# Deuxième année de Licence MIASHS

# TD – Mathématiques pour l'informatique[1]

**Julien GREPAT**[2]

## Contents





[2]Contact : `julien.grepat@gmail.com`

# 1 Complexes

**Exercice 1.1** *Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les complexes :*

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

**Exercice 1.2** *Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.*

**Exercice 1.3** *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.*

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - \sqrt{3}z - i = 0 \quad ; \quad z^4 + 2z^2 + 4 = 0.$$

**Exercice 1.4** *Trouver les racines cubiques de $2 - 2i$ et de $11 + 2i$.*

# 2 Topologie

**Exercice 2.1** *On rappelle les principales normes sur $\mathbb{R}^n$ :*

- $||x||_\infty = Max_{i \leq n}(|x_i|)$ *est la norme-sup (dite aussi norme infinie),*
- $||x||_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$ *est la norme-un,*
- $||x||_2 = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$ *est la norme-deux (norme euclidienne),*

Dessiner la boule unité de $\mathbb{R}^2$ pour chacune des distances issues des trois normes précédentes.

**Exercice 2.2** *Montrer que $\mathbb{Q}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.*

**Exercice 2.3** *Dessiner la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$*

$$f(t) = \mathbb{I}_{B_1(0,1)}(t).$$

**Exercice 2.4** *On considère la suite de fonctions de $\mathcal{C}([0,1])$*

$$f_n(x) = x^n.$$

(i) Calculer, pour $m \in ]1, \infty[$

$$\int_0^1 x^m dx.$$

(ii) Montrer que pour tout $p \geq 1$, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers 0 en norme $L^p$.

(iii) Montrer que la fonction $f_n$ ne converge pas vers 0 pour la norme sup.

**Exercice 2.5** *Montrer que le système de fonctions de Haar :*

- $h_1(t) = \mathbb{I}_{[0,1]}(t)$,
- *pour $k \in \mathbb{N}$, en posant $t_i = \frac{i}{2k}, 0 \leq i \leq 2k$,*

$$h_k^i(t) = \mathbb{I}_{[t_{2i}, t_{2i+1}[}(t) - \mathbb{I}_{[t_{2i+1}, t_{2i+2}]}(t),$$

*forme une famille ortonormée de $\mathcal{L}^2([0,1])$. (Notons que c'est une base de $\mathcal{L}^p([0,1])$, $p \geq 1$.)*

**Exercice 2.6** *Soit $f$ la fonction paire $2\pi$-périodique définie par*

$$f(x) = \sqrt{x}$$

*sur $[0, \pi]$.*

La fonction $f$ est-elle $\mathcal{C}^1$ par morceaux ?

# 3 Théorie de Fourier

## 3.1 Séries de Fourier

**Exercice 3.1** *Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par :*

$$f(t) = \begin{cases} -t & si\ t \in [-\pi; 0[ \\ 0 & si\ t \in [0; \pi[ \end{cases}.$$

(i) Tracer le graphe de $f$ sur l'intervalle $[-4\pi, 4\pi]$.

(ii) Calculer la série de Fourier $S_f$ de la fonction $f$.

(iii) Montrer que $f$ vérifie les conditions du théorème de Dirichlet et donner la valeur de $S_f(\pi)$.

(iv) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

**Exercice 3.2** *Le but de cet exercice est de déterminer les premiers coefficients de Fourier réels et les principales harmoniques d'un signal.*
*Les formules d'Euler permettent d'exprimer les coefficients de Fourier réels nommés $a_n$ et $b_n$ :*

$$a_0(f) = \frac{1}{T} \int_T f(t)\,\mathrm{d}t;$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos\left(nt\frac{2\pi}{T}\right) \mathrm{d}t, \qquad \textit{pour } n > 0 :$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin\left(nt\frac{2\pi}{T}\right) \mathrm{d}t \qquad \textit{pour } n > 0.$$

*La série de Fourier est alors*

$$S_n(f(x)) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} \left( a_k(f) \cos\left(kx\frac{2\pi}{T}\right) + b_k(f) \sin\left(kx\frac{2\pi}{T}\right)\right),$$

*et les prorpiétes classiques s'adaptent.*
*Notons que l'on peut retrouver les coefficients $c_n$ par les systèmes suivants*

$$\begin{cases} a_n(f) & = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) & = \mathrm{i}(c_n(f) - c_{-n}(f)) \end{cases} \qquad \begin{cases} c_n(f) & = \frac{a_n(f) - \mathrm{i} \cdot b_n(f)}{2} \\ c_{-n}(f) & = \frac{a_n(f) + \mathrm{i} \cdot b_n(f)}{2} \end{cases}.$$

**Partie A** Pour tout entier naturel $n$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x.$$

(i) Montrer que $I_n = -\dfrac{1}{n}\sin n\dfrac{\pi}{2}$.

