Analyse Réelle 1

stephan.semirat@univ-grenoble-alpes.fr

Chapitre 4. Convergence des suites

1. Limite d'une suite

2. Propriétés des limites

3. Suites satisfaisant $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Limite d'une suite

Rappelons que $|x-c|<r$ signifie, de manière équivalente :

- x appartient à l'intervalle *centré* en c et de rayon r
- $c-r<x<c+r$
- $x \in]c-r, c+r[$
- x est égal à c à r près
- la distance entre x et c est inférieure à r

Et réciproquement, $x \in]a, b[$ si et seulement si $|x-\frac{a+b}{2}|<\frac{b-a}{2}$.

Définition

On dit qu'une suite numérique (u_n) <u>admet $\ell \in \mathbb{R}$ comme limite</u> si la propriété suivante est satisfaite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, la suite (u_n) a pour limite ℓ si

- ✓ pour n *suffisamment* grand (si $n \geq N$, pour un certain N)
- ✓ la distance entre u_n et ℓ (mesurée par $|u_n - \ell|$)
- ✓ est *arbitrairement* petite ($\leq \varepsilon$, quel que soit $\varepsilon > 0$).

De manière intuitive, une suite (u_n) admet ℓ comme limite si à partir d'un certain rang, les termes u_n sont tous dans un intervalle centré en ℓ et de rayon ε arbitrairement petit.

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est convergente si elle admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est divergente.

Exemple

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$ admet pour limite $\ell = 0$.

Démonstration.

Il faut montrer : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Je pose $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$.
En particuler, $N \in \mathbb{N}$.
Par définition : $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} < E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$.
En particulier : $\frac{1}{\varepsilon} < N$.
Par conséquent $\varepsilon > \frac{1}{N}$ (car ε et $\frac{1}{N}$ sont positifs).
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$.
Alors $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$ et donc $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Puisque $\frac{1}{n}$ est positif, j'ai aussi : $-\varepsilon < \frac{1}{n}$.
J'en déduis, finalement : $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ et donc $\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon$. $\square$

Exemple

Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ ne converge pas vers 1.

Démonstration.

La suite (u_n) converge vers 1 si :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |(-1)^n - 1| \leq \varepsilon.$

La suite (u_n) ne converge pas vers 1 si :

$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |(-1)^n - 1| > \varepsilon.$

Je pose $\varepsilon = 1$.

Soit $N \in \mathbb{N}$.

Je pose $n = 2N + 1$. Alors $n \geq N$ et :

$|(-1)^n - 1| = \left|(-1)^{2N+1} - 1\right| = \left|((-1)^2)^N \times (-1)^1 - 1\right| = \left|1^N \times (-1) - 1\right| = |-1-1| = |-2| = 2 > \varepsilon.$ $\square$

Propriété

Si (u_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors cette limite est unique.

Démonstration.

Je suppose, par l'absurde, que (u_n) admet ℓ_1 et ℓ_2 comme limite, avec $\ell_1 \neq \ell_2$.
Soit $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$. Alors $\varepsilon > 0$ car $\ell_1 \neq \ell_2$.
De plus, $\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_1,\ |u_n - \ell_1| \leq \varepsilon$ et
$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_1,\ |u_n - \ell_2| \leq \varepsilon$.
Soit $n \geq \max\{N_1, N_2\}$. Alors $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, donc
$|u_n - \ell_1| \leq \varepsilon$ et $|u_n - \ell_2| \leq \varepsilon$.
L'inégalité triangulaire ($\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ |a - c| \leq |a - b| + |b - c|$)
donne alors $|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| \leq 2\varepsilon$.
Or $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$, donc $|\ell_1 - \ell_2| = 3\varepsilon$.
Ainsi $3\varepsilon \leq 2\varepsilon$, et donc, en divisant par $\varepsilon > 0$, $3 \leq 2$.
Or $3 > 2$. Contradiction. $\square$

Définition

Lorsqu'une suite (u_n) admet une limite, on note $\lim u_n$, ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, cette (unique) limite.

Définition

On dit qu'une suite (u_n) <u>tend vers $+\infty$</u> si la propriété suivante est satisfaite :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \, u_n \geq M.$$

On dit qu'une suite (u_n) <u>tend vers $-\infty$</u> si la propriété suivante est satisfaite :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \, u_n \leq M.$$

Intuitivement, la suite (u_n) tend vers $+\infty$ si

- ✓ pour n *suffisamment* grand (si $n \geq N$, pour un certain N)
- ✓ u_n est *arbitrairement* grand ($u_n \geq M$, quel que soit $M \in \mathbb{R}$).

Exemple

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = n^2$ tend vers $+\infty$.

Démonstration.

Il faut montrer : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, n^2 \geq M$.

Soit $M \in \mathbb{R}$.

Si $M \leq 0$, je pose $N = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$. Alors $n^2 \geq 0 \geq M$.

Si $M > 0$, je pose $N = E\left(\sqrt{M}\right) + 1$.

En particuler, $N \in \mathbb{N}$.

De $E\left(\sqrt{M}\right) \leq \sqrt{M} < E\left(\sqrt{M}\right) + 1$, je déduis : $N > \sqrt{M}$.

Par conséquent $N^2 \geq M$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$.

Alors $n^2 \geq N^2 \geq M$. $\square$

2. Propriétés des limites

Remarquons tout d'abord que la propriété d'admettre une limite est une propriété *à partir d'un certain rang*.

Ainsi, une suite est convergente si et seulement si elle est convergente à partir d'un certain rang.

