矩阵理论与方法

11月

内容提要 CONTENTS

- □ 课程信息
- □ 课程介绍
- □ 矩阵理论与方法

  第1章 线性空间与线性变换

  1.3 两个特殊的线性空间

回顾(旧1)

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、在一组简单的基$e_1,...,e_n$下求向量坐标

1、2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,...,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,...,E_n$下的矩阵A　　$T(E_1,...,E_n)=(E_1,...,E_n)A$

4、A相似于若尔当标准型，则$A=PJP^{-1}$

$$T(E_1,...,E_n)=(E_1,...,E_n)PJP^{-1}$$

回顾(旧2)

设V是线性空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、求一组标准正交基$e_1,\ldots,e_n$，并求向量x的坐标

1、由$e_1,\ldots,e_n$生成新的基$E_1,\ldots,E_n$

2、通过坐标变换得到向量在基$E_1,\ldots,E_n$下的坐标

3、求T在基$E_1,\ldots,E_n$下的矩阵A $\quad T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)A$

3'、其中A直接就是若尔当标准型，则$A=J$

$$T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)J$$

总结

设V是欧氏空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

总结

设V是欧氏空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、任意找一组基，利用Schmidt正交化方法得到
V的一组标准正交基$e_1,...,e_n,x=k_1e_1+...+k_ne_n$,其中$k_i=(x,e_i)$

0.1、求T在基$e_1,...,e_n$下的矩阵$A_0\Rightarrow T(e_1,...,e_n)=(e_1,...,e_n)A_0$

0.2、其中$A_0=PJP^{-1}$,J是Jordan标准型$\Rightarrow T(e_1,...,e_n)=(e_1,...,e_n)PJP^{-1}$

0.3、$T(e_1,...,e_n)P=(e_1,...,e_n)PJ$

总结

设V是欧氏空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^{k}\right)(x)$，其中$x\in V$

1、得到一组新的基$(E_1,\ldots,E_n)=(e_1,\ldots,e_n)P$,

2、通过坐标变换得到$x=(E_1,\ldots,E_n)P^{-1}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=(E_1,\ldots,E_n)\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}$

3、T在新基下的矩阵：$T(E_1,\ldots,E_n)=(E_1,\ldots,E_n)J$

4、$T(x)=(E_1,\ldots,E_n)J\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}\Rightarrow\left(T^{k}\right)(x)=(E_1,\ldots,E_n)J^{k}\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}$

1.3 线性变换及其矩阵

例： 设矩阵空间 $R^{2\times 2}$ 的子空间为

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}$$

V中的线性变换为 $T(X)=X+2X^T$

求 $\left(T^3\right)(X), X=\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\in V$

求 $\left(T^k\right)(X), \forall X\in V$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^T$$

解:0、任意找一组基，利用Schmidt正交化方法得到

V的一组标准正交基$e_1,\ldots,e_n$, $x=k_1e_1+\ldots+k_ne_n$, 其中$k_i=(x,e_i)$

令$x_{11}=-x_{12}-x_{21}$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^T$$

解:0、任意找一组基，利用Schmidt正交化方法得到

V的一组标准正交基$e_1,\ldots,e_n$, $x=k_1e_1+\ldots+k_ne_n$, 其中$k_i=(x,e_i)$

$$X=\begin{pmatrix}-x_{12}-x_{21} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}-y_{12}-y_{21} & y_{12}\\ y_{21} & y_{22}\end{pmatrix}$$

定义V的内积为$(X,Y)=tr(XY^T)$

$$=(x_{12}+x_{21})(y_{12}+y_{21})+x_{12}y_{12}+x_{21}y_{21}+x_{22}y_{22}$$

任意找一组基，$X=\begin{pmatrix}-x_{12}-x_{21} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$

$$=x_{12}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+x_{21}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+x_{22}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=x_{12}X_1+x_{21}X_2+x_{22}X_3$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^T$$

