北京郵電大學

第8讲-2 求解Toeplitz系统的渐进量子算法

高飞
网络空间安全学院

提纲

- Toeplitz系统的定义及性质
- 求解Toeplitz系统的量子算法
- 误差和复杂度分析
- 特殊情况：不知道生成函数f
- 小结和展望

Toeplitz系统的定义

➢ Toeplitz矩阵 $T_n = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \ddots & \vdots \\ t_2 & t_1 & t_0 & \ddots & t_{-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_{-1} \\ t_{(n-1)} & \cdots & t_2 & t_1 & t_0 \end{pmatrix}$

其中 $T_{k,j} = t_{k-j}$，即T_n的诸条对角线元素相同

➢ 在实际应用中，Toeplitz矩阵往往是通过对连续函数的离散化获得的，即，T_n的对角线元素$\{t_k\}_{k=-n+1}^{n-1}$是某函数f的傅里叶系数：

$$t_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\lambda)e^{-ik\lambda}d\lambda, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

矩阵序列：n取不同值情形下的一串矩阵

❑ 由$\{t_k\}_{k=-n+1}^{n-1}(1 \le n < \infty)$构成的Toeplitz矩阵序列记为$T_n(f)$，称$f$为该矩阵序列的生成函数

❑ 求解Toeplitz系统，即求解线性方程组$T_n(f)x = b$，在数学和工程领域有着广泛的应用，如数值求解微（积）分方程、图像恢复问题等

❑ 求解Toeplitz系统时，n的取值是可选的（类似于求微分方程的数值解，一般来说，n的取值越大解的精度越高）[1]

[1] F.-W. Sun, Y. Jiang, and J. S. Baras, IEEE Trans. Inf. Theory 49, 180 (2003).

Toeplitz系统的性质

- 一类常见的生成函数是以2π为周期的严格正的连续实值函数，这些函数构成的集合记为$R_{2\pi}^{+}$

- 对于任意的$f \in R_{2\pi}^{+}$，$T_n(f)$的性质：
  - f为实值函数，那么生成的$T_n(f)$是Hermite矩阵

$$t_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\lambda) e^{-ik\lambda} d\lambda$$

$$t_k^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(\lambda) e^{ik\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\lambda) e^{ik\lambda} d\lambda = t_{-k}$$

  - f严格为正，那么生成的$T_n(f)$是非奇异的

当$T_n(f)$是Hermitian时，令λ_k是Toeplitz矩阵$T_n(f)$的特征值，那么$f_{min} \le \lambda_k \le f_{max}$，其中$f_{min}$和$f_{max}$分别代表$f$的最小值和最大值[1]

[1] R. M. Gray, Toeplitz and Circulant Matrices: A Review. Boston, 2006.

循环矩阵

- 循环矩阵：每一行都是它上面一行的右循环移位

$$C_n = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{(n-1)} \\ c_{(n-1)} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{(n-2)} \\ c_{(n-2)} & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & c_1 \\ c_1 & \cdots & & c_{(n-1)} & c_0 \end{pmatrix}$$

- 循环矩阵是一类特殊的Toeplitz矩阵，它具有如下特殊性质[1]
  - 任意循环矩阵都能被傅立叶矩阵F_n对角化，即$C_n = F_n^{\dagger}\Lambda_n F_n$，其中，$\Lambda_n$是一个对角矩阵，对角元由下式给出：

$$\psi_m = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{-2\pi imk/n}, \quad m = 0,1,\ldots,n-1$$

也即，循环矩阵C_n的特征值可通过对C_n的第一行做傅立叶变换得到

$$\boxed{F\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}, \quad F_{jk} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-2\pi ijk/n}}$$

[1] R. M. Gray, Toeplitz and Circulant Matrices: A Review. Boston, 2006.

