Intro aux cours d'informatique théorique en 1AA

notamment, les cours de ≪ théorie des langages et logiques formels ≫

En gros, ≪ *formel* ≫ pour ≪ manipulable automatiquement ≫.

Théorie des langages formels : une théorie mathématique des ≪ traitements ≫ de langages informatiques ou mathématiques

Logique formelle : une théorie mathématique d'un sous-ensemble du langage mathématique

Enseignants Sylvain Boulmé et Nils Gesbert.
chercheurs en compilation, vérification de programmes, logique formelle

Cours en 1AA
Automates finis (SB en P1),
Logique pour l'informatique (NG en P1-P3)
Grammaires et compilation + Projet GL (SB en P2-P3).

Puissance et limites de la formalisation mathématique

Qu'est-ce que ≪ les maths ≫ ?
Pourquoi c'est difficile ?
Pourquoi les ingénieur·es **doivent** en faire ?

Le paradoxe des maths à notre époque

- Discipline fondamentalement méconnue du grand public, du sempiternel ≪ *à quoi ça sert ?* ≫ à ≪ *la bosse des maths* ≫

- Maths ≪ non élémentaires ≫ **au cœur de nos techno-sciences** avec théories *des probabilités et statistiques, de la relativité générale, de la mécanique quantique, de la calculabilité, du signal, de l'information, du contrôle, de la mécanique des fluides, de la thermodynamique, ...*

Depuis le 17° siècle, révolution de **notre vision du monde** et **de nos moyens d'action sur lui** (pour le pire et le meilleur).

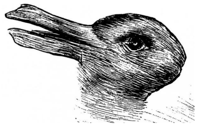
Galilée (1623) ≪ *Le livre de l'Univers est écrit en **langue** mathématique. Sans elle, il est **humainement** impossible d'en saisir le moindre mot.* ≫

Descartes (1637) ≪ *La méthode scientifique pourrait nous rendre comme maîtres et possesseurs de la nature.* ≫

Plan

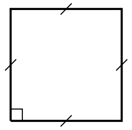
Pensée floue, jugements intuitifs & erreurs...

1) Cet animal a-t-il de grandes oreilles ?
   a. Non, c'est un canard.
   b. Oui, c'est un lapin.



fr.wikipedia.org/wiki/Canard-lapin

2) Est-ce un triangle ou un rectangle ?
   a. Oui.
   b. Non, c'est un carré.



3) Mettre au passif la phrase « *Ce prof estime les élèves brillants* ».
   a. Les élèves brillants sont estimés par ce prof.
   b. Les élèves sont estimés brillants par ce prof.

4) Un « *café crème* » coûte 1,1€. Sachant que le *café* coûte 1€ de plus que la *crème*, combien coûte la *crème* ?

   La crème coûte 0,05€ (et le café 1,05€).

Attention aux "*heuristiques de jugement*" ! (D. Kahneman).

Peut-on appliquer des adjectifs à des adjectifs ?

(une question de base de l'étude du langage)

Exemples « court » et « long » sont *courts* car *monosyllabiques*.
« monosyllabique » et « polysyllabique » *longs* car *polysyllabiques*.

Soit *réflexif* (resp. *antiréflexif*) l'adjectif s'appliquant aux adjectifs qui *s'appliquent* (resp. *ne s'appliquent pas*) à eux-mêmes.
Exemples « polysyllabique » et « court » sont *réflexifs*,
« monosyllabique » et « long » sont *antiréflexifs*.

Question « antiréflexif » est-il antiréflexif ?
Si « antiréflexif » est antiréflexif, alors il est réflexif : absurde.
Si « antiréflexif » ne l'est pas, alors il est antiréflexif : absurde.

Solution pour éviter ce paradoxe
restriction à une hiérarchie d'adjectifs (ou de langages) avec « niveaux entiers »

Mais il faut pour cela « quitter » la langue naturelle !

Contrôler la pensée floue par la mathématique

La mathématique est un langage :
- *pour définir des concepts non-flous et non paradoxaux ;*
- *et vérifier que les raisonnements sur ces concepts sont corrects.*

Logique formelle : déf. **mathématique** de ce langage avec raisonnements vérifiables **mécaniquement** (par ordinateur).

