Recherche Opérationnelle Alternance 1A
Programmation Linéaire
Dualité

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Algorithme du simplexe révisé

Étant donnés un PL sous forme standard, une base réalisable J, et sa forme standard par rapport à J :

$$\begin{aligned} A \cdot x &= b \\ x &\geq 0 \\ c^T \cdot x &= z(\max) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \hat{A} \cdot x &= \hat{b} \\ x &\geq 0 \\ \hat{c}^T \cdot x &= z(\max) - \hat{z}_0 \end{aligned}$$

1. $\hat{b} = (A^J)^{-1} \cdot b$,
2. $\pi^T = c_J^T \cdot (A^J)^{-1}$,
3. $\hat{c}^T = c^T - c_J^T \cdot \hat{A} = c^T - c_J^T \cdot (A^J)^{-1} \cdot A = c^T - \pi^T \cdot A$,
4. $\hat{A}^s = (A^J)^{-1} \cdot A^s$,
5. $\hat{z}_0 = c^T \cdot \overline{x} = c_J^T \cdot \overline{x}_J = c_J^T \cdot \hat{b} = c_J^T \cdot (A^J)^{-1} \cdot b = \pi^T \cdot b$.

Dualité

Introduction du dual

Primal
$$\begin{aligned} A \cdot x &\leq b \\ x &\geq 0 \\ c^T \cdot x &= z(\max) \end{aligned}$$

On cherche une borne supérieure pour $z(\max)$.

Dual

Exemple

$$\begin{aligned}
1x_1 + 2x_2 &\le 3\\
3x_1 - 1x_2 &\le 5\\
x_1, \quad x_2 &\ge 0\\
6x_1 + 4x_2 &= z(\max)
\end{aligned}$$

On essaie de borner $6x_1 + 4x_2$ par une combinaison linéaire des inégalités.

Première tentative

$$6x_1 + 4x_2 \le 6x_1 + 5x_2 = 3(1x_1 + 2x_2) + 1(3x_1 - 1x_2) \le 3 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 14$$

On sait maintenant que $z(\max) \le 14$.

Dual

Deuxième tentative plus intelligente

$$6x_1 + 4x_2 \le (y_1 + 3y_2)x_1 + (2y_1 - y_2)x_2 = y_1(1x_1 + 2x_2) + y_2(3x_1 - 1x_2)$$
$$\le y_1 \cdot 3 + y_2 \cdot 5$$

Pour que ce soit vrai il faut que y satisfasse :

$6 \le y_1 + 3y_2,\ 4 \le 2y_1 - y_2,\ y_1, y_2 \ge 0.$

On sait maintenant que $z(\max) \le 3y_1 + 5y_2$.

Pour avoir la meilleure borne supérieure on minimisera $3y_1 + 5y_2$.

Définition

Primal
$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 &\le 3 \\ 3x_1 - 1x_2 &\le 5 \\ x_1, \quad x_2 &\ge 0 \\ 6x_1 + 4x_2 &= z(\max) \end{aligned}$$

Dual
$$\begin{aligned} 1y_1 + 3y_2 &\ge 6 \\ 2y_1 - 1y_2 &\ge 4 \\ y_1, \quad y_2 &\ge 0 \\ 3y_1 + 5y_2 &= w(\min) \end{aligned}$$

Dual

En général (forme canonique)

Primal
$$\begin{aligned} A \cdot x &\leq b \\ x &\geq 0 \\ c^T \cdot x &= z(\max) \end{aligned}$$

Dual
$$\begin{aligned} y^T \cdot A &\geq c^T \\ y &\geq 0 \\ y^T \cdot b &= w(\min) \end{aligned}$$

On essaie de borner $c^T \cdot x$ par une combinaison linéaire des inégalités :

Borne supérieure

$c^T \cdot x \leq (y^T \cdot A) \cdot x = y^T \cdot (A \cdot x) \leq y^T \cdot b.$

Pour que ce soit vrai il faut que y satisfasse :

$c^T \leq y^T \cdot A$ et $y \geq 0.$

On sait maintenant que $z(\max) \leq y^T \cdot b.$

Pour avoir la meilleure borne supérieure on minimisera $y^T \cdot b.$

Dualité

En général (forme canonique)

Primal
$$\begin{aligned} A \cdot x &\leq b \\ x &\geq 0 \\ c^T \cdot x &= z(\max) \end{aligned}$$

Dual
$$\begin{aligned} y^T \cdot A &\geq c^T \\ y &\geq 0 \\ y^T \cdot b &= w(\min) \end{aligned}$$

Théorème faible de la dualité

Pour toutes solutions réalisables $\overline{x}$ du primal et $\overline{y}$ du dual, on a :

$$c^T \cdot \overline{x} \leq \overline{y}^T \cdot b.$$

Dual

Théorème

Le dual du dual est le primal.

Démonstration (forme canonique)

$$
\begin{array}{cccccc}
 & A \cdot x \leq b & & & y^T \cdot A \geq c^T \\
\text{(P)} & x \geq 0 & \rightarrow & \text{(D)} & y \geq 0 \\
 & c^T \cdot x = z(\max) & & & y^T \cdot b = w(\min) \\
 & \uparrow & & & \downarrow \\
 & u^T \cdot (-A^T) \geq (-b^T) & & & (-A^T) \cdot y \leq (-c) \\
\text{(D')} & u \geq 0 & \leftarrow & \text{(P')} & y \geq 0 \\
 & u^T \cdot (-c) = w'(\min) & & & (-b^T) \cdot y = z'(\max)
\end{array}
$$

