DANIEL ANGULO.
06 72 85 14 05.

FONCTION CARACTÉRISTIQUE COMPLEXE TJR DÉFINIT. LA GÉNÉRATRICE RÉELLE NON.

UGA UFR SHS Université Grenoble Alpes

2021-2022

ANALYSE REELLE 2

: SOUS-TITRES.
: THÉORÈMES/OPS.
: DÉFINITIONS ET ANNOTATIONS.

Livret étudiant

L1 MIASHS Université Grenoble Alpes

Luc GERBAUX (Luc.gerbaux@univ-grenoble-alpes.fr)

10 cours magistraux (10×1,5h), 8 travaux dirigés (8×1,5h) et 2 travaux pratiques (2×1,5h)
Lors des travaux pratiques le logiciel MAXIMA sera utilisé : http://maxima.sourceforge.net/
2 DS d'1h30 (2×25% de la note finale) et 1 partiel de 2h (50% de la note finale)
Matériel(s) autorisé(s) lors des examens : une feuille recto-verso, pas de calculatrice
Remarque : dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons aux nombres réels

$f.c(\sqrt{n}\, S_n) = f.c(\mathcal{N}(0,1))$.

Partie 1 : Continuité

Partie 2 : Dérivation

Partie 3 : Intégration

Partie 4 : Développements limités

Partie 1 : Continuité

1.1 Bornes

✓ **Définitions**

Soit l'ensemble $E \subset IR$

- On dit que E est **majoré** si $\exists\, M \in IR \,/\, \forall\, x \in E,\ x \leq M$
- On dit que $M \in IR$ est une **borne supérieure** de E si : - $\forall\, x \in E,\ x \leq M$
  - $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, x \in E,\ x + \varepsilon > M$

Si E possède une borne supérieure M, on note : $M = \boldsymbol{sup\ E}$

Sinon on note : $sup\ E = +\infty$

Intuitivement, les propriétés ci-dessus s'interprètent en M est le **plus petit majorant** de E :

BORNE SUPÉRIEURE

- M est un majorant de E $\rightarrow \exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in E,\ x \leq M$
- il n'existe pas de majorant M' de E tel que $M' < M$ $\rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E, x > M - \varepsilon$. (OU $x + \varepsilon > M$).

Preuve : Supposons $\exists\, M' \in IR,\ M' < M$ et $\forall\, x \in E,\ x \leq M'$ $\hookrightarrow \forall M' \in \mathbb{R}, x \leq M', M \leq M'$. (DÉF. ALT.)

Posons $\varepsilon = M - M' > 0$ alors $\exists\, x \in E,\ x + \varepsilon > M$

Ainsi $x > M - (M - M') = M'$ Contradiction

1.1// BORNES. → DÉF.
1.2// CONTINUITÉ.
↳ DÉF. → COMP. DE F°S CONTINUES EST CONT. AUSSI.
1.3// THM. FONDAMENTAUX.
↳ THM. DES VALEURS INTERMÉDIAIRES.
↳ CAS BOLZANO-WEIERSTRASS.
↳ COROLLAIRE: $f(I)$ EST AUSSI UN INTERVALLE CONTINU.
↳ THM. DE WEIERSTRASS.
1.4 // MONOTONIE.
↳ THM. DE LA BIJECTION.
1.5// FONCTIONS RÉCIPROQUES.
↳ THM.: f^{-1} CONT. ET MÊME VAR.!

Exemple : $\text{Sup}([0\,;1[) = 1$. En effet :

- $\forall\, x \in [0\,;1[,\ x \leq 1$
- Soit $\varepsilon > 0$ posons $x = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon}{2} & \text{si } \varepsilon \leq 1 \\ 0 & \text{si } \varepsilon > 1 \end{cases}$

Alors $x \in [0\,;1]$ et $x + \varepsilon = \begin{cases} 1 + \frac{\varepsilon}{2} > 1 & \text{si } \varepsilon \leq 1 \\ \varepsilon > 1 & \text{si } \varepsilon > 1 \end{cases}$

Activité de cours 1.1 : Définir la minoration et la borne inférieure

X

Exercice type 1.1 :

a) Soit $E = \{a^2\,;\, a \in [0\,;2[\}$. Montrer que $\sup E = 4$ ✓ : $f(E)$ DA

b) Soit $E = \left\{\frac{1}{a}\,;\ a \in\,]0\,;+\infty[\right\}$. Montrer que $\inf E = 0$ ✓ : $y = \varepsilon/2$.

X

Exercice type 1.2 :

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$: $0 < \frac{m.n}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$ ✓ $(N+B)^2$, DÉVELOPPE.

b) En déduire que $A = \left\{\frac{m.n}{(m+n)^2}, m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera. MINORANT TRIVIAL, MAJ.: $y = 1/4. \Rightarrow 1/4 + \varepsilon > 1/4$. ✓

X

Exercice type 1.3 :

Déterminer si B et C ont une borne inférieure, une borne supérieure, si oui, les déterminer

a) $B = \left\{\frac{2^n}{2^n - 1}\,;\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ ✓ : y = CHANGER N AVEC $(E(1/\varepsilon)+1)$.

b) $C = \left\{\frac{x^3}{|x^3 - 1|}\,;\, x \in\,]0\,;1[\, \cup\,]1\,;+\infty[\right\}$ ✓.

✓ **Propriété**

Les propriétés suivantes (admises) sont des propriétés fondamentales de IR :

- Tout ensemble $E \subset IR$ majoré possède une borne supérieure
- Tout ensemble $E \subset IR$ minoré possède une borne inférieure

1.2. Définition de la continuité et premières propriétés

✓ **Définition**

Soient f définie sur un intervalle I et a un élément de I

- On dit que f est **continue en a** si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et vaut $f(a)$ → $\forall x \in Dom.$, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Si $a > inf I$ on dit que f est **continue à gauche en a** si $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existe et vaut $f(a)$
- Si $a < sup I$ on dit que f est **continue à droite en a** si $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe et vaut $f(a)$

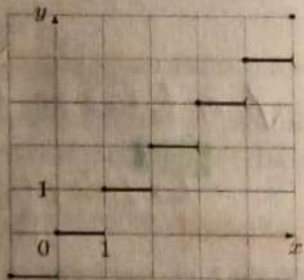
La propriété suivante se déduit facilement de la définition des limites concernées :
Si $a > inf I$, $a < sup I$ et f est continue à gauche et à droite en a alors f est continue en a

✓ **Exemple**

La fonction *partie entière*, définie pour tout $x \in IR$, par :

$$E(x) = sup_{n \in \mathbb{Z}}\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\} \text{ (plus grand entier inférieur à } x)$$

- est continue en tout $a \notin \mathbb{Z}$
- est continue à droite en tout $a \in \mathbb{Z}$
- n'est pas continue à gauche en $a \in \mathbb{Z}$



✓ **Caractérisation formelle : DÉF. "ÉPSILON - DELTA".**

La propriété suivante se déduit directement des définitions :
Soient f définie sur un intervalle I et a un élément de I
Alors f est continue en a si et seulement si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, si $x \in [a - \delta ; a + \delta]$ alors $f(x) \in [f(a) - \varepsilon ; f(a) + \varepsilon]$

✓ **Caractérisation séquentielle : DÉF. POUR LES SUITES.**

Soient f définie sur I et $a \in I$
Alors f est continue en a si et seulement si toute suite (u_n) à valeur dans I et de limite a est telle que la suite $(f(u_n))$ a pour limite $f(a)$

Ainsi, en particulier : si f est continue en a et si $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$ alors $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$

✓ **Définition de la continuité sur un intervalle**

Soit f définie sur un intervalle I

On dit que f est **continue sur I** si f est continue en tout $a \in I$

✓ **Propriété**

La somme, le produit, le quotient et la composée de fonctions continues sont continus

✓ **Continuité des fonctions usuelles**

On pourra utiliser sans justifer, la continuité des fonctions suivantes sur chaque intervalle inclus dans leur ensemble de définition :

- x^n - $\frac{1}{x^n}$ - $x^{\frac{1}{n}}$
- e^x - $\ln(x)$ - les fonctions trigonométriques

X ***Exercice type 1.4 :*** Soit f une application continue de [0 ; 1] dans lui-même
Montrer que f admet un point fixe ✓.

- $g(x) = f(x) - x$.
- NOTE : $g(1)$ NÉG ET $g(0)$ POS.
- TVI : $\exists x / f(x) - x = 0$.
  ↳ $f(x) = x$.

1.3. Théorèmes fondamentaux

✓ **Théorème de Bolzano-Weierstrass** → COROLLAIRE DE TVI POUR LES RACINES D'UNE CERTAINE $f(x)$.

Soient f définie et continue sur un intervalle I et a et b éléments de I tels que $a < b$

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont des signes contraires alors $\exists c \in [a ; b] / f(c) = 0$

X ***Exercice type 1.5 :***

a) Montrer que l'équation $x^3 + 2x + 1 = 0$ possède une solution ✓.

b) Montrer que $\forall x \geq 0, \exists y \geq 0 / y^2 = x$ ✓. → $f_x(a)$ ET $f_x(b)$ → B.W..

