矩阵理论与方法

10月

内容提要 CONTENTS

- □ 课程信息
- □ 课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

第1章 线性空间与线性变换

1.2 线性变换及其矩阵

回顾

1、线性变换T　$Y = T(X) \in V$

2、$f(T)$ 也是线性变换　$Y = f(T)(X)$

3、求　$Y = T(X)$

4、求　$Y = f(T)(X)$

回顾

例：计算$Y=T(X)$，其中$X=(X_1,X_2,\ldots,X_N)\alpha\in V$

1、由$T(X_1,X_2,\ldots,X_N)=(X_1,X_2,\ldots,X_N)A$

2、$Y=T(X)=T(X_1,X_2,\ldots,X_N)\alpha=(X_1,X_2,\ldots,X_N)A\alpha$

3、计算Y的坐标$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

1.2 线性变换及其矩阵

1、线型空间

2、基和坐标

3、线性变换T →矩阵A

4、$A=P^{-1}\Lambda P$

1. 线性变换的矩阵

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$为数域P上线性空间V的一组基，T为V的线性变换．基向量的象可以被基线性表出,设

$$\begin{cases} T(x_1) = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n \\ T(x_2) = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n \\ \qquad \cdots\cdots \\ T(x_n) = a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

用矩阵表示即为

$$T\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = \left(Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n\right) = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)A$$

其中 $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

矩阵A称为**线性变换 T 在基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$下的矩阵**.

注： ① 给定V^n的基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和线性变换T,

矩阵A是唯一的.

② 单位变换在任意一组基下的矩阵皆为单位矩阵;

零变换在任意一组基下的矩阵皆为零矩阵;

数乘变换在任意一组基下的矩阵皆为数量矩阵;

例1. 设线性空间 V^3 的线性变换 T 为

$$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_1+x_2)$$

求 T 在标准基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵.

例1. 设线性空间 V^3 的线性变换 T 为

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$$

求 T 在标准基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵.

解: $\because$ $T(e_1) = T(1,0,0) = (1,0,1)$ $= (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$$T(e_2) = T(0,1,0) = (0,1,1)$$

$$T(e_3) = T(0,0,1) = (0,0,0)$$

$\therefore$ $$T(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例1. 设线性空间 V^3 的线性变换 T 为

$$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_1+x_2)$$

求 T 在标准基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵.

解：$\because$ $T(e_1)=T(1,0,0)=(1,0,1)$ $=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$

$$T(e_2)=T(0,1,0)=(0,1,1)$$

$$T(e_3)=T(0,0,1)=(0,0,0)$$

问题1：

坐标怎么求？

$$\therefore\quad T(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$$

例1. 设线性空间 V^3 的线性变换 T 为

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$$

求 T 在基 $E_1 = (1,0,0), E_2 = (1,1,0), E_3 = (1,1,1)$ 下的矩阵

例1. 设线性空间 V^3 的线性变换 T 为

$$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_1+x_2)$$

求 T 在基 $E_1=(1,0,0), E_2=(1,1,0), E_3=(1,1,1)$ 下的矩阵

解：$T(E_1)=(1,0,1)=(E_1,E_2,E_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$$T(E_2)=(1,1,2)=(E_1,E_2,E_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$T(E_3)=(1,1,2)=(E_1,E_2,E_3)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$T(E_1,E_2,E_3)=(E_1,E_2,E_3)\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

例1. 设线性空间 V^3 的线性变换 T 为

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$$

求 T 在基 $E_1 = (1,0,0), E_2 = (1,1,0), E_3 = (1,1,1)$ 下的矩阵

解： $T(E_1) = (1,0,1) = (E_1, E_2, E_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$$T(E_2) = (1,1,2) = (E_1, E_2, E_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$(1,0,1) = (a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3, a_3)$$

$$T(E_3) = (1,1,2) = (E_1, E_2, E_3)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$T(E_1, E_2, E_3) = (E_1, E_2, E_3)\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

例1. 设线性空间 V^3 的线性变换 T 为

$$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_1+x_2)$$

求 T 在基 $E_1=(1,0,0),E_2=(1,1,0),E_3=(1,1,1)$ 下的矩阵

解：$T(E_1)=(1,0,1)=(E_1,E_2,E_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

问题A：

坐标怎么求？

$$T(E_2)=(1,1,2)=(E_1,E_2,E_3)\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$T(E_3)=(1,1,2)=(E_1,E_2,E_3)\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$T(E_1,E_2,E_3)=(E_1,E_2,E_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-1&-1\\1&2&2\end{pmatrix}$$

例1. 设线性空间V^3的线性变换T为

$$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_1+x_2)$$

求T在基$E_1=(1,0,0),E_2=(1,1,0),E_3=(1,1,1)$下的矩阵

解：$T(E_1)=(1,0,1)=(E_1,E_2,E_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

问题A：坐标怎么求？

问题B：A^k怎么算？

$$T(E_2)=(1,1,2)=(E_1,E_2,E_3)\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$T(E_3)=(1,1,2)=(E_1,E_2,E_3)\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$T(E_1,E_2,E_3)=(E_1,E_2,E_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-1&-1\\1&2&2\end{pmatrix}$$

问题A： 坐标怎么求?