北京郵電大學 Beijing University of Posts and Telecommunications

$T_n(f)$的关联循环矩阵

- 定义：若循环矩阵$C_n(f)$的第一行为(c_0，c_1，…，c_{n-1})，其中

$$c_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(2\pi j/n)e^{2\pi ijk/n} \tag{1}$$

则称$C_n(f)$为$T_n(f)$的关联循环矩阵[1]

- $C_n(f)$的性质
  - $C_n(f)$与$T_n(f)$是渐进等价的

启示：可通过设计量子算法求解$C_n(f)x = b$，近似Toeplitz系统的解（这样就可能更充分地利用循环矩阵的特殊性质）

定理1. 令$T_n(f)$是由严格正的连续实值函数生成的Toeplitz矩阵序列，$C_n(f)$是由等式(1)定义的关联循环矩阵序列，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|T_n(f)-C_n(f)\|_F}{\|T_n(f)\|_F} = 0 \tag{2}$$

其中$\|A\|_F$代表矩阵A的Frobenius范数。

[1] F.-W. Sun, Y. Jiang, and J. S. Baras, IEEE Trans. Inf. Theory 49, 180 (2003).

$T_n(f)$的关联循环矩阵

- 定义：若循环矩阵$C_n(f)$的第一行为(c_0，c_1，…，c_{n-1})，其中

$$c_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(2\pi j/n)e^{2\pi ijk/n} \qquad (1)$$

则称$C_n(f)$为$T_n(f)$的关联循环矩阵[1]

- $C_n(f)$的性质
  - $C_n(f)$与$T_n(f)$是渐进等价的
  - $C_n(f)$的第m个特征值是$f(2\pi m/n)$

启示：特征值更方便处理（从HHL可知，处理系数矩阵特征值是算法的重要步骤）

$$\psi_m = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{-2\pi imk/n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(2\pi j/n)e^{2\pi ijk/n}\right)e^{-2\pi imk/n}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} f(2\pi j/n)\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i(j-m)k/n}\right\} = f(2\pi m/n),\ m = 0,1,\ldots,n-1$$

注：蓝式当j=m时为n，否则为0

[1] F.-W. Sun, Y. Jiang, and J. S. Baras, IEEE Trans. Inf. Theory 49, 180 (2003).

提纲

- Toeplitz系统的定义及性质
- 求解Toeplitz系统的量子算法
- 误差和复杂度分析
- 特殊情况：不知道生成函数f
- 小结和展望

相关说明

$$T_n(f)x = b$$

- 现有的线性系统求解算法并不适用
  - Toeplitz矩阵不是稀疏[1]或低秩[2]的，不能用现有（快速）量子算法求解
  - 如果套用针对一般矩阵的量子算法[3]，仅有多项式加速效果，不理想
  - 初步思路：通过求解 $C_n(f)x = b$ 来近似，并充分利用循环矩阵的特点
- 算法的两个前提假设
  - 初态$|b\rangle$可有效制备： $O(\text{poly}\log n)$
  - 存在一个Oracle计算生成函数的函数值，即实现

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_j|j\rangle \xrightarrow{\text{oracle}} \sum_{j=0}^{n-1} b_j|j\rangle|f(2\pi j/n)\rangle$$

- 给定用于计算f的经典电路，存在效率相当的量子电路U_f实现上述变换[4]
- 一般而言，生成函数f是可有效计算的，因此这里不考虑oracle的计算复杂度

[1] A.W. Harrow, A. Hassidim, and S. Lloyd, Phys. Rev. Lett. 103, 150502 (2009). [2] Rebentrost P, Steffens A, Marvian I, et al. Phys. Rev. A, 97, 012327 (2018). [3] L. Wossnig, Z. Zhao, and A. Prakash, Phys. Rev. Lett. 120, 050502 (2018). [4] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information.