Aide : on pourra utiliser la fonction : $f_x(y) = x - y^2$ pour la valeurs $a = 0$ et $b = x + 1$

↳ IDÉE : DIFF. ENTRE DEUX FONCTIONS. POUR B.W/TVI.

✓ **Théorème des valeurs intermédiaires**

Soient f définie et continue sur un intervalle I et a et b éléments de I

$\forall y$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ $\exists x$ compris entre a et b / $f(x) = y$ → $[f(a), f(b)]$ FERMÉ.

X ***Activité de cours 1.2 :*** Finir la démonstration de ce théorème :

Pour simplifer, supposons que $f(a) \leq f(b)$

Soient $y \in [f(a) ; f(b)]$

g_y la fonction définie sur I par $g_y(x) = f(x) - y$

Alors g_y est continue sur I

a et b éléments de I, $g_y(a) = f(a) - y \leq 0$ car ... CAR $y \leq G(b)$ → BW.

$\exists x \in [a, b] / g_y(x) = 0 = f(x) - y$
→ $f(x) = y$.

✓ **Corollaire** → DU TVI.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Avant de démontrer ce corollaire, rappelons la définition suivante :

Un ensemble $I \subset IR$ est un intervalle lorsque : $\forall (a ; b) \in I \times I$ avec $a < b$ alors $\forall c \in [a ; b]$ $c \in I$

Démonstration de ce corollaire :

Soient I un intervalle et f définie et continue sur I

L'image de I par f est par définition : $f(I) = \{f(x) ; x \in I\}$

On montre que $f(I)$ est un intervalle : $\forall (a, b) \in f(I)\times f(I)$ avec $a < b, \forall c \in [a ; b]$ $c \in f(I)$

Soient $(a, b) \in f(I)\times f(I)$ avec $a < b$ alors par déf. de $f(I)$: $\exists x_a \in I \,/\, a = f(x_a)$ et $\exists x_b \in I \,/\, b = f(x_b)$

Soit $c \in [a ; b] = [f(x_a) ; f(x_b)]$

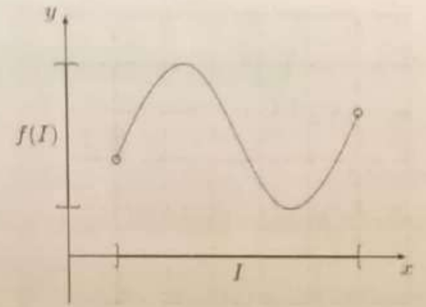
D'après le TVI : $\exists x \in [x_a$ et $x_b]$ tel que $f(x) = c$

Or I est un intervalle et $x_a \in I$; $x_b \in I$ donc $x \in I$

De $f(x) = c$ on déduit par définition de $f(I)$: $c \in f(I)$

Attention : L'intervalle I et son image $f(I)$ par une fonction définie et continue sur I ne sont pas nécessairement de même nature

Exemple : Ci-dessous f est continue sur $I =]1 ; 6[$ avec I ouvert mais $f(I) = [1 ; 4]$ est fermé



• PAR CONT. : $I = [0,1] \cup [2,3]$.
• $a = 1$, $b = 2$.
• PAR DÉF., si $c \in [1,2]$, $c \in I$.
• $c = 1/2$.
• $c \notin I$. CONTRADICTION.

Exercice type 1.6 : Montrer que $E = [0 ; 1] \cup [2 ; 3]$ n'est pas un intervalle

✓ **Théorème (théorème de Weierstrass)**

L'image d'un intervalle fermé et borné par une fonction <u>continue</u> est un intervalle fermé et borné

Une autre formulation de ce théorème est :

Une fonction définie et <u>continue</u> sur un intervalle fermé et borné atteint ses bornes

Démonstration de ce théorème :

Soient $I = [a ; b]$ et f définie et continue sur I

Montrons que $f([a ; b])$ est un intervalle fermé et borné

Dans un premier temps, montrons que $f([a ; b])$ est majoré et minoré (donc borné)

Il suffit de montrer que $|f([a ; b])|$ est majoré

Raisonnons par l'absurde : supposons que $|f([a ; b])|$ n'est pas majoré

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a ; b]$ et $|f(x_n)| \geq n$

Définissons ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ vérifiant : $x_n \in [a ; b]$ et $\lim_{n\to+\infty} |f(x_n)| = +\infty$

(x_n) est majorée et minorée donc elle possède une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ de limite L finie

Puisque $|f|$ est continue alors $\lim_{n\to+\infty} \left|f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right| = |f(L)|$ Contradiction

Dans un deuxième temps, montrons que f atteint ses bornes sur $[a\,;\,b]$

Traitons le cas de sa borne supérieure (le cas de la borne inférieure se traite de manière analogue)

Puisque $f([a\,;\,b]) \subset IR$ est majoré, il possède une borne supérieure M

Montrons qu'il existe $c \in [a\,;\,b]$ tel que $f(c) = M$

On sait que : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in f([a\,;\,b]),\ M \geq x$ et $x + \varepsilon > M$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\exists\, x_n \in f([a\,;\,b]),\ x_n + \frac{1}{n} > M$

On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ $\exists\, c_n \in [a\,;\,b],\ f(c_n) = x_n$ et $M \geq f(c_n) > M - \frac{1}{n}$

Puisque $(c_n)_{n>0}$ est bornée, il existe une sous-suite $(c_{\varphi(n)})_{n>0}$ convergente de limite $c \in [a\,;\,b]$

Concernant (c_n) nous obtenons : $\lim_{n \to +\infty} f\left(c_{\varphi(n)}\right) = f(c)$ par continuité de f

Et $\lim_{n \to +\infty} f\left(c_{\varphi(n)}\right) = M$ par le théorème des gendarmes :

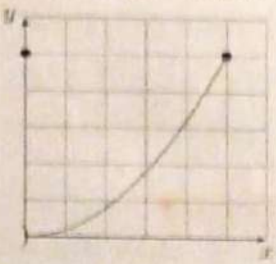
Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim_a f = \lim_a h = L$ alors g converge en a et $\lim_a g = L$

Remarque : Dans le théorème de Weirstrass, la continuité de f est primordiale

Exemple : Soit f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Clairement f n'est pas continue en $x = 0$

On a $f([0\,;\,1]) =]0\,;\,1]$ borné, de borne inférieure égale à 0, mais f n'atteint pas 0



Exercice type 1.7 : Dans chacun des cas, expliciter $f(I)$ sans justifier :

a) $I_a = IR$ et $f(x) = x^2$

b) $I_b = [-2\,;\,2]$ et $f(x) = x^2$

c) $I_c =]0\,;\,+\infty[$ et $f(x) = \ln(x)$

d) $I_d =]-1\,;\,1[$ et $f(x) = 1 - x^2$

e) $I_e = [1\,;\,+\infty[$ et $f(x) = \frac{1}{x}$

f) $I_f = [1\,;\,4]$ et $f(x) = (x-2).(x-4)$

Exercice type 1.8 : Dans chacun des cas, représenter graphiquement une fonction f continue satisfaisant la propriété désirée :

a) $f_a([0\,;\,1]) = [f_a(1)\,;\,f_a(0)]$

b) $f_b(]0\,;\,1[) = [0\,;\,1]$

c) $f_c([0\,;\,1]) = [-1\,;\,2]$ et $f_c(0) = f_c(1) = 0$

Exercice type 1.9 : Dans chacun des cas, étudier la continuité de la fonction :

a) f_a définie sur IR par : $f_a(x) = \begin{cases} 9 - x & \text{si } x \leq 4 \\ -4.x^2 + 39.x - 87 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

b) f_b définie sur $[-1\,;\,1]$ par : $f_b(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1.4. Monotonie

✓ **Définitions**

Soit f définie sur un intervalle I alors f est

- **croissante** (respectivement strictement croissante) sur I si
  $\forall (a,b) \in I \times I \ : \ a < b \ \Rightarrow \ f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(a) < f(b)$)
- **décroissante** (resp. strictement décroissante) sur I si
  $\forall (a,b) \in I \times I \ : \ a < b \ \Rightarrow \ f(a) \geq f(b)$ (resp. $f(a) > f(b)$)
- **monotone** si elle est croissante sur I ou décroissante sur I
- **injective** si : $\forall (a,b) \in I \times I \ : \ f(a) = f(b) \ \Rightarrow \ a = b$
- **surjective** de I vers J si $\forall y \in J, \ \exists x \in I, \ f(x) = y$
- **bijective** de I vers J si elle est injective et surjective de I vers J

Caractérisation d'une bijection : "UN - VERS - UN".

Soit f une fonction bijective de E vers $f(E)$ alors $\forall y \in f(E), \exists! x \in E \, / \, f(x) = y$

Démonstration

Puisque f est surjective : $\forall y \in J \ \exists x \in I \ f(x) = y$

X. De plus si $x' \in I$ est tel que $f(x') = y$ alors $f(x') = f(x)$

Puisque f est injective, nous en concluons que $x = x'$

Nous avons donc l'existence et l'unicité de x tel que $f(x) = y$

✓ **Théorème de la bijection** : UTILE POUR L'USAGE D'UNE $f(x)$.

