矩阵理论与方法

12月

内容提要 CONTENTS

- 课程信息
- 课程介绍
- 矩阵理论与方法

  第3章 矩阵分析及其应用

第3章 矩阵分析及其应用

第 3 章　矩阵分析及其应用

在线性代数课程中，主要讨论矩阵的代数运算，没有涉及本章将要介绍的矩阵分析理论．矩阵分析理论的建立，同数学分析一样，也是以极限理论为基础的，其内容丰富，是研究数值方法和其他数学分枝以及许多工程问题的重要工具．本章首先讨论矩阵序列的极限运算；然后介绍矩阵序列和矩阵级数的收敛定理、矩阵幂级数和一些矩阵函数，诸如 e^{A}，$\sin\boldsymbol{A}$，$\cos\boldsymbol{A}$ 等；最后介绍矩阵的微分和积分的概念及其性质，同时介绍它们在微分方程组中的应用．

第3章 矩阵分析及其应用

- 一元多项式 $f(t)=c_0+c_1t+\cdots+c_mt^m$

- 矩阵多项式 $f(A)=c_0+c_1A+\cdots+c_mA^m$，$(\forall A\in C^{n\times n})$

- $f(A)$以矩阵为自变量且取值为矩阵的一类函数

本章研究一般的以矩阵为自变量且取值为矩阵的函数

——矩阵函数

数 学 分 析

- 第十二章 数项级数
- 1 级数的收敛性
- 2 正项级数
- 一 正项级数收敛性的一般判别原则
- 二 比式判别法和根式判别法
- 三 积分判别法
- 四 拉贝判别法
- 3 一般项级数
- 一 交错级数
- 二 绝对收敛级数及其性质
- 三 阿贝尔判别法和狄利克雷判别法
- 第十三章 函数列与函数项级数
- 1 一致收敛性
- 一 函数列及其一致收敛性
- 二 函数项级数及其一致收敛性
- 三 函数项级数的一致收敛性判别法
- 2 一致收敛函数列与函数项级数的性质
- 第十四章 幂级数

- 第十六章 多元函数的极限与连续
- 1 平面点集与多元函数
- 一 平面点集
- 二 R2上的完备性定理
- 三 二元函数
- 四 n元函数
- 2 二元函数的极限
- 一 二元函数的极限
- 二 累次极限
- 3 二元函数的连续性
- 一 二元函数的连续性概念
- 二 有界闭域上连续函数的性质
- 第十七章 多元函数微分学

- 第十七章 多元函数微分学
- 1 可微性
- 一 可微性与全微分
- 二 偏导数
- 三 可微性条件
- 四 可微性几何意义及应用
- 2 复合函数微分法
- 一 复合函数的求导法则
- 二 复合函数的全微分
- 3 方向导数与梯度
- 4 泰勒公式与极值问题
- 一 高阶偏导数
- 二 中值定理和泰勒公式
- 三 极值问题
- 第十八章 隐函数定理及其应用

实变函数:

1、数列极限

2、数项级数

3、函数列极限

4、函数项级数

5、幂级数

实变函数:

1、数列极限 $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=?$$

2、数项级数

3、函数列极限

4、函数项级数

5、幂级数

第3章 矩阵分析及其应用

实变函数:

1、数列极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=?$$

2、数项级数

$$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon),\text{s.t.当}n>N\text{时,有}|a_n-a|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}a_n=a$$

3、函数列极限

4、函数项级数

5、幂级数

实变函数:

1、数列极限

2、数项级数

3、函数列极限

4、函数项级数

5、幂级数

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon),\text{s.t.当}n>N\text{时},\text{有}\,|a_n-a|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}a_n=a$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left\lceil\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil,$$

$$\text{s.t.当}n>N\text{时},\text{有}\,\left|\frac{1}{2^n}-0\right|<\varepsilon$$

第3章 矩阵分析及其应用

实变函数:

