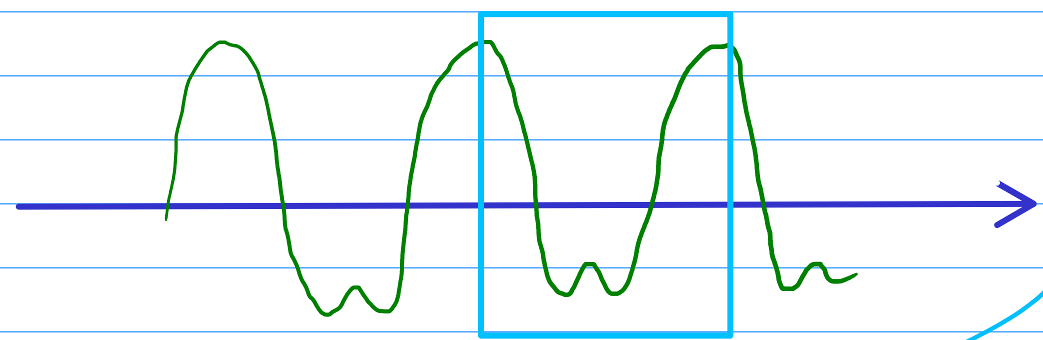
Transformée de Fourier



Signal périodique

on se restreint à une période et on développe en série de Fourier

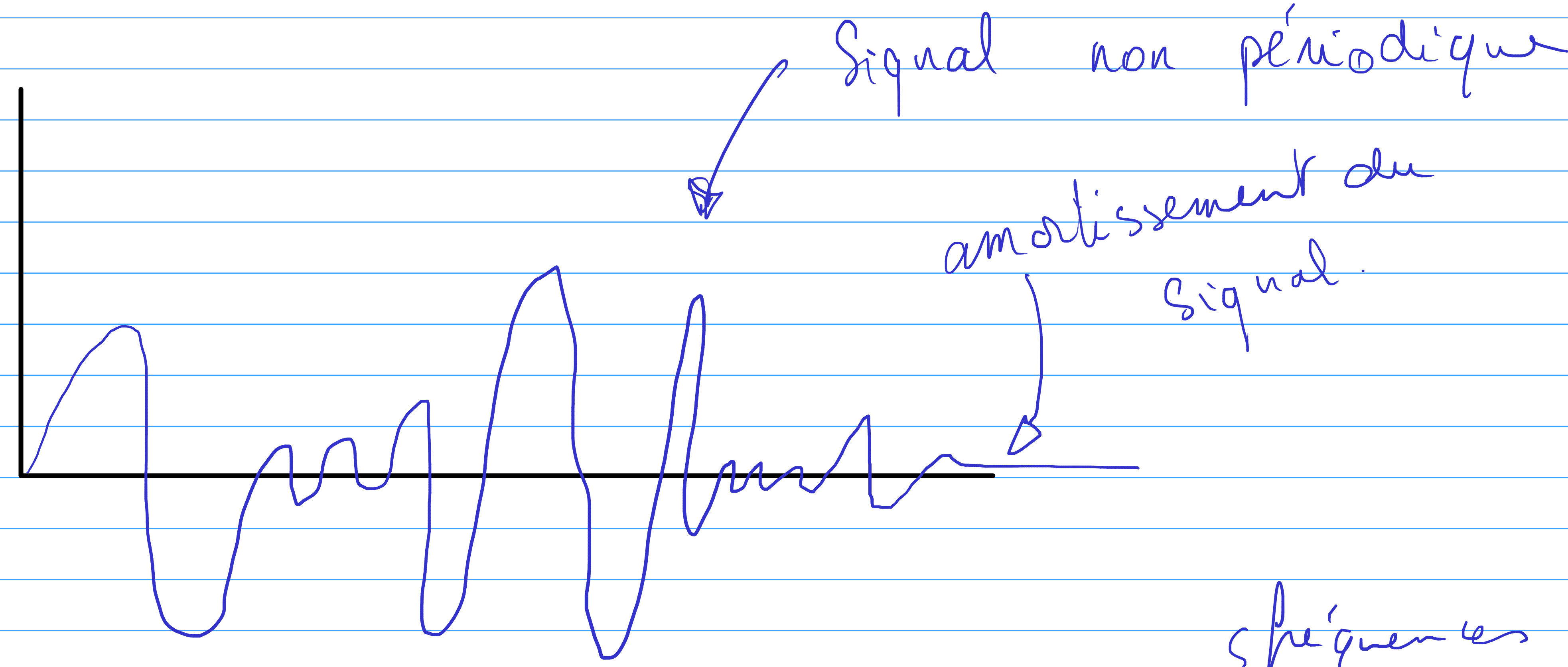
$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-in\frac{2\pi}{T}x}\,dx$$

$$S(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e^{in\frac{2\pi}{T}x} \simeq f$$

