Recherche Opérationelle
Alternance

Moritz Mühlenthaler, Zoltán Szigeti

moritz.muehlenthaler@grenoble-inp.fr

G-SCOP (Sciences pour la Conception, l'Optimisation et la Production de Grenoble)
Équipe OC (Optimisation Combinatoire)

Graphes Orientés

Définitions

Un graphe orienté $G = (V, A)$ est un couple formé

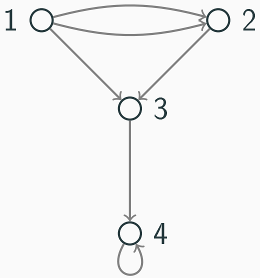
- d'un ensemble $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de sommets et
- d'un (multi-)ensemble $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ d'arcs.

Définitions

Un graphe orienté $G = (V, A)$ est un couple formé

- d'un ensemble $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de sommets et
- d'un (multi-)ensemble $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ d'arcs.

- Un arc est un *couple ordonné* de sommets.
- Pour un arc $a = vw$, le sommet v est l'éxtremité initiale et w l'éxtremité terminale.
- Attention : $vw \neq wv$



Dégrés

- dégré sortant $d^+(v)$ du sommet v : nombre d'arcs sortant de v
- dégré entrant $d^-(v)$ du sommet v : nombre d'arcs entrant de v

Dégrés

- dégré sortant $d^+(v)$ du sommet v : nombre d'arcs sortant de v
- dégré entrant $d^-(v)$ du sommet v : nombre d'arcs entrant de v

Dans un graphe orienté $G = (V, A)$ on a

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = |A| = \sum_{v \in V} d^-(v)$$

Représentation : Matrice d'Adjacence

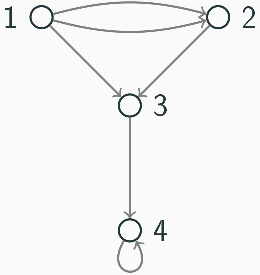
matrice d'adjacence $A'(G) = (a_{xy})_{x,y \in V}$:
matrice $n \times n$ défini par

$a_{xy} :=$ no. d'arcs d'extrémité initiale x et d'extrémité terminale y

Représentation : Matrice d'Adjacence

matrice d'adjacence $A'(G) = (a_{xy})_{x,y \in V}$:
matrice $n \times n$ défini par

a_{xy} := no. d'arcs d'extrémité initiale x et d'extrémité terminale y



$$A(G) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Représentation : Matrice d'Incidence

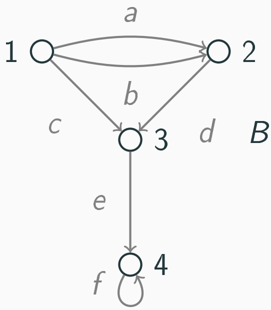
matrice d'incidence $B'(G) = (b_{va})_{v \in V, a \in A}$:
matrice $n \times m$ défini par

$$b_{va} := \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ est l'extrémité initiale de } a, \\ -1 & \text{si } v \text{ est l'extrémité terminale de } a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Représentation : Matrice d'Incidence

matrice d'incidence $B'(G) = (b_{va})_{v \in V, a \in A}$:
matrice $n \times m$ défini par

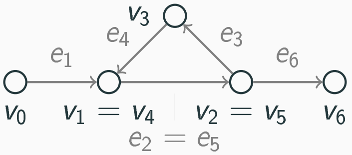
$$b_{va} := \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ est l'extrémité initiale de } a, \\ -1 & \text{si } v \text{ est l'extrémité terminale de } a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



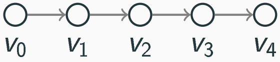
$$B(G) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Chemins

- Chemin : une suite alternée de sommets et d'arcs $v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_k v_k$, telle que $e_i = v_{i-1} v_i$ pour $1 \leq i \leq k$.

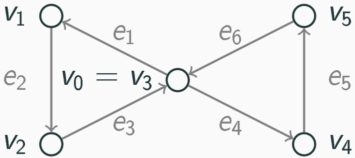


- Chemin simple : chemin sans répétition d'arcs
- Chemin élémentaire : chemin sans répétition de sommets

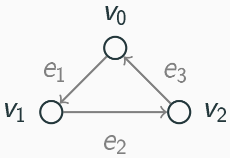


Circuits

- Circuit : une séquence circulaire de sommets et d'arcs $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k$, telle que $e_i = v_{i-1} v_i$ pour $1 \leq i \leq k-1$ et $e_k = v_{k-1} v_0$ sont des arcs distincts.



