矩阵理论与方法

11月

内容提要 CONTENTS

- ☐ 课程信息
- ☐ 课程介绍
- ☐ 矩阵理论与方法

第2章 范数理论及其应用

1、矩阵的可逆性条件

2、近似逆矩阵的误差

1、矩阵的可逆性条件

若存在A的某范数，使得$\| A \| < 1$，则$I - A$可逆

1、矩阵的可逆性条件

若存在A的某范数，使得$\| A \|< 1$，则$I-A$可逆

假设$I-A$不可逆，则$(I-A)x=0$存在非零解

即$x=Ax$

1、矩阵的可逆性条件

若存在A的某范数，使得$\| A \| < 1$，则$I - A$可逆

假设$I - A$不可逆，则$(I - A)x = 0$存在非零解

即$x = Ax$

$\|x\| = \|Ax\| \le \|A\|\|x\| < 1 \cdot \|x\| \Rightarrow 1 < 1$矛盾

1、矩阵的可逆性条件

2、近似逆矩阵的误差

$$A^{-1} \approx inv(A)$$

$$A^{-1} \approx inv(A) \approx (A + \delta A)^{-1}$$

$$A^{-1} \approx inv(A) \approx (A+\delta A)^{-1}$$

问题： $\left\| A^{-1} - (A+\delta A)^{-1} \right\| = ?$

定理 2.6 设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，且对 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的某种矩阵范数 $\|\cdot\|$，有 $\|A\| < 1$，则矩阵 $I - A$ 非奇异，且有

$$\|(I-A)^{-1}\| \leqslant \frac{\|I\|}{1-\|A\|} \tag{2.3.1}$$

定理 2.7 设 $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$，且对 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上的某种矩阵范数 $\|\cdot\|$，有 $\|A\| < 1$，则

$$\|I-(I-A)^{-1}\| \leqslant \frac{\|A\|}{1-\|A\|} \tag{2.3.2}$$

定理：设$A,B\in C^{n\times n}$，A可逆，且满足 $\left\|A^{-1}B\right\|<1$

(1) $A+B$ 可逆

(2) $F=I-\left(I+A^{-1}B\right)^{-1}:\left\|F\right\|\le\dfrac{\left\|A^{-1}B\right\|}{1-\left\|A^{-1}B\right\|}$

(3) $\dfrac{\left\|A^{-1}-\left(A+B\right)^{-1}\right\|}{\left\|A^{-1}\right\|}\le\dfrac{\left\|A^{-1}B\right\|}{1-\left\|A^{-1}B\right\|}$

$$\left\|I-\left(I-A\right)^{-1}\right\|\le\frac{\left\|A\right\|}{1-\left\|A\right\|}$$

$$\mathbf{A}^{-1}-(\mathbf{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=[\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{I}+\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}]\mathbf{A}^{-1}$$

范数的应用

令δ是个小量，并且令

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\| \, \|\boldsymbol{A}^{-1}\|$$

则当 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \, \|\delta\boldsymbol{A}\| < 1$ 时，

$$\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1} - (\boldsymbol{A} + \delta\boldsymbol{A})^{-1}\|}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|} \leqslant \frac{\mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) \dfrac{\|\delta\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}}{1 - \mathrm{cond}(\boldsymbol{A}) \dfrac{\|\delta\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}}$$

称 $\mathrm{cond}(\boldsymbol{A})$ 为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数**，它是求矩阵逆的摄动的一个重要量．一般说来，条件数愈大，$(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的相对误差就愈大．

1、矩阵的可逆性条件

2、近似逆矩阵的误差

3、矩阵谱半径及其性质

矩阵谱半径及其性质

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = ?, x \in R$$

矩阵谱半径及其性质

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = ?$$

矩阵谱半径及其性质

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

收敛半径是1

矩阵谱半径及其性质

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} := f(x), |x| < 1$$

收敛半径是1

$$f(A) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} A^k, (? < 1)$$

矩阵谱半径及其性质

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1 - x} := f(x), |x| < 1$$

收敛半径是1

$$f(A) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} A^k, (\exists \|\cdot\| : \|A\| < 1)$$

