Analyse Réelle 1

stephan.semirat@univ-grenoble-alpes.fr

Chapitre 1. Éléments de logique

1. Calcul propositionnel

2. Prédicats et quantificateurs

3. Exemples de raisonnements

Introduction

L'intérêt de la démarche mathématique (« hypothético-déductive ») est de permettre de *garantir* qu'une affirmation soit vraie.

> Par exemple, il est possible d'affirmer que dans le plan, la somme des angles de tout triangle est égale à 180 degrés, sans avoir à faire de mesure.

Cette garantie repose sur la rédaction d'un *raisonnement*.

> Lequel explicite une *raison* (une cause) à la véracité de l'énoncé.

À un niveau très bas, un raisonnement établit la véracité d'une affirmation (qui devient alors un théorème, un lemme, une propriété, un corollaire, ...), à partir de sa formulation en propositions plus élémentaires et en *calculant* le résultat de cette « formule ».

Le calcul se fait via des opérations sur les valeurs « vrai » et « faux ».

Exemple

L'affirmation « la somme de 2 nombres impairs est paire » signifie :

$$
\begin{array}{ll}
(& ((1+1=0) \text{ ou } (1+1=2) \text{ ou } (1+1=4) \text{ ou } ...) \\
\text{et} & (3+1=0) \text{ ou } (3+1=2) \text{ ou } (3+1=4) \text{ ou } ...) \\
\text{et} & ((5+1=0) \text{ ou } (5+1=2) \text{ ou } (5+1=4) \text{ ou } ...) \\
\text{et} & \dots \\
\vdots & \vdots \\
\text{et} & ((1+3=0) \text{ ou } (1+3=2) \text{ ou } (1+3=4) \text{ ou } ...) \\
\text{et} & (3+3=0) \text{ ou } (3+3=2) \text{ ou } (3+3=4) \text{ ou } ...) \\
\text{et} & ((5+3=0) \text{ ou } (5+3=2) \text{ ou } (5+3=4) \text{ ou } ...) \\
\text{et} & \dots \\
\vdots & \vdots \\
\text{et} & ((1+5=0) \text{ ou } (1+5=2) \text{ ou } (1+5=4) \text{ ou } ...) \\
\text{et} & (3+5=0) \text{ ou } (3+5=2) \text{ ou } (3+5=4) \text{ ou } ...) \\
\text{et} & ((5+5=0) \text{ ou } (5+5=2) \text{ ou } (5+5=4) \text{ ou } ...) \\
\text{et} & \dots \\
\vdots & \dots)
\end{array}
\quad \text{est vrai.}
$$

Exemple (suite)

La véractité de « la somme de deux nombres impairs est paire » s'obtient ainsi « mécaniquement », c.à-d. par un *calcul*.

Par exemple « $(1+1=0)$ ou $(1+1=2)$ » est vraie, car

- $(1+1=0)$ est faux
- $(1+1=2)$ est vrai
- le résultat de l'opération « faux ou vrai » est vrai.

Bien entendu, les mathématiciens ne raisonnent pas en général à ce niveau.

Mais tout raisonnement est une décomposition de l'affirmation à démontrer en une succession d'affirmations *plus simples* déjà établies (définitions, théorèmes, propriétés,...), et reliées par des « connecteurs ».

Exemple (suite)

Je peux décomposer l'affirmation « la somme de 2 nombres impairs est paire » en utilisant les *définitions* :

- Un nombre $n \in \mathbb{N}$ est pair s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
- Un nombre $n \in \mathbb{N}$ est impair s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.

L'affirmation s'énonce alors en :

> Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$, quel que soit $n' \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $n' = 2k' + 1$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $n' + n = 2K$.

Exemple (suite)

Le raisonnement justifiant la véracité de « la somme de 2 nombres impairs est paire » peut alors, par exemple, prendre la forme suivante.

Démonstration.

Soient $n, n' \in \mathbb{N}$ deux nombres impairs.

Alors par définition, il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2k + 1$ et $n' = 2k' + 1$.

Alors $n + n' = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2(k + k' + 1)$.

Je pose $K = k + k' + 1$.

Alors $K \in \mathbb{N}$ et $n + n' = 2K$.

Ainsi, par définition, $n + n'$ est pair. $\square$

Ainsi, sans chercher à raisonner au niveau très bas du « calcul propositionnel », le *calcul* de la véracité d'une affirmation reste sous-jacent à tout raisonnement rigoureux,

Des termes tels que « donc », « or » ou « ou » sont des mots avec un sens formel précis, qui rendent compte de ce calcul sous-jacent.