回顾：HHL算法框架

厄米矩阵A谱分解：$A=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j|u_j\rangle\langle u_j|$，设$|b\rangle$在A的特征空间展开为$\sum_j\beta_j|u_j\rangle$，则

$$|x\rangle=cA^{-1}|b\rangle=c\sum_{j=1}^{N}1/\lambda_j|u_j\rangle\langle u_j|\sum_j\beta_j|u_j\rangle=c\sum_{j=1}^{N}\beta_j/\lambda_j|u_j\rangle$$

(A非酉，所以有归一化系数c，对算法无影响)

目标：把A的特征值λ_j放到$|b\rangle$的各项概率幅的分母上

量子模拟：处理（厄米）矩阵数据的常见方法

观察 $e^{iAt}=\sum_{j=1}^{N}e^{i\lambda_j t}|u_j\rangle\langle u_j|$：$\lambda_j$是酉算子$e^{iAt}$特征值的相位！($t$是常数)

量子模拟+相位估计：常被用来处理与（厄米）矩阵特征值相关的计算

(1) 相位估计：在$|b\rangle$上做酉算子e^{iAt}（量子模拟）的相位估计，将λ_j放到qubit值上，得

$$\sum_j\beta_j\left|\frac{\tilde{\lambda}_j t}{2\pi}\right\rangle|u_j\rangle$$

$|b\rangle$是A本征态的叠加

可实现U → 可实现受控U

(2) 受控旋转：将qubit值上的λ_j放到各项概率幅的分母上，得下式，即方程组的解

$$c\sum_{j=1}^{N}\beta_j/\tilde{\lambda}_j|u_j\rangle$$

回顾：HHL算法框架

厄米矩阵A谱分解：$A=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j|u_j\rangle\langle u_j|$，设$|b\rangle$在A的特征空间展开为$\sum_j \beta_j|u_j\rangle$，则

$$|x\rangle = cA^{-1}|b\rangle = c\sum_{j=1}^{N} 1/\lambda_j|u_j\rangle\langle u_j|\sum_j \beta_j|u_j\rangle = c\sum_{j=1}^{N}\beta_j/\lambda_j|u_j\rangle$$

(A非酉，所以有归一化系数c，对算法无影响)

这里我们有：

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_j|j\rangle \xrightarrow{\text{oracle}} \sum_{j=0}^{n-1} b_j|j\rangle|f(2\pi j/n)\rangle$$

$C_n(f)$的特征值

能否调用oracle求出特征值，然后用受控旋转求解？

不行：求特征值是在计算基下做的，而上面方程的解要求是本征态基才成立！

换个思路：

$$C_n = F_n^{\dagger}\Lambda_n F_n \longrightarrow |x\rangle = cC_n{}^{-1}|b\rangle = c(F_n^{\dagger}\Lambda_n F_n)^{-1}|b\rangle = c(F_n^{\dagger}\Lambda_n^{-1}F_n)|b\rangle$$

逐个实现这三个操作

- F_n和$F_n^{\dagger}$是傅里叶变换矩阵，酉的，直接做在态上即可
- Λ_n^{-1}是以C的特征值的倒数为元素的对角阵，做它相当于把量子态的（计算基下）概率幅乘上C的特征值的倒数。因此，在上面oracle基础上做受控旋转即可实现Λ_n^{-1}

Toeplitz系统求解思路

T方程求解

$T \approx C$

C方程求解

$C_n = F_n^{\dagger}\Lambda_n F_n$

特征值可由 f 求得

- F_n和$F_n^{\dagger}$：量子傅里叶变换
- Λ_n^{-1}：调用Oracle求特征值后受控旋转

与HHL的不同：循环矩阵的特征值正好是（已知）生成函数的一些函数值，很容易计算，不需要相位估计了

求解$C_n(f)|x\rangle = |b\rangle$算法

$$|x\rangle = cC_n^{-1}|b\rangle = c(F_n^\dagger \Lambda_n F_n)^{-1}|b\rangle = c(F_n^\dagger \Lambda_n^{-1} F_n)|b\rangle$$

