北京邮电大学 2018-2019 学年第二学期

《高等数学》（下）期末考试试题（B）参考评分标准

一. 填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 设 $f(x,y)=x^2+y^2,\varphi(x,y)=x^2-y^2$，则 $\varphi[f(x,y),\varphi(x,y)]=$______.

答：$4x^2y^2$

2. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^3}{x^2+2xy+2y^2}=$____________________ .

答: 0

3. 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $gradu\,|_M=$______ .

答：$gradu\,|_M=\dfrac{2}{9}\{1,2,-2\}$

4. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}+2^n}{n3^n}\sqrt{|x|^n}$ 的收敛域为____________________ .

答：$(-9/4,9/4)$

5. 已知 $\vec{A}=(x^2-y^2)\vec{i}+2xy\vec{j}+2\vec{k}$，则 $rot\vec{A}=$______________ .

答：$rot\vec{A}=4y\vec{k}$

6. 设积分区域为 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$，则 $\iint\limits_D\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)dxdy=$________.

答：$\dfrac{\pi}{4}R^4\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$

二．计算题（每小题 8 分，共 40 分）

7. 设 $z=x^3f(xy,\dfrac{y}{x})$，$f(u,v)$ 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2 f+x^3[yf_1-\dfrac{y}{x^2}f_2]=3x^2 f+x^3yf_1-xyf_2$

因为 $f(u,v)$ 具有二阶连续导数, 所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3x^2[xf_1+\frac{1}{x}f_2]+x^3 f_1+x^3[xf_{11}+\frac{1}{x}f_{12}]-xf_2-xy[xf_{21}+\frac{1}{x}f_{22}]$$

$$=3x^3 f_1+3xf_2+x^3 f_1+x^4 f_{11}+x^2 f_{12}-xf_2-x^2yf_{21}-yf_{22}$$

$$=4x^3 f_1+2xf_2+x^4 f_{11}+x^2(1-y)f_{12}-yf_{22}$$

8. 求球面 $x^2+y^2+z^2=9/4$ 与椭球面 $3x^2+(y-1)^2+z^2=17/4$ 交线上对应于 $x=1$ 点处的切线方程和法平面方程.

解：曲线上对应于 $x=1$ 的坐标为 $(1,1/2,1)$ 和 $(1,1/2,-1)$.

设曲线的参数方程式为 $x=x,y=y(x),z=z(x)$, 则曲线上任一点的切向量为 $\vec{v}=(1,\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx})$.

解方程组 $\begin{cases}2x-2yy'+2zz'=0\\6x+2(y-1)y'+2zz'=0\end{cases}$ 得

$$y'=2x,z'=(-2xy-x)/z$$

在点 $(1,1/2,1)$ 处的切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1/2}{2}=\dfrac{z+1}{2}$;

法平面方程为 $x+2y-2z=0$

在点 $(1,1/2,-1)$ 处的切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1/2}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$;

法平面方程为 $x+2y+2z=0$

9. 计算 $\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy$, 其中 D 是以 $O(0,0),A(1,1),B(0,1)$ 为顶点的三角形域.

解：选择先对 x , 后对 y 的积分次序积分. 这时积分区域表示为

$D: 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y$

$$\iint_D e^{-y^2} dxdy = \int_0^1 dy \int_0^y e^{-y^2} dx = \int_0^1 e^{-y^2} x \big|_0^y \, dy$$

$$= \int_0^1 y e^{-y^2} dy = -\frac{1}{2} e^{-y^2} \big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$

10. 设Ω是由曲面$x^2+y^2+z^2=2az$及曲面$x^2+y^2=z^2$围成的满足条件$x^2+y^2 \le z^2$的空间区域, 求Ω的体积.

解：利用柱面坐标： $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$． 则

$$\Omega\text{：}\ 0 \le \theta \le 2\pi\text{，}\ 0 \le r \le a, r \le z \le a + \sqrt{a^2 - r^2}$$

于是所求体积为

$$V = \iiint_\Omega dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} dz$$

$$= 2\pi \int_0^a r(a + \sqrt{a^2 - r^2} - r) dr$$

$$= 2\pi [\frac{ar^2}{2} - \frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{2}] \big|_0^a = \pi a^3$$

11. 计算积分$I = \iint_\Sigma (x^2+y^2)\, dS$， 其中$\Sigma$为曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=1$所围立体的整个外表面.

