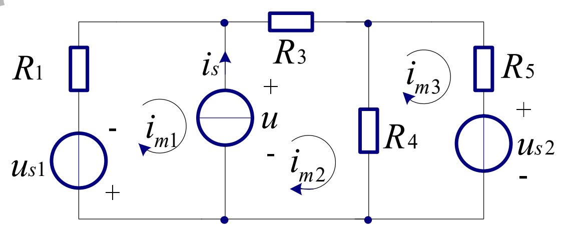



图 2-2-4　例题 2-10

解：设电流源的端电压为$u$，各个网孔电流如图中标注所示，则有：

$$\begin{cases}i_{m1}R_1=-u_{s1}-u\\i_{m2}(R_3+R_4)-i_{m3}R_4=u\\-i_{m2}R_4+i_{m3}(R_4+R_5)=-u_{s2}\end{cases}$$

约束方程：$i_{m2}-i_{m1}=i_{s1}$

4 个未知量 4 个方程，可解得网孔电流 $i_{m1},i_{m2},i_{m3}$，以及电流源端电压 $u$ 。

【例题 2-8】根据图 2-2-5($a$)所示电路，用网孔法求支路电流 $I$ 。

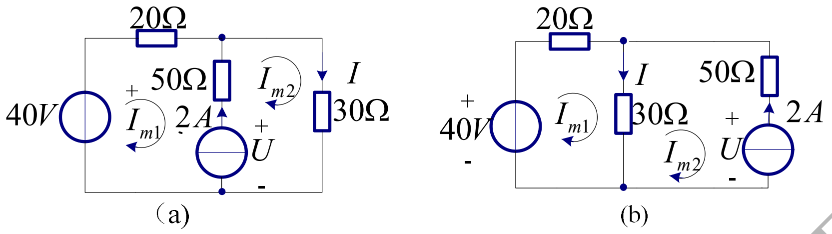



图 2-2-5 例题 2-11

解： 设网孔电流及参考方向如图 2-2-5(a)所示。其网孔方程为

$$\begin{cases} 70I_{m1}-50I_{m2}=40-U \\ -50I_{m1}+80I_{m2}=U \\ I_{m1}-I_{m2}=-2 \end{cases}$$

解方程组得：$I=I_{m2}=1.6A$

对含有电流源支路电路作适当调整，就可以减少计算工作量。即若把图 2-2-5(a)改为图(b)所示，则只用一个方程就可解得 $I_{m1}$。另外一个网孔的电流可由电流源电流大小获得。网孔 $I_{m1}$ 的方程为：

$$50I_{m1}+30\times 2=40$$

解得：$I_{m1}=-\dfrac{2}{5}A$

$$I=I_{m1}+2=1.6A$$

（2）电路中含有受控源

当电路中含有受控源时，可先将其看作独立源，按网孔电流法一般规律列写方程。由于受控源的控制量也是未知量，应该再补充表示网孔电流与控制量之间关系的约束方程。

【例题 2-9】列写图 2-2-6 电路的网孔方程。

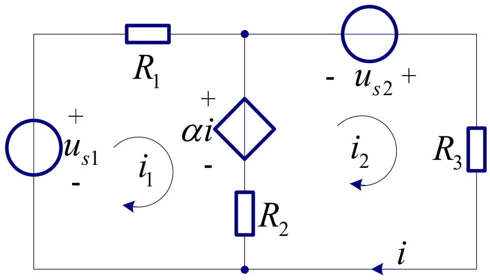



图 2-2-6 例题 2-12

解：将受控源当独立源看待，按一般规则列写网孔方程如下：

$$\begin{cases} i_1(R_1+R_2)-i_2R_2=u_{s1}-\alpha i \\ -i_1R_2+i_2(R_2+R_3)=\alpha i-u_{s2} \end{cases}$$

添加约束方程：$i=i_2$，代入上面方程，有：

$$\begin{cases} i_1(R_1+R_2)+(\alpha-R_2)i_2=u_{s1} \\ -i_1R_2+i_2(R_2+R_3-\alpha)=-u_{s2} \end{cases}$$

由上面的方程可以看出，对于含受控源的网络，互电阻将不再相等。网孔电流法分析电路的一般步骤总结为：

① 选定网孔电流及参考方向；

② 按标准形式和列写规则列写网孔电流方程。注意自电阻总为正，互电阻的正负要根据相邻网孔的电流方向而定；当电路中含有受控源或理想电流源时，按图 2-2-4、2-2-6 中给出的方法处理；

③ 求解出网孔电流；

④ 通过 KCL、元件 VCR 约束解出所有支路的电流、电压。

【例题 2-10】根据图 2-2-7 所示电路，网孔电流方向以及电流源端电压如图中所示，列出求解电路所需的网孔电流方程及辅助方程。

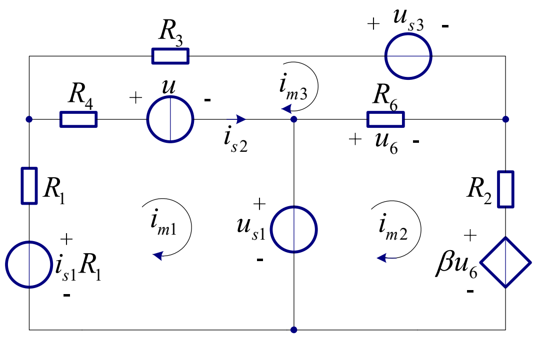



图 2-2-7 例题 2-10

解：对于已知的三个网孔，其网孔电流方程为

$$\left(R_1+R_4\right)i_{m1}-R_4 i_{m3}=R_1 i_{s1}-u_{s1}-u \quad (1)$$

$$\left(R_2+R_6\right)i_{m2}-R_6 i_{m3}=u_{s1}-\beta u_6 \quad (2)$$

$$-R_4 i_{m1}-R_6 i_{m2}+\left(R_3+R_4+R_6\right)i_{m3}=u-u_{s3} \quad (3)$$

由 3 个网孔可以列出 3 个网孔电流方程，但是 3 个方程中含有 5 个变量，所以需要增加 2 个辅助方程。一个是把受控源的控制量用网孔电流表示，另一个是把已知的支路电流用网孔电流表示。

$$u_6=R_6\left(i_2-i_3\right) \quad (4)$$

$$i_{m1}-i_{m3}=i_{s2} \quad (5)$$

这样，解方程组可得各网孔电流$i_{m1},i_{m2},i_{m3}$。

## 2-2-3 节点电压法

对于包含 b 条支路 n 个节点的电路，若假设任一节点作为参考节点，则其余 n－1 个节点即称为独立节点，各独立节点对于参考节点的电压称为节点电压。节点电压是一组独立完备的电压变量，即各支路电压可由节点电压表示，因此由各节点电压可求解所有支路电压。以节点电压作为未知变量并按一定规则列写电路方程的方法称为节点电压法。一旦解得各节点电压，根据 KVL 可解出电路中所有的支路电压，再由电路各元件的 VCR 关系可进一步求得各支路电流。

1、节点电压法方程的列写方法

那么，如何列写求解节点电压所需的方程组呢？可以对每个独立的节点列写 KCL 方程，可得到共 n－1 个独立的 KCL 方程，然后将方程中每条支路电流都以相应的节点电压与电导的乘积表示。这样可以得到包含 n－1 个节点电压变量的 n－1 个独立方程，即可求解。

现举例说明如下：

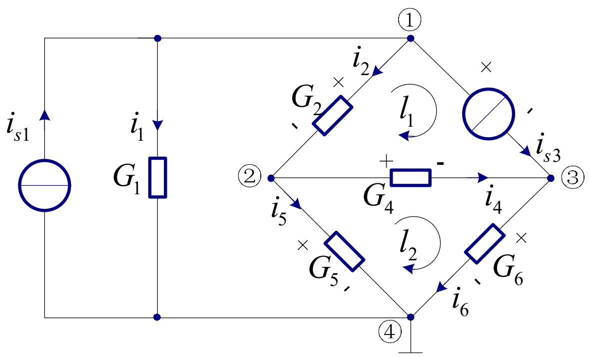



图 2-2-8 节点电压法推导用图

以图 2-2-8 为例，设④为参考节点，则①，②，③点对④点的电压即为 3 个独立的节点电压，分别设为$u_1$、$u_2$、$u_3$。

然后，对节点①,②,③，列写 KCL 方程：

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_{s3} - i_{s1} = 0 \\ -i_2 + i_4 + i_5 = 0 \\ -i_{s3} - i_4 + i_6 = 0 \end{cases} \qquad (2\text{-}2\text{-}5)$$

由各电阻元件的 VCR，有：

$$i_1 = G_1 u_1, i_2 = G_2(u_1 - u_2), i_4 = G_4(u_2 - u_3), i_5 = G_5 u_2, i_6 = G_6 u_3 \qquad (2\text{-}2\text{-}6)$$

代入上面 KCL 方程组，得到以节点电压为变量的方程组：

$$\begin{cases} (G_1 + G_2)u_1 - G_2 u_2 = i_{s1} - i_{s3} \\ -G_2 u_1 + (G_2 + G_4 + G_5)u_2 - G_4 u_3 = 0 \\ -G_4 u_2 + (G_4 + G_6)u_3 = i_{s3} \end{cases} \qquad (2\text{-}2\text{-}7)$$

由式（2-2-7）可解出$u_1$、$u_2$、$u_3$的值。

将节点电压法所列写的方程特点进行总结、归纳并推广到一般形式。对于具有 n 个独立节点的线性网络，当只含有电阻和独立电流源时，有：

$$\begin{cases} G_{11}u_1 + G_{12}u_2 + \cdots + G_{1n}u_n = i_{s11} \\ G_{21}u_1 + G_{22}u_2 + \cdots + G_{2n}u_n = i_{s22} \\ \qquad \cdots \\ G_{n1}u_1 + G_{n2}u_2 + \cdots + G_{nn}u_n = i_{snn} \end{cases} \qquad (2\text{-}2\text{-}8)$$

其中方程组左边系数构成的行列式中主对角线上的电导$G_{ii}$为节点$i$的自电导，自电导定义为连接到每个相应节点上的所有支路电导之和。自电导总为正。非主对角线上的电导$G_{ik}$为节点$i$和$k$之间的互电导，互电导等于两节点间所有公共支路电导之和，互电导恒为负值，且$G_{ik} = G_{ki}$。等式右端电流$i_{skk}$为流入节点$k$

