Міністерство освіти та науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Звіт до лабораторної роботи №4. "Методи побудови інерполяційних многочленів"

Студента 3-го курсу
Пономаренка Євгена

Київ 2017

,

1 Постановка задачі

Нехай маємо n точок, що задовільняють нашій функції, задача: інтерполяція функції по цих точках.

1. Побудуємо інтерполяційний многочлен Ньютона $P_n(x)$ для заданої функції
   (a) по рівновіддаленим вузлах
   (b) по чебишовських вузлах
2. Побудуємо графіки $f(x), P_n(x), f(x) - P_n(x)$
3. Побудуємо графік $\omega_n(x) = \prod_i (x - x_i)$
4. Методом оберненної інтерполяції знайдемо значення

$$x_* : f(x_*) = min_x f(x) + \frac{2}{3}(max_x f(x) - min_x f(x))$$

Функція буде задана

$$f(x) = cos(\pi x)^2 e^x, 0 \leq x \leq 2$$

2 Метод інтерполяції Ньютона

Введемо термін *розділені різниці*:

$$f(x_i; x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f(x_i; x_j; x_k) = \frac{f(x_i; x_j) - f(x_j; x_k)}{x_i - x_k}$$

Тоді можно рекурсивно обрахувати їх використовуючи таку таблицю:

$$\begin{bmatrix} f(x_0) & 0 & ... & 0 \\ f(x_1) & f(x_0; x_1) & ... & 0 \\ f(x_2) & f(x_1; x_2) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ f(x_n) & f(x_{n-1}; x_n) & ... & f(x_0; ...; x_n) \end{bmatrix}$$

Тоді, користуючись властивостями розділених різниць, можно записати інтерполіційний поліном:

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + ... + f(x_0; ...; x_n)(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

3 Поліном Ньютона. Рівновіддаленні вузли

Інтерполюючи на 8 точках маємо:

