矩阵理论与方法

10月

内容提要 CONTENTS

- □ 课程信息
- □ 课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

  第1章 线性空间与线性变换

  1.2 线性变换及其矩阵

回顾

1、线型空间的定义

2、基、向量在基下的坐标

3、线型变换的定义和基本运算

4、线型变换在基下的矩阵

1、$x=(E_1,\dots,E_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, y=(E_1,\dots,E_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},$

2、$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)A$

3、$y=T(x)=T(E_1,\dots,E_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=(E_1,\dots,E_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

4、$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^{k}\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\ldots,e_n$下求向量坐标

1、2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\ldots,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,\ldots,E_n$下的矩阵A

4、若T有N个线型无关特征向量，则$A=P^{-1}\Lambda P$

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^{k}\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\ldots,e_n$下求向量坐标

问题c

问题a

1、2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\ldots,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,\ldots,E_n$下的矩阵A

4、若T有N个线型无关特征向量，则$A=P^{-1}\Lambda P$

问题b

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\ldots,e_n$下求向量坐标

问题c

问题a

1､2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\ldots,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,\ldots,E_n$下的矩阵A

$$T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)A$$

4、若T有N个线型无关特征向量，则$A=P^{-1}\Lambda P$

问题b

$$T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)P^{-1}\Lambda P$$

1.2 线性变换及其矩阵

问题b　　(先反过来看)

设V是线性空间，$E_1,\dots,E_n$是V的一组基，T是V的一个线型变换，

有$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)A$, 其中$A=P^{-1}\Lambda P$

求：$x\in V,\lambda\in K$, 使得$Tx=\lambda x$

回顾线性代数--矩阵的特征值特征向量

$$Ax=\lambda x$$

1.2 线性变换及其矩阵

设V是线性空间，$E_1,...,E_n$是V的一组基，T是V的一个线型变换，

有$T(E_1,...,E_n)=(E_1,...,E_n)A,$其中$A=P^{-1}\Lambda P$

求：$x\in V,\lambda\in K,$使得$Tx=\lambda x$

解：

由$T(E_1,...,E_n)=(E_1,...,E_n)P^{-1}\Lambda P,\Rightarrow T(E_1,...,E_n)P^{-1}=(E_1,...,E_n)P^{-1}\Lambda$

令$(X_1,...,X_n)=(E_1,...,E_n)P^{-1},\Rightarrow T(X_1,...,X_n)=(X_1,...,X_n)\Lambda$

得到$T(X_k)=\lambda_k X_k,k=1,2,...,n$

1.2 线性变换及其矩阵

问题b

设V是线性空间，$E_1,\ldots,E_n$是V的一组基，T是V的一个线型变换，有$T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)A,$

现又有V的另一组基$X_1,\ldots,X_n$，满足$TX_k=\lambda_k X_k, k=1,2,\ldots,n$

求：可逆矩阵P和对角矩阵Λ,使得$A=P^{-1}\Lambda P$

1.2 线性变换及其矩阵

引入

有限维线性空间V中取定一组基后，V的任一线性变换都可以用矩阵来表示．为了研究线性变换性质，希望这个矩阵越简单越好，如对角矩阵．

从本节开始，我们主要讨论，如何选择一组适当的基，使V的某个线性变换在这组基下的矩阵就是一个对角矩阵？

一、特征值与特征向量

定义： 设 T 是数域K上线性空间V的一个线性变换，

若对于K中的一个数 λ_0，存在一个V的非零向量 x，

使得

$$T(x)=\lambda_0 x \quad ,$$

则称 λ_0 为 T 的一个**特征值**，称 x 为 T 的属于特征值

λ_0 的**特征向量**.

求特征值与特征向量的一般步骤

i) 在V中任取一组基 $E_1, E_2, \ldots, E_n$,写出T在这组基下的矩阵**A** .

求特征值与特征向量的一般步骤

i) 在V中任取一组基 $E_1, E_2, \ldots, E_n$,写出 T 在这组基下的矩阵A .

ii) 求A的特征多项式 $|\lambda I - A|$ 在K上的全部根它们就是 T 的全部特征值.

iii) 把所求得的特征值逐个代入方程组

$$(\lambda I - A)X = 0$$

并求出它的一组基础解系.(它们就是属于这个特征值的全部线性无关的特征向量在基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 下的坐标.)

求特征值与特征向量的一般步骤

i) 在V中任取一组基 $E_1, E_2, \ldots, E_n$,写出T在这组基下的矩阵A .