Dans ce chapitre, nous expliciter les règles de calcul de la véracité d'une affirmation : dans quels cas une affirmation constituée d'affirmations reliées par des connecteurs est vraie.

L'objectif est de vous sensibiliser à la précision que la rédaction mathématique requiert, et par là de vous amener à raisonner rigoureusement.

Exemple

L'affirmation « $2 > 1 \implies 2 \geq 0$ » est vraie car :

- $2 > 1$ est vrai ;
- $2 \geq 0$ est vrai
- l'affirmation connectant deux affirmations vraies par le connecteur « $\implies$ » est vraie.

1. Calcul propositionnel

Définition

Une formulation dont on peut dire qu'elle est vraie ou fausse est appelé une proposition.

Exemple

- « $3 > 0$ » est une proposition vraie
- « $x > 0$ » n'est pas une proposition (ne connaissant pas x)
- Sachant que $x = 2$, « $x > 0$ » est une proposition vraie
- « Il existe $x \in [-1, 1]$ tel que $x > 0$ » est une proposition vraie
- « Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ » est une proposition vraie
- « Si $x = 2$ alors $x > 0$ » n'est pas une proposition (ne connaissant pas x)
- « Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, si $x = 2$ alors $x > 0$ » est une proposition vraie

À partir de propositions dont on connait la valeur de vérité, on peut construire d'autres propositions à l'aide de *connecteurs* (donc, et, ou, ...).

La valeur de vérité de la proposition ainsi construite dépend de celle des propositions utilisées et des connecteurs utilisés.

Elle se *calcule* à partir des valeur des propositions utilisées et des tables de vérité des connecteurs utilisés.

Négation

La table de vérité du connecteur de négation « non » est donnée par :

P	(non P)
V	F
F	V

Remarquer qu'une proposition et sa négation ne sont jamais simultanément vraies. C'est le *principe de non-contradiction*[1].

1. Le principe du *tiers exclu*, équivalent, stipule qu'une proposition est ou bien vraie ou bien fausse.

Définition

Une contradiction est une proposition P telle que P est vraie et (non P) est vraie.

En particulier, une contradiction n'existe pas.

Exemple

Montrer qu'il existe des irrationnels a et b tels que a^b est rationnel.

Démonstration.
Considérons la proposition P : $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.
D'après le tiers exclu, ou bien P est vraie, ou bien (non P) est vraie.

- Si P est vraie, et sachant que $\sqrt{2}$ est irrationnel, le résultat $a^b \in \mathbb{Q}$ est obtenu avec $a = b = \sqrt{2}$.
- Si (non P) est vraie, alors $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel.

  Dans ce cas, en posant $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$, on obtient aussi $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$.

$\square$

Disjonction

La table de vérité du connecteur de disjonction « ou » est :

P	Q	$(P \text{ ou } Q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conjonction

La table de vérité du connecteur de conjonction « et » est :

P	Q	$(P \text{ et } Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exercice

Vérifier que les propositions (P et Q) et
(non ((non P) ou (non Q))) ont même table de vérité.
Que peut-on en déduire quant à la négation de (P et Q) ?

Implication

La table de vérité du connecteur d'implication « $\implies$ » est :

P	Q	$(P \implies Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La proposition $(P \implies Q)$ peut se dire :

- P implique Q
- Si P est vraie, alors Q est vraie
- Pour que P soit vraie, il faut que Q soit vraie
- Q est une condition nécessaire de P
- Pour que Q soit vraie, il suffit que P soit vraie
- P est une condition suffisante de Q

Exercice

Vérifier que $(P \implies Q)$ et $((\text{non } P) \text{ ou } Q)$ ont même table de vérité.

Réciproque

La proposition $(Q \implies P)$ est appelée <u>réciproque</u> de $(P \implies Q)$.

Les propositions $(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)$ peuvent ne pas avoir la même valeur.

> En effet, si par exemple P est fausse et Q est vraie, alors $(P \implies Q)$ est vraie, tandis que $(Q \implies P)$ est fausse.

Contraposée

La proposition ((non Q) $\implies$ (non P)) est appelée <u>contraposée</u> de ($P \implies Q$).

Propriété.

Une implication $(P \implies Q)$ et sa contraposée
$((\text{non } Q) \implies (\text{ non } P))$ ont toujours même valeur.

Démonstration.