(ii) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que

$$J_n = \frac{\pi}{2n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}.$$

(iii) Déterminer $I_1$, $I_2$ et $I_3$, puis $J_1$, $J_2$ et $J_3$.

**Partie B** Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période $2\pi$, telle que :

$$\begin{cases} \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, & f(t) = \dfrac{2E}{\pi}t \\ \text{si } \dfrac{\pi}{2} < t \leqslant \pi, & f(t) = E \end{cases}.$$

où $E$ est un nombre réel donné, strictement positif.

(i) Tracer la fonction $f$ sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi]$ avec $E = 2$.

(ii) Soit $a_0$ et pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, $a_n$ et $b_n$ les coefficients de Fourier associés à $f$.

  (a) Calculer $a_0$.

  (b) Pour tout $n \geqslant 1$, donner la valeur de $b_n$.

  (c) En utilisant la partie A, vérifier que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2E}{\pi^2}(2J_n + \pi I_n)$.
  Calculer $a_{4k}$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

**Partie C**

(i) Déterminer les coefficients $a_1$, $a_2$, $a_3$.

(ii) Calculer $F^2$, carré de la valeur efficace de la fonction $f$ sur une période.
On rappelle que dans le cas où $f$ est paire, périodique de période $T$, on a :

$$F^2 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

(iii) On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne

$$F^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

Soit $P$ le nombre défini par $P = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$. Calculer $P$, puis donner la valeur décimale arrondie au millième du rapport $\dfrac{P}{F^2}$.
*Ce dernier résultat très proche de 1, justifie que dans la pratique, on peut négliger les harmoniques d'ordre supérieur à 3.*

## 3.2 Transformée de Fourier

**Exercice 3.3** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{-|x|}$.*

Calculer la transformée de Fourier de $f$ en explicitant les calculs. En déduire une expression de $\widehat{f * f}(\xi)$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

**Exercice 3.4** *Pour tout entier naturel $k$, on note $f_k$ la fonction définie par*

$$f_k(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ \frac{t^k}{k!} e^{-t} & si \quad t > 0 \end{cases}.$$

(i) Calculer, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-2\pi i t y} \, dt$$

.

(ii) Déterminer la transformée de Fourier de $f_1$.

(iii) Expliquer comment on peut en déduire la transformée de Fourier de $f_k$ pour tout entier $k$.

(iv) En utilisant ce qui précède, en déduire $f_p \star f_q$.

**Exercice 3.5** *Pour tout $a > 0$, on définit la fonction $G_a$ par*

$$G_a(t) = e^{-at^2},$$

*pour tout $t \in \mathbb{R}$. On rappelle que $\widehat{G_1}(y) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 y^2}$.*

(i) Pour tout $a > 0$, calculer la transformée de Fourier de $G_a$ (expliciter vos calculs).

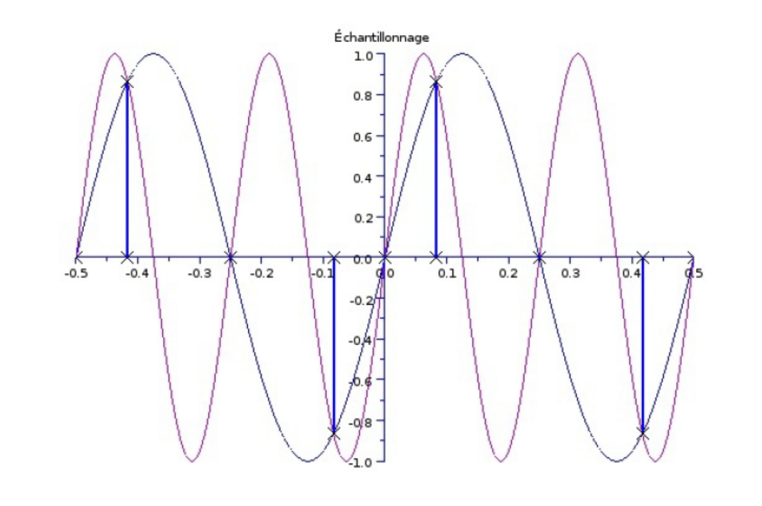
(ii) Montrer qu'il existe une unique fonction $f$ intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $G_2 \star f = G_1$. Calculer $f$.