Dirichlet

$c_n(f)$ quantifie la quantité d'harmonique de période $\frac{T}{n}$ dans le signal f.

S'il n'y a plus périodicité :



Dans ce cadre, on peut avoir toutes les {fréquences, longueurs} d'ondes sur $\mathbb{R}$, et (non plus une fréquence multiples de $\frac{1}{T}$).

<u>Pb</u> : identifier les harmoniques en jeu dans le signal.

↳ fréquence $\frac{1}{T}$: $x \mapsto e^{i\frac{2\pi}{T}x}$

↳ il faut un produit hermitien pour projeter sur l'harmonique et quantifier sa contribution : $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\bar{g}\, dt$

7.1 Rappels

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est *localement intégrable* si $|f|$ est intégrable sur tout segment. Toute fonction continue par morceaux est localement intégrable. Une fonction f est dite intégrable sur $\mathbb{R}$ si

- f est localement intégrable.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$ c'est à dire si $\int_A^B |f(x)|\, dx$ a une limite finie quand $A \to -\infty$ et $B \to +\infty$.

Si f et g sont continues par morceaux et si $|g(x)| \leq |f(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrabilité de f entraîne celle de g.

$$\int_A^B |f(x)|\, dx \xrightarrow[A,B \to \pm\infty]{} \ell = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

Exemple

intégrable sur $[a,b]$

(i) Une fonction nulle hors d'un segment $[a, b]$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.[7]

(ii) La fonction continue $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (ici on peut faire le calcul).

(iii) Une fonction de la forme $P(x)e^{-b|x|}$ est intégrable. $(b > 0)$

(iv) De même pour tout polynôme P, la fonction $x \mapsto P(x)e^{-x^2}$ est intégrable.

(v) Une fonction continue périodique non nulle n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

(vi) Si g est intégrable et h contiue bornée, alors gh est intégrable:

g intégrable, h continue bornée : $|h| < M$.
$|gh| \leq M|g|$

Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, il en est de méme de $x \mapsto f(x)\underbrace{e^{2\pi ixy}}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ puisque $|e^{-2\pi ixy}| = 1$.

$\left|e^{2\pi ixy}\right| \leq 1$.

$$\int_A^B \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\arctan(x)\Big]_A^B = \arctan(B) - \arctan(A) \xrightarrow[\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}]{} \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

harmoniques de fréquence $\frac{1}{T}$: $x \mapsto e^{i 2\pi \frac{1}{T} x}$ (Période T).

harmonique de fréquence y : $x \mapsto e^{i 2\pi y x}$ y fréquence dans $\mathbb{R}$.

Produit hermitien : $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g} \, dx$.

7.2 Définition

Definition 7.1 *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ on appelle* transformée de Fourier de f *la fonction, notée $\hat{f}$ définie par*

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x y} dx.$$

quantité d'harmonique de fréquence y dans f : $\langle f, e^{i 2\pi y x} \rangle$

conjugaison complexe introduit le "$-$".

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \times 0} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx.$$

Remarque 7.2 (Interprétation en terme de signal)