实际操作困难

矩阵谱半径及其性质

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1 - x} := f(x), |x| < 1$$ 收敛半径是1

$$f(A) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} A^k, \text{半径}(A) < 1$$

$$(1)\text{半径}(A) \le \| A \|, (2)\exists \|\cdot\| : \|A\| < \text{半径}(A) + \varepsilon$$

矩阵谱半径及其性质

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} := f(x), |x| < 1$$

收敛半径是1

$$f(A) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} A^k, \rho(A) < 1$$

$$(1)\rho(A) \le \| A \|, (2)\exists \left\|\cdot\right\| : \left\|A\right\| < \rho(A) + \varepsilon$$

矩阵谱半径及其性质

三、矩阵的谱半径及其性质

矩阵 $\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 的谱半径在特征值估计、广义逆矩阵、数值分析以及数值代数等理论的建树中，都占有极其重要的地位．现论述如下．

定义 2.5 设 $\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，称

$$\rho(\mathbf{A})=\max_i|\lambda_i| \tag{2.3.3}$$

为 $\mathbf{A}$ 的谱半径．

矩阵谱半径及其性质

定理9: $\forall A \in C^{n\times n}, \forall \|\cdot\|_M$ ， 有 $\rho(A) \le \|A\|_M$

定理 2.9 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则对 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 上任何一种矩阵范数 $\|\cdot\|$，都有

$$\rho(\mathbf{A}) \leqslant \|\mathbf{A}\| \tag{2.3.4}$$

矩阵谱半径及其性质

定理9: $\forall A \in C^{n\times n}, \forall \|\cdot\|_M$，有 $\rho(A) \le \|A\|_M$

证明：对矩阵范数 $\|\cdot\|_M$，存在向量范数 $\|\cdot\|_V$，

使得 $\|Ax\|_V \le \|A\|_M \cdot \|x\|_V$

设 $Ax_i = \lambda_i x_i \quad (x_i \ne \theta)$，则有 $\|A\|_M$

$$|\lambda_i| \cdot \|x_i\|_V = \|\lambda_i x_i\|_V = \|Ax_i\|_V \le \|A\|_M \cdot \|x_i\|_V$$

$$|\lambda_i| \le \|A\|_M \quad \Rightarrow \rho(A) \le \|A\|_M$$

矩阵谱半径及其性质

定理10: $\forall A \in C^{n\times n}$，对$\forall \varepsilon > 0, \exists$矩阵范数$\|\cdot\|_M$

使得 $\|A\|_M \le \rho(A) + \varepsilon$

定理 2.10 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$,对任意的正数 ε,存在某种矩阵范数 $\|\cdot\|_M$,使得

$$\|\mathbf{A}\|_M \leqslant \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon \tag{2.3.7}$$

定理10: $\forall A \in C^{n\times n}$，对$\forall \varepsilon > 0, \exists$矩阵范数$\|\bullet\|_M$

使得 $\|A\|_M \le \rho(A) + \varepsilon$

证明：根据Jordan标准型理论：存在可逆矩阵$P_{n\times n}$

使得 $P^{-1}AP = J = \Lambda + \tilde{I}$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n), \tilde{I} = \mathrm{diag}([\delta_1, \cdots, \delta_{n-1}], 1)$$

其中 δ_i 等于0或1，于是有

$$D = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \cdots, \varepsilon^{n-1})$$

$$(PD)^{-1} APD = D^{-1}JD \quad = \Lambda + \varepsilon \tilde{I}$$

矩阵谱半径及其性质

令$S=PD$可逆，那么

$$\left\|S^{-1}AS\right\|_1=\left\|\Lambda+\varepsilon\tilde{I}\right\|_1\le\rho(A)+\varepsilon$$

可证 $\|A\|_M=\left\|S^{-1}AS\right\|_1 \quad \left(A\in C^{n\times n}\right)$ 是$C^{n\times n}$中的矩阵范数

