Analyse Réelle 1

stephan.semirat@univ-grenoble-alpes.fr

Chapitre 2. Les nombres réels

Rappelons $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathcal{Z},\, b \in \mathcal{Z}^*\right\}$.

En particulier, de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$ puis de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$, des nombres sont ajoutés permettant certaines propriété non satisfaites dans le premier ensemble de l'être dans le second :

- tout $a \neq 0$ n'a pas d'opposé dans $\mathbb{N}$, mais en possède un dans $\mathbb{Z}$;
- tout $a \neq \pm 1$, $a \neq 0$, n'a pas d'inverse dans $\mathbb{Z}$, mais en possède un dans $\mathbb{Q}$.

De même, l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ comble une certaine « lacune » de $\mathbb{Q}$.

1. Bornes inférieures et supérieures

Définition

Soit E un ensemble de nombres.

- On dit que $a \in E$ majore $b \in E$ si $a \geq b$.
- Si $a \in E$ et si a majore tout $b \in E$, alors a est un maximum de E (ou plus grand élément de E). Dans ce cas, il est unique, noté $\max A$.
- Soit $A \subset E$ une partie de E.
  On dit que $M \in E$ est un majorant de A s'il majore tous les éléments de A.
  Dans ce cas, on dit que A est majoré par M.
- On définit de même minoré, minimum (noté $\min E$) et minorant.
- Une partie $A \subset E$ admettant un minorant et un majorant est dite bornée.

Exemple

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{2, 3\}$.

Alors :

- le nombre 2 majore le nombre 1 ;
- le nombre 3 est l'élément maximum de A ;
- les nombres 3 et 4 sont des majorants de A.

Aussi, le nombre 2 est l'élément minimum de A, et les nombres 1 et 2 sont des minorants de A.

Exemple

Soit $E = \mathbb{Q}$ et $A = \{x : x \in \mathbb{Q} \text{ et } x > 0\}$ (aussi noté $\mathbb{Q}^{*+}$).
Alors A n'a pas d'élement minimum.

Démonstration.

Supposons, par l'absurde, que a soit le minimum de A.
En particulier, $a \in A$, donc $a \in \mathbb{Q}$ et $a > 0$.
Mais alors $\frac{a}{2} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{a}{2} > 0$.
Ainsi $\frac{a}{2} \in A$.
Or a est le minimum de A, donc $a \leq \frac{a}{2}$.
Mais $\frac{1}{2} < 1$, donc, en multipliant par $a > 0$, on a aussi $\frac{a}{2} < a$.
Contradiction.
Ainsi, A ne possède pas de minimum. $\square$

Définition

Soit E un ensemble de nombres, et soit $A \subset E$, $A \neq \varnothing$.

- On dit que A admet une <u>borne supérieure</u> s'il est majoré et possède un majorant plus petit que tous les autres.
  Dans ce cas, on note $\sup A$ la borne supérieure de A.
- On dit que A admet une <u>borne inférieure</u> s'il est minoré et possède un minorant plus petit que tous les autres.
  Dans ce cas, on note $\inf A$ la borne inférieure de A.

Exemple

Soit $E = \mathbb{Q}$ et $A = \{x : x \in \mathbb{Q} \text{ et } x > 0\}$.

Alors $A \neq \varnothing$, A admet une borne inférieure, et $\inf A = 0$.

Démonstration.

Par exemple $1 \in A$ donc $A \neq \varnothing$.

Le nombre $0 \in \mathbb{Q}$ minore A, donc A possède un minorant.

Montrons que c'est le plus grand minorant de A, c.à-d. : tout minorant $m \in \mathbb{Q}$ de A vérifie $m \leq 0$.

Soit $m \in \mathbb{Q}$ un minorant quelconque de A.

Supposons, par l'absurde, $m > 0$.

Puisque $m \in \mathbb{Q}$ et $m > 0$, on a $\frac{m}{2} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{m}{2} > 0$.

Donc $\frac{m}{2} \in A$, et puisque m est un minorant de A, $m \leq \frac{m}{2}$.

Or $m > 0$ donc on a aussi $\frac{m}{2} < m$. Contradiction.

$\square$

2. Le corps des nombres réels

Exemple

Soit $E = \mathbb{Q}$ et $A = \{x : x \in \mathbb{Q} \text{ et } 0 \leq x^2 < 2\}$.
Alors $A \neq \varnothing$, A est bornée, mais A ne possède pas de borne supérieure (dans $\mathbb{Q}$).