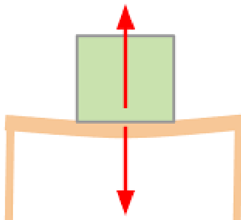
Interactions "intuition" & "formalisation"

verbalisation & rédaction d'IM

pensée floue, intuitions, réflexes, "images mentales" (IM)	→	**texte formel non-ambigu**, cohérence vérifiable par calcul (sans "penser")

import ou corrections d'IM

Puissance et limites des abstractions mathématiques



Exemple de la réaction du support

Abstraction simple d'un phénomène complexe (liaisons chimiques)

Validité approximable **expérimentalement**.

Modèle permettant des **calculs prédictifs** (table supportant N kg).

simplifications & généralisations

observations ⇄ **abstractions mathématiques**

prédictions (validables expérimentalement)

Logiques formelles comme abstractions mathématiques

de la mathématique, supposant une capacité de calcul « parfaite »

Limites physiologiques au raisonnement formel

capacité de notre mémoire à court-terme

vigilence dans calculs « pénibles » (pour ne pas se tromper)

Invention de l'écriture

pré-requis historique au développement des maths.

Logiques formelles **impraticables** sans ordinateur ! !

Les « vrai·es » mathématicien·nes **rédigent** en « semi-formel ».

Plan

Une définition « floue » de la mathématique

Promenade au pays des nombres *réels*

Conclusions (A RETENIR)

« Wesh les darons, est-ce que $0,99999999\ldots = 1$? »

Preuve de $0,999999999\ldots = 1$**.**

Soit $A \stackrel{def}{=} 0,999999999\ldots$

$$\begin{array}{rrcl} & 10 \times A & = & 9,999999999\ldots \\ - & A & = & 0,999999999\ldots \\ \hline & 9 \times A & = & 9 \\ \textit{Donc,} & A & = & 1. \end{array}$$

CQFD.

Un exemple de preuve « semi-formelle ».

Utilisant implicitement la correction des opérations arithmétiques !

Généralisons : $1,35\overline{6789}$ est-il un rationnel, si oui lequel ?

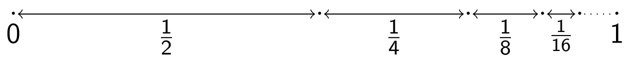
où $1,35\overline{6789} = 1,35678967896789678967896789\ldots$

Soit $A \stackrel{def}{=} 1,35\overline{6789}$

$$\begin{array}{rrcl} & 10^6 \times A & = & 1.356.789,\overline{6789} \\ - & 10^2 \times A & = & 0.000.135,\overline{6789} \\ \hline & 999.900 \times A & = & 1.356.654 \\ \textit{Donc,} & A & = & \frac{1.356.654}{999.900} = \frac{226.109}{166.650} \end{array}$$

Application au paradoxe de Zénon d'Élée (-5° siècle)

Considérant le découpage dichotomique suivant



Pourquoi est-ce que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$?

Réponse : idem qu'avant en notation binaire $\#0,1111\ldots=\#1$

Exemples en notation binaire :

$\#11,101 = 1\times 2 + 1\times 1 + 1\times\frac{1}{2} + 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{8} = 3,625$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{4}\times(1+\frac{1}{3}) = \#0,01010101\ldots$

$\#0,1111\ldots = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$

Résolution du paradoxe de Zénon d'Élée ~~en notation binaire~~

En remplaçant «$\#0,1111\ldots$» par «$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$»

Soit $A \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$

$$\begin{array}{rrcl}
 & 2\times A & = & (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots)\times 2 \\
 & & = & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots \\
- & A & = & 0+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots \\
\hline
 & A & = & 1
\end{array}$$

CQFD.

«Combinaisons» des sommes infinies de rationnels toujours ok ?

Contre-exemple

Preuve «absurde» de «$2+4+8+16+\ldots=-2$»

Soit $A \stackrel{def}{=} 2+4+8+16+\ldots$

$$\begin{array}{rrcl}
 & 2\times A & = & (2+4+8+16+\ldots)\times 2 \\
 & & = & 4+8+16+32+\ldots \\
- & A & = & 2+4+8+16+32+\ldots \\
\hline
 & A & = & -2
\end{array}$$

CQFD.

Contredit qu'**une somme de rationnels positifs est positive** !

NB «$2+4+8+16+\ldots$» formalisable en «$\Sigma_{i\in\mathbb{N}}2^{i+1}$»,
mais «dangereux» de le traiter comme un nombre «usuel».

Retour sur les questions initiales de Zénon et **Pythagore**

Dans la question ≪ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$? ≫

Deux défis

- ≪ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ ≫ est-il un nombre ?
- Comment «comparer» ce nombre à 1 ?

