Kobeissi Salim

COURS D'ANALYSE

DEUG MASS $2^{\text{ème}}$ année

Année 2000/2001

Contents

Chapter 1

Les séries

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1 *Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

- *On appelle série de terme général u_n, notée $\sum u_n$,la suite $\{S_n\}_{n\imath\mathbb{N}}$ définie par*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- *S_n s'appelle la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$.*

- *La série $\sum u_n$ est dite convergente de somme S ($S \in \mathbb{K}$) notée $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, si $S_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} S$.*

■

Proposition 1.1 *"C.N. de convergence d'une série"*
Si la série $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

Preuve:

En effet, $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1}$ puis $u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$.

■

Exemple 1.1 *"série géométrique"*
La série $\sum a^n$ ($a \in \mathbb{C}$) converge si et seulement si $|a| < 1$ et dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Preuve:

- Si $|a| \geq 1$, alors la suite $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et par conséquent la série $\sum a^n$ diverge.

- Si $|a| < 1$, alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \frac{1}{1-a}$.

$\blacksquare$

Exemple 1.2 *"série exponentielle"*

La série $\sum \dfrac{a^n}{n!}$ *$(a \in \mathbb{R})$ converge et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$.

Preuve: Programme de première année.

$\blacksquare$

Exemple 1.3 *La série* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge.*

Preuve:

On a

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Supposons que la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite S, la suite $\{S_{2n}-S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers $S - S = 0$, ce qui est impossible car dans ce cas on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = 0 \geq \frac{1}{2}.$$

$\blacksquare$

Exemple 1.4 *La série* $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *converge et* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Preuve:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{K=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{K=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1} dt = \int_0^1 \Big(\sum_{K=1}^{n} (-1)^{k-1} t^{k-1} \Big) dt \\ &= \int_0^1 \Big(\sum_{i=0}^{n-1} (-t)^i \Big) dt = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{t+1} dt, \end{aligned}$$

et comme

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{t+1} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1},$$

alors

$$S_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = \ln 2.$$

Exemple 1.5 *Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers un réel ℓ. Alors la série $\sum(a_k - a_{k+1})$ converge et sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k - a_{k+1}) = a_0 - \ell$.*

Preuve:

En effet, $S_n = \sum_{k=0}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} a_0 - \ell$.

$\blacksquare$

1.2 Opérations sur les séries convergentes

Proposition 1.2 *Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ converge, et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Preuve:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

■

Exemple 1.6 *La série $\sum \frac{n^2}{n!}$ converge vers $2e$.*

Preuve:

Pour $n \geq 2$, on a

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}.$$

Or, on sait que les séries $\sum \dfrac{1}{(n-2)!}$ et $\sum \dfrac{1}{(n-1)!}$ sont convergentes, alors la série $\sum \dfrac{n^2}{n!}$ converge, et

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} &= 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j!} = 1 + e + (e-1) = 2e.\end{aligned}$$

■

Remarque 1.1 *Si la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum(u_n + v_n)$ diverge.*

Preuve:

On raisonne par l'absurde. Supposons alors que $\sum(u_n + v_n)$ converge. Comme $v_n = (u_n + v_n) - u_n$, alors la convergence des séries $\sum(u_n + v_n)$ et $\sum u_n$ implique que $\sum v_n$ converge (absurde).

■

Remarque 1.2 *Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien conclure (en toute généralité) sur la convergence ou la divergence de la série $\sum(u_n + v_n)$.*

En effet,

1. les séries $\sum \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n}\right)$ et $\sum \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{n}\right)$ divergent (comme somme d'une série convergente et d'une série divergente), pourtant la série $\sum \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2^n}\right)$ converge.

2. les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum 2^n$ divergent ainsi que la série $\sum \left(\frac{1}{n} + 2^n\right)$.

■

1.3 séries à termes positifs

Proposition 1.3 *Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. Alors*

1. *La suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*

2. *La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.*

   Preuve:

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$.

2. $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Si elle est majorée elle converge et sinon elle tend vers $+\infty$.

■

Notation Si $\sum u_n$ est une série divergente à termes positifs, on écrit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

■

Théorème 1.1 *"théorème de comparaison"*

Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes positifs. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : si $n \geq N$, alors $u_n \leq v_n$. On a

1. *si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge, et si $N = 0$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.*

2. *si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.*

   Preuve:

1. Pour tout $n > N$, on a :

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n} u_k \\
&\leq \sum_{k=0}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=0}^{N}(u_k - v_k) + \sum_{k=N+1}^{+\infty} v_k.
\end{aligned}
$$

   Donc la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, et par conséquent elle converge.

   Si de plus, $N = 0$, alors $S_n \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to 0} S_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.

2. C'est la contraposée de 1.

■

Exemple 1.7 *La série* $\sum \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ *converge et* $\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq 2$.

Preuve:

En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-1/2} = 2$.

■

Corollaire 1.1 *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes strictement positifs. On suppose que* $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} l \in \mathbb{R}_+^*$. *Alors les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

Preuve:

$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} l$, donc il existe$N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$; $\left|\frac{u_n}{v_n} - l\right| < \frac{l}{2}$. On en déduit que si $n \geq N$, alors $\frac{l}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3l}{2}v_n$ i.e. si $n \geq N$, $u_n \leq \frac{3l}{2}v_n$ et $v_n \leq \frac{2}{l}u_n$ et on conclut par le théorème de comparaison.

■

Exemple 1.8 *La série* $\sum \sin(\pi/n)$ *diverge.*

Preuve:

$\frac{sin(\pi/n)}{1/n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \pi$ et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge..

1.4 Les séries de Riemann

Les séries de Riemann sont les séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.4 *La série* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Preuve:

- Si $\alpha \leq 1$: Dans ce cas $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ et comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$.

- Si $\alpha > 1$: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = -x^{1-\alpha}$. Pour tout $n \geq 2$, le théorème des accroissements finis donne l'existence de $c_n \in]n-1, n[$ tel que $f(n)-f(n-1) = f'(c_n)$, i.e.
$$\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{C_n^\alpha} \geq \frac{\alpha-1}{n^\alpha}.$$
Comme (voir exemple 1.5) la série $\sum \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$ converge, alors (par le théorème de comparaison) la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

■

1.5 La convergence absolue

Définition 1.2 *($u_n \in \mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)*
On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente, si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

$\blacksquare$

Théorème 1.2 *Toute série absolument convergente est convergente.*

Preuve:

1. Si $u_n \in \mathbb{R}$.
   On pose
   $$\begin{cases} u_n^+ &= \frac{1}{2}(|u_n| + u_n) \quad (u_n^+ = u_n \text{ si } u_n \geq 0 \text{ et } 0 \text{ sinon }) \\ u_n^- &= \frac{1}{2}(|u_n| - u_n) \quad (u_n^- = 0 \text{ si } u_n \geq 0 \text{ et } -u_n \text{ sinon }). \end{cases}$$
   On a alors $u_n = u_n^+ - u_n^-$; $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$; $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$. Comme la série $\sum |u_n|$ converge, alors par le théorème de comparaison, les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent, puis la série $\sum (u_n^+ - u_n^-)$ converge i.e. $\sum u_n$ converge.

2. Si $u_n \in \mathbb{C}$. On pose $u_n = x_n + iy_n$, où x_n et $y_n \in \mathbb{R}$.
   On a $|u_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ d'où $|x_n| \leq |u_n|$ et $|y_n| \leq |u_n|$, donc par le théorème de comparaison, les séries $\sum |x_n|$ et $\sum |y_n|$ convergent, et par conséquent les séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent, puis la série $\sum (x_n + iy_n)$ converge.

$\blacksquare$

Exemple 1.9 *La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ ($z \in \mathbb{C}$) converge.*

Preuve:

En effet, la série $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ converge, et plus précisément, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}$.

$\blacksquare$

Proposition 1.5 *La somme de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.*

Preuve:

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. On a

$$\sum_{k=0}^{n} |u_k + v_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k| + \sum_{k=0}^{n} |v_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| + \sum_{k=0}^{+\infty} |v_k|,$$

on en déduit que la série $\sum (u_n + v_n)$ est absolument convergente, et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k + v_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| + \sum_{k=0}^{+\infty} |v_k|.$$

Chapter 2

Etude pratique d'une série

2.1 Comparaison à une série géométrique

Proposition 2.1 *"règle de d'Alembert"*

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes. On suppose qu'il existe $K \in]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que : si $n \geq N$; $|u_{n+1}| \leq K|u_n|$. Alors, la série $\sum u_n$ converge.

Preuve:

On a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq k|u_{n-1}| \leq K^2|u_{n-2}| \leq \ldots \leq K^{n-N}|u_N| = \frac{|u_N|}{K^N}K^n$$

et comme la série $\sum K^n$ est convergente $(0 < K < 1)$ alors la série $\sum u_n$ converge absolument.

■

Corollaire 2.1 *Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \neq 0$ et $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} l$. Alors :*

1. *si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge.*
2. *si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.*

Preuve:

1. Soit $K \in]l, 1[$, alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$; $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq K$ i.e. si $n \geq N$; $|u_{n+1}| \leq K|u_n|$, et on conclut par la proposition précédente.
2. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$; $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geq 1$, d'où si $n \geq N$, $|u_n| \geq |u_{n-1}| \geq \ldots \geq |u_N| > 0$, et la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

■

Exemple 2.1 *la série* $\sum \frac{n!}{n^n}$ *est convergente.*

Preuve:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}.\frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \frac{1}{e} < 1.$$

■

Exemple 2.2 *la série* $\sum nz^n$ *est convergente si et seulement si* $|z| < 1$*.*

Preuve:

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n+1}{n}|z| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} |z|$ d'où $\sum nz^n$ converge si $|z| < 1$ et diverge si $|z| > 1$. Enfin, si $|z| = 1$, $|u_n| = n$ ne tend pas vers 0.

