

<p>Traitement informatique des langages informatiques</p> <h2>Idée du chapitre</h2> <p><b>Exo 2.1†</b> Soit <math>V</math> un vocabulaire fini. Soient <math>A, B \subseteq V^*</math>. Quel est le plus petit ensemble <math>X \subseteq V^*</math> tel que <math>X = A.X \cup B</math> ?</p> <p>⇒ On étudie les conditions gales sur <math>f</math> pour définir langage <math>L</math> comme “plus petit ensemble <math>X</math> qui vérifie <math>X = f(X)</math>”</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▶ généraliser le lemme d'Arden et langages réguliers.</li> <li>▶ une notion de “définition récursive d'ensemble”.</li> <li>▶ sous certaines conditions, <math>L = \limite</math> de suite infinie <math>\emptyset, f(\emptyset), f(f(\emptyset)), \dots, f^i(\emptyset), \dots</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>▶ permet de démontrer des propriétés par récurrence sur <math>i</math>.</li> <li>▶ limite éventuellement calculable.</li> </ul> </li> </ul>	<p>2 Langages algébriques et BNF (définitions)</p> <p>Traitement informatique des langages informatiques</p> <p><b>Ensemble des parties d'un ensemble</b></p> <p><b>Notation</b> on note <math>\mathcal{P}(E)</math> l'ensemble des parties de <math>E</math>. Par définition : <math>A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subseteq E \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in E</math></p> <p><b>Déf.</b> Si <math>E</math> fini, le <i>diagramme de Hasse</i> de <math>\mathcal{P}(E)</math> est le graphe ayant <math>\mathcal{P}(E)</math> pour ensemble de sommets et dont l'ensemble des arêtes (orientées de bas en haut) relient tous les <math>X</math> et <math>Y</math> vérifiant “<math>Y</math> minimal tel que <math>X \subsetneq Y</math>”.</p> <p>Diagramme de <math>\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})</math> :</p> <pre> graph TD     123["{1, 2, 3}"] --- 12["{1, 2}"]     123 --- 13["{1, 3}"]     123 --- 23["{2, 3}"]     12 --- 1["{1}"]     12 --- 2["{2}"]     12 --- 3["{3}"]     13 --- 1["{1}"]     13 --- 3["{3}"]     23 --- 2["{2}"]     23 --- 3["{3}"]     1 --- 0["0"]     2 --- 0     3 --- 0     12 --- 0     13 --- 0     23 --- 0     123 --- 0   </pre> <p><b>Exo 2.2†</b> Dessiner le diagramme de Hasse de <math>\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})</math>.</p>	
<p>Traitement informatique des langages informatiques</p> <h2>Relation d'inclusion entre ensembles</h2> <p><b>Exo 2.3</b> Soit <math>E</math> un ensemble. Soient <math>X, Y \subseteq E</math> quelconques.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▶ Montrer que <math>\subseteq</math> est une relation d'ordre sur <math>\mathcal{P}(E)</math>.</li> <li>▶ Est-elle totale ? (a-t-on <math>X \subseteq Y</math> ou <math>Y \subseteq X</math> ?)</li> <li>▶ Sur un ordre (partiel) <math>\leq</math>, on définit la notion de <i>borne sup</i> : <math>\sup(A, B)</math> est le plus petit <math>X</math> tq <math>A \leq X</math> et <math>B \leq X</math>. À quoi cela correspond sur un ordre total ? Et, sur <math>\subseteq</math> ? (Attention, dans cas général, borne sup pas toujours définie).</li> <li>▶ idem pour <i>borne inf</i>.</li> </ul> <p>NB : ordre avec bornes inf/sup = <i>treillis</i> (anglais : <i>lattice</i>).</p>	<p>1/20</p> <p>Traitement informatique des langages informatiques</p> <p><b>Chapitre 2 Langages algébriques et BNF (définitions)</b></p> <p>2.1 Définitions d'ensembles comme plus petit point fixe</p> <p>2.2 Introduction aux langages algébriques et aux BNF</p>	<p>2 Langages algébriques et BNF (définitions)</p> <p>2/20</p>
<p>3/20</p>	<p>2.1 Définitions d'ensembles comme plus petit point fixe</p>	<p>4/20</p>

## Introduction à la notion de +petit point fixe

**Defs** Soit  $E$  un ensemble et  $f$  application de  $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ .

Un point fixe de  $f$  est un  $X \subseteq E$  tq  $X = f(X)$ .