- Circuit élémentaire : circuit sans répétition de sommets



Circuits Élémentaires

Si $d^+(v) \geq 1$ pour tout sommet v, alors le graphe contient un circuit élémentaire.

Connexité

Degré sortant $d^+(X)$ (resp. degré entrant $d^-(X)$) d'un ensemble X de sommets : nombre d'arcs dont l'extrémité initiale (resp. terminale) est dans X (resp. $V \setminus X$)

Connexité

Degré sortant $d^+(X)$ (resp. degré entrant $d^-(X)$) d'un ensemble X de sommets : nombre d'arcs dont l'extrémité initiale (resp. terminale) est dans X (resp. $V \setminus X$)

Soient s et t deux sommets d'un graphe orienté $G = (V, A)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un chemin de s à t.
2. Il existe un chemin élémentaire de s à t.
3. Pour tout X tel que $\{s\} \subseteq X \subseteq V \setminus \{t\}$, on a $d^+(X) \geq 1$.

Trouver un s-t Chemin

Algorithme 1 : Algo de Marquage

Entrée : Graphe orienté $G = (V, A)$, sommet $s \in V$

Sortie : S les sommets qui peuvent être atteints depuis s par un chemin ; $F \subseteq A$ tel que (S, F) contient un (s, v)-chemin pour tout $v \in S$

$S \leftarrow \{s\}$
$F \leftarrow \emptyset$
tant que *il existe un arc* vw *tel que* $v \in S$, $w \notin S$ **faire**
    $S \leftarrow S \cup \{w\}$
    $F \leftarrow F \cup \{vw\}$
fin.

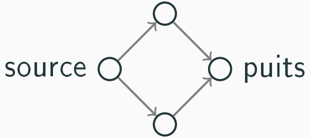
Graphes Sans Circuit

Graphes Sans Circuit

- Si v, w sont deux sommets distincts dans un graphe sans circuit, alors *au plus une* des assertions est vraie : i) il existe un v-w chemin ii) il existe un w-v chemin.

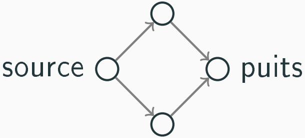
Graphes Sans Circuit

- Si v, w sont deux sommets distincts dans un graphe sans circuit, alors *au plus une* des assertions est vraie : i) il existe un v-w chemin ii) il existe un w-v chemin.
- Source : un sommet v sans prédécesseur ($d^-(v) = 0$)
- Puits : un sommet v sans successeur ($d^+(v) = 0$)

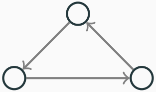


Graphes Sans Circuit

- Si v, w sont deux sommets distincts dans un graphe sans circuit, alors *au plus une* des assertions est vraie : i) il existe un v-w chemin ii) il existe un w-v chemin.
- Source : un sommet v sans prédécesseur ($d^{-}(v) = 0$)
- Puits : un sommet v sans successeur ($d^{+}(v) = 0$)



- Un graphe orienté quelconque ne contient pas forcément une source ou un puits



Propriétés des Graphes Sans Circuit

Tout graphe (fini) sans circuit contient un sommet puits et un sommet source.

Propriétés des Graphes Sans Circuit

> Tout graphe (fini) sans circuit contient un sommet puits et un sommet source.

Un tri topologique est une permutation $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des sommets d'un graphe orienté $G = (V, A)$, telle que pour tout arc $v_i v_j \in A$ on a $i < j$.

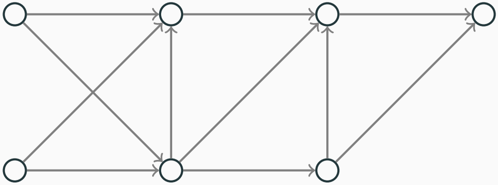
Propriétés des Graphes Sans Circuit

Tout graphe (fini) sans circuit contient un sommet puits et un sommet source.

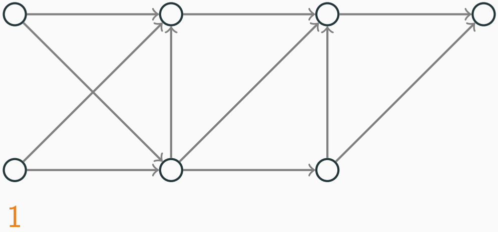
Un tri topologique est une permutation $v_1, v_2, \dots, v_n$ des sommets d'un graphe orienté $G = (V, A)$, telle que pour tout arc $v_i v_j \in A$ on a $i < j$.

Un graphe orienté G admet un tri topologique $\Leftrightarrow$ G est sans circuit.