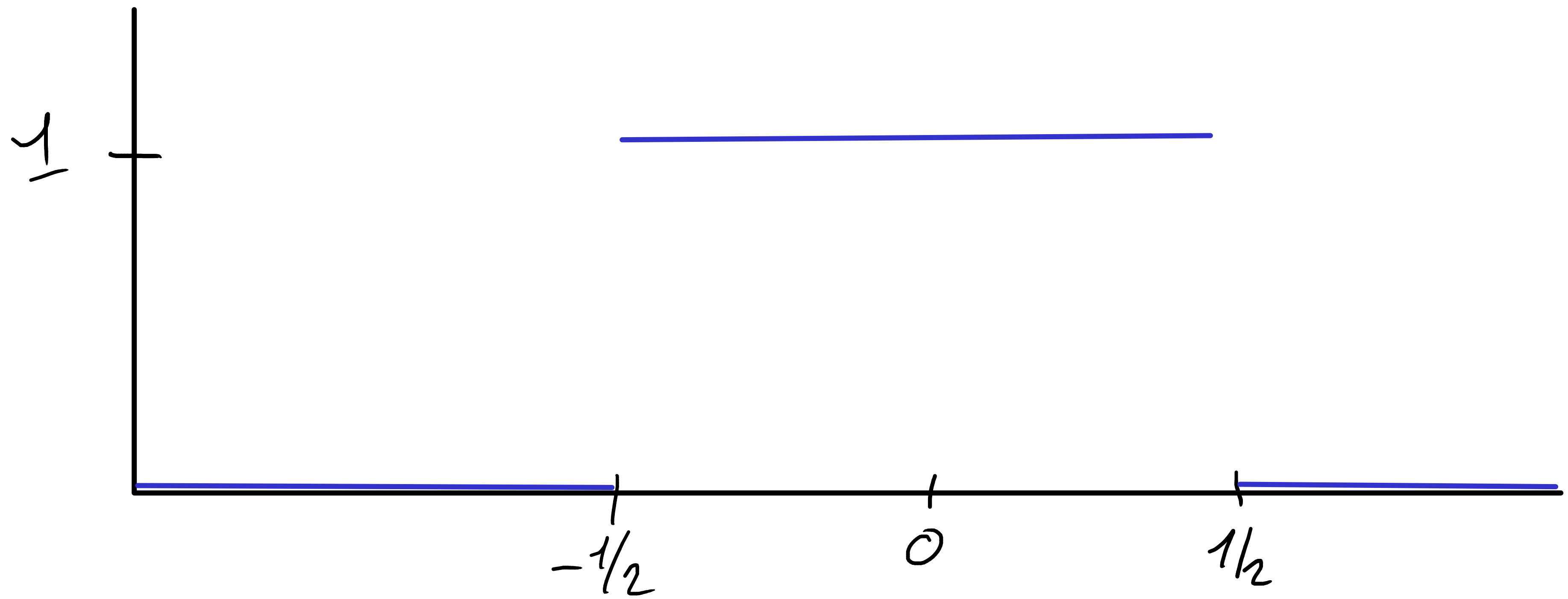
Si $t \mapsto f(t)$ *est un un signal, on parle de* signal temporel.

En tout point y, $\hat{f}(y)$ *est la composante fréquentielle du signal* f *à la fréquence* y. *Autrement dit, la transformée de Fourier n'est qu'une traduction dans le* domaine fréquentiel. *Elle consiste simplement à peser le poids relatif de chaque fréquence dans un signal temporel donné. Elle quantifie la présence de l'harmonique* $1/y-$*périodique* $x \mapsto e^{-2\pi iyx}$.

En particulier, si f *est intégrable,*

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\,du.$$

$\widehat{f}(0)$ *est la composante fréquentielle de* f *à la fréquence nulle : c'est la composante continue du signal.*



Exemple fondamental Soit Π la fonction (dite fonction porte)[8] caractéristique de $[-1/2, 1/2]$:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \frac{1}{2} \end{cases} = \mathbb{1}_{[-1/2,\,1/2]}(x)$$

Π est continue par morceaux nulle hors d'un segment donc intégrable. De plus, pour tout $y \neq 0$,

$$\int e^{ax}\,dx = \left[\frac{e^{ax}}{a}\right]$$

$$\hat{\Pi}(y) = \int_{\mathbb{R}} \Pi(x)\, e^{-i2\pi x y}\, dx = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi x y}\, dx$$

$\hookrightarrow$ 0 en dehors de $[-1/2, \frac{1}{2}]$

$$= \left[\frac{e^{-i2\pi x y}}{-i2\pi y}\right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$\frac{1}{-i} = i$$

