REDUCCIÓN A LO ABSURDO

[...]

CONJUNTOS

[...]

PROPIEDADES ALGEBRÁICAS, DE ORDEN Y MÉTRICAS

[...]

INTERVALOS

[...]

NÚMEROS COMPLEJOS

$z = a+bi$

el **conjugado** es $\bar{z}$ tal que $\bar{z} = a-b$
el **módulo** es $|z|$ tal que $|z| = \sqrt{(a^2+b^2)}$
el **argumento** es Θ tal que $tg\Theta = a/b$

la **forma binómica** es $z = a+bi$
la **forma polar** es $z = |z|(\cos\Theta+i*\text{sen}\Theta)$

Fórmula de De Moivre: $z^n = |z|^n(\cos(n\Theta)+i*\text{sen}(n\Theta))$

Teorema Fundamental del Álgebra

todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces complejas
no necesariamente distintas entre sí

el conjugado de una raíz también es raíz
$z^n = w$; tiene n raíces complejas

FUNCIONES

$f:x\rightarrow y$

el **dominio** es el conjunto de valores donde x está definida
la **imagen** es el conjunto de valores donde y tiene correspondiente x
(proyección del grafo sobre una recta vertical)

el **grafo** nos permite hacer la gráfica

$f(x) = mx+b$
m es la «**pendiente**» de la recta
b es el valor de y cuando $x=0$ (corte con eje y)

función **inyectiva** – para cada y existente sólo hay un x
función **sobreyectiva** – para cada x existe un y

simetría par: $f(-x) = f(x)$
simetría impar: $f(-x) = -f(x)$

una función sólo puede ser **invertirse** si es biyectiva

$(f\circ f^{-1}) = x$
$dom(f) = im(f^{-1})$
para encontrarla despejamos y como si fuera x y las renombramos
$f^{-1}(e^x) = \ln(x)$

$\tan(x) = \text{sen}(x)/\cos(x)$
$\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1$

funciones hiperbólicas

$\cosh(x) = (e^x+e^{-x})/2$
$\text{senh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$
$\tanh(x) = \text{senh}(x)/\cosh(x)$

teorema valor intermedio: teniendo en cuenta una función continua entre (a,b) existen todos los valores de f(x) entre f(a) y f(b)
teorema de Bolzano: si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$ o viceversa, existe $f(x) = 0$

teorema de Weierstrass: una función acotada tiene máximo y mínimo absolutos

definición de derivada: $f'(a) = \lim_{x\to a}(f(x)-f(a))/(x-a)$

teorema valor medio: teniendo en cuenta una función derivable entre (a,b) existe $f'(x) = (f(b)-f(a))/(b-a)$
(existe derivada paralela a la recta que une los dos puntos)
teorema de Rolle: si $f(a) = f(b)$ existe $f'(x) = 0$

<u>Coro C</u> (regla de L'Hôpital)
supongamos que

1. $\lim_{(x\to a)} f(x) = 0$ y $\lim_{(x\to a)} g(x) = 0$
2. $\lim_{(x\to a)} f'(x)/g'(x)$ existe

entonces $\lim_{(x\to a)} f(x)/g(x) = \lim_{(x\to a)} f'(x)/g'(x)$

polinomio de Taylor (de grado n para f en el punto a):

$P_{n,a}(x) := {}^{\infty}\sum_{k=0}(f^{(k)}(a)/k!)*(x-a)^k$

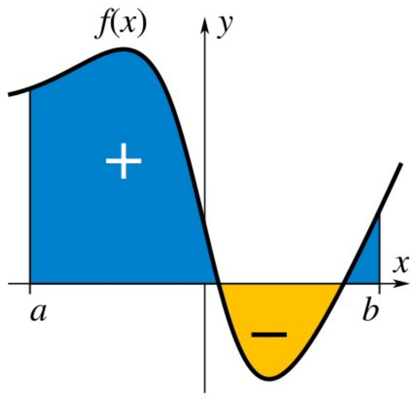
sobre la función

- sobre f
  - dominio
  - continuidad
  - asíntotas (vertical, horizontal, oblicua)
  - cortes con los ejes
  - simetría
- sobre f'
  - puntos críticos
  - crecimiento/decrecimiento
  - máximos/mínimos
- sobre f''
  - concavidad/convexidad
  - punto de inflexión

