北京邮电大学 2018-2019 学年第二学期

《高等数学 A》（下）期末考试试题（1）

考试注意事项：学生必须将答题内容做在答题纸上，做在试题纸上均无效

一．填空题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(n+1/n)^n}$ 是____________,(填收敛或发散).

2. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-4)^n}{n\cdot 4^n}$ 的收敛域为 ______________.

3. 已知 $f(x)=x^2+x, x\in[0,1]$，$S(x)$ 是 $f(x)$ 的周期为 1 的三角级数的和函数, 则 $S(0), S\left(1/2\right)$ 分别是______ ，______.

4. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+2y^2)\sin\dfrac{1}{xy}=$______________.

5. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y}, y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$___.

6. 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为___________.

7. 曲线 $x=\dfrac{t^3}{3}, y=\dfrac{t^2}{2}, z=2t$ 上 $t=1$ 对应点处的切线方程为________.

8. 设 $f(r)$ 可微，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathbf{grad}f(r)=$____________.

9. 交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx=$________________.

10. 设 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的周长为 a, 则 $\oint\limits_C(3x^2+4y^2+y)ds=$_____.

二（8 分）. 已知$z=f(u,v),u=x+y,v=xy$，且$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

三（10 分）. 在椭球面$x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$的第一卦限部分上求一点，使椭球面在该点处的切平面在三个坐标轴上的截距的平方和最小，并求出最小值.

四（12 分） 求幂级数的$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$的收敛区域及和函数，并求极限$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{2^1}+\dfrac{2^2}{2^2}+\dfrac{3^2}{2^3}+\cdots+\dfrac{n^2}{2^n}\right)$的值.

五（10 分）. 设Ω由$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2},0\le x\le y\le\sqrt{3}x$所确定. $f(x,y,z)$为连续函数. $I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz.$

(1) 分别把上述三重积分I表示成柱面坐标和球面坐标下的累次积分;

(2) 设$f(x,y,z)=z^3$，求出I的值.

六（10 分）. 设$P(x,y)=\dfrac{axy^2}{(x^2+y^2)^2},Q(x,y)=-\dfrac{4x^{\lambda}y}{(x^2+y^2)^2}$.

(1) 求常数a,λ的值，使$\int_C Pdx+Qdy$ 在$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>1\}$内与路径无关; (2) 求$Pdx+Qdy$在$D$中的原函数.

七（10 分）. 求球面$x^2+y^2+z^2=4$被平面$z=\dfrac{1}{2}$与$z=1$所夹部分Σ的面积.

八（10 分）. 设积分曲面是$\Sigma: z=4-x^2-y^2$位于xoy平面上方部分的上侧，

求曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2yz^2dydz-xy^2z^2dzdx+x(1+xyz)dxdy$.

北京邮电大学 2018-2019 学年第二学期

《高等数学 A》（下）期末考试试题（1）

答案及参考评分标准

一. 填空题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 填： 收敛

2. 填: $[0,8)$

3. 填: $1, \dfrac{3}{4}$

4. 填: 0

5. 填: $-\dfrac{x^2yF_1'-yzF_2'}{x^2F_1'+xyF_2'}$

6. 填: $\dfrac{1}{2}$

7. 填: $\dfrac{x-1/3}{1}=\dfrac{y-1/2}{1}=\dfrac{z-2}{2}$

8. 填: $\dfrac{1}{r}f'(r)(x,y,z)$

9. 填: $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$

10. 填: $12a$

二（8 分）. 已知 $z=f(u,v), u=x+y, v=xy$，且 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}+y\dfrac{\partial f}{\partial v}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}+x\dfrac{\partial f}{\partial v}$ **（2 分）**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}+\frac{\partial f}{\partial v}+y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}+x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}+y\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x+y)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v}$$ **(5 分)**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}+x\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2x\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$ **(8 分)**

三（10 分）. 在椭球面$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$的第一卦限部分上求一点，使椭球面在该点处的切平面在三个坐标轴上的截距的平方和最小，并求出最小值.

解　设$M(x,y,z)$是椭球面第一卦限部分上任一点，则切平面方程为

$$xX+yY+\frac{1}{4}zZ=1$$ **(2 分)**

其中(X,Y,Z)表示切平面上的任意点的坐标. 于是有

$$\frac{X}{1/x}+\frac{Y}{1/y}+\frac{Z}{4/z}=1$$

截距的平方和为 $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{16}{z^2}$ **(4 分)**

令 $F(x,y,z,\lambda)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{16}{z^2}+\lambda(x^2+y^2+\dfrac{z^2}{4}-1)$

解方程组 $\begin{cases} F_x=-\dfrac{2}{x^3}+2\lambda x=0 \\ F_y=-\dfrac{2}{y^3}+2\lambda y=0 \\ F_z=-\dfrac{32}{z^3}+\dfrac{\lambda}{2}z=0 \\ F_\lambda=x^2+y^2+z^2/4-1=0 \end{cases}$ 得惟一驻点 $M_0\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\sqrt{2}\right)$ **(8 分)**

由问题的实际意义,截距平方和必在点 M_0 达到最小. 最小值为

$$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{16}{z^2}\right)_{M_0}=16$$ **(10 分)**

四(12 分) 求幂级数的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 的收敛区域及和函数, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{2^1}+\dfrac{2^2}{2^2}+\dfrac{3^2}{2^3}+\cdots+\dfrac{n^2}{2^n}\right)$的值.