Soit f définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $I = [a\,;b]$

(les bornes de I sont éventuellement infinies) alors f réalise une bijection de I vers l'intervalle $f(I)$

De plus $\lim_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim_{x \to b^-} f(x)$ existent et :

- Si $I = [a\,;b]$ et f croissante (resp. décroissante) alors $f(I) = [f(a)\,;f(b)]$ (resp. $[f(b)\,;f(a)]$)
- Si $I =]a\,;b]$ et f croissante (resp. décroissante) alors $f(I) =]\lim_{x \to a^+} f(x) \ ; \ f(b)]$
  (resp. $[f(b)\,; \lim_{x \to a^+} f(x)[$)
- Si $I = [a\,;b[$ et f croissante (resp. décroissante) alors $f(I) = [f(a)\,; \lim_{x \to b^-} f(x)[$
  (resp. $]\lim_{x \to b^-} f(x) \ ; \ f(a)]$)
- Si $I =]a\,;b[$ et f croissante (resp. décroissante) alors $f(I) =]\lim_{x \to a^+} f(x) \ ; \ \lim_{x \to b^-} f(x)[$
  (resp. $]\lim_{x \to b^-} f(x) \ ; \ \lim_{x \to a^+} f(x)[$)

Activité de cours 1.3 : Finir la démonstration de la bijectivité

X. Nous savons que $f(I)$ est un intervalle car f est continue

Par définition de $f(I) = \{f(x)\,; x \in I\}$, nous savons que f est surjective de I vers $f(I)$

Montrons que f est en outre injective : Soient x et x' tels que $f(x) = f(x')$ MAIS, SI STRICT. MONOTONE,

Si $x \neq x'$ alors ... $x > x'$ DONC $f(x) \neq f(x')$.

$x < x'$. CONTRADICTION, DONC $x = x'$, INJECTIVE.

1.5. Fonctions réciproques

✓ **Définition**

Soit f une bijection de I vers J

On appelle **bijection réciproque** de f qu'on note f^{-1}

la fonction qui à tout $y \in f(I)$ associe l'unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$

✓ **Théorème**

Soit f définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I

Alors la bijection réciproque f^{-1} de f définie sur l'intervalle $f(I)$ est

- de même variation que f
- continue sur $f(I)$

Démonstration : Traitons le cas où f est strictement croissante

1/ Montrons que f^{-1} est strictement croissante

Soient $(a, b) \in f(I) \times f(I)$; $a > b$; $x_1 = f^{-1}(a)$ et $x_2 = f^{-1}(b)$

Alors $f(x_1) = a$ et $f(x_2) = b$

Puisque f est strictement croissante $x_1 \leq x_2 \Rightarrow a = f(x_1) \leq f(x_2) = b$ donc $x_1 > x_2$

2/ Montrons que f^{-1} est continue en tout $a \in f(I)$

Pour simplifier supposons que $f^{-1}(a)$ est strictement intérieur à I

c'est à dire : $\exists r > 0 \;\; [f^{-1}(a) - r ; f^{-1}(a) + r] \subset I$

Soit $\varepsilon > 0$ Posons $\delta = \min\{r ; \varepsilon\} > 0$ en sorte que $(f^{-1}(a) \pm \delta) \in I$

Posons $\eta = \min\{a - f(f^{-1}(a) - \delta) ; f(f^{-1}(a) + \delta) - a\}$

Puisque f^{-1} est strictement croissante, $\eta > 0$ alors :

$a + \eta \leq a + f(f^{-1}(a) + \delta) - a = f(f^{-1}(a) + \delta) \leq f(f^{-1}(a) + \varepsilon)$

$a - \eta \geq a - (a - f(f^{-1}(a) - \delta)) = f(f^{-1}(a) - \delta) \geq f(f^{-1}(a) - \varepsilon)$

Ainsi si $a - \eta < x < a + \eta$ alors $f(f^{-1}(a) - \varepsilon)) < x < f(f^{-1}(a) + \varepsilon)$

f^{-1} est strictement croissante alors $f^{-1}(f(f^{-1}(a) - \varepsilon)) < f^{-1}(x) < f^{-1}(f(f^{-1}(a) + \varepsilon))$

et donc $f^{-1}(a) - \varepsilon < f^{-1}(x) < f^{-1}(a) + \varepsilon$

Exercice type 1.10 : Soit f définie sur IR par $f(x) = x^7 + x^3 + x + 1$ ✓

a) Montrer que f est continue et bijective de IR dans IR ⇒ CONTINUE : Polynôme. // Bij.: ⇒ $f(x_1) = f(x_2)$ ⇒ $x_1 = x_2$. ET SURJEC.

b) Soit $g = f^{-1}$ sa fonction réciproque. Déterminer $\lim_{x \to 1} g(x)$ et $\lim_{x \to 4} g(x)$

↳ $f(0) = 1$ ⇒ $f^{-1}(1) = 0$. ↳ $f(1) = 4$ ⇒ $f^{-1}(4) = 1$.

Partie 2 : Dérivation

2.1. Définitions et généralités

Soient f définie sur un intervalle I et $a \in I$

- On dit que f est **dérivable** en $x = a$ si $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie L

  Dans ce cas, L est appelée la **dérivée** de f en $x = a$ et notée $f'(a)$

  Remarque : Si a est une borne de I alors implicitement $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^{\pm}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

  Où on considère a^+ (resp. a^-) lorsque a est le minimum (resp. maximum) de I

- On dit que f est **dérivable** sur I si f est **dérivable** pour tout $a \in I$

  Dans ce cas la fonction $x \to f'(x)$ définie sur I est la **fonction dérivée** de f

Propriétés : Si f définie sur I est dérivable en $x = a \in I$ alors f est continue en $x = a$

Activité de cours 2.1 : Compléter la démonstration de cette propriété :

De $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ et $\lim_{x \to a}(x - a) = 0$ on déduit : $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} . (x - a) = \ldots$

Exercice type 2.1 : Soit $f(x) = \sqrt{x}$ définie et continue sur un intervalle I à définir

Démontrer que $f'(x) = \frac{1}{2.\sqrt{x}}$ et on donnera le domaine de dérivabilité de f

✓ Opérations

Si les fonctions u et v sont dérivables sur I alors partout où ces opérations sont définies :

- $(u + v)' = u' + v'$: RÈGLE DE LA SOMME (LINÉARITÉ).
- $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$: RÈGLE DU PRODUIT.
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$: RÈGLE DU QUOTIENT.

Activité de cours 2.2 : Finir de démontrer que $(u \times v)' = u' \times v + u$

$\forall a \in I, \forall x \in I - \{a\} : \frac{u(x) \times v(x) - u(a) \times v(a)}{x - a} = \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \times v(x) + u(a)$

Or $\lim_{x \to a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = u'(a) \Leftrightarrow \ldots$

Exercice type 2.2 : Soit f définie sur IR par $f(x) = \frac{|x|}{1 + |1 - x^2|}$ ✓

Étudier la continuité et la dérivabilité de f ↳ DÉFAIRE LES Δ

Indication : Préciser la continuité et la dérivabilité à gauche et à

2.1 // DÉFS. ET GÉNÉRALITÉS.
↳ OPÉRATIONS. → PROPRIÉTÉS : INTERPRÉTATION DE dy/dx.
↳ COMPOSÉES.
↳ DÉRIVÉES NOTABLES.
2.2 // RÉCIPROQUES → DÉF.
2.3 // THM. DES ACCROISSEMENTS FINIS.
↳ THM. DE ROLLE.
2.4 // DÉRIVÉE SECONDE.
↳ FORMULE DE TAYLOR.
2.5 // FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES.
↳ ARCSIN, ARCCOS, ARCTAN.
↳ DÉRIVÉES.
↳ REMARQUES.

✓ Composée : RÈGLE DE LA CHAÎNE.

Si f est une fonction dérivable sur I et g est une fonction dérivable sur $f(I)$

alors la composée $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$

$$\frac{dz}{dx} = \underbrace{\frac{dz}{dy}}_{\text{DÉRIVÉE EXTÉRIEURE}} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{DÉRIVÉE INTÉRIEURE}} \rightarrow \text{OU } z(y) \text{ ET } y(x).$$

Activité de cours 2.3 : Finir de démontrer que $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

Partout où c'est défini : $\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ ...

✓ Tableau des dérivées

Ensemble de définition	Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$
IR	a (constante $\in IR$)	0
IR	x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$n.x^{n-1}$
IR^+	x^n $(n \in IR - \{-1\})$	$n.x^{n-1}$
IR^*	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\frac{-1}{x^2}$
IR^+	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2.\sqrt{x}}$
$IR^{*}+$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
IR^{*+}	$\text{Log}_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$	$\frac{1}{x.\ln(a)}$
IR	e^x	e^x
IR	a^x $(a \in IR^{*+} - \{-1\})$	$a^x.\ln(a)$
IR	$\sin(x)$	$\cos(x)$
IR	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
?	u^n (si $n \in \mathbb{Z}$ ou $n = \frac{1}{m}$ et $m \in \mathbb{Z}^*$)	$n.u'.u^{n-1}$
?	e^u	$u'.e^u$
?	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
?	$\cos(u)$	$-u'.\sin(u)$

Exercice type 2.3 : Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $g_a(x) = e^{f(x)}$

b) $g_b(x) = \ln(1 + f^2(x))$

c) $g_c(x) = [f(\sin x)]^2$

d) $g_d(x) = \sqrt{\frac{1}{\ln(f(x))}}$ avec $f(IR)$ inclut dans $[1 ; +\infty[$

e) $g_e(x) = \ln(\sqrt{1+x^2})$

f) $g_f(x) = \ln\left(\frac{2+\cos(x)}{2-\cos(x)}\right)$

g) $g_g(x) = x^{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}$

Exercice type 2.4 :

Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f_a(x) = \frac{e^x.\sqrt{x-2}}{x+1}$

b) $f_b(x) = \frac{(x-1).(x+1)^3}{(x^2+x+1)^2}$

ANGLE	sin x	cos x
0° = 0 RAD.	0	1.
30° = π/6.	1/2	√3/2.
45° = π/4.	1/√2	1/√2.
60° = π/3	√3/2	1/2.
90° = π/2	1	0.