Problème à relier au fait que certaines «grandeurs» comme $\sqrt{2}$ ne peuvent que *s'approximer* par des suites infinies de rationnels :

- Pour $k\geq 1$, soit R_k le plus grand entier tel que $R_k^2 \leq 2\times k^2$.
  ex : pour $k=10$, $R_{10}=14$ car $14^2=196$ et $15^2=225$.
  R_k est l'entier inférieur le plus proche de $\sqrt{2}\times k$.
- $\frac{R_{10^n}}{10^n}$ donne une approximation de $\sqrt{2}$ à la n° décimale.

Apparté : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Preuve (par l'absurde)

Supposons $\sqrt{2}$ rationnel **irréductible** $\frac{p}{q}$.

Alors, $p^2 = 2q^2$.

1. Supposons p impair. Soit k tel que $p = 2k+1$.
   Alors, $p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair.
   Impossible car $2q^2$ est pair.

2. Donc il existe p_0 tel que $p = 2p_0$. Donc $4p_0^2 = 2q^2$.
   Donc $q^2 = 2p_0^2$.
   Or, q ne peut pas être pair, car sinon $\frac{p}{q}$ serait **réductible**.
   Et q ne peut pas être impair (idem qu'en ≪1.≫)
   Absurde.

≪ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ ≫ est-il un nombre ?

On définit **la somme S_n obtenue à l'étape** n par récurrence

$$S_0 \stackrel{def}{=} 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour } n \geq 1,\ S_n \stackrel{def}{=} S_{n-1} + \frac{1}{2^n}$$

Exemple : $S_3 = S_2 + \frac{1}{8} = S_1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

Reformulation : comment une suite infinie comme $(S_n)_n$ ou $(\frac{R_{10^n}}{10^n})_n$ peut-elle représenter un nombre ?

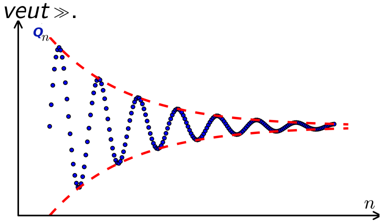
Déf une suite $(Q_n)_n$ de rationnels est **de Cauchy** ssi
$\forall q \in \mathbb{Q}, q > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow m \geq N \Rightarrow |Q_n - Q_m| < q$

Thm (Méray-Cantor 1870) Les suites de Cauchy ≪*se comportent comme des nombres*≫ dont font partie les rationnels en tant que suites constantes.
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Construction_des_nombres_r%C3%A9els`

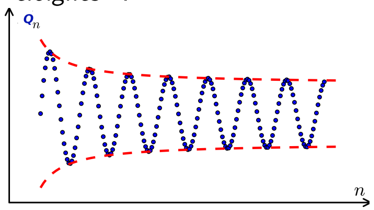
Image mentale des suites de Cauchy

`https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Cauchy`

De Cauchy : les points ≪*finissent par se rapprocher autant qu'on veut*≫.



Pas de Cauchy : aussi loin qu'on regarde, il reste des points ≪*éloignés*≫.



Déf une suite $(Q_n)_n$ de rationnels est **de Cauchy** ssi
pour tout rationnel $q > 0$, il existe un entier N_0, tel que
pour tout n et $m \geq N_0$, $|Q_n - Q_m| < q$.

Vers la formalisation de ≪ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$? ≫

Déf une suite $(Q_n)_n$ **converge** vers le rationnel q ssi
pour tout rationnel $q' > 0$, il existe un entier N_0, tel que
pour tout $n \geq N_0$, $|Q_n - q| < q'$.
Dans ce cas, on note $\lim_{n \to +\infty} Q_n = q$.

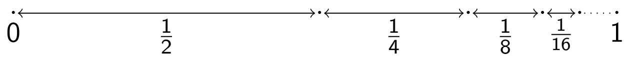
Thm toute suite $(Q_n)_n$ qui converge vers un rationnel q est une suite de Cauchy qui ≪*se comporte comme*≫ q.

Déf La question ≪ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$? ≫ doit être comprise comme ≪ $\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$? ≫.

Preuve de $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

avec $S_0 \stackrel{def}{=} 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n \stackrel{def}{=} S_{n-1} + \frac{1}{2^n}$

On montre pour tout n, $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ (comme sur le dessin !)



Preuve

- cas de base : $S_0 = 1 - \frac{1}{2^0} = 0$ OK
- cas de récurrence : si $S_{n-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ alors
  $S_{n-1} = 1 - \frac{2}{2^n}$ et $S_n = (1 - \frac{2}{2^n}) + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ OK

CQFD.

