北京邮电大学

第2讲 量子力学基础知识

高　飞
网络空间安全学院

提纲

- 量子态
- 量子操作
- 量子测量
- 纠缠态及其应用

状态空间和量子态

- 任一孤立量子物理系统的状态空间是 Hilbert 空间，即定义了内积的复向量空间。

- 复向量空间 L 是一个向量集合 $L=\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_n\}$，满足：
  - (1) 任取 $a_i,a_j\in L$，都有 $a_i+a_j\in L$
  - (2) 任取复数 $c\in C$，$a_i\in L$，都有 $c\cdot a_i\in L$

- 复向量空间 L 上的内积定义为一种映射：对于任意的一对向量 $a_i,a_j\in L$，都有一个复数 $c=(a_i,a_j)$ 与之对应，称为 a_i 和 a_j 的内积，它具有如下性质：

$$\left.\begin{array}{l}(a_i,a_i)\geq 0\\(a_i,a_j)=(a_j,a_i)^*\\(a_l,c_1a_i+c_2a_j)=c_1(a_l,a_i)+c_2(a_l,a_j)\end{array}\right\}\ \boxed{\text{Hilbert空间}}$$

- 量子力学系统所处的状态称为量子态，由 Hilbert 空间中的列单位向量描述
  - 该向量通常称为态向量（或态矢），常用$|\cdot\rangle$表示，也称为右矢。例如$|\varphi\rangle$，$|0\rangle$等都表示量子态
  - $\langle\varphi|$表示$|\varphi\rangle$的对偶向量（转置+复共轭），由 Hilbert 空间中的行单位向量描述

- 量子态满足态叠加原理
  - 若量子力学系统可能处在$|\varphi\rangle$和$|\psi\rangle$描述的态中，则系统也可能处于态$|\Phi\rangle=c_1|\varphi\rangle+c_2|\psi\rangle$，其中$c_1$，$c_2$是两复数，且一般满足归一化条件（比如若$|\varphi\rangle$和$|\psi\rangle$正交，则满足$|c_1|^2+|c_2|^2=1$。

➢ 若量子系统由系统 1 和系统 2 复合而成，且系统 1 处于态$\left|\varphi_1\right\rangle$，系统 2 处于态$\left|\varphi_2\right\rangle$，则复合系统的状态为两子系统状态的张量积$\left|\varphi_1\right\rangle\otimes\left|\varphi_2\right\rangle$，常记为$\left|\varphi_1\right\rangle\left|\varphi_2\right\rangle$或$\left|\varphi_1\varphi_2\right\rangle$。如

$$|0\rangle\otimes|1\rangle\equiv|01\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

完备正交基

- 一个 n 维 Hilbert 空间L的一组基是其上的一组线性无关的向量$\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$，使得对于任意的$|u\rangle\in L$，$|u\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_i|v_i\rangle$，其中$a_i$是复数。
- 进一步，若其中的向量两两相互正交（内积为 0），且任一向量的模（即$\sqrt{\langle v_i|v_i\rangle}$）均为 1，则这样的一组基称为完备正交基（或标准正交基）。采用 Gram-Schmidt 正交归一化过程可以由空间的任意一组基构造一组完备正交基。
- 例如C^2的一组基是：$|v_1\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，　　$|v_2\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

  因为C^2中任意向量$|v\rangle=(a_1\quad a_2)^{\mathrm{T}}=a_1|v_1\rangle+a_2|v_2\rangle$。
- 又因为$|v_1\rangle$和$|v_2\rangle$相互正交，且每一个的模都为 1，所以$\{|v_1\rangle,|v_2\rangle\}$是$\mathrm{C}^2$的一组完备正交基。通常记$|v_1\rangle$为$|0\rangle$，$|v_2\rangle$为$|1\rangle$。

- 此外，C^2的另一组常见完备正交基是：

$$|v_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad |v_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

通常记$|v_3\rangle$为$|+\rangle$，$|v_4\rangle$为$|-\rangle$

因为C^2中任意向量可表示为：

$$|v\rangle = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(a_1+a_2)|v_3\rangle + (a_1-a_2)|v_4\rangle]$$

且$|v_3\rangle$和$|v_4\rangle$相互正交、模为1。

- 容易验证这两组基满足如下关系：

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle \pm |1\rangle] \qquad |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle + |-\rangle] \qquad |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+\rangle - |-\rangle]$$

- 可以看出一个Hilbert空间可以由其一组完备正交基完全确定，基中的向量称为基态，基中所含向量的个数称为空间的维数。

内积

$$\langle 1|0\rangle = (0\ 1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0 \qquad \langle -|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ -1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$\langle 0|0\rangle = (1\ 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1 \qquad \langle +|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1$$

同一基下，基态与自己的内积为1，不同基态内积为0

内积计算：向量直接求内积 或 展开在同一基下求内积

$$\langle 0|+\rangle = (1\ 0)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \langle 0|+\rangle = \langle 0|\frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle + |1\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle +|+y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+i)$$

$$\langle +|+y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\langle 0| + \langle 1|]\frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle + i|1\rangle] = \frac{1}{2}[\langle 0|0\rangle + i\langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle + i\langle 1|1\rangle] = \frac{1}{2}(1+i)$$

验算：$\langle +y|+\rangle = \frac{1}{2}(1-i)$

$$|+y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle),\quad |-y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$$

量子比特

- 量子比特（qubit），又称量子位，是一个双态量子系统，其状态空间为二维 Hilbert 空间

$$|\psi\rangle = a_1|0\rangle + a_2|1\rangle$$

其中a_1和a_2是满足$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$的复数，原则上可以编码无穷多的信息

在不同基下，同一量子态可以有多种不同表示：

$$|\psi\rangle = a_1|0\rangle + a_2|1\rangle \quad = \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

$$= (a_1\cos\theta + a_2\sin\theta)\,|B_1\rangle + (a_1\sin\theta - a_2\cos\theta)|B_2\rangle$$

$$|B_1\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle, \qquad |B_2\rangle = \sin\theta|0\rangle - \cos\theta|1\rangle$$

$$|0\rangle = \cos\theta|B_1\rangle + \sin\theta|B_2\rangle, \qquad |1\rangle = \sin\theta|B_1\rangle - \cos\theta|B_2\rangle$$

在不同基表示下，系数可连续变化（问题的解可能就是某组基下一个项的系数！）

➢ 量子比特的Bloch球表示

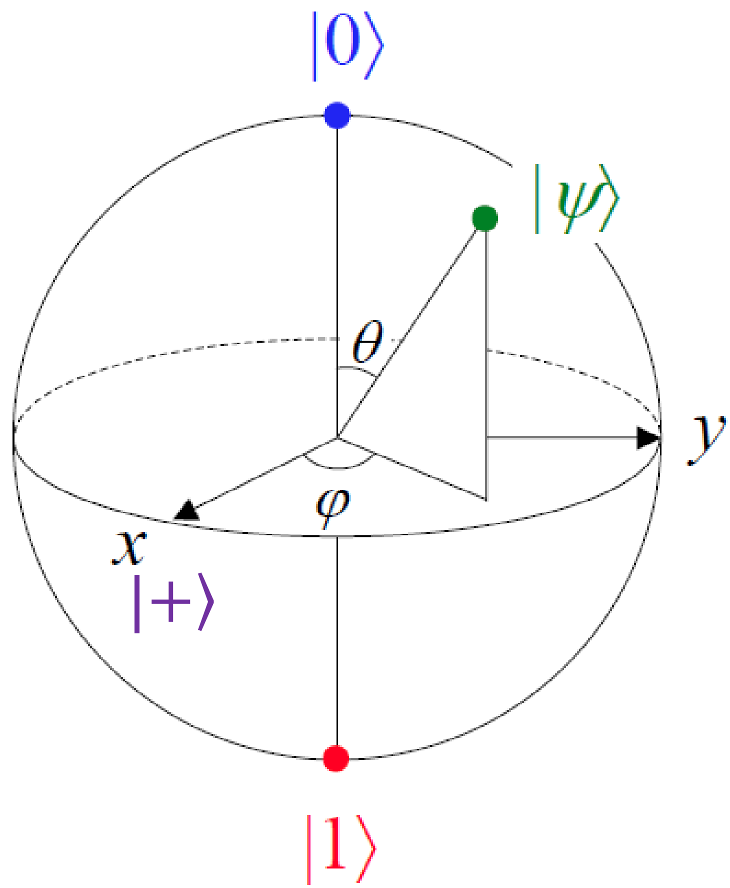
$$|\psi\rangle = a_1|0\rangle + a_2|1\rangle$$

$$|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$$

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma}\left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right)$$

