

# Conception de circuits numériques et architecture des ordinateurs

Équipe pédagogique :

Marie Badaroux (TD), Julie Dumas (TD+TP), Florence Maraninchi (TD+TP),  
Olivier Muller (TD+TP), **Frédéric Pétrot** (CM+TD), Pierre Ravenel (TD+TP)  
Eduardo Tomasi Ribeiro (TP), Lionel Rieg (TD+TP),  
Sébastien Viardot (TD+TP Apprentis)



Année universitaire 2024-2025

- C1 Codage des nombres en base 2, logique booléenne, portes logiques, circuits combinatoires
- C2 Circuits séquentiels
- C3 Construction de circuits complexes
- C4 Micro-architecture et fonctionnement des mémoires
- C5 Machines à état
- C6 Synthèse de circuits PC/PO
- C7 Optimisation de circuits PC/PO
- C8 Interprétation d'instructions - 1
- C9 Interprétation d'instructions - 2
- C10 Interprétation d'instructions - 3
- C11 Introduction aux caches

## Intérêt

Pour des raisons technologiques, les ordinateurs utilisent la présence ou de l'absence de courant électrique pour « travailler ».

Les données sont donc codées en base 2, et l'ensemble des opérations que l'on peut effectuer se fait par conséquence en base 2.

Les programmes informatiques se trouvent donc, par un processus complexe, ramenés à une suite d'opérations sur des données binaires.

## Plan détaillé du cours d'aujourd'hui

**1** Interprétation des vecteurs de bits

**2** Notations binaire usuelles

**3** Rappels sur les booléens

**4** Représentations des fonctions

## Plan

1 Interprétation des vecteurs de bits

2 Notations binaire usuelles

3 Rappels sur les booléens

4 Représentations des fonctions

## Représentation des données

Ordinateur  $\equiv$  circuit électronique numérique

Données manipulées  $\equiv$  informations électriques discrètes

- types de données variés
  - nombres
  - caractères affichables
  - agrégats
- taille des données variée
  - chaînes de caractères
  - entiers bornés
  - ...

Tout est affaire d'interprétation !

## Vecteur de bits

Élément de base : le **bit**  $\in \{0, 1\}$ , (*binary digit*)

Exemple : 0100110111100010001010001111111

Nombre de bits fini

$l$  est le nombre de bits, en pratique  $l = 8 \times n$

$n$  est le nombre d'octets (*bytes*), en pratique  $n = 2^p$

En programmation informatique (machine « 32 ou 64 bits ») :

- $n = 1$  est appelé un octet ou *byte*
- $n = 2$  est appelé un *short*
- $n = 4$  est appelé un entier ou *int*, ou un *float* s'il représente un nombre pseudo-réel
- $n = 8$  est appelé un *long long*, ou un *double* s'il représente un nombre pseudo-réel

## Entiers naturels (*Unsigned integers*)

Soit un vecteur  $x$  de  $n$  bits :

$(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0)$  avec  $x_i \in \{0, 1\}$

Valeur de  $x$  interprété comme entier naturel :

$$x = \sum_{i=n-1}^0 x_i \times 2^i$$

Bit le plus à gauche (de poids  $2^{n-1}$ ) : *most significant bit (MSB)*

Bit le plus à droite (de poids 1) : *least significant bit (LSB)*

Intervalle des  $2^n$  valeurs représentables :

$$0 \leq x \leq 2^n - 1$$

Exemples

## Conversion binaire/décimale des entiers naturels

base 2 → base 10 :

application de la formule

$$x = \sum_{i=n-1}^0 x_i \times 2^i$$

base 10 → base 2 :

$$x = v_0 \times 2 + x_0$$

$$v_0 = v_1 \times 2 + x_1$$

$$v_i = v_{i+1} \times 2 + x_{i+1}$$

Arrêt lorsque  $v_j < 2$  et  $x = (v_j, x_j, \dots, x_1, x_0)$

Exemples

## Entiers relatifs (*Signed integers*)

Principalement 2 possibilités pour représenter  $-x$  :

- signe et grandeur

$$x_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0, \\ 1 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad (x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_1, x_0) = |x|$$

Simple à comprendre

Mais : deux « 0 » et implantation arithmétique signée  $\neq$  non-signée

- complément à 2 (ou plus précisément à  $2^{n-1}$ )

Moins simple à comprendre

Mais : un seul « 0 » et numération et implantation arithmétique inchangée

## Entiers relatifs (*Signed integers*)

Notation dite *en complément à 2*

Utilisée dans 99,9% des circuits intégrés

Soit un vecteur  $x$  de  $n$  bits :

$(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0)$  avec  $x_i \in \{0, 1\}$

Valeur de  $x$  interprété comme entier relatif :

$$x = -x_{n-1} \times 2^{n-1} + \sum_{i=n-2}^0 x_i \times 2^i$$

### Exemples

## Entiers relatifs

Représentation de  $-x$  à partir de la représentation de  $x = (x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0)$  ?

