Analyse Réelle 1

stephan.semirat@univ-grenoble-alpes.fr

Chapitre 3. Suites réelles

1. Généralités sur les suites réelles

Définition

Une suite réelle est une application de $\mathbb{N}$, ou d'une partie de $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{R}$.
L'image d'un $n \in \mathbb{N}$ se note u_n et s'appelle le terme de rang n de la suite.
La suite est désignée par l'ensemble de ses termes via la notation (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple

Il faut distinguer l'*ensemble* des entiers pairs, désigné par $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$, de la *suite* des entiers pairs, désigné par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n$.
La suite attribue un numéro à chaque entier pair : $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, ... ce que ne fait pas l'ensemble.

Définition

Une suite peut être définie par son terme général, qui est une expression de u_n en fonction de n, ou bien elle peut être définie par récurrence, en donnant son ou ses premier(s) terme(s) et en explicitant une dépendance du terme de rang n aux termes de rang inférieurs à n.

Exemple

La suite des nombres pairs peut être définie par son terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = 2n,$$

ou par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

Il faut comprendre l'expression $u_{n+1} = u_n + 2$ comme :
« on passe d'un terme au suivant en ajoutant 2. »

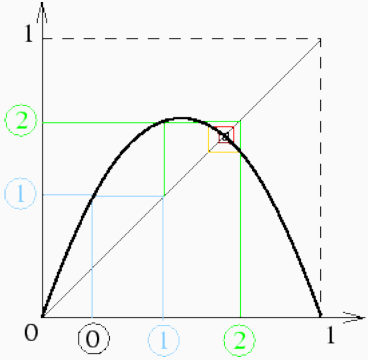
L'intérêt d'une définition par récurrence est de pouvoir modéliser un phénomène (physique, biologique, économique) sans disposer d'une description de l'ensemble de ses valeurs, mais en disposant d'une description « dynamique » de ses valeurs.

À partir d'une description par récurrence de la suite, en général on cherchera à montrer certaines propriétés de l'ensemble des valeurs de la suite : périodicité, convergence, ...

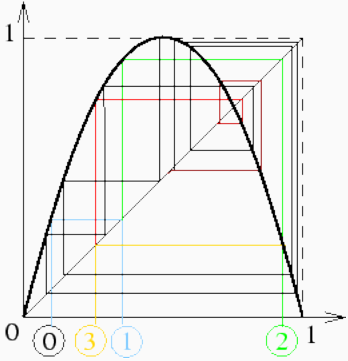
La relation entre la description par récurrence et l'étude de l'ensemble des valeurs peut être particulièrement compliquée.

Exemple

Soit la suite définie par un certain $u_0 \in]0, 1[$ et par la relation $u_{n+1} = ru_n(1 - u_n)$, pour un certain $r \in \mathbb{R}$.



Si r est faible, la suite se stabilise autour d'une valeur



Si r est grand, les valeurs se répartissent un peu partout de manière « chaotique »

Remarque

La définition d'une suite par une récurrence nécessite quelques précautions.
Par exemple, si (u_n) est définie par u_0 et par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour une certaine fonction f, et si f possède un ensemble de définition $D_f \neq \mathbb{R}$, il se peut que $f(u_{n_0}) \notin D_f$ pour un certain n_0. Dans ce cas, le calcul de u_{n_0+2}, défini par $f(u_{n_0+1}) = f(\underbrace{f(u_{n_0})}_{\notin D_f})$ est impossible.
Ainsi, il faut vérifier qu'une suite définie par récurrence est bien définie. Par exemple, en montrant au préalable $f(D_f) \subset D_f$.

Exemple

Pour que la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ soit bien définie, on peut au préalable montrer :
$\forall x \in [0, 2],\ \sqrt{2 - x} \in [0, 2]$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq x \leq 2$.
Alors $-2 \leq -x \leq 0$, et donc (en ajoutant 2) : $0 \leq 2 - x \leq 2$.
Et puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$:
$\sqrt{0} = 0 \leq \sqrt{2 - x} \leq \sqrt{2}$.
Puisque $\sqrt{2} \leq 2$, j'en déduis : $0 \leq \sqrt{2 - x} \leq 2$. $\square$

2. Propriétés des suites

Pour montrer une propriété indéxée par $n \in \mathbb{N}$, la propriété suivante est précieuse.

Axiome de récurrence

Soit P_n une propriété indéxée par $n \in \mathbb{N}$.

Si les propriétés suivantes sont vraies :

- ✓ **Initialisation** : P_0
- ✓ **Hérédité** : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \implies P_{n+1}$

alors $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n$ est vraie.

Exemple

Soit (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.
Montrer, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Démonstration.