■

Proposition 2.2 *"règle de Cauchy"*

Soit $\sum u_n$ *une série à termes réels ou complexes. On suppose qu'il existe* $K \in]0,1[$ *et* $N \in \mathbb{N}$ *tels que :* $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sqrt[n]{|u_n|} \leq K$*. Alors, la série* $\sum u_n$ *converge.*

Preuve:

Pour tout $n \geq N$, on a $\sqrt[n]{|u_n|} \leq K$ puis $|u_n| \leq K^n$, et comme la série $\sum k^n$ converge alors la série $\sum u_k$ converge absolument.

■

Corollaire 2.2 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes réels ou complexes telle que* $\sqrt[n]{|u_n|} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} l$*. Alors :*

1. *si* $l < 1$*, la série* $\sum u_n$ *converge.*

2. *si* $l > 1$*, la série* $\sum u_n$ *diverge.*

Preuve:

1. Pour tout $K \in]l,1[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$; $\sqrt[n]{|u_n|} \leq K$ et on conclut par la proposition précédente.

2. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $\sqrt[n]{|u_n|} \geq 1$, d'où si $n \geq N$, $|u_n| \geq 1$ et la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

■

Exemple 2.3 *la série* $\sum \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ *est convergente.*

Preuve:

En effet, $\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = \frac{e^{\frac{(\ln n)^2}{n}}}{\ln n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$

2.2 comparaison à une série de Riemann

Proposition 2.3 *"règle de Riemann"*
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes.

1. *S'il existe $\alpha > 1$, tel que la suite $n^\alpha |u_n|$ tend vers une limite l finie, alors la série $\sum u_n$ converge.*

2. *Si $n|u_n|$ tend vers une limite non nulle, alors la série $\sum |u_n|$ diverge (i.e. $\sum u_n$ ne converge pas absolument.)*

Preuve:

1. $n^\alpha |u_n| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} l$ i.e. $\dfrac{|u_n|}{\frac{1}{n^\alpha}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} l$.

   $\underline{1^{er} \text{ cas : si } l > 0,}$ alors les séries $\sum |u_n|$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature, et, on conclut du fait que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

   $\underline{2^{\text{ème}} \text{ cas : si } l = 0,}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que; si $n \geq N$ alors $|u_n| \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$ et on conclut par le théorème de comparaison.

2. Si $n|u_n|$ tend vers une limite non nulle, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que si $n \geq N$ alors $|u_n| \geq \dfrac{C}{n}$ et on conclut par le théorème de comparaison.

■

Exemple 2.4 *La série $\sum \dfrac{\ln n}{n^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.*

Preuve:

$\underline{1^{er} \text{ cas : si } \beta > 1,}$ on considère $\alpha \in]1, \beta[$, on a :

$$n^\alpha \frac{\ln n}{n^\beta} = \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$$

et la série $\sum \dfrac{\ln n}{n^\beta}$ converge.

$\underline{2^{\text{ème}} \text{ cas : si } \beta \leq 1,}$ on a :

$$n\frac{\ln n}{n^\beta} = n^{1-\beta} \ln n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$$

et la série $\sum \dfrac{\ln n}{n^\beta}$ diverge.

2.3 Utilisation d'une intégrale

Soit f une fonction décroissante sur $[a, +\infty[$ à valeurs positives. On sait que pour tout $x \in]a, +\infty[$, f est Riemann intégrable sur $[a, x]$, et comme $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, +\infty[$ alors la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} [a, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t)dt \end{array}$$

est croissante. La fonction F admet donc une limite en $+\infty$, que l'on note $\int_a^{+\infty} f(t)dt$, et il en est de même pour la suite $\{F(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Lemme 2.1 *Soit f une fonction décroissante de $[1, +\infty[$ à valeurs positives. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$;*

$$\int_1^n f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(t)dt$$

Preuve:

f est décroissante, donc $\forall t \in [k, k+1]$, on a

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$

En intégrant les termes de cette inégalité entre k et $k+1$, il vient

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k).$$

On peut alors écrire

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{j=2}^{n} f(j) \leq \int_1^n f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

d'où

$$\int_1^n f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(t)dt.$$

■

Théorème 2.1 *Soit f une fonction décroissante de $[1, +\infty[$ à valeurs positives. La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est finie.*

Preuve:

$\Longrightarrow$: En utilisant le lemme précédent, on a

$$F(n) = \int_1^n f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f(k).$$

La suite $\{F(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée et comme elle est croissante, elle converge.

$\Longleftarrow$: Toujours par le lemme précédent, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(t)dt \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(t)dt.$$

La suite croissante S_n est majorée, donc elle converge.

$\blacksquare$

Exemple 2.5 *La série* $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ *converge si et seulement si* $\beta > 1$.

Preuve:

En effet, la fonction

$$\int_2^x \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{du}{u^\beta} = \frac{1}{\beta - 1}\Big[(\ln 2)^{1-\beta} - (\ln x)^{1-\beta}\Big]$$

tend vers une limite finie si et seulement si $\beta > 1$.

2.4 Les séries alternées

Définition 2.1 *On dit qu'un série est alternée si ses termes sont alternativement positifs et négatifs.*

■

Proposition 2.4 *"critère spécial des séries alternées"*
Pour toute suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *décroissante qui converge vers* 0, *la série* $\sum(-1)^n a_n$ *converge. De plus, sa somme* S *vérifie* $|S - S_n| \leq a_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Preuve:

Il est facile de voir que les suites $\{S_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{S_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Ces deux suites convergent donc vers la même limite. Par conséquent, la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$

d'où $|S - S_{2n+1}| \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}$ et $|S - S_{2n-1}| \leq S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n}$ et finalement, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|S - S_p| \leq a_p$.

■

Exemple 2.6 *La série* $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ *converge si* $\alpha > 0$.

Preuve:

En effet, lorsque $\alpha > 0$, la suite $\{\frac{1}{n^\alpha}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

2.5 Utilisation d'un développement limité

Nous allons présenter cette technique sous forme d'exemples.

Exemple 2.7 *La série* $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ *converge si et seulement si* $\alpha > \frac{2}{3}$.

Preuve:

On a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}\Big(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big)^{-1/2} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}\Big(1 - \frac{(-1)^n}{2n^\alpha} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\varepsilon(n)\Big) \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon(n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0 \\ &= \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{2n^{3\alpha/2}}\Big(1 - 2\varepsilon(n)\Big). \end{aligned}$$

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$. Par ailleurs,

$$\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\Big(1 - 2\varepsilon(n)\Big) \sim \frac{1}{n^{3\alpha/2}} \quad \text{en } +\infty.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^{3\alpha/2}}$ converge si et seulement $\frac{3\alpha}{2} > 1$ i.e. $\alpha > \frac{2}{3}$, il est en de même pour la série $\sum \frac{1}{n^{3\alpha/2}}\Big(1 - 2\varepsilon(n)\Big)$. Finalement, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}$ converge si et seulement si $\alpha > \dfrac{2}{3}$.

■

Exemple 2.8 *La série* $\sum \ln\Big(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\Big)$ *est divergente.*

Preuve:

En effet,

$$\begin{aligned} \ln\Big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\Big) &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon(n) \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon(n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0 \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}\Big(1 - 2\varepsilon(n)\Big). \end{aligned}$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (critère spécial des séries alternées), et comme $\frac{1}{2n}\Big(1 - 2\varepsilon(n)\Big) \sim \frac{1}{2n}$ en$+\infty$ et que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, alors la série $\sum \ln(1+\frac{(-1)^n}{n})$ est divergente (comme somme d'une série convergente et d'une série divergente).

■

2.6 Critère d'Abel

Proposition 2.5 *Soient $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs et $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$. On suppose que*

(i) la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0

(ii) la suite $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (i.e. $\exists M \in \mathbb{R}$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$; $|B_n| \leq M$).

Alors la série $\sum a_n b_n$ converge et sa somme S vérifie $|S - S_n| \leq 2Ma_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve:

On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} (-B_{k-1} + B_k) a_k \\ &= a_0 B_0 - a_1 B_0 + a_1 B_1 - a_2 B_1 + a_2 B_2 + \ldots + a_{n-1} B_{n-1} - a_n B_{n-1} + a_n B_n \\ &= (a_0 - a_1) B_0 + (a_1 - a_2) B_1 + \ldots + (a_{n-1} - a_n) B_{n-1} + a_n B_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a_k) B_k + a_n B_n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|(a_{k-1} - a_k) B_k| \leq M(a_{k-1} - a_k)$$

et comme la série $\sum (a_{k-1} - a_k)$ converge (voir exemple 1.5) alors (par le théorème de comparaison) la série $\sum (a_{k-1} - a_k) B_k$ converge absolument, et par conséquent la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa somme

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_{k-1} - a_k) B_k$$

vérifie

$$\begin{aligned} |S - S_n| &= \Big| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_{k-1} - a_k) B_k - a_n B_n \Big| \\ &\leq M \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_{k-1} - a_k) + M a_n = 2 M a_n. \end{aligned}$$

■

Exemple 2.9 *La série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ (avec $\theta \neq 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$) converge et $|S - S_n| \leq \frac{2}{n}$.*

Preuve:

$*$ La suite $\frac{1}{n}$ est décroissante et converge vers 0.

$*$ On a $|\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}| = \left| e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$, et par la règle d'Abel, la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge.

$*$ Enfin $|S - S_n| = 2\frac{1}{n}$

■

Chapter 3

Suites de fonctions

3.1 Convergence simple

Soit A un ensemble. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 3.1 *On dit que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (ou ponctuellement) vers une fonction f sur une partie B de A si pour tout $x \in B$, la suite $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, i.e.*

$$\forall\, x \in B, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \; tq \;\; si \; n \geq N(\varepsilon, x) \;\; alors \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

L'ensemble $D = \{x \in A;$ la suite $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge$\}$ s'appelle domaine de convergence de la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

■

Proposition 3.1 *"unicité de la limite"*

Si la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f et vers g sur B alors $f = g$ sur B.

Preuve:

En effet, la limite d'une suite étant unique, $\forall\, x \in B$; $f(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = g(x)$.

