# 第七章　　矩阵的直积

内容提要

7.1　直积的定义与性质

7.2　直积的应用

# §7.1 直积的定义和性质

【定义7.1】设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{p\times q}$,称如下的分块矩阵

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

为$A$与$B$的直积或Kronecker积。

---

【例7.1】设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B=(2,-1)$,则

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} B & 2B \\ 3B & 4B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 6 & -3 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B\otimes A=(2A \quad -A)=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & -2 \\ 6 & 8 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

# §7.1 直积的定义和性质

【定义7.1】设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{p\times q}$,称如下的分块矩阵

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

为$A$与$B$的直积或Kronecker积。

---

【注意】 1、 $A\otimes B$ 是$(mp)\times(nq)$矩阵

2、它是以$a_{ij}B$为 子块的分块矩阵。

3、 虽然$A\otimes B$与 $B\otimes A$的阶数相同,

矩阵的直积不满足交换律。

矩阵的直积具有下列基本性质:

性质1　设$k$为常数，则

$$k(A\otimes B)=(kA)\otimes B=A\otimes(kB)$$

性质2　设$A_1$与$A_2$为同阶矩阵，则

$$(A_1+A_2)\otimes B=A_1\otimes B+A_2\otimes B$$

$$B\otimes(A_1+A_2)=B\otimes A_1+B\otimes A_2$$

性质3　$(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T,\ (A\otimes B)^H=A^H\otimes B^H$

矩阵的直积具有下列基本性质:

【性质4】 矩阵的直积满足结合律，即

$$(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C) \qquad (7.2)$$

【证】设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 则由定义7.1可得

$$(A\otimes B)\otimes C = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \otimes C$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}B)\otimes C & \cdots & (a_{1n}B)\otimes C \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{m1}B)\otimes C & \cdots & (a_{mn}B)\otimes C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(B\otimes C) & \cdots & a_{1n}(B\otimes C) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(B\otimes C) & \cdots & a_{mn}(B\otimes C) \end{bmatrix}$$

$$= A\otimes(B\otimes C)$$

证毕

矩阵的直积具有下列基本性质:

【性质5】 设 $A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{ij})_{p\times q},C=(c_{ij})_{n\times s},D=(d_{ij})_{q\times t}$,

则 $$(A\otimes B)\,(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD) \qquad (7.3)$$

【证】 $(A\otimes B)\,(C\otimes D)$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1s}D \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1}D & \cdots & c_{ns}D \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \sum\limits_{k=}^{n}(a_{1k}B)(c_{k1}D) & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n}(a_{1k}B)(c_{ks}D) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{k=}^{n}(a_{mk}B)(c_{k1}D) & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n}(a_{mk}B)(c_{ks}D) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum\limits_{k=}^{n}a_{1k}c_{k1} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}c_{ks} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{k=}^{n}a_{mk}c_{k1} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{mk}c_{ks} \end{bmatrix}\otimes(BD)$$

$$=(AC)\otimes(BD)$$ 证毕

【性质6 】设 $A\in C^{m\times m}$与$B\in C^{n\times n}$都是可逆矩阵

则 $A\otimes B$ 也可逆，且有

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1} \qquad (7.4)$$

【证】根据性质5可得

$$(A\otimes B)(A^{-1}\otimes B^{-1})=(AA^{-1})\otimes(BB^{-1})$$

$$=I_m\otimes I_n \quad =I_{mn}.$$

故 $A\otimes B$ 可逆，且式(7.4)成立。 证毕

【性质7 】设 $A\in C^{m\times m}$与$B\in C^{n\times n}$都是酉矩阵，

则$A\otimes B$也是酉矩阵。

下面讨论矩阵直积的特征值问题。

【定理7.1】 设 $A \in C^{m\times m}$ 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$

$B \in C^{n\times n}$ 全体特征值为 $\mu_1$, $\mu_2, \cdots$, $\mu_n$, 那么

(1) $A \otimes B$ 的全体特征值为 $\lambda_i \mu_j \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$;

(2) $A\otimes I_n + I_m \otimes B^T$ 的全体特征值为 $\lambda_i + \mu_j \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$;

【证】 (1) 对于矩阵 $A$ 与 $B$，存在可逆矩阵 $P$ 与 $\tilde{P}$，使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & & & \\ & \lambda_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \delta_{m-1} & \\ & & & \lambda_m & \end{bmatrix} = J$$

$$\tilde{P}^{-1}B\tilde{P} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \tilde{\delta}_1 & & & \\ & \mu_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \tilde{\delta}_{n-1} & \\ & & & \mu_n & \end{bmatrix} = \tilde{J}$$