$ii-iii)$求出$\lambda_k, x_k, k=1,2,\ldots,K$,使得$Ax_k=\lambda_k x_k$

求特征值与特征向量的一般步骤

i) 在V中任取一组基 $E_1, E_2, \ldots, E_n$ **写出** T **在这组基下的矩阵A .**

$ii-iii)$求出$\lambda_k, x_k, k=1,2,\ldots,K$, 使得$Ax_k=\lambda_k x_k$

令$X_k=(E_1,E_2,\ldots,E_n)x_k$, 有

$$\begin{aligned} TX_k &= T(E_1,E_2,\ldots,E_n)x_k=(E_1,E_2,\ldots,E_n)Ax_k \\ &=(E_1,E_2,\ldots,E_n)\lambda_k x_k=\lambda_k(E_1,E_2,\ldots,E_n)x_k \\ &=\lambda_k X_k \end{aligned}$$

$iiii)\lambda_k, X_k=(E_1,E_2,\ldots,E_n)x_k, k=1,2,\ldots,K$

是T的特征值和特征向量

1.2 线性变换及其矩阵

例： 设线性变换 T 在基 x_1, x_2, x_3 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

求 T 特征值与特征向量.

1.2 线性变换及其矩阵

例： 设线性变换 T 在基 x_1, x_2, x_3 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

求 T 特征值与特征向量.

解：A的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$$

故 T 的特征值为： $\lambda_1=-1$（二重），$\lambda_2=5$

把 $\lambda=-1$ 代入齐次方程组 $(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{cases}-2x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2-2x_3=0\\-2x_1-2x_2-2x_3=0\end{cases}\qquad \text{即}\quad x_1+x_2+x_3=0$$

它的一个基础解系为：$(1,0,-1)$，$(0,1,-1)$

因此，属于-1的两个线性无关的特征向量为

$$y_1=x_1-x_3，\ y_2=x_2-x_3$$

而属于-1的全部特征向量为

$$k_1y_1+k_2y_2,\qquad (k_1,k_2\in K\text{不全为零})$$

把 $\lambda=5$ 代入齐次方程组 $(\lambda I-A)X=0$，得

$$\begin{cases} 4x_1-2x_2-2x_3=0 \\ -2x_1+4x_2-2x_3=0 \\ -2x_1-2x_2+4x_3=0 \end{cases}$$

解得它的一个基础解系为：(1,1,1)

因此，属于5的一个线性无关的特征向量为

$$y_3=x_1+x_2+x_3$$

而属于5的全部特征向量为

$$k_3y_3, \quad (k_3\in K,\ k_3\neq 0\ )$$

问题b

设V是线性空间，$E_1,\dots,E_n$是V的一组基，T是V的一个线型变换，

有$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)A$,

又有$Ax_k=\lambda_k x_k, k=1,2,\dots,n$，$x_k$线性无关

求：可逆矩阵P和对角矩阵Λ, 使得$A=P^{-1}\Lambda P$

1.2 线性变换及其矩阵

例： 设线性变换 T 在基 x_1, x_2, x_3 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

求：可逆矩阵P和对角矩阵Λ,使得$A=P^{-1}\Lambda P$

1.2 线性变换及其矩阵

例： 设线性变换 T 在基 x_1, x_2, x_3 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

求：可逆矩阵P和对角矩阵Λ, 使得$A = P^{-1}\Lambda P$

解：$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5,$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

解：$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5,$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A\alpha = \lambda\alpha,$

令$P^{-1} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 线性变换及其矩阵

解：$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5,$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A\alpha = \lambda\alpha$,

令$P^{-1} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$\Rightarrow AP^{-1} = P^{-1}\Lambda \Rightarrow A = P^{-1}\Lambda P$

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\dots,e_n$下求向量坐标

问题c

问题a

1、2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\dots,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,\dots,E_n$下的矩阵A　　$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)A$

4、若T有N个线型无关特征向量，则$A=P^{-1}\Lambda P$

问题b

$$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)P^{-1}\Lambda P$$

回顾

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,\dots,e_n$下求向量坐标

问题c

问题a

1,2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\dots,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,\dots,E_n$下的矩阵A　　$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)A$

4、T不一定有N个线型无关特征向量，则$A=P^{-1}BP$

问题b'

$$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)P^{-1}BP$$

1.2 线性变换及其矩阵

设A、B为数域K上的两个n阶矩阵，若存在可逆矩阵 $P \in K^{n\times n}$，使得 $B = P^{-1}AP$

则称矩阵A相似于B，记为 $A \sim B$.

相似是一个等价关系，即满足如下三条性质：

① 反身性：$A \sim A$. （$\because$ $A=E^{-1}AE$.）

② 对称性：$A \sim B \Rightarrow B \sim A$.

③ 传递性：$A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

1.2 作业（第五版）

1、定义：1.16、1.17

2、例题：1.18

3、习题1.2：12

1.2 作业（第三版）

1、定义：1.16、1.17

2、例题：如下：

例 1.18 设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$，线性空间

$$V=\{X=(\boldsymbol{X}_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{22}=0, x_{ij}\in\mathbf{R}\}$$

中的线性变换为 $T(\boldsymbol{X})=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\forall\boldsymbol{X}\in V)$，求 T 的特征值与特征向量.

3、习题1.2：12

下课，谢谢大家！