Part III

Théorie des graphes

11 Introduction

Voici un exemple introductif pour imager les concepts.

Un site internet est composé de cinq pages notées A, B, C, D et E. En un clic, on peut passer d'une page à certaines autres selon les possibilités suivantes.

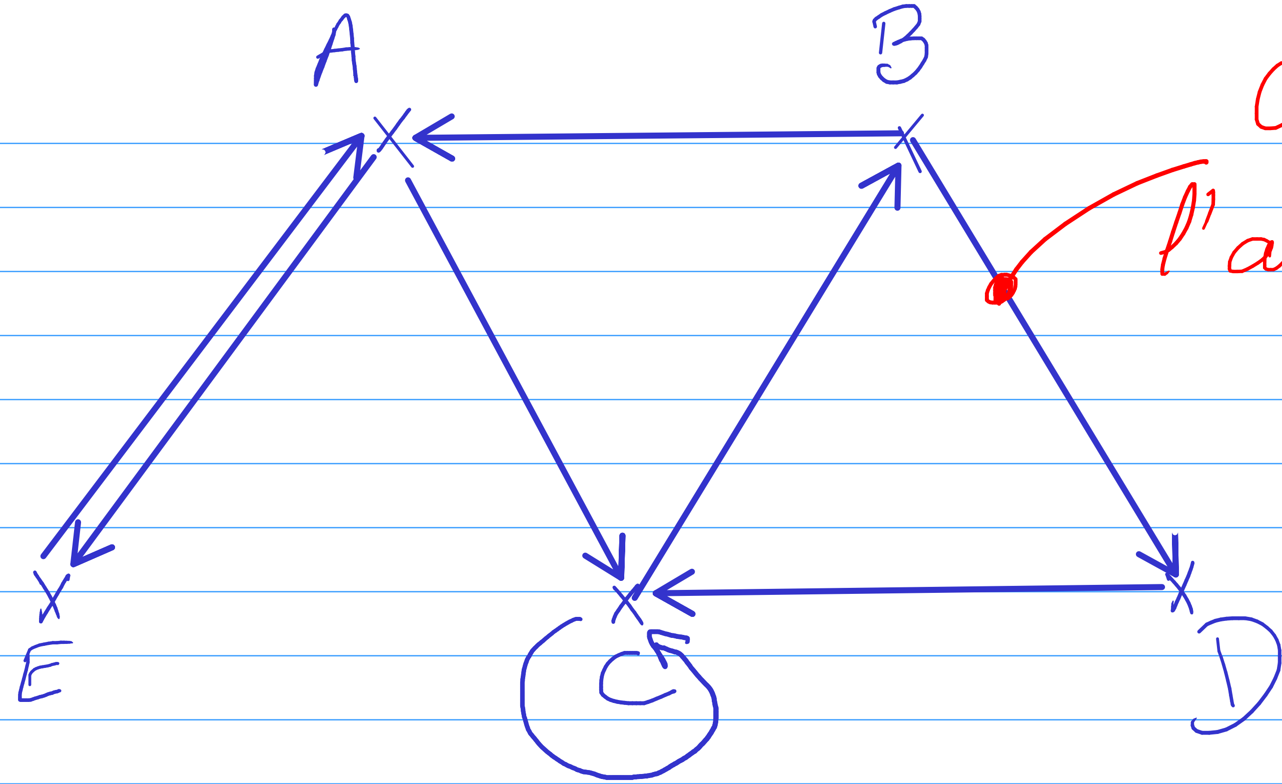
(i) De la page A, on peut passer en un clic aux pages C et E.

(ii) De la page B, on peut passer aux pages A et D.

(iii) Depuis la page C, on peut accéder à la page B ou rester sur C.

(iv) Quand on est sur la page D, on peut seulement aller sur la page C et de la page E, on ne peut aller que sur la page A.

On peut modéliser cette situation avec un graphique sagittal, constitué de l'ensemble S={A;B;C;D;E} des sommets, et de flèches orientées appelées arcs.



Cette flèche est l'arc (B,D)

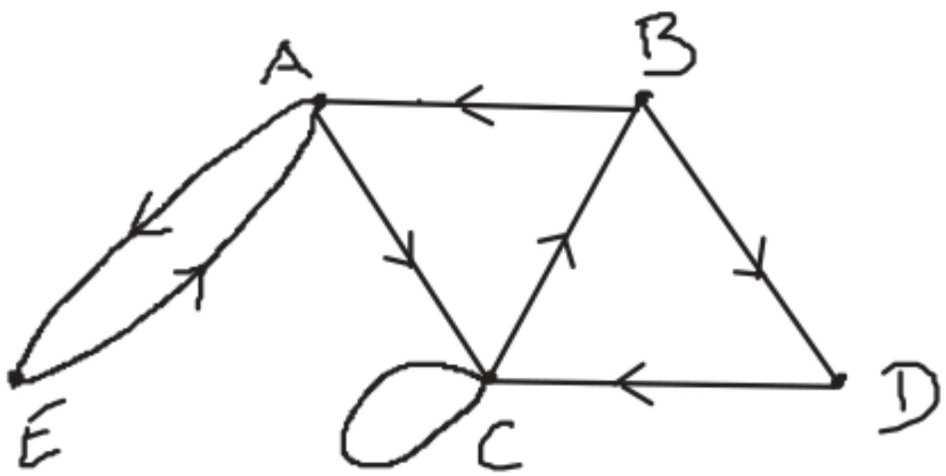
départ

arrivée.

un arc est un élément de S^2.

Graphe sagittal.

Ensemble des arcs : $\{(AE),(EA),(AC),(CC),(CB),(BA),(DC),(BD)\}$



Page (sommet)	Successeurs
A	C, E
B	A, D
C	B, C
D	C
E	A

Page (sommet)	Prédécesseurs
A	B, E
B	C
C	A, C, D
D	B
E	A

On peut aussi faire un tableau à double entrée en codant 1 s'il existe une possibilité en un seul clic, d' aller d'une page de départ (origine) à une page d'arrivée (extrémité), et en codant 0 s'il n'y a pas possibilité de passage.

A a pour successeur C et E

		Extrémité				
		A	B	C	D	E
Origine	A	0	0	1	0	1
	B	1	0	0	1	0
	C	0	1	1	0	0
	D	0	0	1	0	0
	E	1	0	0	0	0

A a pour prédécesseur B et E.

De façon évidente, ce tableau peut être associé à la matrice carrée d'ordre 5 suivante, appelée matrice d'adjacence.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

A a pour successeur C et E.