✓ **Propriétés**

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I ouvert

- f est croissante sur I ssi : $\forall\, x \in I, f'(x) \geq 0$
- f est strictement croissante sur I ssi : $\forall\, x \in I, f'(x) > 0$
- f est décroissante sur I ssi : $\forall\, x \in I, f'(x) \leq 0$
- f est strictement décroissante sur I ssi : $\forall\, x \in I, f'(x) < 0$
- f est constante sur I ssi : $\forall\, x \in I, f'(x) = 0$

Exercice type 2.5 : Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = x.\cos(x) - \sin(x)$

Montrer que $f(x) < 0$ sur $]0\,;\pi]$ → TAN x > X, x ∈]0, π/2[. ET SIN x < X, MÊME II. } COS x > x ? SIN x.

Exercice type 2.6 :

Soient p un réel supérieur à 1 et f la fonction définie sur IR^+ par : $f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p}$

a) Montrer que le maximum de f vaut 2^{p-1} → $f'(x) = 0$.

b) Montrer que pour tous a et b réels positifs $(a+b)^p \leq 2^{p-1}.(a^p + b^p)$

Indication : Majorer $f\left(\frac{b}{a}\right)$

2.2. Réciproque

Soit f une fonction définie, dérivable et bijective de I vers J

Alors f^{-1} est dérivable sur J et de dérivée :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$$

Activité de cours 2.4 : Finir de démontrer que $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$:

$\forall\, x \in J \quad (f \circ f^{-1})(x) = x$

Si on dérive : $(f \circ f^{-1})'(x) = \ldots$

Exercice type 2.7 : On considère l'application $f : [-1\,;1] \to IR$, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}.\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $[-1\,;1]$

b) Montrer que f est dérivable sur $]-1\,;1[$ et déterminer $f'(x)$ sur $]-1\,;1[$

↳ EXISTANCE DE LA DÉRIVÉE À PARTIR DE LA DÉF.

c) Montrer que l'application dérivée $f' :]-1\,;1[\to IR$ est continue sur $]-1\,;1[$

Quel est l'ensemble des $x \in]-1\,;1[$ pour lesquels $f'(x) = 0$

d) Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe

e) En déduire que f est injective

f) On désigne par :

- $\tilde{f}$ la bijection de $[-1\,;1]$ sur $f([-1\,;1])$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$, pour tout $x \in [-1\,;1]$
- $\tilde{f}^{-1}$ sa bijection réciproque

Justifier l'existence et déterminer $\left(\tilde{f}^{-1}\right)'(0)$

Pour aller plus loin :

Exercice 2.8 : Soit $f :]0\,;+\infty[\to IR$ l'application définie par $f(x) = \frac{e^x}{x^e}$

a) Etudier les variations de f

b) Comparer les réels e^{π} et π^e

Exercice 2.9 : Soient a et b deux réels et $f : IR \to IR$, la fonction définie par : $\begin{cases} \frac{\sin(a.x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ e^{b.x} - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) A l'aide de la règle de l'Hospital, déterminer la limite suivante : $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x).x - \sin(x)}{x^2}$

b) Déterminer a et b pour que f soit continue sur IR

c) Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur IR

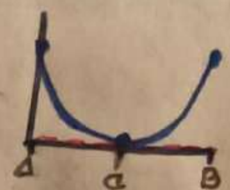
Exercice 2.10 :

a) Étudier la continuité et la dérivabilité en 0 de la fonction $g : g(x) = \begin{cases} e^{-x} + x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 + x^2.\ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction suivante : $h(x) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x}\right)} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x.\ln(x) - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

2.3. Théorème des accroissements finis

✓ Théorème de Rolle (admis)



Soit f une fonction définie et continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$

Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$ → ELLE ARRÊTE DE CROÎTRE OU DÉCROÎTRE.

THM. VALEUR MOYEN.

$f(A) = f(B)$ NOTONS QUE $f'(c) = 0$.

✓ Théorème des accroissements finis

Soit f définie et continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$ alors $\exists\, c \in]a\,;b[$ vérifiant :

$$\frac{\Delta B}{\Delta a} \to \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \to$$

$\frac{\Delta B}{\Delta a} = f'(c) = f'(C)$.

LE RANG POUR ÊTRE DYNAMIQUE.

EX.: $[0, x]$

RANG ARBITRAIRE.

Activité de cours 2.5 : Finir de démontrer ce théorème :

Appliquons le théorème de Rolle à la fonction : $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.(x - a)$...

• BORNITUDE : L'EXIS. D'UN c / $\frac{\sin x}{x} = \cos(c)$. $]0, x[$.
• $1 \geq \cos c \geq -1$. $\Rightarrow x \geq x \cdot \cos(c) = \sin x$
• DONC $\forall x \geq 0$, $x \geq \sin x$.

Exercice type 2.11 : Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$

Indication : Utiliser le théorème des accroissements finis appliqué à $f(t) = \sin(t)$ entre $a = 0$ et $b = x$

→ TÉLESCOPIQUE : POUR RÉDUIRE, DÉVELOPPE PLUSIEURS INÉG. PARCOURANT LES N ENTIERS ET FAIT LA SOMME DES INÉGALITÉS.

TAF, IDÉE : CHOISIR BIEN TES INTERVALLES !

Exercice type 2.12 :

a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$

Indication : Utiliser le théorème des accroissements finis appliqué à $f(t) = \ln(t)$ entre $a = x$ et $b = x + 1$

• a ET b, FONCTIONS DE x.
• LA VALEUR DE c PAS IMPORT.
• $a < c < b$, DONC ON FAIT ET → $f'(a) \leq / \geq f'(c) \leq / \geq f'(b)$.
• ON REMPLACE $f'(c)$ AVEC $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ⇒ RÉSULTAT IMPORTANT.

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln(n)$

→ RÉINDEXATION : $n \to n-1$

c) Soit, pour $n \geq 1$, $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$

Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente

SI INDEF. À UN CERTAIN N, CONTINUE.

Pour aller plus loin : $U_{n+1} - U_n < 0$. | $U_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, DONC 0 MINORANT.

Exercice 2.13 : Soit la fonction f définie sur IR vers IR par $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

a) Montrer que f est dérivable sur IR

b) Montrer qu'il existe $c \in]0\,;2[$ tel que : $f(2) - f(0) = (2-0).f'(c)$

c) Déterminer les valeurs possibles de c

Exercice 2.14 : Montrer que pour tout x et y réels : $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$

Exercice 2.15 : Soit f une application de l'intervalle $[0\,;1]$ dans IR

On suppose que f est continue sur $[0\,;1]$, dérivable sur $]0\,;1[$; $f(0) = 0$; $\forall x \in]0\,;1[$, on a $f'(x) \neq 0$

Montrer que f conserve un signe constant sur $]0\,;1[$

Exercice 2.16 :

Soit $f : [0\,;1] \to IR$ une application continue et dérivable sur $[0\,;1]$ et f' est continue sur $[0\,;1]$

De plus $f(0) = 0$ et que $\forall x \in [0\,;1]$ on a : $f'(x) > 0$

Montrer qu'il existe un nombre réel $m > 0$ tel que $\forall x \in [0\,;1]$, on ait : $f(x) \geq mx$

2.4. Dérivée seconde

✓ Définition

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I

Si f' est dérivable, on appelle **dérivée seconde** de f la fonction $(f')'$ notée f''

✓ Généralisation

Si elle existe, on appelle **dérivée $n^{\text{ième}}$** de f, notée $f^{(n)}$, la fonction dérivée de la dérivée $n-1^{\text{ième}}$ de f

Exercice type 2.17 : Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ et $f^{(4)}(x)$

Exercice type 2.18 : Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2}$ ✓.

a) Déterminer a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$

b) En déduire une expression de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f

✓ Formule de Taylor

Soit f une fonction dérivable n fois sur $[a\,;b]$ et telle que $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a\,;b[$

Alors il existe $c \in\ ]a\,;b[$ tel que :

Reste en forme de Lagrange ou TAF.

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}.(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.(b-a)^{n+1}$$

$\boxed{\frac{f^{(n)}(a)}{(n)!}}(b-a)$. → x ou $(x-a)$ ... coeff. du terme. → pas de x, juste le rayon ... et degré n

Exercice type 2.19 : Montrer que pour tout $x > 0$, $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ ✓.

