

# Labrapport som Jupyter Notebook på fysikklab våren 2023

Synave Amesen, Dina Madelen Sandlie Hegra, Andreas Teodor Nysæter, Simen Kristoffer Bedringås, David Persson  
Institutt for Teknisk fysikk, NTNU Institutt for Elektroniske systemer, NTNU

## Introduksjon

Denne labforsøket går ut på å studere en kule som ruller (uten å gli) på en berg-og-dal-bane. Forsøket har blitt simulert numerisk i python hvor programmet har regnet ut og plottet relevante størrelser som blant annet baneform, farten til kulen  $v(x)$  og kulens kinetiske energi  $K$ . Forsøket har også blitt gjennomført fysisk. Her har rulleforsøkene blitt filmet og kulens bevegelse er blitt analysert i "sponningsprogrammet" Tracker [1]. Ved hjelp av grunnleggende mekanikk og loven om energibevaring har det vært mulig å beregne blant annet kulens totale kinetiske energi  $K$ . Den grunnleggende mekanikken som er benyttet i dette forsøket er basert på Newtons tre lover som ble presentert i 1686 i "Principia Mathematica Philosophiae Naturalis." [2]. Til slutt har resultatene fra simuleringen og det fysiske forsøket blitt sammenlignet og diskutert.

## Teori

Denne teoridelen er i stor grad basert på informasjon fra labligningene [3].

Når en kule ruller ned en bane med kjent form gitt av  $y(x)$  og det antas at mekanisk energi er bevart, vil det være mulig å regne ut størrelser som hastighet, friksjonskraft mellom kula og overflaten, og rulletiden (med hjelp av numerikk). For å regne ut disse størrelsene må det også antas at den første- og andrederiverte av  $y$ , altså  $y'$  og  $y''$  er kjent.

Kulens treghetsmoment mhp. rotasjonsaksen (som går gjennom massesenteret CM) er gitt ved

$$I_0 = cmr^2,$$

Her er  $m$  kulas masse,  $r$  kulas radius og  $c$  er konstant som kan settes til  $\frac{2}{5}$  under antagelsen at kula er et kompakt kule med uniform massefordeling. Videre er det nyttig å anta at banens krumningsradius er mye større enn kulas radius, siden dette medfører at kulas massesenter følger samme form som banen, bare forskjøvet i  $y$ -retning.

I kulas startpunkt  $x = 0$  er høyden  $y(0) = y_0$ . Det kan antas at kula starter i ro, og dermed blir den mekaniske energien

$$E = U_0 = mgy_0.$$

Her er nullpunktet for  $U$  definert som  $y = 0$ . Kulens rotasjonsenergi er gitt ved  $E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$ , og ved å sette inn  $I = cmr^2$  og  $\omega = \frac{v}{r}$  blir den totale kinetiske energien  $K$  gitt ved

$$K = \frac{1+c}{2}mv^2,$$

der  $v$  er hastigheten. Bevaring av energi gir

$$U_0 = K + mgy \\ \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2g(y_0 - y)}{1 + c}}$$

i et punkt på banen der høyden er  $y$  og hastigheten er  $v$ . Siden  $y$  er en funksjon av posisjonen  $x$ , kan også farten betraktes som en funksjon  $v(x)$ .

Krumningen (med fortegn), som også er den inverse av krumningsradiusen til grafen  $y(x)$  er gitt ved

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}},$$

som umiddelbart gir sentripetalskelerasjonen

$$a_{\perp} = \frac{v^2}{R} = v^2 \kappa = \frac{2g(y_0 - y)}{1 + c} \cdot \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Fortegnet til  $\kappa$  avhenger av banens krumning slik at  $\kappa$  er positiv når banen krummer oppover, og negativ når banen krummer nedover ( $\kappa$  har samme fortegn som  $y''$ ). Dette vil også bli fortegnet til  $a_{\perp}$ , som er konsistent med å ha positiv retning oppover.

med innsett  $c = \frac{2}{5}$  blir hastigheten

$$\sqrt{\frac{10g(y_0 - y)}{7}}.$$

Newtons lov, sett fra et koordinatsystem som står normalt på banen og med normalkraften som positiv retning i  $y$ -aksen gir oss