1. 对$|b\rangle$做量子傅里叶变换，输出态记为$|b'\rangle = \sum_{j=0}^{n-1} b_j |j\rangle$
2. 附加R2，调用计算生成函数值的Oracle，得 $\sum_{j=0}^{n-1} b_j |j\rangle |f(2\pi j/n)\rangle$
3. 附加R3，对R2和R3做受控旋转，得（m是$\leq C_n(f)$最小特征值的常数）

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_j |j\rangle \left|f\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right\rangle \left(\sqrt{1-\frac{m^2}{f^2\left(\frac{2\pi j}{n}\right)}}|0\rangle + \frac{m}{f\left(\frac{2\pi j}{n}\right)}|1\rangle\right)$$

4. 对于R2执行退计算，然后对R3以$|1\rangle$为目标执行幅度放大，得

$$|b^*\rangle = \sqrt{\frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} |b_j|^2 / \left|f\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right|^2}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{f\left(\frac{2\pi j}{n}\right)} |j\rangle$$

5. 对$|b^*\rangle$执行量子傅里叶逆变换，所得到的量子态记为$|x^*\rangle$

提纲

- Toeplitz系统的定义及性质
- 求解Toeplitz系统的量子算法
- $\boxed{\text{误差和复杂度分析}}$
- 特殊情况：不知道生成函数f
- 小结和展望

误差分析

- $|x^*\rangle$与Toeplitz系统的归一化解$|x\rangle = \frac{T_n^{-1}(f)|b\rangle}{\|T_n^{-1}(f)|b\rangle\|}$相近？
  - ❑ 问题1：Toeplitz矩阵和其关联循环矩阵是否足够相近？

由定理1可知：对于任意给定的ϵ，总是存在足够大的n，满足 $\frac{\|T_n(f)-C_n(f)\|_F}{\|T_n(f)\|_F} \leq \epsilon$

  - ❑ 问题2：足够相近的系数矩阵是否有足够接近的解？

定理1. 令$T_n(f)$是由严格正的连续实值函数生成的Toeplitz矩阵序列，$C_n(f)$是由等式（1）定义的关联循环矩阵序列。则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|T_n(f)-C_n(f)\|_F}{\|T_n(f)\|_F} = 0 \tag{2}$$

其中$\|A\|_F$代表矩阵A的Frobenius范数。

误差分析

- $|x^*\rangle$与Toeplitz系统的归一化解$|x\rangle = \frac{T_n^{-1}(f)|b\rangle}{\|T_n^{-1}(f)|b\rangle\|}$相近？

  - 问题1：Toeplitz矩阵和其关联循环矩阵是否足够相近？

由定理1可知：对于任意给定的ϵ，总是存在足够大的n，满足 $\frac{\|T_n(f)-C_n(f)\|_F}{\|T_n(f)\|_F} \le \epsilon$

  - 问题2：足够相近的系数矩阵是否有足够接近的解？

根据求解线性方程组的扰动理论 [κ是$T_n(f)$的条件数]：

解的（相对）误差

$$\frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} = \frac{\|C_n^{-1}(f)b - T_n^{-1}(f)b\|}{\|T_n^{-1}(f)b\|} \le \frac{\epsilon\kappa}{1-\epsilon\kappa}$$

$$\| |x^*\rangle - |x\rangle \| = \| \frac{C^{-1}|b\rangle}{\|C^{-1}|b\rangle\|} - \frac{T^{-1}|b\rangle}{\|T^{-1}|b\rangle\|} \| = \| \frac{(\|T^{-1}|b\rangle\| - \|C^{-1}|b\rangle\|)C^{-1}|b\rangle}{\|C^{-1}|b\rangle\|\|T^{-1}|b\rangle\|} - \frac{T^{-1}|b\rangle - C^{-1}|b\rangle}{\|T^{-1}|b\rangle\|} \|$$

