矩阵理论与方法

11月

内容提要 CONTENTS

- □ 课程信息
- □ 课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

    第1章 线性空间与线性变换

    1.3 两个特殊的线性空间

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\dots,e_n$下求向量坐标

问题c

问题a

1,2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\dots,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,\dots,E_n$下的矩阵A

$$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)A$$

4、A相似于若尔当标准型，则$A=PJP^{-1}$

问题b

$$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)PJP^{-1}$$

举例

多项式空间P^N,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}(x-1)^k+a_0+a_1x+\ldots+a_Nx^N\in P^N$$

问题c

0、向量$f(x)$在简单的基$1,x-1,(x-1)^2,\ldots,(x-1)^N$下的坐标

1、2、通过坐标变换得到向量$f(x)$在基$1,x,x^2,\ldots,x^N$下的坐标

问题a

1.3 两个特殊的线性空间

问题c　V是数域K上的线性空间，对任意$x \in V$

求一组基$e_1,\dots,e_n$，和x在这组基下的坐标

1.3 两个特殊的线性空间

例

$V=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3\mid x+y=0\}$是数域R上的线性空间，对任意$(x_1,x_2,x_3)\in V$

求一组基$e_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0),e_2=(0,0,1)$，和$(x_1,x_2,x_3)$在这组基下的坐标

1.3 两个特殊的线性空间

例

$V=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x+y=0\}$是数域R上的线性空间，对任意$(x_1,x_2,x_3)\in V$

求一组基$e_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0),e_2=(0,0,1)$，和$(x_1,x_2,x_3)$在这组基下的坐标

解:0、

1、求出V的一组基$e_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0),e_2=(0,0,1)$

2、求$X=(x_1,x_2,x_3)$在这组基下的坐标

1.3 两个特殊的线性空间

例

$V=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3\mid x+y=0\}$是数域R上的线性空间，对任意$(x_1,x_2,x_3)\in V$

求一组基$e_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0),e_2=(0,0,1)$，和$(x_1,x_2,x_3)$在这组基下的坐标

解:0、定义V的内积运算$(X,Y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$

1、求出V的一组基$e_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0),e_2=(0,0,1)$

2、$X=(x_1,x_2,x_3)=k_1e_1+k_2e_2$,求$k_1,k_2$

1.3 两个特殊的线性空间

例

$V=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x+y=0\}$是数域R上的线性空间，对任意$(x_1,x_2,x_3)\in V$

求一组基$e_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0),e_2=(0,0,1)$，和$(x_1,x_2,x_3)$在这组基下的坐标

解:0、定义V的内积运算$(X,Y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$

1、求出V的一组基$e_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0),e_2=(0,0,1)$

使得$(e_1,e_1)=1,(e_2,e_2)=1,(e_1,e_2)=(e_2,e_1)=0,$

2、$X=(x_1,x_2,x_3)=k_1e_1+k_2e_2$,求$k_1,k_2$

1.3 两个特殊的线性空间

$V=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x+y=0\}$是数域R上的线性空间，对任意$(x_1,x_2,x_3)\in V$

求一组基$e_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0), e_2=(0,0,1)$，和$(x_1,x_2,x_3)$在这组基下的坐标

解:0、定义V的内积运算$(X,Y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$

1、求出V的一组基$e_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0), e_2=(0,0,1)$

使得$(e_1,e_1)=1,(e_2,e_2)=1,(e_1,e_2)=(e_2,e_1)=0,$

2、$X=(x_1,x_2,x_3)=k_1e_1+k_2e_2$,求$k_1,k_2$

$\therefore k_1=(X,e_1),k_2=(X,e_2)$

1.3 两个特殊的线性空间

$V=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x+y=0\}$是数域R上的线性空间，对任意$(3,-3,5)\in V$

求一组基$e_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0), e_2=(0,0,1)$，和(3,-3,5)在这组基下的坐标

解:0、定义V的内积运算$(X,Y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$

1、求出V的一组基$e_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0), e_2=(0,0,1)$

使得$(e_1,e_1)=1,(e_2,e_2)=1,(e_1,e_2)=(e_2,e_1)=0,$

2、$X=(3,-3,5), k_1=(X,e_1)=3\sqrt{2}, k_2=(X,e_2)=5$

$$(3,-3,5)=3\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)+5(0,0,1)$$

1.3 两个特殊的线性空间

问题c　V是数域K上的线性空间，对任意$x \in V$

求一组基$e_1,\ldots,e_n$，和x在这组基下的坐标

解:0、定义V的内积运算(X,Y)

1、求出V的一组基$e_1,\ldots,e_n$

使得$(e_i,e_i)=1,(e_i,e_j)=0,i \neq j$

2、$x = k_1e_1 + k_2e_2 + \ldots + k_ne_n$,求$k_1,k_2,\ldots,k_n$

$\therefore k_i = (x,e_i)$,

1.3 两个特殊的线性空间

1）内积

2）Schmidt正交化方法

1.3 两个特殊的线性空间

定义： 设V是实数域 R上的线性空间，对V中任意

两个向量$x\quad y$,定义一个二元实函数，记 (x,y)，

(x,y)满足性质： $\forall x,y,z\in V$， $\forall k\in R$

(1) $(x,y)=(y,x)$ （交换率）

(2) $(kx,y)=k(x,y)$ （齐次性）

(3) $(x+y,z)=\left(x,z\right)+(y,z)$ （分配率）

(4) $(x,x)\geq 0$,当且仅当 $x=0$ 时 $(x,x)=0$. （正定性）

则称 (x,y)为 x和 y 的**内积**，并称这种定义了内积的

实数域 R上的线性空间V为**欧氏空间**.