的电流源电流代数和。流入节点的电流取正，流出为负。

节点电压法的列写规则

列写节点方程的规则可总结为：本节点电压乘本节点自电导，加上相邻节点电压乘相邻节点与本节点之间的互电导，等于流入本节点所有电流源电流的代数和。

应该注意，当网络中含有电压源与电阻串联支路时，应将该支路等效为电流源与电阻并联。当网络中含有电流源与电阻串联时，该电阻既不能计入自电导也不能计入互电导中。

【例题 2-11】列写图 2-2-9 的节点电压方程。

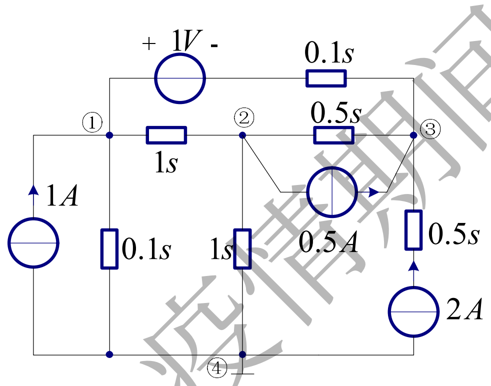



图 2-2-9　例题 2-11 图

解：首先设④为参考节点，节点①,②,③的电压$u_1$、$u_2$、$u_3$即为独立节点电压，根据方程列写规则，则有：

$$\begin{cases}(0.1+1+0.1)u_1+(-1)u_2+(-0.1)u_3=1+1\times0.1\\(-1)u_1+(1+1+0.5)u_2+(-0.5)u_3=-0.5\\(-0.1)u_1+(-0.5)u_2+(0.5+0.1)u_3=2+0.5-1\times0.1\end{cases}$$

根据方程组，则可以求解出节点①,②,③的电压$u_1$、$u_2$、$u_3$。

2、特殊情况的处理

下面通过例题，对应节点电压法求解电路过程中可能遇到的各种情况分别进行详细讨论。

（1）电路中某支路为理想电压源的情况

如果电路中具有理想电压源支路，且这些电压源没有电阻与之串联而无法转

换为电流源与电阻的并联，同时电压源支路电流是未知的。在不改变电路结构的前提下，设电压源支路的电流为$i$，然后按节点法的一般规则，列写节点电压方程。因为电流$i$是引入的一个未知变量，所以要补充一个与电压源支路相关的节电电压约束方程，再与原节点方程一起求解。

【例题 2-12】列写图 2-2-10 所示电路的节点电压方程。

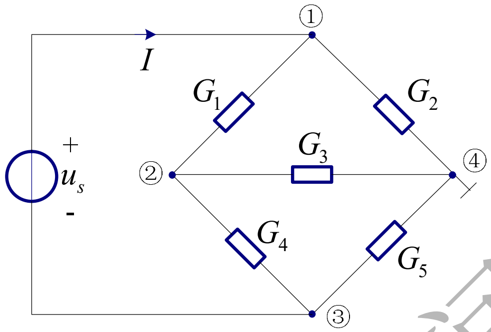



图 2-2-10　例题 2-12 图

解：以④作为参考节点，设理想电压源支路的电流为$I$，方向如图所示，则节点电压方程如下：

$$\begin{cases}(G_1+G_2)u_1-G_1u_2=I\\-G_1u_1+(G_1+G_3+G_4)u_2-G_4u_3=0\\-G_4u_2+(G_4+G_5)u_3=-I\end{cases}$$

因为$I$ 是未知量

所以要再添一个辅助方程。利用已知的约束条件，有：

$$u_1-u_3=u_s$$

这样，四个方程解四个未知量，可以顺利求解。

由此可以看出，前三个方程的每项量纲是电流，最后的辅助方程的量纲是电压

### 2. 含受控源的网络

若网络中含受控源时，可以将受控源当成独立源处理，按一般规则列写独立节点电压方程。因为受控源的控制量也是未知量，可设法以节点电压表示控制量，即每个控制量对应一个辅助方程，将其与节点电压方程一起联立求解。

【例题 2-13】列写图 2-2-11 的节点电压方程。

解：以④作为参考节点，节点电压方程如下：

$$\begin{cases}(G_1+G_2+G_6)u_1-G_2u_2-G_6u_3=i_{s1}+\alpha uG_6\\-G_2u_1+(G_2+G_3+G_4)u_2-G_3u_3=u_{s1}G_4\\-G_6u_1-G_3u_2+(G_3+G_5+G_6)u_3=\beta i-\alpha uG_6\end{cases}$$

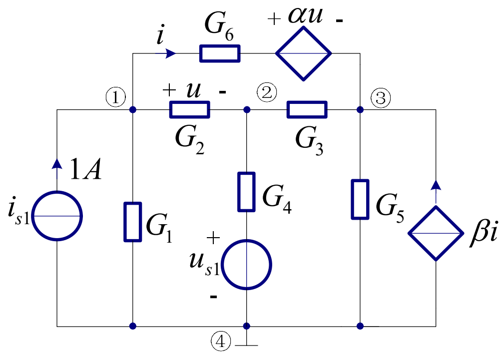



图 2-2-11　　例题 2-13 图

对于控制量$u$，有：$u_2-u_1=u$

对于控制量$i$有：$(u_1-u_3-\alpha u)G_6=i$

这样，五个方程五个未知量，方程可求解。

用节点电压法分析电路的步骤可总结如下：

（1）选定电压参考节点，标注各节点电压；

（2）对所有独立节点按列写规则列写节点方程，当电路中含有理想电压源或受控源时，按上述例题中所给出的方法处理；

（3）解方程组，求解各节点电压；

（4）利用 KCL，KVL 或欧姆定律求解各支路的电流。

节点电压法不仅适用于平面电路，而且对非平面电路也适用。因节点电压法易于编程，所以在计算机辅助网络分析中有广泛的应用。

【例题 2-14】 求图 2-2-12 所示电路中电压$u$。

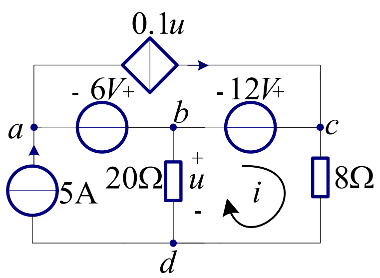



图 2-2-12 例题 2-14 图

解：此题采用节点法求解时，若选$b$点为参考点，即$u_b=0$则

$u_a=-6V, u_c=12V$，只需一个方程就可解得 $u_d$。写出 $d$ 点的节点电压方程为

$$(\frac{1}{20}+\frac{1}{8})u_d-\frac{1}{8}\times u_c=-5$$

解得：$u_d=-20V$

而 $u=-u_d=20V$

若用网孔法求解，因为电路中含有 3 个网孔，其中两个网孔的网孔电流是已知的，所以只要一个方程就可以解得 $u$。支路电流 $i$ 所对应的网孔方程为

$$28i-5\times 20=12$$

解得：$i=4A$

$$u=(5-i)\times 20=20V$$

和前面结果相同。

由以上几个例题可以看到：

网孔法和节点法都比支路电流法的方程少，而且由电路直接编写方程的规律易于掌握，所以网孔法和节点法应用比较多。但是网孔法只适用于分析平面电路。

当电路中有理想电压源支路时，选电源负端为参考点，可减少节点电压方程数目。当电路中有理想电流源支路时，适当调整支路位置，可减少网孔电流方程数目。

求解电路的关键是正确列出电路的分析方程，除掌握各种方程的一般列写步骤外，还应注意特殊情况的处理。

## 2-3 电路分析基本定理

本节将要介绍的几个重要电路定理，被广泛应用在电路理论的研究和分析计算中。它们是电路的叠加定理、替代定理、戴维南定理和诺顿定理和最大功率传输定理。其中戴维南定理、诺顿定理不仅具有重要理论意义，也是分析计算复杂线性电路的有效方法。

### 2-3-1 叠加定理

叠加定理是线性电路的一个重要定理，在由线性电阻、线性受控源和独立电源组成的电路中，任一元件的电流（或电压）可以看成是电路中每一个独立电源单

独作用于电路时，在该元件产生的电流(或电压)的代数和。

所谓单独作用，指某一独立源作用时，其他独立源不作用，即置零。电压源相当于短路，电流源相当于开路。由以上表述我们不难看出，叠加定理实际上体现了线性电路的比例性和叠加性这两个特性。叠加定理在线性网络的分析中起着重要的作用，是分析线性电路的基础。用它可以导出其他许多定理。

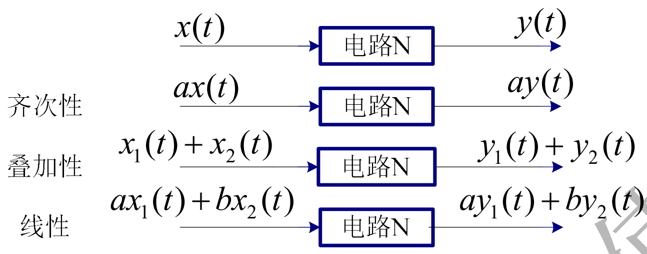



图 2-3-1 叠加定理的框图

叠加定理可用框图 2-3-1 来加以说明。例如，对某线性系统，设 $x(t)$ 为系统激励， $y(t)$ 为响应，若激励变为 $ax(t)$，其中 $a$ 为定值常数，则响应也将变为原来的 $a$ 倍，即 $ay(t)$。这种性质也被称为比例性（homogeneity）。其次，若电路中存在多个激励，如图 2-3-1 中激励分别为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，对应的响应分别为 $ay_1(t)$ 和 $by_2(t)$， 当激励 $ax_1(t)$ 和 $bx_2(t)$ 共同作用系统时，系统的响应为 $ay_1(t)+by_2(t)$。这种性质称为叠加性。

当电路中含有多个独立源时，可将其分解为适当的几组，分别按组计算所求电流或者电压，然后再进行叠加。这样可将复杂的电路变为几个相对简单的电路进行分析计算。但是应该注意的是，虽然使用叠加定理计算过程相对简单，但是一个电路也因此变成了多个电路求解，因此应根据实际电路结构进行选择。

