Recherche Opérationnelle Alternance 1A
Programmation Linéaire
Justification de l'algorithme du simplexe

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Rappel de l'algorithme du simplexe Etape 2

Etape 2 du simplexe

1. Soit $s \in \overline{J}$ pour lequel $c_s = \max\{c_i : i \in \overline{J}\}$.
2. Si $c_s \leq 0$ `arrêter`. (la solution de base est optimale.)
3. Si $a^s \leq 0$ `arrêter`. ($z(\max) = \infty$.)
4. Sinon soit r tel que $\frac{b_r}{A^s_r} = \min\{\frac{b_i}{A^s_i} : 1 \leq i \leq m$ tel que $A^s_i > 0\}$.
5. Pivoter à A^s_r et `recommencer` avec la nouvelle base réalisable $J' = J + s - J_r$.

Pivot

- $(a'_r, b'_r) = (a_r, b_r)/A^s_r$,
- $(a'_i, b'_i) = (a_i, b_i) - (a'_r, b'_r)A^s_i, \quad$ pour tout $i \neq r$,
- $(c'^T, -z'_0) = (c^T, -z_0) - (a'_r, b'_r)c_s$.

Théorème

Si $c_s \leq 0$ alors J est une base optimale.

Démonstration

1. $z(\max) = z_0 + 0 \cdot x_J + c_{\overline{J}}^T \cdot x_{\overline{J}} \leq z_0$, puisque $c_{\overline{J}}^T \leq 0$ et $x_{\overline{J}} \geq 0$.
2. Pour $\begin{pmatrix} \overline{x}_J \\ \overline{x}_{\overline{J}} \end{pmatrix}$, la solution de base associée à J, $z = z_0$,
3. elle est donc optimale.

Justification de l'algorithme du simplexe Etape 2

Théorème

Si $c_s > 0$ et $a^s \leq 0$ alors $z(\max) = \infty$.

Démonstration

1. On augmente x_s en gardant les autres variables hors base fixées à 0, soient donc $\overline{x}'_s = t > 0$, $\overline{x}'_{\overline{J}\setminus\{s\}} = 0$.
2. $\begin{pmatrix} \overline{x}'_J \\ \overline{x}'_s \\ \overline{x}'_{\overline{J}\setminus\{s\}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a^s \cdot t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution réalisable pour tout $t > 0$
   - $A \cdot \overline{x}' = I \cdot \overline{x}'_J + a^s \cdot \overline{x}'_s + A^{\overline{J}\setminus\{s\}} \cdot \overline{x}'_{\overline{J}\setminus\{s\}} = (b - a^s \cdot t) + a^s \cdot t + 0 = b$,
   - $\overline{x}'_J = b - a^s \cdot t \geq b \geq 0$, puisque $a^s \leq 0, t > 0$ et $b \geq 0$.
3. $z(\max) = \infty$: $z' - z_0 = c_J^T \cdot \overline{x}'_J + c_s \cdot \overline{x}'_s + c^T_{\overline{J}\setminus\{s\}} \cdot \overline{x}'_{\overline{J}\setminus\{s\}} = 0 \cdot \overline{x}'_J + c_s \cdot t + c^T_{\overline{J}\setminus\{s\}} \cdot 0 = c_s \cdot t$ tend vers ∞ si t tend vers ∞.

Justification de l'algorithme du simplexe Etape 2

Théorème

Nouvelle base J' est réalisable.

Démonstration

$\overline{x}_{J'} = b'$.

1. $b'_r = \frac{b_r}{A_r^s} \geq 0,$ puisque $b_r \geq 0$ et $A_r^s > 0,$
2. $b'_i = b_i - b'_r \cdot A_i^s$ si $i \neq r.$
   1. Si $A_i^s \leq 0$ alors $b'_i = b_i - b'_r \cdot A_i^s \geq b_i \geq 0$, car $b'_r \geq 0, A_i^s \leq 0$ et $b_i \geq 0.$
   2. Si $A_i^s > 0$ alors $b_i - b'_r \cdot A_i^s \geq 0$ si et seulement si $\frac{b_i}{A_i^s} \geq b'_r,$ mais $\frac{b_i}{A_i^s} \geq \min\{\frac{b_j}{A_j^s} : 1 \leq j \leq m \text{ tel que } A_j^s > 0\} = \frac{b_r}{A_r^s} = b'_r.$

Justification de l'algorithme du simplexe Etape 2

Théorème

L'algorithme s'arrête.

Démonstration

1. Cas non-dégénéré : $b > 0$ toujours.
   1. La fonction objectif augmente toujours : $z_0' = z_0 + b_{r'} \cdot c_s > z_0$, puisque $b_{r'}, c_s > 0$.
   2. les bases sont donc toutes différentes pendant l'exécution,
   3. et puisque le nombre de bases est fini, $\leq C_n^m$,
   4. l'algorithme s'arrête.
2. Cas dégénéré : $b_i = 0$ peut arriver.
   1. la même base peut revenir, le simplexe peut cycler.
   2. Pour l'éviter, on utilise la Règle de Brandt (sans démonstration) :
      Si on a le choix pour s ou r, il faut choisir le plus petit indice possible.