解：令$\Sigma_1 : z = \sqrt{x^2+y^2}$上对应部分, $\Sigma_2 : z = 1$上对应部分. 则$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$，

且Σ_1，Σ_2在xoy平面上投影区域均为$D: x^2+y^2 \le 1$.

$$I = \iint_\Sigma (x^2+y^2)\, dS = \iint_{\Sigma_1} (x^2+y^2)\, dS + \iint_{\Sigma_2} (x^2+y^2)\, dS \qquad (1)$$

$$\iint_{\Sigma_1} (x^2+y^2)\, dS = \iint_D (x^2+y^2)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dxdy$$

$$=\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot\sqrt{2}rdr=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

$$\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)dS=\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\iint_D (x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot rdr=\frac{1}{2}\pi$$

所以$I=\iint_\Sigma (x^2+y^2)dS=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\pi$

三. 综合与证明题

12(10 分). 计 算 $I=\iint_\Sigma \frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$ ，其 中 $\sum$ 为 下 半 球 面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧， a 为大于零的常数.

解：补上一块有向曲面$\sum_1$：$\begin{cases} x^2+y^2\le a^2, \\ z=0 \end{cases}$，其法向量与 z 轴正向相反, 设$\sum$ 与$\sum_1$所围成的空间区域为Ω，D为$z=0$上的平面区域$x^2+y^2\le a^2$.

于是得

$$I=\iint_\Sigma \frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}=\frac{1}{a}\iint_\Sigma axdydz+(z+a)^2dxdy$$

$$=\frac{1}{a}\left[\iint_{\Sigma+\Sigma_1} axdydz+(z+a)^2dxdy-\iint_{\Sigma_1} axdydz+(z+a)^2dxdy\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[-\iiint_\Omega (3a+2z)dV+\iint_D a^2dxdy\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[-2\pi a^4-2\iiint_\Omega zdV+\pi a^4\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[-\pi a^4-2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 zdz\right]=-\frac{\pi}{2}a^3$$

13（10 分）．在曲面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求一点，使$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在该点沿方向$\vec{l}=\{1,-1,0\}$的方向导数最大.

解：$\vec{l}=\{1,-1,0\}$方向的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{2}},\quad \cos\gamma=0$$

所以 $$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=\sqrt{2}(x-y)$$

构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda)=\sqrt{2}(x-y)+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1)$$

则由 $$\begin{cases}F_x=\sqrt{2}+4\lambda x=0, \\ F_y=-\sqrt{2}+4\lambda y=0, \\ F_z=2\lambda z=0, \\ F_\lambda=2x^2+2y^2+z^2-1=0.\end{cases}$$

解得可能取极值的点为$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$及$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$.

因为要求的最大值一定存在，比较$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)}=\sqrt{2},\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)}=-\sqrt{2}$知，所求点为$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$.

14（10 分）．设C是圆周$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，取逆时针方向，$f(x)$是连续正值函数，证明$\oint_C xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\geq 2\pi$.

证明：由格林公式得

$$\oint_C xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint_D[f(y)+\frac{1}{f(x)}]dxdy$$

其中$D:(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$.

因为$\iint_D f(x)dxdy=\int_0^2 dx\int_{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{1+\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x)dy=2\int_0^2 f(x)\sqrt{2x-x^2}dx$

$$\iint_D f(y)dxdy=\int_0^2 dy\int_{1-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{1+\sqrt{1-(y-1)^2}} f(y)dx=2\int_0^2 f(y)\sqrt{2y-y^2}dy$$

所以 $\iint_D f(x)dxdy=\iint_D f(y)dxdy$

于是 $\oint_C xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint_D[f(x)+\frac{1}{f(x)}]dxdy$

$$\ge 2\iint_D\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}dxdy=2\iint_D dxdy=2\pi$$

15(6 分). 设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$, 证明对任意常数$\lambda>0$, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$收敛.

证明: 令$\tan x=t$, 得

$$0<a_n<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt<\int_0^1 t^n\,dt=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$$

所以 $0<\frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{1}{n^{1+\lambda}}$

由于当$\lambda>0$时, 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$收敛, 所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$收敛.