解:0、任意找一组基，利用Schmidt正交化方法得到

V的一组标准正交基$e_1,\dots,e_n, x=k_1e_1+\dots+k_ne_n$，其中$k_i=(x,e_i)$

$$X_1=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, X_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$Y_1'=X_1=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$Y_2'=X_2-\frac{(X_2,Y_1')}{(Y_1',Y_1')}Y_1'$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$Y_2'=X_3-\frac{(X_3,Y_2')}{(Y_2',Y_2')}Y_2'-\frac{(X_3,Y_1')}{(Y_1',Y_1')}Y_1'$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{0}{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\frac{0}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

得到V的一组正交基Y_1',Y_2',Y_3'

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^T$$

解:0、任意找一组基，利用Schmidt正交化方法得到

V的一组标准正交基$e_1,\ldots,e_n$, $x=k_1e_1+\ldots+k_ne_n$, 其中$k_i=(x,e_i)$

$$Y_1'=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, Y_2'=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}, Y_3'=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$e_1=\frac{1}{|Y_1'|}Y_1'=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$e_2=\frac{1}{|Y_2'|}Y_2'=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$e_3=\frac{1}{|Y_3'|}Y_3'=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

得到V的一组标准正交基e_1,e_2,e_3

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^T$$

解:0、任意找一组基，利用Schmidt正交化方法得到

V的一组标准正交基$e_1,\dots,e_n$, $x=k_1e_1+\dots+k_ne_n$, 其中$k_i=(x,e_i)$

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, e_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$x=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 0 & -3\end{pmatrix}=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{pmatrix}$$

$$k_1=(x,e_1)=-4\sqrt{2}$$
$$k_2=(x,e_2)=0$$
$$k_3=(x,e_3)=-3$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2} \mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^T$$

解:0.1、求T在基$e_1,\ldots,e_n$下的矩阵$A_0 \Rightarrow T(e_1,\ldots,e_n)=(e_1,\ldots,e_n)A_0$

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, e_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$Te_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}, Te_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}, Te_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^T$$

解:0.1、求T在基$e_1,\ldots,e_n$下的矩阵$A_0 \Rightarrow T(e_1,\ldots,e_n)=(e_1,\ldots,e_n)A_0$

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, e_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$Te_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}, Te_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}, Te_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$Te_1=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{pmatrix}$$

$$k_1=(Te_1,e_1)=2$$

$$k_2=(Te_1,e_2)=\sqrt{3}$$

$$k_3=(Te_1,e_3)=0$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^T$$

解:0.1、求T在基$e_1,\ldots,e_n$下的矩阵$A_0 \Rightarrow T(e_1,\ldots,e_n)=(e_1,\ldots,e_n)A_0$

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, e_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$Te_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}, Te_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}, Te_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$Te_2=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{pmatrix}$$

$$k_1=(Te_2,e_1)=\sqrt{3}$$
$$k_2=(Te_2,e_2)=0$$
$$k_3=(Te_2,e_3)=0$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^T$$

解:0.1、求T在基$e_1,\ldots,e_n$下的矩阵$A_0 \Rightarrow T(e_1,\ldots,e_n)=(e_1,\ldots,e_n)A_0$

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, e_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$Te_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}, Te_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}, Te_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$Te_3=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{pmatrix}$$

$$k_1=(Te_3,e_1)=0$$
$$k_2=(Te_3,e_2)=0$$
$$k_3=(Te_3,e_3)=3$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2} \mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^T$$

解:0.1、求T在基$e_1,\dots,e_n$下的矩阵$A_0 \Rightarrow T(e_1,\dots,e_n)=(e_1,\dots,e_n)A_0$

$$Te_1=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}2\\ \sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$Te_2=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$Te_3=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T(e_1,\dots,e_n)$$

$$=(e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix}2 & \sqrt{3} & 0\\ \sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$=(e_1,\dots,e_n)A_0$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^T$$

解:0.2、其中$A_0=PJP^{-1}$, J是Jordan标准型$\Rightarrow T(e_1,\dots,e_n)=(e_1,\dots,e_n)PJP^{-1}$

$$\lambda I - A_0=\begin{pmatrix}\lambda-2 & -\sqrt{3} & 0\\ -\sqrt{3} & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix} \qquad A_0=\begin{pmatrix}2 & \sqrt{3} & 0\\ \sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0,x_{ij}\in R\},T(X)=X+2X^T$$