其中 $\delta_i, \tilde{\delta}_j$ 代表1或0,

上 下 首

下面讨论矩阵直积的特征值问题。

【定理7.1】 设 $A \in C^{m\times m}$ 的全体特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$

$B \in C^{n\times n}$ 全体特征值为 $\mu_1, \mu_2,\cdots, \mu_n$, 那么

(1) $A\otimes B$的全体特征值为$\lambda_i\mu_j \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$;

(2) $A\otimes I_n + I_m\otimes B^T$的全体特征值为$\lambda_i+\mu_j \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$;

【证】 (1) 对于矩阵$A$与$B$，存在可逆矩阵$P$与 $\tilde{P}$ ,

于是有 $$(P\otimes\tilde{P})^{-1}(A\otimes B)(P\otimes\tilde{P})$$
$$=(P^{-1}AP)\otimes(\tilde{P}^{-1}B\tilde{P}) = J\otimes\tilde{J}$$

易知, $J\otimes\tilde{J}$ 是上三角矩阵， 而$A\otimes B$相似于$J\otimes\tilde{J}$,

故$A\otimes B$的全体特 征值为$J\otimes\tilde{J}$的主对角线元素，

即$\lambda_i\mu_j \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$.

(2) 证略

下面讨论矩阵直积的特征值问题。

【定理7.1】 设 $A \in C^{m\times m}$ 的全体特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$

$B \in C^{n\times n}$ 全体特征值为 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$，那么

(1) $A \otimes B$ 的全体特征值为 $\lambda_i \mu_j \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$;

(2) $A \otimes I_n + I_m \otimes B^T$ 的全体特征值为 $\lambda_i + \mu_j \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$;

【推论】矩阵A与B条件同上

则 $A \otimes I_n + I_m \otimes B^T$ 可逆的充分必要条件是

$$\lambda_i + \mu_j \neq 0 \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n).$$

【例7.2】设$x$是$A\in C^{m\times m}$的特征向量，$y$是$B\in C^{n\times n}$的特征向量，

证明：$x\otimes y$是$A\otimes B$的特征向量。

【证】 设 $Ax=\lambda x$， $By=\mu y$，则由性质5可得

$$(A\otimes B)(x\otimes y)=(Ax)\otimes(By)$$

$$=(\lambda x)\otimes(\mu y)=(\lambda\mu)(x\otimes y)$$

即$x\otimes y$是$A\otimes B$的对应于特征值$\lambda\mu$的特征向量。

【例7.3】设 $A\in C^{n\times n}$，证明：

$$e^{I\otimes A}=I\otimes e^{A},\qquad e^{A\otimes I}=e^{A}\otimes I \qquad (7.5)$$

【证】根据矩阵幂级数的定义，并利用性质5可得

$$e^{I\otimes A}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(I\otimes A)^{k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(I\otimes A^{k})=I\otimes(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^{k})=I\otimes e^{A}$$

同理可证另一结论。

【例7.4】设 $A \in C^{m\times m}, B \in C^{n\times n}$,证明:

$$e^{(A\otimes I_n + I_m \otimes B)} = e^A \otimes e^B = e^B \otimes e^A \qquad (7.6)$$

【证】 因为

$$(A\otimes I_n)(I_m \otimes B) = A\otimes B = (I_m \otimes B)(A\otimes I_n)$$

所以根据定理3.10和例7.5可得

$$e^{(A\otimes I_n + I_m \otimes B)} = e^{A\otimes I_n} e^{I_m \otimes B}$$

$$= (e^A \otimes I_n)(I_m \otimes e^B) = e^A \otimes e^B$$

同理可证另一等式。

【例7.5】 设 $A\in C^{m\times m}, B\in C^{n\times n}$，证明:

$$\det(A\otimes B)=(\det A)^n(\det B)^m \qquad (7.7)$$

【证】设$A$的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2,\cdots, \lambda_m$，$B$的特征值为$\mu_1, \mu_2,\cdots, \mu_n$，由定理7.1知，

$A\otimes B$的特征值为 $\lambda_i\mu_j \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$.