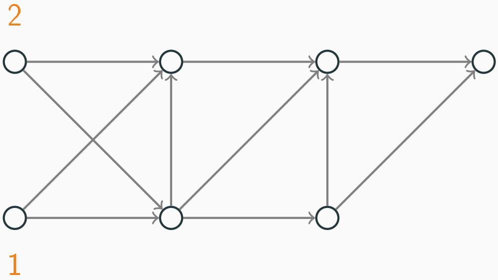
Tri Topologique : Exemple



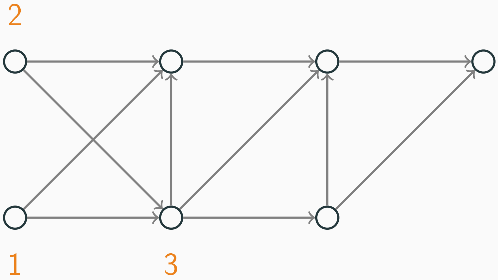
Tri Topologique : Exemple



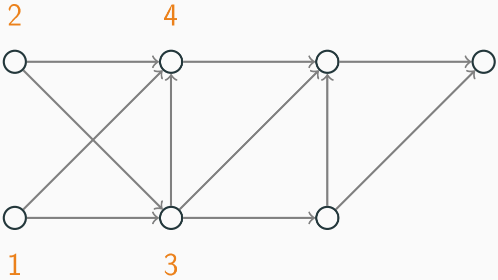
Tri Topologique : Exemple



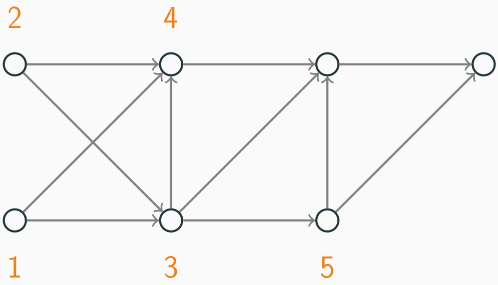
Tri Topologique : Exemple



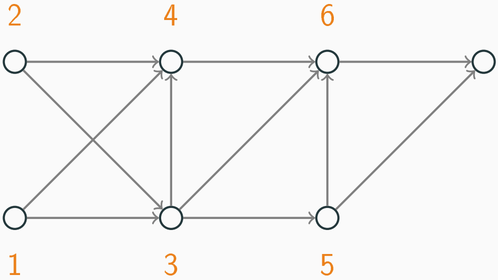
Tri Topologique : Exemple



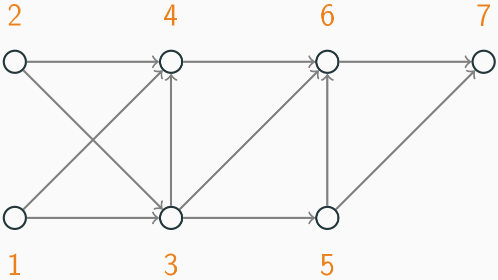
Tri Topologique : Exemple



Tri Topologique : Exemple



Tri Topologique : Exemple

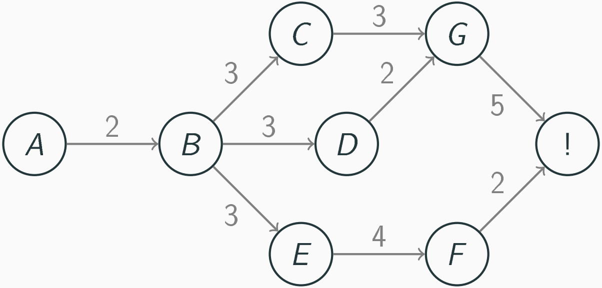


Application : Ordonnancement

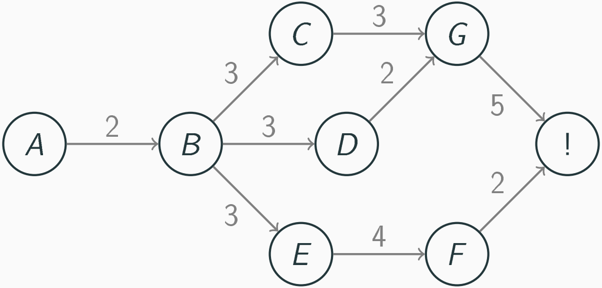
Construire un bâtiment : que faire quand ?

Tâche	Description	Durée (jours)	Prédécesseurs
A	Fondations	2	–
B	Maçonnerie	3	A
C	Plomberie	3	B
D	Électricité	2	B
E	Charpente	4	B
F	Couverture	2	E
G	Finitions	5	C, D

Application : Ordonnancement



Application : Ordonnancement



- Un tri topologique donne un ordre linéare des tâches respectant les dépendances
- Combien de temps prend la construction du bâtiment ?