Définition du *complément* de  $a \in \{0, 1\}$  :  $\bar{a} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0, \\ 0 & \text{si } a = 1. \end{cases}$

$$-x = (\bar{x}_{n-1}, \bar{x}_{n-2}, \dots, \bar{x}_1, \bar{x}_0) + 1$$

$x_{n-1}$  est appelé le bit de signe (*sign bit*)

Intervalle des  $2^n$  valeurs représentables :

$$-2^{n-1} \leq x \leq 2^{n-1} - 1$$



C'est la représentation **unique** utilisée dans ce cours !

## Extension de signe

Affectation d'un vecteur de taille  $n$  dans un vecteur de taille  $m$  ?

- $n > m$  troncature, perte irrémédiable des poids forts
- $n < m$  exige une *extension de signe*

Soit  $(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0)$  à écrire comme

$(y_{m-1}, y_{m-2}, \dots, y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1, y_0)$

La valeur est conservée avec :

$$\begin{aligned} y_{m-1} &= x_{n-1}, y_{m-2} = x_{n-1}, \dots, y_n = x_{n-1}, y_{n-1} = x_{n-1}, \\ y_{n-2} &= x_{n-2}, \dots, y_1 = x_1, y_0 = x_0 \end{aligned}$$

Preuve, non totalement triviale, basée sur le lemme

$$\sum_{i=l-1}^0 2^i = 2^l - 1$$

démontrable par récurrence

## Nombres à virgule fixe

Partie entière sur  $n$  bits, partie fractionnaire sur  $m$  bits :

$x_{n-1}x_{n-2}\dots x_1x_0, y_1y_2\dots y_{m-1}y_m$

Interprété comme :

$$x = \sum_{i=n-1}^0 x_i \times 2^i + \sum_{i=1}^m y_i \times 2^{-i}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} 110,011 &= 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} \\ &= 4 + 2 + 0,25 + 0,125 = 6,375 \end{aligned}$$



Nombreux nombres non représentables !

- Virgule fixe mais aussi « flottante »
- Norme IEEE 754 définit la représentation des flottants et le comportement des opérateurs associés

## Autres interprétations

- Champs de bits, indicateurs, booléens, ...
- Caractères/symboles : encodage ASCII ou ISO ou UTF-8.  
Nécessaire pour afficher des messages textuels
- Flux de données encodées : musique (mp3, ogg, ...), vidéo (mpeg2, h264, ...)
- Flux de données archivées/compressées : tar, bzip, ...
- Données chiffrées : aes, rsa, ...
- Instructions : forme finale des programmes
- ...

Toute interprétation nécessite la connaissance du « type » des vecteurs de bits !

# Plan

1 Interprétation des vecteurs de bits

2 Notations binaire usuelles

3 Rappels sur les booléens

4 Représentations des fonctions

## Hexadécimal et octal

Lire du binaire est une misère :

I'hexadécimal (base 16) est la règle  
l'octal (base 8) est parfois utilisé

binnaire	hexa	octal	binnaire	hexa	octal
0000	0	0	1000	8	10
0001	1	1	1001	9	11
0010	2	2	1010	A	12
0011	3	3	1011	B	13
0100	4	4	1100	C	14
0101	5	5	1101	D	15
0110	6	6	1110	E	16
0111	7	7	1111	F	17

Préfixes de quelques langages	notation du langage C :	0x, nombre hexadécimal
		0, nombre octal
	notation du langage VHDL :	0b, nombre binaire †
	notation du langage Python :	X"", nombre hexadécimal
		0"", nombre octal
		B"", nombre binaire
		0x, nombre hexadécimal
		0o, nombre octal
		0b, nombre binaire

†. Extension GCC

## Kilo, Mega, Giga - octets



En matériel,  $1K \neq 10^3 = 1000$  mais  $1K = 2^{10} = 1024$  !

Ainsi :

Symbol	valeur	hexa	décimale
$1K$	$2^{10}$	0x400	1024
$1M$	$2^{20}$	0x100000	1048576
$1G$	$2^{30}$	0x40000000	1073741824

Nouvelle unité SI : Kibibyte (KiB) introduite en 2000 ‡



De même, les log sont des  $\log_2$

Par extension, c'est le cas très souvent en informatique !