于是可得 $\det(A\otimes B)$

$$=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j=\left(\prod_{i=1}^{m}\lambda_i\right)^n\left(\prod_{j=1}^{n}\mu_j\right)^m$$

$$=(\det A)^n(\det B)^m$$

# §7.2 直积的应用

## 一、矩阵的拉直及其与直积的关系

【定义7.2】 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，称$mn$维列向量

$$\vec{A}=(a_{11},\cdots,a_{1n},a_{21},\cdots,a_{2n},\cdots a_{m1},\cdots,a_{mn})^T \qquad (7.8)$$

为矩阵$A$的（按行）拉直。

例如:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix},\ 则\ \vec{A}=(1,2,3,4,5,6)^T.$$

矩阵的拉直有以下的基本性质:

性质1 设 $A,B\in C^{m\times n}$，$k$与$l$为常数，则 $\overrightarrow{(kA+lB)}=k\vec{A}+l\vec{B}$.

性质2 设 $A(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$， 则 $\dfrac{d\overrightarrow{A(t)}}{dt}=\dfrac{d\,\overrightarrow{A(t)}}{dt}$.

【定理7.2】设 $A\in C^{m\times n}, X\in C^{n\times p}, B\in C^{p\times q}$, 则 $\overrightarrow{AXB}=(A\otimes B^T)\vec{X}$.

【证】 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, 将$X^T$按列分块,即$X^T=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,

则 $AXB=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{bmatrix}B=\begin{bmatrix} (a_{11}x_1^T+\cdots+a_{1n}x_n^T)B \\ \vdots \\ (a_{m1}x_1^T+\cdots+a_{mn}x_n^T)B \end{bmatrix}, \vec{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

从而

$$\overrightarrow{AXB}=((a_{11}x_1^T+\cdots+a_{1n}x_n^T)B,\cdots,(a_{m1}x_1^T+\cdots+a_{mn}x_n^T)B)^T$$

$$=\begin{bmatrix} B^T(a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n) \\ \vdots \\ B^T(a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}B^T & \cdots & a_{1n}B^T \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B^T & \cdots & a_{mn}B^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$=(A\otimes B^T)\vec{X}$$

证毕

【定理7.2】设 $A\in C^{m\times n}, X\in C^{n\times p}, B\in C^{p\times q}$, 则 $\overrightarrow{AXB}=(A\otimes B^T)\vec{X}$.

【例】解下列矩阵方程: $\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\2&1\end{bmatrix}$

【解】方程两边按行拉直:

$$\begin{bmatrix}0&2&0&1\\2&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\2\\1\end{bmatrix}$$

解得: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\1\\2\end{bmatrix}$ 即: $\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&1\\1&2\end{bmatrix}$

【推论】设 $A\in C^{m\times n}, B\in C^{n\times n}, X\in C^{m\times n}$, 则有

$$\overrightarrow{AX}=(A\otimes I_n)\vec{X},\ \overrightarrow{XB}=(I_m\otimes B^T)\vec{X} \qquad (7.9)$$

$$\overrightarrow{AX+XB}=(A\otimes I_n+I_m\otimes B^T)\vec{X}$$

## 二、线性矩阵方程的可解性及其求解

类型 I　设 $A \in C^{m\times m}, B \in C^{n\times n}, F \in C^{m\times n}$ 解Lyapunov矩阵方程

$$AX + XB = F \qquad (7.10)$$

$$\Longrightarrow (A \otimes I_n + I_m \otimes B^T)\vec{X} = \vec{F} \qquad (7.11)$$

因为矩阵方程(7. 10)与线性方程组(7. 11)等价，根据线性方程组的可解性判别条件可得：矩阵方程(7. 10)有解的充分必要条件是

$$rank(A \otimes I_n + I_m \otimes B^T \,|\, \vec{F}) = rank(A \otimes I_n + I_m \otimes B^T)$$

有惟一解的充分必要条件是:

$$\det(A \otimes I_n + I_m \otimes B^T) \neq 0$$

即$A$与$B$无互为反号的特征值(定理7.1的推论)。

【例7.6】解矩阵方程 $AX+XB=F$ 其中

$$(1)\quad A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$(2)\quad A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 2 & 9\end{bmatrix}$$

【解】(1) $A$的特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2;$

$B$的特征值为 $\mu_1=1,\ \mu_2=-4.$

$A$与$B$无互为反号的特征值，故矩阵方程有惟一解。设

$$X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix},$$

将矩阵方程转化为线性方程组(7. 11)的形式

【例7.6】解矩阵方程 $AX+XB=F$ 其中

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $F=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 2 & 9\end{bmatrix}$