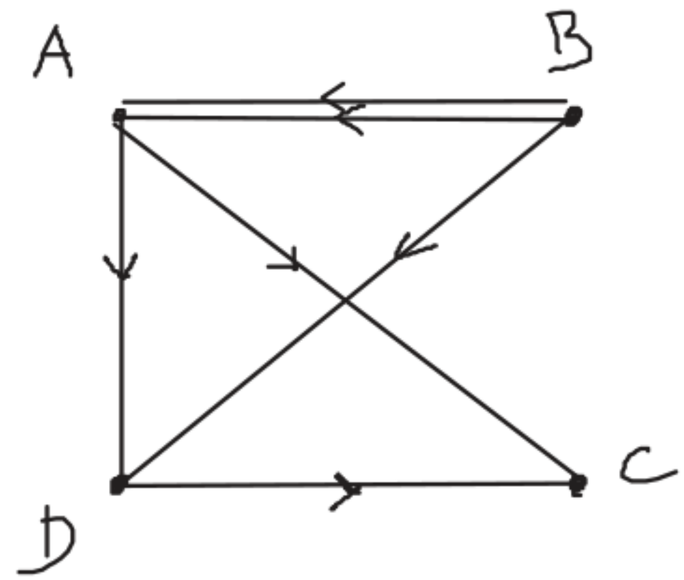
A a pour prédécesseur B et E

À comprendre

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} & & C & & \end{array} \\
A & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}
\end{array}
$$

il y a 1 chemin de A vers C.

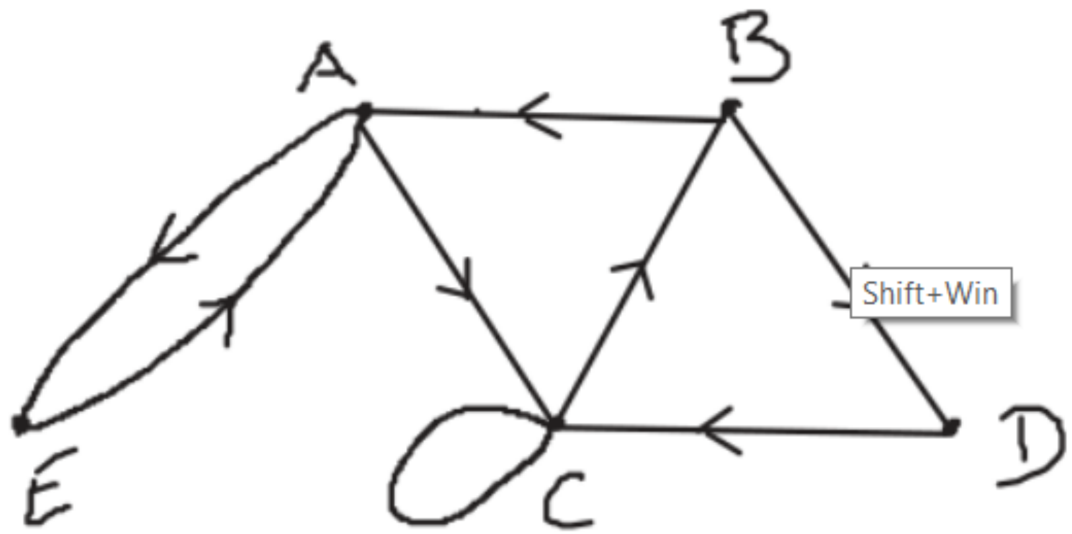
Note . Supposons que l'on ajoute un autre arc de B à A, comme une deuxième voie à une route. On aurait le graphe suivant



de matrice d'adjacence

Il y 2 chemins de B vers A.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$



Reprenons l'exemple étudié en début de chapitre :

- Les successeurs de A sont C et E donc $\Gamma^{+}(A) = \{C;E\}$.
- De même, $\Gamma^{+}(B) = \{A;D\}$.
- Les prédécesseurs de A sont B et E donc $\Gamma^{-}(A) = \{B;E\}$.
- De même, $\Gamma^{-}(B) = C$.

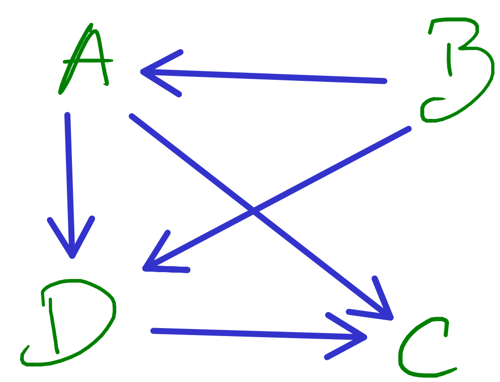
Definition 12.1 (Matrice d'adjacence d'un graphe) *Soit G un graphe orienté ayant n sommets*
$a_l, a_2, \cdots, a_n$. La matrice d'adjacence du graphe est la matrice carrée $M = (m_{i,j})$ d'ordre n telle que $m_{i,j} = 1$ si et seulement si $(a_i; a_j)$ est un arc de G, et $m_i = 0$ sinon.

Autre exemple

Si on considère la matrice d'adjacence

$$M = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \end{array}$$

on a le graphe suivant



12.2 Chemin et longueur dans un graphe orienté

Definition 12.2 *un chemin est une suite ordonnée de sommets dans laquelle chaque sommet, à part le premier, est un successeur du sommet qui le précède.*

Un chemin hamiltonien est un chemin qui passe une seule fois par tous les sommets du graphe.

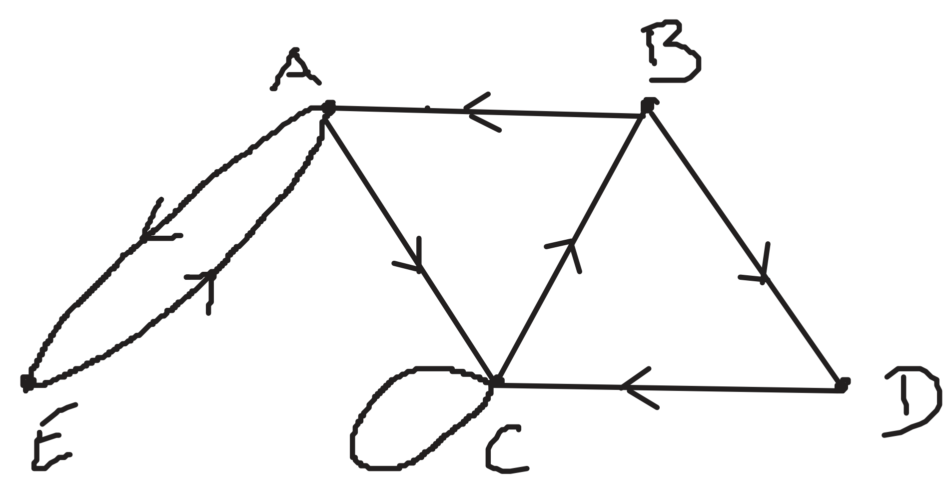
(E A C B D) (D C B A E) ...

Un circuit est un chemin dans lequel le premier et le dernier sommet sont identiques. (B A C B)

La longueur d'un chemin est égale au nombre d'arcs qui constituent ce chemin. La longueur d'un chemin ayant n sommets est $n-1$.

(BACB) est un chemin de longueur 3.

Rappelons le graphe de l'exemple initial.