En particulier, pour étudier la convergence d'une suite, on peut se dispenser de considérer ses premiers termes si cela rend le calcul plus simple.

2. Propriétés des limites

a. Limites et bornes

Propriété

Soit (u_n) une suite. Alors (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0.

Démonstration.

La convergence de (u_n) vers ℓ s'écrit :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$

La convergence de $(u_n - \ell)$ vers 0 s'écrit :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell - 0| < \varepsilon.$

Les définitions sont donc identiques. $\square$

La propriété suivante est particulièrement utile pour les démonstrations.

Propriété

Soit (u_n) *une suite et soit* $\ell \in \mathbb{R}$.
S'il existe une suite (v_n) *convergeant vers* 0 *et si* $\forall n \in \mathbb{R}$, $|u_n - \ell| \leq v_n$, *alors* (u_n) *converge vers* ℓ.

Démonstration.

Je veux montrer : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (v_n) converge vers 0, j'ai :
$\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|v_n| \leq \varepsilon$.
Soit $n \geq N$.
Les trois inégalités $|u_n - \ell| \leq v_n$, $v_n \leq |v_n|$ et $|v_n| \leq \varepsilon$ impliquent alors : $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. $\square$

Propriété

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration.
Soit (u_n) une suite convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Alors j'ai : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
Soit $\varepsilon = 1$. Alors $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
En particulier : $\forall n \geq N$, $-1 + \ell \leq u_n \leq 1 + \ell$.
Ainsi, (u_n) est bornée à partir du rang N.
Or je sais qu'une suite bornée à partir d'un certain rang est bornée, donc (u_n) est bornée. $\square$

Attention, bornée n'imlique pas convergente.

Exemple

Soit (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.
Alors (u_n) est bornée (par exemple par -2 et 2), mais n'est pas convergente.

Propriété

Soit (u_n) une suite bornée (non nécessairement convergente), et soit (v_n) une suite convergeant vers 0.

Alors $(u_n \times v_n)$ converge vers 0.

Démonstration.

Si (u_n) est bornée, alors : $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < M$.

Si $\lim v_n = 0$, alors : $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_1$, $|v_n - 0| \leq \varepsilon_1$.

Je veux montrer : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|u_n v_n - 0| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $\varepsilon_1 = \varepsilon/M$, et soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$, $|v_n - 0| \leq \varepsilon_1$. Je pose $N = N_1$.

Soit $n \geq N$.

Alors $|u_n v_n - 0| = |u_n| \times |v_n| \leq M \times \varepsilon_1 = M \times \varepsilon/M = \varepsilon$. $\square$

2. Propriétés des limites

b. Opérations sur les limites

Limite d'une somme (1/2)

Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et (v_n) converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.

Démonstration.

Je suppose $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$.

J'ai donc (par définition) :

$\forall \varepsilon_1 > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_1,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon_1$ et

$\forall \varepsilon_2 > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_2,\ |v_n - \ell'| \leq \varepsilon_2$,

et je veux montrer (par définition) :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ et $\varepsilon_2 = \varepsilon/2$.

Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon_1$, et soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2,\ |v_n - \ell'| \leq \varepsilon_2$.

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$, et soit $n \geq N$. Alors :

$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \leq$

$|u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. $\square$

Limite d'une somme (2/2)

Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, ou diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) et (v_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors $(u_n + v_n)$ diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration.

Je suppose $\lim u_n = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim v_n = +\infty$ (les autres cas se montrent de manière analogue).

J'ai donc :

$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |u_n - \ell| \leq \varepsilon_1$ et

$\forall M_2 \in \mathbb{R}, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, v_n \geq M_2$.

Je veux montrer : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n + v_n > M$.

Soit $M \in \mathbb{R}$, soit $\varepsilon_1 = 1$ et soit $M_2 = M - \ell + 1$.

Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, -1 + \ell \leq u_n \leq 1 + \ell$.

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2, v_n \geq M_2 = M - \ell + 1$.

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$, et soit $n \geq N$.

Alors : $u_n + v_n > (-1 + \ell) + (M - \ell + 1) = M$. $\square$

Attention, on ne peut rien dire de convergence d'une somme de deux suites divergentes respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$.

On dit que le calcul de la limite est de <u>forme indéterminée</u>.

Limite d'un produit (1/2)

Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et (v_n) converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $(u_n \times v_n)$ converge vers $\ell \times \ell'$.

Démonstration.

Je suppose $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, j'ai :

$|u_n v_n - \ell\ell'| = |u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell)| \leq |u_n||v_n - \ell'| + |\ell'||u_n - \ell|$.

La suite $(|u_n|)$ est bornée car (u_n) converge.

La suite $(|v_n - \ell'|)$ converge vers 0 car (v_n) converge vers ℓ'.

Par conséquent la suite $(|u_n||v_n - \ell'|)$ converge vers 0.

De même, la suite stationnaire (ℓ') est bornée, $(|u_n - \ell|)$ converge vers 0, et donc $(|\ell'||v_n - \ell'|)$ converge vers 0.

Ainsi, par somme, la suite $(|u_n||v_n - \ell'| + |\ell'||u_n - \ell|)$ converge vers 0.

Par conséquent $(|u_n v_n - \ell\ell'|)$ converge vers 0, et donc $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$. $\square$

Somme et divergence

Si (u_n) est une suite convergente et (v_n) est une suite divergente, alors $(u_n + v_n)$ est divergente.

Démonstration.

