8 Prédicats, quantificateurs

Nous nous contenterons d'une définition intuitive (ou naïve) de la notion d'ensemble.

Un ensemble est une collection d'objets possédant des propriétés communes, ces objets sont les éléments de l'ensemble.

Un peu plus précisément, la théorie des ensembles est une théorie portant sur des objets (appelés ensembles) dans laquelle figurent les signes $=$ et $\in$ (ce qui se lit " appartient à") et qui vérifie certains axiomes.

8.1 Quantificateurs

La théorie des ensembles est une théorie "quantifiée" :

- Le quantificateur universel "quel que soit" ou "pour tout" noté $\forall$ utilisé pour signifier que tout élément x d'un ensemble E vérifie une propriété $P(x)$, la syntaxe étant :

$$(\forall x \in E)\ \ (P(x)).$$

- Le quantificateur existentiel “il existe” noté $\exists$ pour signifier qu’il existe au moins un élément x de E vérifiant la propriété $P(x)$, la syntaxe étant :

$$(\exists x \in E) \mid (P(x)).$$

- Pour signifier qu'il existe un et un seul x dans E vérifiant la propriété $P\left(x\right)$, on utilisera la notation :
$$\left(\exists ! x \in E\right) \mid \left(P\left(x\right)\right).$$

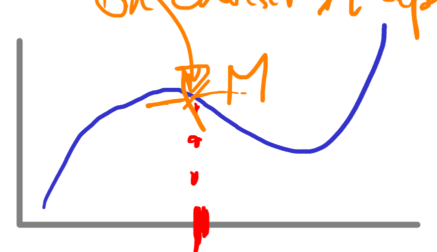
On résumé...

$\in$	appartient à	$x \in A$	x est dans A
$\forall$	pour tout, quelque-soit	$\forall x \in A$	pour tout x dans A
$\exists$	il existe, pour un certain	$\exists x \in A$	il existe x dans A

8.1.1 Ordre des quantificateurs

En utilisant les quantificateurs, il faudra faire attention à l'ordre d'apparition de ces derniers. Par exemple les assertions suivantes, où f est une fonction à valeurs réelles définie sur un ensemble E :

On choisit M après!



$$\forall x \in E, \exists M > 0 \mid f(x) < M$$

Toujours vraie

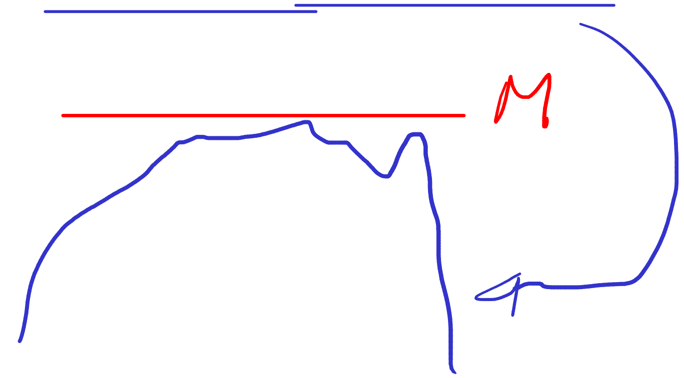
$M = f(x) + 1$.

et

On choisit d'abord x

$$\exists M > 0 \mid \forall x \in E, f(x) < M.$$

fonction majorée.



Proposition 8.1

$$(\exists a \quad \forall b \mid P(a,b)) \qquad \Rightarrow \qquad (\forall b \quad \exists a \mid P(a,b))\,.$$

Nous avons vu que la réciproque est fausse.

8.1.2 Négation

Il est intéressant de pouvoir formuler la négation d'une proposition. Soient $P(x)$ et $Q(x)$ des prédicats.

- La négation de l'assertion $(\forall x \in E) \mid (P(x))$ est :

  $$(\exists x \in E) \mid \left(\overline{P(x)}\right)$$

  en utilisant le symbole $\mid$ qui se lit “tel que” utilisé pour traduire le fait que x est tel que la propriété $\overline{P(x)}$ est vérifiée.

