矩阵理论与方法

2020年11月

内容提要 CONTENTS

- 课程信息
- 课程介绍
- 矩阵理论与方法

  第3章 矩阵分析及其应用

第3章 矩阵分析及其应用

- 矩阵序列
- 矩阵级数

■ 矩阵序列

定理1：设 $A^{(k)}, A \in C^{m\times n}$，则

（1）$\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = 0 \iff \forall \|\bullet\|, \lim\limits_{k\to\infty} \left\| A^{(k)} \right\| = 0$

（2）$\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A \iff \forall \|\bullet\|, \lim\limits_{k\to\infty} \| A^{(k)} - A \| = 0$

定义：若 $A_{n\times n}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0_{n\times n}$，称$A$为收敛矩阵

定理2：A为收敛矩阵 $\iff \rho(A) < 1$

第3章 矩阵分析及其应用

- 矩阵序列
- 矩阵级数

定义：设有矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$，其中 $A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})\in C^{m\times n}$

称 $A^{(0)}+A^{(1)}+\cdots+A^{(k)}+\cdots$ 为矩阵级数。记为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$

部分和 $S^{(N)}=\sum\limits_{k=0}^{N}A^{(k)}$ 构成矩阵序列 $\{S^{(N)}\}$

定义：设有矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$，其中 $A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})\in C^{m\times n}$

称 $A^{(0)}+A^{(1)}+\cdots+A^{(k)}+\cdots$ 为矩阵级数。记为 $\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$

部分和 $S^{(N)}=\sum_{k=0}^{N}A^{(k)}$ 构成矩阵序列 $\{S^{(N)}\}$

敛散性：若 $\lim_{N\to\infty}S^{(N)}=S$，称 $\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 收敛于 S，记做

$$\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}=S$$

若 $\{S^{(N)}\}$ 发散，称 $\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 发散

性质1： $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = S \iff \sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)} = s_{ij} \ (all \quad i, j)$

性质1： $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = S \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)} = s_{ij} \ (all \quad i,j)$

证明： 左 $\Longleftrightarrow \lim_{N\to\infty} S^{(N)} = S$

$\Longleftrightarrow \lim_{N\to\infty} s_{ij}^{(N)} = s_{ij} \ (all \quad i,j)$

$\Longleftrightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_{ij}^{(k)} = s_{ij} \ (all \quad i,j)$

$\Longleftrightarrow$ 右

例 3.2 已知

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & \frac{\pi}{3 \times 4^k} \\ 0 & \frac{1}{k(k+1)} \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

研究矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)}$ 的收敛性.

例 3.2 已知

$$A^{(k)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2^k} & \frac{\pi}{3\times 4^k}\\ 0 & \frac{1}{k(k+1)}\end{bmatrix}\quad (k=1,2,\cdots)$$

研究矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty}A^{(k)}$ 的收敛性.

解

$$S^{(N)}=\sum_{k=1}^{N}A^{(k)}=\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^k} & \sum_{k=1}^{N}\frac{\pi}{3\times 4^k}\\ 0 & \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}1-\left(\frac{1}{2}\right)^N & \frac{\pi}{9}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^N\right]\\ 0 & \frac{N}{N+1}\end{bmatrix}$$

故有

$$S=\lim_{N\to\infty}S^{(N)}=\begin{bmatrix}1 & \frac{\pi}{9}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

性质2：若 $\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_{ij}^{(k)}\right|$ 收敛 $(all \quad i,j)$，称 $\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 绝对收敛。

（1）$\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 绝对收敛 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 收敛

（2）若 $\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 绝对收敛于 S，对 $\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$ 任意重组重排得 $\sum_{k=0}^{\infty}B^{(k)}$，则 $\sum_{k=0}^{\infty}B^{(k)}$ 绝对收敛于 S。

性质3： $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = S$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \forall \|\cdot\|, \sum_{k=0}^{\infty} \left\| A^{(k)} \right\|$ 收敛

性质3： $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = S$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \forall \|\cdot\|, \sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|$ 收敛

证明：只需考虑矩阵范数 $\|\cdot\|_{m1}$

性质3： $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = S$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \forall \|\cdot\|, \sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\|$ 收敛

证明：（必要性）由于矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛，

因此mn个数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ 绝对收敛。因此存在

$M>0$，使得对任意N，都有 $\sum_{k=0}^{N} \left|a_{ij}^{(k)}\right| < M, (\forall i, j)$

故 $$\sum_{k=0}^{N} \left\|A^{(k)}\right\|_{m1} = \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{i,j} |a_{ij}^{(k)}|\right) \le mnM$$

