矩阵理论与方法

11月

内容提要 CONTENTS

- □ 课程信息
- □ 课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

  第2章 范数理论及其应用

向量范数的概念(回顾)

定义 2.1 如果 V 是数域 K 上的线性空间，且对于 V 的任一向量 $\boldsymbol{x}$，对应一个实值函数 $\|\boldsymbol{x}\|$，它满足以下三个条件：

(1) 非负性：当 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\| > 0$；当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\| = 0$；

(2) 齐次性：$\|a\boldsymbol{x}\| = |a| \|\boldsymbol{x}\|$ $(a \in K, \boldsymbol{x} \in V)$；

(3) 三角不等式：$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V)$.

则称 $\|\boldsymbol{x}\|$ 为 V 上向量 $\boldsymbol{x}$ 的范数，简称**向量范数**.

向量范数的等价性(回顾)

二、线性空间 V^n 上的向量范数的等价性

前面已经指出，在数域 K 上的线性空间 V，特别是在 $\mathbf{C}^n$ 上可以定义各种各样的向量范数，其数值大小一般不同．但是，在各种向量范数之间存在下述重要关系．

定理 2.1 设 $\|\boldsymbol{x}\|_\alpha$ 和 $\|\boldsymbol{x}\|_\beta$ 为有限维线性空间 V 的任意两种向量范数（它们不限于 p-范数），则存在两个与向量 $\boldsymbol{x}$ 无关的正常数 c_1 和 c_2，使得不等式

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|_\beta \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_\alpha \leqslant c_2\|\boldsymbol{x}\|_\beta \quad (\forall \boldsymbol{x} \in V) \tag{2.1.9}$$

成立．

$a)$ R^n上的向量范数

$b)$ 线型空间V上的向量范数

$c)$ $R^{m\times n}$上的矩阵范数

1、矩阵范数的概念

矩阵范数的概念

§2.2 矩阵的范数

矩阵空间$C^{m\times n}$是一个mn维的线性空间，将$m\times n$矩阵A看做线性空间$C^{m\times n}$中的“向量”，可以按照例 2.6 的方式定义A的范数．$\boxed{\text{但是，矩阵之间还有乘法运算}}$，它应该在定义矩阵范数时予以体现．

矩阵范数的概念

一、矩阵范数的定义与性质

定义 2.3 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$，定义一个实值函数 $\|\boldsymbol{A}\|$，它满足以下三个条件

(1) 非负性：当 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$ 时，$\|\boldsymbol{A}\| > 0$；当 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ 时，$\|\boldsymbol{A}\| = 0$；

(2) 齐次性：$\|\alpha\boldsymbol{A}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{A}\| \quad (\alpha \in \mathbf{C})$；

(3) 三角不等式：$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\| \quad (\boldsymbol{B} \in \mathbf{C}^{m\times n})$.

(4) 相容性：

$$\|\boldsymbol{AB}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\| \, \|\boldsymbol{B}\| \quad (\boldsymbol{B} \in \mathbf{C}^{n\times l}) \tag{2.2.1}$$

则称 $\|\boldsymbol{A}\|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**矩阵范数**.

矩阵范数的概念

定义 2.4 对于 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 上的矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 和 $\mathbf{C}^m$ 与 $\mathbf{C}^n$ 上的同类向量范数 $\|\cdot\|_V$，如果

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_V \leqslant \|\boldsymbol{A}\|_M \|\boldsymbol{x}\|_V \quad (\forall \boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{m\times n},\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n) \tag{2.2.2}$$

则称矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 与向量范数 $\|\cdot\|_V$ 是相容的.

矩阵范数的概念

同向量的情况一样，对于矩阵序列也有极限的概念：设有一个矩阵序列$\{\mathbf{A}^{(k)}\}$，其中$\mathbf{A}^{(k)} \in \mathbf{C}^{m\times n}(k=1, 2, \cdots)$. 用$a_{ij}^{(k)}$记$\mathbf{A}^{(k)}$的第$i$行第$j$列的元素，且$a_{ij}^{(k)}$都有极限$a_{ij}$，则称$\{\mathbf{A}^{(k)}\}$有极限$\mathbf{A}=(a_{ij})$，或称$\mathbf{A}^{(k)}$收敛于矩阵$\mathbf{A}$，记为

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{A}^{(k)}=\mathbf{A} \quad 或 \quad \mathbf{A}^{(k)}\to\mathbf{A}$$

不收敛的矩阵序列称为发散的.

$\mathbf{A}^{(k)}\to\mathbf{A}$的充要条件是$\|\mathbf{A}^{(k)}-\mathbf{A}\|\to 0$.