■

Exemple 3.1 *La suite de fonctions*

$$\begin{array}{rccc} f_n : & [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

converge vers la fonction $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & |x| < 1 \\ 1 & si & x = 1. \end{array} \right.$ *sur* $D =]-1, 1]$

■

Exemple 3.2 *La suite de fonctions*

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R} - \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{1+x^n} \end{array}$$

converge vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| < 1 \\ 1/2 & si \quad x = 1 \\ 0 & si \quad |x| > 1. \end{cases}$$

■

Remarque 3.1 *On peut remarquer sur ces deux exemples que chacune des fonctions f_n est continue sur D et pourtant leurs limites f ne le sont pas.*

3.2 Convergence uniforme

Soient A un ensemble et f une application de A dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 3.2 *On appelle norme uniforme de f sur A le nombre*

$$\|f\|_A = \begin{cases} \sup_{x\in A} |f(x)| & si \ \{|f(x)|;\, x \in A\} \ est\ bornée. \\ +\infty & sinon. \end{cases}$$

■

Définition 3.3 *On dit que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur une partie B de A si $\|f_n - f\|_B \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \ tq \ \ si\ n \geq N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \ alors \forall x \in B, \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

■

Remarque 3.2 *Si la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers une fonction f alors elle converge uniformément sur tout partie B de A vers f.*

Preuve:

Conséquence immédiate de : $\|f_n - f\|_B \leq \|f_n - f\|_A$.

■

Proposition 3.2 *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) La suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur B.

(ii) Il existe une suite numérique $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et tq $\forall x \in B$; $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$.

Preuve:

<u>(i) $\Longrightarrow$ (ii)</u> : Il suffit de prendre $\alpha_n = \|f_n - f\|_B$.

<u>(ii) $\Longrightarrow$ (i)</u> : Si $\forall x \in B$; $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$, alors α_n est un majorant de l'ensemble $\{|f_n(x) - f(x)|; x \in B\}$, d'où $\alpha_n \geq \sup\limits_{x\in B} \Big(|f_n(x) - f(x)|\Big) = \|f_n - f\|_B$.

■

Exemple 3.3 *Soit la suite de fonctions*

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

1. La suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]-1,1[$ mais pas uniformément.

2. Pour tout $a\in]0,1[$, la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-a,a]$.

Preuve:

1. $*$ si $x\in]-1,1[$, alors $f_n(x)=x^n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   $*$ $\|f_n-0\|_{]-1,1[}=\|f_n\|_{]-1,1[}=\sup\limits_{x\in]-1,1[}\Big(|x|^n\Big)=1$.

2. On a :
$$\|f_n-0\|_{[-a,a]}=\|f_n\|_{[-a,a]}=\sup_{x\in[-a,a]}\Big(|x|^n\Big)=a^n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■

Exemple 3.4 *La suite de fonctions*

$$\begin{array}{rccc} f_n: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{nx}{1+n^2x^2} \end{array}$$

ne converge pas uniformément vers la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

Preuve:

$*$ On a $f_n(0)=0$ et si $x\neq 0$, $f_n(x)\sim\dfrac{1}{nx}$ en $+\infty$, on en déduit que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$.

$*$ D'autre part, $f_n'(x)=\frac{n(1-n^2x^2)}{1+n^2x^2}$, d'où le tableau de variation de f_n

x	$-\infty$ $\quad$ $-1/n$	$1/n$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f_n(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

On en déduit $\|f_n-0\|_{\mathbb{R}}=\|f_n\|_{\mathbb{R}}=f_n(\frac{1}{n})=\frac{1}{2}$.

■

Remarque 3.3 *(très utile)*

S'il existe une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que la suite numérique $\{f_n(x_n)-f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas 0 quand n tend vers $+\infty$, alors la suite de fonctions $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur A.

Preuve:

En effet, l'existence d'une telle suite montre que $\|f_n-f\|_A\geq|f_n(x_n)-f(x_n)|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

■

Exemple 3.5

$*$ *La suite de fonctions* f_n : $\begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^n \end{array}$ *ne converge pas uniformément vers* 0 *sur* $]-1,1[$. *En effet, les éléments de la suite* $\{x_n = 1 - \frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont dans* $]-1,1[$ *et* $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \frac{1}{e} \neq 0$.

$*$ *La suite de fonctions* f_n : $\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \frac{x}{x+n} \end{array}$ *ne converge pas uniformément vers sur* $[0,+\infty[$ *car* $\frac{n}{n+n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \frac{1}{2}$.

3.3 Propriétés des limites uniformes

Théorème 3.1 *"limite uniforme de fonctions continues"*
Soit $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ *et une fonction* $f_n : A \longrightarrow \mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* $n \in \mathbb{N}$*). On suppose que*

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* f_n *est continue au point* a *(resp. sur* A*).*

(ii) la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une fonction* f *sur* A.

Alors f *est continue au point* a *(resp. sur* A*) i.e.*

$$\lim_{x\to a}\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\lim_{x\to a} f_n(x)\Big).$$

Preuve:

On a $\|f_n - f\| - A \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$ donc $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $\|f_n - f\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, et en particulier,

$$\|f_N - f\|_A < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On en déduit que $|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ et $|f_N(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Par ailleurs, la fonction f_N est continue au point a, alors $\exists\eta > 0$ tel que si $x \in A$ et $|x-a| < \eta$ alors $|f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Finalement, si $x \in A$ avec $|x-a| < \eta$, alors

$$|f(x)-f(a)| \leq |f(x)-f_N(x)| + |f_N(x)-f_N(a)| + |f_N(a)-f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ce qui montre que f est continue en a.

■

Exemple 3.6 *La suite de fonctions*

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

ne converge pas uniformément sur $]-1,1]$.

Preuve:

En effet, nous avons montré que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad |x| < 1 \\ 1 & si \quad x = 1 \end{cases}$ sur $]-1, 1]$. Comme f_n est continue sur $]-1, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f ne l'est pas alors la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1, 1]$.

■

Théorème 3.2 *"limite uniforme de fonctions intégrales"*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une fonction continue ($n \in \mathbb{N}$). On suppose que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur $[a, b]$, alors la suite de fonctions $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[a, b]$ par

$$F_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \qquad où \quad x_0 \in [a, b]$$

converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \end{array}$$

ce qui donne

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \Big) = \int_{x_0}^{x} \Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(t) \Big) dt.$$

En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\int_{a}^{b} f_n(t)dt \Big) = \int_{a}^{b} \Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(t) \Big) dt.$$

Preuve:

La fonction $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f$ est continue (donc Riemann intégrable) sur $[a, b]$ comme limite uniforme d'un suite de fonctions continues, ce qui justifie l'existence de $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$. De plus, on a

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| &= \Big| \int_{x_0}^{x} \Big(f_n(t) - f(t) \Big) dt \Big| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} \Big| f_n(t) - f(t) \Big| dt \\ &\leq (b - a)\|f_n - f\|_{[a,b]} \quad \text{qui tend vers 0 quand } n \text{ tend vers } +\infty. \end{aligned}$$

La suite $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers F sur $[a, b]$.

■

Exemple 3.7 *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\int_{0}^{1} (x + 1) \dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n + x} dx \Big)$.

Preuve:

$* \; f_n(x) = (x+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} (x+1)e^x$. De plus, pour tout $x \in [0,1]$;

$$|f_n(x) - (x+1)e^x| = (x+1)\frac{xe^x - xe^{-x}}{n+x} \leq 2\frac{e}{n}$$

et comme la suite $\{2\frac{e}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, alors la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f(x) = (x+1)e^x$ sur $[0,1]$. Enfin, en utilisant le théorème précédent, il vient

$$\int_0^1 f_n(x)dx \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_0^1 (x+1)e^x dx = [xe^x]_0^1 = e.$$

■

Théorème 3.3 *"limite uniforme de fonctions dérivables"*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ($n \in \mathbb{N}$). On suppose que

(i) la suite $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction g.

(ii) il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Alors la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f' = g$ i.e.

$$\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n\Big)'(x) = \Big(\lim_{n\to+\infty} f'_n(x)\Big).$$

Preuve:

Comme $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g et que $\forall n \in \mathbb{N}$, f'_n est continue alors la fonction g est continue (comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues). Pour $x \in [a,b]$, on pose

$$f(x) = \int_{x_0}^x g(t)dt + l \qquad \text{où} \qquad l = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0).$$

f ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $f' = g$ (car g est continue).

D'autre part, pour tout $x \in [a,b]$; $f_n(x) = f_n(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^x f'_n(t)dt$ puis

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x_0) - l| + (b-a)\|f'_n - g\|_{[a,b]}$$

qui tend vers 0 indépendamment de x. La suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers f sur $[a,b]$.

■

Corollaire 3.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que la suite $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et que la suite $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g. Alors, la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge sur I vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie $f' = g$.*

Preuve:

Pour $x \in I$, on pose $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)dt$. Par le théorème précédent, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment inclus dans I et qui contient x_0, et le résultat demandé s'ensuit.

$\blacksquare$

Chapter 4

Séries de fonctions

4.1 Convergence uniforme

Soit A un ensemble, $u_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la suite des sommes partiels des u_n.

Définition 4.1

- *On dit que la série $\sum u_n$ converge simplement sur une partie B de A, si la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur B, i.e. $\forall\, x \in B$, la série $\sum u_n(x)$ converge.*

- *On dit que la suite $\sum u_n$ converge uniformément sur une partie B de A, si la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur B.*

- *L'ensemble $D = \{x \in A$ tel que la série $\sum u_n(x)$ converge$\}$ s'appelle le domaine de convergence de la série $\sum u_n$.*

  Si on pose $S(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n(x)$ pour $x \in D$, on écrit $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$.

■

Proposition 4.1 *"Condition pour la convergence uniforme d'une série"*

1. *la série $\sum u_n$ converge uniformément sur B si et seulement si $\left\| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right\|_B \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$*

2. *Si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur B alors la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur B.*

Preuve:

1. En effet, $\forall\, x \in D$, $S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, puis

$$||S - S_n||_B \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0 \quad \Longrightarrow \quad \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right\|_B \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

2. On a
$$\|u_n\|_B = \Big\| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \Big\|_B \leq \Big\| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \Big\|_B + \Big\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \Big\|_B$$
et on conclut par la proposition précédente.

