Recherche Opérationnelle Alternance 1A
Programmation Linéaire
Théorie des Jeux

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Théorie des Jeux

Introduction

1. La Théorie des Jeux permet de traiter certaines situations de conflits
   - militaires ou
   - économiques.
2. On suppose que les gains ou les pertes de chaque joueur dépendent
   1. de ses propres initiatives et
   2. de celles de son adversaire.
3. On ne considère que les jeux à somme nulle.
4. On verra le théorème min-max de von Neumann,
   - on montre qu'il est une conséquence du théorème fort de la dualité,
     - à cette époque la programmation linéaire n'existait pas !
5. *"Il est rationnel que la pensée humaine soit irrationnelle"* László Mérő.
6. Livre de László Mérő : Les Aléas de la raison, de la théorie des jeux à la psychologie.

Exemple

Énoncé

Xavier et Yann décident de jouer au jeu suivant : ils indiquent simultanément à l'aide des doigts d'une main un nombre.

1. Si les deux nombres sont tous les deux pairs ou impairs, Xavier donne **6**€ à Yann.
2. Si le nombre choisi par Xavier est pair et celui de Yann impair, ce dernier donne **9**€ à Xavier.
3. Enfin si le nombre de Xavier est impair et celui de Yann pair, ce dernier donne **4**€ à Xavier.

		Yann	
		pair	impair
Xavier	pair	-6	$+9$
	impair	$+4$	-6

Exemple 1

Remarque

- en répétant le jeu, on ne ferait pas toujours la même chose,
- sinon, l'autre joueur changerait éventuellement sa stratégie et gagnerait tout le temps.
- On verra comment jouer optimalement ce jeu.

		Yann	
		pair	impair
Xavier	pair	-6	$+9$
	impair	$+4$	-6

Jeu à somme nulle

Définition

Jeu à somme nulle :

1. Deux joueurs X et Y s'affrontent (ils jouent un nombre fini de fois),
   1. X a m stratégies (pures),
   2. Y a n stratégies (pures).
2. Le jeu est déterminé par la matrice des gains $A = (a_{ij})$ (connue par les deux joueurs) où
   - a_{ij} est la valeur ce que le joueur Y donne au joueur X si
     - X joue sa stratégie i et
     - Y joue sa stratégie j.

$$\begin{array}{cc} & Y \\ X & \begin{array}{|r|r|r|} \hline -10 & 20 & 10 \\ \hline 10 & 10 & 20 \\ \hline 0 & 0 & -10 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Jeux de ruse

Jeux de ruse

1. On répète le jeu plusieurs fois.
2. On essaye
    1. de deviner l'intention de l'autre et
    2. de dissimuler sa propre intention.

Jeux de ruse

Exemple

1. Supposons qu'on a joué le jeu $N = 12$ fois,
   1. X a joué sa i-ième stratégie s_i fois : $s_1 = 3$, $s_2 = 9$.
   2. Y a joué sa j-ième stratégie r_j fois, $r_1 = 4$, $r_2 = 8$.
2. La fréquence d'application des stratégies est :
   1. pour X, $x_i = \frac{s_i}{N}$: $x_1 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$,
   2. pour Y, $y_j = \frac{r_j}{N}$: $y_1 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $y_2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

fréquence d'appli.		$y_1 = \frac{1}{3}$	$y_2 = \frac{2}{3}$
	nombre d'appli.	$r_1 = 4$	$r_2 = 8$
$x_1 = \frac{1}{4}$	$s_1 = 3$	a_{11}	a_{12}
$x_2 = \frac{3}{4}$	$s_2 = 9$	a_{21}	a_{22}

Remarque

Le vecteur x (y) est la stratégie mixte du joueur X (Y).

Définition

1. stratégie mixte du joueur X : un vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ tel que
   1. $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$ et
   2. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_m \geq 0$.
2. stratégie mixte du joueur Y : un vecteur $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tel que
   1. $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$ et
   2. $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \ldots, y_n \geq 0$.
3. Ce sont les distributions de probabilité avec lesquelles les joueurs jouent leurs stratégies.

fréquence d'appli.		$y_1 = \frac{1}{3}$	$y_2 = \frac{2}{3}$
	nombre d'appli.	$r_1 = 4$	$r_2 = 8$
$x_1 = \frac{1}{4}$	$s_1 = 3$	a_{11}	a_{12}
$x_2 = \frac{3}{4}$	$s_2 = 9$	a_{21}	a_{22}

Jeux de ruse

Lemme

1. Le gain moyen par jeu qui résulte de l'application
   - d'une stratégie mixte $\overline{x}$ par le joueur X et
   - d'une stratégie mixte $\overline{y}$ par le joueur Y

   peut être exprimé par : $\overline{x}^T \cdot A \cdot \overline{y}$.
2. En adoptant une stratégie mixte $\overline{x}$ le joueur X se garantit au moins le gain : $\min_y (\overline{x}^T \cdot A) \cdot y$, où le minimum est pris sur tous les $y \geq 0$ vérifiant $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$.
3. Ce minimum est atteint pour une stratégie pure du joueur Y, $y^* = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, c'est-à-dire :