【解】(1)
$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1 & 0\\ 4 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -2\\ 2\end{bmatrix}$$

可求得 $x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=1,\ x_4=-1,$

于是矩阵方程的惟一解为 $X=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

【例7.6】解矩阵方程 $AX+XB=F$ 其中

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 2\end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 2 & 9\end{bmatrix}$

【解】 (2) $A$的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$;

$B$的特征值为 $\mu_1=-3,\ \mu_2=-1.$

易见 $\lambda_1+\mu_2=0.$ 设$X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$,

上 下 首

【例7.6】解矩阵方程 $AX+XB=F$ 其中

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-3 & 4\\1 & 0\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}1 & 3\\-2 & 2\end{bmatrix}$

(2) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-3 & 4\\0 & -1\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}0 & 5\\2 & 9\end{bmatrix}$

【解】 (2) 将矩阵方程转化为线性方程组(7. 11)的形式

$$\begin{bmatrix}-2 & 0 & -1 & 0\\4 & 0 & 0 & -1\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\5\\2\\-9\end{bmatrix}$$

通解为 $X=\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & -1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ ($c$为任意常数)

## 二、线性矩阵方程的可解性及其求解

类型II　设$A_k \in C^{m\times n}, B_k \in C^{p\times q}, F \in C^{m\times q}$,解一般的线性矩阵方程

$$\sum_{k=1}^{r} A_k X B_k = F \qquad (r=1,2,\cdots) \qquad (7.12)$$

$$\Longrightarrow (\sum_{k=1}^{r}(A_k \otimes B_k^T))\vec{X} = \vec{F} \qquad (7.13)$$

因为矩阵方程(7.12)与线性方程组(7.13)等价，所以它们有解的充分必要条件是:

$$rank(\sum_{k=1}^{r}(A_k \otimes B_k^T)\,|\,\vec{F}) = rank(\sum_{k=1}^{r}(A_k \otimes B_k^T))$$

【例7.8】 求矩阵方程 $A_1XB_1+A_2XB_2=F$,其中

$$A_1=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}4 & -6\\ 3 & 6\end{bmatrix},\quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$$

【解】 将矩阵方程转化为线性方程组(7. 13)的形式

$$\begin{bmatrix}2 & -2 & 2 & -3\\ 0 & 2 & 2 & 5\\ 2 & 0 & -1 & 2\\ -4 & -4 & -2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -6\\ 3\\ 6\end{bmatrix}$$

于是矩阵方程的惟一解为 $X=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

类型III 设 $A\in C^{m\times m}, B\in C^{n\times n}, X(t)\in C^{m\times n}$,求解矩阵微分方程的

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dX(t)}{dt}=AX(t)+X(t)B\\&X(0)=X_0\end{aligned}\right\}\qquad(7.15)$$

$$\Rightarrow\quad\left.\begin{aligned}&\frac{d\overrightarrow{X(t)}}{dt}=(A\otimes I_n+I_m\otimes B^T)\overrightarrow{X(t)}\\&\overrightarrow{X(0)}=\overrightarrow{X_0}\end{aligned}\right\}\qquad(7.16)$$

根据§3.5及例7.4的结果可得其解为:

$$\overrightarrow{X(t)}=e^{(A\otimes I_n+I_m\otimes B^T)t}\overrightarrow{X_0}=(e^{At}\otimes e^{B^Tt})\overrightarrow{X_0}=\overrightarrow{e^{At}X_0(e^{B^Tt})^T}$$

因为 $(e^{B^Tt})^T=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(B^T)^k t^k\right)^T=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}B^k t^k=e^{Bt}$

所以 (7.15)的解为

$$X(t)=e^{At}X_0e^{Bt}\qquad(7.17)$$

见例7.9

上 下 首

# 课堂小结

## 一、矩阵的直积的概念与性质(7条)

【定义7.1】设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{p\times q}$,称如下的分块矩阵

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

为$A$与$B$的直积或Kronecker积。

【定理7.1】(有关直积特征值)　【定理7.2】(有关直积运算)

## 二、矩阵的直积在解矩阵方程中的应用

类型 I　　类型 II　　类型 III

上 下 首

# 作业：

$P_{162}$　7，8，9

本课程全部结束