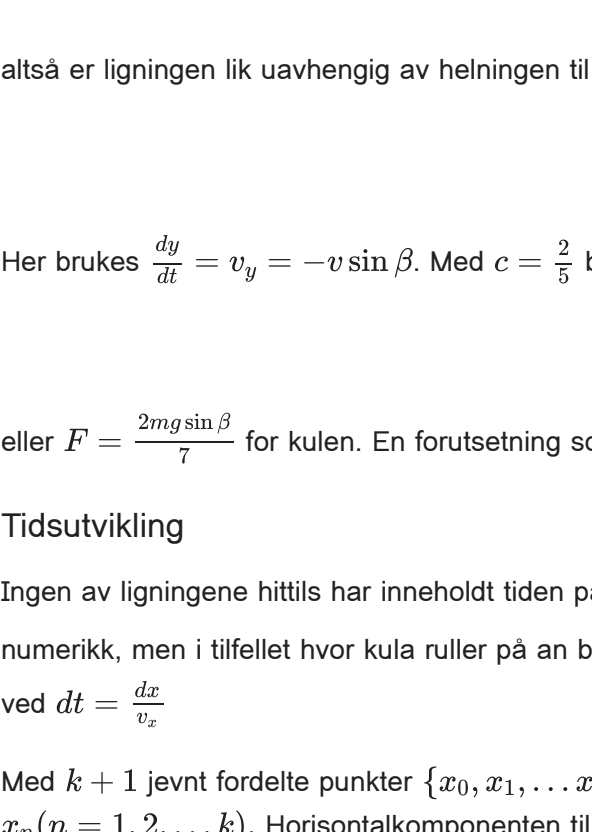
$$N - mg \cos \beta = ma_{\perp},$$

Her er  $\beta$  banens hellingvinkel. Dette kan conformes til

$$N = m(g \cos \beta + a_{\perp}).$$

Dette viser at når banen bøyer oppover, er  $a_{\perp} > 0$ , altså peker  $a_{\perp}$  i samme retning som  $N$ , som gjør at  $N$  blir større enn  $mg \cos \beta$ . Når banen bøyer nedover, skjer det motsatte, altså er  $a_{\perp} < 0$  og peker i motsatt retning av  $N$ , og  $N$  blir mindre enn  $mg \cos \beta$ .

```
In [ ]: from IPython import display
display.Image("./images/kroetter.png", width=300)
```



Figur 1. Kule som ruller på et krumt underlag. Her er  $v$  kulas fart,  $a_{\perp}$  er sentripetalskelerasjon,  $Mg$  er tyngdekraft,  $f$  er friksjonskraft og  $N$  er normalkraft.

Den siste størrelsen som kan være nyttig å utlede nå er den statiske friksjonskraften fra banen på kula. Ved valg av hellingvinkelen  $\beta$  slik at  $\beta < 0$  når banen heller nedover, og  $\beta > 0$  når banen heller oppover får stigningsstallet

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan \beta$$

riktig fortegn. De langsgående kreftene er friksjonskraften  $F$  og tyngdekraftens horisontale komponent  $-mg \sin \beta$ . Hvis banen heller nedover blir  $\beta < 0$ ,  $F < 0$  og  $a = \frac{dv}{dt} > 0$ . N2 gir da

$$-mg \sin \beta + F = ma.$$

Hvis banen derimot heller oppover blir  $\beta > 0$ ,  $F > 0$ , og  $a = \frac{dv}{dt} < 0$ . N2 gir da

$$mg \sin \beta - F = -ma,$$

altså er ligningen lik uavhengig av hellingen til banen. Baneskelerasjonen kan regnes ut som den deriverte av banefarten  $v(y) = \sqrt{\frac{5g(y_0 - y)}{7}}$ , altså

$$a = -\frac{g \sin \beta}{1 + c}$$

Her brukes  $\frac{dv}{dt} = v_y = -v \sin \beta$ . Med  $c = \frac{2}{5}$  blir  $a = -\frac{5g \sin \beta}{7}$ . Innsetting gir

$$F = ma + mg \sin \beta = \frac{c}{1 + c} mg \sin \beta,$$

eller  $F = \frac{2mg \sin \beta}{7}$  for kulen. En forutsetning som har blitt tatt er at kula ruller rent og ikke sklir på underlaget. Det betyr at den statiske friksjonskraften  $F$  ikke kan overstige den maksimale verdien  $|F| = \mu_s |N|$ .

## Tidsutvikling

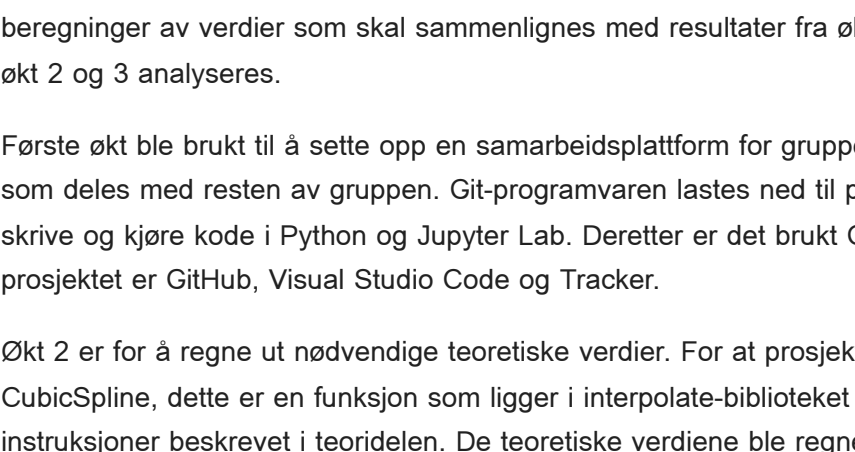
Ingen av ligningene hittil har inneholdt tiden på noe vis, som følger av at utgangspunktet har vært bevaring av mekanisk energi. For å finne kulas tidsutvikling er det ofte nødvendig å gå helt tilbake til Newtons andre lov og bruke numerikk, men i tilfelle hvor kula ruller på en bane med bestemt form  $y(x)$  kan det gjøres enklere ved å bruke at hastigheten  $v$  i hvert punkt  $y$  var gitt ved  $v = \sqrt{\frac{10g(y_0 - y)}{7}}$ . Tiden  $dt$  som brukes på en forflytning  $dy$  er da gitt direkte ved  $dt = \frac{dy}{v}$ .