$$\le \frac{|\|T^{-1}|b\rangle\| - \|C^{-1}|b\rangle\||}{\|T^{-1}|b\rangle\|} + \frac{\|T^{-1}|b\rangle - C^{-1}|b\rangle\|}{\|T^{-1}|b\rangle\|} \le 2\frac{\|T^{-1}|b\rangle - C^{-1}|b\rangle\|}{\|T^{-1}|b\rangle\|} = 2\frac{\|T^{-1}b - C^{-1}b\|}{\|T^{-1}b\|}$$

$$\le \frac{2\epsilon\kappa}{1-\epsilon\kappa}$$

❑ 问题2：足够相近的系数矩阵是否有足够接近的解？

根据求解线性方程组的扰动理论 [κ是$T_n(f)$的条件数]：

解的（相对）误差

$$\frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} = \frac{\|C_n^{-1}(f)b - T_n^{-1}(f)b\|}{\|T_n^{-1}(f)b\|} \le \frac{\epsilon\kappa}{1-\epsilon\kappa}$$

算法输出量子态$|x^*\rangle = \frac{C_n^{-1}(f)|b\rangle}{\|C_n^{-1}(f)|b\rangle\|}$与Toeplitz系统归一化解$|x\rangle = \frac{T_n^{-1}(f)|b\rangle}{\|T_n^{-1}(f)|b\rangle\|}$的误差：

归一化解的（相对）误差

$$\| |x^*\rangle - |x\rangle \| \le \frac{2\epsilon\kappa}{1-\epsilon\kappa}$$

与经典算法求解精度相当

误差分析

- $|x^*\rangle$与Toeplitz系统的归一化解$|x\rangle = \frac{T_n^{-1}(f)|b\rangle}{\|T_n^{-1}(f)|b\rangle\|}$相近？
  - 问题1：Toeplitz矩阵和其关联循环矩阵是否足够相近？

由定理1可知：对于任意给定的ϵ，总是存在足够大的n，满足 $\frac{\|T_n(f)-C_n(f)\|_F}{\|T_n(f)\|_F} \le \epsilon$

  - 问题2：足够相近的系数矩阵是否有足够接近的解？

根据求解线性方程组的扰动理论 [κ是$T_n(f)$的条件数]：

解的（相对）误差

$$\frac{\|x^* - x\|}{\|x\|} = \frac{\|C_n^{-1}(f)b - T_n^{-1}(f)b\|}{\|T_n^{-1}(f)b\|} \le \frac{\epsilon\kappa}{1-\epsilon\kappa}$$

算法输出量子态$|x^*\rangle = \frac{C_n^{-1}(f)|b\rangle}{\|C_n^{-1}(f)|b\rangle\|}$与Toeplitz系统归一化解$|x\rangle = \frac{T_n^{-1}(f)|b\rangle}{\|T_n^{-1}(f)|b\rangle\|}$的误差：

归一化解的（相对）误差

$$\||x^*\rangle - |x\rangle\| \le \frac{2\epsilon\kappa}{1-\epsilon\kappa}$$

与经典算法求解精度相当

结论：只要选择一个足够大的n，算法的输出就可以以所需的精度逼近良态Toeplitz系统的归一化解 [良态：矩阵条件数大小为$O(\text{poly}(\log n))$]

误差分析

- 对于某些Toeplitz系统，可以进一步界定算法误差ϵ'和矩阵维数n的关系

  - 推论1. 设$T_n(f)$是由严格正的连续实值函数生成的良态Toeplitz矩阵序列。如果相应的对角线元素$\{t_k\}$满足$|t_k| \leq M/k$，$k = 1,2\cdots$，M是一个常数），那么算法输出的（归一化的）解的误差为

$$\epsilon' = O(\frac{\text{poly}(\log n)}{\sqrt{n}})$$

大多常见函数的傅里叶系数都满足该条件

  - 推论2. 设$T_n(f)$是由严格正的连续实值函数生成的良态Toeplitz矩阵序列。如果相应的对角线元素$\{t_k\}$满足$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|kt_k| < \infty$，且矩阵的谱范数$\|T_n\| \leq 1$，那么对于如下形式的向量

$$b = (0, \dots, 0, b_{-L}, \dots, b_0, \dots, b_L, 0, \dots, 0)$$

要求b向量包含有限个非0项即可，应用中很多时候左右两头是0

算法输出的（归一化的）解的误差为$\epsilon' = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$