全局相位
无观测效果

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$



量子比特

- 两个或多个量子比特系统是单个量子比特系统的张量积，例如两量子比特可处于态

$$|0\rangle \otimes |1\rangle \equiv |01\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 两量子比特系统是一个4维Hilbert空间，$\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$是构成该空间的一组完备正交基。一个两量子比特态可以处在任意一个基态中，因而也可以处在它们的叠加态中。
- n量子比特系统是一个2^n维Hilbert空间，系统所处的状态是该空间中的一个向量，可以是2^n个基态的叠加态

- n量子比特系统的完备正交基可以由$\{|0\rangle, |1\rangle\}$通过张量积运算得到

三量子比特系统：$\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\}$

为了简单，也常写为：$\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle, |5\rangle, |6\rangle, |7\rangle\}$

四量子比特系统：$\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, \dots, |14\rangle, |15\rangle\}$

- 任意n量子比特系统的可能状态

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i\, |i\rangle$$

- 量子系统的存储能力正是以这种方式呈指数增长

小结

- 孤立量子系统的状态由Hilbert（定义了内积的复向量）空间中的列单位向量描述

$$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

- 量子态满足态叠加原理：可处于任意态的叠加态
- 完备正交基：与向量空间类似，每个空间有无数多组基

1qubit： $\{|0\rangle, |1\rangle\}$，$\{|+\rangle, |-\rangle\}$， $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle \pm |1\rangle]$

多qubit计算基： $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$， $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle, |5\rangle, |6\rangle, |7\rangle\}$

- 量子态在不同基下有不同的表示（系数可连续变化）

$$|\psi\rangle = (a_1\cos\theta + a_2\sin\theta)\,|B_1\rangle + (a_1\sin\theta - a_2\cos\theta)|B_2\rangle$$

- 多个量子系统的整体状态是各子系统状态的张量积

作业

1. 写出$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$的列向量形式。

2. 令$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$，$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$，计算内积$\langle\varphi|\varphi\rangle$和$\langle\varphi|\phi\rangle$。

3. 已知$\left\{|y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle), |y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)\right\}$构成一组标准正交基，常称作Y基。分别写出量子态$|0\rangle$和$|+\rangle$在Y基下表示的形式。

4. 将量子态$|\vartheta\rangle = \frac{\sqrt{3}|+\rangle + |-\rangle}{2}$写成在$\{|B_1\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle, |B_2\rangle = \sin\theta|0\rangle - \cos\theta|1\rangle\}$基下表示的形式。

提纲

- 量子态
- 量子操作
- 量子测量
- 纠缠态及其应用

量子操作

- 所有量子操作对应于一个酉矩阵（幺正矩阵），常用U表示
  - 若$F^{\dagger}=F^{-1}$，则称F为酉矩阵，其中$F^{\dagger}=(F^{T})^{*}$

任意酉矩阵都是一个合法量子操作!

- 操作后的末态等于对应矩阵与初态向量的乘积：$|\psi_1\rangle = U|\psi_0\rangle$
- 酉矩阵是线性的，因此量子操作具有并行性!

$$U(|\psi_0\rangle = c_0|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle)$$
$$= c_0U|00\rangle + c_1U|01\rangle + c_2U|10\rangle + c_3U|11\rangle$$

$$U\left[|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i\,|i\rangle\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i\,U|i\rangle$$

- 对量子比特最基本的操作称为逻辑门
  - 按照其作用的量子比特个数可分为一位门，二位门，三位门等
  - 逻辑门的操作按照它对Hilbert空间基矢的作用来定义

常见的一位门（单量子比特门）

Pauli门{X,Y,Z}

- 三个 Paul i 门（算子/矩阵）定义为

$$X=|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad X\left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)=\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle$$

作用前后态的变化：翻转|0⟩和|1⟩，用两种形式计算均可

$$\begin{aligned}X|0\rangle &= (|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|)|0\rangle\\ &=|0\rangle\underbrace{\langle 1|0\rangle}_{0}+|1\rangle\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1}\\ &=|1\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X|1\rangle &= (|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|)|1\rangle\\ &=|0\rangle\underbrace{\langle 1|1\rangle}_{1}+|1\rangle\underbrace{\langle 0|1\rangle}_{0}\\ &=|0\rangle\end{aligned}$$

$$X|0\rangle=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=|1\rangle$$

$$X|1\rangle=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=|0\rangle$$

Pauli门{X,Y,Z}

- 三个 Paul i 门（算子/矩阵）定义为

$$X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad X\left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right) = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$$

$$Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad Z\left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right) = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

$$Y = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad Y\left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right) = i\alpha|1\rangle - i\beta|0\rangle$$

$$Y = iXZ \qquad XYZ = i$$

$$X^2 = Y^2 = Z^2 = I$$

H, S, T门

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}[(|0\rangle+|1\rangle)\langle 0|+(|0\rangle-|1\rangle)\langle 1|]$$

$$H|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle) \qquad H|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)$$

$$H=(X+Z)/\sqrt{2} \qquad H^2=I$$

$$HXH=Z, HYH=-Y, HZH=X$$

$$S=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{bmatrix}, \quad T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{i\pi/4}\end{bmatrix}$$

$$S=T^2 \qquad S^2=Z$$

旋转门

$$X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Y \equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad Z \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_x(\theta) \equiv e^{-i\theta X/2},\ R_y(\theta) \equiv e^{-i\theta Y/2},\ R_z(\theta) \equiv e^{-i\theta Z/2}$$

矩阵函数的一般化定义：对可对角化的矩阵A（如酉矩阵、厄米矩阵），设

$$A = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}P^{-1}，\text{则有}\ f(A) = P\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix}P^{-1}$$

这里也可以用指数函数的泰勒展开形式来定义

$$e^A \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

旋转门

$$X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Y \equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad Z \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_x(\theta) \equiv e^{-i\theta X/2}, \ R_y(\theta) \equiv e^{-i\theta Y/2}, \ R_z(\theta) \equiv e^{-i\theta Z/2}$$

矩阵函数的一般化定义：对可对角化的矩阵A（如酉矩阵、厄米矩阵），设

$$A = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}P^{-1}，则有\ f(A) = P\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix}P^{-1}$$