12.3 Nombre de chemins de longueur donnée

Proposition 12.3 *Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe orienté à n sommets $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Soit p un entier et $M^p = (m_{ij})$ la puissance p de la matrice M. Alors $m_{i,j}$ est le nombre de chemins de longueur p allant du sommet a_i au sommet a_j.*

Il existe un chemin de longueur 1 de A à E mais pas de longueur 2

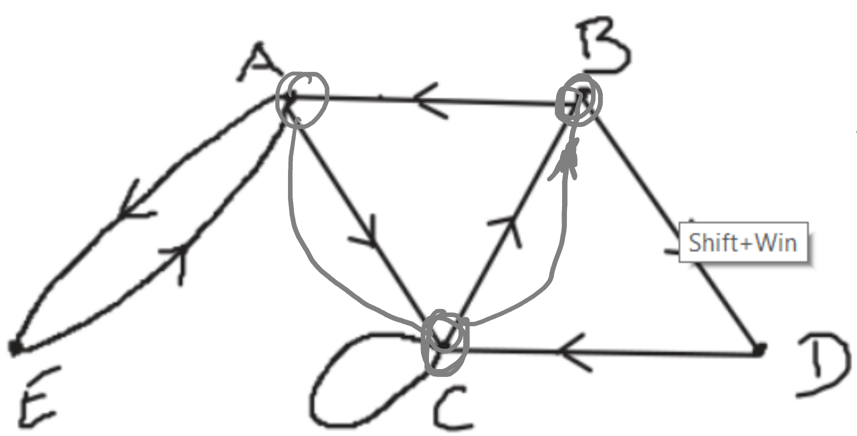
exactement 1 chemin de longueur 2 de A vers B

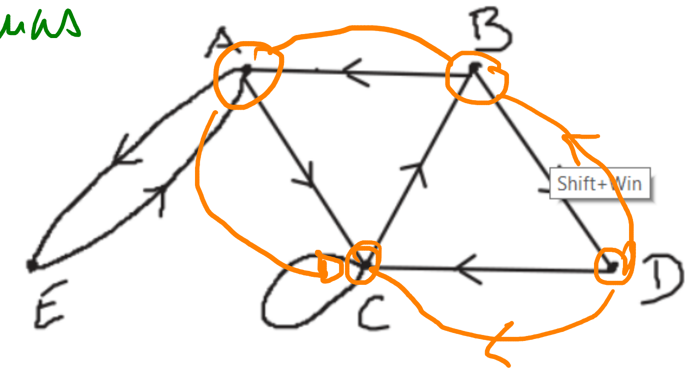
Dans notre exemple de site internet,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M^2 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

exactement 2 chemins de longueur 2 de B vers C

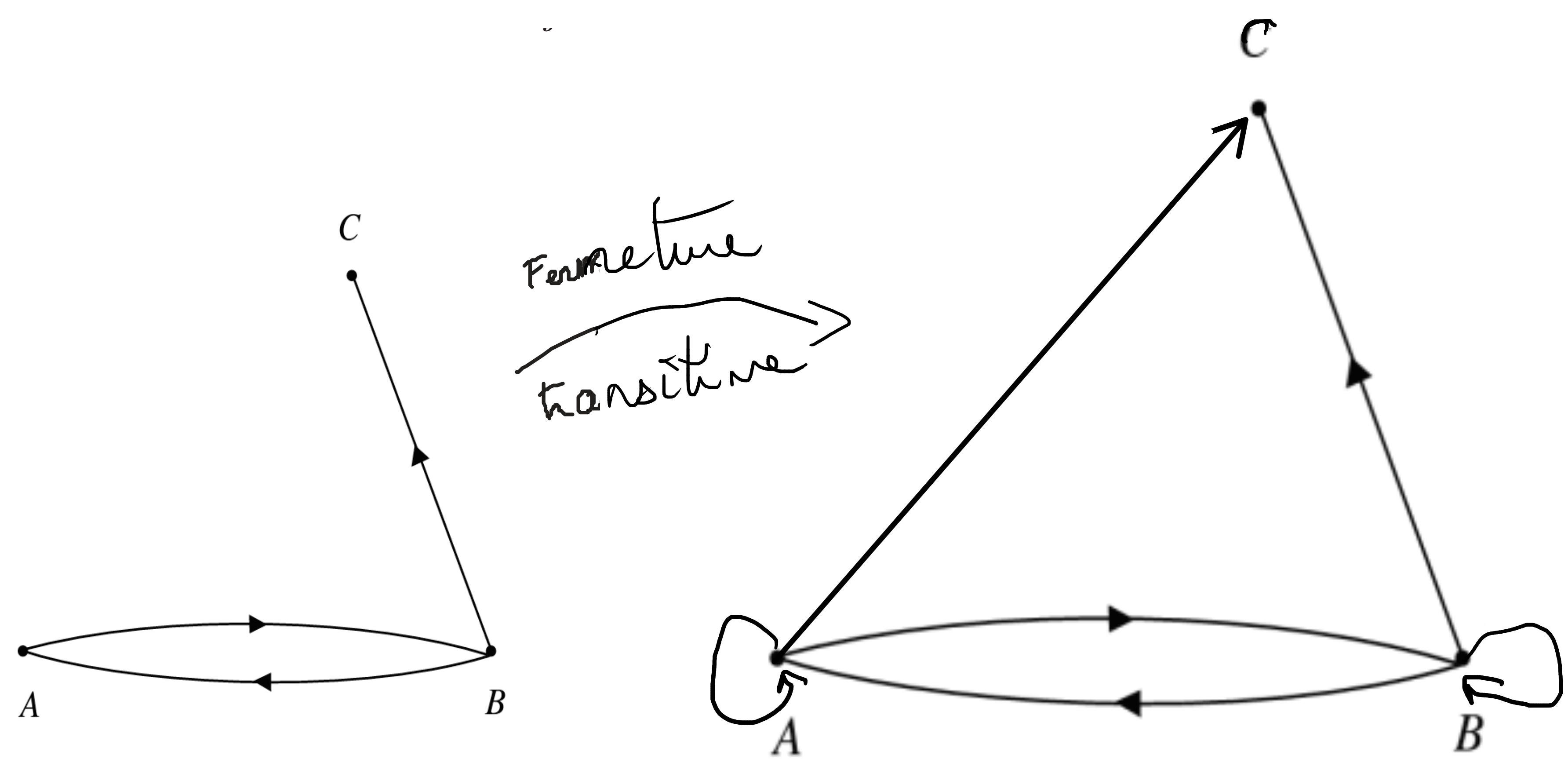
M^2 donne le nombre de chemins de longueur 2





12.4 Fermeture transitive

Faire la fermeture transitive d'un graphe consiste à rajouter tous les arcs (a_i, a_j) dès qu'il existe un chemin allant du sommet a_i au sommet a_j.



Bricolage . . .

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

chemins de longueur 1 — chemins de longueur 2 — chemins de longueur 3.

$$M^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^{[3]} = M^{[1]}$$

Matrices booléennes
0 si 0
1 si pas zéro.

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M^{[i]}$ donne l'existence de chemins de taille i.