Je note P_n le prédicat : $0 \leq u_n \leq 1$.
Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$ donc P_0 est vrai.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n : $0 \leq u_n \leq 1$ soit vrai.
Alors $-1 \leq -u_n \leq 0$, et donc (en ajoutant 1) : $0 \leq 1 - u_n \leq 1$,
J'en déduis (en multipliant par u_n, qui est supposé positif) :
$0 \leq u_n(1 - u_n) \leq u_n$.
J'obtient alors, en utilisant de plus l'hypothèse $u_n \leq 1$:
$0 \leq u_{n+1} \leq 1$, c'est à dire P_{n+1}.
Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, P_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Définition

Une suite (u_n) est <u>majorée</u> (resp. <u>minorée</u>, <u>bornée</u>) si $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une partie majorée (resp. minorée, bornée) de $\mathbb{R}$.

Autrement dit, par exemple (u_n) est majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

Définition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété à partir d'un certain rang s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_{n+n_0}$ vérifie la propriété.

La suite $(u_{n_0-n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de premier terme u_{n_0}, de second terme u_{n_0+1}, etc.
Elle peut aussi se noter $(u_n)_{n\geq n_0}$. On l'appelle *suite tronquée* des n_0 premiers termes.

Exemple

Une suite est majorée (resp. minorée, bornée) si et seulement si elle l'est à partir d'un certain rang.

Démonstration.

Si une suite (u_n) est majorée alors elle l'est à partir de $n_0 = 0$.

Réciproquement, je veux montrer :

Pour toute suite (u_n) majorée à partir d'un certain rang, j'ai :

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

Soit (u_n) une suite majorée à partir d'un certain rang :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists M' \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0, u_n \leq M'$.

Je pose $M = \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}, M'\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n < n_0$, alors $u_n \leq M$. Si $n \geq n_0$, alors $u_n \leq M' \leq M$.

Dans les deux cas, u_n est majorée par M. $\square$

Propriété

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Démonstration.

Je suppose que (u_n) est bornée :
$\exists m, m' \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq m'$.
Je veux montrer : $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.
Soit $M = \max\{|m|, |m'|\}$. Alors $|m| \leq M$ et $|m'| \leq M$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Je montre $|u_n| \leq M$ par disjonction de cas :

- si $u_n \geq 0$ alors $0 \leq u_n \leq m'$ donc $|u_n| \leq |m'| \leq M$.
- si $u_n < 0$ alors $m \leq u_n < 0$ donc $|u_n| \leq |m| \leq M$.

Réciproquement, je suppose que $(|u_n|)$ est majorée :
$\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.
Cela signifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-M \leq u_n \leq M$, donc (u_n) est bornée. $\square$

Définition

Une suite (u_n) est

- croissante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$;
- strictement croissante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$;
- décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$;
- strictement décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$;
- stationnaire si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$.

Exemple

Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = a^n$.

- Si $a > 1$, alors (u_n) est strictement croissante.
  En effet : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a^{n+1} = a \times a^n = a \times u_n$.
  Puisque $a > 0$, j'ai $u_n = a^n > 0$.
  En multipliant l'inégalité $a > 1$ par u_n, j'obtiens alors $a \times u_n > u_n$, c'est à dire : $u_{n+1} > u_n$.
- Si $a = 1$, alors (u_n) est stationnaire.
  En effet : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1^{n+1} = 1^n = u_n$.
- Si $0 \leq a < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante.
  En effet : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a^{n+1} = a \times a^n = a \times u_n < u_n$ d'après le même raisonnement que ci-dessus.
- Si $a < 0$, alors (u_n) n'est ni stationnaire, ni croissante, ni décroissante.

Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \frac{n}{2^n}$.
Montrer que (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si $n = 0$, alors $u_1 = \frac{1}{2} > 0 = u_0$, donc (u_n) n'est pas décroissante entre $n = 0$ et $n = 1$.
Si $n > 0$, alors $u_n = \frac{n}{2^n} > 0$.
En particulier, $u_n \neq 0$ et je peux calculer :
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1.$
Ainsi, puisque $u_n > 0$, j'en déduis : $u_{n+1} \leq u_n$.
Ainsi, (u_n) est décroissante à partir de $n = 1$. $\square$

3. Suites classiques

3. Suites classiques

a. Suites arithmétiques

Définition

Soit $r \in \mathbb{R}$. Toute suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$ est appelée suite arithmétique de raison r.

Une suite arithmétique est entièrement déterminée par ses deux premiers termes (car $r = u_1 - u_0$).

Elle est strictement croissante si sa raison est strictement positive, strictement décroissante si sa raison est strictement négative, et stationnaire si sa raison est nulle.

Propriété

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison r, alors son terme général est $u_n = a + nr$.

Démonstration.

Soit le prédicat P_n : $u_n = a + nr$.

Initialisation : $u_0 = a + 0 \times r$ donc P_0 est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = a + nr$.

Alors $u_{n+1} = u_n + r = a + nr + r = a + (n+1)r$ donc P_{n+1} est vrai.

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, P_n est vrai. $\square$

Propriété

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors la somme des n premiers termes de (u_n) est :
$S_n = \sum\limits_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0+u_n}{2}$.

Exemple

$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

On pourra retenir :

$$S_n = \substack{\text{nombre} \\ \text{de termes}} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Démonstration.

Je montre d'abord l'égalité $P_n : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ par récurrence.

$1 = 1$ donc P_1 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie.

