Part I

Arithmétique

1 Rappels sur la division euclidienne

Nous rappelons ici quelques définitions sur les entiers et la division euclidienne indispensables à la manipulation efficace de l'arithmétique.

1.1 Entiers naturels

Les entiers naturels sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, $\cdots$. Cet ensemble est noté $\mathbb{N}$. Les entiers relatifs sont quand à eux signés, $\cdots$,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,$\cdots$. Cet ensemble est noté $\mathbb{Z}$.

1.2 La division euclidienne

Effectuer la division euclidienne d'un entier naturel A par un entier naturel B non nul c'est déterminer les uniques entiers Q (appelé quotient) et R (appelé reste) tels que :

$$A = BQ + R,$$

et $0 \leq R < B$.

Exemple. Le quotient et le reste de la division euclidienne de $A = 53$ par $B = 6$ sont respectivement

$53 = 6 \times 8 + 5$ On a bien $5 < 6$

reste diviseur.

Rappelons-nous de comment on posait une division lorsqu'on était petit... On souhaite poser la division euclidienne de 178 par 3.

$$\begin{array}{r|l} 178 & 3 \\ \cline{2-2} -15 & 59 \\ 28 & \\ -27 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

$178 = 3 \times 59 + 1$ et $1 < 3$.

2 Numération

2.1 Définitions

Trois numérations nous sont indispensables dans ce que nous souhaitons faire.

- L'être humain compte naturellement en base 10 avec les dix chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 :

- Le microprocesseur d'un ordinateur ne travaille qu'avec deux chiffres : 0 (pas de courant) et 1 (courant). Les calculs s'y font donc naturellement en base 2 (on n'utilise que les chiffres 0

- Pour compter en base 16, on utilise les dix chiffres et on en rajoute six autres (que l'on note A, B, C, D, E et F). Cela donne :

Il faut autant de caractères que la base.

En 10 : 0 1 2 . . . 9

En 2 : 0 1

En 16 : 0 1 2 . . . 9 A B C D E F

2.2 Exemples

Ce n'est pas 100

(i) 4 en base 10, c'est 100 en base 2.

(ii) 9 en base 10, c'est 1001 en base 2.

(iii) 1A en base 16, c'est 26 en base 10.

(iv) A en base 16, c'est 10 en base 10.

2.3 Notations et propiétés

Le nombre 23, écrit en base 10, se note 10111 en base 2 et 17 en base 16, mais on ne peut pas écrire $23 = 10111 = 17$. C'est pourquoi nous adoptons la notation $(n)_p$ pour indiquer que le nombre n est écrit en base p :

$$(23)_{10} = (10111)_2 = (17)_{16}.$$

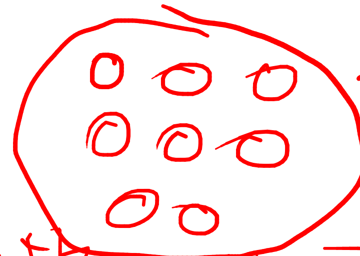
Les écritures en bases 2, 10 et 16 s'appellent aussi respectivement les écritures binaire, décimale et hexadécimale. Lorsqu'un nombre est écrit en base 10, on peut simplifier la notation $(x)_{10}$ en x. Par exemple $(201)_{10}$ peut s'écrire simplement 201.

Si on ne spécifie pas la base, c'est une base 10.

Proposition 2.1 *L'écriture d'un nombre entier en base 2, 10 ou 16 est unique.*

2.4 Conversion

Dans n'importe quelle base, il s'agit de dénombrer un quantité identique



$(8)_{10}$

$(8)_{16}$

$(1000)_2$

Pour convertir un entier d'une base à l'autre, il est important de comprendre la relation algébrique que l'on a entre une base p et l'écriture du nombre dans cette base p. C'est ce qu'énonce la propriété suivante.