解 易求出幂级数的收敛半径为 $R=1$, 收敛区域为 $(-1,1)$. **(2 分)**

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n,\ x\in(-1,1)$. 则在 $(-1,1)$ 内有

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\right)'=x\left(x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)'$$ **(5 分)**

而 $x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{x}{(1-x)^2}$,

所以 $S(x)=x\left(\dfrac{x}{(1-x)^2}\right)'=x\dfrac{(1-x)+x\cdot 2}{(1-x)^3}=\dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$. **(10 分)**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}\right)$$

$$=S\left(\frac{1}{2}\right)=6$$

(12 分)

五(10 分). 设 Ω 由 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}, 0\le x\le y\le\sqrt{3}x$ 所确定. $f(x,y,z)$ 为连续函数. $I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz.$

(1) 分别把上述三重积分 I 表示成柱面坐标和球面坐标下的累次积分;

(2) 设 $f(x,y,z)=z^3$, 求出 I 的值.

解 (1) Ω 用柱面坐标表示为

$$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3},\quad 0\le r\le 1, r\le z\le\sqrt{2-r^2}$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^{\sqrt{2-r^2}}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz$$

(3 分)

Ω 用球面坐标表示为

$$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, 0\le r\le\sqrt{2}$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr$$

(6 分)

(2) 当 $f(x,y,z)=z^3$ 时, 有

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\cos^3\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{\pi}{48}$$

(10 分)

六(10 分). 设 $P(x,y)=\dfrac{axy^2}{(x^2+y^2)^2}$, $Q(x,y)=-\dfrac{4x^{\lambda}y}{(x^2+y^2)^2}$.

(1) 求常数 a,λ 的值，使 $\int_C Pdx+Qdy$ 在 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>1\}$ 内与路径无关; (2) 求 $Pdx+Qdy$ 在 D 中的原函数.

解 (1) 在区域 D 内 P,Q 有一阶连续偏导数，由于曲线积分与路径无关, 有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-4x^{\lambda-1}y[\lambda(x^2+y^2)-4x^2]}{(x^2+y^2)^3},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2axy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}.\qquad \textbf{(2 分)}$$

所以 $\lambda-1=1, 4\lambda=2a\Rightarrow\lambda=2, a=4.$

此时有 $$P(x,y)=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, Q(x,y)=\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\qquad \textbf{(4 分)}$$

(2) 令 $du=Pdx+Qdy$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y)=\int\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}+\varphi(y)$$

$$=-\frac{2y^2}{x^2+y^2}+\varphi(y)\qquad \textbf{(7 分)}$$

代入 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=\dfrac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ 得

$$-2\frac{2y(x^2+y^2)-y^2\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}+\varphi'(y)=\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

得 $\varphi'(y)=0 \Rightarrow \varphi(y)=C$, 得所求原函数为

$$u(x,y)=-\frac{2y^2}{x^2+y^2}+C \qquad \text{(10 分)}$$

七(10 分). 求球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 被平面 $z=\frac{1}{2}$ 与 $z=1$ 所夹部分 Σ 的面积.

解 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=1/2 \end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{15}{4} \\ z=0 \end{cases}$,

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=1 \end{cases}$ 在 xoy 平面上的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=0 \end{cases}$.

Σ 在 xoy 面上的投影区域为 $D:\sqrt{3}\le x^2+y^2\le\frac{\sqrt{15}}{2}$, Σ 的方程为

$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$. (3 分)

$$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy \qquad \text{(5 分)}$$

所夹部分面积为

$$S=\iint_D\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}/2}\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr$$

$$=4\pi\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}/2}\frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr=-4\pi\sqrt{4-r^2}\,\Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}/2}$$

$$=2\pi. \qquad \text{(10 分)}$$

八（10 分）. 设积分曲面是$\Sigma: z = 4 - x^2 - y^2$位于$xoy$平面上方部分的上侧，求曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} x^2yz^2dydz - xy^2z^2dzdx + x(1+xyz)dxdy$.

解 补充曲面块 $\Sigma_0: x^2 + y^2 \le 4, z = 0$ ，取下侧. 则

$$I = \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0} x^2yz^2dydz - xy^2z^2dzdx + x(1+xyz)dxdy$$

$$-\iint\limits_{\Sigma_0} x^2yz^2dydz - xy^2z^2dzdx + x(1+xyz)dxdy \qquad \text{（2 分）}$$

记Ω是$\Sigma + \Sigma_0$所围成的区域. 则

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0} x^2yz^2dydz - xy^2z^2dzdx + x(1+xyz)dxdy$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (2xyz^2 - 2xyz^2 + x^2y)dxdydz$$

$$= 0 \qquad \text{（7 分）}$$

又 $$\iint\limits_{\Sigma_0} x^2yz^2dydz - xy^2z^2dzdx + x(1+xyz)dxdy = \iint\limits_{\Sigma_0} xdxdy$$

$$= -\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} xdxdy = 0$$

所以 $I = 0.$ **（10 分）**