解:0.2、其中$A_0=PJP^{-1}$,J是Jordan标准型$\Rightarrow T(e_1,\ldots,e_n)=(e_1,\ldots,e_n)PJP^{-1}$

$$\lambda I-A_0=\begin{pmatrix}\lambda-2 & -\sqrt{3} & 0\\ -\sqrt{3} & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & \lambda-2 & 0\\ \lambda & -\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 0 & 0\\ \lambda & \dfrac{\lambda-2}{\sqrt{3}}\lambda-\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix}$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0,x_{ij}\in R\},T(X)=X+2X^T$$

解:0.2、其中$A_0=PJP^{-1}$, J是Jordan标准型$\Rightarrow T(e_1,\dots,e_n)=(e_1,\dots,e_n)PJP^{-1}$

$$\lambda I-A_0=\begin{pmatrix}\lambda-2 & -\sqrt{3} & 0\\ -\sqrt{3} & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & \lambda-2 & 0\\ \lambda & -\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 0 & 0\\ \lambda & \frac{\lambda-2}{\sqrt{3}}\lambda-\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda+1)(\lambda-3) & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix}$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0,x_{ij}\in R\},T(X)=X+2X^T$$

解:0.2、其中$A_0=PJP^{-1}$,J是Jordan标准型$\Rightarrow T(e_1,\ldots,e_n)=(e_1,\ldots,e_n)PJP^{-1}$

$$\lambda I-A_0=\begin{pmatrix}\lambda-2 & -\sqrt{3} & 0\\ -\sqrt{3} & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & \lambda-2 & 0\\ \lambda & -\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 0 & 0\\ \lambda & \frac{\lambda-2}{\sqrt{3}}\lambda-\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda+1)(\lambda-3) & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\\ 0 & (\lambda+1)(\lambda-3) & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-3) & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-3)\end{pmatrix}$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^T$$

解:0.2、其中$A_0=PJP^{-1}$，J是Jordan标准型$\Rightarrow T(e_1,\ldots,e_n)=(e_1,\ldots,e_n)PJP^{-1}$

$$\lambda I-A_0=\begin{pmatrix}\lambda-2 & -\sqrt{3} & 0\\ -\sqrt{3} & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-3) & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)(\lambda-3)\end{pmatrix}$$

不变因子：$d_1(\lambda)=1$，$d_2(\lambda)=(\lambda-3)$，$d_3(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-3)$

初等因子：$(\lambda-3)$; $(\lambda+1)$，$(\lambda-3)$

初等因子组：$(\lambda-3)$, $(\lambda+1)$, $(\lambda-3)$

Jordan块：$J_1(\lambda_1)=(3), J_2(\lambda_2)=(-1), J_3(\lambda_3)=(3)$,

$$Jordan\text{标准型：}J=\begin{pmatrix}3 & & \\ & -1 & \\ & & 3\end{pmatrix}$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0,x_{ij}\in R\},T(X)=X+2X^T$$

解:0.2、其中$A_0=PJP^{-1}$, J是Jordan标准型$\Rightarrow T(e_1,\ldots,e_n)=(e_1,\ldots,e_n)PJP^{-1}$

$$A_0=\begin{pmatrix}2&\sqrt{3}&0\\ \sqrt{3}&0&0\\ 0&0&3\end{pmatrix}$$

*Jordan*标准型：$J=\begin{pmatrix}3&&\\&-1&\\&&3\end{pmatrix}$

$$P=(x_1,x_2,x_3),PJ=A_0P$$

$$\Rightarrow(3x_1,-x_2,3x_3)=(A_0x_1,A_0x_2,A_0x_3)$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0,x_{ij}\in R\},T(X)=X+2X^T$$