Med  $k = 1$  jevnt fordelt punkter  $\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k\}$ , og tilsvarende banehøyder definert er hastigheten  $v_n$  og hellingvinkelen  $\beta_n$  i posisjonen  $\{x_n, y_n\}$  kjent. Det er da mulig å regne ut tidssteget  $\Delta t_n$  mellom  $x_{n-1}$  og  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots, k$ ). Horisontalkomponenten til hastigheten i posisjon  $x_n$  er gitt ved  $v_{x,n} = v_n \cos \beta_n$ . Den gjennomsnittlige horisontalkomponenten til hastigheten på intervallet  $n$  er gitt ved

$$\langle v_x \rangle_n = \frac{1}{2} (v_{x,n-1} + v_{x,n}).$$

```
In [ ]: display.Image("./images/ballhastighet.png", width=500)
```

```
Out [ ]:
```



Figur 2. Ballens gjennomsnittshastighet på intervallet  $n$ . Her er  $v_n$  den nåværende farten,  $v_{x[n+1]}$  farten i neste tidssteget,  $\langle v_x \rangle_n$  gjennomsnittsfarten i intervallet  $n$ , og  $\langle v_x \rangle_{n+1}$  gjennomsnittsfarten i  $x$ -retning i intervallet  $n$ .

Innsetting i definisjonen for  $\Delta t_n$  fra tidligere gir da

$$\Delta t_n = \frac{\Delta x_n}{\langle v_x \rangle_n} = \frac{2\Delta x_n}{v_{x,n-1} + v_{x,n}}.$$

Det horisontale steget  $\Delta x_n$  vil alltid bare være  $x_n - x_{n-1}$ . Dette gir til slutt at kula starter i posisjonen  $\{x_0, y_0\}$  med startshastighet  $v_0 = 0$  ved tidspunkt  $t_0 = 0$  og passerer posisjonene  $\{x_n, y_n\}$  med hastighet  $v_n$  og ved tidspunkt

$$t_n = \sum_{j=1}^n \Delta t_j, \quad n = 1, \dots, k.$$

For å finne total rullestid lar vi  $n = k$ .

## Metode

Nødvendig utstyr for eksperiment:

- Vatter
- Kule
- Berg og dal-bane
- Merkepinner
- Kamerastativ

Eksperimentet går ut på at en kule skal rulle ned en kjent bane med små skruerhøyder. Skruerhøydene i dette prosjektet kan man finne i figur 3. Banen er tilsendt av NTNU og skruerhøydene er randomisert for hver gruppe. Forsøket skal filmes med et telefonkamera som er montert i et stativ med en standard flimskvalitet på 1080p og en bildefrekvens på 30. Det er viktig at både banen og kameraet er i vater. Kulens innleide fart er 0 m/s og startpunktet er toppunktet på banen. Hvert av forsøkene er en videosekvens av kulen som ruller ned banen, hvor hver videosekvens starter i det kulen blir sluppet, og slutter når kula er på sluttpunktet i banen.

Prosjektet er gjort over fire økter hvor hver økt fokuserer på en hoveddel av oppgaven. Den første økten brukes for å organisere gruppen og finne en samarbeidsplattform. I dette prosjektet er det brukt Git. Økt 2 er for numerikk og beregninger av verdier som skal sammenlignes med resultater fra økt 3. I økt 3 gjennomføres eksperimentet. Eksperimentet blir filmet og kjørt gjennom analyseverktøyet Tracker [1] for å hente ut resultater. I økt 4 skal resultater fra økt 2 og 3 analyseres.

Første økt ble brukt til å sette opp en samarbeidsplattform for gruppen, og sørge for at all nødvendig programvare for resten av prosjektet er lastet ned. Alle deltakere skal sette opp en GitHub profil, en av deltakere lager et prosjekt som deles med resten av gruppen. Git-programvaren lastes ned til prosjektdeltakernes datamaskiner. Dette er brukt i samsvar med Visual Studio Code. Visual Studio Code er et koderegneringsprogram som lar prosjektdeltakere koble og kjøre kode i Python og Jupyter Lab. Deretter er det brukt Git-terminalkode som "git push", "git init", "git add" og "git pull" for å distribuere kode og verdier. Verktøyene brukt for koderegning, distribusjon og uttagninger i prosjektet er GitHub, Visual Studio Code og Tracker.