Un plus petit point fixe est un point fixe  $X$  tq tout point fixe  $Y$  vérifie aussi  $X \subseteq Y$  (i.e. unique point fixe minimal).

**Exo 2.4** Soit  $\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$ . Pour chacune des équations suivantes, y a-t-il point-fixe unique ? quel est le +petit ?

►  $X = \{a, \epsilon\}.X \cup \{b, \epsilon\}$

...

►  $X = \{a\}.X.\{b\} \cup \{\epsilon\}$

...

►  $X = \{a\}.X.\{b, \epsilon\} \cup X \cup \{a\}$

...

**Exo 2.5** M question avec  $X \subseteq \mathbb{N}$  pour  $X = \{u + 2 \mid u \in X\} \cup \{0\}$

...

## Théorème du point fixe de Knaster-Tarski (1928)

**Énoncé** Si  $f$  application croissante de  $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ , alors  $f$  admet un +petit point fixe :  $\bigcap\{X \in \mathcal{P}(E) \mid f(X) \subseteq X\}$ .

### Catalogue de fonctions croissantes

- pour  $A$  fixé, fonctions  $X \mapsto X \cup A$  et  $X \mapsto X \cap A$  croissantes.
- sur  $\mathcal{V}^*$ ,  $X \mapsto X.A$  et  $X \mapsto A.X$  et  $X \mapsto X^*$  croissantes.
- composée de fonctions croissantes est croissante.

Exemple : caractère croissant des membres droits de l'exo 2.4, en décomposant la vérification à l'aide des "briques" ci-dessus.

**Avec ce thm**, +petit point fixe "connu" mais pas "calculable".

**Idée** :  $f$  croissante, donc  $\emptyset \subseteq f(\emptyset) \subseteq f(f(\emptyset)) \subseteq \dots$

La suite des  $(f^i(\emptyset))_{i \in \mathbb{N}}$  est croissante.

Et, s'il existe  $i$  tq  $f^i(\emptyset) = f^{i+1}(\emptyset)$ , alors point fixe atteint !

## Inexistence ou non unicité des points fixes minimaux

Soit  $E$  ensemble avec au moins deux éléments  $a$  et  $b$  distincts.

**Exo 2.6** Quels sont les ensembles  $X \subseteq E$  tq  $X = E \setminus X$  ?

...

**Exo 2.7** Quels sont les ensembles minimaux  $X \subseteq E$  tq

$$X = \begin{cases} \{b\} & \text{si } b \in X \\ \{a\} & \text{sinon} \end{cases}$$

...

### Solution pour éliminer ces contre-exemples

Garantir que "agrandir" le membre gauche de l'équation implique "agrandir" le membre droit de l'équation.

donc, se restreindre aux équations " $X = f(X)$ " avec  $f$  croissante, c-à-d.  $X \subseteq Y \Rightarrow f(X) \subseteq f(Y)$ .

## Vers le calcul des +petits points fixes

**Exo 2.8<sup>†</sup>** Soit  $f : X \mapsto \{a\}.X.\{b\} \cup \{\epsilon\}$  (pour  $X \subseteq \{a, b\}^*$ ).

Que vaut  $f^i(\emptyset)$  pour  $i \in \mathbb{N}$  ? ...

Que vaut  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^i(\emptyset)$  ? ...

**Notation** Pour  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  suite sur  $\mathcal{P}(E)$ ,  $\lim_{i \rightarrow +\infty} A_i \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ .

**Exo 2.9** Soit  $f$  application croissante de  $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ .

Montrer que :

1. pour tout  $i$ ,  $f^i(\emptyset) \subseteq f^{i+1}(\emptyset)$ .  
En déduire,  $\bigcup_{i \in [0, n]} f^i(\emptyset) = f^n(\emptyset)$ .
2. tout point fixe de  $f$  contient  $\lim_{i \rightarrow +\infty} f^i(\emptyset)$ .
3. pour tout  $i$ , si  $f^i(\emptyset)$  pas point-fixe, alors son cardinal  $\geq i$ .
4. si  $E$  est fini de cardinal  $n$ , alors  $\lim_{i \rightarrow +\infty} f^i(\emptyset) = f^n(\emptyset)$  est un point fixe de  $f$  !

