9.2 两因素试验的方差分析

两因素试验设计是涉及两个因素的试验,每个因素各具有两个或两个以上的水平.如果因素A有个水平, 因素B有个水平,那么共有个水平组合.我们假定每个水平组合下都作次试验（称为等重复试验）.

9.2.1双因素试验的方差分析的统计模型

假设在水平组合下的次试验结果记为.试验数据汇总为如下表.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

每种水平组合下的试验结果是来自某个总体的样本，该总体的均值记为.我们有个样本,且这些样本相互独立.我们分析这些数据的目的是:考察因素的主效应是否显著? 因素的主效应是否显著?以及因素与因素的交互效应是否显著?为了具体说明这些问题,我们需要引入下面记号.

,,,,,

.

易见

,

,,,.

称为总平均,称为因素的水平的主效应,简称为的效应, 称为因素的水平的主效应,简称为的效应, 称为水平与水平的交互效应.

要回答因素的主效应是否显著就是要检验假设

 对 不全为零. (9.2.1)

如果拒绝原假设,我们就说因素的效应是显著的,即的不同水平下试验结果有显著差异.同样地，我们还需要检验以下两个假设.

 对 不全为零. (9.2.2)

 对 不全为零. (9.2.3)

为解决以上检验问题,需要作进一步的假定以建立统计模型.最常用的模型是正态模型,即假设各个水平组合对应的总体服从正态分布且具有相同的方差.具体说就是

,.

记,则～,称它们为随机误差.再结合前面的一些记号,统计模型可写为

,,

,,,

各～ （9.2.4）

与单因素情况类似,对这些检验问题的检验方法也是建立在平方和分解基础上的.有如下平方和分解式:

,

其中

,

,

,





, ,,.

称为误差平方和,分别称为因素A、因素B的效应平方和, 称为因素A与因素B的交互效应平方和.

可以证明

,

,

,

.

记,,,,它们分别为,,和的自由度.总平方和的自由度为.再记,,,.进一步可以证明

当成立时,有

.

当成立时,有

,

当成立时,有

,

从而假设,,的拒绝域分别为

,



和



上述结果可汇总成下面方差分析表:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 方差来源 | 平方和 | 自由度 | 均方 | F比 |
| 因素A |  |  |  |  |
| 因素B |  |  |  |  |
| 交互效应 |  |  |  |  |
| 误差 |  |  |  |  |
| 总和 |  |  |  |  |

记

,

, ；，

,，

，。

可按下面公式计算各个平方和

，

，

，

，



例9.2.1(P238例1)

前面讨论的等重复的两因素试验的方差分析，但有些场合，无法做到等重复，比如，各水平组合下的试验的成本相差很大，这时对高成本的水平组合只能安排少量试验（如2次），而低成本的水平组合可以多安排些试验；再比如，我们的数据是二手的.对不是等重复的试验数据，以上方差分析方法同样适用，只是公式表达更复杂.

假定每个水平组合下重复地做次试验，次观察记为.各个平方和分别为

,

,

,





其中，，，, ,

, .

方差分析表为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 方差来源 | 平方和 | 自由度 | 均方 | F比 |
| 因素A |  |  |  |  |
| 因素B |  |  |  |  |
| 交互效应 |  |  |  |  |
| 误差 |  |  |  |  |
| 总和 |  |  |  |  |

9.2.2 双因素无重复试验的方差分析

在以上讨论中，我们考虑了两因素试验中的交互效应.为了检验交互效应是否显著，对每一水平组合至少要做2次试验.如果在实际问题时，我们已经知道不存在交互效应，或交互效应的影响甚微以致于可以不考虑交互效应.如果是这样，为节省试验成本，可以对每一水平组合只做1次试验，这样的试验叫做无重复试验. 这时我们也能对因素A、B的主效应进行分析.要注意的是,无重复两因素试验的数据分析不出交互效应,如果两因素的交互效应是存在的并且较为显著,那么对无重复两因素试验的数据分析得出的因素的主效应是不可靠的,换言之, 无重复两因素试验数据的方差分析有个前提：两因素无交互效应或交互效应很弱。

现设对于两个因素的每一组合水平只做一次试验，试验结果为.将试验数据汇总为如下表.

|  |  |
| --- | --- |
| 因素B  因素A |  |
|  |  |

并假设,.统计模型为

,

各独立同分布于.

或表示为

,

各独立同分布于.

,.

我们要检验的假设有如下两个:

 不全为零.

 不全为零.

同样的分析可得无重复试验的方差分析表:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 方差来源 | 平方和 | 自由度 | 均方 | F比 |
| 因素A |  |  |  |  |
| 因素B |  |  |  |  |
| 误差 |  |  |  |  |
| 总和 |  |  |  |  |

表中各个平方和为

,

,

,

.

同样地也有平方和分解

.

假设的拒绝域为

.

假设的拒绝域为

.

例9.2.2 （P242例3）.