Dual

En général

Primal

$$\begin{array}{lllll}
A_{11}\cdot x_1 & +A_{12}\cdot x_2 & +A_{13}\cdot x_3 & \leq & b_1\\
A_{21}\cdot x_1 & +A_{22}\cdot x_2 & +A_{23}\cdot x_3 & = & b_2\\
A_{31}\cdot x_1 & +A_{32}\cdot x_2 & +A_{33}\cdot x_3 & \geq & b_3\\
0\leq x_1, & \mathbb{R}\ni x_2 & 0\geq x_3 & & \\
c_1^T\cdot x_1 & +c_2^T\cdot x_2 & +c_3^T\cdot x_3 & = & z(\max)
\end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{lllll}
y_1^T\cdot A_{11} & +y_2^T\cdot A_{21} & +y_3^T\cdot A_{31} & \geq & c_1^T\\
y_1^T\cdot A_{12} & +y_2^T\cdot A_{22} & +y_3^T\cdot A_{32} & = & c_2^T\\
y_1^T\cdot A_{13} & +y_2^T\cdot A_{23} & +y_3^T\cdot A_{33} & \leq & c_3^T\\
y_1\geq 0, & y_2\in\mathbb{R} & y_3\leq 0 & & \\
y_1^T\cdot b_1 & +y_2^T\cdot b_2 & +y_3^T\cdot b_3 & = & w(\min)
\end{array}$$

Dualité

Théorème fort de la dualité

$$\text{Primal} \quad \begin{aligned} A \cdot x &= b \\ x &\geq 0 \\ c^T \cdot x &= z(\max) \end{aligned} \qquad\qquad \text{Dual} \quad \begin{aligned} y^T \cdot A &\geq c^T \\ \\ y^T \cdot b &= w(\min) \end{aligned}$$

S'il existe une solution réalisable du primal et du dual, alors on a :

$$z(\max) = w(\min).$$

Théorème fort de la dualité

Démonstration (pour la forme standard)

1. Par le Théorème faible de la dualité, pour toutes solutions réalisables $\overline{x}'$ du primal et $\overline{y}'$ du dual, on a : $c^T \cdot \overline{x}' \leq \overline{y}'^T \cdot b$, donc
   - $z(\max) \leq w(\min)$, et en particulier $z(\max)$ est fini.
2. simplexe révisé s'arrête avec $\hat{c}^T \leq 0$, avec une solution optimale $\overline{x}$ du primal, $0 \geq \hat{c}^T = c^T - \pi^T \cdot A$, donc
   - π est une solution réalisable du dual ($\pi^T \cdot A \geq c^T$).
3. $z(\max) \leq w(\min) \leq \pi^T \cdot b = c^T \cdot \overline{x} = z(\max)$,
   - par 1, π est une solution réalisable du dual, $c^T \cdot \overline{x} = \pi^T \cdot b$, $\overline{x}$ est une solution optimale du primal.
4. $z(\max) = w(\min)$.

Remarque

Les solutions réalisables $\overline{x}$ du primal et $\overline{y}$ du dual sont optimales si et seulement si $c^T \cdot \overline{x} = \overline{y}^T \cdot b$. ($c^T \cdot \overline{x} \leq z(\max) = w(\min) \leq \overline{y}^T \cdot b$.)

Théorème des écarts complémentaires

Théorème (pour la forme canonique)

Les solutions réalisables $\overline{x}$ du primal et $\overline{y}$ du dual sont optimales si et seulement si

1. si $\overline{y}_i > 0$ alors $a_i \cdot \overline{x} = b_i \iff$
   si $a_i \cdot \overline{x} < b_i$ alors $\overline{y}_i = 0 \iff$
   $\overline{y}_i(a_i \cdot \overline{x} - b_i) = 0.$
2. si $\overline{x}_j > 0$ alors $\overline{y}^T \cdot a^j = c_j \iff$
   si $\overline{y}^T \cdot a^j > c_j$ alors $\overline{x}_j = 0 \iff$
   $\overline{x}_j(\overline{y}^T \cdot a^j - c_j) = 0.$

Théorème des écarts complémentaires

Démonstration

$$c^T \cdot \overline{x} = \sum c_j \overline{x}_j \leq \sum (\overline{y}^T \cdot a^j)\overline{x}_j = (\overline{y}^T \cdot A) \cdot \overline{x} = \overline{y}^T \cdot (A \cdot \overline{x}) = \sum \overline{y}_i (a_i \cdot \overline{x}) \leq \sum \overline{y}_i b_i = \overline{y}^T \cdot b.$$

- $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont optimales $\Longleftrightarrow$
- $c^T \cdot \overline{x} = \overline{y}^T \cdot b \Longleftrightarrow$
- on a égalité partout $\Longleftrightarrow$
- $c_j \overline{x}_j = (\overline{y}^T \cdot a^j)\overline{x}_j$ pour tout j et $\overline{y}_i(a_i \cdot \overline{x}) = \overline{y}_i b_i$ pour tout i
- $(\overline{y}^T \cdot a^j - c_j)\overline{x}_j = 0$ pour tout j et $\overline{y}_i(a_i \cdot \overline{x} - b_i) = 0$ pour tout i.

Une solution optimale du dual

Remarque

1. Peut-on trouver une solution optimale du dual après l'exécution du simplexe sur le primal ?
2. On a vu dans la démonstration du théorème fort de la dualité que si J est une base optimale du primal alors $\pi^T = c_J^T \cdot (A^J)^{-1}$ est une solution optimale du dual.
3. Peut-on trouver π dans le dernier tableau ?
4. On sait que $\hat{c}^T = c^T - \pi^T \cdot A$, donc $\hat{c}_{J_1}^T = c_{J_1}^T - \pi^T \cdot A^{J_1} = 0 - \pi^T \cdot I = -\pi^T$.

$A^{\overline{J}_1}$	I	b
$c_{\overline{J}_1}$	0	

	$-\pi^T$	