因此 $\sum_{k=0}^{\infty} \| A^{(k)} \|_{m1}$ 收敛

性质3：$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = S$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \forall \|\cdot\|, \sum_{k=0}^{\infty} \left\| A^{(k)} \right\|$ 收敛

（充分性）$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| A^{(k)} \right\|_{m1}$ 收敛。因此$\sum_{k=0}^{\infty} | a_{ij}^{(k)} | \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| A^{(k)} \right\|_{m1}$

故矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛

性质4： $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 收敛于S $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q$ 收敛于 PSQ

$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q$ 绝对收敛

证明：只需考虑矩阵范数 $\|\cdot\|_{m1}$

性质4：$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 收敛于S $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q$ 收敛于 PSQ

$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q$ 绝对收敛

证明：(1) $S^{(N)} = \sum_{k=0}^{N} A^{(k)} \to S \Rightarrow \sum_{k=0}^{N} PA^{(k)}Q = PS^{(N)}Q \to PSQ$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q \to PSQ$$

性质4：

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} \text{ 绝对收敛} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q \text{ 绝对收敛}$$

(2)矩阵范数 $\|\cdot\|$，由性质3知 $\sum_{k=0}^{\infty} \left\|A^{(k)}\right\|$ 收敛

因为 $\left\|PA^{(k)}Q\right\| \le \|P\| \left\|A^{(k)}\right\| \|Q\| = M\left\|A^{(k)}\right\| \qquad \left(M = \|P\|\|Q\|\right)$

所以 $\sum_{k=0}^{N} \left\|PA^{(k)}Q\right\| \le \sum_{k=0}^{N} \left(M\left\|A^{(k)}\right\|\right) = M\sum_{k=0}^{N} \left\|A^{(k)}\right\|$ 有界

故 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} PA^{(k)}Q$ 绝对收敛

性质5：$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$ 绝对收敛于 $S_{m\times n}$，$\sum_{k=0}^{\infty} B^{(k)}$ 绝对收敛于 $T_{n\times l}$

则Cauchy积

$$A^{(1)}B^{(1)}+\left[A^{(1)}B^{(2)}+A^{(2)}B^{(1)}\right]+\left[A^{(1)}B^{(3)}+A^{(2)}B^{(2)}+A^{(3)}B^{(1)}\right]$$
$$+\cdots+\left[A^{(1)}B^{(k)}+A^{(2)}B^{(k-1)}+\cdots+A^{(k)}B^{(1)}\right]+\cdots$$

绝对收敛于ST，记作 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty} B^{(k)}=ST$

矩阵幂级数

下面开始建立矩阵幂级数的讨论，讨论是以上面所论知识为基础的．首先从一个比较简单的方阵幂级数谈起．

方阵 A 的**幂级数**（**Neumann 级数**）

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \cdots + \boldsymbol{A}^k + \cdots \qquad (3.2.9)$$

Neumann级数： $A_{n\times n},\sum_{k=0}^{\infty}A^k,\left(A^0=I\right)$

定理4： $A_{n\times n},\sum A^k$ 收敛 $\Leftrightarrow A^k\to 0$

$\sum A^k$ 收敛时，其和为 $(I-A)^{-1}$

Neumann级数： $A_{n\times n},\sum_{k=1}^{\infty}A^k,\left(A^0=I\right)$

定理4： $A_{n\times n},\sum A^k$ 收敛 $\Leftrightarrow A^k\to 0$

$\sum A^k$ 收敛时，其和为 $(I-A)^{-1}$

证明：必要性。$\sum A^k$ 收敛时 $\sum\left(A^k\right)_{ij},\forall i,j$ 收敛

即 $\left(A^k\right)_{ij}\to 0$ ，也就是 $A^k\to 0$

充分性。$A^k\to 0$ 由定理2可知 $\rho(A)<1\Leftrightarrow(I-A)$ 可逆

$$\left(I+A+A^2+\cdots+A^N\right)(I-A)=I-A^{N+1}$$

$$\left(I+A+A^2+\cdots+A^N\right)=(I-A)^{-1}-A^{N+1}(I-A)^{-1}\to(I-A)^{-1},N\to\infty$$