‡. Les dénominations KiB, MiB et GiB sont peu usitées en pratique.

## Plan

1 Interprétation des vecteurs de bits

2 Notations binaire usuelles

3 Rappels sur les booléens

4 Représentations des fonctions

## Rappels sur les booléens

$\mathbb{B} = \{0, 1\}$  : ensemble des booléens

$x \in \mathbb{B}$  : variable booléenne

$\mathbb{B}$  doté d'un opérateur unaire et de 2 opérateurs binaires

Notations utilisées pour le cours :

opérateur	notation « info »	notation « math »
<b>non</b> , unaire, complément	not $x = \bar{x}$	$\neg x$
<b>et</b> , binaire, conjonction	$x$ and $y = x \cdot y$	$x \wedge y$
<b>ou</b> , binaire, disjonction	$x$ or $y = x + y$	$x \vee y$

Interprétation des valeurs :

0 = false et 1 = true

Interprétation des fonctions :



en français **ou** est souvent **ou bien**

## Quelques propriétés

associativité

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad / \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

commutativité

$$a + b = b + a \quad / \quad a \cdot b = b \cdot a$$

distributivité

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \quad / \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

absorption

$$a + (a \cdot b) = a \quad / \quad a \cdot (a + b) = a$$

complémentation

$$a + \bar{a} = 1 \quad / \quad a \cdot \bar{a} = 0$$

## Quelques propriétés

idempotence

$$a + a = a \quad / \quad a \cdot a = a$$

éléments neutres

$$a + 0 = a \quad / \quad a \cdot 1 = a$$

$$a + 1 = 1 \quad / \quad a \cdot 0 = 0$$

0 et 1 sont complémentaires

$$\bar{0} = 1 \quad / \quad \bar{1} = 0$$

involution

$$\bar{\bar{a}} = a$$

## Quelques propriétés, suite

Autres propriétés :

Lois de De Morgan

$$\begin{array}{c} a + b = \bar{a} \cdot \bar{b} \quad / \quad a \cdot b = \bar{a} + \bar{b} \\ \sum_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n \bar{a}_i \quad / \quad \prod_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \end{array}$$

Principe de dualité : *une loi valide peut être transformée en son dual en échangeant 0 avec 1 et + avec ·*

## Plan

1 Interprétation des vecteurs de bits

2 Notations binaire usuelles

3 Rappels sur les booléens

4 Représentations des fonctions

## Tables de vérité

Représentation sous forme de *tables de vérité*

Énumération de toutes les combinaisons possibles des entrées

$n$  variables impliquent  $2^n$  valeurs possibles

Quelques fonctions de deux variables remarquables

$x$	$y$	$\bar{x}$	$x \cdot y$	$x + y$	$x \oplus y$	$x \bar{\cdot} y$	$x \bar{+} y$	$x \bar{\oplus} y$
		$\text{not } x$	$x \text{and } y$	$x \text{or } y$	$x \text{xor } y$	$x \text{nand } y$	$x \text{nor } y$	$x \text{xnor } y$
0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	1

Note : il y a  $2^{2^n}$  fonctions booléennes de  $n$  variables

## Formes canoniques d'équations booléennes à partir d'une table de vérité

Somme de produits (forme normale disjonctive) :

- 1 en sortie obtenu par produit des littéraux
- fonction obtenue par somme de ces produits

Produit de sommes (forme normale conjonctive) :

- 0 en sortie obtenu par somme des littéraux complémentés
- fonction obtenue par produit de ces sommes

x	y	f	sop	pos
0	0	0		$x + y$
0	1	1	$\bar{x} \cdot y$	
1	0	0		$\bar{x} + y$
1	1	0		$\bar{x} + \bar{y}$

d'où  $f = \bar{x} \cdot y = (x + y)(\bar{x} + y)(\bar{x} + \bar{y})$

`f <= not(x) and y`

`f <= (x or y) and ((not(x) or y) and (not(x) and not(y)))`

## Schémas utilisés en circuiterie numérique

Porte logique (*logic gate*) : représentation schématique d'un opérateur booléen

Une porte possède :

- des connecteurs d'entrée  $i_j, 0 \leq j \leq n - 1$
- un connecteur de sortie  $o$
- un comportement  $o = f(i_{n-1}, \dots, i_0)$

Syntaxe VHDL :