【例题 2-15】 电路如图 2-3-2 所示，求电压 $u_3$ 的值。

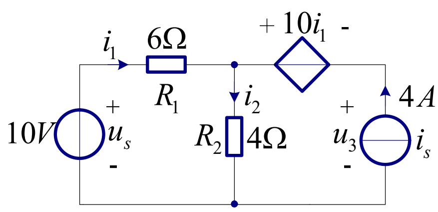
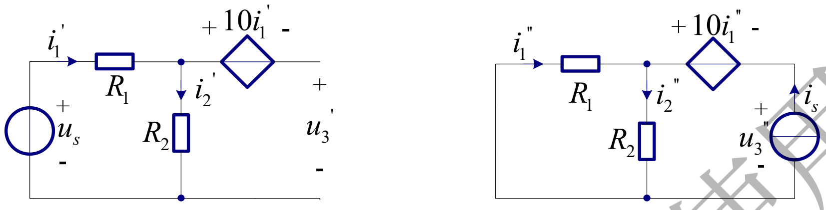



图 2-3-2 例题 2-15 图

解：这是一个含有受控源的电路，用叠加定理求解该题。

对于电压 $u_3$ 可以看作独立电压源 $u_s$ 和电流源 $i_s$ 共同作用下的响应。令电压源和电流源分别作用，但受控源不能单独作用，故每个独立源单独作用时，在电路中受控源要保留，不能作为独立源进行分解。分解后的电路如图 2-3-3（a）、（b）所示，则电压 $u_3=u_3^{'}+u_3^{''}$。




(a)电压源单独作用　　(b)电流源单独作用

图 2-3-3 叠加定理应用例题

对于（a）图：

$$i_1^{'}=i_2^{'}=\frac{10}{4+6}=1A$$

$$\therefore u_3^{'}=-10i_1^{'}+4i_2^{'}=-6V$$

对于（b）图：

$$i_1^{''}=\frac{-4}{6+4}\cdot 4=-1.6A$$

$$i_2^{''}=\frac{6}{6+4}\cdot 4=2.4A$$

根据 KVL，有：

$$u_3^{''}=-10i_1^{''}+4i_2^{''}=25.6V$$

根据叠加定理，得：

$$u_3=u_3^{'}+u_3^{''}=-6+25.6=19.6V$$

【例题 2-16】如图 2-3-4 所示的线性网络 N，已知 $i_{s1}=10A, i_{s2}=14A$ 时，$u_x=100V$

$i_{s1}=-10A, i_{s2}=10A$ 时，$u_x=20V$。求：

①若 N 为无源电阻网络，$i_{s1}=3A, i_{s2}=12A$ 时, $u_x=?$

② 若 N 含有一电压源 $u_s$，$u_s$ 单独作用时，$u_x=20V$，求

$i_{s1}=8A, i_{s2}=12A$时, $u_x=?$

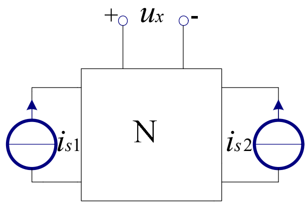



图 2-3-4 例题 2-16 图

解：对于这样的题，一般要利用网络的线性性质求解。

对问题①，因为电路有两个独立源激励，依据电路的叠加性，设 $k_1 i_{s1}+k_2 i_{s2}=u_x$，其中 $k_1, k_2$ 为两个未知的比例系数。利用已知的条件，可知：

$$\begin{cases}10k_1+14k_2=100\\-10k_1+10k_2=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=3\\k_2=5\end{cases}$$

$i_{s1}=3A, i_{s2}=12A$时，$u_x=3i_{s1}+5i_{s2}=69V$

对问题②，网络 N 含有一电压源 $u_s$，则：

$$k_1^{'} i_{s1}+k_2^{'} i_{s2}+k_3^{'} i_{s3}=u_x$$

要注意，由于电路结构不同，这里的系数 $k_1^{'}, k_2^{'}$ 与第一问中 $k_1, k_2$ 的值是不一样的。

由已知条件：$i_{s1}=i_{s2}=0, u_x=20V$ 有：

$$k_3^{'} u_s=20 \qquad (1)$$

又已知其他数据仍有效，即：

$$10k_1^{'}+14k_2^{'}+k_3^{'} u_s=100 \qquad (2)$$

$$-10k_1^{'}+10k_2^{'}+k_3^{'} u_s=20 \qquad (3)$$

联立（1），（2）（3）式得：

$$\begin{cases}k_1^{'}=3.33\\k_2^{'}=3.33\end{cases}$$

所以，

$i_{s1}=8A, i_{s2}=12A$时，

有$u_x=3.33i_{s1}+3.33i_{s2}+k_3^{'} u_s=3.33i_{s1}+3.33i_{s2}+20=86.67V$

【例题 2-17】图 2-3-5 所示电路，其中 $N$ 为线性含源电路。已知当 $u_s=0$ 时，

电流$i=2mA$；当$u_s=20V$时，电流$i=-2mA$。求$u_s=-10V$时，电流$i$。

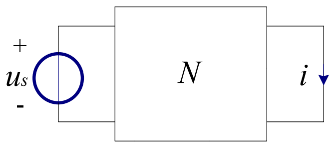



图 2-3-5 例题 2-17 图

解：此题要利用线性电路的线性性质计算。电流$i$由$u_s$和$N$中的独立源共同作用产生。

$i=i_1+i_2$

当$u_s=0$，$N$中独立源作用时

$i_1=0$，即：$i=i_2=2mA$

当$u_s=20V$和$N$中独立源共同作用时

$i_1=i-i_2=-2-2=-4mA$

再由叠加定理的齐次性：$u_s=-10V$时

$$i_1'=-\frac{1}{2}i_1=2mA$$

由线性性质：当$u_s=-10V$和$N$中独立源共同作用时

$i=i_1'+i_2=4mA$

使用叠加定理应该注意以下几点：

（1）叠加定理只适用于线性电路，当电路中某些 VCR 关系不是单值时（如图 1-4-3 所示非线性电阻），即电路不是具有唯一解时不能成立；

（2）由于受控源不代表外界对电路的激励，所以做叠加处理时，受控源及电路的连接关系都应保持不变；

（3）叠加是代数相加，要注意电流和电压的参考方向；

（4）由于功率不是电流或者电压的一次函数，所以功率不能叠加。

## 2-3-2 替代定理

【定理内容】在有唯一解的任意线性或者非线性网络中，若某一支路的电压为$u_k$、电流为$i_k$，那么这条支路就可以用一个电压等于$u_k$的独立电压源，或者用

一个电流等于$i_k$的独立电流源替代，替代后电路其他各支路电压、电流值保持不变。

【例题 2-18】已知电路如图 2-3-6 所示，其中$U=1.5V$，试用替代定理求$U_1$。

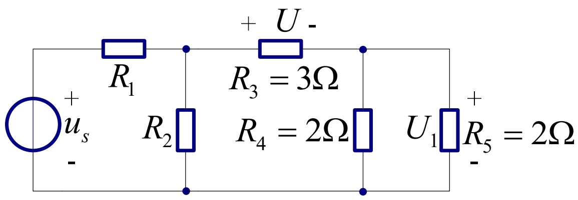



图 2-3-6　例题 2-18 图

解：设$R_3$支路以左的网络为$N$。因为已知$R_3$支路的电压及电阻，所以流过$R_3$的电流为：　$\dfrac{U}{R_3}=\dfrac{1.5}{3}=0.5A$

将$R_3$支路用电流源代替，如图 2-3-7 所示。

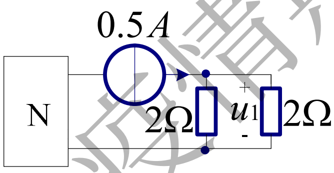
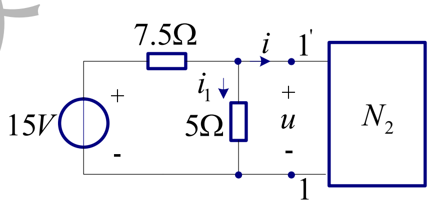



图 2-3-7

则替代后各支路电压电流值不变。

由此可以得到：$U_1=\dfrac{0.5}{2}\times 2=0.5V$

【例题 2-19】在图 2-3-8 所示电路中，已知$N_2$的 VCR 为$u=i+2$，利用替代定理求$i_1$的大小。



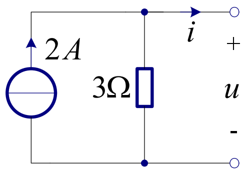




图 2-3-8　例题 2-19 图　　　　　　图 2-3-9

解：假设$1-1'$左端电路为$N_1$，则$N_1$的最简等效电路形式如图 2-3-9 所示。其 VCR 表达式为：　$u=-3i+6$

端口电压变量$u$和电流变量$i$应该同时满足$N_1$和$N_2$的 VCR，因此有：

$$\begin{cases} u = i + 2 \\ u = -3i + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 3V \\ i = 1A \end{cases}$$

根据题意，我们以$u_s = 3V$的电压源替代$N_2$，如图 2-3-10 所示。

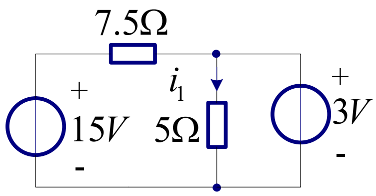



图 2-3-10

求得：$i_1 = \dfrac{3}{5} A$

使用替代定理应注意下面几点：

（1）定理适用于线性和非线性网络，电路在替代前后要有“唯一解”。因此，当电路中含有如二极管，晶体管等非线性元件时应注意各元件的 VCR 特性是否满足唯一解的要求。

（2）被替代的特定支路与电路其他部分应无耦合关系或者控制与被控制的关系。因此，当电路中含有受控源时应保证其控制支路或被控制支路不能存在于被替代的电路部分中。

## 2-3-3　戴维南定理和诺顿定理

在电路分析中，常常需要研究某一支路的电流、电压或功率是多少，对该支路而言，电路的其余部分可看成是一个有源二端网络，该有源二端网络可等效为较简单的电压源与电阻串联或电流源与电阻并联支路，以达到计算和分析简化的目的。戴维南定理和诺顿定理给出了这种等效的方法。这两个定理非常重要，是电路分析计算的有力工具。

### 1、戴维南定理

任何线性有源二端网络 N，就其外特性而言，可以用一个电压源与电阻的串联支路等效置换，如图 2-3-11 所示。

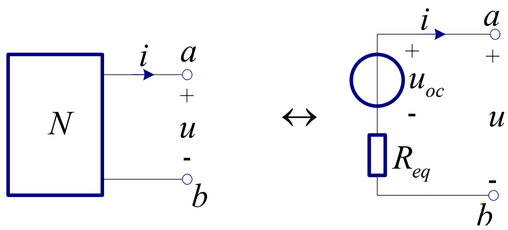
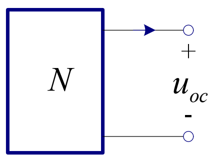