先在一组简单的基下求坐标

然后通过坐标变换得到在其它基下的坐标

问题B： A^k怎么算?

$$若 A = P^{-1}\Lambda P, 则 A^k = P^{-1}\Lambda^k P$$

1.2 线性变换及其矩阵

问题A：坐标怎么求?

先在一组简单的基下求坐标

然后通过坐标变换得到在其它基下的坐标

问题B：A^k怎么算?

若T有N个线型无关特征向量，则$A = P^{-1}\Lambda P$

若A有N个线型无关特征向量，则$A = P^{-1}\Lambda P$

$$若A = P^{-1}\Lambda P, 则A^k = P^{-1}\Lambda^k P$$

1.2 线性变换及其矩阵

例： 设矩阵空间 $R^{2\times 2}$ 的子空间为

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}$$

V中的线性变换为 $T(X)=X+X^T$

考虑V的两个基 $(1) X_1=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, X_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$(2) Y_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, Y_2=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, Y_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

分别求T在这两个基下的矩阵

1.2 线性变换及其矩阵

解:(1)

$$T(X_1)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$T(X_2)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$T(X_3)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$T(X_1,X_2,X_3)=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

解:(1)

$$T(Y_1)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=(Y_1,Y_2,Y_3)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$T(Y_2)=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=(Y_1,Y_2,Y_3)\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$T(Y_3)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=(Y_1,Y_2,Y_3)\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$T(Y_1,Y_2,Y_3)=(Y_1,Y_2,Y_3)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

问题A：坐标怎么求?

问题3：先在一组简单的基下求坐标

问题1：然后通过坐标变换得到在其它基下的坐标

问题B：A^n怎么算?

问题2：

若T有N个线型无关特征向量，则$A = P^{-1}\Lambda P$

若A有N个线型无关特征向量，则$A = P^{-1}\Lambda P$

$$若A = P^{-1}\Lambda P,则A^k = P^{-1}\Lambda^k P$$

小节

1、线型空间的定义

2、基、向量在基下的坐标

3、线型变换的定义和基本运算

4、线型变换在基下的矩阵

小节

1、线型空间的定义

2、基、向量在基下的坐标

3、线型变换的定义和基本运算

4、线型变换在基下的矩阵

1、$x=(E_1,\dots,E_n)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ y=(E_1,\dots,E_n)\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$

2、$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)A$

3、$y=T(x)=T(E_1,\dots,E_n)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(E_1,\dots,E_n)A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

4、$\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

小节

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,...,e_n$下求向量坐标

1、2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,...,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,...,E_n$下的矩阵A

4、若T有N个线型无关特征向量，则$A=P^{-1}\Lambda P$

小节

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\ldots,e_n$下求向量坐标

问题c

问题a

1、2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\ldots,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,\ldots,E_n$下的矩阵A

4、若T有N个线型无关特征向量，则$A=P^{-1}\Lambda P$

问题b

举例1

多项式空间$P^N, f(x) \in P^N$

0、向量$f(x)$在简单的基$1, x, x^2, \dots, x^N$下的坐标　　问题c

1、2、通过坐标变换得到向量$f(x)$在基$1, x-1, (x-1)^2, \dots, (x-1)^N$下的坐标　　问题a

举例2

多项式空间P^N, $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_Nx^N\in P^N$

0、向量$f(x)$在简单的基$1,x,x^2,\ldots,x^N$下的坐标　　问题c

1、2、通过坐标变换得到向量$f(x)$在

基$1,x-1,(x-1)^2,\ldots,(x-1)^N$下的坐标　　问题a

举例3

多项式空间P^N, $f(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}(x-1)^k \in P^N$

0、向量$f(x)$在简单的基$1,x,x^2,\dots,x^N$下的坐标

问题c

1、2、通过坐标变换得到向量$f(x)$在

问题a

基$1,x\text{-}1,(x-1)^2,\dots,(x-1)^N$下的坐标

举例4

多项式空间P^N,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}(x-1)^k+a_0+a_1x+\ldots+a_Nx^N\in P^N$$ 问题c

0、向量$f(x)$在简单的基$1,x,x^2,\ldots,x^N$下的坐标

1、2、通过坐标变换得到向量$f(x)$在 问题a

基$1,x\text{-}1,(x-1)^2,\ldots,(x-1)^N$下的坐标

1.2 作业（第五版）

1、定义：1.14、1.15

2、定理：1.9、1.10

2、例题：1.15(1)、1.17

3、习题1.2：4、8

1.2 作业（第三版）

1、定义：1.14、1.15

2、定理：1.9、1.10

2、例题：1.17

3、习题1.2：4、8、 下题第一问

例 1.15 在矩阵空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中，给定矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$$

线性变换为 $T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{XB}\,(\forall \boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{2\times 2})$，$\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的两个基为

(Ⅰ)：$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$；

(Ⅱ)：$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

分别求 T 在这两个基下的矩阵.

下课，谢谢大家！