Økt 2 er for å regne ut nødvendige teoretiske verdier. For at prosjektet skal være individuelt er baneformen randomisert for hver gruppe. For å finne baneformen legges randomiserte verdier for skruerhøydene inn i funksjonen CubicSpline, dette er en funksjon som legger i interpolate-biblioteket i SciPy. Etter reformen er satt regnes de teoretiske verdiene til fart  $v(x)$ , sluttart, hellingvinkel, normalkraft og friksjonskraft. Verdiene ble regnet ut etter instruksjoner beskrevet i teoridelen. De teoretiske verdiene ble regnet ut med bruk av matrebbiblioteket Numpy og grafer plottet ved hjelp av graf- og matrebbiblioteket Matplotlib. En numerisk metode beskrevet i teoridelen ble brukt for å finne den totale rullestiden til ballen. I Python ble denne metoden implementert ved bruk av en for-økke som summerte opp de små tidssteget  $\Delta t_n$ . Eventuelle tidsutviklinger, verdier og grafer noteres ned for å senere bli sammenlignet med eksperimentets verdier.

Den tredje økten har hovedfokus på selve eksperimentet. Skruerhøydene stilles inn på udelte baner og det filmes en testvideo for å sørge for at ballen følges i "sponningsprogrammet" Tracker [1]. Når Tracker er konfigurert filmes skruerhøyder i gitter, Rullestid, sluttart, total kinetisk energi i sluttunkt og tapet av den kinetiske energien skal regnes ut for hvert forsøk. Her er det ønsket å bruke Tracker for å hente nøyaktige verdier. Tracker fungerer slik at den kan se på videoen og lokalisere punkter hvor kula er. Etter disse verdiene er funnet skal det regnes ut middelevet og standardfor til middelevet og standardfor til rullestid, sluttart, kinetisk energi i sluttpunkt og tap av mekanisk energi. Middelevet og standardfor for forsøkene sammenlignes med de teoretiske verdiene funnet i økt 2. Det ble ikke gjort noen overordnede modifikasjoner til utførelsen av forsøket, eller innhendingen av resultater som var beskrevet i oppgaveleksekn.

For å finne rullestiden, den kinetiske energien i sluttpunktet og tapet av den kinetiske energien ble de målte verdiene fra de ti forsøkene satt inn i hver sin Numpy array. Middelevetene ble funnet ved å bruke numpy.average, som finner en gjennomsnittsverdi av hva som er i arrayen. For å finne standardavvik ble funksjonen numpy.std() brukt. Denne funksjonen regner ut standardavviket i listen som blir sendt inn. Verdien ble deretter delt på kvadratroten av antall forsøk for å gi standardfeilen. Det ble brukt tre gjeldende siffer. Under eksperimentet ble det ikke gjort overordnede modifikasjoner til utbeigring.