图 2-3-11 戴维南定理示意图

其中，电压源的电压值为该有源二端网络 N 的开路电压$u_{oc}$，如图 2-3-12 所示；串联电阻值等于有源二端网络内部所有独立源不作用时对应的网络$N_0$在输出端求得的等效输入电阻$R_{eq}$，如图 2-3-13 所示。这样的等效电路称为戴维南等效电路。



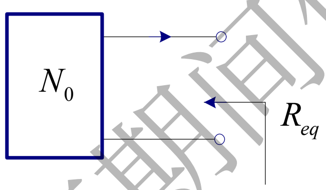




图 2-3-12　　　　图 2-3-13

【证明】

戴维南定理的证明过程如下：

设一个线性含源单口网络 N 与外电路 M 相连，如图 2-3-14（a）所示。其中 M 是任意性质的外电路，其端电压为$u$，端电流为$i$。根据替代定理，外电路 M 可用电流为$i$的电流源$i_s$替代，电路如图 2-3-14（b）。在图 2-3-14（b）电路中，对于$ab$端的电压$u$，运用叠加定理，可以看作电流源$i_s$不作用而 N 网络的全部独立电源作用时的端电压$u'=u_{oc}$与电流源$i_s$作用而 N 内部所有独立电源置零后的网络$N_0$端电压$u''=-R_{eq}i$两部分的代数和，如图 2-3-14（c）所示。则有：

$$u=u'+u''=u_{oc}-R_{eq}i \qquad (2\text{-}3\text{-}1)$$

其中，$R_{eq}$为网络 N 独立源置零后的网络$N_0$的等效电阻。

式（2-3-1）即为 N 的 VCR 表达式。若用图 2-3-14（d）的电路等效替代网络 N，则其对外的 VCR 完全相同，而图 2-3-14（d）所示电路即为戴维南等效电路。戴维南定理得证。

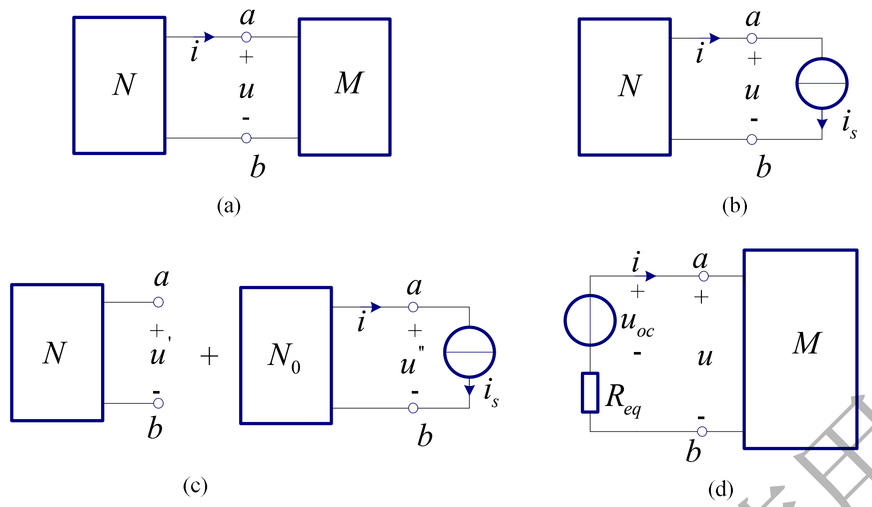



图 2-3-14 戴维南定理证明用图

下面通过例题说明该定理的应用。

【例题 2-20】求图 2-3-15 电路中电流 $I$ 的大小。

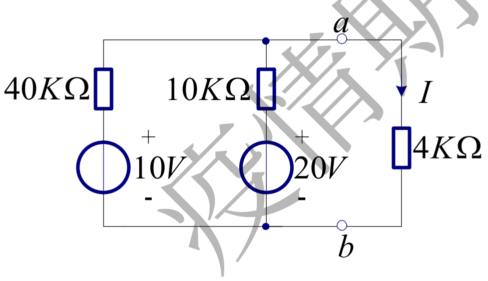
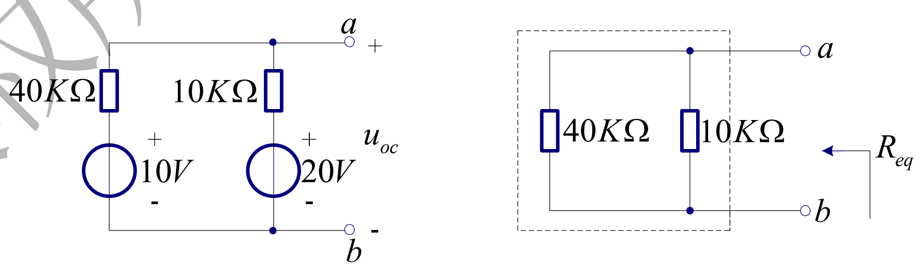



图 2-3-15 例题 2-20 图

解：将电流 $I$ 流过的 $ab$ 支路作为外电路，将 $ab$ 端以左的电路用戴维南定理等效。先求 $ab$ 端的开路电压 $u_{oc}$，如图 2-3-16(a)所示：




(a)例题 2-20 的开路电压　　　(b)例题 2-20 的等效电阻求解图

图 2-3-16

容易求得：$u_{oc}=18V$

再求 $R_{eq}$：将独立电压源短路，则 $ab$ 端以左仅为两电阻的并联，如图 2-3-16(b)所示，则：$R_{eq}=40k\Omega//10k\Omega=8k\Omega$

用戴维南等效电路置换原 $ab$ 端以左的电路部分，如图 2-3-17 所示。得：

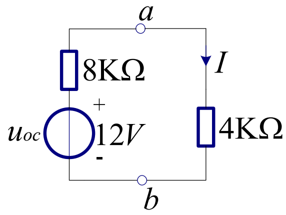



图 2-3-17 例题 2-20 戴维南等效电路

$$I = \frac{18}{4+8} = 1.5mA$$

等效内阻 $R_{eq}$ 的计算

由上面讨论我们可以看出，求含源二端网络 N 的戴维南等效电路时，等效输入电阻 $R_{eq}$ 的求解是关键之处。当有源二端网络 N 内部独立源置零后，若网络内部全是电阻元件而不含有受控源，可以直接利用前面章节中介绍的电阻串并联等效变换关系直接计算 $R_{eq}$。当有源二端网络 N 内部含有受控源时，计算等效输入电阻 $R_{eq}$ 一般采用两种方法。

（1） 外加电压法

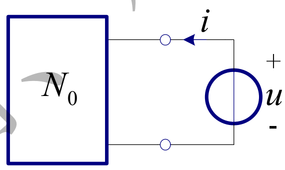



图 2-3-18 加压法求等效电阻示意图

将网络 $N$ 内部所有独立电源置零，受控源保持不变。然后对除源网络（记为 $N_0$）外加一电压源 $u$。设在该电压源作用下其端口电流为 $i$，如图 2-3-18 所示，则等效输入电阻 $R_{eq}$ 定义为：

$$R_{eq} = \frac{u}{i} \tag{2-3-2}$$

【例题 2-21】求图 2-3-19 所示电路中 $ab$ 端的戴维南等效电路。

$ab1k\Omega 0.500i10Vu$

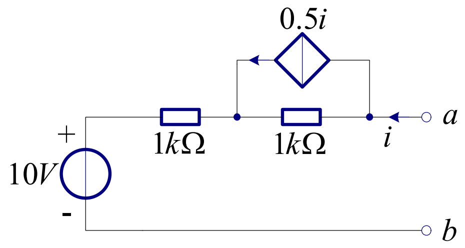



图 2-3-19 例题 2-21 图

解：先求开路电压$u_{oc}$。因为题图电路为开路状态，端口电流为零，所以开路电压即为电压源电压，有$u_{oc}=10V$。再求等效电阻$R_{eq}$。因含有受控源，用外加电压法。

将$10V$电压源作短路处理。受控电流源与电阻的并联电路可等效为受控电压源与电阻的串联形式。这样变换可使计算简单。在$ab$端施加一个电压为$u$的电压源，在该电压源作用下，端电流为$i$，如图 2-3-20 所示。

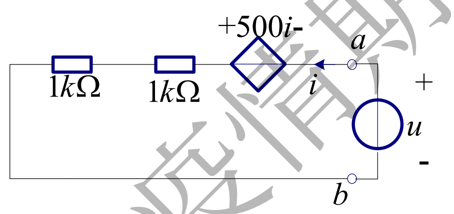



图 2-3-20

列写 KVL 方程，有：

$u=-500i+2000i=1500i$

$\therefore R_{eq}=\frac{u}{i}=1500\Omega$

$ab$端的等效戴维南电路如图 2-3-21 所示。

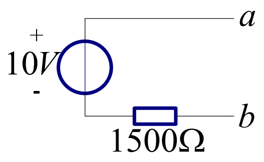



图 2-3-21 戴维南等效电路图

（2）开路电压短路电流法

对于某线性有源二端网络$N$，若分别将其开路和短路，可求得两种情况下的开路电压$u_{oc}$与短路电流$i_{sc}$，如图 2-3-22 所示。

则：$R_{eq}=\dfrac{u_{oc}}{i_{sc}}$ （2-3-3）

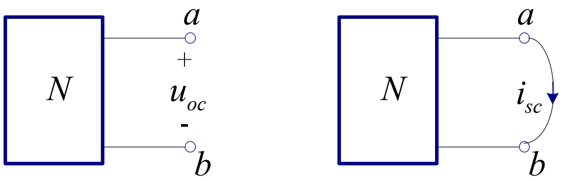



图 2-3-22 开路电压短路电流法示意图

在求解过程中，应该特别注意$u_{oc}$参考极性与$i_{sc}$参考方向的对应关系，注意与外加电压法求解的区别。

【例题 2-22】求图 2-3-23 所示电路中的电压$u_1$。

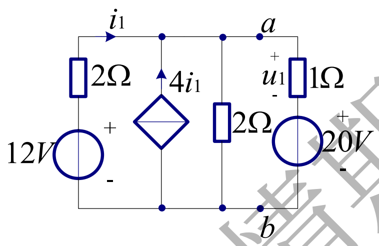



图 2-3-23 例题 2-22 图

解：将$ab$端以左的电路用戴维南定理等效。

(1)先求开路电压$u_{oc}$，如图 2-3-24 所示，

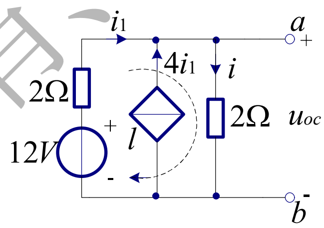



图 2-3-24 例题 2-22 求开路电压图

列写回路$l$的方程。有：

$2i=2(i_1+4i_1)=12-2i_1$

$i_1=1A$

$u_{oc}=2\times5i_1=10V$

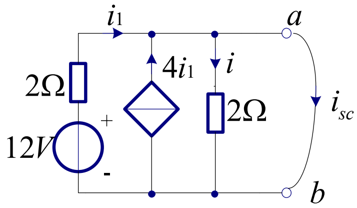



图 2-3-25 例题 2-22 求短路电流图

(2)再求短路电流 $i_{sc}$。如图 2-3-25 所示。

因为 $2\Omega$ 电阻被短路，所以电流 $i$ 为零。

列写 KVL 方程，有：

$$12 = 2i_1$$

即 $i_1 = 6A$

$$i_{sc} = i_1 + 4i_1 = 5i_1 = 30A$$

(3)根据开路电压短路电流法有：

$$R_{eq} = \frac{u_{oc}}{i_{sc}} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}\Omega$$