■

Exemple 4.1 *On considère la série de fonctions de terme général*
$$u_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

1. $D =]-1,1[$, mais la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.

2. Si $a \in]-1,1[$, alors la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-a,a]$.

Preuve:

1. $*$ Si $|x| \geq 1$, alors la suite $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, et la série $\sum u_n$ diverge.

   $*$ Si $|x| < 1$, alors $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \frac{1}{1-x}$, puis $D =]-1,1[$.

2. $\forall x \in [-a,a]$; $|S_n(x) - S(x)| = \left| \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} - \dfrac{1}{x-1} \right| = \dfrac{|x|^{n+1}}{1-x} \leq \dfrac{a^{n+1}}{1-a}$ donc la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (i.e. la série $\sum u_n$) converge uniformément sur $[-a,a]$.

■

Théorème 4.1 *"critère spécial uniforme de séries alternées"*
Soit a_n ($n \in \mathbb{N}$) une fonction d'une partie A de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que

(i) $\forall x \in A$, la suite $\{a_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(ii) La suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur A.

Alors la série $\sum(-1)^n a_n$ converge uniformément sur A.

Preuve:

1. On sait (par le critère spécial des séries alternées) que pour tout $x \in A$, la série $\sum(-1)^n a_n(x)$ converge (i.e. la série $\sum(-1)^n a_n$ converge simplement vers une fonctions S sur A) et que, $\forall x \in A$: $|S(x) - S_n(x)| \leq a_n(x)$, d'où $\|S - S_n\|_A \leq \|a_n\|_A$, et d'après la condition (ii), la série $\sum(-1)^n a_n$ converge uniformément sur A

■

Exemple 4.2 *La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.*

Preuve:

En effet, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, la suite $\left\{\dfrac{1}{n+x}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et $\left\|\dfrac{1}{n+x}\right\|_{\mathbb{R}_+} = \dfrac{1}{n}$ qui tend vers 0 indépendamment de x.

$\blacksquare$

Théorème 4.2 *"critère d'Abel uniforme"*
Soit les fonctions $a_n : A \longmapsto \mathbb{R}_+$ et $b_n : A \longmapsto \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que

(i) $\forall x \in A$, la suite $\{a_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(ii) La suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur A.

(iii) Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$: $\|\sum_{k=0}^{n} b_k\|_A \leq M$.

Alors la série $\sum a_n(x)b_n(x)$ converge uniformément sur A.

Preuve:

On sait par le théorème d'Abel que $\forall x \in A$, la série $\sum a_n(x)b_n(x)$ converge, et que

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k(x)b_k(x)\Big| \leq 2M|a_n(x)| \quad \textit{puis} \quad \Big\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k(x)b_k(x)\Big\|_A \leq 2M\|a_n\|_A.$$

$\blacksquare$

Exemple 4.3 *Pour tout $\varepsilon \in]0, \pi[$, la série $\sum \dfrac{\cos(nx)}{n}$ converge uniformément sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$.*

Preuve:

$*$ La suite $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)\Big| = \Big|\sum_{k=0}^{n} Re(e^{ikx})\Big| = \Big|Re(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx})\Big| \leq \Big|\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\Big| = \Big|\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\Big|.$$

Or,

$$\begin{aligned} 1 - e^{ix} &= 1 - \cos x - i\sin x = 2\sin^2(x/2) - 2i\sin(x/2)\cos(x/2) \\ &= -2i\sin(x/2)\Big(\cos(x/2) + i\sin(x/2)\Big), \end{aligned}$$

d'où

$$|1 - e^{ix}| = 2|\sin(x/2)| \geq 2\sin(\varepsilon/2) \quad \text{puis} \quad \Big|\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)\Big| \leq \frac{1}{\sin(\varepsilon/2)}.$$

Finalement, la série $\sum \dfrac{\cos(nx)}{n}$ converge uniformément sur $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ par le critère d'Abel uniforme.

4.2 Convergence normale

Définition 4.2 *On dit que la série $\sum u_n$ converge normalement sur une partie B de A si la série $\sum \|u_n\|_B$ converge.*

Exemple 4.4 *La série $\sum \dfrac{e^{inx}}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.*

Preuve:

En effet, $\left|\dfrac{e^{inx}}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.

■

Proposition 4.2 *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) La série $\sum u_n$ converge normalement sur B

(ii) Il existe une suite à termes positifs $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in B$, $|u_n(x)| \leq \alpha_n$ et la série $\sum \alpha_n$ converge.

Preuve:

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Il suffit de prendre $\alpha_n = \|u_n\|_B$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|u_n\|_B \leq \alpha_n$ et comme la série $\sum \alpha_n$ converge, alors par le théorème de comparaison, la série $\sum \|u_n\|_B$ converge.

■

Théorème 4.3 *La convergence normale implique la convergence uniforme.*

Preuve:

Soit $\sum u_n$ une série qui converge normalement sur B. Alors $\forall x \in B$,

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k(x)\|_B$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ indépendamment de x.

■

Remarque 4.1 *Attention, la réciproque du théorème précédent est fausse. En effet, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, et comme $\|u_n\|_{\mathbb{R}_+} = \frac{1}{n}$ alors la série $\sum \|u_n\|_{\mathbb{R}_+}$ diverge.*

4.3 Propriétés des séries uniformément convergentes

Théorème 4.4 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère une fonction u_n de A à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On suppose que*

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue au point a (resp. sur A).

(ii) La série $\sum u_n$ est uniformément convergente sur A vers une fonction S.

Alors la fonction S est continue au point a (resp. sur A).

Preuve:

la fonction $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est continue au point a (resp. sur A), et comme la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S sur A, alors (par le théorème de continuité pour les suites de fonctions) la fonction S est continue au point a (resp. sur A).

■

Exemple 4.5 *La fonction S définie sur $]0, 2\pi[$ par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ est continue.*

Preuve:

Par le critère d'Abel, la série $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ est convergente sur $]0, 2\pi[$, ce qui justifie l'existence de S.

Soit $x_0 \in]0, 2\pi[$ choisissons $\varepsilon \in]0, \pi[$ tel que $x_0 \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$. On sait que la série $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ converge uniformément sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, et comme la fonction $x \longrightarrow \frac{\cos(nx)}{n}$ est continue sur cet ensemble, alors (par le théorème de continuité) S est continue au point x_0, et ceci pour tout $x_0 \in]0, 2\pi[$, donc S est continue sur $]0, 2\pi[$.

■

Théorème 4.5 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $x_0 \in [a, b]$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On pose, pour $x \in [a, b]$, $v_n(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} u_n(t)dt$. Si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors la série $\sum v_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ et*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_n(x) = \int_{x_0}^{x} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t)\Big) dt \quad i.e. \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\int_{x_0}^{x} u_k(t)dt\Big) = \int_{x_0}^{x} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t)\Big) dt.$$

En particulier, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\int_{a}^{b} u_k(t)dt\Big) = \int_{a}^{b} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t)\Big) dt.$

Preuve:

On a
$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n}\Big(\int_{x_0}^{x} u_k(t)dt\Big) = \int_{x_0}^{x}(\Big(\sum_{k=0}^{n} u_k(t)\Big)dt = \int_{x_0}^{x} S_n(t)dt.$$
Comme la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S, alors par le théorème d'intégration pour les suites de fonctions,
$$\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\Big(\int_{x_0}^{x} S_n(t)dt\Big)$$
et donc
$$\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \quad i.e. \quad \int_{x_0}^{x}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)\Big)dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{x_0}^{x} u_k(t)dt.$$
■

Exemple 4.6 *Pour* $x \in]0,1[$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$.

Preuve:

Partons de $\ln(1+x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \Big(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^k\Big)dt$. Par le critère spécial uniforme des séries alternées, la série $\sum(-1)^k t^k$ converge uniformément sur $[0,x]$ (avec $0 < x < 1$), on peut alors écrire
$$\int_0^x \Big(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^k\Big)dt = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \int_0^x t^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^{j-1}\frac{x^j}{j}.$$
■

Théorème 4.6 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction. On suppose que*

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

(ii) La série $\sum u_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$.

(iii) Il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que la série $\sum u_n(x_0)$ converge.

Alors la suite $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ et sa somme est une fonction $\mathcal{C}^1$ qui vérifie
$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'.$$

Preuve:

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, on a $S'_n = \sum_{k=0}^{n} u'_k$. En utilisant l'hypothèse (ii), la suite $\{S'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\sum_{k=0}^{+\infty} u'_k$. Comme $S_n(x_0) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x_0)$, alors par le théorème de dérivation pour les suites de fonctions, la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction S qui vérifie $S' = \sum_{k=0}^{+\infty} u'_k$, et le résultat s'ensuit. Enfin, S' est continue par le théorème de continuité.

■

Corollaire 4.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que la série $\sum u_n(x_0)$ converge, et que la série $\sum u'_n$ converge uniformément sur tout segment de I. Alors la série $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et vérifie*

$$\forall\, x \in I,\ \ S'(x) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\Big)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x).$$

Preuve:

On a $S'_n(x) = (\sum_{k=0}^{n} u_k)' = \sum_{k=0}^{n} u'_k$,. La suite $\{S'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur tout segment de I vers $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$, et par le corollaire 3.1), pour tout $x \in I$, la suite $\{S_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et sa somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$.

■

Exemple 4.7 *La fonction*

$$\begin{array}{rccl} S: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin(\frac{x}{n}) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, et $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cos(\frac{x}{n})$.

Preuve:

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(\dfrac{x}{n})$ est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus : $u'_n(x) = \dfrac{1}{n^2}\cos(\dfrac{x}{n})$ et comme $\|u'_n\|_{\mathbb{R}} \leq \dfrac{1}{n^2}$, alors la série $\sum u'_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$. En remarquant que la série $\sum u_n(0)$ converge, on peut conclure par le corollaire précédent.