复杂度

- 量子算法的复杂度：$O(\mu \mathrm{poly}(\log n))$
  - 初态$|b\rangle$制备： $O(\mathrm{poly}\log n)$
  - 量子（逆）傅里叶变换： $O(\log^2 n)$
  - 调用oracle的复杂度：$O(1)$
  - 幅度放大：需要重复$O(\mu)$次，其中$\mu = f_{\max} / f_{\min}$
- 当n足够大时，Toeplitz矩阵的条件数κ接近于f_{max} / f_{min}[1]，因此算法的复杂度近似于$O(\kappa \mathrm{poly}(\log n))$
- 经典算法的复杂度：$O(n\log n)$ [1]
  - 对比经典算法，对于良态的Toeplitz系统 [κ=$O(\mathrm{poly}(\log n))$]，量子算法具有指数加速效果（同等误差要求下，见前面“误差分析”）

[1] R. M. Gray, Toeplitz and Circulant Matrices: A Review. Boston, 2006.

提纲

- Toeplitz系统的定义及性质
- 求解Toeplitz系统的量子算法
- 误差和复杂度分析
- 特殊情况：不知道生成函数 f
- 小结和展望

特殊情况

有时候只知道Toeplitz矩阵序列T_n而不知道生成函数f，此时无法简单通过调用oracle求特征值

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_j|j\rangle \xrightarrow{\text{oracle}} \sum_{j=0}^{n-1} b_j|j\rangle|f(2\pi j/n)\rangle$$

- 可以用T_n的对角线元素$\{t_k\}_{k=-n+1}^{n-1}$定义一个生成函数序列

$$\hat{f}_n(\lambda) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} t_k e^{ik\lambda}, \lambda \in [0,2\pi]$$

这样构造的f函数不能直接求值，复杂度太大！

- 进而由$\hat{f}_n(\lambda)$得到关联循环矩阵序列$C_n(\hat{f}_n)$，其中第一行元素

$$c_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \hat{f}_n(2\pi j/n)e^{2\pi ijk/n}$$

  - 若$\{t_k\}$是绝对可和的，即$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|t_k| < \infty$，循环矩阵$C_n(\hat{f}_n)$与原Toeplitz矩阵是渐进等价的
  - 循环矩阵$C_n(\hat{f}_n)$的特征值为

$$\hat{f}_n(2\pi j/n) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} t_k e^{2\pi ijk/n} = \sum_{k=0}^{n-1} t_k e^{2\pi ijk/n} + \sum_{k=0}^{n-1} t_{-k} e^{-2\pi ijk/n} - t_0$$

特殊情况

计算基上的量子傅立叶变换：$|j\rangle \xrightarrow{QFTC} |j\rangle|y_j\rangle$，其中$y_j=\sum_{k=0}^{n-1} t_k e^{2\pi ijk/n}$

前提：可有效制备 $\sum_{k=0}^{n-1} t_k|k\rangle$

- 算法中计算$C_n(\hat{f}_n)$的特征值

1. 利用计算基上的量子傅立叶变换[1]

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_j\,|j\rangle|0\rangle|0\rangle|t_0\rangle \rightarrow \sum_{j=0}^{N-1} b_j\,|j\rangle|y_j\rangle|y_j'\rangle|t_0\rangle$$

其中$y_j=\sum_{k=0}^{n-1} t_k e^{2\pi ijk/n}$，$y_j'=\sum_{k=0}^{n-1} t_{-k} e^{-2\pi ijk/n}$