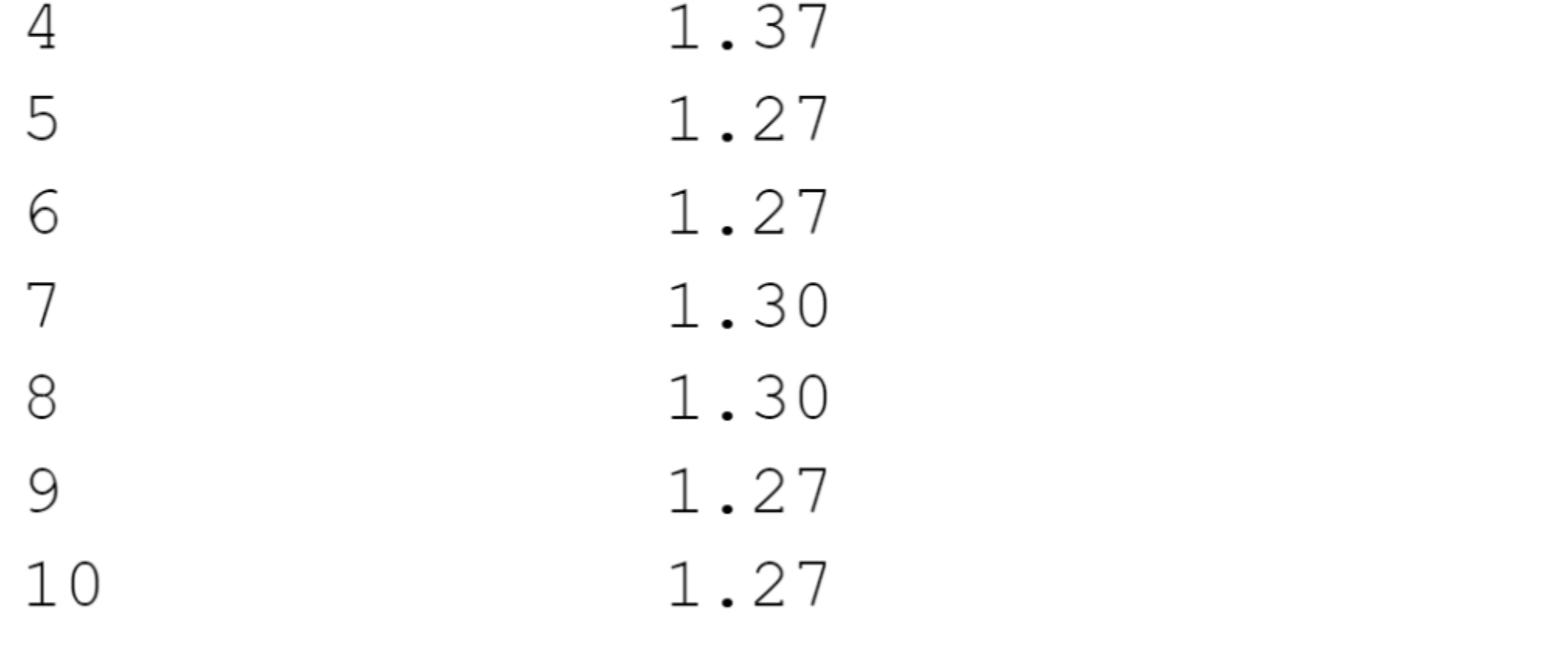
I økt 4 ble resultater fra eksperimentet sammenlignet med teoretiske verdier. Plottingen av grafene skjedde ved hjelp av grafverktøyet til Matplotlib og Numpy arrays. For å sammenligne disse verdiene ble de teoretiske verdiene for baneform, hastighet, sluttshastighet, friksjonskraft, normalkraft og friksjonskoeffisient plottet mot middelevetene til de ti udelte forsøkene.

## Resultater

Den teoretiske baneformen  $y(x)$  med tilfeldig genererte skruerhøyder avbildet i figur 3, er opphavet til de forventede resultatene av eksperimentet. De samme skruerhøydene ble rekonstruert i den fysiske baneformen  $y_E(x)$  for å konstatere eksperimentelle resultater.

```
In [ ]: display.Image("./images/baneform.png")
```

```
Out [ ]:
```



Figur 3. Teoretisk baneform sammenlignet med eksperimentell baneform.

Målingene av rullestiden er vist i tabell 1. Den teoretiske rullestiden på kula var 1.53 s og ble kalkulert med metoden forklart i teoridelen. Gjennomsnittsrullestiden for kula ved de ti forsøkene ble  $t_E = (1.307 \pm 0.012) \text{ s}$ . Usikkerheten er her standardfeilen.

Tabell 2 viser sluttshastighetene ved de ti eksperimentelle forsøkene, sammen med den teoretiske kalkulerte sluttshastigheten  $v = 1.67 \text{ s}$ . Den gjennomsnittlige sluttshastigheten med standardfeil blir  $v_E = (1.71 \pm 0.02) \text{ m/s}$ . Hastigheten  $v_E(t)$  for et av de ti eksperimentelle forsøkene er plottet med referansehastigheten  $v(t)$  i figur 4.

```
In [ ]: display.Image("./images/tabell_rullestid.png")
```

```
Out [ ]:
```

Rullestid	t [s]
1	1.37
2	1.33
3	1.33
4	1.37
5	1.27
6	1.27
7	1.30
8	1.30
9	1.27
10	1.27
Teoretisk	1.53

Tabell 1. Rullestider i ti forsøk, med referanse

```
In [ ]: display.Image("./images/tabell_hastighet.png")
```

```
Out [ ]:
```

Sluttshastighet	v [m/s]
1	1.69
2	1.63
3	1.81
4	1.77
5	1.71
6	1.65
7	1.71
8	1.69
9	1.74
10	1.66
Teoretisk	1.67

Tabell 2. Sluttshastigheter i ti forsøk, med referanse

```
In [ ]: display.Image("./images/hastighet.png")
```

```
Out [ ]:
```



Figur 4. Teoretisk hastighet sammenlignet med eksperimentell hastighet.

Middelevetiden med starten av baneformen  $y(x)$  vil ha stor innvirkning på kulens energi i de ti eksperimentelle forsøkene blir kalkulert til  $E_{kin,E} = (0.0452 \pm 0.0009) \text{ J}$ . Tabell 3 viser de ti forsøkene med den teoretiske referansen  $E_{kin} = 0.0605 \text{ J}$ . Den potensielle energien ved starten av rullebanen er  $E_{pot} = 0.0605 \text{ J}$ .