特殊情况

$$A^2 = I \quad \Rightarrow \quad \exp(iAx) = \cos x \cdot I + i \sin x \cdot A$$

$$X^2 = Y^2 = Z^2 = I$$

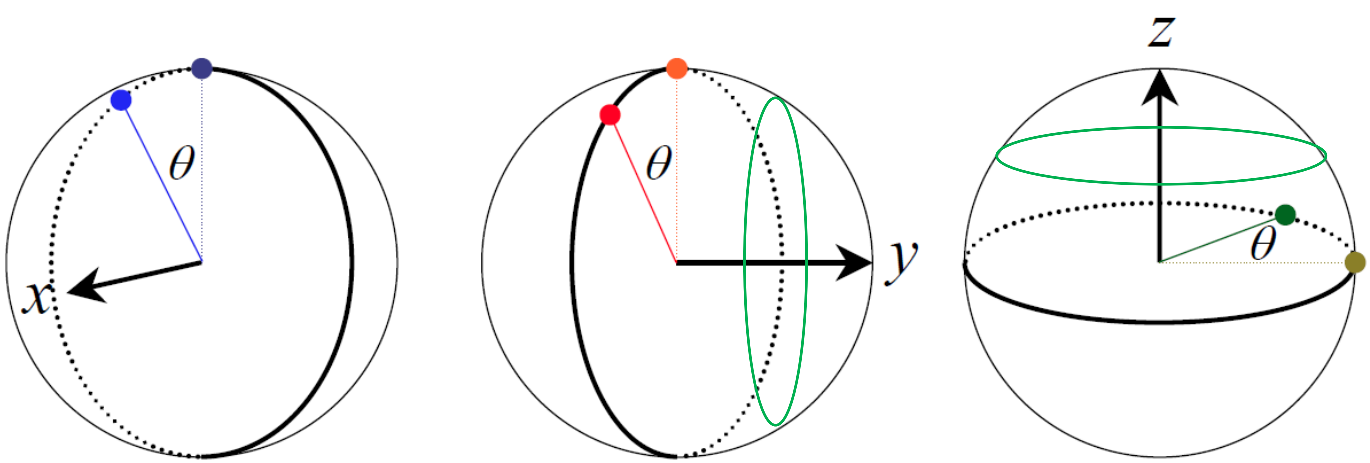
北京邮电大学 Beijing University of Posts and Telecommunications

易得

$$R_x(\theta) \equiv e^{-i\theta X/2} = \cos\frac{\theta}{2} I - i\sin\frac{\theta}{2} X = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) \equiv e^{-i\theta Y/2} = \cos\frac{\theta}{2} I - i\sin\frac{\theta}{2} Y = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) \equiv e^{-i\theta Z/2} = \cos\frac{\theta}{2} I - i\sin\frac{\theta}{2} Z = \begin{bmatrix} \exp(-i\theta/2) & 0 \\ 0 & \exp(i\theta/2) \end{bmatrix}$$

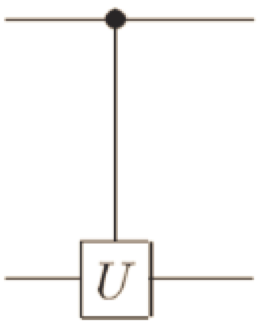


旋转门$R_{\mathrm{x}}(\theta)$作用在量子态$|\psi\rangle$上，在Bloch球上表现为$|\psi\rangle$所表示的向量绕x轴顺时针旋转θ角；R_{y}和R_{z}分别表示绕y轴和z轴旋转

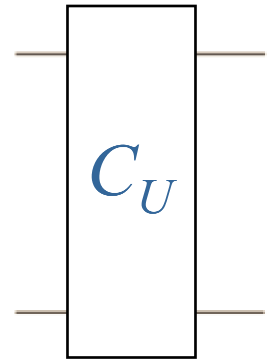
注：图中主要以最大圆上的态为例，实际上任意态都可以绕三个轴旋转（如绿圈）

常见的多位门（多量子比特门）

常见二位门：控制U



注：只是一种表示方法，不代表把上一qubit转到下面跟下一qubit做某个操作。本质上是两粒子操作，如右图



- 常见的两位门：控制U门

$$U_C = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U$$

- I和U均为一位门，I是恒等操作
- 第一个量子比特称为控制位，第二个称为目标位
- 目标量子位作用I或U，取决于控制位处于$|0\rangle$还是$|1\rangle$：控制位是$|0\rangle$则目标位不变；反之控制位是$|1\rangle$则目标位执行U操作

观察作用在态上的效果：

$$U_C = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U$$

I 和 U 均为一位门，
I 是恒等操作

线性：分别求作用在四个基态的结果即可

$$U_C(|\psi_0\rangle = c_0|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle)$$

$$= c_0 U_C|00\rangle + c_1 U_C|01\rangle + c_2 U_C|10\rangle + c_3 U_C|11\rangle$$

$$U_C|01\rangle = (|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U)|0\rangle \otimes |1\rangle$$

$$= |0\rangle\langle 0| \otimes I|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle\langle 1| \otimes U|0\rangle \otimes |1\rangle$$

线性：等于两项分别作用之和

$$= |0\rangle\langle 0|0\rangle \otimes I|1\rangle + |1\rangle\langle 1|0\rangle \otimes U|1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle$$

两体分别作用：U_C操作前一部分（$\otimes$之前）作用在态的前一部分（$\otimes$之前，第一qubit），后一部分作用在态的后一部分

同理 $U_C|10\rangle = |0\rangle\langle 0|1\rangle \otimes I|0\rangle + |1\rangle\langle 1|1\rangle \otimes U|0\rangle = |1\rangle \otimes U|0\rangle$

观察作用在态上的效果：

I 和 U 均为一位门，
I 是恒等操作

$$U_C = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U$$

线性：分别求作用在四个基态的结果即可

$$U_C(|\psi_0\rangle = c_0|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle)$$

$$= c_0 U_C|00\rangle + c_1 U_C|01\rangle + c_2 U_C|10\rangle + c_3 U_C|11\rangle$$

因此：$U_C|00\rangle = |00\rangle$; $U_C|01\rangle = |01\rangle$;

$U_C|10\rangle = |1\rangle \otimes U|0\rangle$; $U_C|11\rangle = |1\rangle \otimes U|1\rangle$

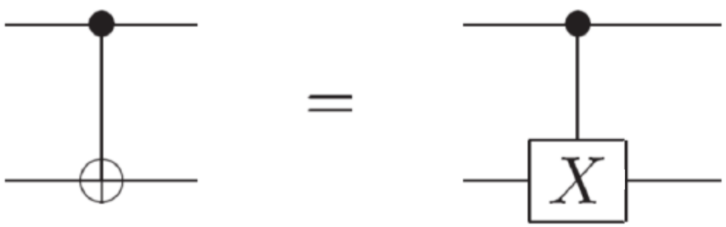
最终效果：目标量子位(第一qb)作用I或U，取决于控制位(第二qb)是$|0\rangle$还是$|1\rangle$

$$U_C(c_0|00\rangle + c_1|01\rangle + c_2|10\rangle + c_3|11\rangle)$$

$$= c_0|0\rangle \otimes |0\rangle + c_1|0\rangle \otimes |1\rangle + c_2|1\rangle \otimes U|0\rangle + c_3|1\rangle \otimes U|1\rangle$$

最常见的控制U门：CNOT

CNOT线路表示：



CNOT作用在量子态上：

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle \quad , \quad |01\rangle \rightarrow |01\rangle$$

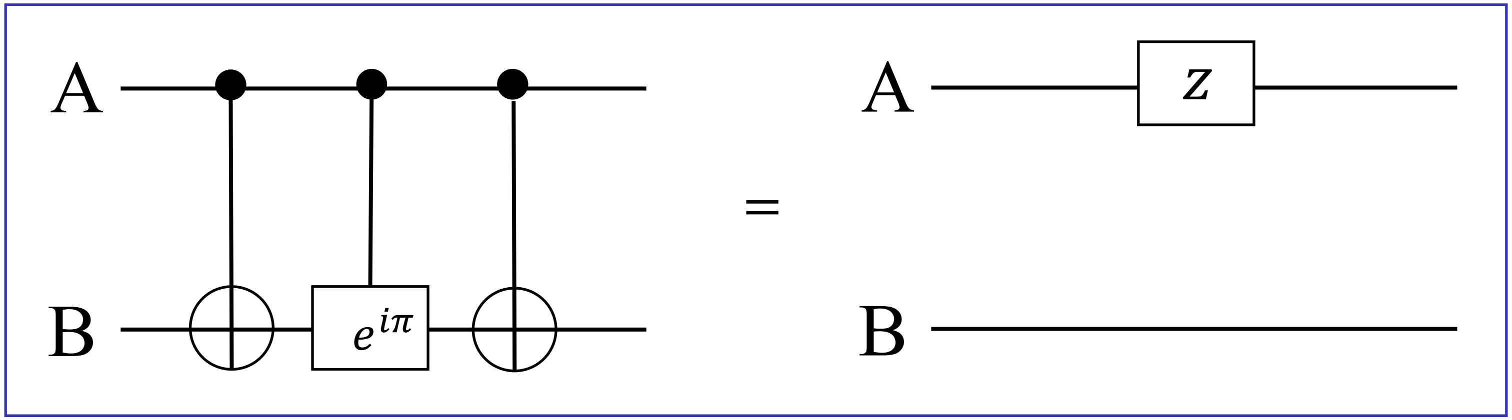
$$|10\rangle \rightarrow |11\rangle \quad , \quad |11\rangle \rightarrow |10\rangle$$