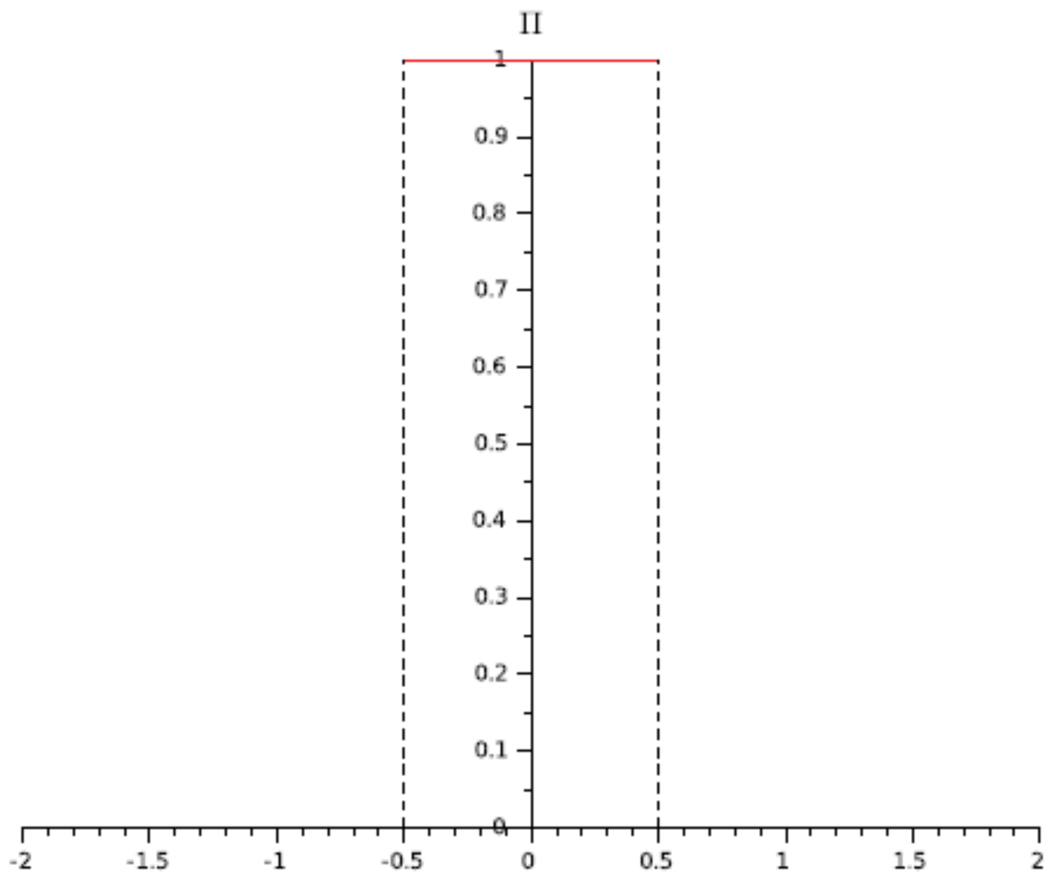
$$= \frac{e^{-i\pi y} - e^{i\pi y}}{-i2\pi y}$$