Proposition 12.4 *Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe à n sommets et soit $\tilde{M}$ la matrice d' adjacence de la fermeture transitive du graphe. Alors $\tilde{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus \cdots \oplus M^{[n]}$ (ou $\oplus$ est l'addition boolénne, et $M^{[n]}$ est la puissance boolénne, on rappellera la définition dans ce qui suit).*

$$\tilde{M} = M^{[1]} \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

somme booléen

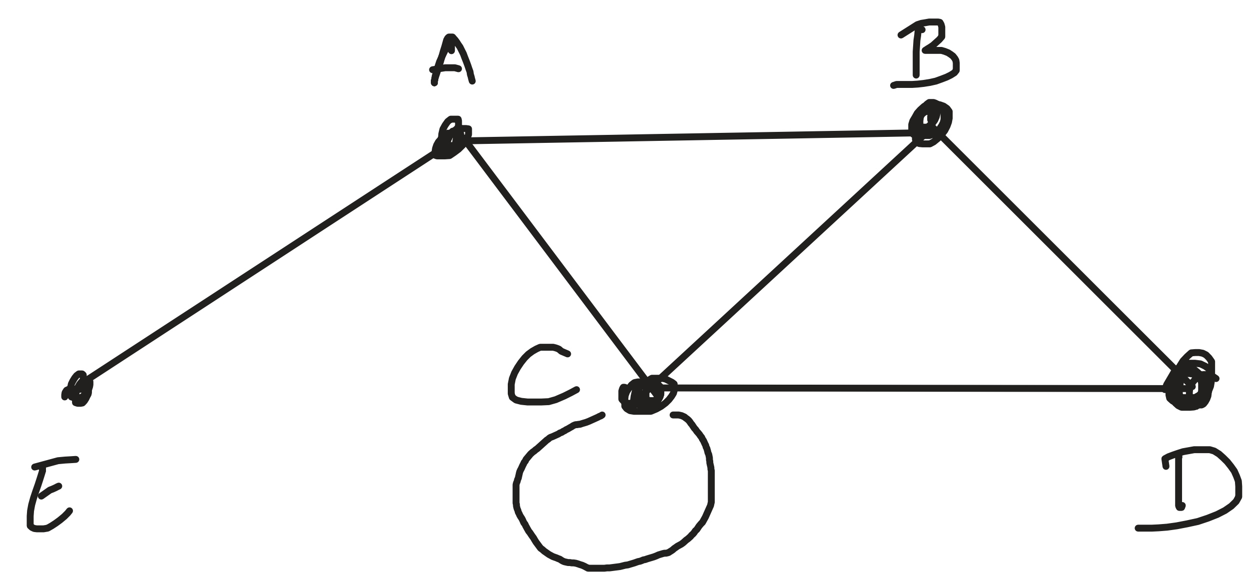
donne l'existance d'un chemin de taille 1, 2, ou 3.

$\Rightarrow$ Matrice d'adjacence de la fermeture transitive

13 Algorithme de Dijkstra

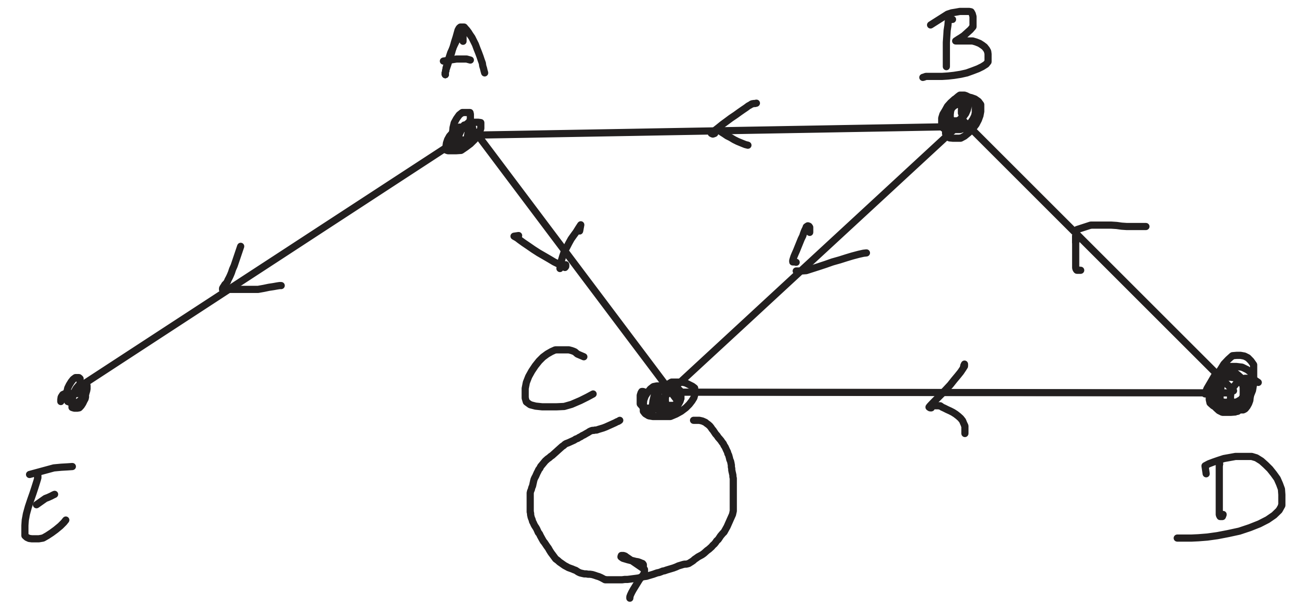
13.1 Graphe non orienté

On peut supposer que tous les arcs sont “à double sens”. À ce moment la, plus besoin de flèche pour indiquer un successeur.



A
B
C
D
E

Ainsi, si A est successeur de B, A est aussi prédecesseur de B. Pour donner la matrice d'adjacence de ce graphe non orienté, on va donner la matrice A du graphe orienté arbitrairement