CNOT的矩阵表示：

$$U_{\mathrm{CNOT}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

并非“控制位不变”

➢ 对控制U门，不要简单认为“控制位状态不变”



$e^{i\pi}$门: $\begin{bmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$(\alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle)_A(\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle)_B$$

$$\xrightarrow{Cnot} \alpha_1|0\rangle(\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle) + \beta_1|1\rangle(\alpha_2|1\rangle + \beta_2|0\rangle)$$

$$\xrightarrow{Ce^{i\pi}} \alpha_1|0\rangle(\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle) - \beta_1|1\rangle(\alpha_2|1\rangle + \beta_2|0\rangle)$$

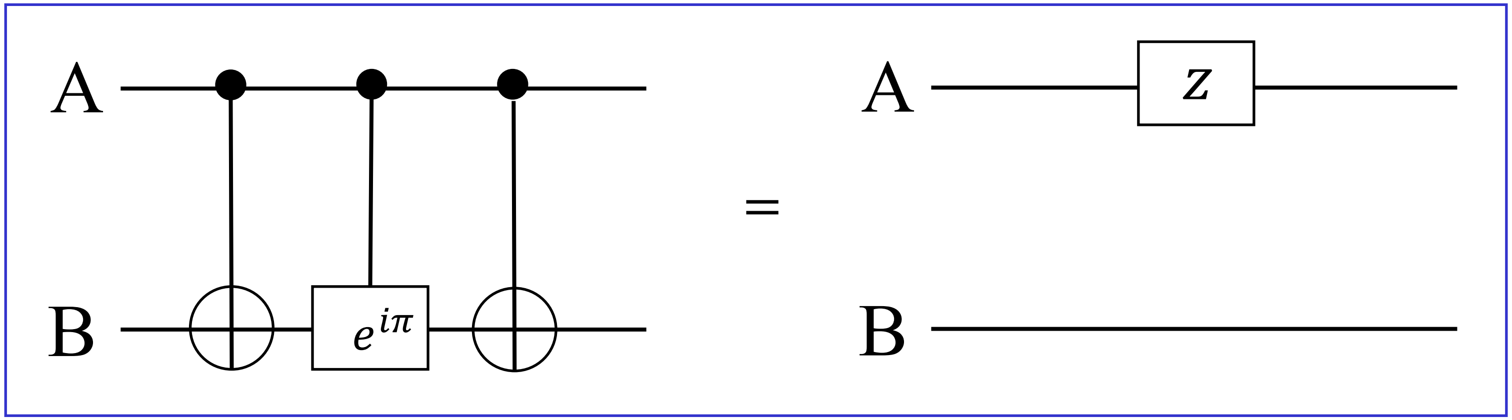
$$\xrightarrow{Cnot} \alpha_1|0\rangle(\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle) - \beta_1|1\rangle(\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle)$$

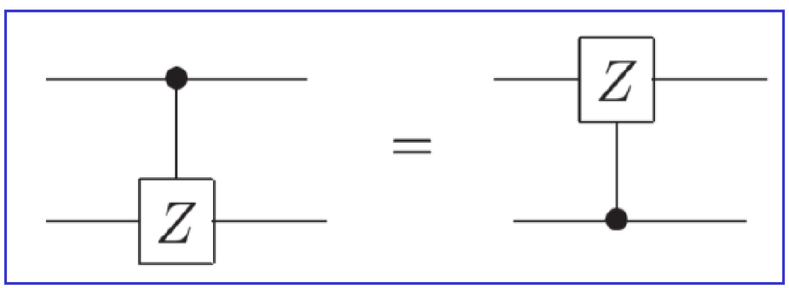
$$= (\alpha_1|0\rangle - \beta_1|1\rangle)_A(\alpha_2|0\rangle + \beta_2|1\rangle)_B$$

初态为可分态，
因此不是两电路
相等的严格证明

并非“控制位不变”

- 对控制U门，不要简单认为“控制位状态不变”

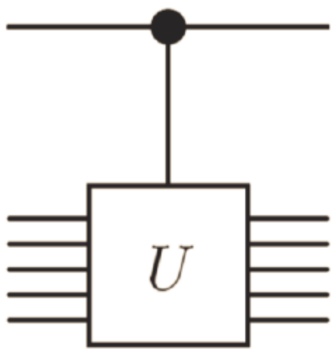




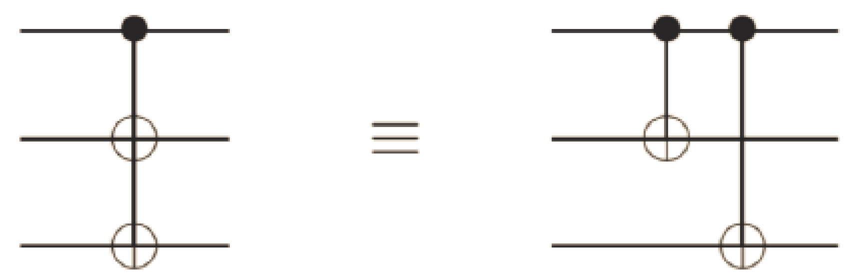
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle$$
$$|01\rangle \rightarrow |01\rangle$$
$$|10\rangle \rightarrow |10\rangle$$
$$|11\rangle \rightarrow -|11\rangle$$

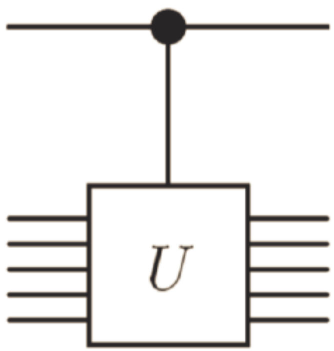
其它控制门



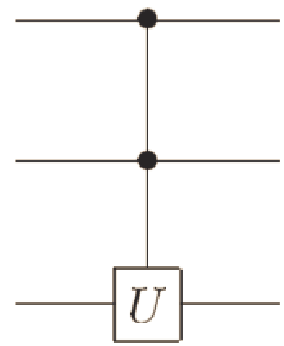
$$|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U$$



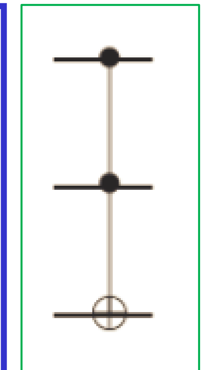
其它控制门



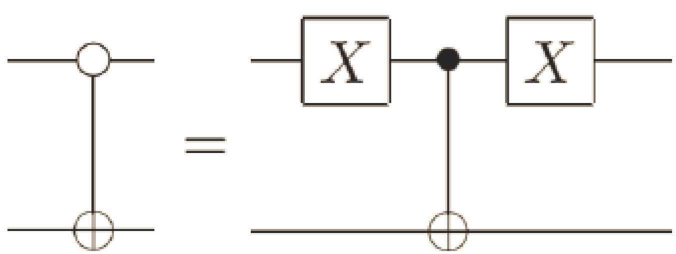
$$|0\rangle\langle 0|\otimes I + |1\rangle\langle 1|\otimes U$$