戴维南等效电路如图 2-3-26 所示：

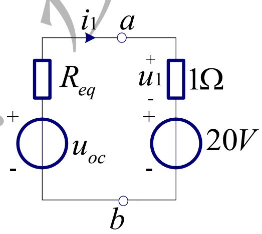



图 2-3-26 例题 2-22 等效电路图

由此易求得：

$$u_1 = -\frac{30}{4}V$$

我们还可以用外加电压源法求例题 2-25 的戴维南等效电路，求解过程请同学自行练习，此处从略。

## 2、诺顿定理

诺顿定理是戴维南定理的推论，与戴维南定理互为对偶定理。

【定理表述】

任何线性有源二端网络 N，对其外特性而言，都可以用一个电流源与电阻的

并联支路来代替。其中电流源电流值为有源二端网络输出端的短路电流$i_{sc}$，并联电阻值为该有源二端网络内所有独立源置零后对应的网络$N_0$在输出端求得的等效输入电阻$R_{eq}$，它与戴维南等效电阻含义相同，等效电路如图 2-3-27 所示，该电路称为诺顿等效电路。

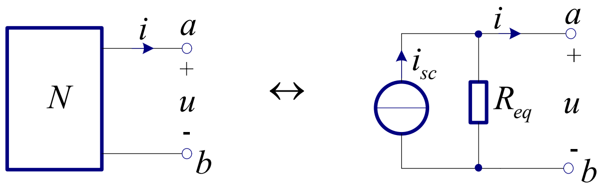



图 2-3-27 诺顿定理示意图

我们可以用与证明戴维南定理类似的方法证明诺顿定理。

应用戴维南和诺顿定理时，应注意下面几点：

（1）戴维南和诺顿定理只适用于线性电路；

（2）一般情况下戴维南等效电路与诺顿电路可以互相转换，如图 2-3-28 所示。转换时应根据等效原则，即端口处的 VCR 要相同。等效变换关系见式（2-3-4）。其中应特别注意开路电压$u_{oc}$参考极性和短路电流$i_{sc}$参考方向的对应关系；

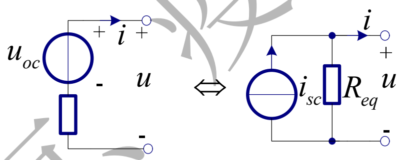



图 2-3-28 戴维南电路与诺顿电路等效变换图

$$\begin{cases} u_{oc} = i_{sc} R_{eq} \\ i_{sc} = \dfrac{u_{oc}}{R_{eq}} \end{cases} \tag{2-3-4}$$

（3）当网络内部含有受控源时，控制电路与受控源必须包含在被化简的同一部分电路中。即该有源二端网络与外电路不能有耦合关系；

（4）若求得 N 的等效电阻$R_{eq} \to \infty$则戴维南等效电路不存在；若$R_{eq} = 0$则诺顿等效电路不存在。

【例题 2-23】根据图 2-3-29(a)所示电路，求电流$i$。

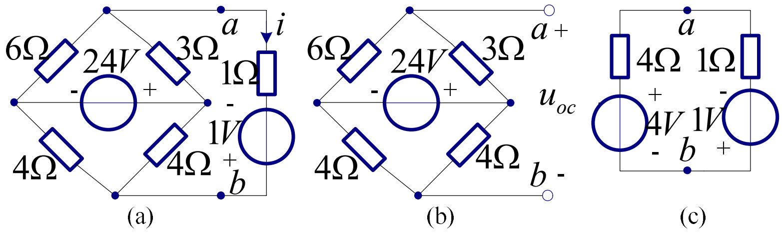



图 2-3-29 例题 2-23 图

解：本题如果用前面介绍的方法解，无论是网孔法还是节点法，都需要解 3 个方程的方程组。如果用叠加法解，当 $24V$ 电压源单独作用时，等效电路是个桥形电路，求解并不简单。下面我们用等效电源定理来求解。电流 $i$ 支路为待求量支路。

求 $u_{oc}$：自 $a$、$b$ 处断开待求量支路，并设开路电压为 $u_{oc}$，如图 2-3-29(b)所示。利用串联电路分压公式和 KVL 可求得

$$u_{oc}=-24\frac{3}{3+6}+24\frac{4}{4+4}=4V$$

求 $R_{eq}$：令图 2-3-29(b)中电压源为零（短路），利用串并联等效可求得等效电阻为

$$R_{eq}=3//6+4//4=4\Omega$$

画出戴维南等效电路，并接上待求量支路，如图 2-3-29(c)所示，据此可求得

$$i=\frac{4+1}{1+4}=1A$$

【例题 2-24】图 2-3-30(a)所示电路，已知电阻 $R$ 上的吸收功率为 $2W$，求电压 $u$。

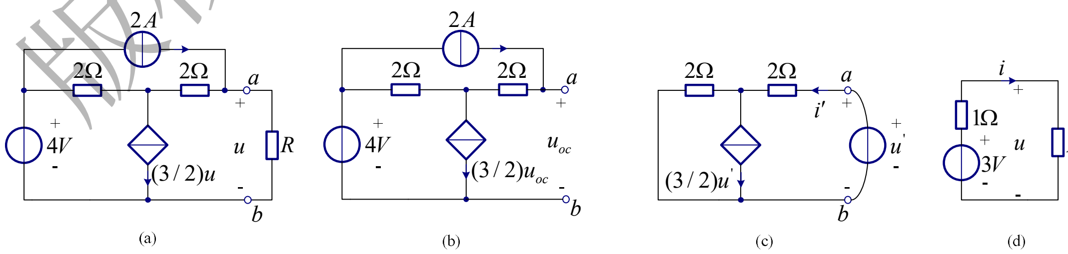



图 2-3-30 例题 2-24 图

解：应用戴维南定理求解。

（1）求 $u_{oc}$：从 $a$、$b$ 端断开待求支路，设 $u_{oc}$ 参考方向如图 2-3-30（b）所示。

由 KVL 得：$u_{oc}=2\times2+2\times(2-\frac{3}{2}u_{oc})+4$

解得：$u_{oc}=3V$

（2）求 $R_{eq}$：因为图 2-3-30（b）电路中含有受控源元件，所以可采用外加电源法计算等效电阻。令图 2-3-30（b）中独立源为零，在 $a$、$b$ 端外接电压源 $u'$，如图 2-3-30（c）列出 KVL 方程为：$u'=2i'+2\times\left(i'-\frac{3}{2}u'\right)=4i'-3u'$

解得：$u'=i'$

故有：$R_{eq}=\frac{u'}{i'}=1\Omega$

画出戴维南等效电路如图 2-3-30（d）所示。据此可求得

$u=3-i$　或　$i=3-u$

$p=ui=3u-u^2=2W$

即：$u^2-3u+2=0$

解得：$u=1V$　或　$u=2V$

【例题 2-25】图 2-3-31(a)所示电路是晶体管放大电路的直流通路。其中 $I_E=I_B+I_C$，$I_C=\beta I_B$，$U_{BE}=0.7V$。试计算直流工作点各电量 $I_B$、$I_C$ 和 $U_{CE}$。

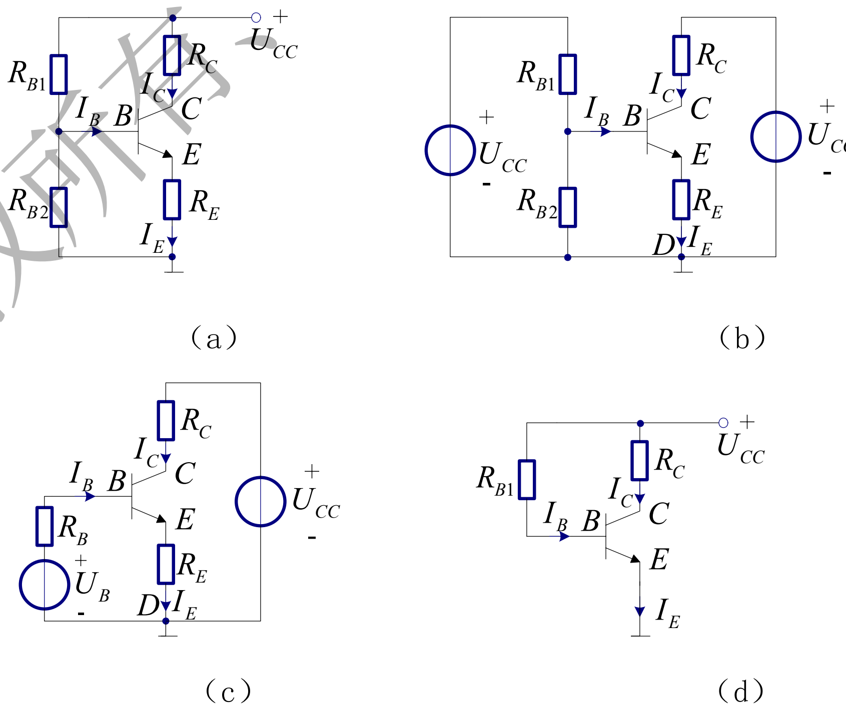



图 2-3-31 例题 2-25

解：图中$U_{CC}$是电压源电压。由此我们可以将图(a)改画为图(b)。为了计算$I_B$，我们可以先求出 BD 以左的戴维南等效电路，如图(c)所示，其中：

$$U_{\mathrm{B}}=\frac{R_{\mathrm{B2}}}{R_{\mathrm{B1}}+R_{\mathrm{B2}}}U_{\mathrm{CC}} \qquad R_{\mathrm{B}}=\frac{R_{\mathrm{B1}}R_{\mathrm{B2}}}{R_{\mathrm{B1}}+R_{\mathrm{B2}}}$$