Démonstration.

A est non vide car par exemple $0 \in A$.

A est bornée car :

- $\longrightarrow$ A est majorée par exemple par $3 \in \mathbb{Q}$, car si $x \geq 3$, alors $x^2 = 9 \geq 2$ donc $x \notin A$;
- $\longrightarrow$ A est minorée par exemple par $-3 \in \mathbb{Q}$, car si $x \leq -3$, alors $x^2 = 9 \geq 2$ donc $x \notin A$.

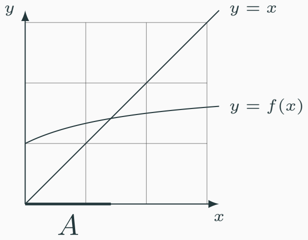
Il reste à montrer que A ne possède pas de borne supérieure.

Exemple (suite)

Montrons tout d'abord qu'il n'existe pas de $x \in \mathbb{Q}^+$ tel que $x^2 = 2$.
Considérons, par l'absurde, un tel x :
$x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$, avec $\frac{p}{q}$ irréductible et $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.
Alors $p^2 = 2q^2$.
Par conséquent p est un multiple de 2, et on peut écrire $p = 2p'$.
Alors $4{p'}^2 = 2q^2$, donc $q^2 = 2{p'}^2$.
Par conséquent q est aussi un multiple de 2, ce qui contredit $\frac{p}{q}$ irréductible.

Exemple (suite)

Puisque $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}^+$, tout $x \in \mathbb{Q}^+$ vérifie ou bien $0 \leq x^2 < 2$ (Cas 1), ou bien $x^2 > 2$ (Cas 2).
Puisque $A = \{x : x \in \mathbb{Q}$ et $0 \leq x^2 < 2\}$, ces deux cas correspondent respectivement à :
Cas 1 : $x \in A$, Cas 2 : ($x \notin A$ et x majore A).
Remarquons qu'on peut aussi les décrire par :
Cas 1 : $f(x) > x \geq 0$, Cas 2 : $f(x) < x$,

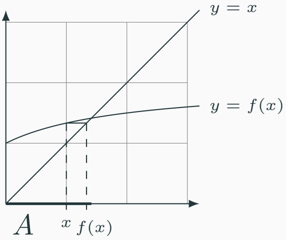


où $f(x) = \frac{2x+2}{x+2}$ (en effet : si $x \geq 0$, alors $\frac{2x+2}{x+2} \leq x \iff x^2 \leq 2$).

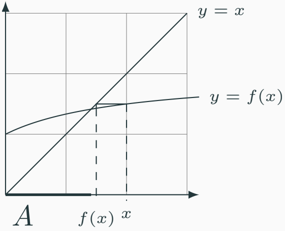
Exemple (suite)

De plus, pour tout $x \in \mathbb{Q}^+$, on a $f(x) = \frac{2x+2}{x+2} \in \mathbb{Q}^+$, et

- si $x \in A$ (cas 1), alors $f(x) \in A$;
- si $x \notin A$ et x majore A (cas 2), alors $f(x)$ majore aussi A.



Cas 1



Cas 2

Exemple (suite)

Supposons à présent, par l'absurde, que A possède une borne supérieure $a \in \mathbb{Q}$. De $0 \in A$, on déduit $a \in \mathbb{Q}^+$.

Par conséquent, ou bien

Cas 1 : $a \in A$, et dans ce cas $f(a) \in A$ et $f(a) > a$,
ce qui contredit le fait que a majore tout élément de A,

ou bien

Cas 2 : $a \notin A$ et a majore A,
et dans ce cas, $f(a) \in \mathbb{Q}^+$, $f(a) < a$, et $f(a)$ majore A,
ce qui contredit le fait que a est le plus petit majorant de A dans $\mathbb{Q}$.

L'exemple précédent montre que $\mathbb{Q}$ ne satisfait pas la propriété de la borne supérieure.

Définition (Propriété de la borne supérieure)

On dit qu'un ensemble de nombres E satisfait la propriété de la borne supérieure si toute partie $A \subset E$ non vide et majorée admet une borne supérieure dans E.

L'ensemble des réels comble cette lacune de $\mathbb{Q}$.

