Recherche Opérationnelle Alternance 1A
Programmation Linéaire
CM : Étape 1 de l'algorithme du simplexe

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Etape 1 de l'algorithme du simplexe

Définition

On cherche une base réalisable du PL, où on suppose que $b \geq 0$:

$$(P) \qquad \begin{aligned} A \cdot x &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

On considère le PL auxiliaire suivant :

$$(P') \qquad \begin{aligned} A \cdot x + I \cdot y &= b \\ x, \quad y &\geq 0 \\ (\mathbf{1}^T \cdot A) \cdot x &= z'(\max) + \mathbf{1}^T \cdot b \end{aligned}$$

Théorème

Il existe une solution réalisable de (P) si et seulement si $z'(\max) = 0$.

Etape 1 de l'algorithme du simplexe

$$(\text{P}) \quad \begin{array}{rl} A \cdot x & = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (\text{P'}) \quad \begin{array}{rrl} A \cdot x + I \cdot y & = b & \\ x, \quad y & \geq 0 & \\ (\mathbf{1}^T \cdot A) \cdot x & = z'(\max) + \mathbf{1}^T \cdot b & \end{array}$$

Théorème

Il existe une solution réalisable de (P) si et seulement si $z'(\max) = 0$.

Démonstration

1. $z'(\max) = (\mathbf{1}^T \cdot A) \cdot x - \mathbf{1}^T \cdot b = \mathbf{1}^T \cdot (A \cdot x - b) = \mathbf{1}^T \cdot (-I \cdot y)$ $= -\mathbf{1}^T \cdot y$.
2. $z'(\max) = 0$ $\Longleftrightarrow$
   - il existe $\overline{x}, \overline{y}$ tels que $A \cdot \overline{x} + I \cdot \overline{y} = b$, $\overline{x}, \overline{y} \geq 0$, et $-\mathbf{1}^T \cdot \overline{y} = 0$ (mais $-\mathbf{1}^T \cdot \overline{y} = 0$ si et seulement si $\overline{y} = 0$ puisque $\overline{y} \geq 0$) $\Longleftrightarrow$
   - il existe $\overline{x}$ tel que $A \cdot \overline{x} = b, \overline{x} \geq 0$, $\Longleftrightarrow$
   - il existe une solution réalisable $\overline{x}$ de (P).

Etape 1 de l'algorithme du simplexe

Remarque

$$
(\text{P'}) \quad
\begin{array}{rcl}
A \cdot x + I \cdot y & = & b \\
x, \quad y & \geq & 0 \\
(\mathbf{1}^T \cdot A) \cdot x & = & z'(\max) + \mathbf{1}^T \cdot b
\end{array}
$$

1. Les variables de y forment une base réalisable du (P'), puisque on a la matrice identité et $b \geq 0$,
2. (P') est sous forme standard par rapport à y.
3. On peut le résoudre avec l'Etape 2.

Exemple

Énoncé

Appliquer l'algorithme du simplexe pour résoudre ce programme linéaire :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 &\geq 2 \\ 1x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ 1x_2 &\leq 4 \\ x_1 \qquad x_2 &\geq 0 \\ 3x_1 - 1x_2 &= z(\max) \end{aligned}$$

Exemple

Solution

1. On ajoute les nouvelles variables $x_3, \ x_4, \ x_5$ qui sont non-négatives et on obtient le programme linéaire suivant P_2 :

$$
\begin{array}{rcl}
2x_1 + 1x_2 \geq 2 & \quad & -2x_1 - 1x_2 + 1x_3 \hphantom{+ 1x_4 + 1x_5} = -2 \\
1x_1 + 3x_2 \leq 3 & & 1x_1 + 3x_2 \hphantom{+ 1x_3} + 1x_4 \hphantom{+ 1x_5} = 3 \\
1x_2 \leq 4 & & 1x_2 \hphantom{+ 1x_3 + 1x_4} + 1x_5 = 4 \\
x_1 \quad x_2 \geq 0 & & x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \geq 0 \\
3x_1 - 1x_2 = z(\max) & & 3x_1 - 1x_2 \hphantom{+ 1x_3 + 1x_4 + 1x_5} = z(\max)
\end{array}
$$

2. Soit $J := \{3, \ 4, \ 5\}$.
3. Alors ce programme linéaire est sous forme standard par rapport à la base J car A_J est la matrice identité et $c_J = 0$.
4. Mais cette base n'est pas réalisable, puisque $\overline{x}_3 = -2$ est négative.
5. On a donc besoin de l'Etape 1.

