§8.6 秩和检验

在§8.2节中介绍的两个独立样本的检验法是基于两独立样本都是来自于正态总体的假设.而在不少情形中,这种前提条件并不一定成立.既使能通过正态性检验,在样本容量较小时,其有效性也值得怀疑.于是我们得另辟蹊径,寻找不需要正态性假设的检验方法.

当然一点假设都没有是不现实的.这里我们假设:两总体，的分布都是连续型分布，其分布函数分别为和,并且和的形式相同只相差一个平移.

在这样的假定(或模型)下,如果,则对于,总有

,

这说明相对于倾向于取更大的值,这种情况我们称为随机地大于.如果,则随机地小于.如果,则两分布相同.

一般地，若随机变量，的分布函数和满足对于,有



则我们称随机地大于.

我们考虑如下假设检验问题:

(1) 对 .

(2)  对 .

(3)  对 .

在以上设定的模型下,上面假设分别等价于如下假设

(1) 对 .

(2)  对 .

(3)  对 .

由于对和的形状没有作任何假定,利用原有尺寸的观测进行分析己经行不通了.我们可以用秩替代原有尺寸的观测行统计分析.这样做至少有两个优势:(1)分析结果关于任何单调变换都是不变的;(2)可以减轻离群值的影响(即提高稳健性).下面介绍秩和检验方法.

设为来自某连续型总体的简单随机样本.由于总体具有连续分布，从而以概率1保证样本中各样品互不相等.将样本从小到大排列成.若,则称在样本中的秩为,简称的秩为.以及的任意函数称为秩统计量.

秩统计量服从离散分布,它的所有可能取值共有个,而且取每个可能值的概率均为,其中为的任一置换.这说明服从离散均匀分布.由此可见,秩统计量的分布与总体服从什么样的分布是没有关系的.

设简单随机样本和分别来自相总体和,如果将这两样本合在一起从小到大排序的话,那么在时，在合样本中排序位置既不会倾向于排在左边也不会倾向于排在右边，即在合样本中的秩的和既不会偏大也不会偏小；而在时，会倾向于排在左边或右边.即合样本中来自的样本的秩和会偏大或偏小,因此我们可在的秩和的值偏小或偏大的时候拒绝原假设即接受备择假设.这就是Wilcoxon积和检验的思想.

在合样本中,记的秩为,样本的秩和为



取为检验统计量,对于检验问题（1）,当偏大或偏小时,可拒绝原假设,因此该检验问题的拒绝域的形式为或.同样的分析可得检验问题（2）的拒绝域的形式为;检验问题（3）的拒绝域的形式为.

在原假设成立时,即时,合样本的秩统计量服从离散均匀分布.利用这一性质,我们可确定的概率分布,从而确定拒绝域的临界值或计算检验的值. 对于较小的,人们构造了Wilcoxon秩和检验统计量分位数表,查表可以得到检验的值及拒绝域的临界值.

我们在这里假设观测值互不相等.而在实际中,出现相同的观测值也属正常,此时相同值的秩就取为它们的秩的平均值,只要这种情况较少,就不会过度影响显著性水平.由于,在秩和检验方法中可在,之间任选其一作为检验统计量.在实用中,常选容量较小的样本的秩和作为检验统计量.

在样本容量很大时,利用以上方法计算检验的值就会很麻烦,我们可以利用的渐近分布解决.有如下结论.

定理 在具有相同的连续分布时，则在样本容量都趋于无穷大时，秩和检验统计量具有渐近正态性：



这里.

由此定理，在大样本场合，可由正态分布得出检验问题的值. 出现相同的观测值时,上述定理中的要作修正,此处不再讨论了.

例P209,P211

我们可以从另外角度推导秩和检验.

设样本和分别来自相互独立的连续型总体和.和的分布函数分别为和.考虑检验问题

,对 .

在时,检验问题化为

 对 .

在原假设成立时, 有



而备择假设为真时,则有



令.那么，上述检验问题可简化为关于参数的检验问题，

 对 

显然



是的一个无偏估计.其中



统计量是Mann-Whitney于1974年提出的,人们称它为Mann-Whitney统计量.由于在备择假设成立时，有取较大值的趋势，所以拒绝域具有形式:在.

可以证明

，

可见统计量可以由秩和检验统计量表示.因此利用统计量和统计量对以上检验问题所做的检验是等效的.

补充

符号检验，符号秩检验

为了更好地理解符号秩检验的统计思想,我们先介绍其统计模型.

配对样本.为来自二维总体的简单随机样本,. 每对的样本的差值为来自总体的简单随机样本.如果试验没有任何效应,那么的分布关于零对称;如果试验有效应, 那么的分布关于某个非零常数对称.因此总体具有关于参数对称的连续分布.对配对样本的统计推断就是关于参数的统计推断.常考虑如下假设检验问题:

(1)  对 

(2)  对 

(3)  对 

令

,



其中记号“”表示记数.对于(1),显然可以在比较小或比较大时拒绝原假设,认为.因此(1)的拒绝域的形式为或;类似地可知(2)的拒绝域的形式为;(3) 的拒绝域的形式为.由于在原假设成立时,检验统计量～,因此可以容易地确定拒绝域的临界值以及计算出检在的值.这个检验方法称为符号检验.这种方法可用于对总体分位数或中位数的检验.

例(P414,例7.6.3)

符号检验仅仅用到了样本是正数,还是负数的信息,而没有使用样本数据大小的信息.它并不能有效地解决对称中心是否等于0的检验问题.下面所述的符号秩和检验方法用到了这两方面的信息,它是符号检验的改进.

我们先将每个样品都取绝对值.设在中的秩为,符号秩和检验的检验统计量为

，

其中.

显然,不仅包含有样本数据是正数还是负数的信息,而且还包含有样本数据大小的信息.和符号检验相类似, (1)的拒绝域的形式为或;(2)的拒绝域的形式为;(3) 的拒绝域的形式为.

为了求该检验的值和检验的拒绝域临界值,就得知道检验统计量的零分布或渐近的零分布.关于检验统计量的精确分布我们不去讨论了,在比较小时,人们已将其制成了表,我们查表即可.在比较大时, 我们无法利用符号秩和检验统计量的累积概率表，因而难以计算检验的值.这时，我们需借助的渐近分布,有如下结论.

定理 如果总体的分布是关于原点对称的连续型分布，则在样本容量趋于无穷大时，有渐近正态性：



在大样本场合，我们可利用正态分布得出检验问题的值.