P	Q	$(P \implies Q)$	non P	non Q	$((\text{non } Q) \implies (\text{non } P))$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

$\square$

Ainsi, pour montrer qu'une implication est vraie, il est possible de montrer que sa contraposée l'est.

Équivalence

La table de vérité du connecteur d'équivalence « $\iff$ » est :

P	Q	$(P \iff Q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La proposition $(P \iff Q)$ peut se lire :

- P est équivalente à Q
- P est vraie si et seulement si Q est vraie
- Pour que P soit vraie, il faut et il suffit que Q soit vraie
- P est une condition nécessaire et suffisante de Q

Exercice

Justifier que $(P \iff Q)$ et $((P \implies Q)$ et $(Q \implies P))$ ont même table de vérité.

Propriétés

Dans chacun des cas suivants, les propositions 1 et 2 ont même table de vérité

Proposition 1	Proposition 2
(non (non P))	P
(P ou Q)	(Q ou P)
(P et Q)	(Q et P)
((P ou Q) ou R)	(P ou (Q ou R))
((P et Q) et R)	(P et (Q et R))
(P et (Q ou R))	((P et Q) ou (P et R))
(P ou (Q et R))	((P ou Q) et (P ou R))
(non (P ou Q))	((non P) et (non Q))
(non (P et Q))	((non P) ou (non Q))

Dans un raisonnement, on peut donc remplacer la proposition 1 par la proposition 2 et réciproquement.

2. Prédicats et quantificateurs

De nombreuses propositions prennent la forme d'un résultat d'existence.

Exemple (Définition de la racine carrée)

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, il existe un unique $y \in [0, +\infty[$ tel que $y^2 = x$.

Et d'autres proposition prenne la forme d'une propriété vérifiée par tout un ensemble d'objets.

Exemple

- Théorème de Pythagore : Pour tout triangle ABC rectangle en A, $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- Identité remarquable : Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Ainsi, les expressions « Pour tout [...] » et « Il existe [...] » sont centrales dans l'argumentation.

Nous allons préciser leur signification, et comment les manipuler.

Définition

Un prédicat $P(x, y, \ldots)$ est une formulation qui peut être vraie ou fausse selon les valeurs de variable x, y, ... fixées à l'*extérieur* de l'expression du prédicat.

Exemple

- « $x > 2$ » est un prédicat.

  Il est vrai pour tout $x > 2$, et faux sinon.
- « Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \times a = 1$ » est un prédicat.

  Il est vrai lorsque $a \neq 0$, et faux lorsque $a = 0$.

  ⇝ Noter que la valeur de vérité de ce prédicat ne dépend pas de x, qui n'est pas fixée à l'extérieur de l'expression.
  On dit que x est une variable muette de ce prédicat.
- « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ » n'est pas un prédicat.

  C'est une proposition vraie, où x est une variable muette.

Définition

Soit $P(x)$ un prédicat dépendant de x. Soit E un ensemble. La proposition

$$(\forall x \in E,\, P(x))$$

- est vraie lorsque $P(x)$ est vraie *pour tous* les éléments x de E ;
- est fausse lorsque $P(x)$ est fausse *pour au moins* un élément x de E.

La proposition $(\forall x \in E,\, P(x))$ se lit :
« Pour tout $x \in E$, $P(x)$ » ou « Quel que soit $x \in E$, $P(x)$ ».
Le symbole $\forall$ s'appelle le quantificateur universel.

Ainsi la proposition $\forall x \in E$, $P(x)$ est la *conjonction* de l'ensemble des propositions $P(e)$ lorsque e parcourt l'ensemble E.

Si par exemple E est un ensemble fini, en notant e_1, e_2, e_3, ... ses éléments, la proposition « $\forall x \in E$, $P(x)$ » signifie
$P(e_1)$ et $P(e_2)$ et $P(e_3)$ et $\ldots$

Quantificateur existentiel

Soit $P(x)$ un prédicat dépendant de x. Soit E un ensemble. La proposition

$$(\exists x \in E,\ P(x))$$

- est vraie lorsque $P(x)$ est vraie *pour au moins* un élément x de E ;
- est fausse lorsque $P(x)$ est fausse *pour tous* les éléments x de E.

La proposition $(\exists x \in E,\ P(x))$ se lit : « Il existe $x \in E$, $P(x)$ ».
Le symbole $\exists$ s'appelle le quantificateur existentiel.

Ainsi la proposition $\exists x \in E$, $P(x)$ est la *disjonction* de l'ensemble des propositions $P(e)$ lorsque e parcourt l'ensemble E.