1.3 两个特殊的线性空间

注： 欧氏空间 V是特殊的线性空间

① V为实数域 R上的线性空间;

② V除向量的线性运算外，还有“内积”运算;

③ $(x, y) \in R.$

1.3 两个特殊的线性空间

例1．在 R^n 中，对于向量

$$x=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad y=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

1）定义 $$(x,y)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \qquad （1）$$

易证 (x,y) 满足定义中的性质 (1)～(4).

所以，(x,y) 为内积.

这样 R^n 对于内积 (x,y) 就成为一个欧氏空间.

（ 当 $n=3$ 时，1）即为几何空间 R^3 中内积在直角坐标系下的表达式． (x,y) 即 $x\cdot y$． ）

1.3 两个特殊的线性空间

2）定义

$$(x,y)'=a_1b_1+2a_2b_2+\cdots+ka_kb_k+\cdots+na_nb_n$$

易证$(x,y)'$满足定义中的性质(1)～(4).

所以$(x,y)'$也为内积.

从而R^n对于内积$(x,y)'$也构成一个欧氏空间.

注意：由于对 $\forall x,y\in V$，未必有 $(x,y)=(x,y)'$

所以1），2）是两种不同的内积.

从而R^n对于这两种内积就构成了不同的欧氏空间.

1.3 两个特殊的线性空间

$V=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x+y=0\}$是数域R上的线性空间，对任意$(3,-3,5)\in V$

求一组基$e_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},0),e_2=(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}})$，和(3,-3,5)在这组基下的坐标

解:0、定义V的内积运算$(X,Y)=x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3$

1、求出V的一组基$e_1=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},0),e_2=(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}})$

使得$(e_1,e_1)=1,(e_2,e_2)=1,(e_1,e_2)=(e_2,e_1)=0,$

2、$X=(3,-3,5),k_1=(X,e_1)=3\sqrt{3},k_2=(X,e_2)=5\sqrt{3}$

$$(3,-3,5)=3\sqrt{3}(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},0)+5\sqrt{3}(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}})$$

1.3 两个特殊的线性空间

例2．在 $R^{m\times n}$ 中： $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$， $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$

2）定义 $(A,B)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=tr(AB^T)$ （2）

易证(A,B)满足定义中的性质 (1)～(4).

所以，(A,B)为内积.

这样 $R^{m\times n}$ 对于内积(A,B)就成为一个欧氏空间.

1.3 两个特殊的线性空间

例3. $C[a,b]$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的所有实连续函数所成线性空间，对于函数 $f(x),g(x)$ ，定义

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx \qquad （3）$$

则 $C[a,b]$ 对于（3）作成一个欧氏空间.

证：$\forall f(x),g(x),h(x)\in C(a,b),\quad \forall k\in R$

(1) $\quad (f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\int_a^b g(x)f(x)\,dx=(g,f)$

(2) $\quad (kf,g)=\int_a^b kf(x)g(x)\,dx=k\int_a^b f(x)g(x)\,dx$

$$=k(f,g)$$

1.3 两个特殊的线性空间

(3) $$(f+g,h)=\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)h(x)\,dx$$

$$=\int_a^b f(x)h(x)\,dx+\int_a^b g(x)h(x)\,dx$$

$$=(f,h)+(g,h)$$

(4) $$(f,f)=\int_a^b f^2(x)\,dx$$

$\because\ f^2(x)\geq 0,\qquad \therefore\ (f,f)\geq 0.$

且若 $f(x)\neq 0$， 则 $f^2(x)>0$， 从而 $(f,f)>0.$

故 $(f,f)=0\Leftrightarrow f(x)=0.$

因此，(f,g) 为内积， $C[a,b]$ 为欧氏空间.

1.3 两个特殊的线性空间

问题c V是数域K上的线性空间，对任意$x \in V$

求一组基$e_1,\ldots,e_n$，和x在这组基下的坐标

解:0、定义V的内积运算(X,Y) 1）内积

1、求出V的一组基$e_1,\ldots,e_n$ 2）如何求出这种基?