## Quand $\lim_{i \rightarrow +\infty} f^i(\emptyset)$ n'est pas un point fixe...

On se place sur  $E \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}^*$ . On pose

$$f(X) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \{a\}.X \cup \{\epsilon\} & \text{si } X \text{ partie finie de } \{a\}^* \\ \{a\}^* \cup \{b\} & \text{sinon} \end{cases}$$

On a les propriétés suivantes (aisément vérifiables) :

- ▶  $f$  croissante
- ▶ pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $f^i(\emptyset) = \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } n < i\}$
- ▶  $\lim_{i \rightarrow +\infty} f^i(\emptyset) = \{a\}^*$
- ▶  $f(\lim_{i \rightarrow +\infty} f^i(\emptyset)) = \{a\}^* \cup \{b\}$   
 $\Rightarrow$  c'est lui le +petit point fixe !

Pb de "discontinuité" en l'infini !

## Application aux langages du TP

Soit  $\mathbb{N}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et soit  $V \stackrel{\text{def}}{=} \{-, \&, |, >, t, f\} \cup \mathbb{N}_1$ .

**Exo 2.11<sup>†</sup>** Définir par plus petit point fixe, l'ensemble des mots de  $V^*$  qui correspondent à la notation *préfixe* d'une formule propositionnelle (cf. syntaxe du TP).

On doit trouver un  $f$  tq le langage recherché est  $\lim_{h \rightarrow +\infty} f^h(\emptyset)$ .

**Exo 2.12** Calculer  $f(\emptyset)$  et  $f^2(\emptyset)$ . Exprimer " $f^h(\emptyset)$ " en fonction de la structure d'AST du TP.

**Exo 2.13<sup>†</sup>** Définir par plus petit point fixe, l'ensemble des mots de  $(V \cup \{(), {}\})^*$  qui correspondent à la notation *infixe* d'une formule propositionnelle (cf. syntaxe du TP).

## Continuité (de Scott) & Point fixe de Kleene

**Def** Soient  $E_1, E_2$  ensembles et  $f$  application de  $\mathcal{P}(E_1) \rightarrow \mathcal{P}(E_2)$ ,  
 $f$  est *continue* (au sens de Scott)  
ssi pour toute suite de  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{P}(E_1)$  tq  $\forall i, A_i \subseteq A_{i+1}$ ,  
on a  $f(\lim_{i \rightarrow +\infty} A_i) = \lim_{i \rightarrow +\infty} f(A_i)$ .

**Exo 2.10** Montrer que :

- ▶ Une fonction continue est croissante.
- ▶ Toutes fonctions croissantes en exemple sur la diapo du thm "Knaster-Tarski" sont en fait continues.
- ▶ La composée de 2 fonctions continues est continue.

**Thm de Kleene (1938)** Si  $f$  application *continue* de  $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ , alors le +petit point fixe est  $\lim_{i \rightarrow +\infty} f^i(\emptyset)$ .

## Une technique centrale pour calculer image d'un pt fixe !

**Lemme de commutation** Pour  $k \in \{1, 2\}$ , soient  $f_k$  applications *continues* de  $\mathcal{P}(E_k) \rightarrow \mathcal{P}(E_k)$ , et  $g$  application de  $\mathcal{P}(E_1) \rightarrow \mathcal{P}(E_2)$  telle que  $g \circ f_1 = f_2 \circ g$ ,  
si  $f_2$  a un *unique* point-fixe **ou** si  $g$  *continue* et  $g(\emptyset) = \emptyset$ , alors

$$g(\lim_{i \rightarrow +\infty} f_1^i(\emptyset)) = \lim_{i \rightarrow +\infty} f_2^i(\emptyset)$$

Soient  $A, B \subseteq V^*$  et  $E_1 \stackrel{\text{def}}{=} V^*$

**Exo 2.14<sup>†</sup>** Pour  $f_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} A.X.B \cup B^*$  et  $g(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\epsilon\} \setminus X$ .  
montrer  $g(\lim_{i \rightarrow +\infty} f_1^i(\emptyset)) = \emptyset$ .

**Exo 2.15<sup>†</sup>** Soient  $f_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} A.X \cup \{\epsilon\}$  et  $f_2(Y) \stackrel{\text{def}}{=} A.Y \cup B$   
Par définition  $A^* = \lim_{i \rightarrow +\infty} f_1^i(\emptyset)$ .