■

Chapter 5

Séries entières

Une série entière est une série de la forme $\sum a_n z^n$, où $z \in \mathbb{C}$ et $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes (entière fait référence au fait que les exposants sont des entiers).

Définition 5.1 *Soit l'ensemble* $E = \{r \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que la suite* $\{|a_n|r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée* $\}$.

- *On appelle rayon de convergence de la série* $\sum a_n z^n$ *le nombre*

$$R = \begin{cases} \sup E & \textit{si } E \textit{ est borné} \\ +\infty & \textit{sinon.} \end{cases}$$

- *On appelle disque de convergence de la série* $\sum a_n z^n$ *le disque ouvert*

$$D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \textit{ tel que } |z| < R\}.$$

■

Exemple 5.1 *Les séries* $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^{n-1}$ *et* $\sum \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ *ont même rayon de convergence.*

Preuve:

On note R, R_1 et R_2 les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^{n-1}$ et $\sum \frac{a_{n-1}}{n} z^n$.
$*$ Soit $z \in D(0,R_1)$, alors la suite $\{n|a_n|z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. La suite $\{|a_n|z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée, et par conséquent $|z| \leq R$ i.e. $z \in \overline{D}(0,R) = \{z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| \leq R\}$. On en déduit que $D(0,R_1) \subset \overline{D}(0,R)$, puis $R_1 \leq R$.

$*$ Soit $z \in D(0,R)$, choisissons $r \in]|z|, R[$. On sait que la suite $\{|a_n|r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et comme $\frac{n|z|^n}{r^n} = n\left|\frac{z}{r}\right|^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, alors la suite $\{n|a_n||z|^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. D'où $|z| \leq R_1$ i.e. $z \in \overline{D}(0,R_1)$. Finalement, $D(0,R) \subset \overline{D}(0,R_1)$ puis $R \leq R_1$. Cela montre que $R = R_1$.

On pose finalement $b_n = n a_{n-1}$, d'après ce qui précède, les séries $\sum b_n z^n$ et $\sum n b_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence, i.e. les séries $\sum \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ et $\sum a_{n-1} z^{n-1}$ ont même de rayon de convergence $R = R_2$.

■

Théorème 5.1

1. *Si $z \in D(0,R)$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument, de plus cette série converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D}(0,\rho)$ où $0 \le \rho < R$.*

2. *Si $|z| > R$, alors la série $\sum a_n z^n$ diverge.*

Preuve:

1. Soit $\rho \in]0,R[$, on choisit un réel r dans l'intervalle $]\rho,R[$. On sait que la suite $\{|a_n|r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée i.e. $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n|r^n \le M$, puis $\forall z \in \overline{D}(0,\rho)$:
$$|a_n|z^n \le |a_n|\rho^n = |a_n|r^n\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n \le M\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^n,$$
et comme la série $\sum(\frac{\rho}{r})^n$ converge, alors la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque $\overline{D}(0,\rho)$. Enfin, ceci est vrai pour tout $\rho \in]0,R[$, donc la série $\sum a_n z^n$ converge absolument sur $D(0,R)$.

2. Si $|z| > R$, alors la suite $\{|a_n||\mathbb{Z}|^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. La suite $\{a_n z^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend donc pas vers 0, et par conséquent la série $\sum a_n z^n$ diverge.

$\blacksquare$

Exemple 5.2

1. *La série $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1 et elle ne converge pas en aucun point du cercle $C(0,1)$.*

2. *La série $\sum \frac{z^n}{n^2}$ a pour rayon de convergence 1 et elle converge sur $\overline{D}(0,1)$.*

3. *La série $\sum \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1 et elle converge sur $\overline{D}(0,1)\backslash\{1\}$.*

$\blacksquare$

Corollaire 5.1 *On déduit du théorème précédent que*

1. *s'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $R \ge |z_0|$.*

2. *s'il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum a_n z_1^n$ diverge, alors $R \le |z_1|$.*

$\blacksquare$

Définition 5.2 *"domaine de convergence"*

On appelle domaine de convergence de la série $\sum a_n z^n$ l'ensemble
$$D = \{z \in \mathbb{C},\ \textit{tel que la série} \sum a_n z^n \textit{ converge}\}.$$

$\blacksquare$

Remarque 5.1 *D'après le théorème précédent, on a $D(0,R) \subset D \subset \overline{D}(0,R)$.*

5.1 Détermination du rayon de convergence

Proposition 5.1 *"règle de d'Alembert"*

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$*,* $a_n \neq 0$ *et que* $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ *tend vers une limite* ℓ *quand* n *tend vers* $+\infty$*. Alors*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & si \quad \ell \in \mathbb{R}_+^* \\ +\infty & si \quad \ell = 0 \\ 0 & si \quad \ell = +\infty. \end{cases}$$

Preuve:

Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(z) = a_n z^n$. Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, on a

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \ell|z|.$$

Si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$: Par la règle de d'Alembert (pour les séries numériques), la série $\sum a_n z^n$ converge si $\ell|z| < 1$ et diverge si $\ell|z| > 1$, i.e. cette série converge si $|z| < \frac{1}{\ell}$ et diverge si $|z| > \frac{1}{\ell}$, par conséquent $R = \frac{1}{\ell}$.

Si $\ell = 0$: Dans ce cas, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, et la série $\sum a_n z^n$ converge (toujours par la règle de d'Alembert). Donc $R = +\infty$.

Si $\ell = +\infty$: Dans ce cas, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} +\infty$, la série $\sum a_n z^n$ est donc divergente, et comme ceci est vrai pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, alors $R = 0$.

■

Exemple 5.3

1. *Le rayon de convergence de la série* $\sum n^2 z^n$ *est* 1.
2. *Le rayon de convergence de la série* $\sum \frac{z^n}{n!}$ *est* $+\infty$.
3. *Le rayon de convergence de la série* $\sum n^n z^n$ *est* 0.
4. *Le rayon de convergence de la série* $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$ *est* $\frac{1}{e}$.

Preuve:

En utilisant la proposition précédente, on a

1. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 1$, d'où $R = 1$.
2. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, d'où $R = +\infty$.

3. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \Big(\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \geq n+1 \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} +\infty$, d'où $R = 0$.

4. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} e$, d'où $R = \frac{1}{e}$.

■

Proposition 5.2 *"règle de Cauchy"*
On suppose que $\sqrt[n]{|a_n|}$ *tend vers une limite* ℓ *quand* n *tend vers* $+\infty$*. Alors*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & si \quad \ell \in \mathbb{R}_+^* \\ +\infty & si \quad \ell = 0 \\ 0 & si \quad \ell = +\infty. \end{cases}$$

Preuve:

On pose $u_n(z) = a_n z^n$. On a

$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|z| \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \ell|z|.$$

En utilisant cette fois-ci la règle de Cauchy pour les séries numériques, on trouve

Si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$: $\sum a_n z^n$ converge si $|z| < \frac{1}{\ell}$ et diverge si $|z| > \frac{1}{\ell}$, d'où $R = \frac{1}{\ell}$.

Si $\ell = 0$: $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et donc $R = +\infty$.

Si $\ell = +\infty$: $\sum a_n z^n$ diverge pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et donc $R = 0$.

■

Exemple 5.4

1. *Le rayon de convergence de la série* $\sum \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{n^2} z^n$ *est* e*.*

2. *Le rayon de convergence de la série* $\sum \Big(\cos(1/\sqrt{n})\Big)^{n^2}$ *est* 1*.*

Preuve:

1. $\sqrt[n]{|a_n|} = \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \frac{1}{e}$, d'où $R = \frac{1}{e}$.

2. $\sqrt[n]{|a_n|} = \Big(\cos(1/\sqrt{n})\Big)^n = e^{n\ln(\cos(1/\sqrt{n}))} \sim e^{n\ln(1-\frac{1}{n})} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 1$, d'où $R = e$.

■

Proposition 5.3 *Soit* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence* R_1 *et* R_2 *respectivement et soit* R *le rayon de convergence de la série "somme"* $\sum(a_n+b_n)z^n$*. Alors*

1. $R \geq \min(R_1, R_2)$.

2. Si $R_1 \neq R_2$, alors $R = \min(R_1, R_2)$.

Preuve:

1. Soit $z \in D(0, \min(R_1, R_2))$, alors les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent, puis la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ converge. Donc $z \in \overline{D}(0, R)$ et par conséquent $R \geq \min(R_1, R_2)$.

2. Supposons que $R_1 < R_2$. Si $z \in \mathbb{C}$ tel que $R_1 < |z| < R_2$, alors la série $\sum a_n z^n$ diverge et la série $\sum b_n z^n$ converge. On en déduit que la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ diverge, d'où $R \leq R_1 = \min(R_1, R_2)$.

$\blacksquare$

Exemple 5.5 *Les séries* $\sum \left(\frac{1}{2^n} - 1\right) z^n$ *et* $\sum z^n$ *ont le même rayon de convergence* 1*, pourtant le rayon de convergence de la série* $\sum \frac{1}{2^n}$ *est* 2.

5.2 Séries entières d'une variable réelle

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle, ($a_n \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$) de rayon de convergence $R > 0$, et soit la fonction

$$\begin{array}{rcl} S :]-R, R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{array}$$

On appelle intervalle de convergence de la série $\sum a_n x^n$ l'intervalle $]-R, R[$.