Soit (u_n) convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$, et (v_n) divergente.
Je suppose, par l'absurde, que (w_n) définie par $w_n = u_n + v_n$ est convergente, de limite $\ell' \in \mathbb{R}$.
Par produit, la suite $(-u_n)$ est convergente (de limite $-\ell$).
Par somme, la suite $(w_n - u_n)$ est convergente (de limite $\ell' - \ell$).
Or $(w_n - u_n) = (v_n)$, qui est divergente. Contradiction. $\square$

Limite d'un produit (2/2)

Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, avec $\ell \neq 0$, ou diverge vers $\pm\infty$, et si (v_n) diverge vers $\pm\infty$, alors $(u_n \times v_n)$ diverge vers $\pm\infty$, le signe étant le produit des signes de $\lim u_n$ et $\lim v_n$.

Démonstration.

Je suppose $\ell > 0$ et $\lim v_n = +\infty$. Les autres cas se montrent de manière analogue. Soit $M \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon \in]0, \ell[\neq \varnothing$,
Je sais : $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_1$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
En particulier : $\forall n \geq N_1$, $u_n \geq \ell - \varepsilon > 0$.
Soit $M_2 = \frac{|M|}{\ell - \varepsilon}$.
Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2$, $v_n \geq M_2$.
Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$ et soit $n \geq N$.
Alors $u_n \geq \ell - \varepsilon$, $v_n \geq M_2$, et puisque les quantités sont toutes positives, j'en déduis : $u_n v_n \geq (\ell - \varepsilon) M_2 = |M| \geq M$. $\square$

Attention, on ne peut rien dire de la convergence du produit de deux suites de limites respectives 0 et $\pm\infty$.

On dit que le calcul de la limite est de forme indéterminée.

Limite de l'inverse (1/3)

Si $\lim u_n = \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell \neq 0$, alors la suite $(1/u_n)$ est bien définie à partir d'un certain rang, et elle converge vers $1/\ell$.

Démonstration.

Je suppose $\ell > 0$. Le cas $\ell < 0$ se démontre de manière analogue.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \in]0, \ell[$. Alors $\ell - \varepsilon > 0$.

De plus, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$, en en particulier, $u_n \geq \ell - \varepsilon > 0$.

Donc $1/u_n$ est bien défini pour tout $n \geq N$.

Soit $n \geq N$.

J'ai : $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{u_n - \ell}{\ell u_n}\right|$, et puisque $u_n > \ell - \varepsilon > 0$, j'obtiens : $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| < \left|\frac{1}{\ell(\ell-\varepsilon)}\right| |u_n - \ell|$.

La suite stationnaire $\left(\left|\frac{1}{\ell(\ell-\varepsilon)}\right|\right)$ est bornée, et la suite $(|u_n - \ell|)$ converge vers 0, donc la suite $\left(\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right|\right)$ converge vers 0. $\square$

Limite de l'inverse (2/3)

Si $\lim u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$, alors la suite $(1/u_n)$ est bien définie à partir d'un certain rang, et elle converge vers 0.

Démonstration.

Je montre le cas $\lim u_n = +\infty$ (le cas $\lim u_n = -\infty$ se montre de manière analogue).
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $M = \frac{1}{\varepsilon}$.
De $\lim u_n = +\infty$ je déduis l'existence d'un $N \in \mathbb{N}$ tel que
$\forall n \geq N,\ u_n \geq M = \frac{1}{\varepsilon}$.
En particulier, $\forall n \geq N,\ u_n \neq 0$, et donc $1/u_n$ est bien définie à partir du rang N.
Soit $n \geq N$.
Alors $|u_n| \geq u_n \geq \frac{1}{\varepsilon} > 0$, et donc $\left|\frac{1}{u_n}\right| \leq \varepsilon$. $\square$

Notation

Soit u_n convergente vers 0.

On peut écrire $\lim u_n = 0^+$ si : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq 0$.

On peut écrire $\lim u_n = 0^-$ si : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq 0$.

Attention, si $\lim u_n = 0$, on n'a pas forcément $\lim u_n = 0^+$ ou $\lim u_n = 0^-$.

Exemple

Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n > 0$. Alors (u_n) converge vers 0, mais :

- $\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists n \geq N$ tel que $u_n < 0$ (il suffit de choisir $n \geq N$ impair) ;
- $\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists n \geq N$ tel que $u_n > 0$ (il suffit de choisir $n \geq N$ pair).

Limite de l'inverse (3/3)

Si $\lim u_n = 0^+$ (resp. $\lim u_n = 0^-$), et si (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors la suite $(1/u_n)$ est bien définie à partir d'un certain rang, et elle diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration.

Je montre le cas $\lim u_n = 0^+$.

Je veux montrer : si $\lim u_n = 0^+$ et $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, u_n > 0$, alors : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, 1/u_n \geq M$.

Je suppose $\lim u_n = 0^+$ et $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, u_n > 0$.

Soit $M \in \mathbb{R}$. Je suppose tout d'abord $M = 0$.

Dans ce cas, je pose $N = N_1$. Soit $n \geq N$. Alors $u_n > 0$, donc $|1/u_n| \geq 0 = M$.

Je suppose ensuite $M \neq 0$. Dans ce cas, je pose $\varepsilon = 1/|M|$.

Alors $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |u_n| \leq \varepsilon = 1/|M|$.