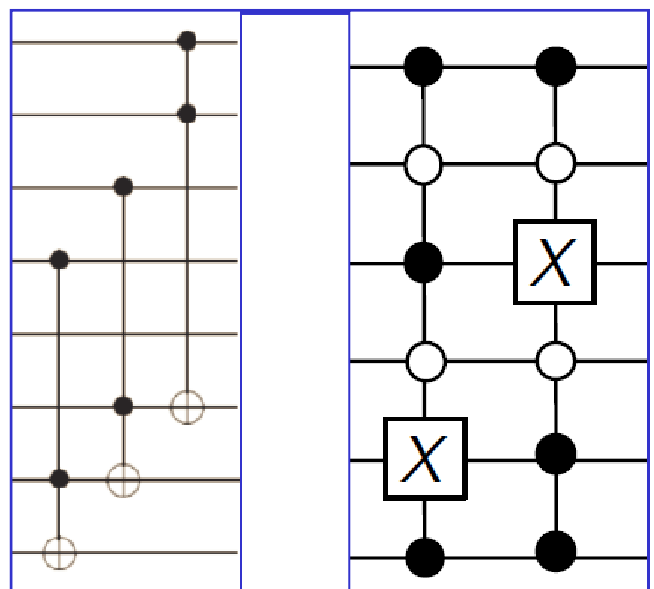
$$(|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)\otimes I + |11\rangle\langle 11|\otimes U$$



Toffoli门



$$|0\rangle\langle 0|\otimes U + |1\rangle\langle 1|\otimes I$$



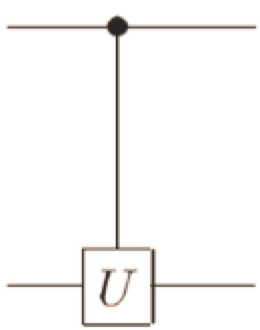
小结

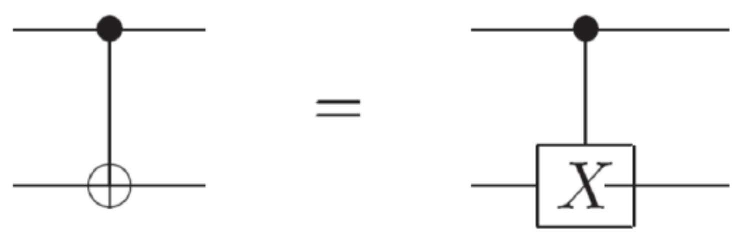
- 所有量子操作对应于一个酉矩阵（幺正矩阵）U
- 操作后的末态等于对应矩阵与初态向量的乘积：$|\psi_1\rangle = U|\psi_0\rangle$
- 量子操作具有并行性：$U[|\psi\rangle = \sum a_i\,|i\rangle] = \sum a_i\,U|i\rangle$
- 一位门：X，Y，Z，H，S，T，旋转门

任意一位门都可以看作是Bloch球上绕某个轴旋转了某个角度的旋转门（忽略全局相位）

- 二位门：控制U门，不要简单认为“控制位状态不变”

控制U





CNOT

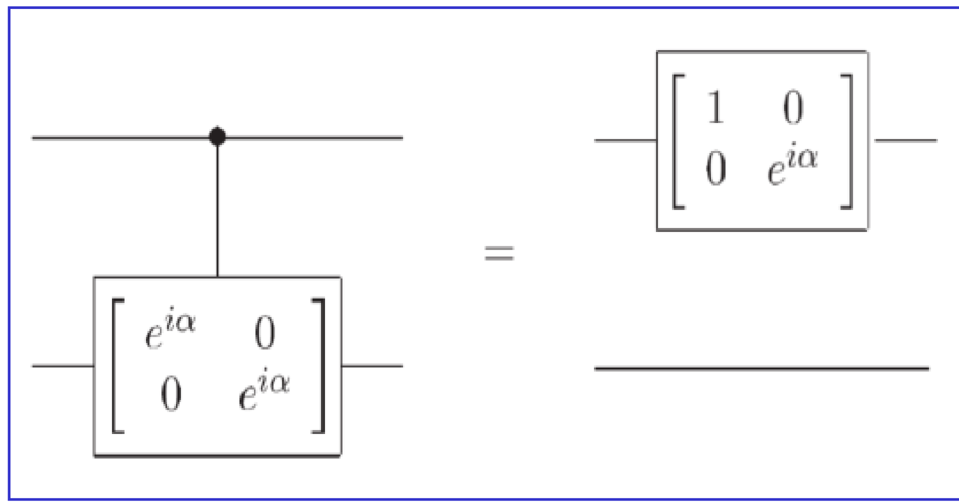
作业

5. 计算$X|+\rangle$，$X|-\rangle$，$H|+\rangle$和$H|-\rangle$。

6. 用矩阵函数的一般化定义证明：

$$R_x(\theta) \equiv e^{-i\theta X/2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2) \\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{bmatrix}$$

7. 证明下面两线路等价：



提示：证明两者作用在任意2 qubit状态 $(\alpha_0|00\rangle + \alpha_1|01\rangle + \alpha_2|10\rangle + \alpha_3|11\rangle)_{AB}$ 上结果相同（比作用在4个基态上结果相同更直观）

提纲

- 量子态
- 量子操作
- 量子测量
- 纠缠态及其应用

投影测量

- 与经典环境中测量物体的位置、速度等类似，对量子系统的观测实际也是对其某个力学量（可能是位置、动量、电子自旋等）的测量

- 投影测量由被观测系统状态空间上的一个力学量算子描述
  - 每一个力学量F都用一个厄米算子$\hat{F}$表示，对应一个厄米矩阵F
  - 对力学量F测量的所有可能值是算子$\hat{F}$的本征值谱

- 对系统测量力学量F，将谱分解$F=\sum_{i=1}^{n} u_i|u_i\rangle\langle u_i|$中属于同一本征值$u_i$的部分项合并为与本征值$u_i$对应的本征空间上的投影算子$P_i$，谱分解进一步化简为

$$F=\sum_{i=1}^{m} u_i P_i$$

$m\le n$为不同本征值的个数

$$F = \sum_{i=1}^{n} u_i|u_i\rangle\langle u_i| = \sum_{i=1}^{m} u_i P_i$$

- 则对应的一组测量算子可描述为$\{P_i\} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$，测量的可能结果对应于其本征值$\{u_i\} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$
  - 测量量子态$|\psi\rangle$时，得到结果u_i的概率为 $p(u_i) = \langle\psi|P_i|\psi\rangle$
  - 给定测量结果u_i，测量后量子系统的状态塌缩为 $\frac{P_i|\psi\rangle}{\sqrt{p(u_i)}}$

- 特别地，若F对应于不同本征向量的本征值都不同，则测量算子可描述为$\{P_i\} = \{|u_i\rangle\langle u_i|\}$
  - 当系统处于$|\psi\rangle = c_1|u_1\rangle + c_2|u_2\rangle + \cdots + c_n|u_n\rangle$时，测得值$u_i$的概率是$|c_i|^2$
  - 测量后的态塌缩为对应于测量结果u_i的本征向量$|u_i\rangle$
  - 当量子系统处在F的本征态$|u_i\rangle$时，100%概率测得u_i，且态不变化

举例

力学量	本征值、对应本征态、测量算子	本质	通常称法
$\hat{\sigma}_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	值 $1, \quad -1$ 态 $\vert 0\rangle \quad \vert 1\rangle$ $\{\vert 0\rangle\langle 0\vert,\ \vert 1\rangle\langle 1\vert\}$	测量量$\hat{\sigma}_Z$，测得$1(-1)$，态塌缩为$\vert 0\rangle(\vert 1\rangle)$	用$\{\vert 0\rangle, \vert 1\rangle\}$基测量，测得$\vert 0\rangle(\vert 1\rangle)$
$\hat{\sigma}_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	值 $1, \quad -1$ 态 $\vert +\rangle,\ \vert -\rangle$ $\{\vert +\rangle\langle +\vert,\ \vert -\rangle\langle -\vert\}$	测量量$\hat{\sigma}_X$，测得$1(-1)$，态塌缩为$\vert +\rangle(\vert -\rangle)$	用$\{\vert +\rangle, \vert -\rangle\}$基测量，测得$\vert +\rangle(\vert -\rangle)$

