

# 矩阵理论与方法

---

10月

# 内容提要 CONTENTS

- 课程信息
- 课程介绍
- 矩阵理论与方法

## 第1章 线性空间与线性变换

### 1.2 线性变换及其矩阵

# 回顾

$$y = Tx, x \in V$$

1、线型空间V: 数域K, 加法, 数乘

2、线性变换T:  $V \rightarrow V$

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(kx) = kTx$$

# 线性变换的运算

一、线性变换的和

二、线性变换的数量乘法

三、线性变换的乘积

四、线性变换的逆

五、线性变换的多项式

# 1. 线性变换的和

设 $T_1, T_2$  为线性空间 $V$ 的两个线性变换, 定义它们的**和**  $T_1 + T_2$  为:  $(T_1 + T_2)(x) = T_1x + T_2x, \forall x \in V$   
则  $T_1 + T_2$  也是 $V$ 的线性变换.

$$\begin{aligned}\text{事实上, } (T_1 + T_2)(x + y) &= T_1(x + y) + T_2(x + y) \\ &= T_1x + T_1y + T_2x + T_2y = (T_1 + T_2)x + (T_1 + T_2)y \\ (T_1 + T_2)(kx) &= T_1(kx) + T_2(kx) = k(T_1x) + k(T_2x) \\ &= k(T_1x + T_2x) = k(T_1 + T_2)x\end{aligned}$$

## 负变换

设  $T$  为线性空间  $V$  的线性变换，定义变换  $-T$  为：

$$(-T)(x) = -T(x), \quad \forall x \in V$$

则  $-T$  也为  $V$  的线性变换，称之为  $T$  的**负变换**.

## 线性变换和的基本性质

(1) 满足交换律:  $T_1 + T_2 = T_2 + T_1$

(2) 满足结合律:  $(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$

(3)  $T_0 + T_1 = T_1$  ,  $T_0$  为零变换.

(4)  $(-T) + T = T_0$

## 1.2 线性变换及其矩阵

例：复数  $\alpha + i\beta = (1 + i2)(x + iy) = T_1(x + iy)$

$$\alpha + i\beta = (3 + i4)(x + iy) = T_2(x + iy)$$

求  $T_1 + T_2$ ,  $T_1 - T_2$ ,  $T_0$ ,  $-T_1$



## 1.2 线性变换及其矩阵

例： 在矩阵空间  $R^{2 \times 2}$  中， 给定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_1(X) = AX, T_2(X) = XB, (\forall X \in R^{2 \times 2})$$

证明：  $T(X) = (T_1 + T_2)(X)$  是线型变换

# 线性变换的数量乘法

设  $T$  为线性空间  $V$  的线性变换,  $k \in K$ , 定义  $k$  与  $T$  的**数量乘积**  $kT$  为:

$$(kT)(x) = kT(x), \quad \forall x \in V$$

则  $kT$  也是  $V$  的线性变换.

## 线性变换数量乘法的基本性质

$$(1) \quad k(T_1 + T_2) = kT_1 + kT_2$$

$$(2) \quad (k + l)T = kT + lT$$

$$(3) \quad (kl)T = k(lT)$$

$$(4) \quad 1T = T$$

## 1.2 线性变换及其矩阵

例：复数  $\alpha + i\beta = (1 + i2)(x + iy) = T_1(x + iy)$

$$\alpha + i\beta = (3 + i4)(x + iy) = T_2(x + iy)$$

证明：  $T = 3T_1$  是线型变换

## 1.2 线性变换及其矩阵

例： 在矩阵空间  $R^{2 \times 2}$  中， 给定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_1(X) = AX, T_2(X) = XB, (\forall X \in R^{2 \times 2})$$

证明：  $T(X) = (3T_2)(X)$  是线型变换

# 线性变换的乘积

设  $T_1, T_2$  为线性空间  $V$  的两个线性变换, 定义它们的**乘积**  $T_1T_2$  为:  $(T_1T_2)(x) = T_1(T_2x), \quad \forall x \in V$   
则  $T_1T_2$  也是  $V$  的线性变换.

$$\begin{aligned} \text{事实上, } (T_1T_2)(x+y) &= T_1(T_2(x+y)) = T_1(T_2(x) + T_2(y)) \\ &= T_1(T_2x) + T_1(T_2y) = (T_1T_2)x + (T_1T_2)y \\ (T_1T_2)(kx) &= T_1(T_2(kx)) = T_1(k(T_2x)) \\ &= k(T_1(T_2x)) = k(T_1T_2)x \end{aligned}$$

## 线性变换乘积的基本性质

(1) 满足结合律:  $(T_1 T_2) T_3 = T_1 (T_2 T_3)$

(2)  $T_e T = T T_e = T$  ,  $T_e$  为单位变换

(3) 交换律一般不成立, 即一般地,

$$T_1 T_2 \neq T_2 T_1$$

(4) 乘法对加法满足左、右分配律:

$$T_1 (T_2 + T_3) = T_1 T_2 + T_1 T_3$$

$$(T_1 + T_2) T_3 = T_1 T_3 + T_2 T_3$$

## 1.2 线性变换及其矩阵

例：复数  $\alpha + i\beta = (1 + i2)(x + iy) = T_1(x + iy)$

$$\alpha + i\beta = (3 + i4)(x + iy) = T_2(x + iy)$$

证明：  $T = T_2T_1$  是线型变换



## 1.2 线性变换及其矩阵

例： 在矩阵空间  $R^{2 \times 2}$  中， 给定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_1(X) = AX, T_2(X) = BX, (\forall X \in R^{2 \times 2})$$

证明：  $T(X) = (T_2 T_1)(X)$  是线型变换

# 线性变换的逆

设  $T$  为线性空间  $V$  的线性变换，若有  $V$  的变换  $S$  使

$$ST = TS = T_e$$

则称  $T$  为可逆变换，称  $S$  为  $T$  的逆变换，记作  $T^{-1}$ .