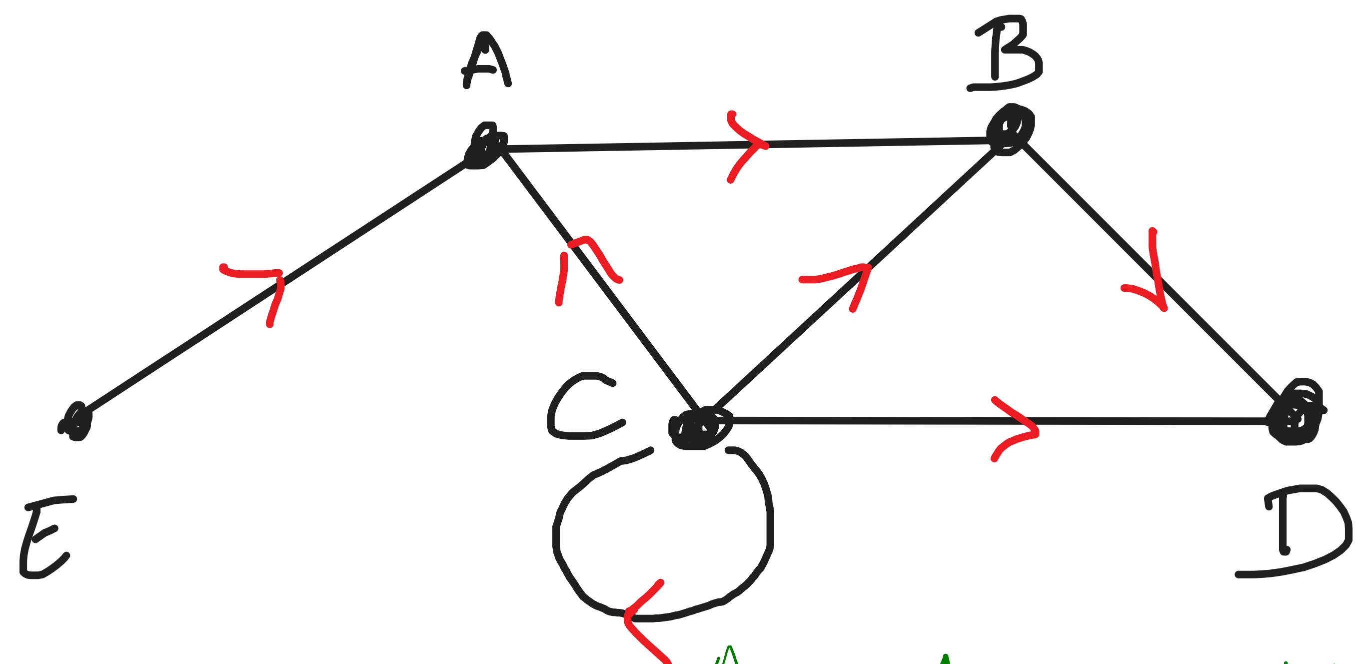


dont la matrice d'adjacence est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

de E, on ne va plus vers A.

On inverse toutes les orientations.



On oriente la boucle

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B = {}^tA$$

La matrice d'adjacence du graphe non orienté est la somme des deux matrices d'adjacence des deux graphes orientés.

$M = A + B$

La matrice d'adjacence du graphe non orienté sera la matrice symétrique

$$M = A + {}^tA.$$

Ici,

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On notera qu'on a été obligé d'orienter deux fois la boucle sur C, d'où le coefficient 2 sur la diagonale.

Definition 13.1 *Un graphe non orienté est dit connexe si quels que soient les sommets* U *et* V, *il existe une chaîne (chemin d'un graphe non orienté) reliant* U *à* V.

13.2 Arbre

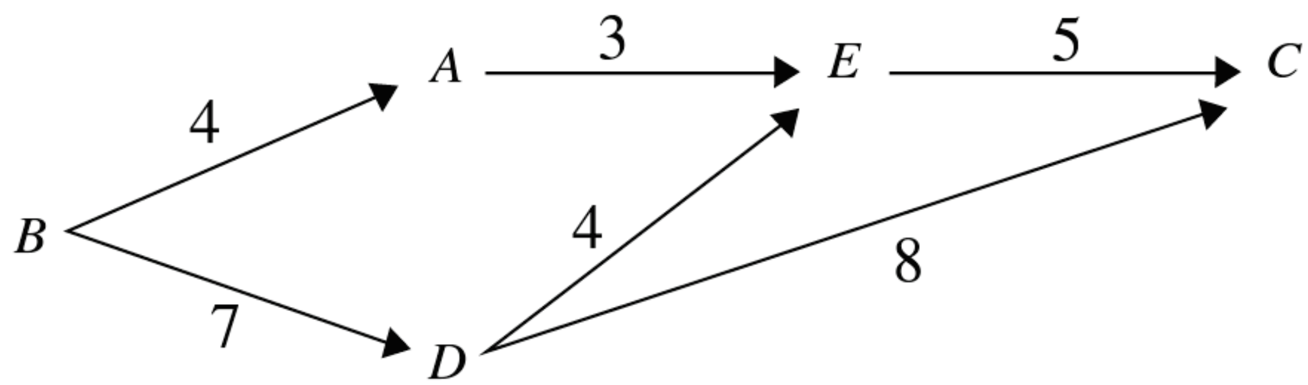
Un arbre est un graphe non orienté qui vérifie les propriétés suivantes.

- Connexité : il est toujours possible d'aller d'un sommet à l'autre par un chemin d'arêtes.
- Acyclique : il est impossible de partir d'un sommet et d'y revenir sans rebrousser chemin à un moment.

13.3 Graphe pondéré (ou valué)

Sur certains graphes orientés ou non, il peut être nécessaire d'attribuer une valeur à chacun des arcs : on obtient alors un graphe pondéré ou valué. La valeur d'un chemin est la somme des valeurs des arcs qui constituent le chemin. Il est alors possible de chercher le chemin de valeur minimale ou maximale reliant un sommet à un autre.

Exemple. Considérons le graphe suivant que l'on pondère arbitrairement pour cet exemple :



pour relier B à C, il y a trois chemins possibles.

- Le chemin (B,A,E,C) de valeur $4 + 3 + 5 = 12$.
- Le chemin (B,D,E,C) de valeur $7 + 4 + 5 = 16$.
- Le chemin (B,D,C) de valeur $7 + 8 = 15$.

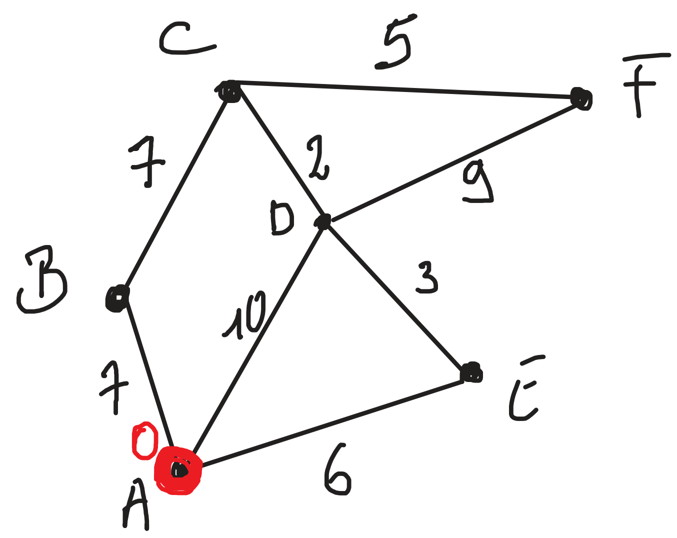
Le chemin minimal est (B,A,E,C), le chemin maximal est (B,D,E,C).

13.4 Recherche de chemin le plus court – Algorithme de Dijkstra

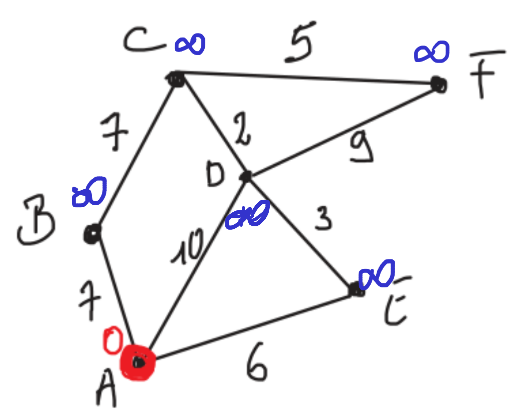
Sur un graphe pondéré, orienté ou non, on va s'intéresser aux chemins les plus depuis une source vers tous les sommets connexes. Cet algorithme permettra, par exemple, de connaître le chemin le plus court, en temps ou en distance..., d'une ville à une autre, d'une station de train à une autre...