Définition (Axiomes des nombres réels)

On dit qu'en ensemble E muni d'opérations $+$, $\times$ et de la relation d'ordre $\leq$ vérifie les <u>axiomes des nombres réels</u> si :

- E muni de $+$, $\times$ et $\leq$ est un *corps totalement ordonné* :

Les nombres réels forment un groupe additif (+) abélien.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, x + (y + z) = (x + y) + z \text{ (+ associative)}$$
$$\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = 0 + x = x \text{ (existence d'un élément neutre 0)}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}, x + x' = x' + x = 0 \text{ (existence d'un opposé pour tout élément)}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, x + y = y + x \text{ (+ commutative)}$$

Le groupe des nombres est ordonné par une relation d'ordre totale ($\leq$).

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y \text{ (} \leq \text{ antisymétrique)}$$
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z \text{ (} \leq \text{ transitive)}$$
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, (x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z) \text{ (} \leq \text{ compatible avec +)}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, (x \leq y) \text{ ou } (y \leq x) \text{ (} \leq \text{ totale)}$$

Les nombres (privés du nombre 0) forment un groupe multiplicatif ($\times$) abélien.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, x \times (y \times z) = (x \times y) \times z \text{ (} \times \text{ associative)}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, x \times y = y \times x \text{ (} \times \text{ commutative)}$$
$$\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \times 1 = 1 \times x = x \text{ (existence d'un élément neutre 1 différent de 0)}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \exists x' \in \mathbb{R}, x \times x' = x' \times x = 1 \text{ (existence d'un inverse pour tout élément non nul)}$$

Le groupe multiplicatif ($\times$) est compatible avec l'addition (+) et la relation d'ordre ($\leq$), de telle sorte que les nombres forment un corps totalement ordonné.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3, x \times (y + z) = x \times y + x \times z \text{ (distributivité de } \times \text{ par rapport à +)}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, (0 \leq x) \text{ et } (0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq x \times y) \text{ (} \leq \text{ compatible avec } \times \text{)}$$

- E satisfait la propriété de la borne supérieure.

Théorème (Admis)

Il existe un ensemble vérifiant les axiomes des nombres réels.

Il existe plusieurs constructions d'un tel ensemble.

On peut montrer que toute construction aboutit à un même ensemble « à isomorphisme d'anneaux totalement ordonnés » près.

Ainsi, il existe essentiellement *un unique ensemble* vérifiant les axiomes des nombres réels.

Cet ensemble est noté $\mathbb{R}$ et appelé corps des réels.

3. Propriétés de $\mathbb{R}$

Par définition, $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure (toute partie non vide majorée possède une borne supérieure).

Par passage à l'opposé, il possède aussi la « propriété de la borne inférieure » (toute partie non vide minorée possède une borne inférieure).

Il est utile de disposer des caractérisations suivantes des bornes supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$.

Propriété

- Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, A majorée. Alors $a \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de A si, et seulement si :
  - $\forall x \in A$, $x \leq a$;
  - $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$, $x > a - \varepsilon$.
- Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, A minorée. Alors $a \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de A si, et seulement si :
  - $\forall x \in A$, $a \leq x$;
  - $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$, $x < a + \varepsilon$.

Démonstration.

Montrons la caractérisation de la borne supérieure.

$\Longrightarrow$: Soit a le plus petit majorant de A.

Alors par définition : $\forall x \in A$, $x \leq a$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Alors $a - \varepsilon < a$, donc $a - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A.

Donc il existe $x \in A$ tel que $x > a - \varepsilon$.

$\Longleftarrow$: Soit $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$(\forall x \in A$, $x \leq a)$ et $(\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$, $x > a - \varepsilon)$.

Alors a est un majorant de A.

Soit M un majorant quelconque de A.

Je veux montrer $M \geq a$.

Je suppose, par l'absurde, que $M < a$.

Soit $\varepsilon = a - M > 0$.

Alors il existe x tel que $x > a - \varepsilon = a - (a - M) = M$.

Contradiction.

$\square$

Propriété (des segments emboîtés)

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \leq b_n\}$, avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ vérifiant $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.

Alors $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} S_n \neq \varnothing$.

Démonstration.

Il faut montrer que tous les S_n possèdent un élément commun.

L'ensemble $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et majoré par tout élément de B, et l'ensemble $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ est non vide et minoré par tout élément de A.

On peut donc poser : $\alpha = \sup A$ et $\beta = \inf B$.