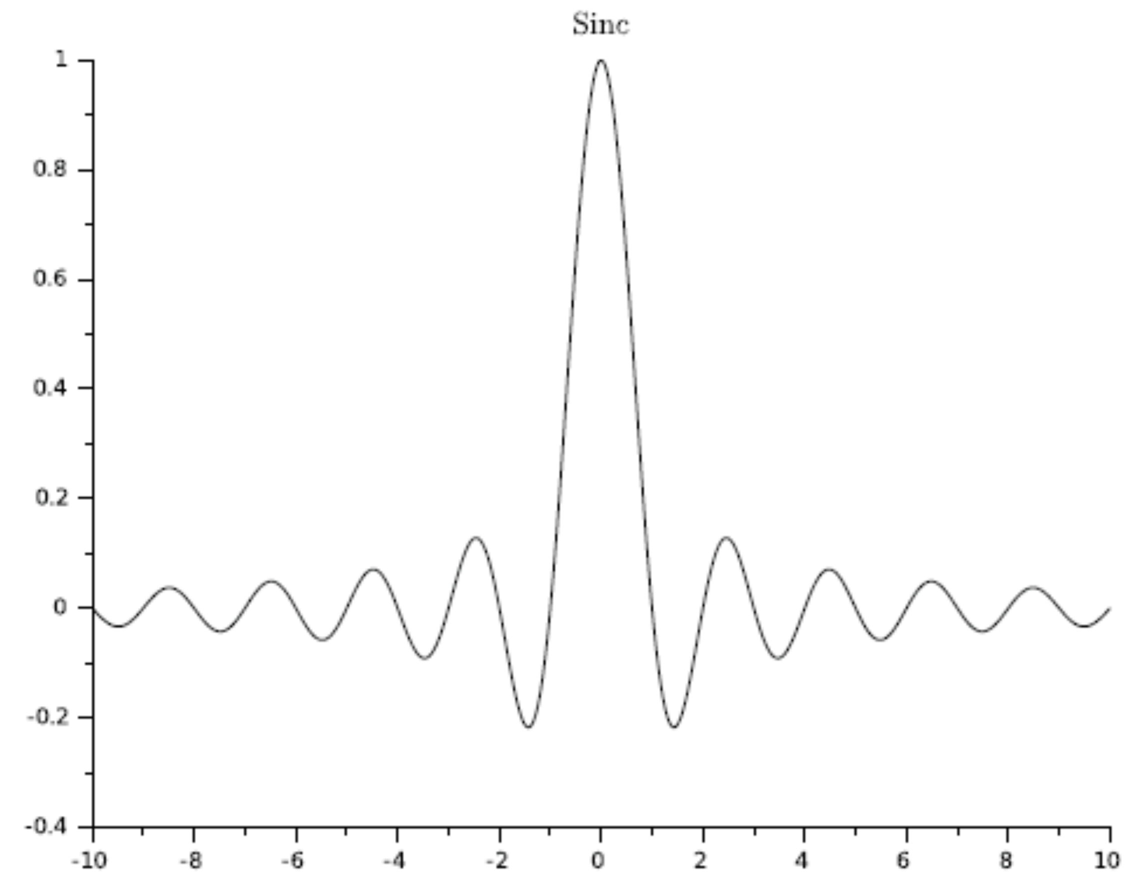
Notons que $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Ici $\hat{\Pi}(y) = \dfrac{e^{-i\pi y} - e^{i\pi y}}{-i\,2\pi y} = \dfrac{e^{i\pi y} - e^{-i\pi y}}{2i \times \pi y} = \dfrac{\sin(\pi y)}{\pi y}$

Notation : $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $\operatorname{sinc}(0) = 1$ (cf L1).

D'où $\hat{\Pi}(y) = \operatorname{sinc}(\pi y)$.





On note Λ la fonction affine par morceaux, nulle hors de $[-1, 1]$, égale à $1 + t$ sur $[-1, 0]$ et $1 - t$ sur $[0, 1]$.

Un calcul direct montre que $\widehat{\Lambda}(y) = \mathrm{Sinc}^2(y)$.

Remarque 7.3 *Toute fonction continue par morceaux et à support compact (borné) est intégrable et admet donc une transformée de Fourier. Il faut cependant remarquer que la transformée de Fourier d'une telle fonction n'est* jamais *à support borné.*

Theorem 7.4 *La transformation de Fourier est une application linéaire de l'espace des fonctions continues par morceaux intégrables dans l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini. Autrement dit, si f et g sont intégrables et si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ on a*

$$\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}.$$

$\langle f, g \rangle$ est un produit hermitien, il est linéaire à gauche (vision algébrique).

$$\widehat{\alpha f + \beta g}(y) = \int_{\mathbb{R}} (\alpha f + \beta g)(x) e^{-i2\pi xy} dx = \int_{\mathbb{R}} \alpha f(x) e^{-i2\pi xy} + \beta g(x) e^{-i2\pi xy} dx$$

$$= \alpha \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi xy} dx + \beta \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-i2\pi xy} dx = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}(y)$$

Remarque 7.5 *Si f et g sont intégrables et égales sauf en leurs points de discontinuité, elles ont même transformée de Fourier.*

Proposition 7.6 *Si f est intégrable, $\hat{f}$ est une fonction continue.*

$x \mapsto f(x)$ intégrable

$\int |f(x)|\, dx < \infty$

$$y \mapsto \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i 2\pi xy}\, dx$$

est continue.

Proposition 7.7 [Théorème de Riemann Lebesgue]
Si f est intégrable, $\hat{f}$ tend vers 0 à l'infini.