Théorème 5.2 *La fonction S est Riemann intégrable sur le segment $[0, x]$ pour tout $x \in]0, R[$ (resp. $[x, 0]$ pour tout $x \in]-R, 0[$), et*

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Preuve:

Considérons $x \in]-R, R[$, la série $\sum a_n t^n$ est donc normalement convergente sur l'intervalle $[-|x|, |x|]$, et par conséquent

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k\Big) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_0^x t^k dy = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

$\blacksquare$

Exemple 5.6 *Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a*

1. $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

2. $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Preuve:

On sait que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$, il vient,

1. $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \Big) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

2. $\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} \Big) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

■

Théorème 5.3 *La fonction S est dérivable sur $]-R, R[$, et pour tout $x \in]-R, R[$:*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Preuve:

On sait que le rayon de convergence de la série $\sum n a_n x^{n-1}$ est R, la série $\sum n a_n x^{n-1}$ est donc normalement convergente sur $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ pour tout $\varepsilon \in]0, R[$. De plus la série $\sum a_n x^n$ converge pour $x = 0$ et la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^n \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, d'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, la fonction S est dérivable sur $[-R+\varepsilon, R-\varepsilon]$ pour tout $\varepsilon \in]0, R[$. On en déduit que S est dérivable sur $]-R, R[$, et que pour tout $x \in]-R, R[$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

■

Exemple 5.7 *Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x^2)}$.*

Preuve:

On sait que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = S(x)$, d'où $S'(x) = \frac{1}{(1-x^2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$.

■

Corollaire 5.2

1. *La fonction somme S est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et pour tout $x \in]-R,R[$ et $n \in \mathbb{N}$:*

$$S^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_{k-n} x^{k-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{k!} a_k x^k.$$

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.*

Preuve:

1. Une récurrence facile nous donne que S est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]-R,R[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-R,R[$,

$$S^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_{k-n} x^{k-n} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_{k-n} x^{k-n}.$$

2. Il suffit de remplacer x par 0 dans la formule précédente.

■

Exemple 5.8 *Pour tout $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :* $\dfrac{1}{(1-x)^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+n-1}^{n-1} x^k.$

Preuve:

Soit $x \in]-1,1[$ et $S(x) = \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$. Un réccurence immédiate nous donne

$$S^{(n-1)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n},$$

et en utilisant le corollaire précédent, on obtient

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} x^k = \sum_{k=0}^{n} C_{k+n-1}^{n-1} x^k.$$

■

Exemple 5.9 *Calculer* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Preuve:

Pour $x \in]-1,1[$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = x^2 \frac{2}{(1-x)^3} + x \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3},$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1/4+1/2}{(1-1/2)^3} = 6.$$

■

Proposition 5.4 *On suppose que $S(0) = 0$. Alors la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f :]-R, R[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longrightarrow & \begin{cases} \frac{S(x)}{x} & si\ x \neq 0 \\ S'(0) & si\ x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Preuve:

On a $a_0 = S(0) = 0$, puis pour tout $x \in]-R, R[$,

$$f(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n-1}.$$

On en déduit que f est la somme de la série entière $S'(0) + \sum_{k=2}^{+\infty} a_k x^{k-1}$ sur $]-R, R[$ et on conclut par le corollaire précédent.

■

Exemple 5.10 *La fonction*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Preuve:

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\dfrac{e^x - 1}{x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}$. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5.3 Développement en série entière

Définition 5.3 *Soit $r \in]0, +\infty]$. On dit qu'une fonction $f :]-r, r[\longrightarrow \mathbb{C}$ est développable en série entière en 0 sur $]-r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ telle que pour tout $x \in]-r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.*

■

Proposition 5.5 *Si $f :]-r, r[\longrightarrow \mathbb{C}$ est développable en série entière en 0 sur $]-r, r[$ alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et pour tout $x \in]-r, r[$,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

En particulier, il y a unicité du développement en série entière en 0 et f admet un développement limité en 0 pour tout ordre dont la partie régulière d'ordre n est $\sum_{n=0}^{n} a_k x^k$.

Preuve:

Comme f est la somme d'une série entière sur l'intervalle $]-r,r[$, alors f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

$\blacksquare$

Exemple 5.11 *Pour tout $x\in\mathbb{R}$,*

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad ch\,x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad \textit{et}\quad sh\,x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Preuve:

On sait que $e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. De plus

$$ch\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^k+(-x)^k}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad \text{et } sh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$\blacksquare$

Remarque 5.2 *Il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tel que la série $\sum\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge sur $\mathbb{R}$, mais qui ne sont pas développables en série entière sur aucun intervalle de la forme $]-r,r[$.*

Preuve:

Considérons par exemple la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(0)=0$ et $g(x)=e^{\frac{-1}{x^2}}$ si $x\neq 0$. Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, g est de classe $\mathcal{C}^n$ et que $g^{(n)}(0)=0$ et $g^n(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{\frac{-1}{x^2}}$ où P_n est un polynôme.

En effet, il est évident que le résultat est vrai à l'ordre 0. Supposons qu'il est vrai à l'ordre n, on obtient

$$\begin{cases} g^{(n+1)}(x)=\frac{x^3P_n'(x)-3nx^2P_n(x)+2P_n(x)}{x^{3(n+1)}e^{\frac{-1}{x^2}}} & \textit{si } x\neq 0\\ \frac{g^{(n)}(x)-g^{(n)}(0)}{x}=\frac{P_n(x)}{x}e^{\frac{-1}{x^2}}\xrightarrow[x\longrightarrow 0]{}0, & \text{i.e. } f^{(n+1)}(0)\text{ existe et est égale à } 0.\end{cases}$$

Maintenant, si g était développable en série entière en 0 sur un intervalle $]-r,r[$, on aurait pour tout $x\in]-r,r[$,

$$e^{\frac{-1}{x^2}}=g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n=0\ \text{(impossible)}.$$

$\blacksquare$

Exemple 5.12 *Pour tout $x\in\mathbb{R}$,*

$$\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad \textit{et}\quad \cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Preuve:

Il est facile de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sin^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$ et $\sin^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$, d'où $\sin^{(2k)}(0) = 0$ et $\sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. En utilisant la formule de Mac-Laurin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\theta_x \in]0,1[$ tel que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + \frac{x^{(2n+2)}}{(2n+2)!}\sin(\theta_x x).$$

Puis,

$$\Big|\sin x - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad et \qquad \cos x = \sin' x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

■

Proposition 5.6 *"formule de Binôme généralisée"*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Alors pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

Preuve:

On pose $f(x) = (1+x)^\alpha$, on a

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ $\ldots f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$,

puis $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$, et en posons $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha-n}{n+1}$ tend vers -1 quand n tend vers $+\infty$. Le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est donc égale à 1 (règle de d'Alembert). On pose alors pour $x \in]-1,1[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad et \qquad g(x) = (1+x)^{-\alpha}S(x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(1+x)S'(x) - \alpha S(x) &= (1+x)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}\Big) - \alpha\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \underbrace{a_1 - \alpha a_0}_{0} + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_n\Big(\underbrace{\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{\alpha-n}{n+1}}_{0}\Big)x^n = 0\end{aligned}$$

d'où

$$g'(x) = (1+x)^{-\alpha-1}\Big((1+x)S'(x) - \alpha S(x)\Big) = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = g(0) = 1$, et par conséquent $S(x) = (1+x)^\alpha$.

$\blacksquare$

Corollaire 5.3 *Pour tout $x \in]-1,1[$, on a*

1. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n.$

2. $\arcsin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

3. $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

Preuve:

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a (voir proposition précédente)

1.

$$\begin{aligned} (1+x)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-n+\frac{1}{2})}{n!} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n. \end{aligned} \tag{5.1}$$

2.

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n} \Big) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

3.

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$\blacksquare$

Exemple 5.13 *"applications aux équations différentielles"*

Trouver une fonction f développable en série entière en 0 sur $]-1,1[$ solution de l'équation dfférentielle

$$(E) \quad x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x).$$

Preuve:

On suppose que $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x\in]-1,1[$. Alors

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad et \quad y''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2},$$

d'où pour tout $x\in]-1,1[$

$$\ln(x+1)=\sum_{n=2}^{+\infty}\Big(n(n-1)a_n+4na_n+2a_n\Big)x^n+2a_0+(2a_1+4a_0)x,$$

puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=2a_0+6a_1x+\sum_{n=2}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_nx^n$$

d'où $a_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}$. Or, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}$, on a alors pour tout $x\in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+2}\\
&= \frac{1}{2}\ln(1+x)+\frac{1}{x}\Big(\ln(1+x)-x\Big)+\frac{1}{2x^2}\Big(\ln(1+x)-x-\frac{x^2}{2}\Big)\\
&= \frac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x)-\frac{1}{2x}-\frac{3}{4},
\end{aligned}$$

d'où $y(x)=\begin{cases}\frac{(x+1)^2}{2x^2}\ln(1+x)-\frac{1}{2x}-\frac{3}{4} & si\ x\in]-1,1[\\ 0 & si\ x=0.\end{cases}$

■

Chapter 6

Séries de Fourier

6.1 Séries trigonométriques

Définition 6.1 *Une série trigonométrique est une série de fonctions* $\sum u_n$, *où pour* $n \geq 1$,

$$u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

x *étant une variable réelle et* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles ou complexes.*
Pour $n = 0$, *on pose* $u_0(x) = \frac{a_0}{2}$, *cela sera justifié ultérieurement.*

■

<u>Autre expression de $u_n(x)$</u>

$$\begin{aligned} u_n(x) &= a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \\ &= a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant : $c_0 = \frac{a_0}{2}$, et pour $n \geq 1$, $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$, cette série s'écrit $\sum \Big(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\Big)$, ou en sommant sur $\mathbb{Z}$, $\sum c_p e^{ipx}$.