13.4.1 l'Algorithme

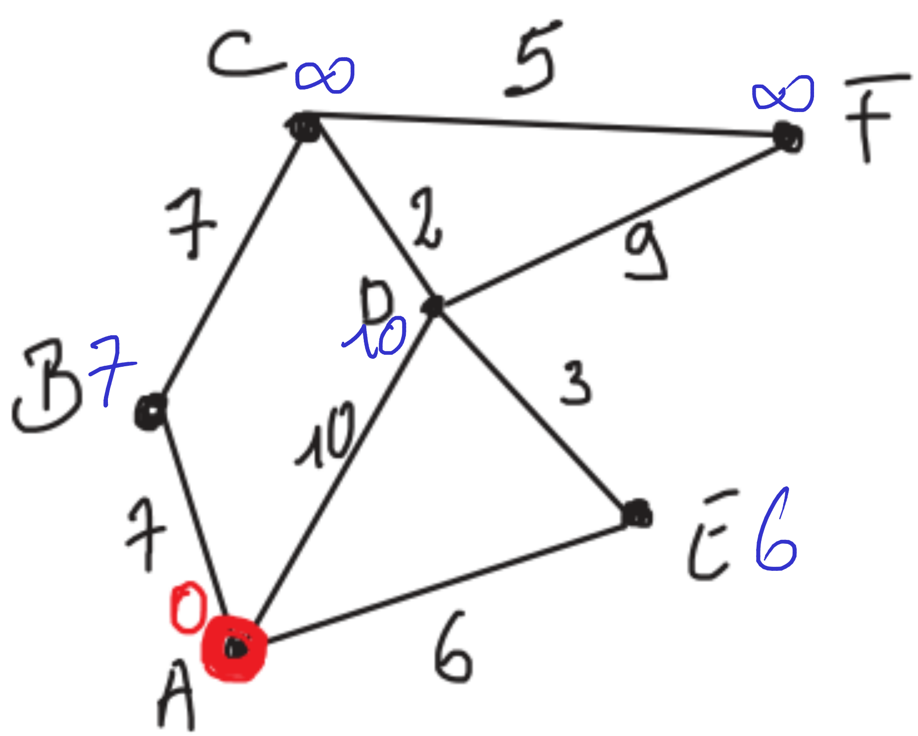
Sur un graphe pondéré, orienté ou non, on se donne un sommet d'entrée (sommet source), disons A. Sa distance à lui même est nulle.

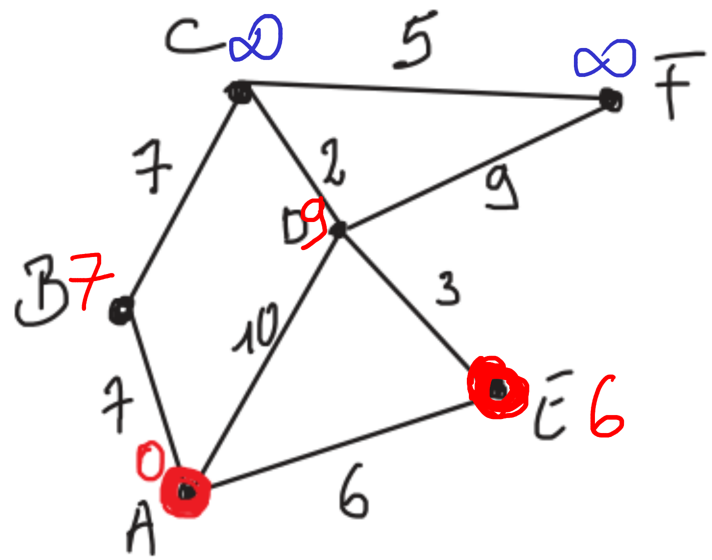


Le problème est de donner le chemin le plus court vers tous les sommets du graphe. On suppose au départ que tous les sommets sont à une distance infinie de la source.

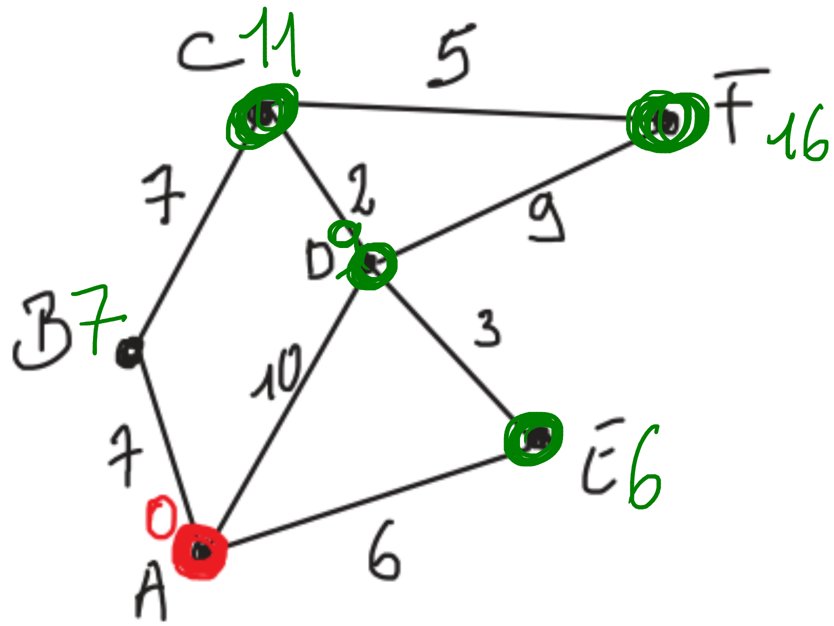


On donne la valeur provisoire de l'arc à chaque successeur direct de A.





On regarde si le passage par d'autres arcs amèneraient à une longueur inférieure. Si tel est le cas, on remplace la distance précédente par celle-ci et on rougit ce chemin. Par exemple, (A, E, D) est plus court que (A, D), D est donc à une longueur 9, on rougit E. À contrario, (A, E) est plus court que (A, D, E), et, de manière évidente, le chemin le plus court pour aller à B est (A, B). On a nos premières longueurs.

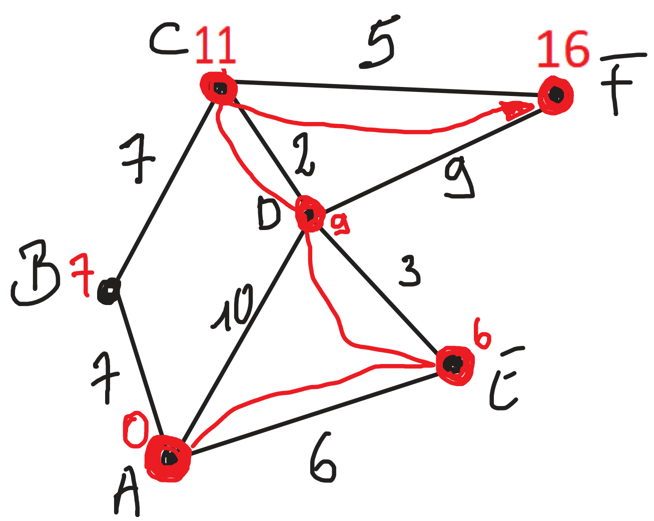


Considérons simultanément C et F, les suivants de B et D. C est moins loin de A en passant par D que par B. Sa longueur provisoire est 11, celle de F, à ce stade des 18.