即 $\sum A^k=(I-A)^{-1}$

定理3.5 如果方阵$\boldsymbol{A}$对某一矩阵范数$\|\cdot\|$有$\|\boldsymbol{A}\|<1$，则对任何非负整数k，以$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$为部分和$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k$的近似时，其误差为

$$\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k)\|\leqslant\frac{\|\boldsymbol{A}\|^{k+1}}{1-\|\boldsymbol{A}\|}$$

定理5： $A_{n\times n}, \|A\|<1 \Rightarrow \left\|(I-A)^{-1}-\sum_{k=0}^{N}A^k\right\| \le \frac{\|A\|^{N+1}}{1-\|A\|}, N=0,1,2$

定理 3.5 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 对某一矩阵范数 $\|\cdot\|$ 有 $\|\boldsymbol{A}\|<1$，则对任何非负整数 k，以 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 为部分和 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k$ 的近似时，其误差为

$$\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k)\| \leqslant \frac{\|\boldsymbol{A}\|^{k+1}}{1-\|\boldsymbol{A}\|}$$

定理5： $A_{n\times n}, \|A\| < 1 \Rightarrow \left\|(I-A)^{-1} - \sum_{k=0}^{N} A^k\right\| \le \frac{\|A\|^{N+1}}{1-\|A\|}, N = 0,1,2$

证明：$\|A\| < 1 \Rightarrow \rho(A) < 1 \quad \Rightarrow (I-A)$ 可逆

$$\left(I+A+A^2+\cdots+A^N\right)(I-A) = I - A^{N+1}$$

右乘 $(I-A)^{-1}$ ，移项可得

$$(I-A)^{-1} - \left(I+A+A^2+\cdots+A^N\right) = A^{N+1}(I-A)^{-1}$$

恒等式 $A^{N+1} = A^{N+1}(I-A)^{-1}(I-A) = A^{N+1}(I-A)^{-1} - A^{N+1}(I-A)^{-1}A$

$$A^{N+1}(I-A)^{-1} = A^{N+1} + A^{N+1}(I-A)^{-1}A$$

$$\left\|A^{N+1}(I-A)^{-1}\right\| \le \left\|A^{N+1}\right\| + \left\|A^{N+1}(I-A)^{-1}\right\| \bullet \|A\|$$

故 $\left\|A^{N+1}(I-A)^{-1}\right\| \le \frac{\left\|A^{N+1}\right\|}{1-\|A\|} \Rightarrow \left\|(I-A)^{-1} - \sum_{k=0}^{N} A^k\right\| \le \frac{\|A\|^{N+1}}{1-\|A\|}$

幂级数： 对函数 $f(z)=\sum c_k z^k, \left(|z|<r\right)$ 方阵 $A_{n\times n}$，

构造矩阵幂级数 $f(A)=\sum c_k A^k$

定理6： （1） $\rho(A)<r \quad \Rightarrow \sum c_k A^k$ 绝对收敛

（2） $\rho(A)>r \quad \Rightarrow \sum c_k A^k$ 发散

（1） $\rho(A)<r \quad \Rightarrow \sum c_k A^k$ 绝对收敛

证明:对A，取 $\varepsilon=\frac{1}{2}[r-\rho(A)]>0, \exists\|\bullet\|_{\varepsilon}$ ，使得

$$\|A\|_{\varepsilon} \leq \rho(A)+\varepsilon=\frac{1}{2}[r+\rho(A)]<r$$

$$\left\|c_k A^k\right\|_{\varepsilon} \leq\left|c_k\right|\|A\|_{\varepsilon}^k \leq\left|c_k\right|[\rho(A)+\varepsilon]^k$$

当 $|z|<r$ 时，$\sum\left|c_k\right||z|^k$ 收敛，于是

$\sum\left|c_k\right|[\rho(A)+\varepsilon]^k$ 收敛 $\Rightarrow \sum\left\|c_k A^k\right\|_{\varepsilon}$ 收敛 $\Rightarrow \sum c_k A^k$ 收敛

（2） $\rho(A)>r \quad \Rightarrow \sum c_k A^k$ 发散

证明:

设A的特征值λ满足|λ|=ρ(A)，x为λ相应的特征向量

$$\sum_{k=0}^{n} c_k (A^k x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (\lambda^k x) = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k\right) x$$

由于ρ(A) > r ,那么 $\left(\sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k\right) x$ 发散(注意x为非零向量)

从而 $\sum_{k=0}^{n} c_k (A^k x)$ 发散，这样 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 发散

1. 讨论下列矩阵幂级数的敛散性:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}^k$;　(2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{6^k}\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^k$.