### Définition

```
ENTITY gate IS
PORT (i0, i1, ... : IN STD_LOGIC;
      o           : OUT STD_LOGIC)
END gate;

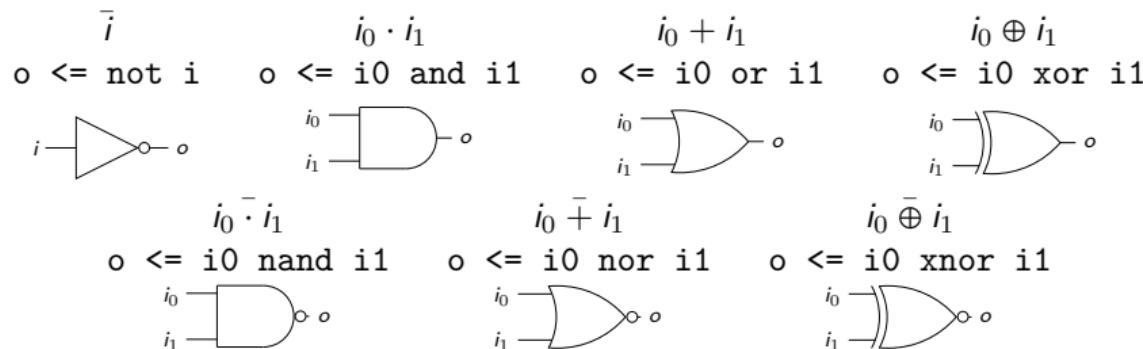
ARCHITECTURE behavioral OF gate IS
BEGIN
  o <= i0 op i1 op ... ;
END behavioral;
```

### Instanciation

```
mygate : gate
PORT MAP (
  i0 => a, i1 => b, ..., o => s
);
```

## Portes de base

Portes usuelles à une ou deux entrées



Portes d'arité supérieure à 2 : exemples

## Aspects temporels

Porte : dispositif électronique (transistors,  $R$ ,  $C$ )

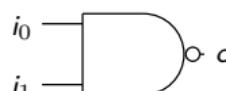
Conséquence :

un calcul logique prend du temps !

Temps  $t_{p_e(i,o)}$  (propagation) et  $t_{t_e(o)}$  (transition)

- $e$  front (*edge*) de la sortie : HL, LH
- $o$  sortie dépendante de l'entrée  $i$  si  $t_p$
- pris entre  $\frac{Vdd}{2}$  de  $i$  et  $\frac{Vdd}{2}$  de  $o$  si  $t_p$
- pris entre  $0,9 \times Vdd$  et  $0,1 \times Vdd$  si  $t_t$

Pour une technologie 28nm, charge 4 inverseurs



$t_{p_{LH}(i_0,o)}$	10.0ps	$t_{t_{HL}(o)}$	2.1ps
$t_{p_{HL}(i_0,o)}$	9.8ps	$t_{t_{LH}(o)}$	1.8ps
$t_{p_{LH}(i_1,o)}$	9.3ps		
$t_{p_{HL}(i_1,o)}$	10.0ps		

## Circuit combinatoire

Circuit combinatoire (*combinational circuit*) :  
représentation schématique d'un ensemble de portes ou circuits interconnectés

Un circuit combinatoire possède :

- des connecteurs d'entrée  $i_j, 0 \leq j \leq n - 1$
- des connecteurs de sortie  $o_k, 0 \leq k \leq m - 1$
- un comportement  $(o_{m-1}, \dots, o_0) = f(i_{n-1}, \dots, i_0)$

## Circuit combinatoire

Interconnexions légales :

- entrée primaire sur sortie primaire
- entrée primaire sur entrée de porte
- sortie de porte sur entrée(s) de porte(s)
- sortie primaire sur sortie de porte



$n \geq 2$  sorties ensemble court-circuit !



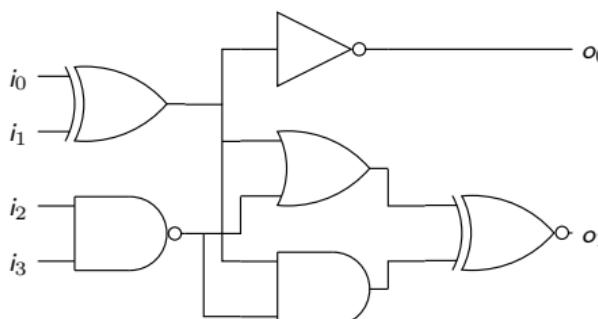
entrée(s) non connectée(s) valeur(s) de sortie non déterministe(s) !

## Schémas utilisés en circuiterie numérique

Réalisation en portes de l'équation :

$$t = (x + \bar{y}) \cdot \bar{z}$$

Analyse du circuit :



```
o0 <= not a;  
o1 <= c xnor d;  
b <= i2 nand i3;  
c <= a or b;  
a <= i0 xor i1;  
d <= a and b;
```