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$ et soit $n \geq N$. Alors $u_n > 0$, donc $|u_n| = u_n$, et de $|u_n| \leq 1/|M|$ je déduis $1/u_n \geq |M| \geq M$. $\square$

En combinant inverse et produit (en écrivant $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$), on obtient :

Limite d'un quotient

- Si $\lim u_n = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim v_n = \ell' \in \mathbb{R}$ avec $\ell' \neq 0$, alors $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}$.
- Si $\lim u_n = \ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$, ou si (u_n) diverge vers $\pm\infty$, et si $\lim v_n = 0^+$ ou $\lim v_n = 0^-$, alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ (selon le signe de $\lim u_n$ et de $\lim v_n$).
- Si $\lim u_n = \ell \in \mathbb{R}$, et si (v_n) diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, alors $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Attention, le calcul de la limite est de forme indéterminée de la convergence du quotient de deux suites de limites respectives $\pm\infty$ et $\pm\infty$, ou 0 et 0, est une forme indéterminée.

En résumé, les formes indéterminées sont :
« $(+\infty) + (-\infty)$ »
« $(0) \times (\pm\infty)$ »
« $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ »
« $\frac{0}{0}$ »

Dans ces cas là, on ne peut pas faire référence aux opérations sur les limites pour déterminer la limite cherchée.

Il faut modifier l'expression dont on cherche la limite,
afin de *lever l'indétermination*.

Composition avec une fonction continue

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et f une fonction *continue* sur D.

Soit (u_n) une suite d'éléments de D, et convergente vers $\ell \in D$.

Alors la suite $(f(u_n))$ converge et $\lim f(u_n) = f(\ell)$.

La continuité sera définie et étudiée au semestre 2. Ainsi, on utilisera cette propriété de manière intuitive.

Cette propriété stipule que si f est continue en $\ell = \lim u_n$, alors $\lim f(u_n) = f(\lim f(u_n))$.

Composition avec une fonction

Soit $a \in \mathbb{R}$, $D =]a, +\infty[$ et f une fonction définie sur D, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$.
Soit (u_n) une suite d'éléments de D, avec $\lim u_n = +\infty$.
Alors $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ($= \ell$ ou $\pm\infty$).

Là aussi, autrement dit : $\lim f(u_n) = f(\lim f(u_n))$.

Pour calculer une limite, on partira des limites de références, puis on explicitera les opérations sur les limites (somme, produit, inverse, quotient, composition).

Limites de référence

- Constante : pour $c \in \mathbb{R}$, $\lim c = c$
- Monômes :
  pour $a > 0$, $\lim n^a = +\infty$
  (Cas particulier : $\lim \sqrt{n} = \lim n^{1/2} = +\infty$)
  pour $a < 0$, $\lim n^a = \lim \frac{1}{n^{-a>0}} = 0^+$
- Exponentielles :
  pour $0 < q < 1$, $\lim q^n = 0^+$
  pour $-1 < q < 0$, $\lim q^n = 0$ (attention : pas 0^-)
  pour $q > 1$, $\lim q^n = +\infty$
  pour $q < -1$, q^n diverge (ni vers $-\infty$ ni vers $+\infty$)

Exemple

Calculer $\lim(n^2+n)$.

$$\left.\begin{aligned} \lim n^2 &= +\infty \\ \lim n &= +\infty \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{c} \text{Par somme} \\ \lim(n^2+n) = +\infty \end{array}$$

Exemple

Calculer $\lim \frac{n^2+1}{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n^2+1}{n+1} = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = n\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}$.

$$\left.\begin{array}{r}
\left.\begin{array}{r}
\left.\begin{array}{r}\lim \frac{1}{n^2}=0\\ \lim 1=1\end{array}\right\}\begin{array}{r}\text{Par somme}\\ \lim 1+\frac{1}{n^2}=1\end{array}\\
\left.\begin{array}{r}\lim \frac{1}{n}=0\\ \lim 1=1\end{array}\right\}\begin{array}{r}\text{Par somme}\\ \lim 1+\frac{1}{n}=1\end{array}
\end{array}\right\}\begin{array}{r}\text{Par quotient}\\ \lim \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=1\end{array}\\
\lim n=+\infty
\end{array}\right\}\begin{array}{r}\text{Par produit}\\ \lim n\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=+\infty\end{array}$$

Exemple

Calculer $\lim \sqrt{\frac{1}{n^2} + 2}$.

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \lim \frac{1}{n^2} = 0 \\ \lim 2 = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Par somme} \\ \lim \frac{1}{n^2} + 2 = 2 \end{array} \\ x \mapsto \sqrt{x} \text{ est continue en } 2 \end{array}\right\} \overset{\text{Par composition}}{\underbrace{\lim \sqrt{\frac{1}{n^2} + 2}}_{\lim f(u_n)} = \underbrace{\sqrt{2}}_{f(\lim u_n)}}$$

Exemple (Expression conjuguée)

Calculer $\lim(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \begin{aligned}[t] &\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{(\sqrt{n})^2-(\sqrt{n+1})^2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim \sqrt{n} = +\infty \\ \left.\begin{array}{r} \lim n+1 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Par composition} \\ \lim \sqrt{n+1} = +\infty \end{array} \end{array}\right\} \begin{array}{r} \text{Par somme} \\ \lim(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = +\infty \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim -1 = -1 \\ \lim(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Par quotient} \\ \lim \frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 0 \end{array}$$

2. Propriétés des limites

c. Limite et inégalités

Passage à la limite d'une inégalité

Soient (u_n) et (v_n) des suites convergentes vérifiant $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang.
Alors $\lim u_n \geq \lim v_n$.