En appliquant le lemme de commutation, redémontrer  
 $A^*.B = \lim_{i \rightarrow +\infty} f_2^i(\emptyset)$  (**lemme d'Arden**).

Traitement informatique des langages informatiques	2 Langages algébriques et BNF (définitions)	Traitement informatique des langages informatiques	2 Langages algébriques et BNF (définitions)
<b>Applications typiques du lemme de commutation (cf. chap. 5)</b>			<b>Généralisation/application aux systèmes d'équations</b>
<p>Pour <math>f_1</math> et <math>g</math> fixés avec <math>E_1</math> infini et <math>E_2</math> de cardinal fini <math>n</math>.      Pour calculer <math>g(\lim_{i \rightarrow +\infty} f_1^i(\emptyset))</math> <b>sans calculer</b> <math>\lim_{i \rightarrow +\infty} f_1^i(\emptyset)</math></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. On trouve <math>f_2</math> en exprimant <math>g(f_1(X))</math> à partir de <math>g(X)</math> sous la forme <math>g(f_1(X)) = f_2(g(X))</math>.</li> <li>2. On se ramène au calcul de <math>\lim_{i \rightarrow +\infty} f_2^i(\emptyset) = f_2^n(\emptyset)</math>.</li> </ol> <p><b>NB</b> un tel <math>f_2</math> n'existe pas forcément !      Auquel cas, méthode inapplicable.</p>			<p>Idée : système d'équations codée comme une unique équation.</p> <p>Soit un <i>système d'équations</i> donné par fonction  <math>f : \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n) \rightarrow \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n)</math></p> <p>Comme <math>\mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n) \simeq \mathcal{P}(\{1\} \times E_1 \cup \dots \cup \{n\} \times E_n)</math>      on peut appliquer la théorie des +-petits points fixes à <math>f</math></p> <p>Pour <math>(X_1, \dots, X_n)</math> et <math>(Y_1, \dots, Y_n)</math> de <math>\mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n)</math>      on a "<math>(X_1, \dots, X_n) \subseteq (Y_1, \dots, Y_n)</math>" ssi pr tt <math>i</math>, <math>X_i \subseteq Y_i</math>      et "<math>(X_1, \dots, X_n) \cup (Y_1, \dots, Y_n)</math>" = <math>(X_1 \cup Y_1, \dots, X_n \cup Y_n)</math></p> <p><b>Exo 2.16<sup>†</sup></b> Soit le système suivant sur <math>\{a, b\}^* \times \{a, b\}^*</math>,  <math>X_1 = \{b\} \cup X_2. X_2 = \{a\}. X_1</math>      Calculer <math>f^4(\emptyset, \emptyset)</math>.</p>
2.1 Définitions d'ensembles comme plus petit point fixe	13/20	2.1 Définitions d'ensembles comme plus petit point fixe	14/20
Traitement informatique des langages informatiques	2 Langages algébriques et BNF (définitions)	Traitement informatique des langages informatiques	2 Langages algébriques et BNF (définitions)
<b>Chapitre 2 Langages algébriques et BNF (définitions)</b>		<b>Système d'équations algébriques sur <math>V^*</math></b>	
2.1 Définitions d'ensembles comme plus petit point fixe		<b>Def</b> Soit $V$ ensemble dénombrable. Un <i>système d'équations algébriques sur <math>V^*</math></i> est un ensemble d'équations (avec $(X_k)_{k \in [1, n]}$ suite de variables 2 à 2 distinctes)	
2.2 Introduction aux langages algébriques et aux BNF		$\begin{aligned} X_1 &= f_1(X_1, \dots, X_n) \\ &\dots \\ X_n &= f_n(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$ <p>où chaque <math>f_k(X_1, \dots, X_n)</math> est une <i>expression</i> constituée uniquement à partir des variables <math>X_k</math> et des "opérateurs" ensemblistes :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▶ <math>\{\epsilon\}</math></li> <li>▶ <math>A</math>, pour tout <math>A \subseteq V</math> fixé (indépendant des <math>X_k</math>)</li> <li>▶ union <math>\cup</math></li> <li>▶ concénation .</li> </ul> <p><b>Thm</b> Soit  <math>f \stackrel{\text{def}}{=} (X_1, \dots, X_n) \mapsto (f_1(X_1, \dots, X_n), \dots, f_n(X_1, \dots, X_n))</math>.      On a <math>f</math> continue (avec <math>\lim_{i \rightarrow +\infty} f^i(\emptyset)</math> comme +petit point fixe).</p>	
2.2 Introduction aux langages algébriques et aux BNF	15/20	2.2 Introduction aux langages algébriques et aux BNF	16/20