计算举例

方法 1：要计算投影测量结果出现的概率，通常先把被测态用测量基展开，各项系数的模方即为测得它的概率

- 用 $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ 测量量子态 $|\varphi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle \quad (|\alpha|^2+|\beta|^2=1)$，将以 $|\alpha|^2$ 的概率测得 $|0\rangle$，以 $|\beta|^2$ 的概率测得 $|1\rangle$。

- 用$\{|+\rangle,|-\rangle\}$测量上述态时，可先变形为

$$|\varphi\rangle=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|+\rangle+|-\rangle)+\frac{\beta}{\sqrt{2}}(|+\rangle-|-\rangle)=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|+\rangle+\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|-\rangle,$$

将以$|(\alpha+\beta)/\sqrt{2}|^2$的概率测得$|+\rangle$，以$|(\alpha-\beta)/\sqrt{2}|^2$的概率测得$|-\rangle$

- 例如，用 $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ 测量 $|0\rangle$ 态，会以概率 1 得到 $|0\rangle$

  用 $\{|+\rangle,|-\rangle\}$ 测量 $|+\rangle$ 态，会以概率 1 得到 $|+\rangle$

- 例如，用 $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ 测量 $|+\rangle$（$|-\rangle$）态，会随机得到 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$

  用 $\{|+\rangle,|-\rangle\}$ 测量 $|0\rangle$（$|1\rangle$）态，会随机得到 $|+\rangle$ 或 $|-\rangle$

- 用 $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ 基测量 $|\theta\rangle=(|0\rangle+\sqrt{3}|1\rangle)/2$，会以概率 1/4 得到 $|0\rangle$，以概率 3/4 得到 $|1\rangle$。

- 用 $\{|+\rangle,|-\rangle\}$ 基测量上述态，结果如何？

- 方法2：据前结论，（无简并情形时）用测量算子$\{P_i\} = \{|u_i\rangle\langle u_i|\}$对量子态$|\psi\rangle$进行测量，测得$|u_i\rangle$的概率为$|\langle u_i|\psi\rangle|^2$，也即：对$|\psi\rangle$做投影测量时，测得$|u_i\rangle$的概率为两态内积的模方

适用：态/基复杂（不易在测量基下展开）、只求某一个结果概率的情况

回顾：

- 则对应的一组测量算子可描述为$\{P_i\} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$，测量的可能结果对应于其本征值$\{u_i\} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$
  - 测量量子态$|\psi\rangle$时，得到结果u_i的概率为 $p(u_i) = \langle\psi|P_i|\psi\rangle$
  - 给定测量结果u_i，测量后量子系统的状态塌缩为 $\dfrac{P_i|\psi\rangle}{\sqrt{p(u_i)}}$

- 方法2：据前结论，（无简并情形时）用测量算子 $\{P_i\}=\{|u_i\rangle\langle u_i|\}$ 对量子态 $|\psi\rangle$ 进行测量，测得 $|u_i\rangle$ 的概率为 $\left|\langle u_i|\psi\rangle\right|^2$，也即：对 $|\psi\rangle$ 做投影测量时，测得 $|u_i\rangle$ 的概率为两态内积的模方

适用：态/基复杂（不易在测量基下展开）、只求某一个结果概率的情况

例：用不同基测量量子态 $|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle \quad (|\alpha|^2+|\beta|^2=1)$

$\{|0\rangle,\ |1\rangle\}$基： $p(|0\rangle)=|\langle 0|\psi\rangle|^2=|\alpha|^2 \qquad p(|1\rangle)=|\langle 1|\psi\rangle|^2=|\beta|^2$

$\{|+\rangle,|-\rangle\}$基： $p(|+\rangle)=|\langle +|\psi\rangle|^2=\left|\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}\right|^2 \qquad p(|-\rangle)=|\langle -|\psi\rangle|^2=\left|\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}\right|^2$

$\{|B_1\rangle,\ |B_2\rangle\}$基： $p(|B_1\rangle)=\left|\langle B_1|\psi\rangle\right|^2=(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta)^2$

$$p(|B_2\rangle)=\left|\langle B_2|\psi\rangle\right|^2=(\alpha\sin\theta-\beta\cos\theta)^2$$

$|B_1\rangle=\cos\theta|0\rangle+\sin\theta|1\rangle, \qquad |B_2\rangle=\sin\theta|0\rangle-\cos\theta|1\rangle$

小结

所测力学量

⇕

厄米矩阵

$$F=\sum_{i=1}^{n}u_i|u_i\rangle\langle u_i|=\sum_{i=1}^{m}u_iP_i$$

被测量子态

离散性：测量结果只能是某本征值 u_i

塌缩性：测量后态变为对应本征态 $|u_i\rangle$

概率性：测得u_i的概率为

$$p(u_i)=\langle\psi|P_i|\psi\rangle$$

也称为用一组投影算子$\{P_i\}$来测量

此时投影算子P_i起作用

通常称为：用 $\{|u_i\rangle\}$ 基测量

求概率

1.测量基下展开，系数模方

2.初末态内积模方

作业

8. 用$\{|+\rangle, |-\rangle\}$基测量量子态$|\theta\rangle = \frac{|0\rangle+\sqrt{3}|1\rangle}{2}$，结果是怎样的？

9. 用 Y 基， 也 就 是 $\left\{|y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle), |y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)\right\}$，测量量子态$|\vartheta\rangle = \frac{\sqrt{3}|0\rangle-|1\rangle}{2}$，结果是怎么样的？

10. 用$\{|B_1\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle, |B_2\rangle = \sin\theta|0\rangle - \cos\theta|1\rangle\}$基测量量子态$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|+\rangle + \sqrt{2}|-\rangle)$，结果是怎么样的？

提纲

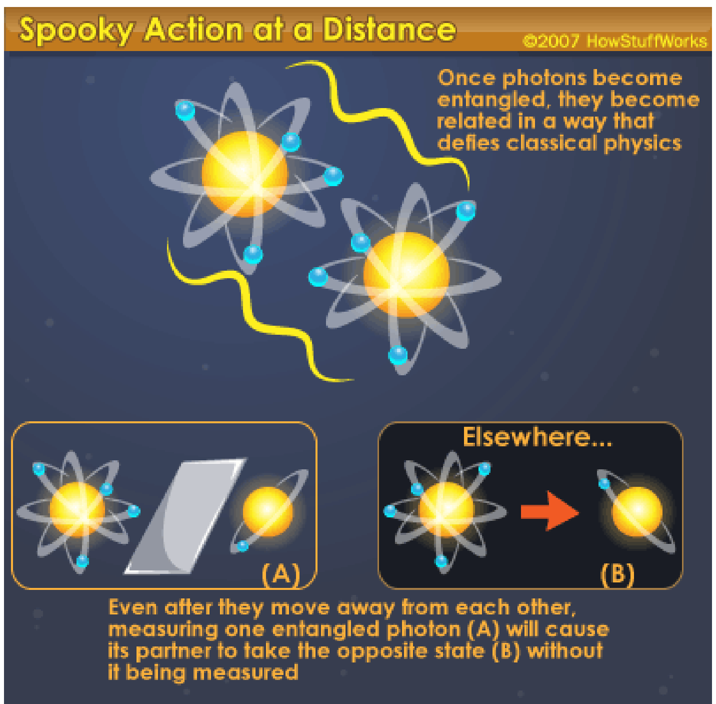
- 量子态
- 量子操作
- 量子测量
- 纠缠态及其应用

纠缠

➢ 纠缠是量子力学所特有的一个基本性质，它是两体或多体量子系统之间存在非定域、非经典的强关联

❑ （无论子系统相隔多远）一个子系统的塌缩会影响另一个子系统的状态

下角标：表示不同的子系统 （不引起混淆时也可忽略）	$\vert\psi\rangle_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vert 00\rangle+\vert 11\rangle)_{12}$