矩阵范数的概念

例1、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}, x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$ ，则

$\|A\|_{m1}=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$ 是矩阵函数，且与 $\|x\|_1$ 相容

矩阵范数的概念

例2、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}, x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$ ，则

$\|A\|_{m\infty}=n\bullet\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$ 是矩阵函数，且与 $\|x\|_\infty$ 相容

矩阵范数的概念

例3、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}, x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$ ，证明

$\|A\|_{m2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 是矩阵函数，且与 $\|x\|_2$ 相容

矩阵范数的概念

例3、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}, x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$ ，证明

$\|A\|_{m2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 是矩阵函数，且与 $\|x\|_2$ 相容

证明：（**1**）～（**2**）成立，

矩阵范数的概念

例3、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}, x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$ ，证明

$\|A\|_{m2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 是矩阵函数，且与 $\|x\|_2$ 相容

证明：（1）～（2）成立，

设 $B_{m\times n}$,划分 $A=\left(a_1,\cdots,a_n\right), B=\left(b_1,\cdots,b_n\right)$ ，则有

$$\|A+B\|_{m2}^2=\|a_1+b_1\|_2^2+\cdots+\|a_n+b_n\|_2^2$$

矩阵范数的概念

例3、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n},x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$ ，证明

$$\|A\|_{m2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ 是矩阵函数，且与 $\|x\|_2$ 相容

证明：（1）～（2）成立，

设 $B_{m\times n}$,划分 $A=\left(a_1,\cdots,a_n\right),B=\left(b_1,\cdots,b_n\right)$ ，则有

$$\|A+B\|_{m2}^2=\|a_1+b_1\|_2^2+\cdots+\|a_n+b_n\|_2^2$$

$$\leq\left(\|a_1\|_2+\|b_1\|_2\right)^2+\cdots+\left(\|a_n\|_2+\|b_n\|_2\right)^2$$

$$=\|A\|_{m2}^2+2\left(\|a_1\|_2\|b_1\|_2+\cdots+\|a_n\|_2\|b_n\|_2\right)+\|B\|_{m2}^2$$

定理（柯西-施瓦茨不等式）：若 $a_1,a_2,,,,a_n$ 和 $b_1,b_2,,,b_n$ 是任意实数，则有 $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k\right)^2\leq$（$\sum_{k=1}^{n}a_k^2$）（$\sum_{k=1}^{n}b_k^2$）

矩阵范数的概念

例3、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}, x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$ ，证明

$\|A\|_{m2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 是矩阵函数，且与 $\|x\|_2$ 相容

证明：（1）～（2）成立，

设 $B_{m\times n}$,划分 $A=\left(a_1,\cdots,a_n\right), B=\left(b_1,\cdots,b_n\right)$ ，则有

$$\|A+B\|_{m2}^2=\|a_1+b_1\|_2^2+\cdots+\|a_n+b_n\|_2^2$$

$$\leq\left(\|a_1\|_2+\|b_1\|_2\right)^2+\cdots+\left(\|a_n\|_2+\|b_n\|_2\right)^2$$

$$=\|A\|_{m2}^2+2\left(\|a_1\|_2\|b_1\|_2+\cdots+\|a_n\|_2\|b_n\|_2\right)+\|B\|_{m2}^2$$

$$\leq\|A\|_{m2}^2+2\left(\sum\|a_i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\|b_i\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}+\|B\|_{m2}^2=\left(\|A\|_{m2}+\|B\|_{m2}\right)^2$$

定理（柯西-施瓦茨不等式）：若 $a_1,a_2,,,,a_n$ 和 $b_1,b_2,,,b_n$ 是任意实数，则有 $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$

矩阵范数的概念

例3、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}, x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$，证明

$\|A\|_{m2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 是矩阵函数，且与 $\|x\|_2$ 相容

设 $B_{n\times l}$，$AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times l}$，则有

矩阵范数的概念

例3、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}, x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$ ，证明

$\|A\|_{m2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 是矩阵函数，且与 $\|x\|_2$ 相容

设 $B_{n\times l}$ ， $AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times l}$ ，则有

$$\|AB\|_{m2}^2=\sum_{i,j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|^2 \quad \le\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|\left|b_{kj}\right|\right)^2$$

矩阵范数的概念

例3、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}, x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$ ，证明

$\|A\|_{m2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 是矩阵函数，且与 $\|x\|_2$ 相容

设 $B_{n\times l}$ ， $AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times l}$ ，则有

$$\|AB\|_{m2}^{2}=\sum_{i,j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|\left|b_{kj}\right|\right)^2$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\left|b_{kj}\right|^2\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\left|a_{ik}\right|^2\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|b_{kj}\right|^2\right)\right]$$

矩阵范数的概念

例3、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}, x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$ ，证明

$\|A\|_{m2}=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 是矩阵函数，且与 $\|x\|_2$ 相容

设 $B_{n\times l}$ ， $AB=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times l}$ ，则有

$$\|AB\|_{m2}^2=\sum_{i,j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right|^2 \quad \le\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||b_{kj}|\right)^2$$

$$\le\sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_{kj}|^2\right)\right]$$

$$=\left(\sum_{i,k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\cdot\left(\sum_{k,j=1}^{n}|b_{kj}|^2\right) \quad =\|A\|_{m2}^2\cdot\|B\|_{m2}^2$$

矩阵范数的概念

例3、设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\in C^{m\times n}, x=\left(\xi_1,\cdots,\xi_n\right)^T$，证明