2. 利用量子加法器计算$y_j+y_j'-t_0$，并将结果编码到另一个寄存器中：

$$\sum_{j=0}^{N-1} b_j\,|j\rangle|y_j\rangle|y_j'\rangle|t_0\rangle|\hat{f}_n(2\pi j/n)\rangle$$

3. 对辅助系统执行退计算：

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_j\,|j\rangle|Anc_j\rangle|\hat{f}_n(2\pi j/n)\rangle \rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} b_j\,|j\rangle|\hat{f}_n(2\pi j/n)\rangle$$

这样就实现了算法中“通过调用oracle求特征值”的功能，就可以用算法求解了

[1] S. S. Zhou, T. Loke, J. A. Izaac, and J. B. Wang, Quantum Inf. Process. 16, 82 (2016).

特殊情况

➢ 复杂度

- ❑ 计算基上的量子傅立叶变换：$O(\log^2 n/(\delta\epsilon))$，其中$\epsilon$为精度参数，$1-\delta$为幅度放大测量后的成功概率 [1]

1 $|y_k - \tilde{y}_k| < \epsilon$, where $\tilde{y}_k$ is the truncated value of y_k with accuracy $\epsilon = 2^{-p_0}$.
2 $\left|\left\langle \Psi^{\text{final}} \right| \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle |\tilde{y}_k\rangle \right)\right| \geq 1-\delta$, where $\left|\Psi^{\text{final}}\right\rangle$ is the state obtained through the QFTC algorithm.

- ❑ 整个量子算法的复杂度约为 $O[\kappa^2 \text{poly}(\log n)/(\delta\epsilon_0)]$

这里ϵ_0代表最终解量子态的误差，而ϵ是通过QFTC计算出的特征值的误差。两者关系：要使最终误差为ϵ_0，则QFTC的误差ϵ应为ϵ_0/κ。因此，复杂度中κ变成了κ^2

- ❑ 当$1/\epsilon_0$，$\kappa = O(poly(\log n))$时，量子算法具有指数加速效果

[1] S. S. Zhou, T. Loke, J. A. Izaac, and J. B. Wang, Quantum Inf. Process. 16, 82 (2016).

提纲

- Toeplitz系统的定义及性质
- 求解Toeplitz系统的量子算法
- 误差和复杂度分析
- 特殊情况：不知道生成函数f
- 小结和展望

小结

- 特征值可以直接调用生成函数来求，降低了解方程组的复杂度
- 循环矩阵可以用傅里叶矩阵对角化，对角矩阵乘以量子态，相当于把特征值放在量子态概率幅的分母上，如果有量子态形式的特征值将很容易用受控旋转来完成
- 计算基上的QFT（QFTC），实际上是利用其他复杂方法实现了类似QFT的功能（区别是QFTC把傅里叶变换后的值y_j放在了量子态上，且每一个y_j对应一个j，即$|j\rangle \xrightarrow{QFTC} |j\rangle|y_j\rangle$；而QFT是把$y_j$放在概率幅上）。所以，需要把傅里叶变换值放在量子态上（以便进一步处理）时，可以用QFTC！

展望

- 对于病态Toeplitz系统，经典算法常常结合预处理技术进行求解，如何实现其量子版本有待进一步研究
  - 文献[2]给出的预处理方法可以在一定程度上解决这里的问题。该成果使用循环矩阵作为预处理矩阵来求解一般的线性系统，没有考虑Toeplitz系统的特点，效果不一定是最优的。可以结合经典中针对Toeplitz系统的预处理方法作进一步研究。
- 用循环矩阵代替Toeplitz矩阵进行求解，这是一种近似算法，是否可以直接利用Toeplitz矩阵的结构设计出具有指数加速效果的量子算法也有待研究
- 变分量子算法

[1] Shao C, et al. Quantum circulant preconditioner for a linear system of equations. Phys. Rev. A, 2018, 98(6): 062321

谢 谢！