❑ 用$\{|0\rangle,|1\rangle\}$基测1系统：结果随机

✓ 方法1：$\{|0\rangle,|1\rangle\}$基下展开，测得概率为系数的模方

✓ 方法2：两态内积的模方（不同：测子系统）

$$p(0)=\left|\langle 0|_1\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)_{12}\right]\right|^2$$

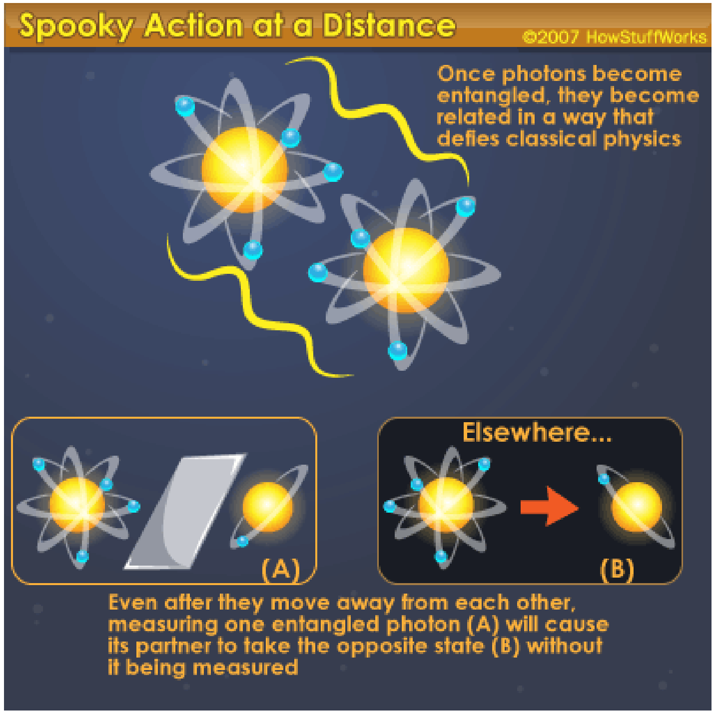
$$=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_2\right|^2=1/2$$

向量模方 = 向量和自己的内积

纠缠

- ➢ 纠缠是量子力学所特有的一个基本性质，它是两体或多体量子系统之间存在非定域、非经典的强关联
  - ❑ （无论子系统相隔多远）一个子系统的塌缩会影响另一个子系统的状态

下角标：表示不同的子系统（不引起混淆时也可忽略）	$|\psi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)_{12}$



- ❑ 测量任一系统，引起**联合塌缩**
  - ✓ 比如用$\{|0\rangle, |1\rangle\}$基测1系统，整体将随机塌缩到$|00\rangle$或$|11\rangle$状态，即测得$|0\rangle$和$|1\rangle$的概率各为1/2
  - ✓ 当测量1系统得到$|0\rangle$时，意味着复合系统整体状态塌缩为$|00\rangle$，即2系统的状态也变成了$|0\rangle$

塌缩效应是瞬时的（与距离无关），但这并不能做通信！

- 前面提到，多体系统状态是个体状态的张量积

$$|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \equiv |01\rangle_{12} = \binom{1}{0} \otimes \binom{0}{1}$$

- 纠缠：多体系统的叠加态不可拆分成个体状态的张量积形式

$$|\psi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle)_{12}$$

纠缠态：在任何基下，都不能拆分成$|\psi\rangle_2 \otimes |\psi\rangle_2$的形式

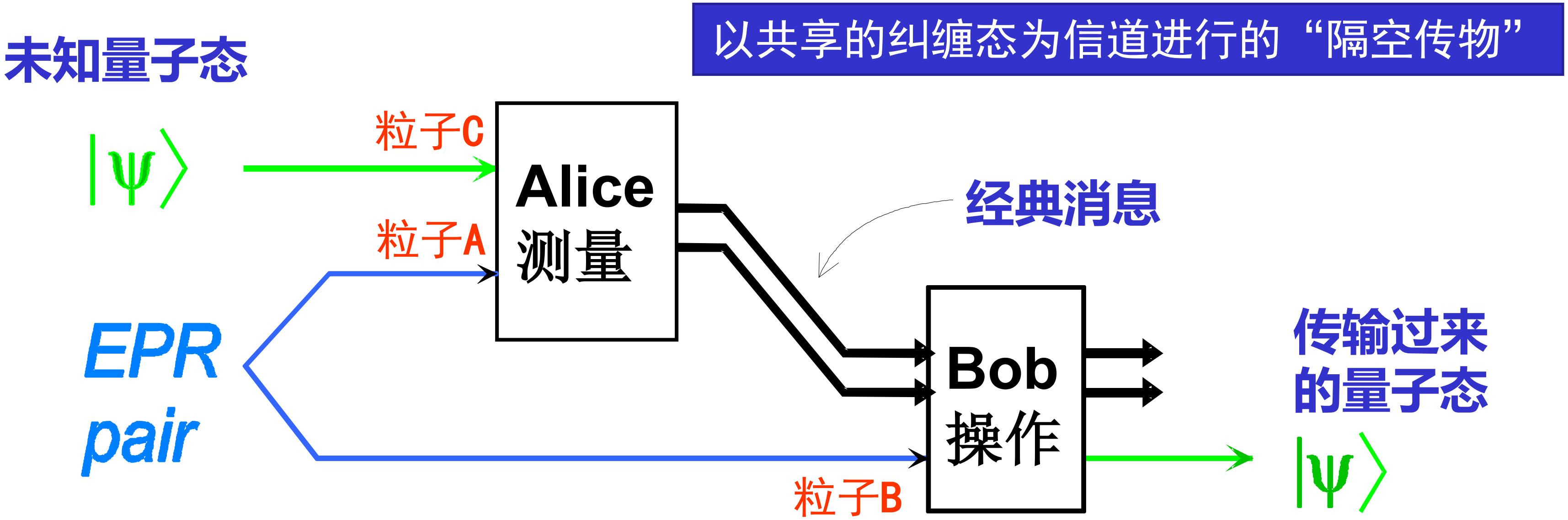
$$|\Psi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)_1 \otimes |0\rangle_2$$

可分态

$$\frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)_1 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)_2$$

纠缠态$|\psi\rangle_{12}$中，1系统的状态不同于$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)_1$。在量子算法中，如果我们要的是后者，则一定要将2系统解纠缠出去，得到类似于$|\Psi\rangle_{12}$的态

隐形传态（Teleportation）



Alice与Bob共享纠缠对A、B，Alice要传粒子C的状态（$|\psi\rangle$）给Bob

- (1)Alice对A、C做Bell测量
- (2)Alice通过经典信道告诉Bob她的测量结果
- (3)Bob根据Alice测量结果对B实施相应的Pauli操作，可使B变为$|\psi\rangle$

Bell基：$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),\quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$

$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle),\quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$

任何两qubit态都可以展开在Bell基下

$$|00\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle+|\Phi^-\rangle),\quad |11\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle-|\Phi^-\rangle)$$

$$|01\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle+|\Psi^-\rangle),\quad |10\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle-|\Psi^-\rangle)$$

$$|\Phi^+\rangle_{AB}\otimes|\psi\rangle_C=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)_{AB}\otimes(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)_C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|000\rangle+\alpha|110\rangle+\beta|001\rangle+\beta|111\rangle)_{ABC}$$

$$=>\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|000\rangle+\alpha|101\rangle+\beta|010\rangle+\beta|111\rangle)_{ACB}$$

$$=\frac{1}{2}\big[|\Phi^+\rangle_{AC}(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)_B+|\Phi^-\rangle_{AC}(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)_B$$