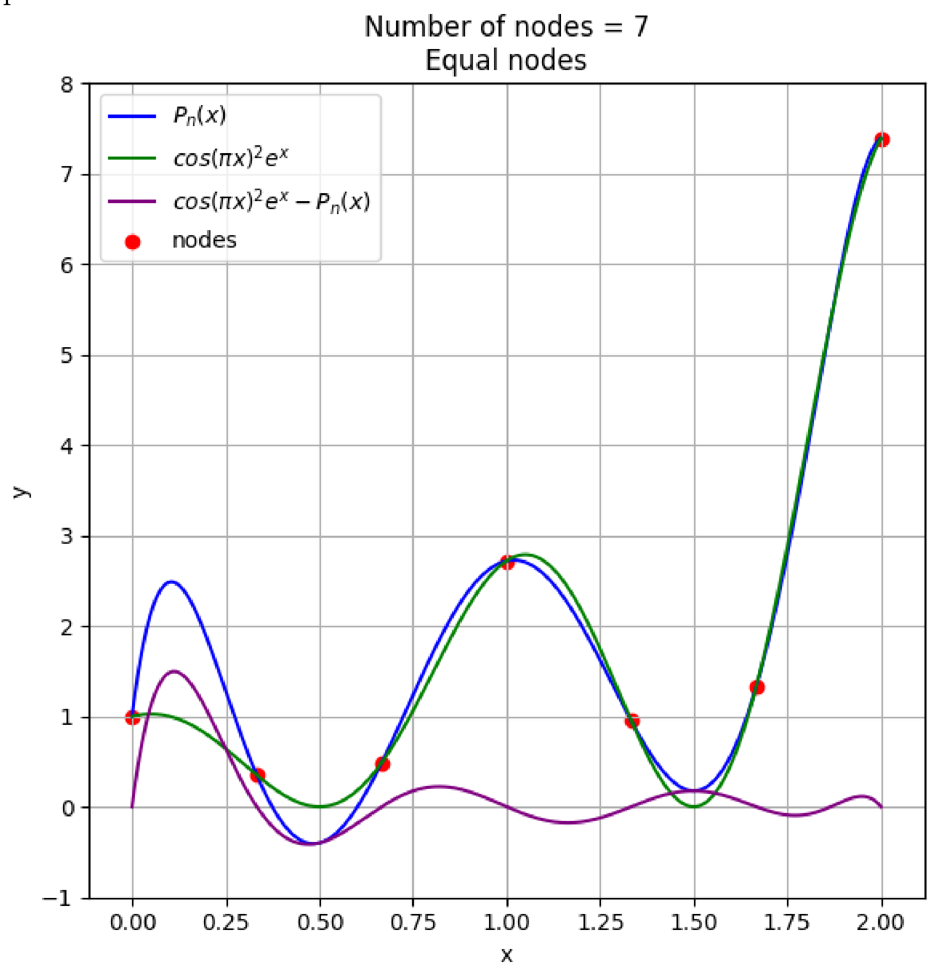
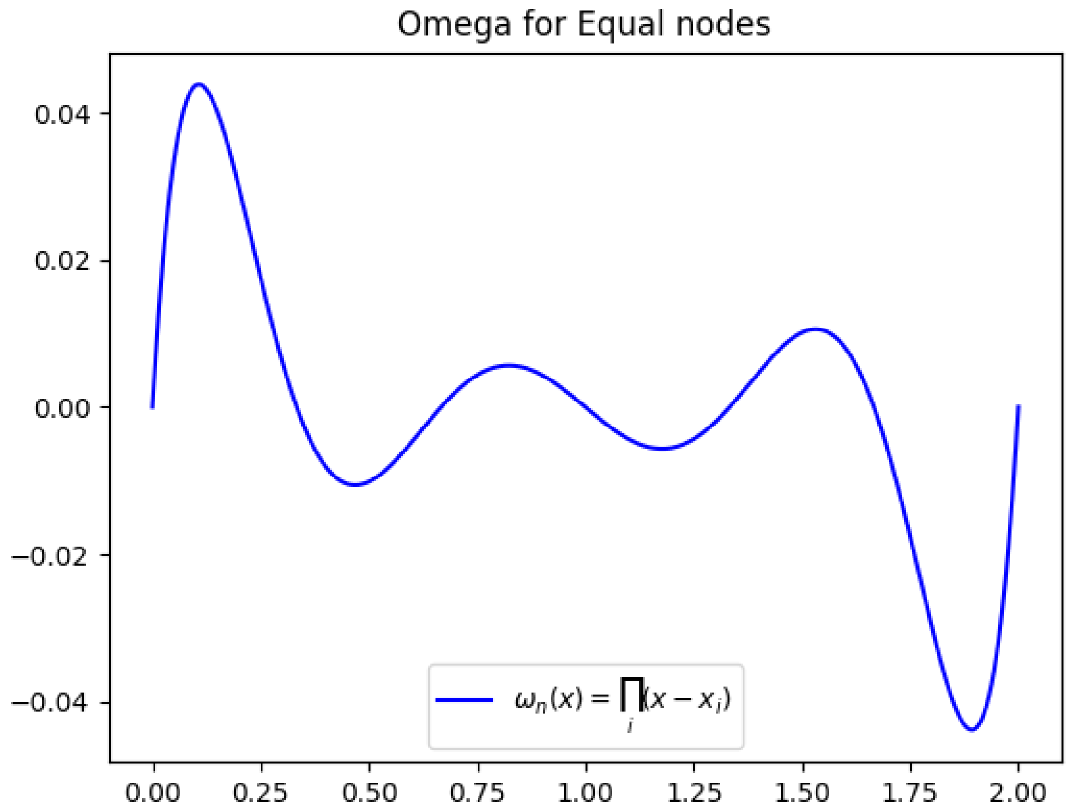


Рис. 1: графік

Тоді функція $\omega_n(x)$:



4 Поліном Ньютона. Чебишовські вузли

Знову інтерполюючи на 8 точках маємо:

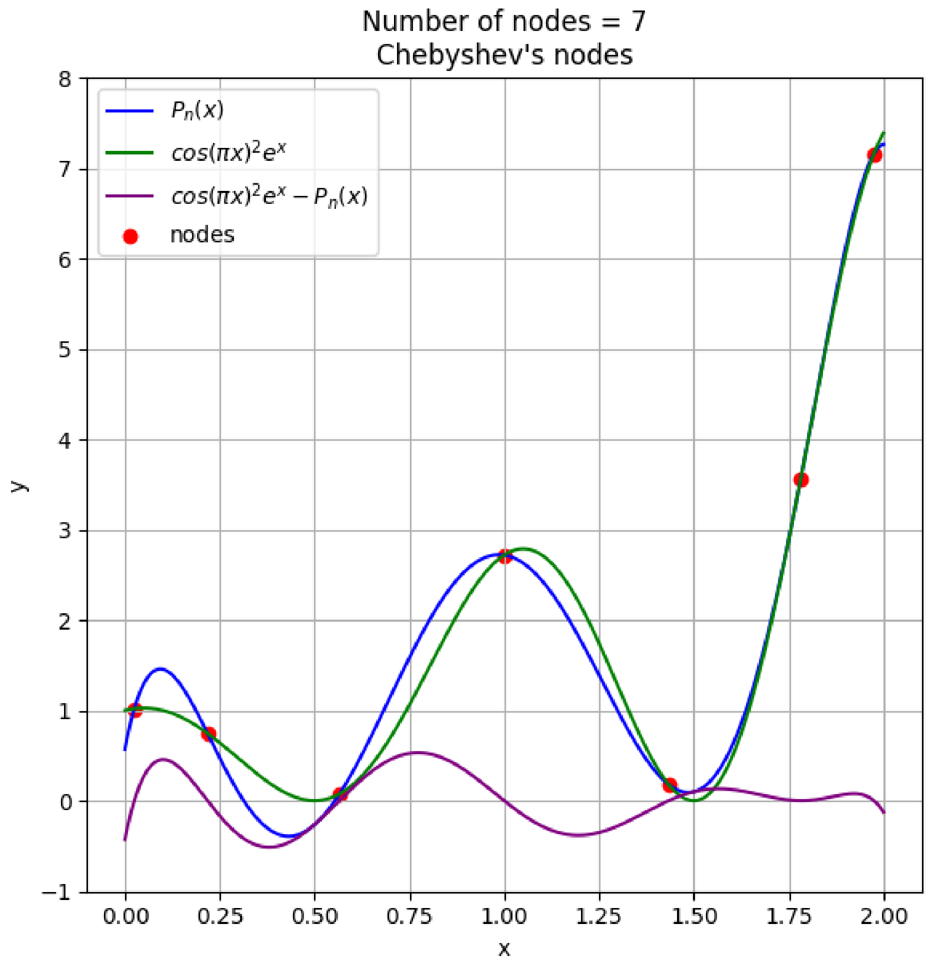
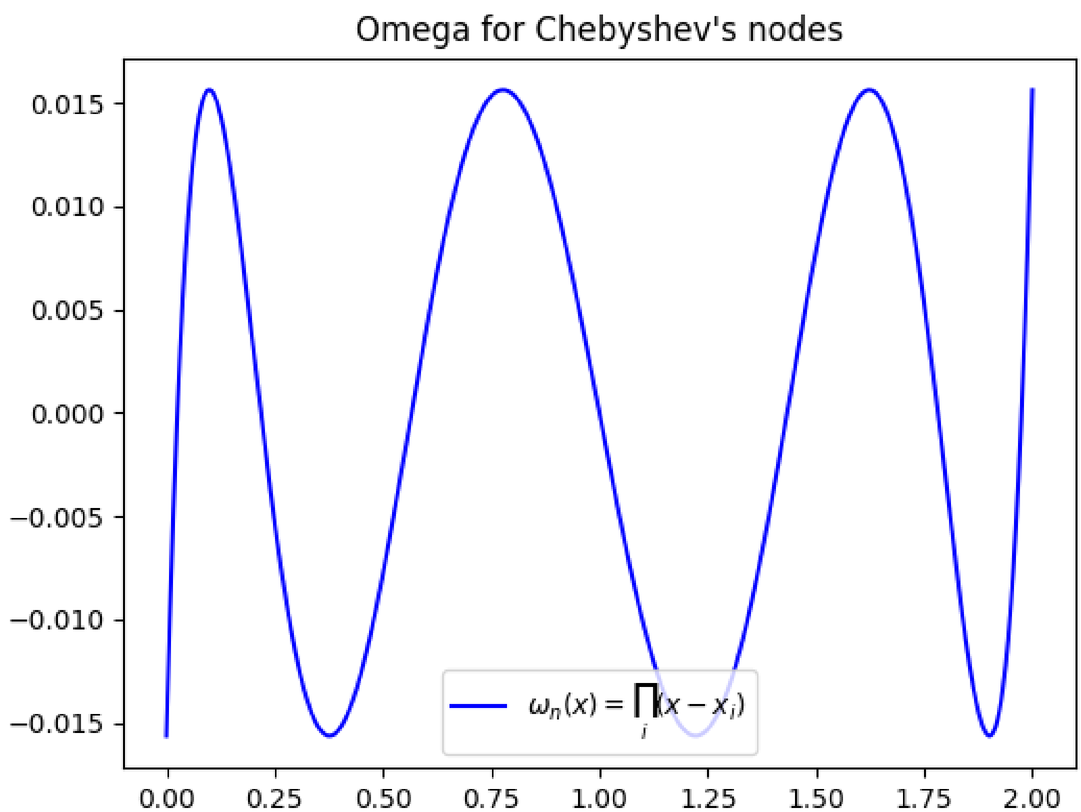