Remarque 6.1 *On peut facilement voir que* $a_0 = 2c_0$ *et pour* $n \geq 1$,

$$a_n = c_n + c_{-n}; \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad et \quad |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 = \frac{1}{2}\Big(|a_n|^2 + |b_n|^2\Big).$$

Preuve:

On a

$$\begin{aligned} |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 &= \frac{1}{4}\Big(|a_n - ib_n|^2 + |a_n + ib_n|^2\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(|a_n|^2 + |b_n|^2 + i(\overline{a_n} b_n - \overline{a_n} b_n) + |a_n|^2 + |b_n|^2 - i(a_n \overline{b_n} - \overline{a_n} b_n)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(|a_n|^2 + |b_n|^2\Big). \end{aligned}$$

■

Remarque 6.2 *La somme partielle d'ordre n de cette série au point x est donnée par*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} \Big) = \sum_{p=-n}^{n} c_p e^{ipx}.$$

■

Proposition 6.1 *"calcul des coefficients en fonction de la somme"*
On suppose que la série trigonométrique $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et on note par S sa fonction somme. Alors

1. $\forall p \in \mathbb{Z}$: $c_p = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} S(t) e^{-ipt} dt.$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} S(t) \cos(nt) dt$ *et* $b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} S(t) \sin(nt) dt.$

Preuve:

1. En effet,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} S(t) e^{-ipt} dt &= \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt} \Big) e^{-ipt} dt = \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i(k-p)t} \Big) dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-p)t} dt \quad (\text{car } \textstyle\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{i(k-p)t} \text{ converge normalement sur } [0, 2\pi]). \\
&= 2\pi c_p \quad (\text{car } \textstyle\int_0^{2\pi} e^{imt} dt = 2\pi \text{ si } m = 0 \text{ et } 0 \text{ sinon}).
\end{aligned}$$

2. En utilisant 1., il est facile de voir que $a_0 = 2c_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} S(t) dt$ et pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(t) \Big(e^{-int} + e^{int} \Big) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(t) \cos(nt) dt, \\
b_n &= i(c_n - c_{-n}) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(t) \Big(e^{-int} - e^{int} \Big) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(t) \sin(nt) dt.
\end{aligned}$$

■

Remarque 6.3 *Si g est une fonction 2π-périodique et intégrable sur $[0, 2\pi]$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\int_\alpha^{2\pi+\alpha} g(t) dt = \int_0^{2\pi} g(t) dt \quad \textit{en particulier,} \quad \int_{-\pi}^{\pi} = \int_0^{2\pi} g(t) dt.$$

Preuve:

On a

$$\int_\alpha^{2\pi+\alpha} g(t) dt = \int_\alpha^0 g(t) dt + \int_0^{2\pi} g(t) dt + \int_{2\pi}^{2\pi+\alpha} g(t) dt.$$

Le changement de variable $t = 2\pi + u$ dans la dernière intégrale donne

$$\int_{2\pi}^{2\pi+\alpha} g(t) dt = \int_0^\alpha g(u + 2\pi) du = \int_0^\alpha g(u) du,$$

et le résultat demandé s'ensuit.

6.2 Développement en séries de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique et Riemann intégrable sur $[0, 2\pi]$.

Définition 6.2

- *On appelle coefficients de Fourier de f les nombres réels ou complexes, (pour $n \in \mathbb{N}$)*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad et \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

ou $c_p(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ipt}dt$ *avec* $p \in \mathbb{Z}$.

- *On appelle série de Fourier de f, la série*

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum \Big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\Big)$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ *ou la série* $\sum c_p(f)e^{ipx}$ *avec* $p \in \mathbb{Z}$.

■

Remarque 6.4

1. *Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$.*

2. *Si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$.*

Preuve:

1. Si f est paire, alors la fonction : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & f(t)\cos(nt) \end{array}\right.$ est paire, d'où

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$$

et la fonction $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & f(t)\sin(nt) \end{array}\right.$ est impaire, d'où $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = 0$.

2. Cette fois-ci $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & f(t)\cos(nt) \end{array}\right.$ est impaire et $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & f(t)\sin(nt) \end{array}\right.$ est paire.

■

Exemple 6.1 *Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ si $0 < x < 2\pi$. Alors la série de Fourier de f est $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$.*

Preuve:

f est impaire sur $[-\pi, \pi]$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin(nt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(nt) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t \sin(nt) dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \Big[\frac{1}{-n} t \cos(nt) \Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos(nt) dt = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

■

Exemple 6.2 *Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = |x|$. Alors la série de Fourier de f est $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{[\cos(2n+1)x]}{(2n+1)^2}$.*

Preuve:

f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $b_n(f) = 0$ et

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt)dt = \frac{2}{n\pi}\Big[t\sin(nt)\Big]_0^\pi - \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin(nt)dt \\ &= 0 + \frac{2}{\pi n^2}\Big[\cos(nt)\Big]_0^\pi = \frac{2}{\pi n^2}\Big((-1)^n - 1\Big) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

et $a_0(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x dx = \dfrac{2}{\pi}\Big[\dfrac{x^2}{2}\Big]_0^\pi = \pi.$

■

Théorème 6.1 *"inégalité de Bessel"*

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |c_p(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi |f(t)|^2 dt.$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|f(t) &- \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt}\Big|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt}\Big)\Big(\overline{f(t)} - \sum_{k=-n}^{n}\overline{c_k(f)}e^{-ikt}\Big)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt - \sum_{k=-n}^{n}\overline{c_k(f)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt \\ &\quad - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(t)e^{-ikt}dt} + \sum_{k=-n}^{n}\sum_{\ell=-n}^{n} c_k\overline{c_l}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-\ell)t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt - \sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2 - \sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2 + \sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2, \end{aligned}$$

d'où $S_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt$. La suite croissante $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée, par conséquent elle converge, et

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty}|c_p(f)|^2 = \lim_{n\to+\infty} S_n \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt.$$

■

Corollaire 6.1 *$c_p(f)$ tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.*

Preuve:

Comme la série $\sum |c_p(f)|^2$ converge, son terme général tend vers 0.

$\blacksquare$

Corollaire 6.2 *Il existe des séries trigonométriques qui ne sont les séries de Fourier d'aucune fonction 2π-périodique et Riemann intégrable sur $[0, 2\pi]$.*

Preuve:

Par exemple la série $\sum \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ (partout convergente) répond à la question. En effet, la série $\sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$ diverge.

6.3 Convergence des séries de Fourier

Définition 6.3 *On appelle noyau de Dirichlet d'indice n la fonction D_n définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

$\blacksquare$

Proposition 6.2

1. *D_n est paire, 2π-périodique, et* $\displaystyle\int_0^{2\pi} D_n(x)dx = 2\pi.$

2. $D_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix}-1} & si \quad x \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z} \\ 2n+1 & si \quad x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$

Preuve:

1. On a

$$D_n(-x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(e^{-ikx} + e^{ikx}\right) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

puis

$$D_n(x + 2\pi) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x+2\pi)} = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = D_n(x).$$

De plus,

$$\int_0^{2\pi} D_n(x)dx = 2\pi + 2\sum_{k=1}^{n} \int_0^{2\pi} \cos(kx)dx = 2\pi.$$

2. Si $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{p=-n}^{n} e^{ipx} = e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(\frac{(2n+1)}{2})x} - e^{-i(\frac{(2n+1)}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}. \end{aligned}$$

et si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$; $D_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} 1 = 2n+1.$

■

Proposition 6.3 *"formule de Dirichlet"*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction 2π-périodique et Riemann intégrable sur $[0, 2\pi]$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} D_n(u)du.$$

Preuve:

Par définition, on a

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\Big)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\Big)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)D_n(u)du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)du. \end{aligned}$$

Ensuite, le changement de variable $v = -u$ donne

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+v)D_n(v)dv = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)du,$$

et par conséquent

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} D_n(u)du.$$

■

Définition 6.4

- *On dit qu'une fonction $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) par morceaux, s'il existe une subdivision $X = \{x_i\}_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ telle que la restriction de g à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ se prolonge en une fonction dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[x_i, x_{i+1}]$.*

  Pour une telle fonction, on définit

$$\begin{aligned} g(x_i+0) &= \lim_{u\to 0, u>0} g(x_i+u), & g(x_i-0) &= \lim_{u\to 0, u>0} g(x_i-u), \\ g'(x_i+0) &= \lim_{u\to 0, u>0} \frac{g(x_i+u)-g(x_i)}{u} & g'(x_i-0) &= \lim_{u\to 0, u>0} \frac{g(x_i-u)-g(x_i)}{u}. \end{aligned}$$

- *Si g est définie sur un intervalle I, on dit qu'elle est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) par morceaux, si sa restriction à tout segment de I est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) par morceaux.*

■

Théorème 6.2 *"théorème de Dirichlet"*

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction 2π-périodique et dérivable par morceaux sur $[0, 2\pi]$. Alors la série de Fourier de f converge et sa somme est $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ en tout point x de $\mathbb{R}$. En particulier, sa somme est égale à $f(x)$ en tout point x où f est continue.

Preuve:

$$\begin{aligned}
&S_n(f)(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} D_n(u)du - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)}{2} D_n(u)du.
\end{aligned}$$

On considère la fonction $\varphi(u) = \begin{cases} \frac{f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)}{2(e^{iu}-1)} & \text{si} \quad u \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{f'(x+0)+f'(x-0)}{2i} & \text{si} \quad u \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$

Il est facile de voir que φ est 2π-périodique et Riemann intégrable sur $[0, 2\pi]$. De plus,

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(u)(e^{i(n+1)u} - e^{-inu})du \\
&= c_{n+1}(\varphi) - c_{-n}(\varphi) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

■

Exemple 6.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Preuve:

On sait (voir exemple 6.2) que la série de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = |x|$ est $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. Comme f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

En particulier,

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \text{puis} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

■

Proposition 6.4 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction continue, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors*

1. Pour tout $p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $c_p(f) = \frac{1}{ip} c_p(f')$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(f) = -\frac{1}{n} b_n(f')$ et $b_n(f) = \frac{1}{n} a_n(f')$.