En ce qui concerne C, on doit passer par D pour avoir le chemin le plus court. Il en est de même pour F. D est rougi, on a la distance minimale de C.

Enfin, on raccourcit la distance de F en passant par C. On rougit C.

Il reste à sauter de point rouge en point rouge pour trouver le chemin le plus court de A vers F : (A, E, D, C, F).



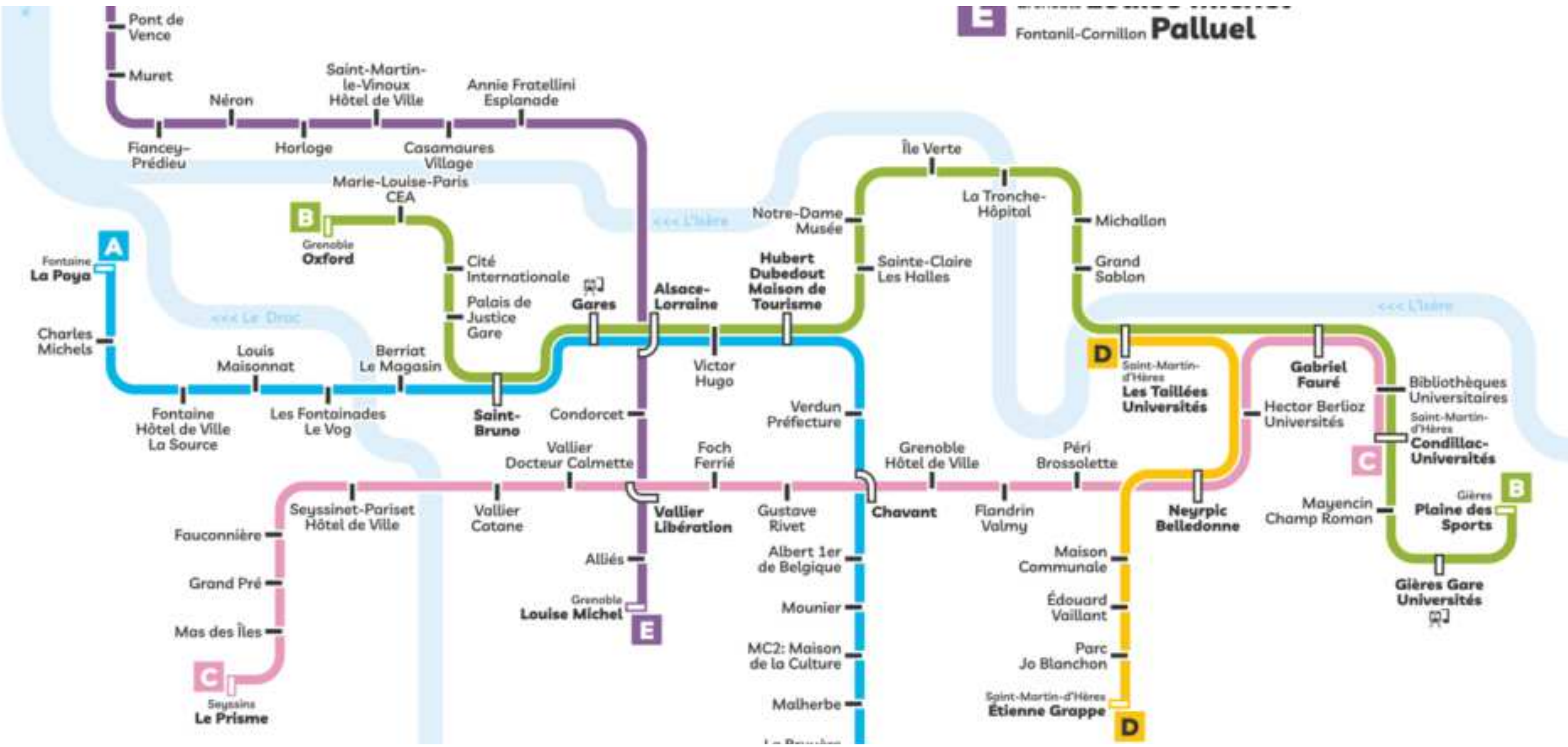
Notons que naturellement, le chemin le plus court de A à C est (A, E, D, C). Nous avons également la note suivante.

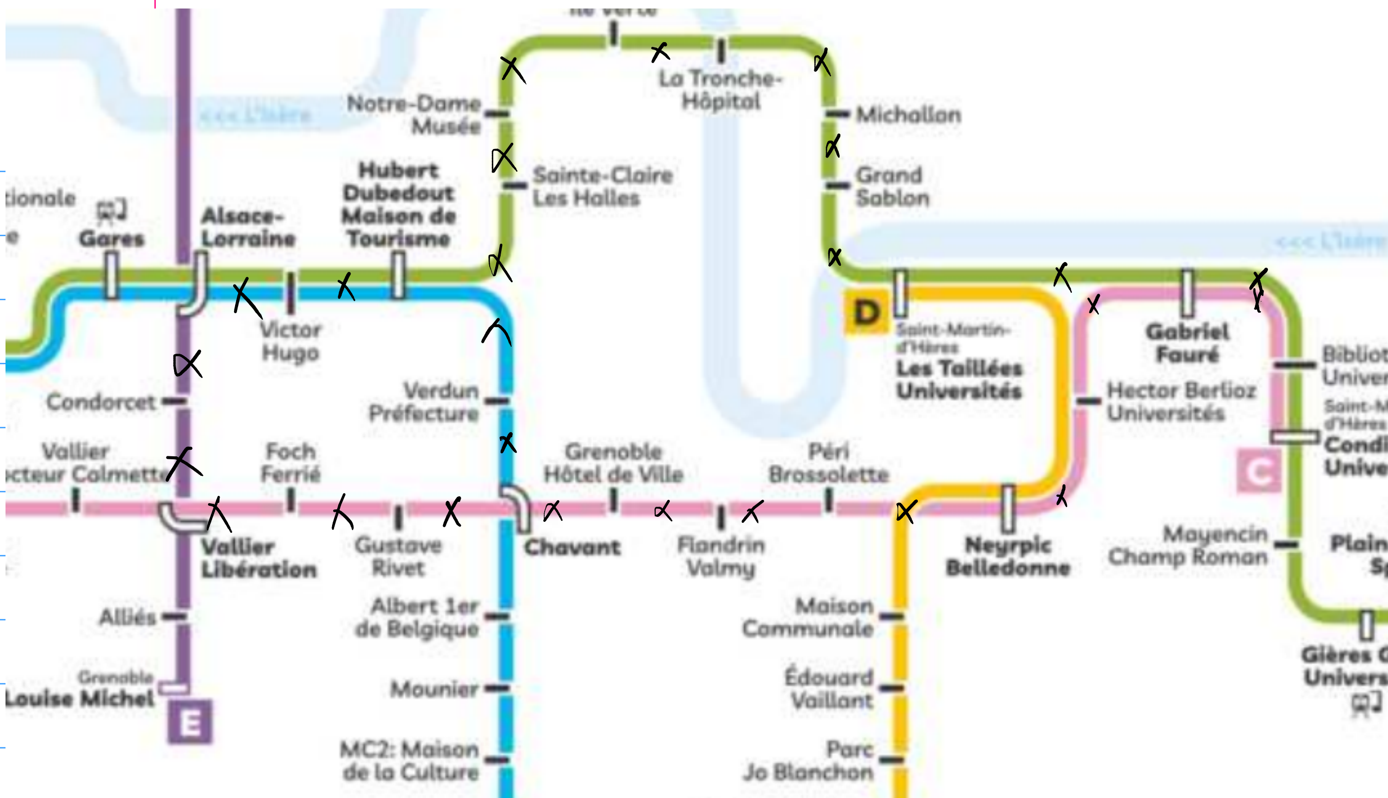
Note. Un axiome courant en mathématiques dit que si on a le chemin le plus court entre un point et un autre, alors, si on prend un point de ce chemin, la suite du chemin est encore le chemin le plus court de ce point vers l'extrémité.