Indication : Appliquons la formule de Taylor à $f(t) = \ln(1+x)$ en $a = 0$ et $b = x$, pour $x > 0$

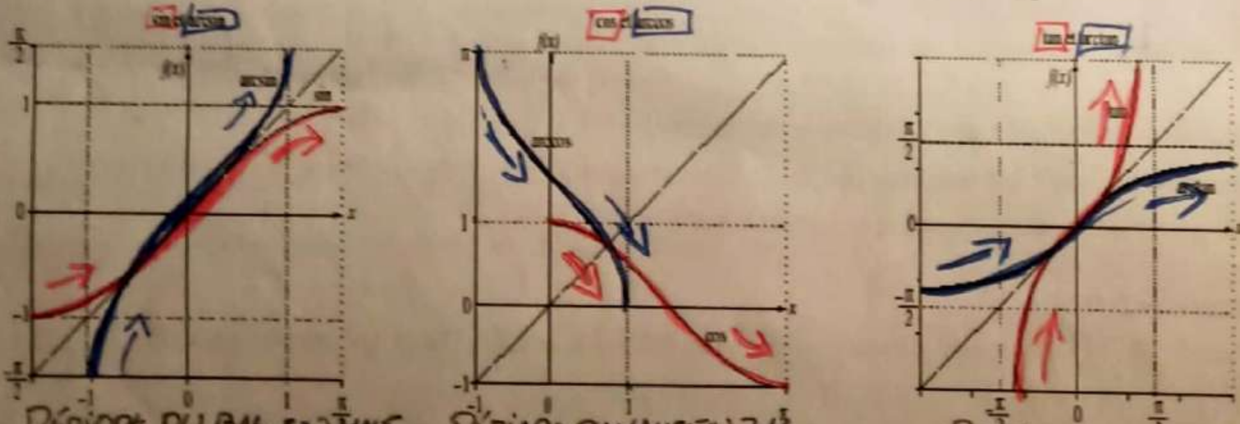
$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$ → Utile pour Laplacien. (Eq. différentielles)

2.5. Fonctions circulaires réciproques

- On appelle **arc sinus** la bijection de $[-1\,;1]$ dans $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] : x \to \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] / \sin(\alpha) = x$
- On appelle **arc cosinus** la bijection de $[-1\,;1]$ dans $[0\,;\pi] : x \to \alpha \in [0\,;\pi] / \cos(\alpha) = x$

$f(b) = \pm 1$.

- On appelle **arc tangente** la bijection de $]-\infty\,;+\infty[$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[: x \to \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[/ \tan(\alpha) = x$



Période du bas en haut. Période du haut en bas. Période en $x = 0$.

Les fonction arcsin, arccos et arctan sont dérivables sur leur domaine de définition :

- $\forall x \in\ ]-1\,;1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\forall x \in\ ]-1\,;1[$, $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ → $\arccos'(x) = -\arcsin(x)$.
- $\forall x \in IR$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ → $\text{arccotan}'(x) = -\arctan(x)$.

Utile :
- $\sin' x = \cos x$.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Activité de cours 2.6 : Démontrer que $\forall x \in\ ]-1\,;1[$, $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Remarques : $\forall x \in IR$, $\text{arccotan}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

Exercice type 2.20 : Soit la fonction $f(x) = \arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

a) Donner son domaine de définition et de continuité

b) Calculer sa dérivée f' et donner le domaine de dérivabilité de f Δ.F.

c) Déterminer le signe de f sur son ensemble de définition

Exercice type 2.21 : Soit la fonction $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

a) Donner son domaine de définition et de continuité

Aide : on pourra poser : $u(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ et utiliser $1 - u^2(x)$ Δ.F

b) Calculer la dérivée de f et donner le domaine de dérivabilité de f

c) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

d) Dresser le tableau de variation et dresser sommairement le graphe de f

e) Donner une expression plus simple de f pour $x < 0$ puis pour $x > 0$

Pour aller plus loin :

Exercice 2.22 : Soit la fonction $f(x) = \arcsin\left(\frac{2.x}{x^2+1}\right)$

a) Donner le domaine de définition et de continuité de f

Aide : on pourra poser : $u(x) = \frac{2.x}{x^2+1}$ et utiliser $1 - u^2(x)$

b) Etudier la parité de f et en déduire un intervalle d'étude I

c) Calculer la dérivée de f

d) Montrer que f n'est pas dérivable $x = 1$. Que peut-on en déduire sur le graphe de f au point d'abscisse $x = 1$?

e) Dresser le tableau de variation de f sur IR^+ avec les limites et les valeurs de f aux points remarquables

f) Tracer le graphe de f sur IR

Exercice 2.23 : Soit la fonction $f(x) = \arcsin(1 - 2.\cos^4(x))$

a) Donner son domaine de définition et de continuité

b) 1/ Montrer que f est 2π-périodique

2/ Quelle est la parité de f ?

3/ En déduire un intervalle d'étude I

c) Calculer la dérivée de f exprimée sous la forme la plus simple possible

Aide : on pourra poser : $u(x) = 1 - 2.\cos^4(x)$

d) Sur quel sous-ensemble de I la fonction f est-elle dérivable ? Préciser les valeurs des limites de $f'(x)$ à droite du point d'abscisse 0 et à gauche du point d'abscisse π

e) Dresser le tableau de variation de f

f) Tracer le graphe de f sur 3 périodes. Remarque ?

Exercice 2.24 :

Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction suivante :

$$f(x) = (x+2).\arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\right) - \ln\left(\sqrt{\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}}{1-\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}}\right|}\right)$$

Partie 3 : Intégration

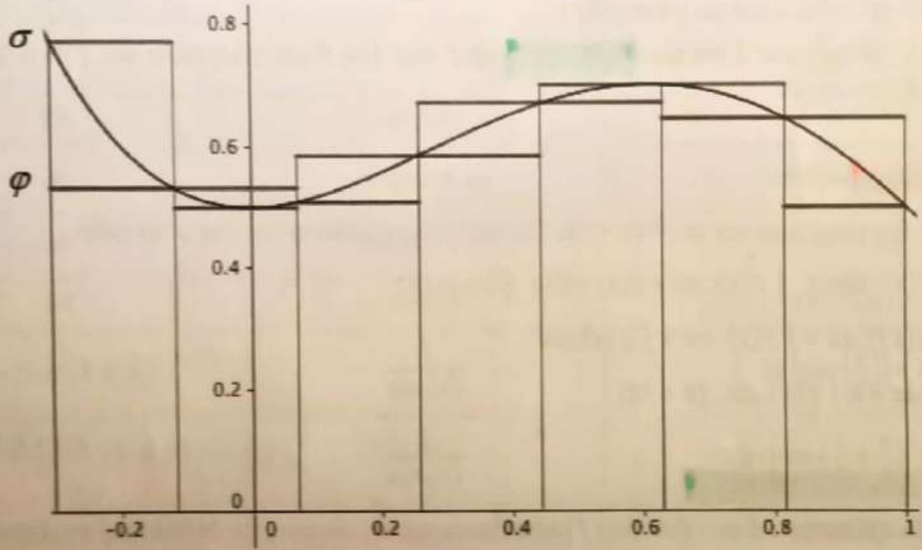
3.1. Méthodes des rectangles

✓ Définitions

- Une fonction $f : [a\,;b] \to IR$ est **en escalier** s'il existe une subdivision $C = (c_0 = a < c_1 < \ldots < c_n = b)$ de $[a\,;b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]c_i\,;c_{i+1}[$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$
- On dit alors que C est une subdivision **adaptée** à f
- Si $f : [a\,;b] \to IR$ est en escalier et si $C = (c_0 = a < c_1 < \ldots < c_n = b)$ est une subdivision adaptée à f, on appelle **intégrale** de f sur $[a\,;b]$ le réel :

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n}(c_{i+1} - c_i).f(x_i)$$

Où x_i est n'importe quel réel de l'intervalle $]c_i\,;c_{i+1}[$



Théorème : Soit $f : [a\,;b] \to IR$ une fonction continue

alors $\forall\, \varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et σ définies sur $[a\,;b]$ telles que :

$$\varphi \le f \le \sigma \quad \text{et} \quad \sigma - \varphi \le \varepsilon$$

Théorème : Soit $f : [a\,;b] \to IR$ une fonction continue et posons :

$I^-(f) = \left\{\int_a^b \varphi \;;\; \varphi : [a\,;b] \to IR \text{ en escalier } \varphi \le f\right\}$

$I^+(f) = \left\{\int_a^b \sigma \;;\; \sigma : [a\,;b] \to IR \text{ en escalier } \sigma \ge f\right\}$

alors $I^-(f)$ est majoré et $I^+(f)$ est minoré ; de plus : $\sup I^-(f) = \inf I^+(f)$

Ce nombre est appelé **intégrale** de f sur $[a\,;b]$ et est noté $\int_a^b f = \int_a^b f(t).dt$

Remarques : - Si le pas $c_{i+1} - c_i$ de C tend vers zéro, alors la somme converge vers l'intégrale

- pour $x_i = c_i$ pour tout i, on parle de méthode des rectangles à **gauche** (**droite** si c_{i+1})
- pour $f(x_i) = \sup\,(f(x_i),\, x_i \in [c_i\,;c_{i+1}])$ pour tout i, on parle de méthode de **somme de Darboux inférieure** (supérieure si sup)

✓ **Intégrale de Riemann**

Théorème : Soit $f : [a\,;b] \to IR$ une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b]$ alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k.\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t).\,dt$$

2ème

✓ **Théorème fondamental de l'analyse** -> "Règle de Newton-Leibniz ou Barrow"

L'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t).\,dt$ est **l'unique primitive** de f qui s'annule en a.