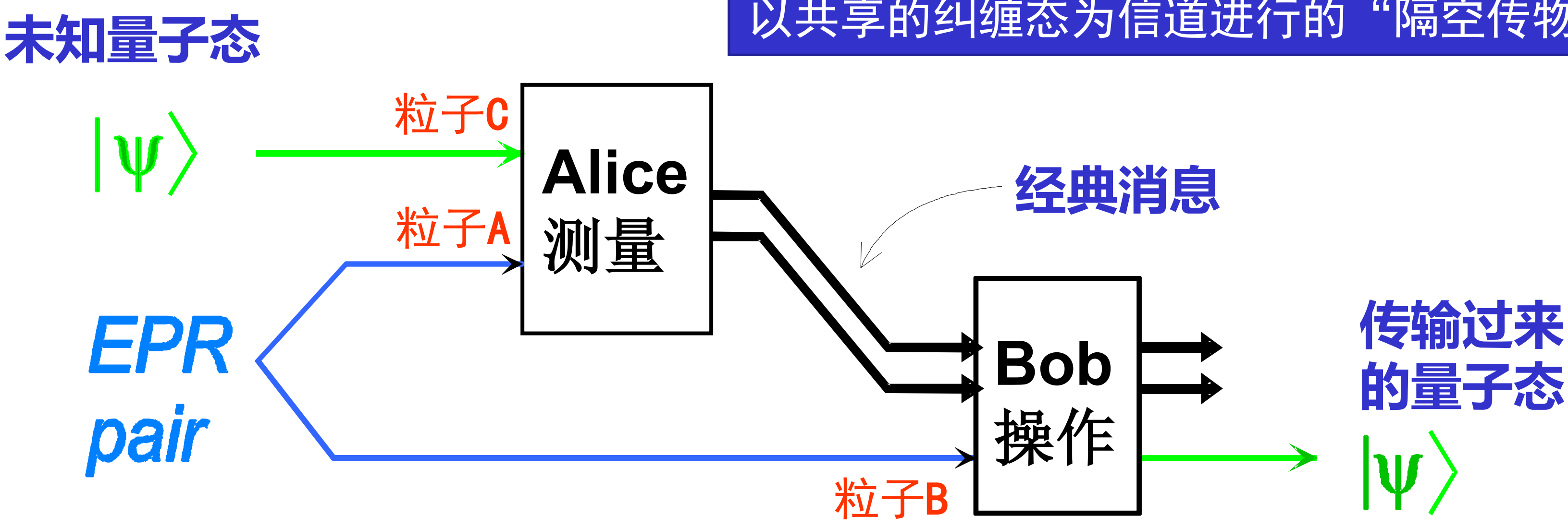
$$+|\Psi^+\rangle_{AC}(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)_B+|\Psi^-\rangle_{AC}(-\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle)_B\big]$$

每个粒子状态不变，只是调整BC顺序，相当于Swap操作

若对AC进行Bell测量，则三个粒子状态等概率塌缩为上式四项之一

隐形传态（Teleportation）

以共享的纠缠态为信道进行的“隔空传物”



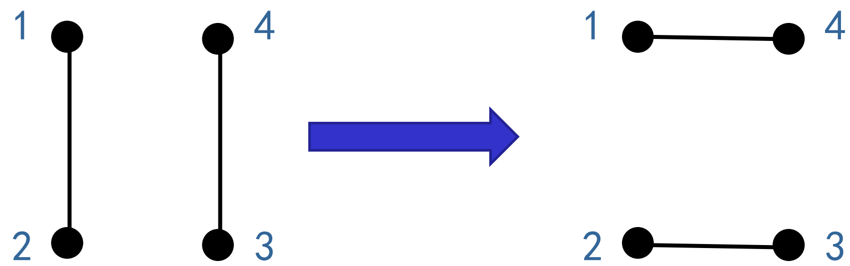
Alice与Bob共享纠缠对A、B，Alice要传粒子C的状态（$|\psi\rangle$）给Bob

- (1)Alice对A、C做Bell测量
- (2)Alice通过经典信道告诉Bob她的测量结果
- (3)Bob根据Alice测量结果对B实施相应的Pauli操作，可使B变为$|\psi\rangle$

> 隐形：C粒子的状态转移到了B粒子上，但C粒子本身并未传输
> 不是瞬间（超光速）通信、不是量子克隆

纠缠交换（Entanglement Swapping）

- 纠缠交换实际就是在不同的粒子间通过测量交换纠缠
  - (1,2)和(3,4)是两个纠缠态，如果用测量强制粒子(1,4)投影为一个纠缠态，则测量后(2,3)也变成纠缠态



- 举例：以下两纠缠态之间的纠缠交换

$$|\Phi^+\rangle_{12} = (1/\sqrt{2})(|00\rangle_{12} + |11\rangle_{12})$$

$$|\Psi^+\rangle_{34} = (1/\sqrt{2})(|01\rangle_{34} + |10\rangle_{34})$$

$$|00\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle+|\Phi^-\rangle),\quad |11\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle-|\Phi^-\rangle)$$
$$|01\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle+|\Psi^-\rangle),\quad |10\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle-|\Psi^-\rangle)$$

$$|\Phi^+\rangle_{12}\otimes|\Psi^+\rangle_{34}=1/2(|00\rangle_{12}+|11\rangle_{12})\otimes(|01\rangle_{34}+|10\rangle_{34})$$

$$=1/2(|0001\rangle_{1234}+|0010\rangle_{1234}+|1101\rangle_{1234}+|1110\rangle_{1234})$$

$$=>1/2(|0100\rangle_{1423}+|0001\rangle_{1423}+|1110\rangle_{1423}+|1011\rangle_{1423})$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}[(|\Psi^+\rangle_{14}+|\Psi^-\rangle_{14})|00\rangle_{23}+(|\Phi^+\rangle_{14}+|\Phi^-\rangle_{14})|01\rangle_{23}$$

$$+(|\Phi^+\rangle_{14}-|\Phi^-\rangle_{14})|10\rangle_{23}+(|\Psi^+\rangle_{14}-|\Psi^-\rangle_{14})|11\rangle_{23}]$$

$$=\frac{1}{2}(|\Psi^+\rangle_{14}|\Phi^+\rangle_{23}+|\Psi^-\rangle_{14}|\Phi^-\rangle_{23}+|\Phi^+\rangle_{14}|\Psi^+\rangle_{23}+|\Phi^-\rangle_{14}|\Psi^-\rangle_{23})$$

可见，若对粒子1和4进行Bell测量，则四粒子状态等概率塌缩为上式四项之一。纠缠关系从[(1,2), (3,4)]转变为[(1,4), (2,3)]

纠缠交换本质上也是隐形传态

11. 下面哪些是纠缠态，哪个是可分态？把可分态写成个体状态的张量积形式。

$|\Phi^{+}\rangle_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)_{12}$，　$|\phi\rangle_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle+|10\rangle)_{12}$，　$|\chi\rangle_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle-|01\rangle)_{12}$，

$|\varphi\rangle_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle+|01\rangle)_{12}$，　$|\varsigma\rangle_{12}=\frac{1}{2}(|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle+|11\rangle)_{12}$

12. Alice 与 Bob 共享量子态 $|\Phi^{+}\rangle_{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)_{AB}$， Alice 要利用该量子态将 $|\psi\rangle_{C}=(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)_{C}$隐形传态给Bob。Alice用Bell基测量AC粒子，测量结果有哪几种可能？相应的B粒子状态是什么？给出每种结果的概率。

13. 对两个Bell态$|\Phi^{+}\rangle_{12}$与$|\Psi^{-}\rangle_{34}$中粒子1和4进行Bell基测量，会得到哪些可能的测量结果？相应的粒子2和3又会塌缩到什么状态？给出每种结果的概率。

Email: gaof@bupt.edu.cn
Tel: 86 -10 -62283192
Web: www.bupt.edu.cn

谢 谢!