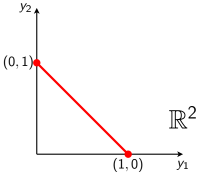
$$\min_y (\overline{x}^T \cdot A) \cdot y = \min_j \{\overline{x}^T \cdot a^j\}.$$

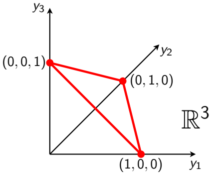
Jeux de ruse

Solution

1. Le gain moyen est $\sum_{i,j} \overline{x}_i \overline{y}_j a_{ij}$:
   1. La case ij se joue avec probabilité $\overline{x}_i \overline{y}_j$ et
   2. la valeur de cette case est a_{ij},

   qui est $\overline{x}^T \cdot A \cdot \overline{y}$.
2. C'est évident.
3. On cherche une solution optimale du PL
$$\begin{aligned} \mathbf{1}^T \cdot y &= 1 \\ y &\geq 0 \\ (\overline{x}^T \cdot A) \cdot y &= w(\min) \end{aligned}$$
   1. Il existe un sommet du polyèdre qui donne l'optimum,
   2. les sommets de ce polyèdre sont les vecteurs unitaires.





Théorème min-max de von Neumann (version 1)

Pour toute matrice A de la taille $m \times n$,

$$\max_x \min_y (x^T \cdot A) \cdot y = \min_y \max_x x^T \cdot (A \cdot y)$$

où le maximum est pris sur toutes les stratégies mixtes x et
le minimum sur toutes les stratégies mixtes y.

Théorème min-max de von Neumann (version 2)

Pour toute matrice A de la taille $m \times n$, il existe deux vecteurs x^* et y^* :

$$\min_y ((x^*)^T \cdot A) \cdot y = \max_x x^T \cdot (A \cdot y^*)$$

où le minimum est pris sur tous les $y \geq 0$ vérifiant $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$,
et le maximum sur tous les $x \geq 0$ vérifiant $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$.

Théorème min-max de **von Neumann**

Démonstration

1. Par le lemme, pour une stratégie mixte $\overline{x}$ fixée pour X, $\min_y\{(\overline{x}^T \cdot A) \cdot y\} = \min_j\{\overline{x}^T \cdot a^j\}$.
2. Notons que $\min_j\{\overline{x}^T \cdot a^j\} = \max\{z : z \leq \overline{x}^T \cdot a^j \ \forall j\}$.

$$\begin{aligned}
\max_x\{\min_y\{(x^T \cdot A) \cdot y\}\} &= \max_x\{\min_j\{x^T \cdot a^j\}\} \\
&= \max\{z : z \leq x^T a^j \ \forall j, \mathbf{1}^T x = 1, x \geq 0\} \\
&= \min\{w : w \geq a_i y \ \forall i, \mathbf{1}^T y = 1, y \geq 0\} \\
&= \min_y\{\max_i\{a_i \cdot y\}\} \\
&= \min_y\{\max_x\{x^T \cdot (A \cdot y)\}\},
\end{aligned}$$

3. il existe x^* et y^* tels que $z(\max) = w(\min)$.

Remarque

$z(\max) = w(\min)$ est la valeur du jeu.

Théorème min-max de **von Neumann**

$$(P) \quad \max\{z : z \leq \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{a^j} \ \forall j, \mathbf{1}^T \cdot \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(P) \begin{array}{rl} \mathbf{1}z - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x} & \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^T \cdot \mathbf{x} & = 1 \\ \mathbf{x} & \geq \mathbf{0} \\ z & = z(\max) \end{array} \Longleftrightarrow (P) \begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} = \\ \leq \end{array} & \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \\ (1, \mathbf{0}^T) \cdot \begin{pmatrix} z \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} & = & z(\max) \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(D) \begin{array}{rl} \mathbf{1}w - \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} & \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^T \cdot \mathbf{y} & = 1 \\ \mathbf{y} & \geq \mathbf{0} \\ w & = w(\min) \end{array} \Longleftrightarrow (D) \begin{array}{rcl} (w, \mathbf{y}^T) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix} & \begin{array}{c} = \\ \geq \end{array} & \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^T \\ \mathbf{y} & \geq & \mathbf{0} \\ (w, \mathbf{y}^T) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} & = & w(\min) \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(D) \quad \min\{w : w \geq \mathbf{a_i} \cdot \mathbf{y} \ \forall i, \mathbf{1}^T \cdot \mathbf{y} = 1, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$