Si par exemple E est un ensemble fini, en notant e_1, e_2, e_3, ... ses éléments, la proposition « $\exists x \in E$, $P(x)$ » signifie
$P(e_1)$ ou $P(e_2)$ ou $P(e_3)$ ou $\ldots$

Exemple

- $(\forall x \in \mathbb{R},\, x^2 \geq 0)$ est une proposition vraie
- $(\exists x \in \mathbb{R},\, x^2 > 0)$ est une proposition vraie
- $(\forall x \in \mathbb{R},\, x^2 > x)$ est une proposition fausse

  En effet, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 \leq x$, par exemple $x = 1$, ou $x = \frac{1}{2}$.

Propriété

La négation de $(\forall x \in E,\ P(x))$ est $(\exists x \in E,\ (\text{non } P(x)))$.

Démonstration.

Rappelons :

$(\forall x \in E, P(x))$

- est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E,
- est fausse lorsque $P(x)$ est fausse pour au moins un élément x de E.

On en déduit, par négation :

(non $(\forall x \in E, P(x))$)

- est fausse lorsque $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E,
- est vraie lorsque $P(x)$ est fausse pour au moins un élément x de E.

Autrement dit :

(non $(\forall x \in E, P(x))$)

- est fausse lorsque (non $P(x)$) est fausse pour tous les éléments x de E,
- est vraie lorsque (non $P(x)$) est vraie pour au moins un élément x de E.

Ce qui rend exactement compte de : $(\exists x \in E,$ (non $P(x)))$. $\square$

Propriété

La négation de $(\exists x \in E, P(x))$ est $(\forall x \in E, (\text{non } P(x)))$.

Démonstration.

La propriété précédente, appliquée à (non P) au lieu de P, dit :
la négation de $(\forall x \in E, (\text{non } P(x)))$ est $(\exists x \in E, P(x))$.
Par double négation, j'obtiens :
la proposition $(\forall x \in E, (\text{non } P(x)))$ est la négation de $(\exists x \in E, P(x))$. $\square$

3. Exemples de raisonnements

Exemple (Raisonnement général)

Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$.

Méthode

- Pour montrer une proposition de la forme $(\forall x \in E, P(x))$, on commence par :
  Soit $x \in E$. Alors [...]
- Pour montrer une proposition de la forme $(\exists x \in E, P(x))$, ou bien on utilise ses connaissances (théorèmes, propriétés,...), ou bien on exhibe un exemple $x = ...$ tel que $P(x)$ soit vraie.
  Dans ce dernier cas, on écrit :
  Je pose $x = ...$ [calculs]... Donc $P(x)$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Je pose $y = x + 1$.

De $1 > 0$, je déduis, en ajoutant x : $x + 1 > x + 0$.

Ainsi $y > x$. $\square$

Exemple (Raisonnement par l'absurde)

Montrer : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\frac{2x+2}{x-1} \neq 2$.

<u>Méthode</u>

Pour montrer une propriété par l'absurde, je suppose que sa négation est vraie, et j'en déduis une contradiction.

Démonstration.

Je suppose, par l'absurde, qu'il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $\frac{2x+2}{x-1} = 2$.

Alors, en multipliant par $x - 1$ (non nul), j'obtiens :

$2x + 2 = 2(x - 1)$.

J'en déduis $2x + 2 = 2x - 2$, et donc $2 = -2$.

Or $2 \neq -2$. Contradiction. $\square$

Exemple (Disjonction de cas)

Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq x$.

<u>Méthode</u>

Je décompose la proposition à montrer en plusieurs cas, et je montre chacun des cas.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors $x \geq 0$ ou $x < 0$.

Je suppose $x \geq 0$. Je sais que dans ce cas $|x| = x$.

Or $x \geq x$, donc $|x| \geq x$.

Je suppose $x < 0$. Je sais que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$.

Ainsi $|x| \geq 0 > x$. Donc $|x| > x$, et donc $|x| \geq x$. $\square$

Exemple (Raisonnement par contraposée)

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair, alors n est pair.

→ Méthode

On raisonne par contraposée lorsqu'on montre
(non Q) $\implies$ (non P) au lieu de ($P \implies Q$).

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Je suppose que n est impair.

Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.

Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2) + 1 = 2K + 1$,
avec $K = 2k^2 + 2 \in \mathbb{N}$.

Donc n^2 est impair.

Par contraposée, si n^2 est pair, alors n est pair. $\square$