Démonstration.
Je sais qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$, et donc $u_n - v_n \geq 0$.
Ainsi, à partir d'un certain rang, $u_n - v_n = |u_n - v_n|$.
En particulier $\lim(u_n - v_n) = \lim |u_n - v_n|$.
Or $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, par composition
$\lim |u_n - v_n| = |\lim(u_n - v_n)| \geq 0$.
Par conséquent $\lim(u_n - v_n) \geq 0$.
Or puisque (u_n) et (v_n) sont convergentes, par somme :
$\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n$.
Ainsi $\lim u_n \geq \lim v_n$. $\square$

Attention, la propriété précédente n'est pas vraie si on considère des inégalités strictes :
si $u_n > v_n$ à partir d'un certain rang, alors on n'a pas forcément $\lim u_n > \lim v_n$.
En revanche, si $u_n > v_n$ à partir d'un certain rang, on a bien $\lim u_n \geq \lim v_n$, car $u_n > v_n$ implique $u_n \geq v_n$, et donc la propriété peut s'appliquer.

Exemple

Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.
Alors pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$, et il est incorrect d'en déduire $\lim u_n > 0$. (en effet, $\lim u_n = 0$).
En revanche, on peut déduire de pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$, l'inégalité $\lim u_n \geq 0$.

Théorème des « gendarmes »

Soient (u_n) et (w_n) des suites convergeant vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Si (v_n) est une suite vérifiant $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang, alors (v_n) est convergente et $\lim v_n = \ell$.

Démonstration.

Si, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors à partir d'un certain rang : $0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n$.

Par conséquent $-(w_n - u_n) \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n$, et donc $|(v_n - u_n) - 0| \leq w_n - u_n$.

Or par somme $\lim(w_n - u_n) = \ell - \ell = 0$.

D'après une propriété du cours[1], j'en déduis que $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Alors, puisque (u_n) et $(un - -v_n)$ convergent, par somme $\lim(u_n - (u_n - v_n)) = \lim u_n - \lim(u_n - v_n) = \ell - 0 = \ell$.

Or $u_n - (u_n - v_n) = v_n$.

Donc v_n est convergente et $\lim v_n = \ell$. $\square$

1. Si $|u_n - \ell| \leq v_n$ et $\lim v_n = 0$ alors (u_n) converge vers ℓ.

Attention : si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang, mais si (u_n) et (w_n) n'ont pas la *même* limite, alors on ne peut rien dire de la suite (v_n).

Exemple

Soit $u_n = -1$, $w_n = 1$ et $v_n = (-1)^n$.

Alors pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Toutefois, (v_n) n'est pas convergente.

Minoration par une suite divergeant vers $+\infty$

Soient (u_n) et (v_n) vérifiant à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.
Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.

Majoration par une suite divergeant vers $-\infty$

Soient (u_n) et (v_n) vérifiant à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$.
Si $\lim u_n = -\infty$, alors $\lim v_n = -\infty$.

Démonstration.

Je montre la première propriété en utilisant les définitions.

Je sais :

$\exists N' \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N'$, $u_n \leq v_n$, et

$\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists N'' \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N''$, $u_n \geq M$.

Je veux montrer : $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $v_n \geq M$.

Soit $M \in \mathbb{R}$.

Je pose $N = \max\{N', N''\}$, où N' et N'' sont choisis d'après les hypothèses ci-dessus.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$.

Alors d'une part $M \leq u_n$ et d'autre part $u_n \leq v_n$. J'en déduis : $v_n \geq M$. □

2. Propriétés des limites

d. Propriété de la borne supérieure

Rappelons ce que signifie que $\mathbb{R}$ possède la *propriété de la borne supérieure* :
Toute partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée possède une borne supérieure.

Les propriétés énoncées dans cette section sont des conséquences de cette propriété de $\mathbb{R}$.

Suite croissante majorée

Soit (u_n) croissante et majorée.

Alors (u_n) est convergente, et $\lim u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Suite décroissante minorée

Soit (u_n) écroissante et minorée.

Alors (u_n) est convergente, et $\lim u_n = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Démonstration.

Je montre que toute suite croissante majorée est convergente vers la borne supérieure de l'ensemble de ses valeurs.

Soit (u_n) croissante et majorée.

En particulier, $A = \{u_n : n \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}$ est non vide et majorée, donc elle possède une borne supérieure $\ell \in \mathbb{R}$.

Je veux montrer : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$.

D'après la caractérisation de la borne supérieure, $\exists u_N \in A$, $u_N \geq \ell - \varepsilon$. et de plus $u_N \leq \ell$.

Soit $n \geq N$.

Alors $u_n \in A$ donc $u_n \leq \ell$ et $u_n \geq u_N \geq \ell - \varepsilon$ car (u_n) est croissante.

Ainsi $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell$ et donc $-\varepsilon \leq u_n - \ell \leq 0$.

Par conséquent $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. $\square$

Remarque

Si (u_n) est croissante et majorée, puisque sa limite est la borne supérieure de l'ensemble de ses valeurs, on a :
$\forall n \in \mathbb{R},\ u_n \leq \lim u_n$.
De même, si (v_n) est décroissante et minorée, alors :
$\forall n \in \mathbb{R},\ v_n \geq \lim v_n$.

Définition (Suite adjacentes)

Deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$,
- (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante,
- $\lim(u_n - v_n) = 0$,

sont dites adjacentes.

Noter que la première hypothèse découle de deux autres : si (u_n) croît et (v_n) décroît, alors $(u_n - v_n)$ croît, et si elle croît et vérifie $\lim(u_n - v_n) = 0$, alors elle ne peut pas être strictement positive à partir d'un certain rang N, car alors sa limite serait supérieure ou égale à $u_N - v_N > 0$.

Propriété des suites adjacentes

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$, qui, de plus, vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$.