Le nombre α, plus petit majorant de A, est donc inférieur à tout élément de B.

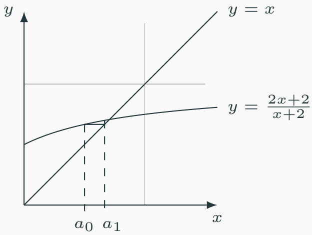
C'est donc aussi un minorant de B, et donc $\alpha \leq \beta$.

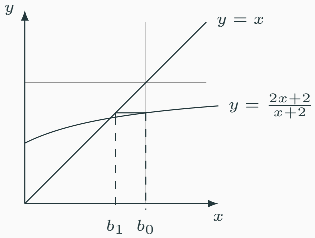
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$.

Donc $[\alpha, \beta] \neq \varnothing$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $[\alpha, \beta] \subset S_n$. $\square$

Exemple

Remarquons que $\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété des segments emboîtés. En effet, les suites ci-dessous vérifient $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$, et convergent vers $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.





$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{2a_n+2}{a_n+2} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_0 = 2 \\ b_{n+1} = \frac{2b_n+2}{b_n+2} \end{cases}$$

En posant $S_n = \{x : x \in \mathbb{Q} \text{ et } a_n \leq x \leq b_n\}$, on a donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n = \varnothing$.

Propriété (d'Archimède)

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, avec $y > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \times y > x$.

Démonstration.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, avec $y > 0$.

Supposons, par l'absurde, que pour $n \in \mathbb{N}$, $ny \leq x$.

Alors l'ensemble $A = \{ny : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ est majoré par x.

De plus, $0 \in A$ donc $A \neq \varnothing$.

Ainsi, A possède une borne supérieure a.

Soit $m \in \mathbb{N}$ et posons $n = m + 1 \in \mathbb{N}$.

Alors $ny \leq a$, donc $my \leq a - y$.

Cela montre : $\forall m \in \mathbb{N}$, $my \leq a - y$.

Ce qui signifie que $a - y$ est un majorant de A.

Alors $a \leq a - y$, donc $y \leq 0$. Contradiction. $\square$

Exemple

Montrons que la borne inférieure de $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$ est 0.

Démonstration.

Tout d'abord $1 \in A$ donc $A \neq \emptyset$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \geq 0$ donc 0 est un minorant de A.

Ainsi A admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Il reste à montrer qu'elle est égale à 0, c'est à dire :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n} < 0 + \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$.

D'après la propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\varepsilon > 1$.

Ainsi $\frac{1}{n} < \varepsilon$. $\square$

Propriété (existence d'une partie entière)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que
$n \leq x < n+1$.
Cet entier n s'appelle la partie entière de x, notée $E(x)$.

Démonstration.

Montrons tout d'abord l'unicité.
Si $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ vérifient $n \leq x < n+1$ et $m \leq x < m+1$
alors $-m-1 < -x < -m$ et donc, par somme :
$n-m-1 < 0 < n+1-m$, c'est à dire $n-m < 1$ et $n-m > -1$.
Or $n-m \in \mathbb{Z}$, donc $n-m = 0$, donc $n = m$.

Montrons ensuite l'existence.

- Traitons d'abord le cas $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$.
  D'après la propriété d'Archimède appliquée x et à $y = 1$:
  $\exists m \in \mathbb{N}$, $m \times 1 > x$.
  L'ensemble $A = \{m \in \mathbb{N} : m > x\}$ est donc non vide dans $\mathbb{N}$.
  Il possède donc un minimum $p \in \mathbb{N}$.
  Par définition $p > x \geq 0$, donc $p \geq 1$.
  Ainsi $n = p - 1$ vérifie $n \in \mathbb{N}$.
  De plus $n \notin A$, car p est le minium de A dans $\mathbb{N}$.
  Par conséquent $n \leq x$ et $x < p$ c.à-d. $n \leq x < n + 1$.
- Traitons maintenant le cas $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$.
  Archimède appliquée $-x$ et à $y = 1$ donne : $\exists q \in \mathbb{N}$, $q > -x$.
  En appliquant le cas précédent à $x + q > 0$, on obtient
  l'existence de $n' \in \mathbb{N}$ tel que $n' \leq x + q < n' + 1$.
  Enfin, en posant $n = n' - q$, on obtient : $n \leq x < n + 1$. $\square$