Pour finir, soit $q' > 0$ et soit N_0 tel que $2^{N_0} > \frac{1}{q'}$.
Pour tout $n \geq N_0$, $|S_n - 1| = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{N_0}} < q'$.
Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$. CQFD.

Rappels sur les preuves par récurrence

Récurrence simple pour prouver la propriété « $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ »
il suffit de donner **deux preuves** :

- cas de base : preuve de $P(0)$
- cas de récurrence : preuve de $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Récurrence généralisée pour prouver « $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ ».
il suffit de donner **deux preuves** :

- cas de base : preuve de $Q(0)$
- cas de récurrence : preuve de
  $\forall n \in \mathbb{N}, (\forall i \in \mathbb{N}, i \leq n \Rightarrow Q(i)) \Rightarrow Q(n+1)$.

EXO À LA MAISON
prouver ce second schéma par récurrence simple en prenant
$P(n) \stackrel{def}{=} \forall i \in \mathbb{N}, i \leq n \Rightarrow Q(i)$.

Conclusions de la promenade

- Représentations « à virgule » des nombres réels garantissent la **correction par construction** des manipulations sur les sommes infinies de rationnels sous-jacentes !
- La compréhension mathématique des « infinis » est laborieuse !
  Bien compris que depuis début 20° siècle.
  A motivé la **logique formelle**.
- Retombée inattendue : théorie de la **calculabilité** et de **l'informatique**.
  Peut-on généraliser la technique vue pour prouver
  $0,99999999\ldots = 1$
  à deux réels quelconques (e.g. dont on sait calculer la suite infinie des décimales) ?

  Réponse : **il ne peut pas exister de « méthode » générale** (Turing 1936).

Plan

Limites de/à la formalisation mathématique

Quelques familles de limites

- mathématiques : l'incalculable, le non-démontrable, etc ;
- physiologiques : difficultés à se concentrer ou à mémoriser ;
- psychologiques : peur des difficultés ou des erreurs (défaut de confiance) ; illusions de l'abstraction (nez dans le guidon) ;
- pédagogiques : trouver le bon équilibre entre flou et (semi-)formel, faire des maths prend du temps !

Modélisation mathématique en informatique

Théories mathématiques « prêtes à utiliser » pour **résoudre automatiquement** des pbs.

Exemple 1. Résolution de

$$\begin{cases} \mathrm{CAFE} + \mathrm{CREME} & = & 1,1 & [1] \\ \mathrm{CAFE} - \mathrm{CREME} & = & 1 & [2] \end{cases}$$

Résolution du système linéaire automatique par pivot de Gauss :

$$\frac{1}{2} \cdot ([1] - [2]) \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathrm{CREME} = 0,05$$

Exemple 2. La théorie des langages procure d'autres **transformations de systèmes d'équations**.
(c'est une bonne partie du programme de l'année !)

Questions mathématiques en théorie des langages (TL)

Def Un *mot* est une séquence finie de symboles (dans un certain alphabet).

Def Un *langage* est un ensemble (éventuellement infini) de mots sur un alphabet fixé.

Étude de formalismes/méta-langages pour « *définir* » des langages et les « *méthodes* » pour

tester appartenance à un (méta)langage ;
tester inclusion/équivalence de (méta)langages ;
traduire un (méta)langage dans un autre ; ...

Compétences mathématiques dans cours de TL en 1AA

Évaluées en examen :

- comprendre un *formalisme* mathématique donné et des formalisations dans ce formalisme ;
- produire des formalisations (e.g. modéliser un problème) dans un certain formalisme ;
- appliquer des algorithmes sur des objets formels.

Évaluées en TP/Projet : programmer de tels algos en vrai.

Pas vraiment évaluées mais un peu travaillées en CTD :

- définir des formalismes ;
- rédiger des preuves mathématiques semi-formelles.

Comment « apprendre » des maths ?

- se construire des **images mentales** ;
- assimiler des façons de **raisonner** et de **s'exprimer** ;
- développer son **agilité** à « manipuler » le formalisme.

⇒ gros travail de **mémorisation** :
vocabulaire, images mentales, gestes techniques...

Principale différence vs *langue étrangère* ou *histoire-géo*
tout a une motivation « logique » :
comprendre aide à mémoriser !

Analogie avec apprentissage de l'escalade
comprendre le geste = **savoir le refaire par soi-même !**
⇒ Refaire les exos, +sieurs fois espacées dans le temps,
en autonomie *sans regarder la solution*.

Analogie entre plasticité des muscles et du cerveau
⇒ importance de la « gymnastique » régulière !