Exemple

Solution

1. A cause de la première ligne il faut ajouter une nouvelle variable y_1 qui est non-négative et on veut minimizer $y_1 \iff$ maximiser -y_1.

$$\begin{array}{rrrrrrl}
2x_1 & +1x_2 & -1x_3 & & & +1y_1 & =2 \\
1x_1 & +3x_2 & & +1x_4 & & & =3 \\
 & 1x_2 & & & +1x_5 & & =4 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & \geq 0 \\
 & & & & & y_1 & = w'(\min) \\
 & & & & & -1y_1 & = z'(\max)
\end{array}$$

2. Maintenant la base $J' = \{6,\ 4,\ 5\}$ est réalisable mais $c'_{J'} \neq 0$.

3. En ajoutant la première ligne, on obtient (P^*) :

$$\begin{array}{rrrrrrl}
2x_1 & +1x_2 & -1x_3 & & & +1y_1 & =2 \\
1x_1 & +3x_2 & & +1x_4 & & & =3 \\
 & 1x_2 & & & +1x_5 & & =4 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & \geq 0 \\
2x_1 & +1x_2 & -1x_3 & & & & = z'(\max)+2
\end{array}$$

Exemple

Solution

1. Maintenant on peut utiliser l'Etape 2 pour résoudre (P^*).

$$\begin{array}{|cccccc|c|} \boxed{2} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|cccccc|c|} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

2. Dans le dernier tableau la fonction objectif est non-positive, la base $J'' := \{1,\ 4,\ 5\}$ est donc optimale et la valeur de la fonction objectif pour la solution de base associée est 0.
3. J'' est donc une base réalisable de (P_2).

Exemple

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\
0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}$$

Solution

1. En utilisant le dernier tableau et la fonction objectif originale on a un PL (P_2') qui est équivalent à (P_2) et pour qui on a $A''_{J''} = I$.
2. Il faut encore changer la fonction objectif car $c_{J''} \neq 0$ $(c_1 \neq 0)$.
3. Il faut soustraire 3 fois la première ligne de la fonction objectif.

$$\begin{array}{rrrrrl}
-2x_1 & -1x_2 & +1x_3 & & & = -2 \\
1x_1 & +3x_2 & & +1x_4 & & = 3 \\
 & 1x_2 & & & +1x_5 & = 4 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq 0 \\
3x_1 & -1x_2 & & & & = z(\max)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrl}
1x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & & & = 1 \\
 & +\frac{5}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & +1x_4 & & = 2 \\
 & 1x_2 & & & +1x_5 & = 4 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq 0 \\
3x_1 & -1x_2 & & & & = z(\max)
\end{array}$$

Exemple

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\
0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}$$

Solution

1. En utilisant le dernier tableau et la fonction objectif originale on a un PL (P_2') qui est équivalent à (P_2) et pour qui on a $A''_{J''} = I$.
2. Il faut encore changer la fonction objectif car $c_{J''} \neq 0$ $(c_1 \neq 0)$.
3. Il faut soustraire 3 fois la première ligne de la fonction objectif.

$$\begin{array}{rrrrrl}
-2x_1 & -1x_2 & +1x_3 & & & = -2 \\
1x_1 & +3x_2 & & +1x_4 & & = 3 \\
 & 1x_2 & & & +1x_5 & = 4 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq 0 \\
3x_1 & -1x_2 & & & & = z(\max)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrl}
1x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & & & = 1 \\
 & +\frac{5}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & +1x_4 & & = 2 \\
 & 1x_2 & & & +1x_5 & = 4 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \geq 0 \\
 & -\frac{5}{2}x_2 & +\frac{3}{2}x_3 & & & = z(\max) - 3
\end{array}$$

Exemple

Solution

1. On a finalement le PL sous forme standard par rapport à J''.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 & & = 1 \\ + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 & & = 2 \\ 1x_2 & + x_5 & = 4 \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 & x_5 & \geq 0 \\ - \frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 & & = z(\max) - 3 \end{array}$$

2. Maintenant on peut utiliser l'Etape 2.

1	$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$	0	0	1
0	$\frac{5}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1	0	2
0	1	0	0	1	4
0	-$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	-3

1	3	0	1	0	3
0	5	1	2	0	4
0	1	0	0	1	4
0	-10	0	-3	0	-9

3. Dans le dernier tableau la fonction objectif est non-positive une solution optimale est donc $(\overline{x}_1,\ \overline{x}_2) = (3,\ 0)$ de valeur 9.