Proposition 7.8 *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux intégrables. On a*

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\hat{g}(t)dt.$$

<u>Preuve:</u>

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\, g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi x t}\, dx \right) g(t)\, dt.$$

g ne dépend pas de x

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(t)\, e^{-i2\pi x t}\, dx \right) dt$$

On inverse dx et dt (Fubini)

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(t)\, e^{-i2\pi x t}\, dt \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g(t)\, e^{-i2\pi x t}\, dt}_{\hat{g}(x)}\, dx$$

↑ dépend pas de t

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \hat{g}(x)\, dx$$

- Transformée de Fourier d'une translatée :

$$f_a(x) = f(x+a)$$

$$\hat{f_a}(y) = \int_{\mathbb{R}} f_a(x) e^{-i2\pi xy}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x+a) e^{-i2\pi xy}\,dx$$

On pose $t = x+a$ $\quad x = t-a$

$dt = dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i2\pi(t-a)y}\,dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i2\pi ty}\, \underbrace{e^{i2\pi ay}}_{\text{ne dépend pas de } t}\,dt$$

$$= e^{i2\pi ay} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i2\pi ty}\,dt = e^{i2\pi ay}\, \hat{f}(y)$$

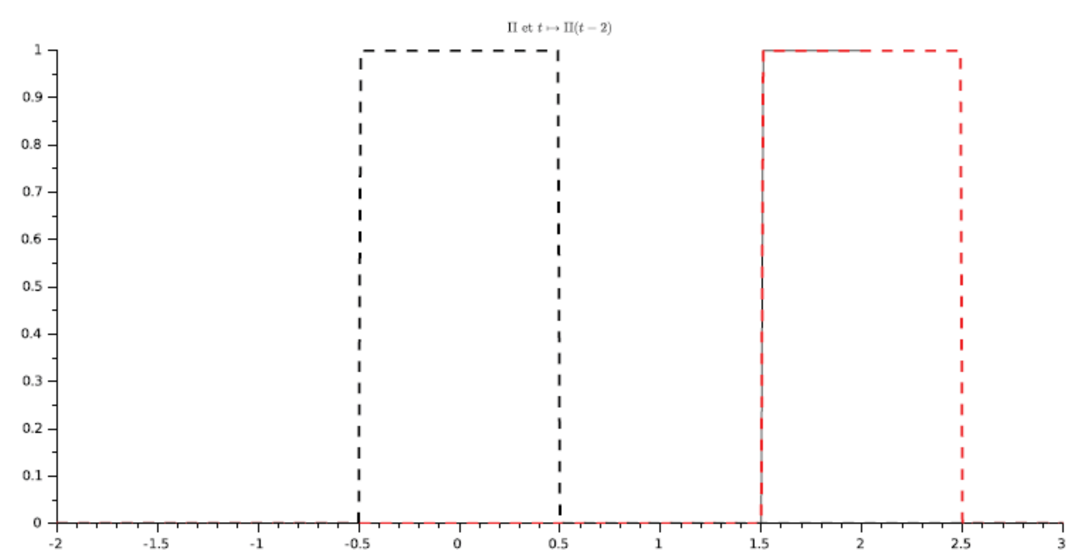
7.3 Premières propriétés

Il est en général difficile de calculer directement une transformée de Fourier. On s'attachera donc à limiter au maximum les calculs d'intégrales en utilisant les *propriétés opératoires* de cette transformation.

Soient f une fonction intégrable et a un réel. Si on définit $g : t \mapsto f(t-a)$ le changement de variable $u = x - a$ montre que

$$\hat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x-a)e^{-2\pi ixy}\,dx = e^{-2\pi iay}\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{2\pi iuy}\,du.$$

Il est courant de noter $\tau_a f$ la fonction g. On dit que la transformation de Fourier transforme une translation en multiplication par une exponentielle.



Π et une translatée $t \mapsto \Pi(t-2)$

7.4 Transformation de Fourier et dérivation

Le théorème de dérivation sous le signe intégral donne le résultat suivant :

Theorem 7.9 *Si f et $t \mapsto tf(t)$ sont intégrables, la transformée de Fourier de f est dérivable et*

$$\hat{f}'(y) = -\widehat{2\pi i t f}(t).$$

$$\hat{f}'(y) = \lim_{h \to 0} \frac{\hat{f}(y+h) - \hat{f}(y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int f(x) e^{-i2\pi x(y+h)} dx - \int f(x) e^{-i2\pi xy} dx}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int f(x) e^{-i2\pi xy} e^{-i2\pi xh} - f(x) e^{-i2\pi xy} dx}{h}$$

$$\frac{e^{ax}-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} a$$

$$= \int \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^{-i2\pi xh}-1\right)}{h} f(x)\, e^{-i2\pi xy}\, dx$$

