北京邮电大学 2019-2020 学年第一学期

《高等数学 6 学时》（上）期末考试试题（B）

考试注意事项：学生必须将答题内容写在答题纸上,写在试题纸上一律无效

一. 填空题（本大题共 10 小题，每空 3 分，共 30 分）

1\. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\arctan\dfrac{1}{x}=$ ______.

2\. 已知当 $x\to 0$ 时 $(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{2}}-1$ 与 e^x-1-x 是等价无穷小，则 $\alpha=$ ___.

3\. 设 $f(x)=x^3e^{x^2}$，则 $f^{(2020)}(0)=$ ______.

4\. 已知 $f(0)=0,\ f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2f(x))^{\frac{1}{\sin 3x}}=$ _______.

5\. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}+x\int_0^1 f(x)dx$，

则 $f(x)=$ ___.

6\. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}+\dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}}\right)=$ __________.

7\. 设 $\int\dfrac{f'(\ln x)}{x}dx=x^2+C$, 则 $f(x)=$ ________.

8\. 计算 $I=\int_{-1}^{1}[x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\sqrt{1-x^2}]dx=$ __________.

9\. 反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+4x+8}=$ ________________.

10\. 微分方程 $yy''-(y')^2=0$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的特解为_______.

二（10 分）. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，

若有间断点判别类型.

三（10 分）. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数, 且

$f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$, 若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶

的无穷小, 试求 a,b 的值.

四（10 分）根据函数 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ 的图形, 完成下表.

单调增区间	
单调减区间	
极值点	
凹区间$\cup$	
凸区间$\cap$	
拐点	
渐近线	

五(12 分). 计算积分（1）$\displaystyle\int\frac{3x^3+x}{x^4+1}\mathrm{d}x$ （2）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$.

六(10 分) 已知摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$

（1） 求在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程；

（2） 求摆线一拱 $(0\le t\le 2\pi)$ 的长度.

七(10 分). 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$ 二阶可导,求 $f(x)$.

八(8 分). 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且

$$3\int_{\frac{2a}{3}}^{a}f(x)\mathrm{d}x=f(0)\cdot a$$，求证：$\exists\xi\in(0,a)$，使 $f'(\xi)=0$.