北京邮电大学 2019-2020 学年第一学期

《高等数学 6 学时》（上）期末考试试题（B）解答

考试注意事项：学生必须将答题内容写在答题纸上,写在试题纸上一律无效

一. 填空题（本大题共 10 小题，每空 3 分，共 30 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\dfrac{1}{x}=$_____.

$\dfrac{\pi}{2}$

2. 已知当 $x\to 0$ 时 $(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{2}}-1$ 与 e^x-1-x 是等价无穷小，则 $\alpha=$____.

1

3. 设 $f(x)=x^3e^{x^2}$，则 $f^{(2020)}(0)=$______.

0

4. 已知 $f(0)=0,\ f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2f(x))^{\frac{1}{\sin 3x}}=\underline{e^{\frac{2}{3}}}$.

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}+x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，

则 $f(x)=$_____.

$f(x)=\dfrac{1}{1+x}+2\ln 2x$

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}+\dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}}\right)=$__________.

$\dfrac{2}{3}$

7. 设 $\int\dfrac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=x^2+C$,则 $f(x)=$_________.

$e^{2x}+C$

8. 计算 $I=\int_{-1}^{1}[x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\sqrt{1-x^2}]\mathrm{d}x=$__________.

$\dfrac{\pi}{2}$

9. 反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8}=$________________.

$\dfrac{\pi}{8}$

10. 微分方程 $yy''-(y')^2=0$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的特解为_______.

$y=e^x$

二（10 分）. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点判别类型.

解： $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases} x & |x|<1 \\ 0 & |x|=1 \\ -x & |x|>1 \end{cases}$

可疑间断点为 $x=-1, x=1$. 其他点均连续. ----（4 分）

对于 $x=-1$，有 $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=-1$， $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=1$，

故 $x=-1$ 是第一类跳跃间断点； ----（7 分）

对于 $x=1$，有 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-1$， $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$，

故 $x=1$ 是第一类跳跃间断点. ----（10 分）

三（10 分）. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数, 且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$, 若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶

的无穷小, 试求a,b的值.

解: 因为 $\lim\limits_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0$,

而 $f(0)\neq 0\Rightarrow a+b-1=0$ (1) ---（4 分）

又因为 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0$, 利用洛必达法则可得

$$\lim_{h\to 0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}=(a+2b)f'(0)=0$$

而 $f'(0)\neq 0\Rightarrow a+2b=0$. (2) ---（8 分）

由(1), (2)解得$a=2,b=-1$. ---（10 分）

四（10 分）根据函数$y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$的图形, 完成下表.

单调增区间	
单调减区间	
极值点	
凹区间$\cup$	
凸区间$\cap$	
拐点	
渐近线	

每填一条 1 分

单调增区间	$(-\infty,0)$ $(2,+\infty)$
单调减区间	$(0,2)$
极值点	极小值点$(2,3)$
凹区间$\cup$	$(-\infty,0)$ $(0,+\infty)$
凸区间$\cap$	无
拐点	无
渐近线	铅直渐近线$x=0$,

	斜渐近线 $y=x$.

五(12 分). 计算积分（1）$\int\frac{3x^3+x}{x^4+1}\mathrm{d}x$ （2）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$.

解：（1）$\int\frac{3x^3+x}{x^4+1}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\int\frac{4x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x+\int\frac{x}{x^4+1}\mathrm{d}x$ ----（2 分）

$$=\frac{3}{4}\int\frac{4x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x^2$$

$=\frac{3}{4}\ln(x^4+1)+\frac{1}{2}\arctan x^2+C$ ----（6 分）

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^3 x}\mathrm{d}\cos x$ ----（2 分）

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\mathrm{d}\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\cos^2 x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\right)$$

$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. ----（6 分）

六(10 分) 已知摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$

（1） 求在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程；

（2） 求摆线一拱 $(0\le t\le 2\pi)$ 的长度.

解： $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$， $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$，点为 $\left(a(\frac{\pi}{2}-1),a\right)$ ----（3 分）

故所求切线方程为 $y=x+2a-\frac{\pi}{2}a$. ----（5 分）

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

于是 $s=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8a$. --（10 分）

七(10 分). 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 二阶可导，求 $f(x)$.

解：对 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 两边关于 x 求导得：

$$f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)=-\mathrm{e}^{-x}+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

两边继续关于 x 求导得：

$f''(x)=\mathrm{e}^{-x}+f(x)$ 即 $f''(x)-f(x)=\mathrm{e}^{-x}$----（4 分）

（1）求齐次方程得通解 $\lambda^2-1=0$，得 $\lambda=\pm1$

于是齐次通解为 $\overline{f(x)}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$----（6 分）

（2）再求非其次特解，设特解为 $y^*=xA\mathrm{e}^{-x}$ 代入原方程可得 $A=-\frac{1}{2}$

故非齐次通解为 $f(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}+(-\frac{1}{2})x\mathrm{e}^{-x}$----（8 分）

（3） 由已知条件可得 $f(0)=1, f'(0)=-1$ 代入得

$f(x)=\frac{3}{4}\mathrm{e}^x+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}+(-\frac{1}{2})x\mathrm{e}^{-x}$----（10 分）

八(8 分). 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且

$3\int_{\frac{2a}{3}}^{a}f(x)\mathrm{d}x=f(0)\cdot a$，求证：$\exists\xi\in(0,a)$，使 $f'(\xi)=0$.

证明：（1）当 $a=0$ 时，结论成立。

（2）当 $a>0$ 时，由 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续知

$3\int_{\frac{2a}{3}}^{a}f(x)\mathrm{d}x=f(c)\cdot a\ \ c\in[\frac{2a}{3},a]$----（4 分）

则 $af(c)=f(0)\cdot a$，故 $f(c)=f(0), c\neq 0$，

在 $[0,c]$ 上 $f(x)$ 满足罗尔定理，故 $\exists\xi\in(0,c)$，使 $f'(\xi)=0$.

即 $\exists\xi\in(0,a)$，使 $f'(\xi)=0$.-----（8 分）