第六章

广义逆矩阵

§6.1 广义逆矩阵定义及其性质

问题：$Ax = b$

A不可逆，求$x = ?$

§6.1 广义逆矩阵定义及其性质

- 定义：设矩阵$A\in C^{m\times n}$，若矩阵$X\in C^{m\times n}$满足如下四个方程
  1. $AXA=A$
  2. $XAX=X$
  3. $(AX)^H=AX$
  4. $(XA)^H=XA$

  中的一个或几个，则称为矩阵A的广义逆；若四个方程全部满足，则称为矩阵A的Moore-Penrose逆，记为A^+。

- 定理一：矩阵$A\in C^{m\times n}$的广义逆A^+存在且唯一。

证明：先证存在性。设矩阵A的满秩分解为 $A=BC$，定义

$$A^{+}=C^{H}(CC^{H})^{-1}(B^{H}B)^{-1}B^{H}$$

则A^{+}满足定义中的四个方程。下面证唯一性。

设矩阵X与Y都满足四个方程，则

$$X=XAX=X(AX)^{H}=XX^{H}A^{H}=XX^{H}A^{H}Y^{H}A^{H}=X(AX)^{H}(AY)^{H}$$
$$=X(AXA)Y=XAY$$

$$Y=YAY=(YA)^{H}Y=A^{H}Y^{H}Y=A^{H}X^{H}A^{H}Y^{H}Y=(XA)^{H}(YA)^{H}Y$$
$$=XAYAY=XAY$$

所以X=Y。(证完)

若矩阵A是满秩方阵，则$A^{+}=A^{-1}$.

一般研究满足定义中四个方程中部分或全部构成的广义逆，如满足{1}，{1,2}，{1,3}，{1,4}，{1,2,3,4}，分别记为$A^{\{1\}}$，$A^{\{1,2\}}$，$A^{\{1,3\}}$，$A^{\{1,4\}}$，$A^{\{1,2,3,4\}}$，自然$A^{+}= A^{\{1,2,3,4\}}$。A^{+}是最常用的广义逆。一般记：$A^{-}=A^{\{1\}}$。

定理二：设矩阵A给定，则A^+满足如下性质

1. $\operatorname{rank} A^+=\operatorname{rank} A$
2. $(A^+)^+=A$
3. $(A^H)^+=(A^+)^H$, $(A^T)^+=(A^+)^T$
4. $(A^HA)^+=A^+(A^H)^+$, $(AA^H)^+=(A^H)^+A^+$
5. $A^+=(A^HA)^+A^H=A^H(AA^H)^+$
6. $R(A^+)=R(A^H)$, $N(A^+)=N(A^H)$

推论：若$A\in C_n^{m\times n}$，则$A^+=(A^HA)^{-1}A^H$

若$A\in C_m^{m\times n}$，则$A^+=A^H(AA^H)^{-1}$

矩阵A广义逆A^+的等价定义: $AA^+=P_{R(A)}$, $A^+A=P_{R(A^+)}$。

即 $AA^+=P_{R(A)}$, A^+A分别为$R(A)$和$R(A^+)$上的正交矩阵。更有：

$AA^{\{1\}}$、$A^{\{1\}}A$、$AA^{\{2\}}$、$A^{\{2\}}A$ 均为幂等矩阵

§6.3 广义逆矩阵A^+的计算方法

- 满秩分解：设$A\in C_r^{m\times n}$，$A=BC$为满秩分解，即$B\in C_r^{m\times r}$，$C\in C_r^{r\times n}$，则

$$A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$$

- 奇异值分解：设$A\in C_r^{m\times n}$，其奇异值分解 $A=UDV^H$

- 有$A=U_r\Delta V_r^H$， $\Delta=\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$，则

$$A^+=V_r\Delta^{-1}U_r^H$$

例1：设

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

求A⁺。

解：（方法一）利用满秩分解公式可得

$$A=BC=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

从而 A 的伪逆矩阵是

$$A^{+}=C^{H}(CC^{H})^{-1}(B^{H}B)^{-1}B^{H}$$

$$=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 0\\1 & -2\end{bmatrix}$$

（方法二）先求A的奇异值分解：

$$AA^H=\begin{bmatrix}2 & -4\\-4 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

令： $$V_1=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\2 & 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$A^{+}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 0\\1 & -2\end{bmatrix}$$

例2：设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

求A⁺。

解：（方法一）由满秩分解公式可得

$$A=BC=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

于是其伪逆矩阵为

$$\begin{aligned}A^{+}&=C^{H}(CC^{H})^{-1}(B^{H}B)^{-1}B^{H}\\&=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

（方法二）先求A的奇异值分解：

$$AA^H=\begin{bmatrix}2&4\\4&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}$$

令：

$$V_1=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$$

$$A^+=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}$$

问题：$Ax = b$，求$x = ?$

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{+}b$$

$$Ax = b \Rightarrow x = A^{+}b$$

注：若$AA^{+}b = b$则$x = A^{+}b$是方程的极小范数解：

$$A^{+}b = \min_{Ax=b}\|x\|$$

若$AA^{+}b \neq b$则$x = A^{+}b$是方程的极小范数最小二乘解

$$A^{+}b = \min_{\min\|Ax-b\|}\|x\|$$

例3：设

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}\qquad b=\begin{pmatrix}-3\\ 6\end{pmatrix}$$

求$Ax=b$的极小范数解

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 6\end{pmatrix}$$

例3：设

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix}-3\\ 6\end{pmatrix}$$

求$Ax=b$的极小范数解

$$A^{+}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix} \qquad x=A^{+}b$$

例3：设

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix}-3\\ 6\end{pmatrix}$$

求$Ax=b$的极小范数解

$$A^{+}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix} \qquad x=A^{+}b=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ 0\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ 0\\ -\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 6\end{pmatrix}$$

作业（第五版）

1、定义：6.1、6.2

2、公式：6.1.3、6.1.4、6.4.1-6.4.4

2、定理：6.1、6.2、6.33

3、例题：6.10

作业（第三版）

1、定义：6.4、6.5

2、公式：6.4.1-6.4.4

2、定理：6.3、6.15、6.33

3、例题：6.5、6.10

下课，谢谢大家！