Démonstration.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$, l'ensemble des valeurs de (u_n) est majoré par v_0 et l'ensemble des valeurs de (v_n) est minoré par u_0.

Ainsi (u_n) et (v_n) convergent, disons vers ℓ et ℓ', et de plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$ et $\ell' \leq v_n$.

Alors d'une part, $0 = \lim(u_n - v_n) = \ell - \ell'$ donc $\ell' = \ell$, et d'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$ et $\ell \leq v_n$. $\square$

Exemple

Je veux montrer que la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$ est convergente.

Je pose, pour tout $n \geq 1$:

$u_n = S_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$ et $v_n = S_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$.

En particulier :

$S_n = u_{n/2}$ si n est pair, et $S_n = v_{(n-1)/2}$ si n est impair.

Donc si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite, alors S_n converge vers cette limite commune (cela se montre facilement en utilisant la définition).

Pour montrer la convergence de (S_n), il suffit donc de montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exemple (suite)

Je montre que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Pour tout $n \geq 1$:

$$u_n - v_n = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} - \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = -\frac{(-1)^{(2n+1)-1}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} < 0.$$

En particulier : $u_n \leq v_n$, et, par quotient, $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Par ailleurs :

$u_{n+1} - u_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+2} =$
$-\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0$ donc (u_n) croît, et

$v_{n+1} - v_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+3-1}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2} =$
$\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0$ donc (v_n) décroît.

Remarque : on peut montrer que $\lim S_n = \ln(2)$.

Définition

Une suite extraite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de termes de la suite (u_n).

Formellement, c'est la donnée d'une suite $(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ pour des indices $k_n \in \mathbb{N}$ vérifiant $k_0 < k_1 < \ldots$.

Exemple

Soit (u_n) définie pour tout $n \geq 0$ par $u_n = (-1)^n$.
Alors la suite (v_n) définie pour $n \geq 0$ par $v_n = u_{2n}$ est une suite extraite de (u_n). C'est la suite des termes de rang pair de (u_n).
En particulier, pour tout $n \geq 1$,
$v_n = (-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1^n = 1$. C'est une suite stationnaire.
De même, la suite (w_n) définie pour $n \geq 0$ par $w_n = u_{3n}$ est une suite extraite de (u_n). C'est la suite des termes de rang multiple de 3 de (u_n).
En particulier, pour tout $n \geq 1$,
$v_n = (-1)^{3n} = ((-1)^3)^n = (-1)^n = u_n$. Les suites (u_n) et (w_n) sont donc identiques.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée possède au moins une suite extraite convergente.

Plan de démonstration.

Soit (u_n) une suite bornée.

On cherche à construire une suite extraite u_{k_0}, u_{k_1}, $\ldots$, avec $k_0 < k_1 < \ldots$, qui soit convergente.

À cette fin, on va d'abord (étape 1) définir deux suites (a_n) et (b_n) adjacentes et telles qu'il y ait une infinité de termes de la suite (u_n) dans l'intervalle $I_n = [a_n, b_n]$, quel que soit n.

Ensuite (étape 2), en choisissant u_{k_0} dans $[a_0, b_0]$, puis u_{k_1} dans $[a_1, b_1]$ avec $k_1 > k_0$, puis u_{k_2} dans $[a_2, b_2]$ avec $k_2 > k_1$, ... (c'est toujours possible), on construit une suite (u_{k_n}) vérifiant $a_n \leq u_{k_n} \leq b_n$. Une telle suite converge nécessairement vers la limite commune de (a_n) et (b_n).

Démonstration (construction de (a_n) et (b_n)).

Initialisation. Soit m et M un minorant et un majorant de (u_n). On pose $a_0 = m$ et $b_0 = M$. Alors $a_0 \leq b_0$ et l'ensemble des u_n est contenu dans l'intervalle $I_0 = [a_0, b_0]$, qui contient donc une infinité de termes de (u_n).

De plus $b_0 - a_0 = M - m$.

Hérédité. Étant donné un intervalle $I_n = [a_n, b_n]$, avec $a_n \leq b_n$, $b_n - a_n = \frac{M-m}{2^n}$ et possédant une infinité de termes de (u_n), on considère les deux intervalles $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ et $\left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$. Alors au moins l'un des deux, que je note I_{n+1}, possède une infinité de termes de (u_n).

Soient a_{n+1}, b_{n+1}, les bornes de I_{n+1}, avec $a_{n+1} \leq b_{n+1}$.

Alors $a_{n+1} \geq a_n$, $b_{n+1} \leq b_n$, et $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{M-m}{2^{n+1}}$.

Conclusion. Il existe deux suites (a_n), (b_n) telles que $a_n \leq b_n$, (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante, et $\lim(b_n - a_n) = \lim \frac{M-m}{2^n} = 0$. Ces deux suites sont donc adjacentes.

Démonstration (construction de (u_{k_n})).

L'intervalle I_0 possède une infinité de termes de (u_n). Soit u_{k_0} l'un d'entre eux.

L'intervalle I_1 possède une infinité de termes de (u_n), donc $I_1 \setminus \{u_k : k \leq k_0\}$ aussi. Soit u_{k_1} l'un d'eux. Alors $k_1 > k_0$.

Plus généralement, si l'intervalle I_n possède une infinité de termes de (u_n), $I_n \setminus \{u_k : k \leq k_{n-1}\}$ aussi. Soit u_{k_n} l'un d'eux. Alors $k_n > k_{n-1}$.