Ved middelevetiden for den kinetiske energien og den potensielle energien, kalkuleres middelevetiden for tap av mekanisk energi til  $E_{tap} = (0.0153 \pm 0.0009) \text{ J}$ . Verdier for tap av mekanisk energi er vist i tabell 4.

```
In [ ]: display.Image("./images/tabell_kinetisk_energi.png")
```

```
Out [ ]:
```

Kinetisk energi	E [J]
1	0.0444
2	0.0414
3	0.0510
4	0.0487
5	0.0453
6	0.0422
7	0.0451
8	0.0445
9	0.0470
10	0.0429
Teoretisk	0.0605
Potensiell energi start	0.0605

Tabell 3. Kinetisk energi i ti forsøk, med referanse og potensiell energi (start)

```
In [ ]: display.Image("./images/tabell_tap_mekanisk_energi.png")
```

```
Out [ ]:
```

Tap av mekanisk energi	E [J]
1	0.0161
2	0.0191
3	0.00952
4	0.0119
5	0.0152
6	0.0183
7	0.0155
8	0.0160
9	0.0135
10	0.0176

Tabell 4. Tap av mekanisk energi i ti forsøk.

Friksjonskoeffisient  $\mu$  gjennom hele banen er vist i figur 5. Normalkraften  $N$  vises i figur 6. Forholdet mellom friksjonskraften og normalkraften med hensyn på posisjonen i  $x$ -retning gir friksjonskoeffisienten  $\mu$ , presentert i figur 7.

```
In [ ]: display.Image("./images/normalkraft.png")
```

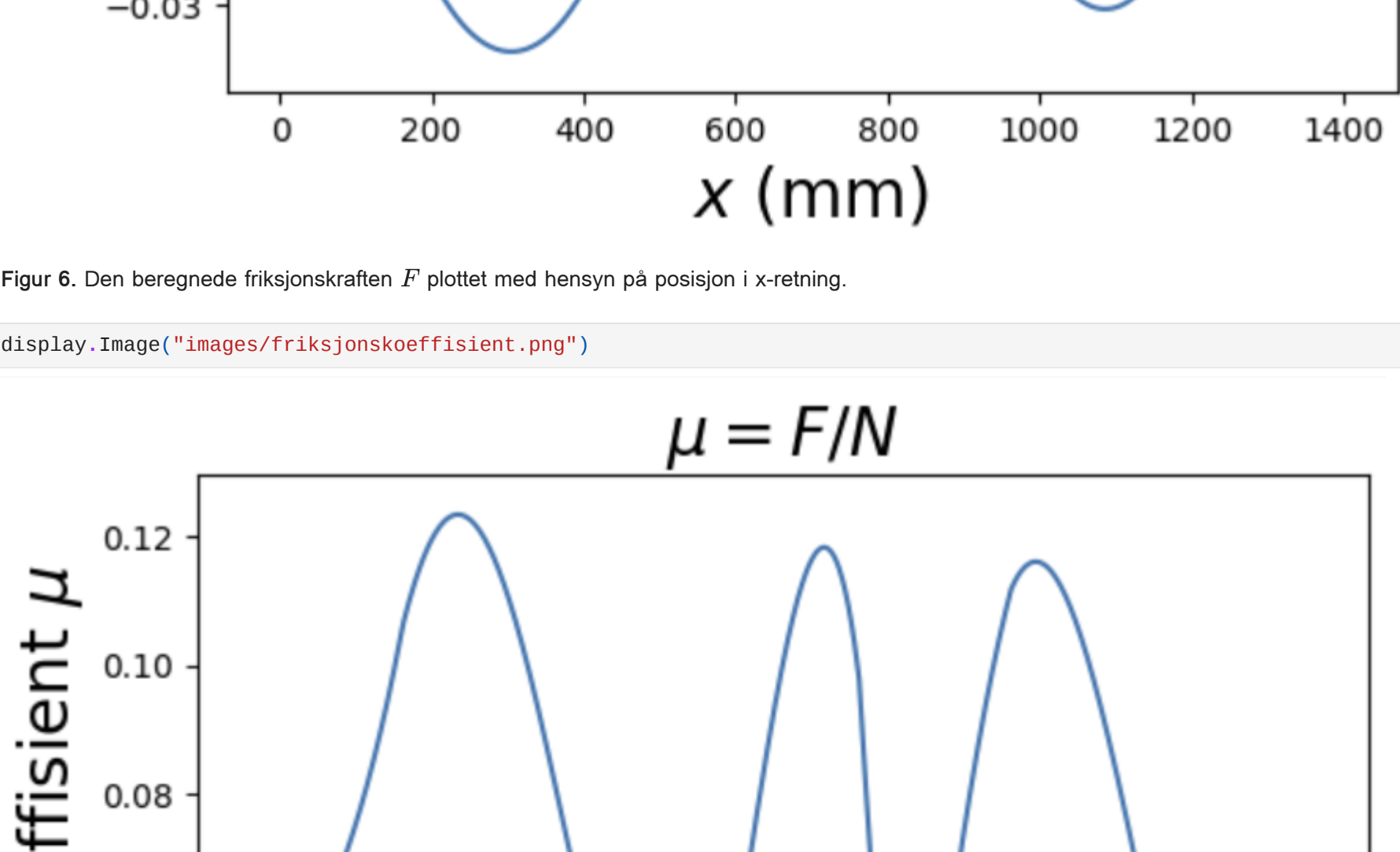
```
Out [ ]:
```



Figur 5. Beregnet normalkraft  $N$  med hensyn på posisjon i  $x$ -retning.

```
In [ ]: display.Image("./images/friksjonskraft.png")
```

