3 Multiples et diviseur

3.1 Multiples

Definition 3.1 *Soit a un nombre entier. On appelle multiple de a tout nombre qui s'écrit $a \times b$ où b est un nombre entier.*

Par exemple, $30 = 3 \times 10$ est un multiple de 3.

3.2 diviseurs

Definition 3.2 *Soit a un nombre entier. Le nombre entier b est un diviseur de a s'il n'y a pas de reste dans la division (entière) de a par b.*

On pourra présenter les diviseurs par couple dans une liste ordonnée croissante :

Diviseurs de 84

1	2	3	4	6	7
84	42	28	21	14	12

Proposition 3.3 *Nous avons les propriétés suivantes.*

- *Si a divise b, alors a divise tout multiple de b.* ($b = ae$, a divise $bd = acd$)
- *Si a divise b et b divise c alors a divise c.* ($b = ad$, $c = be$, donc $c = ade$ et a divise c)
- *Si a et b sont divisibles par c, alors c divise*

$$au + bv, \quad \forall u, v \in \mathbb{Z}.$$

($a = lc$; $b = kc \Rightarrow au + bv = lcu + kcv$
$= c(lu + kv)$
donc c divise $au + bv$)

En particulier, c divise $a + b$ et $a - b$.

Seuls les nombres pairs sont divisible par 2

Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3

Note. Souvenirs de sixième...

Un nombre est divisible par 4 si et si ses deux derniers chiffres forment un nombre divisible par 4

857716 est divisible par 4 car 16 l'est.

(toute centaine est divisible par 4).

Un nombre est divisible par 5 ssi il se termine par 5 ou 0.

Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

$$\begin{array}{r} 859 \\ \times \quad 11 \\ \hline 859 \\ + 8590 \\ \hline \ldots \end{array}$$

572 est divisible par 11

52

52

4 Nombre premiers

4.1 Définition

Definition 4.1 *Un nombre premier est un nombre qui n'a pour diviseur que* 1 *et lui-même.*

Par convention, 1 n'est pas premier.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ...

Infinité de nombres premiers.

4.2 Caractérisation

Theorem 4.2 *Soit n un entier naturel. Si n n'est pas premier, il admet au moins un diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.*

Il s'agit d'un très bon critère pour savoir si un nombre est premier. On peut chercher si 347 est un nombre premier. On cherche si les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{347} = 18,6$ divisent 347. Il s'agit

Si 347 n'est pas premier, il admet un diviseur premier inférieur à 18,6 :

critères de divisibilité

Listons les candidats : ~~2~~ / ~~3~~ / ~~5~~ / 7 / ~~11~~ / 13 / 17

$\hookrightarrow 347 \div 7 \simeq 49,6$

$\hookrightarrow 347 \div 13 \simeq 26,7$

$\hookrightarrow 347 \div 17 \simeq 20,4$

347 est premier.

4.3 Décomposition en nombres premiers

Proposition 4.3 *Tout nombre entier peut se décomposer en produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique.*

$$
\begin{aligned}
228 &= 2 \times 114 \\
&= 2^2 \times 57 \\
&= 2^2 \times 3 \times 19
\end{aligned}
$$

5 PGCD et PPCM

5.1 Définition

Definition 5.1 *On appelle PPCM le plus petit multiple commun de deux nombres.*

Multiples

- de 33 : 33 66 99 132 165 198 231 264
- de 21 : 21 42 63 84 105 126 147 168 189 210 231 252 273 294 315 336

$PPCM(33, 21) = 231$

$PPCM(a, b) \leq ab$.

Definition 5.2 *On appelle PGCD le plus grand diviseur de deux nombres.*

Diviseurs de 84 :

84	42	28	21	14	12
1	2	3	4	6	7

Diviseurs de 12 :

12	6	4
1	2	3

$PGCD(12, 84) = 12$

5.2 algorithme d'Euclide

On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD. Cherchons, par exemple, le PGCD de 495 et 210.

$$495 = 210 \times 2 + 75$$

$$210 = 75 \times 2 + 60$$

$$75 = 60 \times 1 + 15$$

$$60 = 15 \times 4 + 0$$

Le PGCD est le dernier reste non nul.

$$PGCD(495, 210) = 15$$

Ainsi $PGCD(495, 210) = 15$. Cet algorithme se justifie par la propriété suivante :

Proposition 5.3 *Soit a et b des entiers naturels, $a > b$. En posant la division euclidienne $a = bq+r$, on a $PGCD(a, b) = PCGD(b, r)$.*

5.3 Nombres premiers entre eux

Definition 5.4 *Deux nombres entiers a et b sont dits premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1.*

Il vient alors immédiatement que si a et b sont premiers entre eux, alors $PGCD(a, b) = 1$.