Ici, cela signifie, par exemple, de D à F, le chemin le plus court sera (D, C, F).

13.4.2 Exemple : le tram de Grenoble

On voudrait connaître le chemin le plus court pour aller d'un point à un autre par le tram de Grenoble.



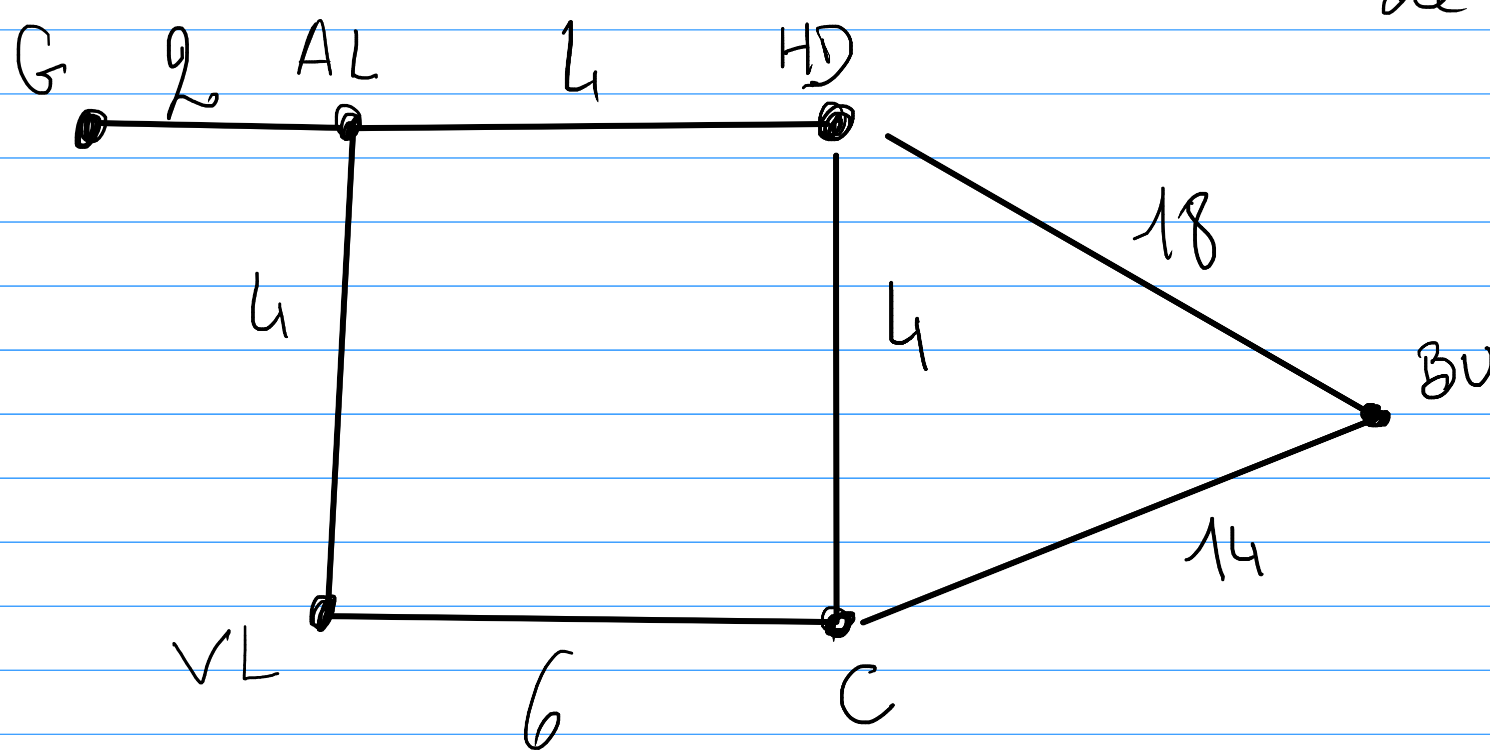


Départ : Bibliothèques universitaires

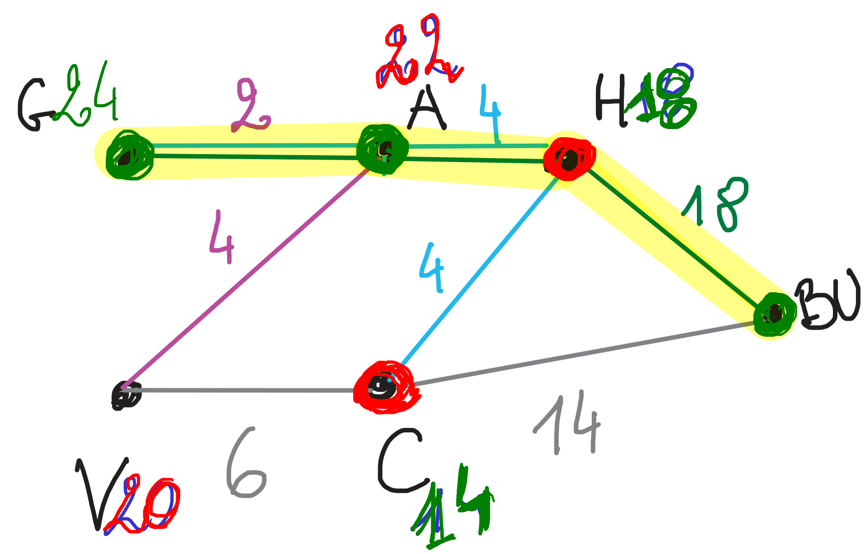
Arrivée : Gare

But : chemin le plus rapide.

- On suppose qu'il y a 2 minutes de parcours entre chaque station
- On ne pénalise pas le changement de tram.



Algorithme de Dijsktra



On prend le B.
On suppose qu'on aura 24 minutes de transport environ.

Il est à noter que nous sommes en accord avec le site TAG :