TEMA 4 · INTEGRACIÓN
(de Riemann)

integrar $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ significa encontrar el área con signo entre el grafo de f y cero

una integración debería cumplir lo esperado:
la función de grafo horizontal la integral es igual a (b-a)*f(a)
que se corresponde a base por altura
la función f(x)=x tiene área triangular cuando se mide en [0,b]
si se mide en [a,b] con a>0 el área es trapezoidal



<u>ideas de Riemann</u>
1. usar rectángulos verticales para aproximar el área
2. cuanto más estrechos, mejor aproximación

<u>elección de base y altura de los rectángulos</u>
hay varias maneras pero nos quedaremos con la partición regular:
base = (b-a)/n
tamaño del intervalo entre número de rectángulos
altura = f(((2i-1)(b-a))/2n)
altura de la función en la posición del centro de cada rectángulo

<u>cálculo final</u>
Área = $\sum(\text{base}_i * \text{altura}_i)$

necesitaríamos rectángulos infinitesimalmente pequeños...

la función será integrable si el límite de las sumas de Riemann existe y es finito.
en ese caso se podrá denotar por su **<u>integral definida</u>** en ese intervalo:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

PROPIEDADES

¿cuándo una función es integrable en un intervalo?

1. es continua
2. tiene un número finito de discontinuidades evitables
3. tiene un número finito de discontinuidades de tipo salto

[...] función de Dirichlet [...]

4. integrales indefinidas. métodos de integración

4.1 integrales indefinidas

regla de Barrow: si G es una primitiva de f (esto es, G'=f), entonces

$\int_{a,b} f(x)dx = G(x)|_{x=a,x=b} = G(b)-G(a)$

$\Longrightarrow$ primero encontramos G y después lo evaluamos en a y b

$\Longrightarrow$ la clave es encontrar G

* si c es una constante y G una primitiva, G+c también será primitiva

integral indefinida: $\int f(x)dx = G(x)+c$

(conjunto de todas las primitivas de f; una por cada valor de c)

observaciones:
1. la integral indefinida es un objeto analítico
2. la integral indefinida es una función, pero la integral definida es un número
3. podemos actualizar la lista de integrales inmediatas

4.2 métodos de integración

los métodos de integración son consecuencia del TFC y nos permiten expresar integrales complicadas en términos de integrales más sencillas

a) integración por partes (CORO A)

$\int_{a,b} u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_{a,b} - \int_{a,b} u'(x)v(x)dx$

b) cambio de variables (CORO B)

$\int_{a,b} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a),g(b)} f(u)du$

siendo F una primitiva de f se cumple y siendo u=g(x):
1. por Barrow el lado derecho cumple: $F(u)|_{g(a),g(b)}=F(g(b))-F(g(a))$
2. por la regla de la cadena y Barrow el lado izquierdo queda $(F\circ g)(x)|_{a,b}$
3. los dos lados son iguales; la cuestión es cierta

5. integrales impropias

estas integrales cumplen una de las siguientes:

1. el intervalo [a,b] NO es finito
2. la función en el integrando NO es continua (NO cumple la regla de Barrow)

TIPO I (integrar sobre dominios infinitos)

$\int_{[a,\infty]} f(x)dx$ y $\int_{[-\infty,b]} f(x)dx$

se resuelve con el límite cuando n tiende a infinito
sustituyendo los infinitos por n en la integral

$\int_{[-\infty,\infty]} f(x)dx = \int_{[-\infty,c]} f(x)dx + \int_{[c,\infty]} f(x)dx$

si el límite es finito diremos que la integral impropia es convergente
en caso contrario diremos que es divergente

$\int_{[-\infty,\infty]} f(x)dx$ es convergente si sus dos «secciones» lo son

TIPO II (la función tiene asíntota vertical)

siendo f continua en (a,b], con discontinuidad en a

$\int_{[a,b]} f(x)dx = \lim_{t\to a+} \int_{[t,b]} f(x)dx$

siendo f continua en [a,b), con discontinuidad en b

$\int_{[a,b]} f(x)dx = \lim_{t\to b-} \int_{[a,t]} f(x)dx$

si es discontinua en un punto c que está entre a y b

$\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,c]} f(x)dx + \int_{[c,b]} f(x)dx$

si el límite es finito, converge, si es infinito, diverge

TEMA 5 · FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES
(último tema)

1. definición y visualización

1.1 el espacio ambiente $\mathbb{R}^n$

se puede ver como un conjunto
se puede ver como un espacio vectorial ($\mathbb{R}^n$,·,+)
más operaciones:

1. norma de un vector: $||-||:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$; $v\to||v||:=\sqrt{(\sum x_i^2)}$
   a) $||\lambda v|| = |\lambda|*||v||$
   b) $||v+w|| \leq ||v||+||w||$
   c) $||v||\geq 0$ ($||v|| = 0$ si $v = 0$)

   1.1 distancia
   $d(-,-):\mathbb{R}^n x\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$
   $d(v,w) := ||v-w|| = \sqrt{(\sum(x_i-y_i)^2)}$

2 producto escalar
   $<-,->:\mathbb{R}^n x\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
   $<v,w> := \sum(x_i*y_i)$
   $<v,w> = ||v||*||w||*\cos(\Theta)$
   v y w serán ortogonales/perpendiculares si $<v,w> = 0$
   $||v|| = \sqrt{(<v,v>)}$

4 producto vectorial
   X: $\mathbb{R}^n x\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$
   [...]

1.2 definición

$f(x,y) = x*y$ (por ejemplo)

una función de n variables definida sobre el dominio $D\subseteq\mathbb{R}^n$ es una regla f que asocia a cada punto x en D un único número real, que denotaremos f(x)

1.3 visualización

1.3 a) grafos

sea $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definimos:
   $grafo(f):=\{(x,y,f(x,y))\in\mathbb{R}^3|(x,y)\in D\}$
   $f(x,y) = z$ (necesitamos una nueva dimensión para representar la función)
   (cuando $\mathbb{R}^n$ n es mayor a 2, es imposible dibujarlo en una gráfica)para

determinar grafos complicados podemos estudiar sus intersecciones con los planos coordenados (x=0,y=0,z=0,etc...)

1.3b) curvas de nivel y mapas de contornos

se construyen estudiando intersecciones en planos de la misma dimensión
   con diferente valor c ($x=c_1,x=c_2,x=c_3,...$)

2. límites y continuidad

recordemos: el límite ($\lim_{x \to a} f(x)=L$) dispone que f(x) esté tan cerca de L como queramos haciendo que x esté suficientemente cerca de a

sea $f: D \subseteq \mathbb{R}$ diremos que el límite de f(x,y)(cuando (x,y)tiende a (a,b)
es L (y escribiremos $\lim_{(x.y) \to (a,b)} f(x,y)=L$
si para todo número $\varepsilon>0$, existe algún número $\delta>0$ tal que:
$\mathrm{dist}(f(x),L)<\varepsilon$

propiedades de los límites

1. $\lim(f+g)=\lim(f)+\lim(g)$
2. $\lim(f*g)=\lim(f)*\lim(g)$
3. $\lim(f/g)=\lim(f)/\lim(g)$
4. $\lim F(f) = F(\lim(f))$; siendo F una transformación continua

teorema B (unicidad del límite)

hay muchas formas de aproximarse al punto (a,b) del límite
si el límite izquiero y derecho no se corresponden no existe el límite
[...] el límite depende del valor de m ($y=mx$; $y=mx^2$)
¿cómo demostrar el límite cuando existe?

1. usando la definición de ε-δ
2. usando coordenadas polares.

2.2 límites y continuidad

sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(a,b) \in D$; f es continua en (a,b) si $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = f(a,b)$
las sumas, restas, productos y cocientes de funciones continuas son continuas
si $g: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas en cierto intervalo ; $(f \circ g)$ también lo es

3. derivabilidad
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ será diferenciable en cierto intervalo si es «suave»

3.1 derivadas parciales
derivada parcial de f respecto a «x» e «y»

$(\partial f/\partial x)_{(a,b)}:=\lim_{h\to 0}((f(a+h,b)-f(a,b))/h)$

$(\partial f/\partial y)_{(a,b)}:=\lim_{h\to 0}((f(a,b+h)-f(a,b))/h)$

(pendiente a una recta tangente a la recta con x=a constante)

notación: $(\partial f/\partial x)_{(a,b)} \to f_x|_{(a,b)}$

para calcular una parte de la derivable tomamos una coordenada como variable y la otra como constante, luego hacemos la viceversa

3.2 plano tangente
según estos dos conceptos se puede formar una ecuación del plano:

ha de contener las dos rectas tangentes r_1 y r_2

queda determinado por el punto (a,b,f(a,b)) y el vector normal

$n=r_2\times r_1$

ecuación del plano tangente: $Z-f(a,b)=(\partial f/\partial x)_{(a,b)}(x-a)+(\partial f/\partial y)_{(a,b)}(y-b)$

3.3 diferenciabilidad para $f^2\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
recordatorio: la recta tangente es una buena aproximación de f en a