Proposition 2.2 *Quels que soient les nombres entiers $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ compris entre 0 et $p-1$, où p désigne 2, 10 ou 16, on a*

renvoie à $p^0 = 1$

$$\underline{(a_n \cdots a_2 a_1 a_0)_p} = a_n \times p^n + \cdots + a_2 \times p^2 + a_1 \times p + a_0.$$

Dans le cas où $p = 16$, on remplace dans l'écriture du membre de gauche, tout a_i égal à 10, 11, 12, 13, 14 ou 15 par A, B, C, D, E ou F respectivement.

$$1852_{10} = 1 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 5 \times 10 + 2$$

$$1852_{16} = 1 \times 16^3 + 8 \times 16^2 + 5 \times 16 + 2$$

2.4.1 Exemple

Conversion vers la base 10 :

$$
\begin{aligned}
(11011)_2 &= 1\times\overbrace{2^4}^{16}+1\times\overbrace{2^3}^{8}+0\times\overbrace{2^2}^{4}+1\times 2+1=27_{10}\\
(5C8)_{16} &= 5\times\underbrace{16^2}_{256}+\underset{12}{\underset{\uparrow}{C}}\times 16+8=1480_{10}
\end{aligned}
$$

Convertir vers la base 10 = définition

2.4.2 Méthode

Il existe plusieurs méthodes pour convertir un entier vers la base $p = 2$ ou 16.

- Nous allons déterminer l'écriture en base 2 du nombre 75.
- Nous déterminerons alors l'écriture en base 16 du nombre 2 014 (méthodes 1 et 2).
- Nous effectuerons des conversions directes entre les bases 2 et 16 (méthode 3).

Méthode 1 : définition :

– puissances de 2 : 1 – 2 – 4 – 8 – 16 – 32 – 64 ...

$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4 \quad 2^5 \quad 2^6$

On pose la division euclidienne par les puissances, en commençant par la + gde.

$75 = 1 \times \underbrace{64}_{2^6} + 11$

$11 = 1 \times \underbrace{8}_{2^3} + 3$

$3 = 1 \times \underbrace{2}_{2^1} + 1$

$2^6 \quad 2^3 \quad 2^1 \quad 2^0$

D'où $75 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1001011_2$

• 2014 en base 16 $\qquad 16^0 = 1 \qquad 16^1 = 16 \qquad 16^2 = 256$

$$2014 = 7 \times 256 + 222$$

$$222 = \underbrace{13}_{D} \times 16 + 14$$

$$2014 = 7 \times 16^2 + \underbrace{13}_{D} \times 16^1 + \underbrace{14}_{E} = 7DE_{16}$$

- **Méthode 2** On effectue la division euclidienne du nombre par p puis on recommence avec le quotient et ainsi de suite jusqu'à obtenir 0. À la fin, on inverse l'ordre des restes obtenus.

• 75 en base 2 :

$$75 = 2 \times 37 + 1$$
$$37 = 2 \times 18 + 1$$
$$18 = 2 \times 9 + 0$$
$$9 = 2 \times 4 + 1$$
$$4 = 2 \times 2 + 0$$
$$2 = 2 \times 1 + 0$$
$$1 = 2 \times 0 + 1$$

On remonte les reste

$$75 = 1001011_2$$

• 2014 en base 16

$$2014 = 16 \times 125 + \underbrace{14}_{E}$$
$$125 = 16 \times 7 + \underbrace{13}_{D}$$
$$7 = 16 \times 0 + 7$$

On remonte les restes

$$2014 = 7DE_{16}$$

F_{16}

$2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 16$.

les 4 premiers caractères correspondent au premier caractère en base 15

- **Méthode 3** on peut passer directement de la base 2 à la base 16, et inversement, en utilisant le tableau de conversion suivant :

base 16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
base 2	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

$\underbrace{0100}\,\underbrace{1011}_2 = 4\ B = 4B_{16}$

$11 = B_{16}$

on regroupe par 4

$F9_{16} = 1111\,1001_2$

2.5 Numération des réels

Dans le dernier paragraphe, nous avons défini les écritures binaire, décimale et hexadécimale d'un nombre entier. Plus largement, tout nombre réel peut être écrit en base 2, 10 ou 16. Pour comprendre, prenons l'exemple de deux réels et de la base 10.