3.2. Primitives : définition et généralités

✓ **Définition**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Une fonction F, définie sur I est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et si pour tout x élément de I : $F'(x) = f(x)$

✓ **Propriétés**

- Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle
- Si $F'(x) = f(x)$ alors $\int f(x).\,dx = F(x) + \text{Cte}$ $(\text{Cte} \in IR)$
- $\int [f(x) + g(x)].\,dx = \int f(x).\,dx + \int g(x).\,dx$
- $\int [k.f(x)].\,dx = k.\int f(x).\,dx$ $(k \in IR)$

✓ **Ensemble de définition**

L'ensemble de définition d'une fonction f (autrefois appelé domaine de définition) est l'ensemble des valeurs de IR qui admettent une image par f sur IR, autrement dit l'ensemble des éléments x de IR pour lesquels $f(x)$ existe

IR est restreint par les impossibilités mathématiques.

✓ **Ensemble d'étude**

L'ensemble d'étude permet de tenir compte des circonstances et des conditions de l'étude, en réduisant le domaine de définition.

Par exemple on se réduira à un domaine continu et on évitera les valeurs absurdes.

3.3. Utilisation du tableau des primitives usuelles

Ensemble de définition	Fonction $f(x)$	Primitives $F(x) + C$ (C : constante)
IR	a (cste)	$a.x + C$
IR	x^n $(n \in IN^*)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
IR^*	x^n $(n \in \mathbb{Z} - \{-1\})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
IR^*	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
IR^{+*}	x^{α} $(\alpha \in IR - \{-1\})$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
IR	e^x	$e^x + C$
IR	a^x $(a \in IR^{+*} - \{-1\})$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
IR	$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
IR	$\sin(\omega.x + \varphi)$	$-\frac{1}{\omega}.\cos(\omega.x + \varphi) + C$
IR	$\cos(\omega.x + \varphi)$	$\frac{1}{\omega}.\sin(\omega.x + \varphi) + C$
IR	$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$IR - \{k.\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert + C$
$IR - \left\{\frac{(2.k+1).\pi}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\frac{1}{\cos(x)}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
$IR - \{k.\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \text{cotan}^2(x)$	$-\text{cotan}(x) + C$
$IR - \left\{\frac{(2.k+1).\pi}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + C$
$IR - \left\{\frac{(2.k+1).\pi}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$
$IR - \{k.\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\text{cotan}(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert + C$
$IR - \left\{\frac{(2.k+1).\pi}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\tan^2(x)$	$\tan(x) - x + C$
$IR - \{k.\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\text{cotan}^2(x)$	$-\text{cotan}(x) - x + C$
$]-1\ ;1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$]-1\ ;1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
IR	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$

Exercice type 3.1 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

X a) $f_a(x) = 4 - \frac{x^3}{12} + \frac{7}{x^3} + 2x^{-5} - 4x^{-10}$

b) $f_b(x) = x^2.(x^3 + 1)^6$

c) $f_c(x) = e^{3x}.(1 + 2e^{3x})^2$

d) $f_d(x) = \sin^6(x).\cos(x)$

Exercice type 3.2 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes dont on donnera un domaine d'étude possible :

X.

a) $f_a(x) = (4x + 1)^{-4}$ $(x \in ?)$

b) $f_b(x) = \frac{(x^{-2}+1)^{10}}{x^3}$ $(x \in ?)$

c) $f_c(x) = \frac{(3 - \sqrt{x})^4}{\sqrt{x}}$ $(x \in ?)$

d) $f_d(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ $(x \in ?)$

e) $f_e(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{3x}$ $(x \in ?)$

f) $f_f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$ $(x \in ?)$

g) $f_g(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$ $(x \in ?)$

h) $f_h(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ $(x \in ?)$

i) $f_i(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $(x \in ?)$

j) $f_j(x) = \frac{\cos(x) + 2x\sin(x)}{2x\sqrt{x}}$ $(x \in ?)$

k) $f_k(x) = \frac{21x^2 + 14x}{x^3 + x^2}$ $(x \in ?)$

l) $f_l(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$ $(x \in ?)$

JE POSE U ET dV.

3.4. Intégration par parties

On se base sur la formule : $\int u.v' = u.v - \int u'.v$ $\Rightarrow \int u\,dv = uv - \int v\,du.$

Exemple : calculons les primitives de la fonction suivante en intégrant par parties : $f(t) = t.\sin(t)$

Posons : $u = t$	$u' = 1$
$v' = \sin(t)$	$v = -\cos(t)$

DERIVÉES "SIMPLES" → DEFAIRE RÈGLE PRODUIT. → DEFAIRE RÈGLE DE CHAÎNE.

$$F(t) = \int t.\sin(t).dt = -t.\cos(t) - \int -\cos(t).dt = -t.\cos(t) + \sin(t) + \text{Cte}$$

Exercice type 3.3 : Déterminer les primitives des fonctions suivantes en intégrant par parties :

X

a) $f_a(t) = t^2.\cos(t)$

b) $f_b(t) = \cos(t).e^t$

c) $f_c(t) = t^2.e^t$

d) $f_d(t) = \ln(t)$

e) $f_e(t) = t.\ln(t)$

f) $f_f(t) = \ln^2(t) = (\ln(t))^2$

3.5. Changement de variable

Exemple d'intégration par changement de variable :

Calculons les primitives de $f(x) = x^2.\sqrt{1-x}$: $\int x^2.\sqrt{1-x}.dx$

à l'aide du changement de variable : $t = 1 - x$

alors $x = 1 - t$ et la différentielle devient $dx = (-1).dt$

$$\int x^2.\sqrt{1-x}.dx = \int (1-t)^2.\sqrt{t}.(-1).dt = \int (-t^{5/2} + 2t^{3/2} - t^{1/2}).dt = -\frac{2}{7}t^{7/2} + \frac{4}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2} + \text{Cte}$$

$$\int x^2.\sqrt{1-x}.dx = -\frac{2}{7}(1-x)^{7/2} + \frac{4}{5}(1-x)^{5/2} - \frac{2}{3}(1-x)^{3/2} + \text{Cte}$$

Exercice type 3.4 : A l'aide d'un changement de variable, déterminer les primitives des fonctions :

a) $f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad -1 < x < 1$ $\quad$ à l'aide du changement de variable : $x = \cos(t)$ (ou $x = \sin(t)$)

b) $f_b(x) = \frac{1}{x^2+k^2}$ $\quad k \neq 0$ $\quad$ à l'aide du changement de variable : $x = kt$

c) $f_c(x) = \frac{1}{(x-u)^2+k^2}$ $\quad k \neq 0$ et $u \neq 0$

d) $f_d(x) = e^{3x}.(1 + e^{2x})$ $\quad$ à l'aide du changement de variable : $t = e^x$

Exercice type 3.5 : A l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive des fonctions suivantes dont on donnera un domaine d'étude possible :

a) $f_a(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad x \in ?$ $\quad$ à l'aide du changement de variable : $u = 1 - x^2$

b) $f_b(x) = \frac{1}{x\ln^3(x)}$ $\quad x \in ?$ $\quad$ à l'aide du changement de variable : $u = \ln(x)$

c) $f_c(x) = \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}$ $\quad x \in ?$ $\quad$ à l'aide du changement de variable : $u = \sin(x)$

↳ on utilise $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

3.6. Fractions rationnelles

Préambule : décomposition dans IR des fractions rationnelles en éléments simples

Soit F une fraction rationnelle, alors $F = \frac{N}{D}$, où N et D sont des polynômes

1/ Si $d°N \geq d°D$ alors $F = E + \frac{N_1}{D_1}$ où E est appelée partie entière, E est un polynôme et $d°E = d°N - d°D$

2/ Sont appelés pôles, les nombres solutions de $D(x) = 0$ -> Pôles : Racines du dénominateur -> Font tendre vers l'infini.
Si un ou plusieurs de ces nombres ($x_1, x_2, \ldots$) vérifient également $N(x) = 0$, alors la fraction peut se simplifier au numérateur et au dénominateur par $(x - x_1), (x - x_2) \ldots$

3a/ Si les pôles ($x_1, x_2, \ldots$) sont tous des racines simples de D, alors la décomposition ne comporte que des éléments de premières espèces : $F = \frac{N}{D} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + \ldots$

Il y a autant d'éléments que de d° de D

3b/ Si un ou des pôles ($x_1, x_2, \ldots$) sont des racines multiples de D, alors