解:0.2、其中$A_0=PJP^{-1}$, J是Jordan标准型$\Rightarrow T(e_1,\ldots,e_n)=(e_1,\ldots,e_n)PJP^{-1}$

$$A_0=\begin{pmatrix}2&\sqrt{3}&0\\ \sqrt{3}&0&0\\ 0&0&3\end{pmatrix}$$

$$(3x_1,-x_2,3x_3)=(A_0x_1,A_0x_2,A_0x_3)$$

$$(3I-A_0)x_1=\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}&\\ -\sqrt{3}&3&\\ &&0\end{pmatrix}x_1=0$$

$$(-I-A_0)x_2=\begin{pmatrix}-3&-\sqrt{3}&\\ -\sqrt{3}&-1&\\ &&-4\end{pmatrix}x_2=0$$

$$(3I-A_0)x_3=\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}&\\ -\sqrt{3}&3&\\ &&0\end{pmatrix}x_3=0$$

$$\Rightarrow x_1=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\\ 0\end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix},x_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^{T}$$

解:0.2、其中$A_0=PJP^{-1}$, J是Jordan标准型$\Rightarrow T(e_1,\dots,e_n)=(e_1,\dots,e_n)PJP^{-1}$

$$A_0=\begin{pmatrix}2 & \sqrt{3} & 0\\ \sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$Jordan\text{标准型：}J=\begin{pmatrix}3 & & \\ & -1 & \\ & & 3\end{pmatrix}$$

$$x_1=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, x_2=\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}, x_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

$$P=(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 & 0\\ 1 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^T$$

解:0.3、$T(e_1,\ldots,e_n)P=(e_1,\ldots,e_n)PJ$

1、得到一组新的基$(E_1,\ldots,E_n)=(e_1,\ldots,e_n)P$,

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, e_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad P=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 & 0\\ 1 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0,x_{ij}\in R\},T(X)=X+2X^T$$

解:0.3、$T(e_1,...,e_n)P=(e_1,...,e_n)PJ$

1、得到一组新的基$(E_1,...,E_n)=(e_1,...,e_n)P,$

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},e_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 & 0\\ 1 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$E_1=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$E_2=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}=\sqrt{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$E_3=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^T$$

解:0.3、$T(e_1,\ldots,e_n)P=(e_1,\ldots,e_n)PJ$

1、得到一组新的基$(E_1,\ldots,E_n)=(e_1,\ldots,e_n)P,$

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, e_2=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 & 0\\ 1 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$E_1=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$J=\begin{pmatrix}3 & & \\ & -1 & \\ & & 3\end{pmatrix}$$

$$E_2=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}=\sqrt{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$T(E_1,E_2,E_3)=(E_1,E_2,E_3)J$$

$$E_3=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^T$$

解:2、通过坐标变换得到$x=(E_1,\ldots,E_n)P^{-1}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=(E_1,\ldots,E_n)\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}$

$$x=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 0 & -3\end{pmatrix}=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix}-4\sqrt{2}\\ 0\\ -3\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=(E_1,E_2,E_3)P^{-1}\begin{pmatrix}-4\sqrt{2}\\ 0\\ -3\end{pmatrix}=(E_1,E_2,E_3)\begin{pmatrix}-\sqrt{6}\\ \sqrt{2}\\ -3\end{pmatrix}$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^T$$

解:4、$T(x)=(E_1,\ldots,E_n)J\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \Rightarrow \left(T^k\right)(x)=(E_1,\ldots,E_n)J^k\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$

$$\left(T^3\right)(x)=(E_1,E_2,E_3)\begin{pmatrix} 27 & & \\ & -1 & \\ & & 27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ \sqrt{2} \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 108 & -52 \\ -56 & -81 \end{pmatrix}$$

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0, x_{ij}\in R\}, T(X)=X+2X^T$$

解:4、$T(x)=(E_1,\ldots,E_n)J\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}\Rightarrow\left(T^k\right)(x)=(E_1,\ldots,E_n)J^k\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}$

$$\left(T^3\right)(x)=(E_1,E_2,E_3)\begin{pmatrix}27 & & \\ & -1 & \\ & & 27\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{6}\\ \sqrt{2}\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}108 & -52\\ -56 & -81\end{pmatrix}$$

$$\left(T^k\right)(x)=(E_1,E_2,E_3)\begin{pmatrix}3^k & & \\ & (-1)^k & \\ & & 3^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(x,e_1)\\ (x,e_2)\\ (x,e_3)\end{pmatrix}$$