$$= \int \underbrace{-i2\pi x\, f(x)}_{\text{doit être intégrable}}\, e^{-i2\pi xy}\, dx$$

$$= \widehat{-i2\pi x f}(y)$$

Theorem 7.11 *Soit f une fonction de classe C^1. Si f et f' sont intégrables, on a*

$$\widehat{f'}(y) = 2\pi i y \hat{f}(y).$$

$$\widehat{f'}(y) = \int_{\mathbb{R}} \overset{u'}{f'(x)} \, \overset{v}{e^{-i2\pi xy}} \, dx \overset{\text{IPP}}{=} \Big[\overset{u}{f(x)} \, \overset{v}{e^{-i2\pi xy}} \Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int \overset{u}{f(x)} \, \overset{v'}{(-i2\pi y) e^{-i2\pi xy}} \, dx$$

f intégrable

$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

$$\Big[f(x) e^{-i2\pi xy} \Big]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$\widehat{f'}(y) = -(-2i\pi y) \int f(x) \, e^{-i2\pi xy} \, dx = 2\pi i y \hat{f}(y)$$

Plus généralement si f est $\mathcal{C}^k$ et si $f, f', \cdots f^{(k)}$ sont intégrables on a

$$\widehat{f^{(k)}}(y) = (2\pi i y)^k \hat{f}(y).$$

Comme dans le cas des séries de Fourier, on voit que plus une fonction est régulière plus sa transformée de fourier décroît rapidement à l'infini.

Exemple Soit f définie par $f(x) = e^{-x^2}$. Nous savons que f est intégrable de même que f' (7.1). De plus si φ est la transformée de Fourier de f,

$$\varphi'(y) = \int_{\mathbb{R}} (2\pi i t) e^{-t^2} e^{-2\pi i t y}\, dt.$$

et une intégration par parties montre que

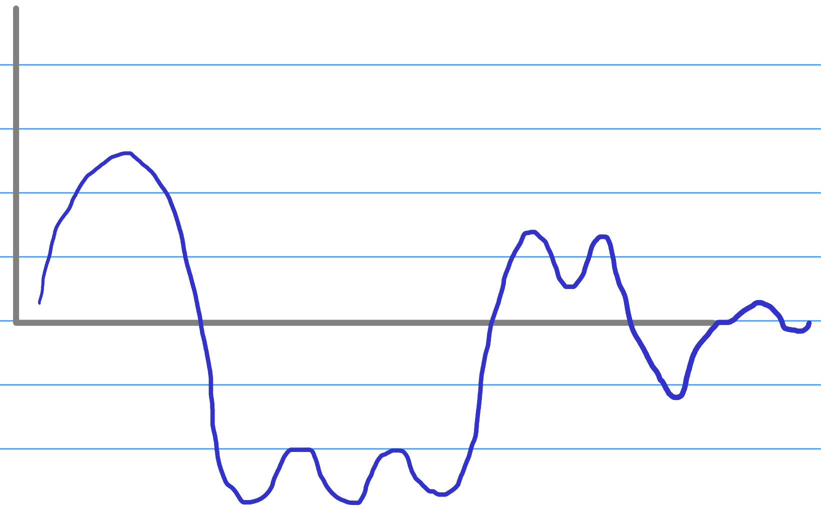
$$\varphi'(y) = -2\pi^2 y \varphi(y).$$

Il en résulte que $\varphi(y) = Ce^{-\pi^2 y^2}$ avec $C = \varphi(0) = \sqrt{\pi}$.

Un calcul simple montre alors que $t \mapsto e^{-\pi x^2}$ est invariante par transformation de Fourier. De plus, en utilisant (7.1), pour $t > 0$ on obtient :

$$\widehat{e^{-\pi t^2 x^2}}(y) = \frac{1}{t} e^{-\pi \frac{x^2}{t^2}}. \tag{7.2}$$

Rappels



signaux non périodiques (même si des phénomènes périodiques peuvent le constituer).

On souhaite le décomposer sur des harmoniques contenant toutes les périodes (bijection avec fréquences) réelles possibles :

$$h_y(x) = e^{2i\pi xy}.$$

y est la fréquence de l'harmonique.