Exemple x_1 et x_2 sont des racines simples, x_3 est une racine double, x_4 est une racine quadruple :

$$\frac{N}{D} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C_1}{x-x_3} + \frac{C_2}{(x-x_3)^2} + \frac{D_1}{x-x_4} + \frac{D_2}{(x-x_4)^2} + \frac{D_3}{(x-x_4)^3} + \frac{D_4}{(x-x_4)^4}$$

Il y a autant d'éléments que de d° de D

3c/ Si deux (ou plus) des racines de D sont des nombres complexes conjugués (et non réels !), alors elles vérifient l'équation $x^2 + K.x + L$ et leur élément simple est, dans *IR*, un élément de deuxième espèce : $\frac{A.x+B}{x^2+K.x+L}$

Par exemple : $$\frac{3.x^3 + 7.x^2 - 1}{2.(x-2).(x+4).(x+5)^3.(x^2+x+1)}$$
$$= \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+4)} + \frac{C_1}{(x+5)} + \frac{C_2}{(x+5)^2} + \frac{C_3}{(x+5)^3} + \frac{D.x+F}{(x^2+x+1)}$$

Exemple :

a) Déterminer les réels a et b tels que $\frac{3}{(2x+1)(x+4)} = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{x+4}$

Remarque préalable : $D_f = IR - \left\{-\frac{1}{2}; -4\right\}$

1ère méthode : $\frac{3}{(2x+1).(x+4)} = \frac{a.(x+4)+b.(2x+1)}{(2x+1).(x+4)} \Rightarrow 3 = a.x + 4.a + 2.b.x + b$

$$\Rightarrow 0.x + 3 = (a+2.b).x + (4.a+b) \Rightarrow \begin{cases} a + 2.b = 0 \\ 4.a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2.b \\ -8.b + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{6}{7} \\ b = -\frac{3}{7} \end{cases}$$

2e méthode : Multiplions les 2 termes par $(2.x+1)$: $\frac{3.(2x+1)}{(2x+1)(x+4)} = \frac{a.(2x+1)}{2x+1} + \frac{b.(2x+1)}{x+4}$

$$\Rightarrow \frac{3}{(x+4)} = a + \frac{b.(2x+1)}{x+4}$$

Pour $x = -\frac{1}{2}$ alors $\left[\frac{3}{(x+4)}\right]_{x=-\frac{1}{2}} = a + b \times 0 \Rightarrow a = \left[\frac{3}{(x+4)}\right]_{x=-\frac{1}{2}} = \frac{3}{-\frac{1}{2}+4} = \frac{6}{7}$

De même : $b = \left[\frac{3}{(2x+1)}\right]_{x=-4} = \frac{3}{-8+1} = -\frac{3}{7}$

b) En déduire une primitive $F(x)$ de $f(x) = \frac{3}{(2x+1)(x+4)}$

$f(x) = \frac{3}{(2x+1)(x+4)} = \frac{6/7}{2x+1} - \frac{3/7}{x+4} \Rightarrow F(x) = \frac{3}{7}\ln|2x+1| - \frac{3}{7}\ln|x+4| = \frac{3}{7}\ln\left|\frac{2x+1}{x+4}\right|$

Exercice type 3.6 :

X

a) Déterminer une primitive F_a de $f_a(x) = \frac{1}{1-x^2}$

b) 1/ Déterminer les réels a, b et c tels que $\frac{x^2+2}{x-1} = ax + b + \frac{c}{x-1}$

2/ En déduire une primitive F_b de $f_b(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$

c) 1/ Démontrer que : $\frac{x^3}{x^2-x-6} = x + 1 + \frac{7x+6}{x^2-x-6}$

2/ Démontrer que $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$

3/ Déterminer a, b tels que $\frac{7x+6}{x^2-x-6} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$

4/ En déduire une primitive F_c de $f_c(x) = \frac{x^3}{x^2-x-6}$

d) 1/ Démontrer que : $\frac{x^3}{x^2+4x+4} = x - 4 + \frac{12x+16}{x^2+4x+4}$

2/ Démontrer que $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

3/ Déterminer a, b tels que $\frac{12x+16}{x^2+4x+4} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2}$

4/ En déduire une primitive F_d de $f_d(x) = \frac{x^3}{x^2+4x+4}$

Exercice type 3.7 : Déterminer toutes les primitives. des fonctions suivantes, dont on donnera un domaine d'étude possible :

X.

a) $f_a(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$ $(x \in ?)$

b) $f_b(x) = \dfrac{1}{2x^2+x-1}$ $(x \in ?)$

c) $f_c(x) = \dfrac{12}{(x-1).(x^2+1)}$ $(x \in ?)$

d) $f_d(x) = \dfrac{1}{x^3+x^2-6x}$ $(x \in ?)$

e) $f_e(x) = \dfrac{x-1}{x^3-7x+6}$ $(x \in ?)$

3.7. Calcul d'intégrale à partir d'une primitive

✓ Définition

Soient une fonction f définie et continue sur $[a\,;b]$ et F une primitive de f

on appelle **intégrale** de a à b de f le nombre I tel que :

$$I = \int_a^b f(x).dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarques : • Le symbole "$\int_a^b$" se lit "somme de a à b"

• Si $F(x) = \int_{t=a}^{x} f(t).dt$ alors $F'(x) = f(x)$ $(a \in IR)$

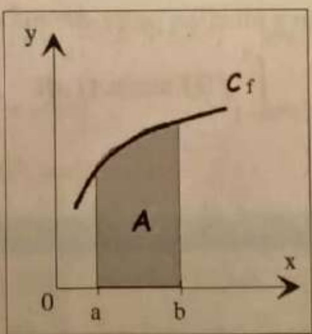
• Par exemple : $\ln(x) = \int_{t=1}^{x} \frac{1}{t}.dt \Leftrightarrow \ln'(x) = \frac{1}{x}$

✓ Interprétation géométrique

Soient une fonction f

C_f sa représentation graphique

F une de ses primitives



Notons **A** l'aire de la partie du plan délimitée par : - la courbe C_f

- l'axe des abscisses
- les droites d'équation $x = a$ et $x = b$

• Si $f(x) \geq 0$ sur $[a\,;b]$ alors $\mathbf{A} = \int_a^b f(x).dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

• Si $f(x) \leq 0$ sur $[a\,;b]$ alors $\mathbf{A} = -\int_a^b f(x).dx = F(a) - F(b)$

✓ Calculs d'intégrales

Exercice type 3.8 :

a) Calculer $\int_0^1 (t^3 + \sin(t))dt$

b) Calculer $\int_1^{\sqrt{2}} x.\ln(x).dx$

c) Calculer $\int_1^2 (2x+1).e^x.dx$

d) Calculer $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$

e) Calculer $\int_{-100}^{-50} \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$

f) Calculer $\int_{-2}^{0} \frac{x}{(x-1)(x-3)(x-4)(x+5)}dx$

g) Calculer $\int_1^4 \frac{3}{2x^3+6x^2+4x}dx$

h) Calculer, pour n entier positif $\int_1^2 t^n.\ln(t)dt$

i) Calculer puis simplifier $\int_8^{12} \frac{dx}{x^3+5x^2-8x-12}$

j) Calculer puis simplifier $\int_2^{10} \frac{\ln(x)-1}{x^2}dx$

k) Calculer $\int_2^{10} \frac{x}{x^4+4}dx$

l) Calculer $\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2-2x+5}dx$ changement de variable : $u = \frac{1}{2}(x-1)$

m) 1/ Soit $A > 0$. Calculer $I(A) = \int_0^A x\, e^{-x}dx$.

2/ Calculer $\lim_{x\to+\infty} I(A)$

n) Soit $a > 1$. Calculer puis simplifier $\int_{1/\ln(a)}^{1} a^x dx$

o) Posons $f(t) = t(1-t)$

1/ Calculer le maximum de f sur $[0\,;1]$

2/ En déduire $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n(1-t)^n dt$

p) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n.\sin(n.t).dt$

Exercice type 3.9 : soient $n \in IN^*$ et f une fonction paire, définie et continue sur $-1 \le t \le 1$, calculer :

$$\int_{-1}^{1} f(t).\sin(n.t).dt$$

✓ Pour aller plus loin : Formule de Taylor avec reste intégrale

Théorème : Soit $f : [a\,;b] \to IR$ une fonction de classe C^{n+1} alors :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.(b-a)^k + \frac{1}{n!}.\int_a^b.(b-t)^n.f^{(n+1)}(a).dt$$

La démonstration se fait par récurrence sur n en intégrant par parties le reste intégral :

$$R_n(f) = \frac{1}{n!}.\int_a^b.(b-t)^n.f^{(n+1)}(a).dt$$

- On appelle **partie régulière d'ordre n** du développement de Taylor de f en a le polynôme $P_n(x)$ défini par :

$$P_n(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.(b-a)^k$$

- Application de la formule de Taylor : développement en série entière

Partie 4 : Développements limités

4.1 Définition

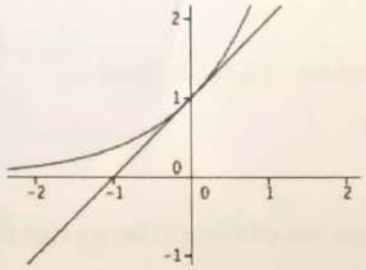
✓ **Un exemple pour comprendre**

La fonction $f(t) = e^t$ est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1 \Leftrightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t - 0} = 1 = f'(0)$