Preuve:

1. f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, il existe alors une subdivision $X = \{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ de $[0, 2\pi]$ telle que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ (ici, on prolonge f' à $[0, 2\pi]$ en donnant à $f'(x_k)$ une des valeurs $f'(x_k + 0)$ ou $f'(x_k - 0)$). On a alors,

$$c_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ipt} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) e^{-ipt} dt$$

et une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}
c_p(f) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\Big[\frac{-1}{ip} f(t) e^{-ipt} \Big]_{x_k}^{x_{k+1}} + \frac{1}{ip} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(t) e^{-ipt} dt \Big) \\
&= \frac{1}{2\pi} \Big(\Big[\frac{-1}{ip} f(t) e^{-ipt} \Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{ip} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-ipt} dt \Big) \\
&= \frac{1}{ip} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-ipt} dt = \frac{1}{ip} c_p(f').
\end{aligned}$$

2. En utilisant 1., on peut écrire

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= c_n(f) + c{-}n(f) = \frac{1}{in} c_n(f') = \frac{1}{in} c_n(f') - \frac{1}{in} c_{-n}(f') = \frac{-1}{n} b_n(f') \\
b_n(f) &= i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \frac{1}{n} \Big(c_n(f') + c_{-n}(f') \Big) = \frac{1}{n} a_n(f').
\end{aligned}$$

■

Théorème 6.3 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f.*

Preuve:

Pour tout $c \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$,

$$|C_p(f) e^{ipx}| = |c_p(f)| = \frac{1}{p} |c_n(f')| \leq \frac{1}{p^2} + |c_p(f')|^2.$$

Comme la série $\sum |c_p(f')|^2$ converge (inégalité de Bessel) et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge alors la série $\sum c_p(f) e^{ipx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et sa somme est $f(x)$ (théorème de Dirichlet).

■

Exemple 6.4 *La série $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \sum \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$ converge normalement vers $|x|$ sur $[-\pi, \pi]$.*

■

Proposition 6.5 *Soit $\sum c_p e^{ipx}$ $(p \in \mathbb{Z})$ une série trigonométrique qui converge uniformément. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p e^{ipx}$. Alors la série $\sum c_p e^{ipx}$ est la série de Fourier de la fonction S.*

Preuve:

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p e^{i(p-k)t}\Big)dt \\ &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(p-k)t}dt = c_k. \end{aligned}$$

■

Exemple 6.5 *La série de de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{2-e^{it}}$ est la série $\sum c_n e^{int}$ où $c_n = \frac{1}{2^{n+1}}$ si $n \in \mathbb{N}$ et 0 si $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$.*

Preuve:

On a

$$f(t) = \frac{1}{2-e^{it}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{it}/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{e^{it}}{2}\Big)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{it}}{2^{n+1}}.$$

De plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\frac{e^{it}}{2^{n+1}}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ et comme la série $\sum \frac{1}{2^{n+1}}$ converge, alors la série $\sum \frac{e^{it}}{2^{n+1}}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et d'après la proposition précédente $\sum \frac{e^{it}}{2^{n+1}}$ (avec $n \in \mathbb{N}$) est la série de Fourier de f.

6.4 formule de Parseval

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction 2π-périodique et Riemann intégrable sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Théorème 6.4 *"formule de Parseval"*

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(|a_n|^2 + |b_n|^2\Big) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

■

La démonstration de ce théorème nécessite les trois lemmes suivants :

Lemme 6.1 *"cas où f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux"*

Si f est continue est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux alors

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Preuve:

On sait que dans ce cas, la série $\sum c_p(f)e^{ipx}$ converge normalement vers f. Ainsi, la suite $\{S_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, et par conséquent

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)-S_n(t)|^2dt \leq \|f-S_n(f)\|^2_{[0,2\pi]} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

On en déduit (voir preuve de l'inégalité de Bessel) que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt - \sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2 \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0 \quad \text{d'où} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt.$$

■

Lemme 6.2 *" théorème d'approximation"*

Il existe une suite $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions 2π-périodique, continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, telle que

$$\int_0^{2\pi}|f(t)-g_n(t)|^2dt \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

Preuve:

Quitte à travailler avec la partie réelle et la partie imaginaire de f, on peut supposer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose $M = \|f\|_{[0,2\pi]}$, et soit $X_n = \{0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4n}{\pi}, \ldots, (n-1)\frac{2\pi}{n}, 2\pi\}$ la subdivision régulière d'ordre n de $[0,2\pi]$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définie sur $[0,2\pi]$ la fonction φ_n par

$$\begin{cases} \varphi_n(x) = m_k = \inf\limits_{t\in[(k-1)\frac{2\pi}{n},k\frac{2\pi}{n}[}\Big(|f(t)|\Big) \quad \text{si} \quad (k-1)\frac{2\pi}{n} \leq x < k\frac{2\pi}{n} \quad (1\leq k\leq n) \\ \varphi_n(2\pi) = f(2\pi). \end{cases}$$

On a alors, pour tout $x \in [0,2\pi]$, $\varphi_n(x) \leq f(x)$ et

$$\int_0^{2\pi}\varphi_n(t)dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\frac{2\pi}{n}}^{k\frac{2\pi}{n}} m_k dt = \frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k = s_0^{2\pi}(f,X_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

On peut alors écrire

$$\int_0^{2\pi}|f(t)-\varphi_n(t)|^2dt \leq \int_0^{2\pi}\Big(f(t)-\varphi_n(t)\Big)|\varphi_n(t)|dt \leq 2M\int_0^{2\pi}\Big(f(t)-\varphi_n(t)\Big)dt \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0.$$

On considère maintenant une fonction g_n définie sur $[0,2\pi]$ par

$$\begin{cases} g_n(x) = \varphi_n(x) \ \text{ si } \ x \in \cup_{1\leq k\leq n}[(k-1)\frac{2\pi}{n}, k\frac{2\pi}{n} - \frac{1}{2^n}] \\ g_n \text{ est affine sur chaque intervalle } [k\frac{2\pi}{n} - \frac{1}{2^n}, k\frac{2\pi}{n}] \quad (1\leq k\leq n). \end{cases}$$

Les fonctions g_n ainsi construites sont continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. De plus,

$$\int_0^{2\pi} \Big(g_n(t) - \varphi_n(t)\Big)^2 dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{k\frac{2\pi}{n} - \frac{1}{2^n}}^{k\frac{2\pi}{n}} \Big(g_n(t) - \varphi_n(t)\Big)^2 dt \leq 4M^2 \frac{n}{2^n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

Enfin,

$$\int_0^{2\pi} \Big(f(t) - g_n(t)\Big)^2 dt \leq 2\Big[\int_0^{2\pi} \Big(f(t) - \varphi_n(t)\Big)^2 dt + \int_0^{2\pi} \Big(\varphi_n(t) - g_n(t)\Big)^2 dt\Big] \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

■

Lemme 6.3 *"Inégalités de Minkowski"*

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction 2π-périodique et Riemann intégrable sur $[0, 2\pi]$ et $h = f - g$. Alors

1. $\sqrt{\int_0^{2\pi} |f(t)^2 dt} \leq \sqrt{\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt} + \sqrt{\int_0^{2\pi} |h(t)|^2 dt}.$

2. $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |c_n(g)|^2 \leq \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |c_n(h)|^2.$

Preuve:

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\Big[\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt\Big]\lambda^2 - \Big[\int_0^{2\pi} \Big(g(t)\overline{h(t)} + \overline{g(t)}h(t)\Big)dt\Big]\lambda + \int_0^{2\pi} |h(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} |g(t)\lambda - h(t)|^2 dt \geq 0.$$

Le descréminant de ce polynôme vérifie donc

$$\Delta = \Big(\int_0^{2\pi} \Big(g(t)\overline{h(t)} + \overline{g(t)}h(t)\Big)dt\Big)^2 - 4\Big(\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt\Big)\Big(\int_0^{2\pi} |h(t)|^2 dt\Big) \leq 0$$

puis $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} |g(t) + h(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt + \int_0^{2\pi} |h(t)|^2 dt + \int_0^{2\pi} \Big(g(t)\overline{h(t)} + \overline{g(t)}h(t)\Big)dt \\
&\leq \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt + \int_0^{2\pi} |h(t)|^2 dt + 2\sqrt{\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt}\sqrt{\int_0^{2\pi} |h(t)|^2 dt} \\
&\leq \Big(\sqrt{\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt} + \sqrt{\int_0^{2\pi} |h(t)|^2 dt}\Big)^2,
\end{aligned}$$

et donc

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt} \leq \sqrt{\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt} + \sqrt{\int_0^{2\pi} |h(t)|^2 dt}$$

2. De même, en utilisant le trinôme $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)\lambda - c_k(h)|^2 =$

$$\Big[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2\Big]\lambda^2 - \Big[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big(c_k(f)\overline{c_k(h)} + \overline{c_k(f)}c_k(h)\Big)\Big]\lambda + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(h)|^2 \geq 0,$$

on montre que $\Delta \leq 0$, puis

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(g)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f) + (-c_k(h))|^2 \leq \cdots \leq \Big[\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2} + \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(h)|^2}\Big]^2$$

■

<u>*Preuve:* "du théorème de Parseval"</u>

Soit $\varepsilon > 0$, par le lemme 6.2, il existe $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux telle que si on note $h = f - g$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt < \frac{\varepsilon^2}{4},$$

et par le lemme 6.1,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_p(g)|^2.$$

En utilisant le résultat du lemme 6.3, il vient donc

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt} &\leq \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt} + \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(t)|^2 dt} \\
&\leq \sqrt{\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_p(g)|^2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_p(f)|^2 + \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_p(h)|^2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_p(f)|^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(\text{car } \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_p(h)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(t)|^2 dt < \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \\
&\leq \sqrt{\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_p(f)|^2} + \varepsilon
\end{aligned}$$

et ceci pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |c_p(f)|^2$, et on concult par l'inégalité de Bessel. Enfin,

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |c_p(f)|^2 = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2\Big) = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(|a_n|^2 + |b_n|^2\Big).$$

■

Exemple 6.6 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$

Preuve:

On sait (voir exemple 6.2) que la série de Fourier de la fonction f 2π-périodique et définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = |x|$ est $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{[\cos(2n+1)x]}{(2n+1)^2}$. Le théorème de Parseval nous permet alors d'écrire,

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}$$

ce qui est équivalent à

$$\Big(\frac{\pi^2}{4}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2dt=\frac{1}{2\pi}\Big[\frac{t^3}{3}\Big]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi^3}{3}=\frac{\pi^2}{3}$$

puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^2}{8}\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\Big)\pi^2=\frac{\pi^4}{96}.$$

■