- La négation de $(\exists x \in E) \mid (P(x))$ est :

$$(\forall x \in E) \ \left(\overline{P(x)}\right).$$

Ainsi, pour nier un prédicat, par exemple l'existence d'un majorant M

le prédicat $\exists M > 0 \mid \forall x \in E, f(x) < M,$

on nie.

a pour négation : $\forall M > 0 \mid \exists x \in E \quad f(x) \geq M.$

On échange quantificateur par quantificateur et on nie, enfin, la proposition.

Par exemple pour traduire le fait qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels est convergente vers un réel ℓ nous écrirons :

Le prédicat :

$$(\exists \ell \in \mathbb{R}) \mid (\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon)$$

a pour négation :

$$\forall \ell \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant n_0 \qquad |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon$$

Pour résumer,

Quantificateurs	Négation	Stratégie
$\forall x, p(x)$	$\exists x, \bar{p}(x)$	Trouver un contre-exemple
$\exists x, p(x)$	$\forall x, \bar{p}(x)$	Tout x contredit $p(x)$

Connecteurs	Négation	Stratégie
$p(x)$ et $q(x)$	$\bar{p}(x)$ ou $\bar{q}(x)$	Contredire l'un des prédicats
$p(x)$ ou $q(x)$	$\bar{p}(x)$ et $\bar{q}(x)$	Contredire les deux prédicats
$p(x) \Rightarrow q(x)$	$p(x)$ et $\bar{q}(x)$	Trouver un élement vérifiant $p(x)$ et contredisant $q(x)$

8.1.3 Ensembles et logique : Diagrammes de Venn

Lorsqu'on évalue un prédicat, on peut toujours se ramener à la théorie des ensembles, en considérant l'ensemble des éléments qui satisfont le prédicat.

Dans l'exemple précédent, le prédicat $x + 6 = 10$ est vrai sur l'ensemble solution de l'équation $x + 6 = 10$, *i.e.* $x \in \{4\}$.

Proposition 8.2 *Supposons qu'un prédicat $P(x)$ est vrai pour tout $x \in A$, et faux sinon. En posant 0 et 1 les valeurs logiques, P a les mêmes valeurs, en fonction de x, que la fonction indicatrice*

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

$$\mathbb{1}_{\{4\}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 4 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Il y a donc une correspondance entre un prédicat et un ensemble.

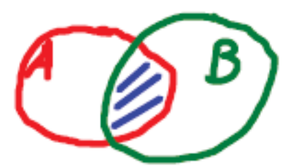
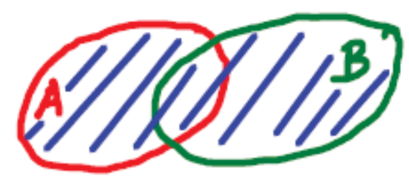
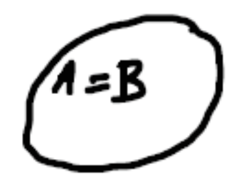
$\mathbb{1}_{\{4\}}(4) = 1$ et

$\mathbb{1}_{\{4\}}(3) = 0$.

Si on associe Vrai à 1 et Faux à 0,

$\mathbb{1}_A(x)$ a les mêmes valeurs logique que

$P(x)$ si A est l'ensemble : $A = \{x : P(x) \text{ est vraie}\}$.

Connecteur		Négation	Conjonction	Disjonction (non exclusif)	Implication	Équivalence
Notations	P (resp. Q)	Non P $\neg P$ $\bar{P}$	P et Q $P \wedge Q$	P ou Q $P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \iff Q$
Diagramme	$x \in A, x \in B$ A (resp. B) est l'ensemble des x vérifiant P (resp. Q)	$\bar{A}$ 	$A \cap B$ 	$A \cup B$ 	$A \subset B$ 	$A = B$ 