## 3.3 Traitement du signal

**Exercice 3.6** *Le traitement numérique des données (téléphonnie, CD audio etc ... ) ne peut se faire que sur des données fi*

*nies. Il faut donc représenter ces données par une suite de valeurs numériques ponctuelles prélevées régulièrement ou irrégulièrement. Un tel prélèvement est appelé échantillonnage.*

*Il est clair que l'échantillonnage visible sur la figure suivante ne permet pas de distinguer les deux signaux.*




*Prenons par exemple,* $f(t) = sin(2\pi x)$ *et*

$$g(t) = sin\left(2\pi\left(\frac{1}{T}+1\right)x\right),$$

(i) Montrer qu'un échantillonnage aux points

$$x_k = kT, \qquad k \in \mathbb{N},$$

nous donne les mêmes valeurs pour $f(x_k)$ et $g(x_k)$.

(ii) Quelle condition sur l'échantillonnage doit-on imposer ?

(iii) Sachant que l'oreille humaine perçoit les fréquences de 20 Hz à 20kHz, à quelle fréquence suffit-il d'échantillonner le signal pour otenir une restitution correcte du signal. (On utilise en fait, pour des raisons techniques, une fréquence de 44,1 kHz c'est-à-dire qu'on enregistre la valeur de chacun des canaux 44 100 fois par seconde).

**Exercice 3.7** *On note* $\Pi$ *la fonction (dite fonction porte) caractéristique de* $[-1/2, 1/2]$ *:*

$$\Pi(x) = \left\{\begin{array}{lll} 1 & si & x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & si & |x| > \frac{1}{2} \end{array}\right. ,$$

*ainsi que sinc la fonction définie par*

$$sinc(x) = \left\{\begin{array}{lll} 1 & si & x = 0 \\ \frac{sin(\pi x)}{\pi x} & sinon & \end{array}\right. .$$

(i) La fonction porte.

(a) Montrer que $\widehat{\Pi}(y) = sinc(y)$. En déduire $\widehat{sinc}$.

(b) Tracer le graphe de $f$ définie par $f(t) = \Pi(3t-5)$.

(c) Calculer la transformée de Fourier de $f$.

(d) Soit $g\ :\ t \mapsto \Pi(t-5/3)$. Calculer la transformée de Fourier de $g$.

(e) Déterminez les valeurs des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{sinc}^2 * \mathrm{sinc}^2)(x)\,\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_{\mathbb{R}} ((\tau_1 \mathrm{sinc})^2 * (\tau_1 \mathrm{sinc})^2)(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) Filtre basse-bas.

(a) On considère le signal $f(t) = xe^{-|x|}$. Montrer que $f$ est intégrable.

(b) On souhaite ne conserver que les basses fréquences inférieures à 5 du signal. Utiliser les résultats précédents pour donner la nouvelle expression du signal filtré.

# 4 Équations différentielles

## 4.1 Généralités

**Exercice 4.1** *On considère les équations différentielles suivantes*

$$x' = 1, \qquad x' = x - 1, \qquad x' = x^2, \qquad x' = -\frac{1}{t^2} cos\left(\frac{1}{t}\right), \qquad x' = \frac{x}{t}, \qquad x' = x - t.$$

(i) Appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz aux équations précédentes.

(ii) Pour chacune, tracer le champs de directions.

(iii) Déterminer les solutions stationnaires.

## 4.2 Formulaire

**FORMULAIRE**

Les solutions de l'équation différentielle homogène $(E_0)$

| | |
|---|---|
| $ay'(t) + by(t) = 0$ | $y(t) = ke^{-\frac{b}{a}t}$, avec $k$ constante réelle. |
| $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ | $y(t) = ke^{-\int_0^t a(s)ds}$, avec $k$ constante réelle. |
| $ay'' + by' + cy = 0$<br>équation caractéristique (EC) :<br>$ar^2 + br + c = 0$<br>de discriminant $\Delta$. | • Si $\Delta > 0$, $f(x) = A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x}$ où $r_1$ et $r_2$ sont les racines de l'EC.<br>• Si $\Delta = 0$, $f(x) = (Ax + B)\mathrm{e}^{rx}$ où $r$ est la racine double de l'EC.<br>• Si $\Delta < 0$, $f(x) = A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x} = [A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)]\mathrm{e}^{\alpha x}$<br>où $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ sont les racines complexes l'EC. |

## 4.3 Équation différentielles du premier ordre

**Exercice 4.2** *On considère l'équation différentielle* $(E)$ *suivante :*

$$y'(t) + 0,027y(t) = 0,675$$

*où l'inconnue* $y$ *est une fonction de la variable* $t$*, définie et dérivable sur* $[0\ ;\ +\infty[$ *et* $y'$ *est la fonction dérivée de* $y$*.*

(i) Résoudre l'équation différentielle $(E_0)$:

$$y'(t) + 0,027y(t) = 0.$$

(ii) Déterminer une fonction $g$ constante, solution de l'équation différentielle $(E)$.