使得$(e_i,e_i)=1,(e_i,e_j)=0,i \neq j$

2、$x = k_1e_1 + k_2e_2 + \ldots + k_ne_n$, 求$k_1,k_2,\ldots,k_n$

$\therefore k_i = (x,e_i)$,

2. 内积的简单性质

V为欧氏空间， $\forall x, y, z \in V, \forall k \in R$

1) $(x, ky) = k(x, y), \quad \left(kx, ky\right) = k^2(x, y)$

2) $(0, y) = (x, 0) = 0$

3) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$

推广： $\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i, \sum_{i=1}^{n} \eta_j y_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j (x_i, y_j)$

3. n 维欧氏空间中内积的矩阵表示

设V为欧氏空间，$x_1, x_2, \cdots, x_n$为V的一组基，对V中

任意两个向量

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n$$

$$y = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \cdots + \eta_n x_n$$

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j x_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_i \eta_j (x_i, x_j) \qquad (4)$$

令 $a_{ij} = (x_i, x_j), \quad i, j = 1, 2, \cdots n.$

1.3 两个特殊的线性空间

$$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n},\quad X=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix} \tag{5}$$

则 $$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\eta_j=X'AY \tag{6}$$

定义：矩阵 $A=\begin{pmatrix}(x_1,x_1) & (x_1,x_2) & \cdots & (x_1,x_n)\\ (x_2,x_1) & (x_2,x_2) & \cdots & (x_2,x_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (x_n,x_1) & (x_n,x_2) & \cdots & (x_n,x_n)\end{pmatrix}$

称为基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的**度量矩阵**.

1.3 两个特殊的线性空间

注：

① 度量矩阵A是实对称矩阵.

② 由内积的正定性，度量矩阵A还是正定矩阵.

事实上，对 $\forall x \in V, x \neq 0$，即 $X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \neq 0$

有 $(x, x) = X'AX > 0$

$\therefore$ A为正定矩阵.

③对同一内积而言，不同基的度量矩阵是合同的.

$$B = C^T AC$$

1.3 两个特殊的线性空间

3. 欧氏空间中向量的长度

(1) 引入长度概念的可能性

1）在 R^3 向量 x 的长度（模）$|x| = \sqrt{x \cdot x}$.

2) 欧氏空间V中，$\forall x \in V$， $(x,x) \geq 0$

使得 $\sqrt{x \cdot x}$ 有意义.

2. 向量长度的定义

$\forall x \in V$， $|x| = \sqrt{(x,x)}$ 称为向量 x 的**长度（模）**.

特别地，当 $|x| = 1$ 时，称 x 为**单位向量**.

3. 向量长度的简单性质

1) $|x| \geq 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $|kx| = |k||x|$

3）非零向量 x 的单位化： $\dfrac{1}{|x|}x$.

1.3 两个特殊的线性空间

欧氏空间中两非零向量的夹角

定义1：设V为欧氏空间，x、y 为V中任意两非零向量，x、y 的**夹角**定义为

$$\langle x, y\rangle = arc\cos\frac{(x, y)}{|x||y|}$$

$$\left(\ 0 \le \langle x, y\rangle \le \pi\ \right)$$

1.3 两个特殊的线性空间

定义2：设 x、y 为欧氏空间中两个向量，若内积

$$\left(x, y\right) = 0$$

则称 x 与 y **正交**或**互相垂直**，记作 $x \perp y$.

注：

① 零向量与任意向量正交.

② $x \perp y \Longleftrightarrow \langle x, y\rangle = \frac{\pi}{2}$，即 $\cos\langle x, y\rangle = 0$.

1.3 两个特殊的线性空间

例： 已知 $x=(2,1,3,2)$， $y=(1,2,-2,1)$

在通常的内积定义下，求 $|x|,(x,y),\langle x,y\rangle,|x-y|$.

1.3 两个特殊的线性空间

例： 已知 $x=(2,1,3,2)$， $y=(1,2,-2,1)$

在通常的内积定义下，求 $|x|,(x,y),\langle x,y\rangle,|x-y|$.

解：$|x|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{2^2+1^2+3^2+2^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$(x,y)=2\times1+1\times2+3\times(-2)+2\times1=0 \quad \therefore \quad \langle x,y\rangle=\dfrac{\pi}{2}$

又 $x-y=(1,-1,5,1)$

$\therefore \quad |x-y|=\sqrt{1^2+(-1)^2+5^2+1^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

通常称 $|x-y|$ 为 x 与 y 的距离，记作 $d(x,y)$.

1.3 两个特殊的线性空间

1）内积

2）Schmidt正交化方法

1.3 两个特殊的线性空间

问题c　V是数域K上的线性空间，对任意$x \in V$

求一组基$e_1,\ldots,e_n$，和x在这组基下的坐标

解:0、定义V的内积运算(X,Y)

1）内积

1、求出V的一组基$e_1,\ldots,e_n$

2）Schmidt正交化方法

使得$(e_i,e_i)=1,(e_i,e_j)=0, i \neq j$

2、$x = k_1e_1 + k_2e_2 + \ldots + k_ne_n$, 求$k_1,k_2,\ldots,k_n$

$\therefore k_i = (x, e_i)$,

1.3 作业（第五版）

1、定义：1.22

2、习题1.3：2

1.3 作业（第三版）

1、定义：1.22

2、习题1.3：2

下课，谢谢大家！