在图(c)左边网孔中，根据 KVL 有：$R_{\mathrm{B}}I_{\mathrm{B}}+R_{\mathrm{E}}I_{\mathrm{E}}=-U_{\mathrm{BE}}+U_{\mathrm{B}}$

将已知关系$I_{\mathrm{E}}=I_{\mathrm{B}}+I_{\mathrm{C}}$、$I_{\mathrm{C}}=\beta I_{\mathrm{B}}$、$U_{\mathrm{BE}}=0.7\mathrm{V}$代入上式，可求得：

$$I_{\mathrm{B}}=\frac{U_{\mathrm{B}}-0.7}{R_{\mathrm{B}}+(1+\beta)R_{\mathrm{E}}}$$

$$I_{\mathrm{C}}=\beta I_{\mathrm{B}}$$

在图(c)右边网孔中，根据 KVL 有：$U_{\mathrm{CE}}=U_{\mathrm{CC}}-R_{\mathrm{C}}I_{\mathrm{C}}-R_{\mathrm{E}}I_{\mathrm{E}}$

将已知关系$I_{\mathrm{E}}=I_{\mathrm{B}}+I_{\mathrm{C}}$、$I_{\mathrm{C}}=\beta I_{\mathrm{B}}$代入上式，可求得：

$$U_{\mathrm{CE}}=U_{\mathrm{CC}}-[\beta R_{\mathrm{C}}+(1+\beta)R_{\mathrm{E}}]I_{\mathrm{B}}$$

图(d)是另一种晶体管放大电路的直流通路，其与图(a)的区别在于$R_{\mathrm{B2}}=\infty$、$R_{\mathrm{E}}=0$，在这种情况下，$U_{\mathrm{B}}=U_{\mathrm{CC}}$，$R_{\mathrm{B}}=R_{\mathrm{B1}}$，直流工作点各电量如下：

$$I_{\mathrm{B}}=\frac{U_{\mathrm{B}}-0.7}{R_{\mathrm{B}}}$$

$$I_{\mathrm{C}}=\beta I_{\mathrm{B}}$$

$$U_{\mathrm{CE}}=U_{\mathrm{CC}}-\beta R_{\mathrm{C}}I_{\mathrm{B}}$$

## 2-3-4　最大功率传输定理

在实际电路中，我们总希望负载能从电源获得最大功率，那么在什么条件下才能获得最大功率？最大功率又是多少呢？本节介绍的最大功率传输定理（maximum power transfer theorem）将对此问题做出回答。

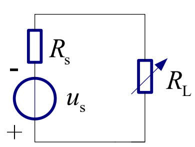



图 2-3-32　一个简单电路

我们从一个简单的一个电压源向一个负载供电的电路开始讨论，如图

2-3-32 所示，其中 $R_s$ 为电压源的内阻， $R_L$ 是负载电阻，阻值可变，求阻值为多大时负载获得最大功率。由图可以得到负载功率的计算式为：

$$P_L = i^2 R_L = (\frac{u_s}{R_s + R_L})^2 R_L \qquad (2\text{-}3\text{-}5)$$

由极值理论可知，当 $\frac{dP_L}{dR_L} = 0$ 时， $P_L$ 有极值。因为：

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{(R_s + R_L)^2 - 2(R_s + R_L)R_L}{(R_s + R_L)^4} u_s^2 = \frac{R_s - R_L}{(R_s + R_L)^3} u_s^2$$

所以，当 $R_L = R_s$ 时， $\frac{dP_L}{dR_L} = 0$， $P_L$ 取得极值。又因为：

$$\left.\frac{d^2 P_L}{dR_L^2}\right|_{R_L = R_s} = -\frac{u_s^2}{8R_s^3} < 0 \qquad (2\text{-}3\text{-}6)$$

所以，当 $R_L = R_s$ 时， $P_L$ 有极大值，而此时 $P_{L\max} = \frac{u_s^2}{4R_s}$。

虽然这是由一个简单电路推出的，但它具有普遍性，因为根据戴维南定理，任何线性含源二端网络都可以用实际电压源模型等效，由此我们得到最大功率传输定理如下：

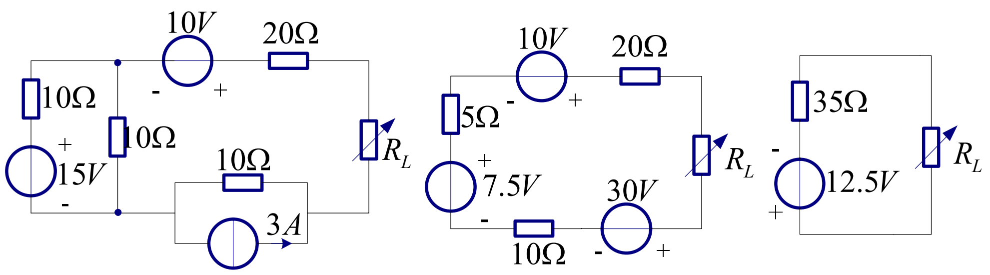
由线性含源二端网络传递给可变负载 $R_L$ 的功率为最大的条件是：负载 $R_L$ 应与戴维南等效电阻 $R_s$ 相等，即

$$R_L = R_s \qquad (2\text{-}3\text{-}7)$$

所获得的最大功率为：

$$P_{L\max} = \frac{u_s^2}{4R_s} \qquad (2\text{-}3\text{-}8)$$

【例题 2-26】试求图 2-3-33(a)所示电路中负载 $R_L$ 在什么条件下获得最大功率？最大功率是多少？



（a） （b） （c）

图 2-3-33 例题 2-26

解： 首先求负载左端部分的戴维南等效电路。由图可以看出，利用电源等效变换很容易得到其戴维南等效电路，变换步骤如图图 2-3-33(b)、(c)所示。

$$u_s = u_{oc} = 12.5\text{V}，\ R_s = R_{eq} = 35\Omega$$

所以，当 $R_L = R_{eq} = 35\Omega$ 时，负载获得最大功率。

最大功率为 $P_{max} = \dfrac{12.5^2}{4 \times 35} = 1.116\text{W}$

【例题 2-27】试求图 2-3-34(a)所示电路中负载 $R_L$ 获得的最大功率。

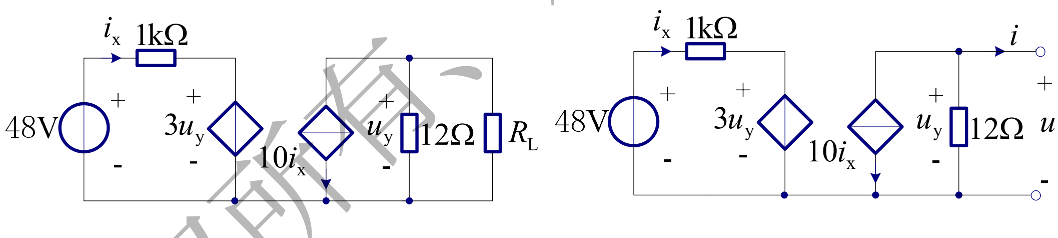
解：首先将负载移走，求剩下的含源二端网络的戴维南等效电路。由图 2-3-34(b)列写端口的 VCR。

$$u = u_y = 12 \times (-10i_x - i)$$

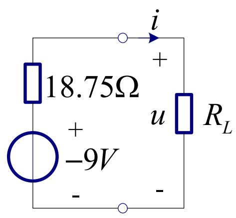
$$i_x = \frac{48 - 3u_y}{1000} = \frac{48 - 3u}{1000}，\text{代入上式得：}$$

$$640u = -120 \times 48 - 12000i$$

$$u = -9 - 18.75i$$




（a） （b）




（c）

图 2-3-34 例题 2-27 电路

由此可以画出含源二端网络的等效电路，将负载接上，得到如图图 2-3-34(c)所示电路。负载获得的最大功率为：

$$P_{\mathrm{L\,max}} = \frac{(-9)^2}{4\times 18.75} = 1.08\mathrm{W}\text{-}$$

那么也许会有人问：如果戴维南等效电路的内阻为零，则负载不是可以得到更大的功率。这就要搞清楚我们讨论的问题是什么。我们知道，对于一个复杂的二端口网络，等效为戴维南等效电路，其内阻是被等效网络的内在特性决定，在实际问题中是不可改变的。剩下的问题是如何选择负载，才能够从二端网络中获取最大功率。因此最大功率传输定理体现了前后级传输时的阻抗匹配关系。

当然，负载从等效电源得到的功率只有 50%，从能量传输的效率看只有 50%。在某些具体条件下，如何解决传输效率是另外的问题。

## 2-3-5　电路的对偶特性

回顾前面所学的内容，我们会发现某些电路结构、变量、元件分析方法和定理等都具有明显的类比性质。

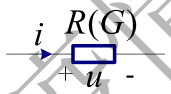



图 2-3-35

例如，对于图 2-3-36 所示电阻元件在电流、电压取关联参考方向时，VCR 的约束可表达为下面两个公式：

$$u = iR \qquad ①$$

$$i = uG \qquad ②$$

在①式中，若将 $u \to i, i \to u, R \to G$ 替换的话，①式就变成②式。

我们把这种类比性质称为对偶特性。电路中的某些元素之间的关系，用它们的对偶元素置换后所得的新关系也一定成立，这个新关系与原关系互为对偶，这就是对偶原理。

**元件对偶：** 从元件的伏安特性出发，除了无源元件中电阻 R 与电导 G 对偶外，电感 L 与电容 C 对偶（$u_L = L\frac{di_L}{dt}, i_c = C\frac{du_c}{dt}$）；有源元件中理想电压源与理想电流源互为对偶。理想电压源电压一定，电流由外电路决定；理想电流源电流一定，电压由外电路决定。