1. 讨论下列矩阵幂级数的敛散性：

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}^k$； (2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{6^k}\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^k$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{3}i & -2-\sqrt{3}i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1-\sqrt{3}i & 0 \\ 0 & -1+\sqrt{3}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6}i & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{\sqrt{3}}{6}i & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}i \end{pmatrix}$$

$$\rho(A) = 2 > R = \frac{1}{l} = 1, l = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2}{(k+1)} = 1$$

1. 讨论下列矩阵幂级数的敛散性:

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}^k$;　(2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{6^k}\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^k$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rho(A) = 5 < R = \frac{1}{l} = 6, l = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{k+1}{6^{k+1}}}{\frac{k}{6^k}} = \frac{1}{6}$$

1. (1) 发散;　(2) 绝对收敛 .

2．求矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\begin{bmatrix}2 & -1/2\\ 2 & 0\end{bmatrix}^k$的和

2. 求矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\begin{bmatrix}2 & -1/2\\ 2 & 0\end{bmatrix}^k$ 的和

$$\begin{pmatrix}2 & -1/2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=PJP^{-1}$$

$$A^k=PJ^kP^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}A^k=P\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}J^k\right)P^{-1}=P\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} & \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^k}\\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\end{pmatrix}P^{-1}$$

2. 求矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k$ 的和

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}A^k = P\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} & \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^k} \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

令 $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^k} = M = \frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{k}{2^k}+\ldots,$

$$2M = \frac{1}{2^{1-1}}+\frac{2}{2^{2-1}}+\frac{3}{2^{3-1}}+\ldots+\frac{k}{2^{k-1}}+\ldots$$

2. 求矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k$的和

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}A^k = P\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} & \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^k} \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

令$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^k} = M = \frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots+\frac{k}{2^k}+\dots,$

$$2M = \frac{1}{2^{1-1}}+\frac{2}{2^{2-1}}+\frac{3}{2^{3-1}}+\dots+\frac{k}{2^{k-1}}+\dots$$

$$=1+\frac{1+1}{2^1}+\frac{2+1}{2^2}+\frac{3+1}{2^3}+\dots+\frac{k+1}{2^k}+\dots,$$

2. 求矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\begin{bmatrix}2 & -1/2\\2 & 0\end{bmatrix}^k$的和

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}A^k=P\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} & \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^k}\\0 & \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix}2 & 2\\0 & 2\end{pmatrix}P^{-1}$$

令$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^k}=M=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{k}{2^k}+\ldots,$

$$2M=1+\frac{1+1}{2^1}+\frac{2+1}{2^2}+\frac{3+1}{2^3}+\ldots+\frac{k+1}{2^k}+\ldots,$$

$$2M-M=1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\ldots=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=2$$

2. 求矩阵幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^k$的和

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}A^k = P\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} & \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^k} \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵级数-小节

定义：设有矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$，其中 $A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})\in C^{m\times n}$

称 $A^{(0)}+A^{(1)}+\cdots+A^{(k)}+\cdots$ 为矩阵级数。记为 $\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}$

部分和 $S^{(N)}=\sum_{k=0}^{N}A^{(k)}$ 构成矩阵序列 $\{S^{(N)}\}$

敛散性：若 $\lim_{N\to\infty}S^{(N)}=S$，称 $\sum A^{(k)}$ 收敛于S，记做

$\sum A^{(k)}=S$

若 $\{S^{(N)}\}$ 发散，称 $\sum A^{(k)}$ 发散

性质3：$\sum_{k=0}^{\infty}A^{(k)}=S$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow\forall\|\cdot\|,\sum_{k=0}^{\infty}\|A^{(k)}\|$ 收敛

矩阵级数-小节

幂级数： 对函数 $f(z)=\sum c_k z^k, (|z|<r)$ 方阵 $A_{n\times n}$,

构造矩阵幂级数 $f(A)=\sum c_k A^k$

定理6： （1） $\rho(A)<r \quad \Rightarrow \sum c_k A^k$ 绝对收敛

（2） $\rho(A)>r \quad \Rightarrow \sum c_k A^k$ 发散

作业

1、定义：3.4、3.5、3.6

2、定理：3.5、3.6

3、例题：3.2

4、习题3.2：1-4

下课，谢谢大家！