## 1.2 线性变换及其矩阵

例：复数  $\alpha + i\beta = (1 + i2)(x + iy) = T_1(x + iy)$

$$\alpha + i\beta = (3 + i4)(x + iy) = T_2(x + iy)$$

求：  $T = T_1^{-1}$

## 1.2 线性变换及其矩阵

例： 在矩阵空间  $R^{2 \times 2}$  中， 给定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_1(X) = AX, T_2(X) = XB, (\forall X \in R^{2 \times 2})$$

$$\text{求： } T(X) = (T_1^{-1})(X) \quad T(X) = (T_2^{-1})(X)$$

# 五、线性变换的多项式

## 1. 线性变换的幂

设  $T$  为线性空间  $V$  的线性变换， $n$  为自然数，定义

$$T^n = \underbrace{T \cdots T}_n,$$

称之为  $T$  的  $n$  次幂.

当  $n = 0$  时，规定  $T^0 = T_e$  (单位变换) .

## 2. 线性变换的多项式

设  $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \in P[x]$ ,

$T$  为  $V$  的一个线性变换, 则

$$f(T) = a_m T^m + \cdots + a_1 T + a_0 T_e$$

也是  $V$  的一个线性变换, 称  $f(T)$  为线性变换  $T$  的  
多项式.

## 1.2 线性变换及其矩阵

例： 在矩阵空间  $R^{2 \times 2}$  中， 给定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1(X) = AX, \quad (\forall X \in R^{2 \times 2})$$

求：  $T(X) = f(T_1)(X)$

## 1.2 线性变换及其矩阵

例：在矩阵空间  $R^{2 \times 2}$  中，给定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1(X) = AX, \quad (\forall X \in R^{2 \times 2})$$

求：  $T(X) = f(T_1)(X)$

解1：

$$A = P^{-1} \Lambda P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$



## 1.2 线性变换及其矩阵

例：在矩阵空间  $R^{2 \times 2}$  中，给定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1(X) = AX, \quad (\forall X \in R^{2 \times 2})$$

求：  $T(X) = f(T_1)(X)$

解1：

$$A = P^{-1} \Lambda P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} f \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

## 1.2 线性变换及其矩阵

例：在矩阵空间  $R^{2 \times 2}$  中，给定矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1(X) = AX, \quad (\forall X \in R^{2 \times 2})$$

求：  $T(X) = f(T_1)(X)$

解2：找到  $R^{2 \times 2}$  的一组基

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (X_1, X_2, X_3, X_4)\alpha \quad \alpha = \frac{1}{2}(x_1 + x_3, x_2 + x_4, -x_1 + x_3, -x_2 + x_4)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1(X) = AX, \quad \text{求: } T(X) = f(T_1)(X)$$

解2: 找到 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的一组基

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1(X_1, X_2, X_3, X_4) = (X_1, X_2, X_3, X_4) \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = (X_1, X_2, X_3, X_4)\alpha$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(x_1 + x_3, x_2 + x_4, -x_1 + x_3, -x_2 + x_4)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1(X) = AX, \quad \text{求: } T(X) = f(T_1)(X)$$

解2: 找到 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的一组基

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1(X_1, X_2, X_3, X_4) = (X_1, X_2, X_3, X_4) \text{diag}(1, 1, -1, -1)$$

$$X = (X_1, X_2, X_3, X_4)\alpha \quad \alpha = \frac{1}{2}(x_1 + x_3, x_2 + x_4, -x_1 + x_3, -x_2 + x_4)^T$$

$$T_1(X) = T_1(X_1, X_2, X_3, X_4)\alpha = (X_1, X_2, X_3, X_4) \text{diag}(1, 1, -1, -1)\alpha$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1(X) = AX, \quad \text{求: } T(X) = f(T_1)(X)$$

解2: 找到 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的一组基

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_1(X_1, X_2, X_3, X_4) = (X_1, X_2, X_3, X_4) \text{diag}(1, 1, -1, -1)$$

$$X = (X_1, X_2, X_3, X_4)\alpha \quad \alpha = \frac{1}{2}(x_1 + x_3, x_2 + x_4, -x_1 + x_3, -x_2 + x_4)^T$$

$$T_1(X) = T_1(X_1, X_2, X_3, X_4)\alpha = (X_1, X_2, X_3, X_4) \text{diag}(1, 1, -1, -1)\alpha$$

$$T_1^k(X) = T_1^k(X_1, X_2, X_3, X_4)\alpha = (X_1, X_2, X_3, X_4) \text{diag}(1, 1, (-1)^k, (-1)^k)\alpha$$

$$f(T_1)(X) = f(T_1)(X_1, X_2, X_3, X_4)\alpha = (X_1, X_2, X_3, X_4) f(\text{diag}(1, 1, -1, -1))\alpha$$

# 线性变换小节

1、线性变换 $T$        $Y = T(X) \in V$

2、 $f(T)$  也是线性变换       $Y = f(T)(X)$

3、求       $Y = T(X)$

4、求       $Y = f(T)(X)$

## 1.2 作业(第三版或第五版)

1、例题：本ppt：P23例题

2、习题1.2：3、5

下课，谢谢大家！