Alors

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = & \quad \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ = & \quad \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ = & \quad \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie, et donc P_n est vraie quel que soit $n \geq 1$.

De cette égalité, je déduis :

$$
\begin{aligned}
S_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = & \sum_{i=0}^{i=n} (u_0 + i \times r) \\
= & \ (n+1)u_0 + r \sum_{i=0}^{i=n} i \\
= & \ (n+1)u_0 + r\tfrac{n(n+1)}{2} \\
= & \ (n+1)\left(u_0 + \tfrac{rn}{2}\right) \\
= & \ (n+1)(\tfrac{2u_0+rn}{2} \\
= & \ (n+1) \times \tfrac{u_0+u_0+rn}{2} = (n+1)\tfrac{u_0+u_n}{2}.
\end{aligned}
\qquad \square
$$

3. Suites classiques

b. Suites géométriques

Définition

Soit $q \in \mathbb{R}$. Toute suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = q \times u_n$ est appelée suite géométrique de raison q.

Une suite géométrique est entièrement déterminée par ses deux premiers termes (car $q = \frac{u_1}{u_0}$ si $u_0 \neq 0$, et sinon (u_n) est entièrement nulle).

Selon le signe de son premier terme et le signe de sa raison, une suite géométrique peut être strictement croissante, strictement décroissante, stationnaire, ou n'avoir aucune de ces propriétés.

Propriété

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $u_0 = a$ et de raison q, alors son terme général est $u_n = a \times q^n$.

Démonstration.

Soit le prédicat P_n : $u_n = a \times q^n$.

Initialisation : $u_0 = a \times q^0$ donc P_0 est vrai (rappel : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^0 = 1$).

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = a \times q^r$.

Alors $u_{n+1} = q \times u_n = q \times a \times q^n = a \times q^{n+1}$ donc P_{n+1} est vrai.

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, P_n est vrai. $\square$

Propriété

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors la somme des n premiers termes de (u_n) est :
$S_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Exemple

$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

On pourra retenir :

$$S_n = \text{premier terme} \times \frac{\text{raison}^{\text{nb de termes}} - 1}{\text{raison} - 1}.$$

Démonstration.

Je montre d'abord l'égalité $P_n : 1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ par récurrence.

$1 = 1^0 = \frac{q^{0+1}-1}{q-1}$ donc P_1 est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie.

Alors

$$\begin{aligned} 1 + q + \ldots + q^n + q^{n+1} &= \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} \\ &= \frac{q^{n+1}-1+(q-1)q^{n+1}}{q-1} \\ &= \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie, et donc P_n est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

De cette égalité, je déduis :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = & \sum_{i=0}^{i=n} u_0 q^i \\ = & \; u_0 \sum_{i=0}^{i=n} q^i \\ = & \; u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}. \end{aligned}$$

$\square$

3. Suites classiques

c. Suites arithmético-géométrique

Définition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Toute suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ est appelée suite arithmético-géométrique.

Une suite arithmético-géométrique vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$ est arithmétique si $a = 1$, et géométrique si $b = 0$.

Une suite arithmético-géométrique non stationnaire est entièrement déterminée par ses trois premiers termes.
En effet, tout d'abord $u_1 \neq u_0$ car sinon, on aurait $u_2 = u_1$ et, par récurrence, $u_{n+1} = u_n$.
De $u_n \neq u_0$, en retranchant $u_2 = au_1 + b$ à $u_1 = au_0 + b$, on obtient $a = \frac{u_2 - u_1}{u_1 - u_0}$, et alors $b = u_1 - au_0$.

Propriété

Si $a \neq 1$, le calcul du terme général d'une suite arithmético-géométrique vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$ se ramène à celui d'une suite géométrique.

Démonstration.

Puisque $a \neq 1$, je peux poser $\alpha = \frac{b}{1-a}$.

Alors α vérifie : $a\alpha + b = \alpha$.

Ainsi, la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ vérifie :

$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \alpha = au_n + b - (a\alpha + b) = a(u_n - \alpha) = av_n$.

Elle est donc géométrique de raison a.

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 a^n$, avec $v_0 = u_0 + \alpha = u_0 + \frac{b}{1-a}$.

J'en déduis le terme général de (u_n) en fonction de a et b :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + \alpha = \left(u_0 + \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}$. $\square$

Exemple

Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Je détermine son terme général de la manière suivante :

- Je cherche α tel que $2\alpha + 1 = \alpha$. Je trouve $\alpha = -1$.
- Je pose $v_n = u_n - \alpha$, soit $v_n = u_n + 1$, et je vérifie que v_n est géométrique :
  $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1) = 2v_n$.
  Elle est bien géométrique de raison $q = 2$.
- Je détermine le terme général de (v_n) et j'en déduis celui de (u_n) :
  Pour tout $n \geq 0$, $v_n = v_0 q^n$, avec $v_0 = u_0 + 1 = 4$ et $q = 2$, soit $v_n = 4 \times 2^n = 2^{n+2}$.
  J'en déduis, pour tout $n \geq 0$, $u_n = v_n - 1 = 2^{n+2} - 1$.