$$(53,627)_{10} = 5 \times 10^{1} + 3 \times 10^{0} + 6 \times \overbrace{10^{-1}}^{0,1} + 2 \times \overbrace{10^{-2}}^{0,01} + 7 \times \overbrace{10^{-3}}^{0,001}$$

et

$$(456,905)_{10} = 4 \times 10^{2} + 5 \times 10 + 6 + 9 \times 10^{-1} + 0 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$$

Proposition 2.3 *Quels que soient les nombres entiers $a_0, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_m$ compris entre 0 et $p-1$ (où p désigne 2, 10 ou 16), on a :*

$$(a_n \cdots a_1 a_0, b_1 \cdots b_m)_p = a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0 + \frac{b_1}{p} + \cdots + \frac{b_m}{p^m}.$$

$$= a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0 + b_1 p^{-1} + \cdots + b_m p^{-m}$$

$$1 \quad 1 \quad 1$$

$$\frac{1}{4} = 2^{-2} \left(= \frac{1}{2^2} \right) = 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$

Par exemple :

$$7,25 = 111,01$$

Bon courage pour faire des conversions à la main !

Application: $(0,11111\ldots)_2 \simeq 1$.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 1 \times 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) - \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2-1 = 1$$

série géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

2.6 Opérations

En base 2, 10 ou 16, on fait les opérations élémentaires de la même façon.

" On pose une retenue quand on arrive à p "

2.6.1 L'addition

$$
\begin{array}{ccccc|l}
 & 1 & 1 & & & (1)_2 + (0)_2 = (1)_2 \\
 & & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & (0)_2 + (1)_2 = (1)_2 \\
+ & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & (1)_2 + (1)_2 = (10)_2 \text{ : on pose 0, on retient 1.} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & (1)_2 + (1)_2 = (10)_2 \text{ : on pose 0, on retient 1.}
\end{array}
$$

$$F + 1 + 2 = 18 = \underbrace{16}_{\text{retenue}} + 2$$

$$
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 1 & \\
 & & F & 5 \\
+ & & 2 & C \\
\hline
 & 1 & 2 & 1
\end{array}
$$

$$C + 5 = 17 = \underbrace{16}_{\text{retenue}} + 1$$

$$F5_{16} + 2C_{16} = 121_{16}$$

2.6.2 La soustraction

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ - & & & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Puisque $1 > 0$, on pose une retenue de 1,
puis $(10)_2 - (1)_2 = (1)_2$.
Nouvelle retenue de 1 puis $(11)_2 - ((1)_2 + (1)_2) = (1)_2$, etc.

2.6.3 Le produit

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & & \mathbf{F} & \mathbf{3} \\
 & & \times & \mathbf{2} & \mathbf{A} \\
\hline
 & & 9 & 7 & E \\
 & +1 & E & 6 & . \\
\hline
 & 2 & 7 & D & E
\end{array}
$$

$(A)_{16} \times (3)_{16} = 10 \times 3 = 30 = (1E)_{16}$, on pose E, on retient 1.
$(A)_{16} \times (F)_{16} = 10 \times 15 = 150 = (96)_{16}$, avec la retenue, on obtient, $(96)_{16} + (1)_{16} = (97)_{16}$, d'où 97E.
$(2)_{16} \times (3)_{16} = (6)_{16}$, on pose 6 .
$(2)_{16} \times (F)_{16} = 2 \times 15 = 30 = (1E)_{16}$, on obtient 1E6 avec le décalage « . ».
On effectue ensuite l'addition $(97E)_{16} + (1E60)_{16}$: $(E)_{16} + (0)_{16} = (E)_{16}$, on pose E ; $(7)_{16} + (6)_{16} = 7 + 6 = 13 = (D)_{16}$, on pose D ; $(9)_{16} + (E)_{16} = 9 + 14 = 23 = (17)_{16}$, on pose 7 et on retient 1 ; enfin, $(1)_{16} + (1)_{16} = (2)_{16}$, on obtient alors le résultat 27DE.

Bon courage pour la division euclidienne !

Conseil : Repasser en base 10 pour faire les calculs avant de revenir à la base initiale.