Traitement informatique des langages informatiques	2 Langages algébriques et BNF (définitions)	Traitement informatique des langages informatiques	2 Langages algébriques et BNF (définitions)
<h2>Langages algébriques</h2>		<h2>Les BNF “Backus-Naur Form” (années 1960)</h2>	
<p><b>Définition</b> Un langage <math>L_1</math> est <i>algébrique</i> sur <math>V^*</math>ssi il existe <math>(L_k)_{k \in 2..n}</math> tel que <math>(L_1, \dots, L_n)</math> est +petit point-fixe d'un système d'équations algébriques sur <math>V^*</math>.</p>		<p>BNF=notation pour définir des langages algébriques (inventée pour syntaxe du 1er langage de prog structurée ALGOL).</p>	
		Par ex, sur l'alphabet $V \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, -, (), ()\}$ , la BNF	
		$\begin{array}{l} E ::= L \mid E - E \mid ( E ) \\ L ::= 0 \mid 1 \mid L L \end{array}$	
		définit $E$ comme langage algébrique associé au système	
		$\begin{array}{l} E = L \cup E. \{-\}.E \cup \{(\cdot).E.\cdot\} \\ L = \{0\} \cup \{1\} \cup L.L \end{array}$	
		<b>Terminologie</b>	
		<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ Les éléments de <math>V</math> s'appellent aussi “<i>symboles terminaux</i>”.</li> <li>▶ Les “variables” s'appellent aussi “<i>symboles non-terminaux</i>”.</li> <li>▶ Membre gauche de la 1ère équation s'appelle aussi “<i>axiome</i>”.</li> <li>▶ Membre droit d'une équation = union “<i>d'alternatives</i>”.</li> </ul>	
2.2 Introduction aux langages algébriques et aux BNF Traitement informatique des langages informatiques	17/20 2 Langages algébriques et BNF (définitions)	2.2 Introduction aux langages algébriques et aux BNF Traitement informatique des langages informatiques	18/20 2 Langages algébriques et BNF (définitions)
<h2>Mini-exemples de langages algébriques non-réguliers</h2>		<h2>Autres exos sur les BNF</h2>	
<p><b>Exo 2.18†</b> Pour <math>V \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, c\}</math>, donner une BNF pour chacun des langages suivants.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}</math></li> <li>2. <math>\{a^n b^p \mid n \geq p \geq 0\}</math></li> <li>3. <math>\{a^n b^p \mid n \neq p\}</math></li> <li>4. <math>\{a^n b^p \mid 2p \geq n \geq p\}</math></li> <li>5. <math>\{a^n b^p c^q \mid n + p = q\}</math></li> <li>6. <math>\{w \in \{a, b\}^* \mid w = \overline{w}\}</math> où <math>\overline{w}</math> est le renversé de <math>w</math>. Exemple de renversé : <math>\overline{a \ a \ b \ a} = a \ b \ a \ a</math>. NB : un mot égal à son renversé s'appelle un <i>palindrome</i>. Exemples de palindromes : “<math>a \ b \ a</math>” et “<math>a \ b \ b \ a</math>”.</li> </ol>		<p><b>Exo 2.19†</b> Donner une BNF sur <math>\{0, 1\}</math> qui définit le langage des mots ayant un nombre pair de 0 et un nombre impair de 1.</p>	
		<p><b>Exo 2.20†</b> Montrer que tout langage régulier peut être défini par une BNF. Réciproquement, à quelles conditions (suffisantes), une BNF définit-elle un langage régulier ?</p>	
		<p><b>Exo 2.21</b> Définir la syntaxe des BNF comme un langage algébrique sur un alphabet formés de deux sous-ensembles disjoints : <math>V</math> (pour les symboles) et <math>\{\ ::=,  , \backslash n\}</math>. On autorisera l'alternative vide pour représenter <math>\epsilon</math>. Par convention, les non-terminaux sont les symboles qui apparaissent en tant que membre gauche d'une équation.</p>	
2.2 Introduction aux langages algébriques et aux BNF	19/20	2.2 Introduction aux langages algébriques et aux BNF	20/20