1、数列极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}=?$

2、数项级数

3、函数列极限

4、函数项级数

5、幂级数

柯西收敛原理

$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon),\text{s.t.}$当$m,n>N$时,有$|a_m-a_n|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}a_n=a$

第3章 矩阵分析及其应用

实变函数:

1、数列极限

2、数项级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=?$

3、函数列极限

4、函数项级数

5、幂级数

实变函数:

1、数列极限

2、数项级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=2$$

3、函数列极限

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2(1-\frac{1}{2^{n+1}})$$

4、函数项级数

$$\therefore S_n\to 2(n\to+\infty)$$

5、幂级数

第3章 矩阵分析及其应用

实变函数:

1、数列极限

2、数项级数 $$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} = ?$$

3、函数列极限

4、函数项级数

5、幂级数

第3章 矩阵分析及其应用

实变函数:

1、数列极限

2、数项级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} = ?$$

3、函数列极限

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \text{收敛} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ 绝对收敛}$$

4、函数项级数

5、幂级数

$$\text{若} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\text{、}\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \text{ 绝对收敛，则} (\sum_{k=0}^{+\infty} a_k)(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k) = \sum a_k b_l$$

第3章 矩阵分析及其应用

实变函数:

1、数列极限

2、数项级数

3、函数列极限

4、函数项级数

5、幂级数 $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n, |x-x_0|<R$$

第3章 矩阵分析及其应用

- 矩阵序列
- 矩阵级数
- 矩阵函数

- 矩阵序列

定义：将矩阵序列 $A^{(k)}=\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{m\times n}$,记作$\left\{A^{(k)}\right\}$

当 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}=a_{ij}(\forall i,j)$ 时，称矩阵序列$\{A^{(k)}\}$收敛于

矩阵$A=(a_{ij})$。记作

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)}=A \quad \text{，或者} \quad A^{(k)}\to A\left(k\to\infty\right)$$

若数列 $\left(a_{ij}^{(k)}\right)$ 之一发散，称 $\left\{A^{(k)}\right\}$ 发散

性质：

(1) 若 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A_{m\times n}, \lim\limits_{k\to\infty} B^{(k)} = B_{m\times n}$ 则

$$\lim_{k\to\infty}(aA^{(k)} + bB^{(k)}) = aA + bB, \quad \forall a, b$$

(2) 若 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A_{m\times n}, \lim\limits_{k\to\infty} B^{(k)} = B_{n\times l}$ 则

$$\lim_{k\to\infty}(A^{(k)}B^{(k)}) = AB$$

(3) 若 $A^{(k)}$ 与 A 是可逆矩阵，且 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A$ ，则

$$\lim_{k\to\infty}(A^{(k)})^{-1} = A^{-1}$$

定理1：设 $A^{(k)}, A \in C^{m\times n}$，则

（1）$\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = 0 \iff \forall \|\bullet\|, \lim\limits_{k\to\infty} \left\| A^{(k)} \right\| = 0$

（2）$\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A \iff \forall \|\bullet\|, \lim\limits_{k\to\infty} \| A^{(k)} - A \| = 0$

定理1：设 $A^{(k)}, A \in C^{m\times n}$，则

（1）$\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = 0 \Longleftrightarrow \forall \|\bullet\|, \lim\limits_{k\to\infty} \left\|A^{(k)}\right\| = 0$

（2）$\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A \Longleftrightarrow \forall \|\bullet\|, \lim\limits_{k\to\infty} \| A^{(k)} - A \| = 0$

证明：(1)考虑F-矩阵范数

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = 0 \quad (all\ i, j)$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}^{(k)}\right|^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} \left\|A^{(k)}\right\|_F = 0$$

定义：若 $A_{n\times n}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0_{n\times n}$，称$A$为**收敛矩阵**

定义：若 $A_{n\times n}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0_{n\times n}$，称$A$为收敛矩阵