(iii) Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de $(E)$.

(iv) Déterminer la solution $f$ de l'équation $(E)$ qui vérifie la condition initiale : $f(0) = 0$.

**Exercice 4.3** *Résoudre sur* $]1, +\infty[$ *l'équation différentielle*

$$y' - \frac{x}{x^2 - 1} y = 2x$$

**Exercice 4.4** *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *les équations différentielles suivantes.*

(i) $y' + 2y = x^2$

(ii) $y' + y = 2 \sin x$

(iii) $y' - y = (x + 1)e^x$

(iv) $y' + y = x - e^x + \cos x$

## 4.4 Équations différentielles du second ordre

**Exercice 4.5** *On considère l'équation différentielle*

$$(E) : \quad y'' - 2y' + y = -2$$

*où* $y$ *est une fonction de la variable réelle* $x$*, définie et deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$*,* $y'$ *la fonction dérivée de* $y$ *et* $y''$ *sa fonction dérivée seconde.*

(i) Résoudre l'équation différentielle $(H) : \quad y'' - 2y' + y = 0$.

(ii) Déterminer une fonction constante qui est solution particulière de l'équation $(E)$.

(iii) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$.

(iv) Déterminer la solution particulière $f$ de l'équation différentielle $(E)$ qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

**Exercice 4.6** *On considère l'équation différentielle*

$$(E) \ : \quad y'' + 4y' + 5y = 10x + 3$$

*où* $y$ *est une fonction de la variable réelle* $x$*, définie et deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$*,* $y'$ *sa fonction dérivée et* $y''$ *sa fonction dérivée seconde.*

(i) Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_0) \ : \quad y'' + 4y' + 5y = 0.$$

(ii) Déterminer les constantes réelles $a$ et $b$ telles que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit une solution particulière de l'équation différentielle $(E)$.

(iii) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$.

(iv) Déterminer la solution particulière $f$ de l'équation différentielle $(E)$ qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -1$ et $f'(0) = 4$.

**Exercice 4.7** *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *les équations différentielles suivantes.*

(i) $y'' + y = 0$

(ii) $y'' - 3y' + 2y = 0$

(iii) $y'' + 2y' + 2y = 0$

(iv) $y'' + 2y' + y = e^x$

(v) $y'' + y' - 2y = e^x$

**Exercice 4.8** *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'' + y = \tan t$$

## 4.5 Équation de la chaleur

**Exercice 4.9** *On considère une barre métallique de longueur* $L$*, qu'on représente par le segment* $[0, L]$*. La température à l'instant* $t$ *au point d'abscisse* $x$ *est notée* $u(x, t)$*. On pose* $Q = ]0, L[\times]0, +\infty[$*. La fonction* $u$ *est supposée continue sur* $\bar{Q}$*(la fermeture des intervalles) et de classe* $C^\infty$ *sur* $Q$*. Elle vérifie en outre les conditions suivantes :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \forall (x, t) \in Q, \tag{4.1}$$

$$u(x, 0) = h(x), \qquad \forall x \in [0, L], \tag{4.2}$$

*(condition initiale), où* $h$ *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0, L]$ *avec* $h(0) = h(L) = 0$*. Et*

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \qquad \forall t \in [0, +\infty[. \tag{4.3}$$

On va démontrer l'existence d'une solution à ce problème.

(i) Montrer que si la fonction $u$ s'écrit sous la forme $u(x, t) = f(x)g(t)$ (où $f$ et $g$ ne s'annulent pas sur $Q$) et si $u$ est solution de (4.1), alors les fonctions $f$ et $g$ vérifient chacune une équation différentielle simple :

$$f''(x) - \lambda f(x) = 0, \qquad g'(t) - \lambda g(t) = 0$$

(ii) Résoudre ces équations différentielles en tenant compte de (4.3). En déduire qu'une fonction qui s'écrit :

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} a_n sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2} t}$$

(en admettant que la série converge et qu'on peut la dériver terme à terme) est une solution de (4.1) et de (4.3).

(iii) Soit $\bar{h}$ la fonction déduite de $h$ par imparité et $2L$-périodicité. Développer $\bar{h}$ en série de Fourier. Quelle valeur donner aux $a_n$ ?

La fonction $\bar{h}$ est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, $2L$-périodique, et impaire. Elle est donc somme de sa série de Fourier (qui converge normalement) et qui ne comporte que des termes en sinus :

$$\bar{h}(x) = \sum_{n \geq 1} b_n(\bar{h}) sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

Si on veut faire coïncider $u(x, 0)$ avec $h(x)$, on est amené à poser $a_n = b_n(h)$.

(iv) Justifier que la fonction ainsi exhibée est bien solution du problème.