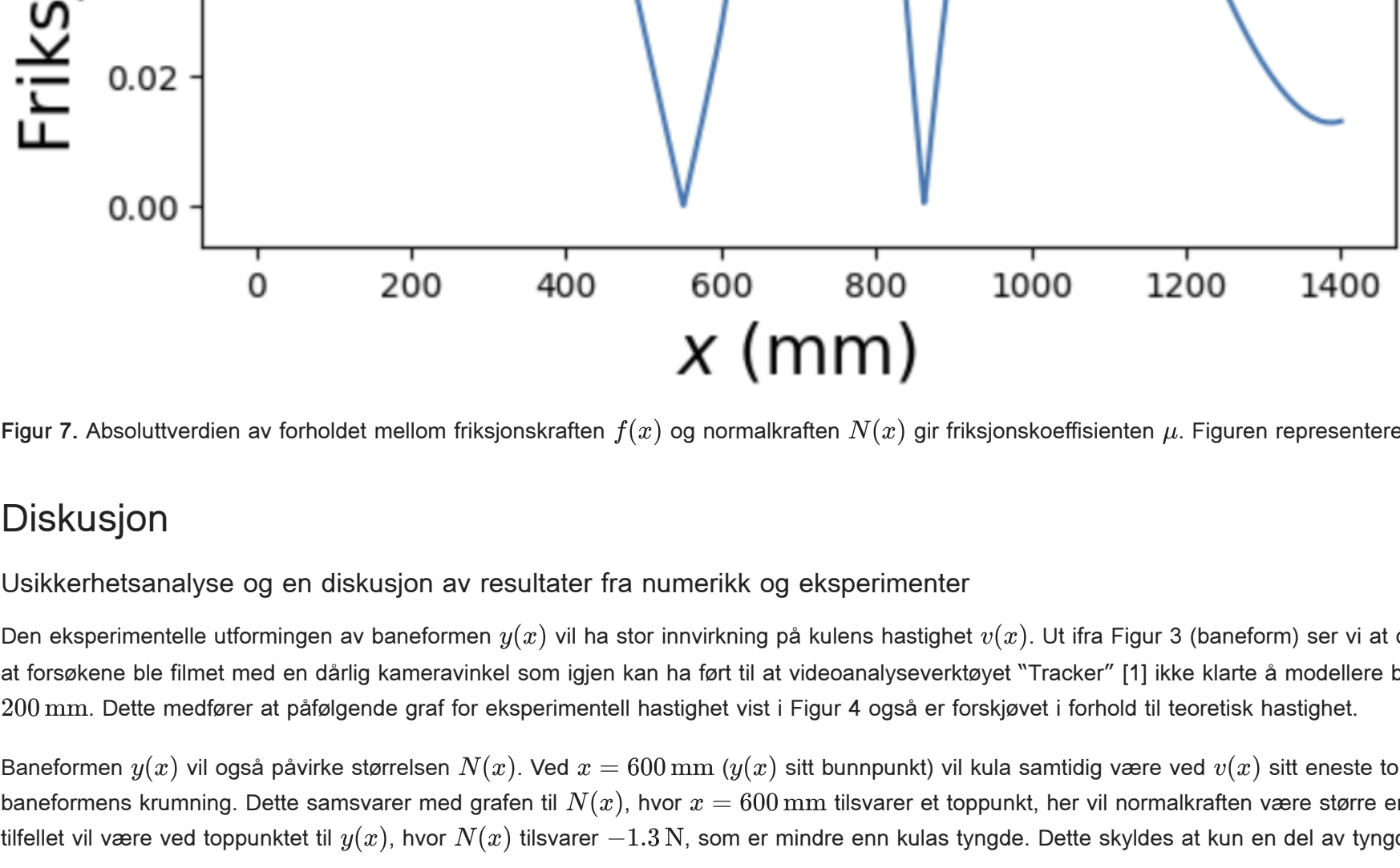
```
Out [ ]:
```



Figur 6. Den beregnede friksjonskraften  $F$  plottet med hensyn på posisjon i  $x$ -retning.

```
In [ ]: display.Image("./images/friksjonskoeffisient.png")
```

```
Out [ ]:
```



Figur 7. Absoluttverdien av forholdet mellom friksjonskraften  $F(x)$  og normalkraften  $N(x)$  gir friksjonskoeffisienten  $\mu$ . Figuren representerer den beregnede friksjonskoeffisienten  $\mu$  med hensyn på posisjonen i  $x$ -retning.