定理2：A为收敛矩阵 $\Longleftrightarrow$ $\rho(A)<1$

定义：若 $A_{n\times n}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0_{n\times n}$，称$A$为收敛矩阵

定理2：A为收敛矩阵 ⟺ $\rho(A)<1$

定理 2.10 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n\times n}$，对任意的正数 ε，存在某种矩阵范数 $\|\cdot\|_M$，使得

$$\|\mathbf{A}\|_M \leqslant \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon \tag{2.3.7}$$

定理2：A为收敛矩阵 $\Longleftrightarrow$ $\rho(A)<1$

定理2：A为收敛矩阵 $\Longleftrightarrow$ $\rho(A)<1$

证明：充分性。已知$\rho(A)<1$，对 $\varepsilon=\frac{1}{2}\left[1-\rho(A)\right]>0$

存在矩阵范数 $\|\bullet\|_M$ ，使得

$$\|A\|_M \le \rho(A)+\varepsilon = \frac{1}{2}\left[1+\rho(A)\right]<1$$

于是有 $\|A^k\|_M \le \|A\|_M^k \to 0$，故由定理1可得 $A^k \to 0$

必要性：已知 $A^k \to 0$ ，设$Ax=\lambda x(x\neq 0)$ ，则有

$$\lambda^k x = A^k x \to 0 \quad \Rightarrow \lambda^k \to 0 \quad \Rightarrow |\lambda|<1$$

故 $\rho(A)<1$

定理3：若矩阵范数 $\|\bullet\|_M$ 使 $\|A\|_M < 1$ ，则 $A^k \to 0$

定理3：若矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ 使 $\|A\|_M < 1$ ，则 $A^k \to 0$

证明： $\rho(A) \le \|A\|_M < 1 \quad \Rightarrow A^k \to 0$

例： $A=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$

例： $A=\begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$

$$\|A\|_1 = 0.9 < 1 \Rightarrow A^k \to 0$$

例： $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{0.1} & \mathbf{0.3}\\ \mathbf{0.7} & \mathbf{0.6}\end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\lambda-1 & -3\\ -7 & \lambda-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \left(\lambda-\dfrac{7+\sqrt{109}}{2}\right)\left(\lambda-\dfrac{7-\sqrt{109}}{2}\right)\end{pmatrix}$$

$$\rho(A)=0.1\cdot\frac{7+\sqrt{109}}{2}<1$$

设 $A=\begin{bmatrix} 0 & c & c \\ c & 0 & c \\ c & c & 0 \end{bmatrix}(c \in \mathrm{R})$，讨论 c 取何值时 A 为收敛矩阵

设 $A=\begin{bmatrix} 0 & c & c \\ c & 0 & c \\ c & c & 0 \end{bmatrix}(c \in \mathrm{R})$，讨论 c 取何值时 A 为收敛矩阵

解 $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2c)(\lambda + c)^2$，$\rho(A) = 2|c|$. A 为收敛矩阵的充要条件是 $\rho(A) < 1$，即 $-\dfrac{1}{2} < c < \dfrac{1}{2}$.

矩阵序列-小节

定理1：设 $A^{(k)}, A \in C^{m\times n}$ ，则

（1）$\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = 0 \iff \forall \|\bullet\|, \lim\limits_{k\to\infty} \left\|A^{(k)}\right\| = 0$

（2）$\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A \iff \forall \|\bullet\|, \lim\limits_{k\to\infty} \| A^{(k)} - A \| = 0$

定义：若 $A_{n\times n}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} A^{k} = 0_{n\times n}$ ，称A为收敛矩阵

定理2：A为收敛矩阵 $\iff \rho(A) < 1$

作业（第五版）

1、定义：3.1、3.2、3.3

2、定理：3.1、3.2、3.3

3、例题：3.1

4、习题3.1：2

作业（第三版）

1、定义：3.1、3.2、3.3

2、定理：3.1、3.2、3.3

3、例题：3.1

4、习题3.1：2

下课，谢谢大家！