总结

设V是欧氏空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

0、任意找一组基，利用Schmidt正交化方法得到
V的一组标准正交基$e_1,\ldots,e_n,x=k_1e_1+\ldots+k_ne_n$,其中$k_i=(x,e_i)$

0.1、求T在基$e_1,\ldots,e_n$下的矩阵$A_0\Rightarrow T(e_1,\ldots,e_n)=(e_1,\ldots,e_n)A_0$

0.2、其中$A_0=PJP^{-1},J$是Jordan标准型$\Rightarrow T(e_1,\ldots,e_n)=(e_1,\ldots,e_n)PJP^{-1}$

0.3、$T(e_1,\ldots,e_n)P=(e_1,\ldots,e_n)PJ$

总结

设V是欧氏空间，T是V上的一个线性变换，求$z=\left(T^k\right)(x)$，其中$x\in V$

1、得到一组新的基$(E_1,\dots,E_n)=(e_1,\dots,e_n)P$,

2、通过坐标变换得到$x=(E_1,\dots,E_n)P^{-1}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=(E_1,\dots,E_n)\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}$

3、T在新基下的矩阵：$T(E_1,\dots,E_n)=(E_1,\dots,E_n)J$

4、$T(x)=(E_1,\dots,E_n)J\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}\Rightarrow\left(T^k\right)(x)=(E_1,\dots,E_n)J^k\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}$

1.3 作业（第五版）

1、本PPT P8 例题

2、例题：P72 1.36

3、习题1.3：15

1.3 作业（第三版）

1、本PPT P8 例题

2、

例 1.36　在欧氏空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积定义为 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})$，子空间

$$V=\left\{\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\middle|\, x_3-x_4=0\right\}$$

V 中的线性变换为

$$T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_0\quad(\forall \boldsymbol{X}\in V),\quad \boldsymbol{B}_0=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

(1) 求 V 的一个标准正交基；

(2) 验证 T 是 V 中的对称变换；

(3) 求 V 的一个标准正交基，使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

3、

15. 在欧氏空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的内积定义为 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})$，子空间

$$V=\left\{\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\middle|\, \begin{matrix}x_1-x_4=0\\ x_2-x_3=0\end{matrix}\right\}$$

V 中的线性变换为

$$T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\quad(\forall \boldsymbol{X}\in V),\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

(1) 求 V 的一个标准正交基；

(2) 验证 T 是 V 中的对称变换；

(3) 求 V 的一个标准正交基，使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

$$V=\{X=(x_{ij})_{2\times2}\mid x_{11}+x_{12}+x_{21}=0,x_{ij}\in R\},T(X)=X+2X^T$$

解:0.2、其中$A_0=PJP^{-1}$,J是Jordan标准型$\Rightarrow T(e_1,\ldots,e_n)=(e_1,\ldots,e_n)PJP^{-1}$

$$A_0=\begin{pmatrix}2&\sqrt{3}&0\\\sqrt{3}&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$(3x_1,-x_2,3x_3)=(A_0x_1,A_0x_2,A_0x_3)$$

$$(3I-A_0)x_1=\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}&\\-\sqrt{3}&3&\\&&0\end{pmatrix}x_1=0$$

$$(-I-A_0)x_2=\begin{pmatrix}-3&-\sqrt{3}&\\-\sqrt{3}&-1&\\&&-4\end{pmatrix}x_2=0$$

$$(3I-A_0)x_3=\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}&\\-\sqrt{3}&3&\\&&0\end{pmatrix}x_3=0$$

$$\Rightarrow x_1=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\\0\end{pmatrix},x_2=\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix},x_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

额外补充(正规矩阵的正交相似对角化)

$$\Rightarrow \hat{x}_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\\0\end{pmatrix},\hat{x}_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix},\hat{x}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

下课，谢谢大家！