5.4 PGCD et décomposition en nombres premiers

Soient a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, et leur décomposition en facteurs premiers.

- S'ils n'ont aucun facteur commun, leur PGCD vaut 1, ils sont premiers entre eux.
- Leur PGCD est le produit des facteurs communs aux deux décompositions, chaque facteur étant affecté avec la plus petite puissance des deux décomposition.

Par exemple, $a = 4950 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$ et $b = 4875 = 3 \times 5^3 \times 13$ on a alors:

PGCD(4950, 4875) :

Décomposer les 2 nombres en facteurs premiers.

$4950 = 2 \times 2475$

$= 2 \times 3^2 \times 275$

$= 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$

$4875 = 3 \times 1625$

$= 3 \times 5^3 \times 13$

On garde le commun aux deux décomposition

$\Rightarrow PGCD(4950, 4875)$

$= 3 \times 5^2$

$= 75.$

5.5 PPCM et décomposition en nombres premiers

Soient a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, et leur décomposition en facteurs premiers.

- S'ils n'ont que des facteurs communs, ils sont égaux, leur PPCM est eux-même.
- Leur PPCM est le produit de tous les nombres premiers qui apparaissent dans au moins une des dcompositions en facteurs premiers de ces deux entiers, chacun affecté du plus grand exposant qui apparait dans celles-ci.

Par exemple, $a = 4950 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$ et $b = 4875 = 3 \times 5^3 \times 13$. On a alors

$$PPCM(4950; 4875) = 2 \times 3^2 \times 5^3 \times 11 \times 13 = 321\,750$$

Tout ce qui apparait
dans au moins décomposition

$PGCD(a,b) \times PPCM(a,b) = ab.$

5.6 Propriétés sur le PGCD et le PPCM

Des deux sections précédentes, on déduit assez rapidement les propriétés suivantes.

Proposition 5.5 *Soit a, b des nombres entiers supérieurs à 2.*

- *Les diviseurs communs à deux nombres sont les diviseurs de leur PGCD.*
- $PGCD(ca, cb) = cPGCD(a, b)$.
- *Si c est un diviseur commun de a et b,*

$$PGCD(a/c, b/c) = PGCD(a, b)/c.$$

- $PGCD(a, b)|PGCD(ac, bd)$.
- *Si c est un diviseur commun de a et b, $c = PGCD(a, b)$ si et seulement si a/c et b/c sont premiers entre eux.*

Proposition 5.6 *Soit a, b des nombres entiers supérieurs à 2 premiers entre eux.*

- *Si a divise bc, alors a divise c.*
- *On a $PGCD(a, bc) = PGCD(a, c)$.*
- *Si de plus a et c sont premiers entre eux, alors $PGCD(a, bc) = 1$.*

Proposition 5.7 *Si p est un nombre premiers et s'il divise un produit, alors il divise au moins un des termes.*

Theorem 5.8

- *Soient a et b deux entiers relatifs. Si d est le PGCD de a et b, alors il existe deux entiers relatifs x et y tels que*
$$ax + by = d.$$

- *Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs x et y tels que*
$$ax + by = 1.$$

5.8 Algorithme d'Euclide généralisé

On peut déterminer les coefficients dans le théorême 5.8 en "remontant" l'algorithme d'Euclide.

En remontant cet algorithme, on a

Algorithme d'Euclide

$495 = 210 \times 2 + 75$

$210 = 75 \times 2 + 60$

$75 = 60 \times 1 + 15$

$60 = 15 \times 4 + 0$

$PGCD(495, 210) = 15$

$$\boxed{3 \times 495 - 7 \times 210 = 15}$$

$$3 \times (495 - 2 \times 210) - 210 = 15$$

$$3 \times 75 - 210 = 15$$

$$75 - \underbrace{(210 - 2 \times 75)}_{60} = 15$$

$$75 - 60 = 15$$

on cherche $495x + 210y = 15$.

On a $3 \times 495 - 7 \times 210 = 15$