Рис. 2: графік

Тоді функція $\omega_n(x)$:



5 Застосування методу оберненної інтерполяції

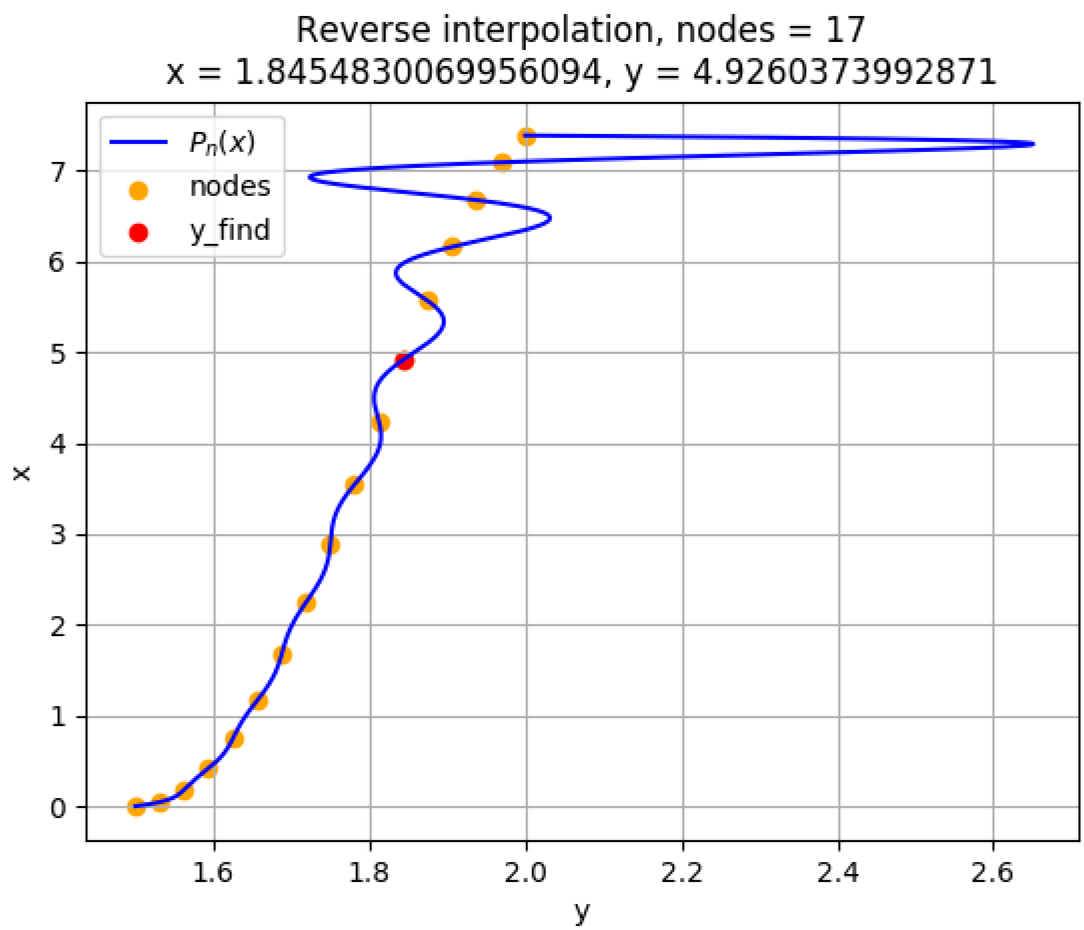
Обчислимо
$$min_x f(x) + \frac{2}{3}(max_x f(x) - min_x f(x))$$
Як добре видно на графіках, що наведено вище:
$$min_x f(x) = 0, max_x f(x) = e^2$$
Отже маємо знайти:
$$x_* : f(x_*) = \frac{2e^2}{3} \approx 4.9260373992871$$

Метод оберненної інтерполяції полягає в тому, що ми будуємо поліном за множиною (y_i, x_i) (тобто навпаки).
Було проведено дослідження для точок від 2 до 30. Більш того, обріжемо нашу функцію до відрізку $[1.5, 2]$ (спочатку), щоб вона була строго монотонна. Найменша похибка, була досягнута на 17 вузлах

$$x_* = Y_n(y) = Y_n(\frac{2e^2}{3}) = 1.8454830069956094$$

$$f(x_*) = 4.952835122579008$$

$$\epsilon = |f(x_{real}) - f(x_*)| = 0.026797723291907438,$$



Але, якщо проміжок звузити до

$$[1.6, 1.9]$$

, то у графіка функції вже не буде такого перегибу, і вже лінійна інтерполяція дасть не самі погані результати:

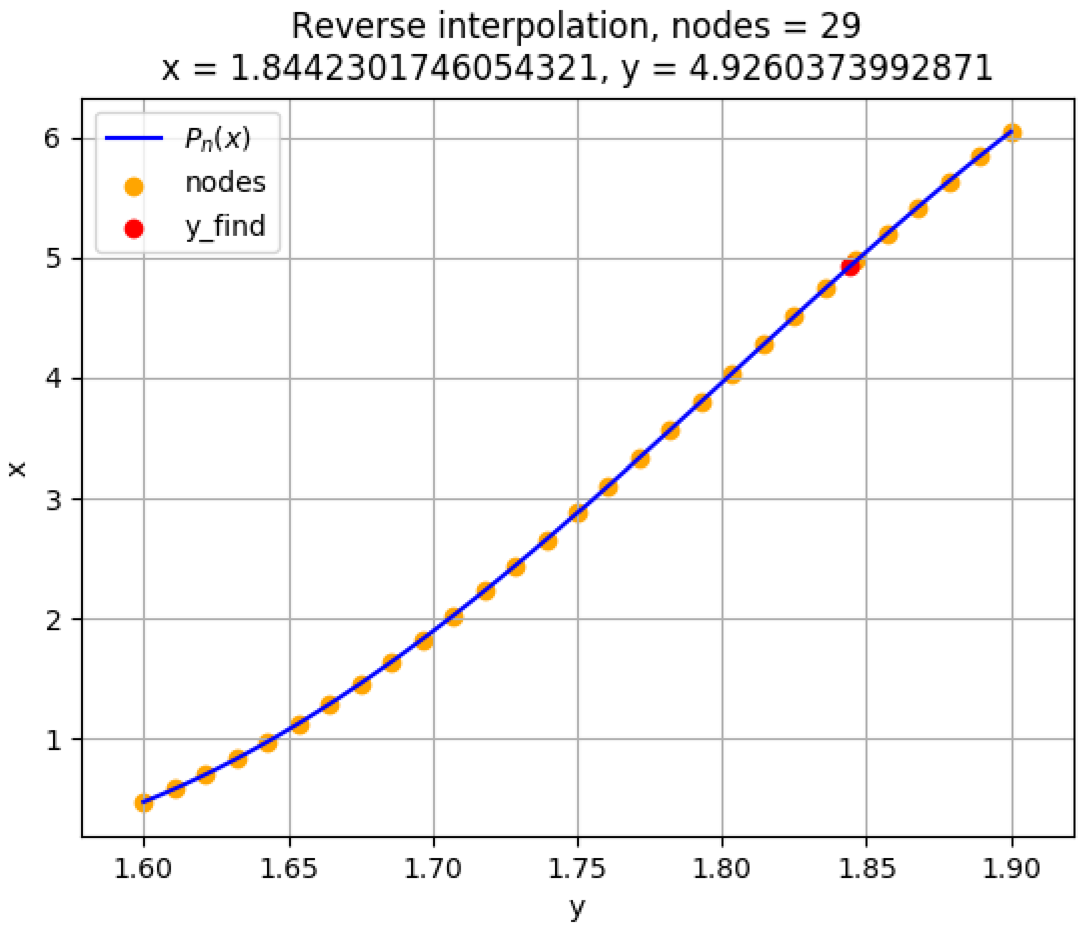
$$x_* = Y_n(y) = Y_n(\frac{2e^2}{3}) = 1.8396493426291438$$

$$f(x_*) = 4.827642249790942$$

$$\epsilon = |f(x_{real}) - f(x_*)| = 0.09839514949615857$$

Та, якщо продовжувати, можна отримати таке для 28 вузлів:

$$\epsilon = |f(x_{real}) - f(x_*)| = 2.502531515347073e^{-10}$$



6 Обернення інтерполяція за допомогою розв'язання неілінйного рівняння

Ще було проведено метод оберненої інтерполяції, коли ми після побудови полінома розв'язуємо нелінійне рівняння

$$P_n(x_*) = y_*$$

Поліном було побудовано на 10 рівновіддалених вузлах

$$x_* = 1.8481602710089646, f(x_*) = 5.009926605031375$$

$$|f(x_*) - y_*| = 0.08388920574427505$$

Розв'язувалося методом дихотомії,

$$\epsilon = 10^{-10}$$