## Diskusjon

Usikkerhetsanalyse og en diskusjon av resultater fra numerikk og eksperimenter

Den eksperimentelle utførelsen av baneformen  $y(x)$  vil ha stor innvirkning på kulens energi i de ti eksperimentelle forsøkene. Ut fra Figur 3 (baneform) ser vi at det er en vesentlig forskjell mellom eksperimentell og teoretisk baneform, dette kan skyldes at forsøkene ble filmet med en dårlig kameravinkel som igjen kan ha ført til at videoanalyseverktøyet "Tracker" [1] ikke klarte å modellere banen riktig. Grafen vist i Figur 3 tyder på at eksperimentell baneform er forskjøvet med ca. 200 mm. Dette medfører at påfølgende graf for eksperimentell hastighet vist i Figur 4 også er forskjøvet i forhold til teoretisk hastighet.

Baneformen ved  $x = 0$  er gitt ved  $y(x) = 0.0153 \text{ J}$ . Ved  $x = 600 \text{ mm}$  ( $y(x)$  sitt toppunkt) vil kula samtidig være ved  $v(x)$  sitt eneste toppunkt. Høy hastighet ved et lavt punkt tilsier at kula krever større sentripetal kraft for å følge baneformens krumning. Dette samsvarer med grafen til  $N(x)$ , hvor  $x = 600 \text{ mm}$  tilsvarer et toppunkt, her vil normalkraften være større enn kulas vekt, fordi den balanserer vekten og den nødvendige sentripetalkraften. Det motsatte tilfellet vil være ved toppunktet til  $y(x)$ , hvor  $N(x)$  tilsvarer  $-1.3 \text{ N}$ , som er mindre enn kulas tyngde. Dette skyldes at kun en del av tyngden virker som normalkraft, mens resten bidrar til den sentripetale banen.

Fra Figur 7 ser vi hvordan friksjonskoeffisienten  $\mu$  varierer med posisjonen  $x$ . Her ser vi at den høyeste beregnede friksjonskoeffisienten  $\mu$  er på ca. 0.12. Den statiske friksjonskoeffisienten  $\mu_s$  er anslått til å være 0.4. Dermed er det rimelig å anta at den beregnede friksjonskoeffisienten  $\mu$  ikke overstiger sin maksimale verdi gitt ved  $F = \mu_s |N|$  og at antagelsen om ren rulling er oppfylt.

Som presentert i Tabell 1 er den målte rullestiden til kula 1.31 s, med en standardfeil på  $\pm 0.01 \text{ s}$ . Den beregnede rullestiden er på 1.48 s. Dette avviker kan skyldes at den teoretiske og den eksperimentelle baneformen ikke samsvarer fullstendig. En annen årsak kan være at kula sin startfart  $v_0 > 0$  eller at det er gjort målefeil. Dermed dette avviker skyldes målefeil er trolig den samme feilen gjort i hvert forsøk siden standardfeilen er såpass liten. Med utgangspunkt i beregnet rullestid kan en konkludere med at den målte rullestiden er rimelig.

Som vist i tabell 4 får vi et tap av mekanisk energi på 0.0153 J. Med tanke på at overflaten til kulebanen er svært jevn (ref. friksjonskoeffisienten i figur 7) kan man anta at tapet av kinetisk energi er rimelig. En tilhørende standardfeil på  $\pm 0.0009 \text{ J}$  tilsier at det er lite spredning i forsøkene. Eventuelle feilkilder knyttet til lave standardfeil kan være systematiske feil, som at kulens startfart  $v_0 > 0$ .

## Konklusjon

Det har blitt gjennomført et forsøk hvor en kule har blitt sluppet gjennom en kulebane. I forkant av forsøket ble det gjennomført teoretiske beregninger for å simulere oppførselen til kula, disse beregningene skulle sammenlignes med eksperimentelle målinger. Den teoretiske rullestiden var 1.53 s, mens den eksperimentelle rullestiden ble målt til 1.31 s. Den teoretiske sluttarten var 1.67 m/s, mens den eksperimentelle sluttarten ble målt til 1.71 m/s, med tilhørende standardfeil 0.02 m/s. Tap av mekanisk energi tilsvarer 0.0153 J med standardfeil  $\pm 0.0009 \text{ J}$ .

## Referanser

- [1] D. Brown, C. Wolfgang, R. M. Kinetic, "Tracker Video Analysis and Modeling Tool", <https://physlets.org/tracker/>, 2023.
- [2] I. Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica, 1687.
- [3] J. A. Stavring, Ren rulling på krumt underlag - energibevarelse, [https://home.ntnu.no/burkudel/undervisning/fysikk/lab/labligninger\\_V23.pdf](https://home.ntnu.no/burkudel/undervisning/fysikk/lab/labligninger_V23.pdf), 2023.</