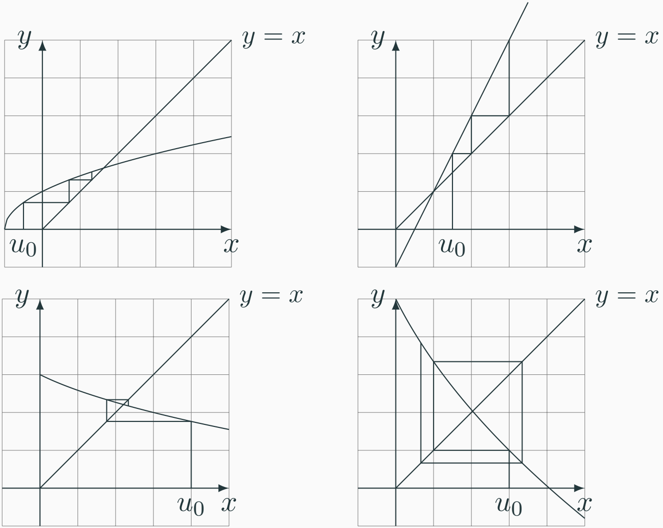
Ainsi, je construis une suite extraite (u_{k_n}) vérifiant, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{k_n} \in I_n$, c'est à dire $a_n \leq u_{k_n} \leq b_n$.

Puisque (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles convergent vers la même limite, et d'après le théorème des gendarmes, (u_{k_n}) converge aussi vers cette limite. □

3. Suites satisfaisant $u_{n+1} = f(u_n)$

3. Suites satisfaisant $u_{n+1} = f(u_n)$

a. Représentation graphique



Comportements de suites définies par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$

3. Suites satisfaisant $u_{n+1} = f(u_n)$

b. Point fixe

Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ alors la suite des images de f est $(f(u_n))_{n\geq 0}$.

Si de plus $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, et f est continue, alors par composition $(f(u_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(\ell)$.

Or $(f(u_n))_{n\geq 0}$ peut aussi s'écrire $(u_{n+1})_{n\geq 0}$.
C'est donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tronquée de son premier terme.

Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, alors $(u_n)_{n\geq 1}$ aussi.

Ainsi $f(\ell) = \ell$.

Définition

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I.
On dit que $x \in I$ est un point fixe de f si $f(x) = x$.

Ainsi, si une suite (u_n) définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors ℓ est nécessairement un point fixe de f.

Exemple

Soit f définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$.
$\forall x \in I$, si $f(x) \geq 0$ donc $f(I) \subset I$. La suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est donc bien définie.
Si (u_n) possède une limite ℓ, alors $\ell \geq 0$ et $f(\ell) = \ell$.
De cette dernière équation, je déduis $\frac{3\ell+2}{\ell+1} = \ell$, donc $\ell^2 - 2\ell - 2 = 0$ et donc $\ell \in \{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$.
Puisque $\ell \geq 0$, j'obtiens $\ell = 1 + \sqrt{3}$.
Ainsi, *si* (u_n) possède une limite, elle vaut $1 + \sqrt{3}$.
Mais ce raisonnement ne montre pas que (u_n) converge vers $1 + \sqrt{3}$.

L'exemple précédent illustre que la garantie d'*existence* d'une limite pour une suite (u_n) définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ permet parfois de déterminer la limite de (u_n) :

- si $f(I) \subset I$, et f possède un unique point fixe ℓ sur I,
- si $u_0 \in I$ et (u_n) est convergente

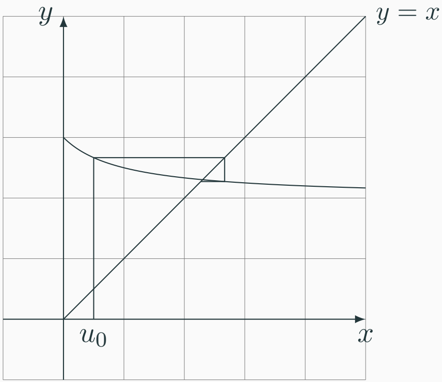
alors $\lim u_n = \ell$.

Ainsi les propriété ((u_n) croissante majorée), et ((u_n) décroissante minorée), qui garantissent l'existence d'une limite à (u_n) peuvent être particulièrement utiles dans un certain nombre de cas.

Toutefois, elle ne peuvent pas être systématiquement utilisées.

Exemple (suite)

Une représentation graphique de (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ est (ici avec $u_0 = 0.5$) :



En particulier, (u_n) converge mais n'est pas monotone.

3. Suites satisfaisant $u_{n+1} = f(u_n)$

c. Applications contractantes

Définition

Soit I un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to I$.
On dit que f est contractante sur I si :
$\exists k \in [0, 1[, \; \forall x, y \in I, \; |f(x) - f(y)| < k|x - y|$.

Propriété

Soit $f : I \to I$ une application contractante.
Alors f est continue (admis) et possède un unique point fixe $\ell \in I$.
De plus, pour tout $u_0 \in I$, la suite définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ.

Plan de démonstration.

Je montre tout d'abord que f possède un point fixe.

J'obtiens ce résultat en montrant la convergence des suites définies par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

En effet, si $\lim u_n = \ell$, alors $\ell \in I$, et, puisque f est continue (admis), par composition, j'obtiens $\lim u_n = f(\ell)$, et donc $f(\ell) = \ell$.

Je montre la convergence de telles suites en 3 étapes.

Ensuite, je montre que f possède un unique point fixe.

Enfin, je montre que toute suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers le point fixe ℓ de f.

Existence d'un point fixe (Étape 1).

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Je montre :

$\exists k \in [0, 1[$, $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $p \leq q$, $|u_q - u_p| \leq \frac{k^p}{1-k}|u_1 - u_0|$.