$\|A\|_{m2}=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 是矩阵函数，且与 $\|x\|_2$ 相容

$$\|AB\|\le\|A\|\|B\|$$

取 $B=x\in C^{n\times 1}$，则有

$$\|Ax\|_2=\|AB\|_{m2}\le\|A\|_{m2}\bullet\|B\|_{m2}=\|A\|_{m2}\bullet\|x\|_2$$

矩阵范数的概念

注：

1. $\|A\|_{m2}=\left[\mathbf{tr}\left(A^{\mathrm{H}}A\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\mathbf{tr}\left(AA^{\mathrm{H}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ 称为矩阵的Frobenius范数，记做 $\|A\|_{\mathrm{F}}$

矩阵范数的概念

注：

1. $\|A\|_{m2}=\left[\mathrm{tr}\left(A^{\mathrm{H}}A\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\mathrm{tr}\left(AA^{\mathrm{H}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ 称为矩阵的Frobenius范数，记做 $\|A\|_{\mathrm{F}}$

2. $C^{m\times n}$ 中的矩阵范数等价：对于任意的两种矩阵范数 $\|A\|_{\alpha}$ 和 $\|A\|_{\beta}$ ，存在 $0\le c_1\le c_2$，使得

$$c_1\|A\|_{\beta}\le\|A\|_{\alpha}\le c_2\|A\|_{\beta}\quad\forall A_{m\times n}$$

矩阵范数的概念

注：

1. $\|A\|_{m2}=\left[\mathbf{tr}\left(A^{\mathrm{H}}A\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\mathbf{tr}\left(AA^{\mathrm{H}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ 称为矩阵的Frobenius范数，记做 $\|A\|_{\mathrm{F}}$

2. $C^{m\times n}$ 中的矩阵范数等价：对于任意的两种矩阵范数 $\|A\|_{\alpha}$ 和 $\|A\|_{\beta}$，存在 $0\le c_1\le c_2$，使得

$$c_1\|A\|_{\beta}\le\|A\|_{\alpha}\le c_2\|A\|_{\beta}\quad\forall A_{m\times n}$$

3. $C^{m\times n}$ 中，$\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=A\Leftrightarrow\forall\|A\|,\lim\limits_{k\to\infty}\left\|A^{(k)}-A\right\|=0$

矩阵范数的概念

一般的矩阵范数：$\because \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{I}$

$$\|\boldsymbol{I}\| \le \|\boldsymbol{I}\| \cdot \|\boldsymbol{I}\| \qquad \therefore \|\boldsymbol{I}\| \ge 1$$

例如：$\|\boldsymbol{I}\|_{m1} = \boldsymbol{n}, \quad \|\boldsymbol{I}\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{\boldsymbol{n}}$

1、矩阵范数的概念

2、由向量范数导出矩阵范数

从属范数

定理：对 C^m 与 C^n 上的同类向量范数 $\|x\|_V$，定义

$$\|A\| = \max_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_V \qquad \left(\forall A_{m\times n}, x \in C^n\right)$$

则 $\|A\|$ 是 $C^{m\times n}$ 中矩阵 A 的范数，且 $\|A\|$ 与 $\|x\|_V$ 相容

$\|A\|$ 称为由 $\|x\|_V$ 导出的矩阵范数（或称为从属范数）

从属范数

定理： 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ ，则

（1）列和范数： $$\|A\|_1=\max_j\left\{\sum_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|\right\}$$

（2）谱范数： $$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_1},\lambda_1=\max\left\{\lambda\left(A^H A\right)\right\}$$

（3）行和范数： $$\|A\|_\infty=\max_i\left\{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\right\}$$

矩阵范数(例题)

1. 求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\end{bmatrix}$和$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-\mathrm{j} & 2 & 3\\ 1 & 0 & \mathrm{j}\end{bmatrix}$的$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_\infty$及$\|\cdot\|_2$。

矩阵范数(例题)

1. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=[-1\quad 2\quad 1]$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-j & 2 & 3\\ 1 & 0 & j\end{bmatrix}$ 的 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_\infty$ 及 $\|\cdot\|_2$。

解 $\|A\|_1=\max\{|-1|,2,1\}=2$

$\|A\|_\infty=|-1|+2+1=4$

$A^H A$ 与 $AA^H=[6]$ 的非零特征值相同，故 $\|A\|_2=\sqrt{6}$.

矩阵范数(例题)

$$b^H bx = \lambda x$$

$$\Rightarrow x^H b^H bx = \lambda x^H x$$

$$\Rightarrow (bx)^H bx = \lambda x^H x$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{|bx|^2}{|x|^2} \geq 0$$

矩阵范数(例题)

$$A^H Ax = \lambda x$$

$$A\left(A^H Ax\right) = \lambda Ax$$

$$AA^H\left(Ax\right) = \lambda\left(Ax\right)$$

作业（第五版）

1、定义：2.3、2.4

2、定理：2.4、2.5

3、例题：2.8、2.9

4、习题2.2：1

作业（第三版）

1、定义：2.3、2.4

2、定理：2.4、2.5

3、例题：2.8、2.9

4、习题2.2：1

下课，谢谢大家！