**电路结构对偶：** 开路与短路对偶，表现为开路电压（电流为零），对偶短路

电流（电压为零）；串联与并联对偶，串联电路同一电流与并联电路同一电压对偶，串联电压之和与并联电流之和对偶；非理想电压源模型与非理想电流源模型对偶，前者是理想电压源与内阻的串联组合，后者是理想电流源与内阻的并联。

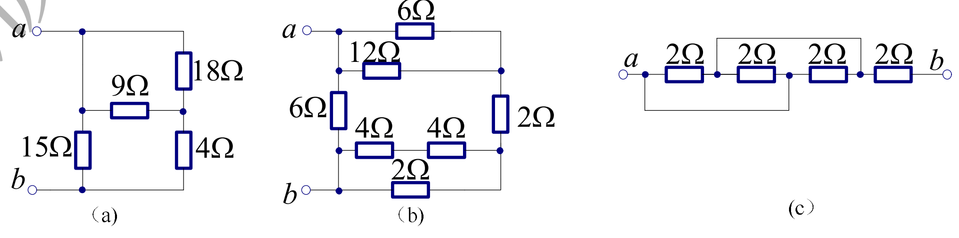
**电路定律、定理对偶：**例如 KCL 与 KVL 定律对偶，KCL 反映的是各支路节点的电流约束关系，而 KVL 反映的是回路中各支路电压间约束关系。若将 KCL 中的节点以回路代替，电流用电压代替，则 KCL 就变成 KVL；戴维南定理与满诺顿定理互为对偶等。