De f contractante, je déduis, par récurrence (rédaction omise) :

$\exists k \in [0, 1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$.

J'obtiens alors :

$$\begin{aligned} |u_q - u_p| = \quad & |u_q - u_{q-1} + u_{q-1} - u_{q-2} + \ldots + u_{p+1} - u_p| \\ & \leq |u_q - u_{q-1}| + |u_{q-1} - u_{q-2}| + \ldots + |u_{p+1} - u_p| \\ & \leq (k^{q-1} + k^{q-2} + \ldots + k^p)|u_1 - u_0| \\ & = k^p \frac{1-k^{q-p}}{1-k}|u_1 - u_0| \leq \frac{k^p}{1-k}|u_1 - u_0|. \end{aligned}$$

Existence d'un point fixe (Étape 2).

D'après Bolzano-Weirstrass, puisque $u_n \in I$, et I borné, je sais que (u_n) possède une suite extraite $(u_{h_n})_{n\geq 0}$ convergente.
Soit $\ell \in I$ sa limite.

Existence d'un point fixe (Étape 3).

Je montre que (u_n) converge vers ℓ, c'est à dire :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$, alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Je sais que : $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_1$, $|u_{h_n} - \ell| \leq \varepsilon/2$.

De plus, puisque $0 \leq k < 1$, $\lim \frac{k^{h_n}}{1-k}|u_1 - u_0| = 0$.

J'en déduis :

$\exists N_2$, $\forall n \geq N_2$, $\frac{k^{h_n}}{1-k}|u_1 - u_0| \leq \varepsilon/2$.

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$ et soit $n \geq N$.

D'après l'étape 1 appliquée à $p = n$, $q = h_N$:

$|u_n - u_{h_N}| \leq \frac{k^{h_N}}{1-k}|u_1 - u_0|$.

Par conséquent, $|u_n - u_{h_N}| \leq \varepsilon/2$.

Ainsi : $|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{h_N}| + |u_{h_N} - \ell| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Unicité du point fixe.

Supposons qu'il existe ℓ et ℓ' vérifiant $f(\ell) = \ell$ et $f(\ell') = \ell'$.
Alors $|\ell - \ell'| = |f(\ell) - f(\ell')| \leq k|\ell - \ell'|$.
Par conséquent $|\ell - \ell'| - k|\ell - \ell'| \leq 0$, c'est à dire
$(1-k)|\ell - \ell'| \leq 0$.
Or $k < 1$ donc $(1-k) > 0$, donc $|\ell - \ell'| \leq 0$.
Or $|\ell - \ell'| \geq 0$ donc $|\ell - \ell'| = 0$, et donc $\ell = \ell'$.

Convergence des suites définies par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Je montre enfin que toute suite vérifiant $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ.

Soit (u_n) une telle suite.

Puisque $\ell = f(\ell)$, j'ai, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)|$.

Or f étant contractante, $|f(u_n) - f(\ell)| \leq k|u_n - \ell|$.

Un raisonnement simple par récurrence (omis) permet alors de montrer :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.

De $\lim k^n = 0$ (car $0 \leq k < 1$), j'obtiens, par produit,
$\lim k^n |u_0 - \ell| = 0$.

De $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$, je déduis alors $\lim u_n = \ell$. $\square$

Exemple

Je montre que f définie par $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ est contractante sur $[2,3]$.
Tout d'abord, je montre qu'elle vérifie $f([2,3]) \subset [2,3]$:
si $\exists x \in [2,3]$, $\frac{2x+3}{x+1} < 2$, alors $2x+3 < 2x+2$ (contradiction), et
si $\exists x \in [2,3]$, $\frac{2x+3}{x+1} > 3$, alors $2x+3 > 3x+3$ (contradiction).
Ensuite, étant donnés $x, y \in [2,3]$, j'ai :
$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{2x+3}{x+1} - \frac{2y+3}{y+1}\right| = \left|\frac{(2x+3)(y+1)-(2y+3)(x+1)}{(x+1)(y+1)}\right| =$
$\left|\frac{2xy+2x+3y+3-(2xy+2y+3x+1)}{(x+1)(y+1)}\right| = \left|\frac{y-x}{(x+1)(y+1)}\right| = \frac{1}{(x+1)(y+1)}|y-x|$
Or $x+1 \geq 3$ et $y+1 \geq 3$ donc $0 < \frac{1}{(x+1)(y+1)} \leq \frac{1}{9}$.
Ainsi $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$ avec $k = \frac{1}{9} \in [0,1[$.

Exemple (suite)

Par conséquent, f possède un unique point fixe sur $[2,3]$, égal à la limite de toute suite (u_n) définie par $u_0 \in [2,3]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Je détermine ce point fixe.
Pour tout $x \in [2,3]$,
$\frac{2x+3}{x+1} = x \iff 2x+3 = x^2 + x \iff x^2 - x - 3 = 0$,
d'où $x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.
Or $\frac{1-\sqrt{13}}{2} \simeq -1.3 \notin [2,3]$, donc $\ell = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ est l'unique point fixe de f.
Par exemple la suite $u_0 = 2$, $u_1 = f(u_0) = \frac{2\times 2+3}{2+1} = \frac{7}{3}$,
$u_2 = f(u_1) = \frac{2\times 7/3+3}{7/3+1} = \frac{23}{10}$, $\ldots$ est une suite de rationnels convergeant vers ℓ.
De plus, puisque $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{9}\,|u_n - \ell|$, d'un terme au suivant, la distance entre la valeur de la suite et ℓ est au moins divisée par 9.