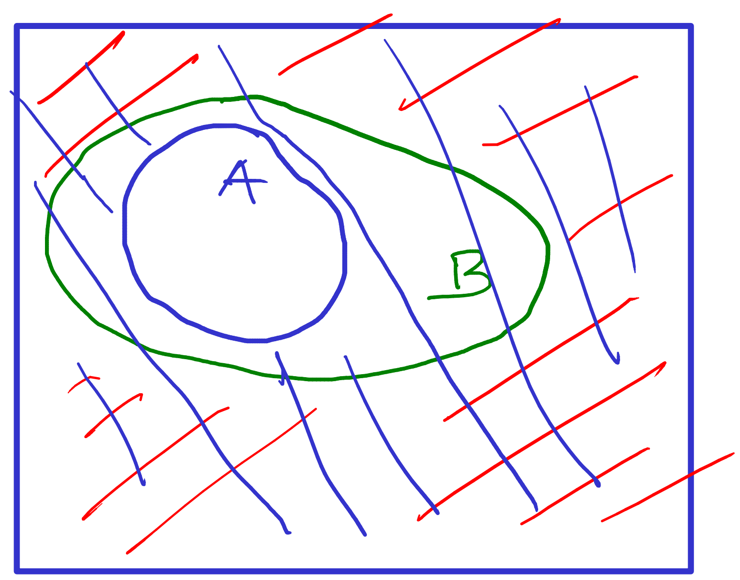
Vrai sur A

Vrai sur B

Proposition 8.3 *L'implication $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$.*

$P \Rightarrow Q$

$\Longleftrightarrow A \subset B$



vrai sur $\overline{B}$

et $\overline{B} \subset \overline{A}$

Simplifions les écritures !

$$\forall x \in E \quad \exists M > 0 \qquad f(x) \leq M$$

Prenons $M = f(x) + 1$, on peut réécrire

$$\forall x \in E \qquad f(x) \leq f(x) + 1$$: on a économisé une variable et un quantifieur.

8.1.4 Skolémisation

Nous avons vu qu'il était d'usage de commencer un prédicat par les quantifications. On appelle cette formulation une forme prénexe. L'enjeu de la Skolémisation est de réduire le nombre de variables dans un prédicat, en particulier les variables quantifées par $\exists$. Par exemple, lorsque nous avons écrit la tautologie

$$\forall x \in E, \exists M > 0 \mid \; f(x) < M,$$

la quantité M dépend directement de $f(x)$ et on pourrait écrire, par exemple $M = f(x) + 1 = g(x)$. Ainsi, on peut écrire ce prdédicat

$$\forall x \in E, f(x) < g(x).$$

Ainsi, pour Skolémiser une expression F, on procède par les étapes suivantes.

- On transforme F en une forme prénexe.

$\exists$

- On remplace toute variable quantifiée existentiellement par un symbole de fonction dont les arguments sont les variables quantifiées universellement qui précèdent notre variable.

- On supprime les quantificateurs existentiels qui sont devenus inutiles.

Par exemple, prenons le prédicat

$$(\forall x\ p(x)) \wedge (\exists y\ q(y)) \rightarrow \exists y\ (p(y) \wedge q(y)).$$

Écrivons la forme prénexe   Retirer l'implication.

$$\neg\left[(\forall x\ p(x)) \wedge (\exists y\ q(y))\right] \vee (\exists y\ p(y) \wedge q(y))$$

$$(\exists x\ \overline{p(x)}) \vee (\forall y\ \overline{q(y)}) \vee (\exists y\ p(y) \wedge q(y))$$

$$\exists x\ \forall y\ \exists z \qquad \overline{p}(x) \vee \overline{q}(y) \vee (p(z) \wedge q(z))$$

$\exists x$ revient à donner une constante a.

$$\forall y\ \exists z\ \ \bar{p}(a) \vee \bar{q}(y) \vee (p(z) \wedge q(z))$$

On prend z comme fonction f de y.

$$\forall y\ \ \bar{p}(a) \vee \bar{q}(y) \vee (p(f(y)) \wedge q(f(y)))$$

La forme ne dépend plus que d'une seule variable

La skolémisation sera une étape fondamentale pour l'utilisation des classes de Horn et du principe de résolution en Prolog.