掌握对偶特性有助于推广已有知识，探索发现新的规律和方法。



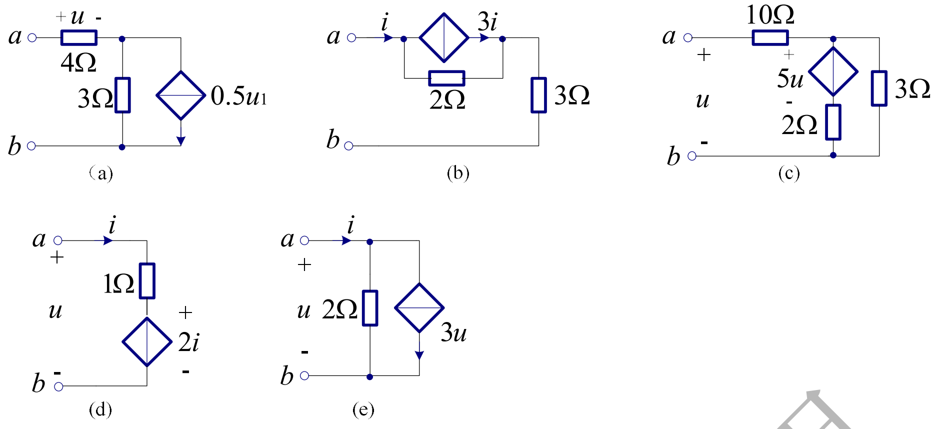
## 习 题

2-1 求题图 2-1 所示电路 $ab$ 端的等效电阻。



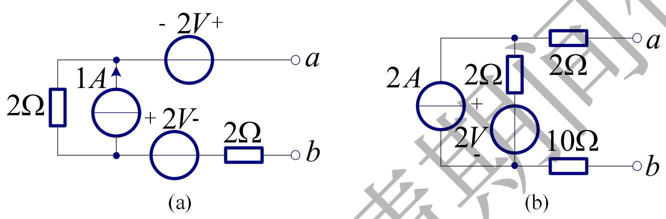

题图 2-1

2-2 求题图 2-2 所示含受控源电路 $ab$ 端的输入电阻。



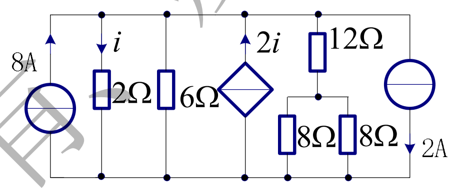
题图 2-2

2-3 将题图 2-3 电路化简为最简形式。



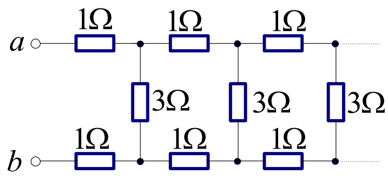
题图 2-3

2-4 利用电阻的等效变化和电源的等效变换，求题图 2-4 中的$i$。

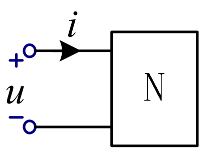


题图 2-4

2-5 题图 2-4 电路是一个无限梯形网络，试求出其端口的等效电阻$R_{ab}$。



题图 2-5

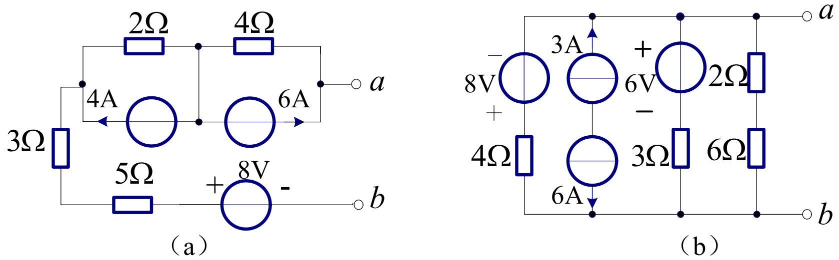


题图 2-6

2-6 已知题图 2-5 所示二端网络的 VCR 为$u=3+4i$，试画出该网络的最简等效形式。

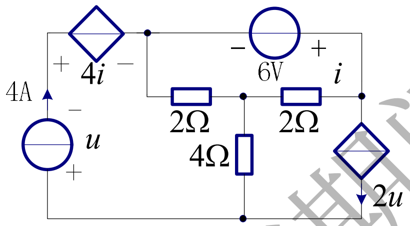
2-7 利用实际电压源与电流源的等效特性，将题图 2-7 化简成简单的电源电

路。



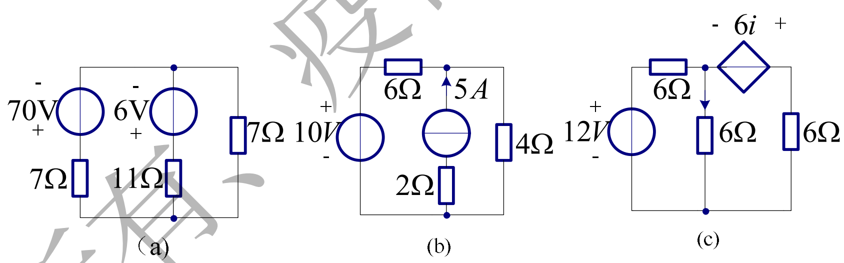

题图 2-7

2-8 电路如题图 2-8 所示，列出求解方程的支路电流方程，并计算各支路电流。



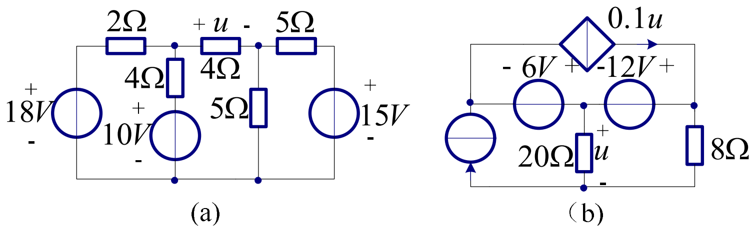

题图 2-8

2-9 用网孔电流法求题图 2-9 电路中的每条支路电流。



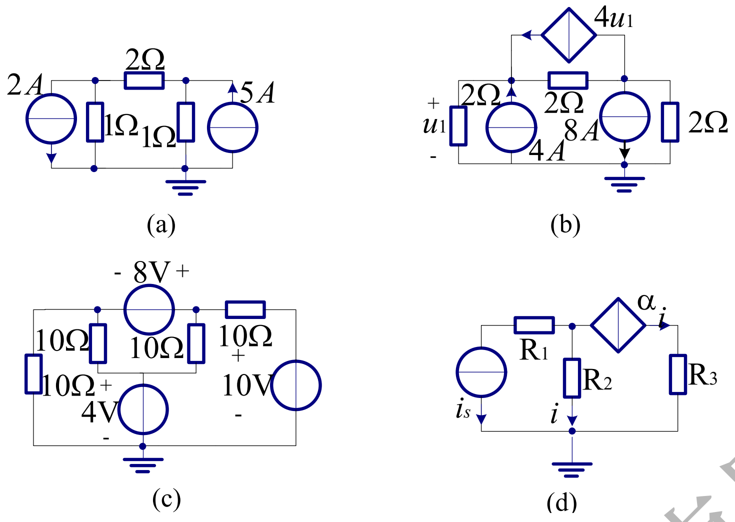

题图 2-9

2-10 已知电路如题图 2-9 所示，用网孔电流法求电压 $u$。



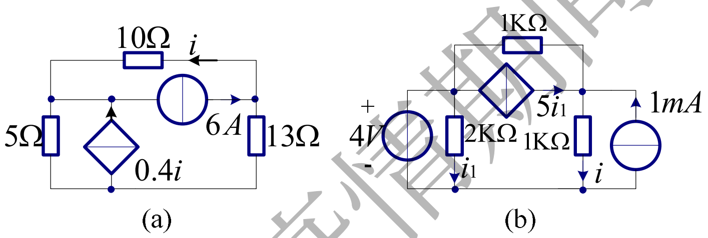

题图 2-10

2-11 用节点电压法求解题图 2-11 各电路的每一条支路电压。



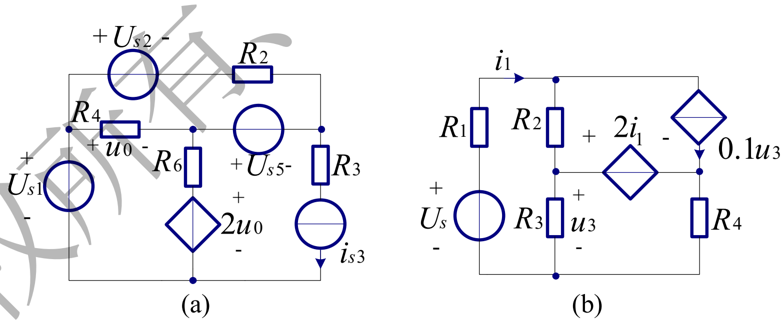
题图 2-11

2-12 用节点电压法求解题图 2-12 中电流 $i$。



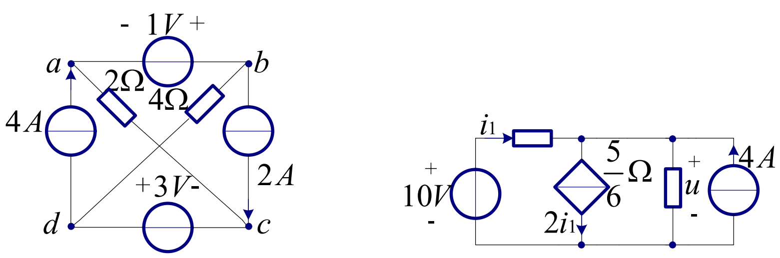
题图 2-12

2-13 列出题图 2-13 电路的节点电压方程和网孔电流方程。



题图 2-13

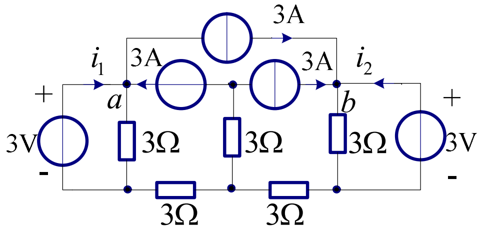
2-14 利用叠加定理求解电压 $U_{bd}$。电路如题图 2-14 所示



题图 2-14　　　　　　　　　　题图 2-15

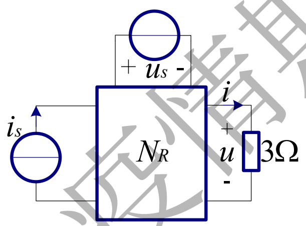
2-15 电路如题图 2-15 所示，利用叠加定理求解电压 $u$

2-16 电路题图 2-16 所示，利用叠加定理求解电路中的 $u_{ab}$， $i_1$ 和 $i_2$。



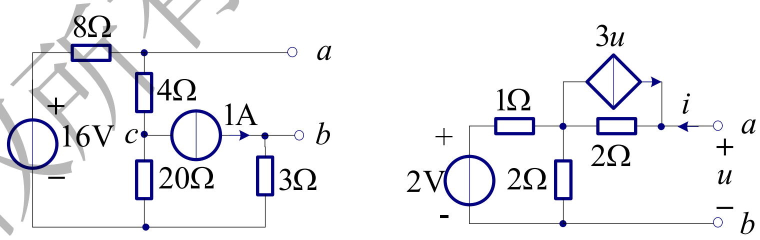

题图 2-16

2-17 题图 2-17 所示，网络 $N_R$ 为线性无源电阻网络，当 $i_s=1A, u_s=2V$ 时，$i=5A$；当 $i_s=-2A, u_s=4V$ 时， $u=24V$。试求当 $i_s=2A, u_s=6V$ 时的电压 $u$。




题图 2-17

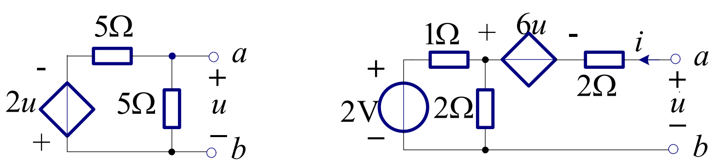
2-18 求题图 2-18 所示电路的开路电压 $u_{ab}$。




（a）　　　　　　　　（b）

题图 2-18

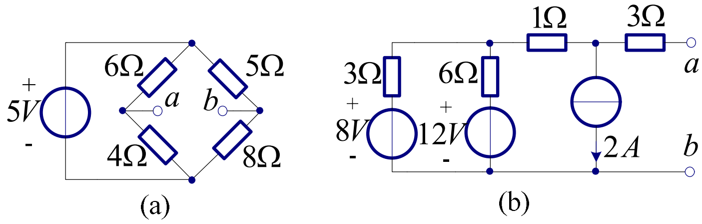
2-19 求题图 2-19 所示电路的等效内阻 $R_{ab}$。




（a）　　　　　　　　（b）

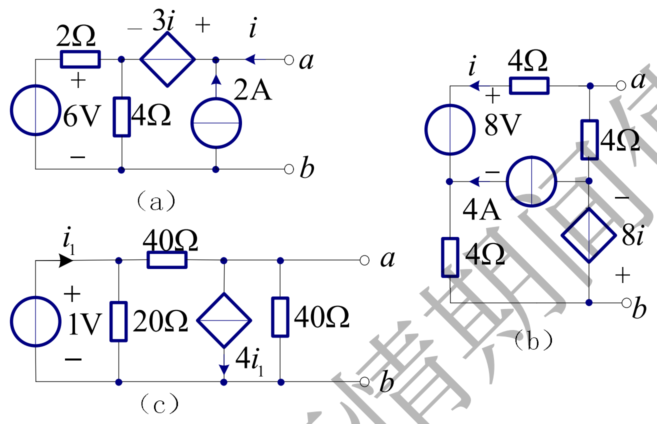
题图 2-19

2-20 求题图 2-20 所示电路 $ab$ 端的戴维南等效电路。



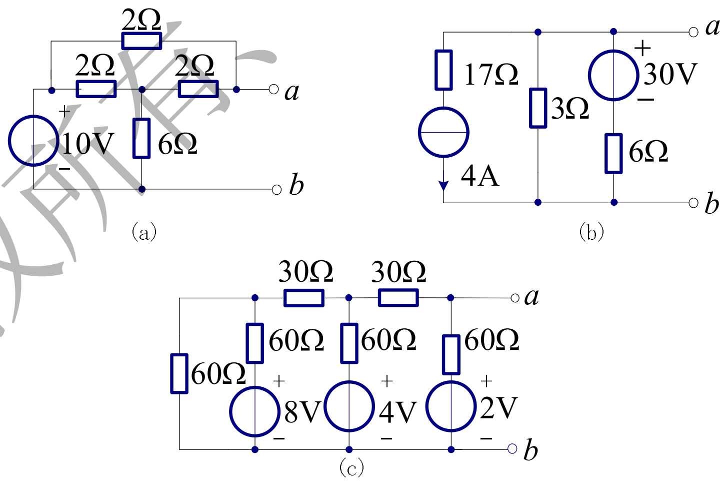

题图 2-20

2-21 求题图 2-21 所示电路中 $ab$ 端的戴维南等效电路。



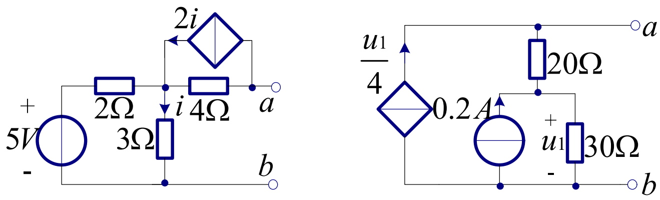

题图 2-21

2-22 求题图 2-22 所示电路中 $ab$ 端的诺顿等效电路。




题图 2-22

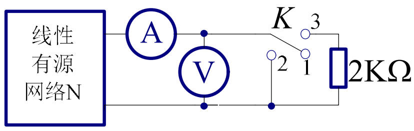
2-23 求题图 2-23 所示电路 $ab$ 端的戴维南和诺顿等效电路，若 $ab$ 端接入 10Ω 电阻，求电流 $i_{ab}$。




(a) (b)

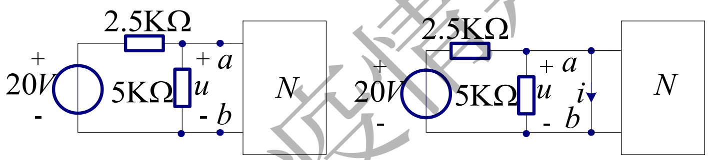
题图 2-23

2-24 电路如题图 2-24 所示，当开关在 1 的位置，电压表读数为 $50V$ ，$K$ 在位置 2，电流表读数为 $20mA$ ，$K$ 若打向位置 3，电压表和电流表读数为多少？




题图 2-24

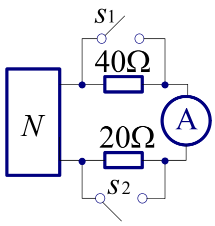
2-25 已知如题图 2-25（a）所示电路中，电压 $u=12.5V$ ；当 $ab$ 间短路，如题图 2-25（b）所示电流 $i=10mA$ 。求网络 N 的戴维南等效电路。




（a） (b)

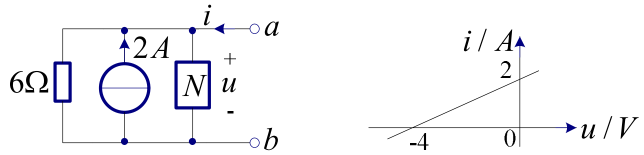
题图 2-25

2-26 如题图 2-26 所示，N 为线性含源网络，已知开关 $S_1S_2$ 断开电流表读数为 $1.2A$ ，当 $S_1$ 闭合 $S_2$ 断开，电流表为 3A，求 $S_1$ 断开 $S_2$ 闭合时电流表读数。




题图 2-26

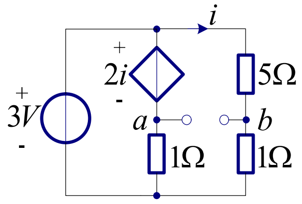
2-27 电路如题图 2-27（a）所示，其 $ab$ 端的 VCR 如图（b）所示，求网络 N 的戴维南等效电路。



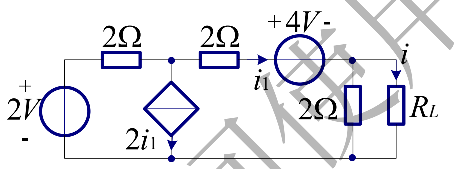

(a)　　　　　　　　(b)

题图 2-27

2-28 题图 2-28 所示电路中，$ab$之间需接入多大电阻$R$，才能使电阻电流为$ab$的短路电流$i_{ab}$的一半？此时$R$获得多大功率？



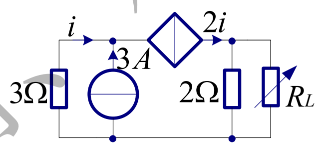

题图 2-28




题图 2-29

2-29 题图 2-29 所示电路中$R_L=0,\infty$时，分别求电流$i$；$R_L$为何值时可获得最大功率，此时功率为多少。

2-30 题图2-30所示电路中，求$R_L=?$时获得最大功率，并求功率值为多少？




题图 2-30