

$$\sigma_z \otimes \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & -1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{I} \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & -i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_x \otimes \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\therefore H = \frac{1}{4} (W_0 + \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (W_0 - \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Simple summations

$$H = \begin{pmatrix} W_0 + \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -W_0 + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$