Alors au voisinage de $t = 0$: $f(t) = f(0) + t.f'(0) + \theta(t)$ avec $\lim_{t \to 0} \theta(t) = 0$

Soit dans l'exemple : $e^t = 1 + t + \theta(t)$ avec $\lim_{t \to 0} \theta(t) = 0$

On dit alors que le polynôme $1 + t$ fournit une valeur approchée de e^t au voisinage de 0



On peut chercher une approximation plus précise de la courbe, en réitérant le procédé avec f'' :

$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \theta(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \theta(x) = 0$

et en intégrant : $\int_0^t f(x).dx = \int_0^t f(0).dx + \int_0^t x.f'(0).dx + \int_0^t \theta(x).dx$

$f(t) - f(0) = t.f(0) + \frac{t^2}{2}.f'(0) + \int_0^t \theta(x).dx \Rightarrow f(t) = f(0) + t.f(0) + \frac{t^2}{2}.f'(0) + \theta(t^2)$

✓ **Théorème de Taylor-Young**

Soient f une fonction définie sur un intervalle $I \subset IR$, à valeurs dans IR , $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$

f admet un **développement limité à l'ordre n en a** s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.h^n + o(h^n) \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} o(h^n) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k.h^k + o(h^n) \quad \text{avec } a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

$$\text{ou } f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k.(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

La fonction polynôme : $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k.(x-a)^k$ est appelée la **partie régulière** (ou **principale**) du DL de f en a à l'ordre n, noté **DL$_n$(a)**. Cette fonction polynôme est **unique**.

✓ **Exemple**

Pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \neq 1$, $\frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$

Alors $\frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$

Or $\frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \times \frac{x^n}{1-x}$ et $\lim_{x \to 0} \frac{x^n}{1-x} = 0$ donc $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$

La fonction $f(x)$ admet un développement limité à l'ordre n, au voisinage de 0, noté DL$_n$(0), dont la partie régulière est :

$$P(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

× **Exercice type 4.1 :** Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de $\frac{\pi}{3}$, noté $DL_n\left(\frac{\pi}{3}\right)$, de la fonction : $f(x) = \cos(x)$

4.2 Opérations

✓ Développements limités d'une somme et d'une combinaison linéaire

Soient f et g admettant en a des développements limités à l'ordre n donnés par :

$$f(a+h) = P(h) + o(h^n) \qquad g(a+h) = Q(h) + o(h^n)$$

$\lambda \in \mathrm{IR}$

Alors $f + \lambda.g$ admet un développement limité à l'ordre n en a :

$(f + \lambda.g)(a+h) = P(h) + \lambda.Q(h) + o(h^n)$

Développements limités d'une somme : on additionne les parties régulières

✓ Développements limités d'un produit

Soient f et g admettant en a des développements limités à l'ordre n donnés par :

$$f(a+h) = P(h) + o(h^n) \qquad g(a+h) = Q(h) + o(h^n)$$

Alors $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n en a :

$$(f \times g)(a+h) = R(h) + o(h^n)$$

Où R est le polynôme obtenu en ne gardant dans le produit $P.Q$ que les termes de degré inférieur ou égal à n

✓ Développements limités d'une primitive

Si f une fonction définie et continue sur I admet $DL_n(a)$ donnés par :

$$f(a+h) = a_0 + a_1.h + \ldots + a_n.h^n + o(h^n)$$

Si F est une primitive de f sur I alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en a donné par :

$$F(a+h) = F(a) + a_0.h + \frac{a_1}{2}.h^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}.h^{n+1} + o(h^n)$$

✓ Développements limités d'une fonction composée

Soient f admettant un $DL_n(a)$ donné par : $f(x) = P(x-a) + o((x-a)^n)$

$b = f(a)$

g admettant un $DL_n(b)$ donné par : $g(y) = Q(y-b) + o((y-b)^n)$

Alors $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre n en a :

$$g(f(x)) = R(x-a) + o((x-a)^n)$$

Où R est le polynôme obtenu en ne gardant dans le $Q(P(x-a)-b)$ que les termes en $((x-a)^p$ de degré inférieur ou égal à n

4.3 Développements limités usuels

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o(x^n)$

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$

$\rightarrow = \frac{a!}{(a-N)!}$ (NUMÉRATEUR)

Binôme Généralisé $\leftarrow$

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha.(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\boxed{\alpha.(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}}{n!}x^n + o(x^n)$ pour $\alpha \in IR$ $= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{a!}{(a-N)!} \times \frac{x^N}{N!}$

- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2.n)!}x^{2.n} + o(x^{2.n+1})$

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2.n+1)!}x^{2.n+1} + o(x^{2.n+2})$

- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$

- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2.n+1}x^{2.n+1} + o(x^{2.n+2})$

Exemple de développement limité d'un produit : Calculons le $DL_3(0)$ de $e^x \times \sin(x)$

$$\begin{aligned}
e^x \times \sin(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \times \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\
&= 1 \times \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + x \times \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{x^2}{2} \times \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{x^3}{6} \times \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) \\
&= x - \frac{x^3}{6} + x^2 \text{ (+ terme inutile) } + \frac{x^3}{2} \text{ (+ terme inutile) (+ terme inutile) } + o(x^3) \\
&= x + x^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\
&= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)
\end{aligned}$$

X

Exercice type 4.2 : A l'aide de :

- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2.n)!}x^{2.n} + o(x^{2.n+1})$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2.n+1)!}x^{2.n+1} + o(x^{2.n+2})$
- $\cos(a+b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$

déterminer le $DL_n\left(\frac{\pi}{3}\right)$, de la fonction : $f(x) = \cos(x)$

Exemple de développement limité d'une fonction composée : Calculons le $DL_2(0)$ de $e^{\ln(1+x)}$

Posons : $g(y) = e^y$ et $f(x) = \ln(1+x)$

$g(y) = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ et $f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$e^{\ln(1+x)} = 1 + \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2}{2} + o(x^2) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 - 2.x\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}}{2} + o(x^2) = 1 + x + o(x^2)$$

Exercice type 4.3 : Etablir un développement limité de f en 0 à l'ordre n, noté $DL_n(0)$, pour chacune des fonctions f suivantes :

a) $f_a(x) = \sin(2.x) + \cos(x^2)$ $\quad n = 7$

b) $f_b(x) = e^{3.x}.\sin(2.x)$ $\quad n = 4$

c) $f_c(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ $\quad n = 3$

d) $f_d(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ $\quad n = 3$

e) $f_e(x) = \ln(\cos(x))$ $\quad n = 4$

Pour aller plus loin :

✓ Développements limités d'une division

Soient f et g admettant des $DL_n(a)$ et $g(a) \neq 0$:

Alors $\frac{f}{g}$ possède un $DL_n(a)$ obtenu en :

- faisant la division suivant les puissances croissantes des 2 $DL_n(a)$
- effectuant le $DL_n(a)$ du produit de f par la composée de $y : x \rightarrow \frac{1}{1+x}$ et $g(y) - 1$

Exemple de développement limité d'une division : Calculons le $DL_5(n)$ de $\tan(x)$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ avec $\cos(0) = 1 \neq 0$

1ère méthode : Nous allons faire la division suivant les puissances croissantes de $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ par $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ à l'ordre 5

$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} o(x^5)$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$
$x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} o(x^5)$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2.x^5}{15}$
$\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{30} o(x^5)$	
$\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} o(x^5)$	
$\frac{2.x^5}{15} o(x^5)$	
$\frac{2.x^5}{15} o(x^5)$	
$o(x^5)$	

$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2.x^5}{15} + o(x^5)$

2^e *méthode* : $f_d(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x).\frac{1}{\cos(x)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right).\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)}$

$\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)} = \frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 + o(X^5)$ avec $X = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$

$X^2 = X \times X = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right).\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$

$X^3 = X^2 \times X = \left(\frac{x^4}{4} + o(x^5)\right).\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = o(x^5)$

$X^4 = X^5 = o(X^5) = o(x^5)$

$\frac{1}{\cos(x)} = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 + o(X^5) = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) + \left(\frac{x^4}{4} + o(x^5)\right) + o(x^5)$

$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5.x^4}{24} + o(x^5)$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x).\frac{1}{\cos(x)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right).\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5.x^4}{24} + o(x^5)\right)$

$\tan(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{5.x^5}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2.x^5}{15} + o(x^5)$

***Exercice 4.4* :**

Etablir un développement limité de f en 0 à l'ordre 3 pour chacune des fonctions g suivantes :

a) $g_a(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^x.\sin(x)}$

∇ : PAS D'EXOS TYPE.

b) $g_b(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

1 limite.

L DL.

Intégral de reste

4.4 Application au calcul de limite

Calculons : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2}$

$\frac{\sin(x) - x}{x^2} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2} = -\frac{x}{6} + o(x)$

donc $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} -\frac{x}{6} + o(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = 0$

Exercice type 4.5 : A l'aide de développements limités, calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}$

c) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x.(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2}\right)$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}.\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3.x)}{3.x - \frac{3}{2}.\sin(2.x)}$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x) + \ln(\cos(x))}{x^4}$

g) $\lim_{x \to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$