于是有

$$\|A\|_M=\left\|S^{-1}AS\right\|_1\le\rho(A)+\varepsilon$$

矩阵谱半径及其性质

定理10: $\forall A \in C^{n\times n}$，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 矩阵范数 $\|\cdot\|_M$

使得 $\|A\|_M \le \rho(A) + \varepsilon$

定理 2.10 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，对任意的正数 ε，存在某种矩阵范数 $\|\cdot\|_M$，使得

$$\|\mathbf{A}\|_M \leqslant \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon \tag{2.3.7}$$

矩阵谱半径及其性质

例 2.10 试用矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1-\mathrm{j} & 3\\ 2 & 1+\mathrm{j}\end{bmatrix}\quad (\mathrm{j}=\sqrt{-1})$$

验证式(2.3.4)对三种常用范数的正确性.

矩阵谱半径及其性质

例 2.10 试用矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1-\mathrm{j} & 3\\ 2 & 1+\mathrm{j}\end{bmatrix}\quad (\mathrm{j}=\sqrt{-1})$$

验证式(2.3.4)对三种常用范数的正确性.

解 因为 $\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)^2-5$,所以 $\lambda_1(\boldsymbol{A})=1+\sqrt{5}$, $\lambda_2(\boldsymbol{A})=1-\sqrt{5}$,从而

$$\rho(\boldsymbol{A})=1+\sqrt{5}$$

矩阵谱半径及其性质

例 2.10 试用矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{j} & 3 \\ 2 & 1+\mathrm{j} \end{bmatrix} \quad (\mathrm{j} = \sqrt{-1})$$

验证式(2.3.4)对三种常用范数的正确性.

$$\rho(A) = 1+\sqrt{5}$$

又 $\|A\|_1 = \|A\|_\infty = 3+\sqrt{2}$,而

$$A^{\mathrm{H}}A = \begin{bmatrix} 6 & 5+5\mathrm{j} \\ 5-5\mathrm{j} & 11 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A^{\mathrm{H}}A) = \lambda^2 - 17\lambda + 16$$

由此得 $\lambda_1(A^{\mathrm{H}}A) = 16$, $\lambda_2(A^{\mathrm{H}}A) = 1$. 于是有

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1(A^{\mathrm{H}}A)} = 4$$

矩阵谱半径及其性质

谱半径不是范数，不满足

$$\rho(A+B) \le \rho(A) + \rho(B)$$

矩阵谱半径及其性质

谱半径不是范数，不满足

$$\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$$

```
A =

    0.6551    0.1190
    0.1626    0.4984
```

```
B =

    0.9597    0.5853
    0.3404    0.2238
```

```
>> max(abs(eig(A+B)))

ans =

    1.9125
```

```
>> max(abs(eig(A)))+max(abs(eig(B)))

ans =

    1.9066
```

矩阵谱半径及其性质

例 2.11 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{C}^{n \times n}$，则 $\rho(\boldsymbol{A}^k) = [\rho(\boldsymbol{A})]^k (k = 1, 2, \cdots)$.

矩阵谱半径及其性质

例 2.11 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，则 $\rho(\mathbf{A}^k) = [\rho(\mathbf{A})]^k (k = 1, 2, \cdots)$.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，根据定理 1.29 可得，$\boldsymbol{A}^k$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$. 于是有

$$\rho(\mathbf{A}^k) = \max_i |\lambda_i^k| = (\max_i |\lambda_i|)^k = [\rho(\mathbf{A})]^k$$

定理 1.29 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶复矩阵，且其特征多项式的某种分解式是(1.2.32)，则存在 n 阶复非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{J} \tag{1.2.34}$$

作业（第五版）

1、定义：P_{94}条件数、2.5

2、定理：2.9、2.10

3、例题：2.10

作业（第三版）

1、定义：P_{135}条件数、2.5

2、定理：2.9、2.10

3、例题：2.10

下课，谢谢大家！