$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

Produit hermitien : $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \bar{g}(x)\, dx$

Quantification du signal f sur l'harmonique y :

$$\langle f, h_y \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{h_y}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2i\pi xy}\, dx = \hat{f}(y)$$

7.5 Théorème d'inversion

La synthèse harmonique n'est possible que si l'on peut, à partir d'une transformée de Fourier, revenir au signal temporel. Le théorème suivant montre en quelque sorte que $\hat{f}$ caractérise la fonction f.

Séries de Fourier :

$$c_n(f) = \langle f, e^{in\frac{2\pi}{T}x} \rangle \qquad \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{in\frac{2\pi}{T}x} \xrightarrow[\text{Dirichlet}]{N\to\infty} f(x)$$

(sous conditions)

Analogie ?

$$\hat{f}(y) = \langle f, e^{i2\pi xy} \rangle \qquad \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)\, e^{i2\pi xy}\, dy}_{=\hat{\hat{f}}(-x)} \overset{?}{=} f(x)$$

Theorem 7.12 *Soit f une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}$. Si $\hat{f}$ est intégrable, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{-2\pi i t x} dt = \hat{\hat{f}}(x)$$

La fonction $x \mapsto f(-x)$ est encore notée $\check{f}$: le résultat précédent s'écrit alors $\check{f} = \hat{\hat{f}}$.

Corollary 7.13 *Soient f et g deux fonctions continues intégrables. Si $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont integrables et egales, alors $f = g$.*

$$\hat{f} = \hat{g}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \hat{\hat{f}} = \hat{\hat{g}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(-x) = g(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad f = g.$$

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; déterminer $\hat{f}$ par le calcul direct est compliqué.

Exemple On utilise parfois le théorème d'inversion pour calculer des transformées de Fourier. Par exemple, il n'est pas très facile[10] de calculer directement la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Mais, un calcul direct montre que, si $g : x \mapsto \pi e^{-2\pi|x|}$

$$\widehat{g}(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

et le théorème d'inversion permet donc de conclure.

$g(x) = \pi e^{-2\pi|x|}$

$$\hat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-i2\pi xy} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \pi e^{-2\pi|x|} e^{-i2\pi xy} dx$$

Pour $x \leq 0$; $|x| = -x$.

$$\hat{g}(y) = \int_{-\infty}^{0} \pi e^{2\pi x} e^{-i2\pi xy}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \pi e^{-2\pi x} e^{-i2\pi xy}\,dx$$

$$\int e^{ax} = \left[\frac{e^{ax}}{a}\right]$$

$$= \pi \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi x(1-iy)}\,dx + \pi \int_{0}^{+\infty} e^{-2\pi x(1+iy)}\,dx$$

$$= \cancel{\pi}\left[\frac{e^{2\pi x(1-iy)}}{2\cancel{\pi}(1-iy)}\right]_{-\infty}^{0} + \cancel{\pi}\left[\frac{e^{-2\pi x(1+iy)}}{-2\cancel{\pi}(1+iy)}\right]_{0}^{+\infty}$$

module 1

n'a argument de limite

$$= \frac{1}{2(1-iy)} - \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{e^{2\pi x}}^{\to 0}\,\underbrace{e^{-2\pi i y x}}}{2(1+iy)} + 0 - \frac{1}{-2(1+iy)}$$

Notons que $e^{i\theta} e^{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

car $|e^{i\theta} e^{x}| = \underbrace{|e^{i\theta}|}_{1} e^{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

$$= \frac{1}{2(1-iy)} + \frac{1}{2(1+iy)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+iy} + \frac{1}{1-iy}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-iy}{(1+iy)(1-iy)} + \frac{1+iy}{(1+iy)(1-iy)}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{1+y^2}$$

Rappel:

$$g(x) = \pi e^{-2\pi|x|} \qquad \hat{g}(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

On veut la transformée de Fourier de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

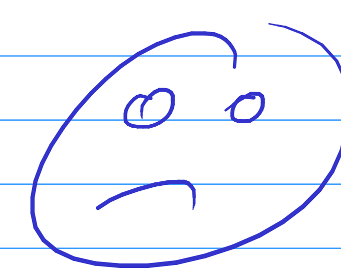
Thm inversion

$$\hat{f}(t) = \hat{\hat{g}}(t) = g(-t) = \pi e^{-2\pi|t|}$$

$$\hat{f}(y) = \pi e^{-2\pi|y|}$$

Notons que c'était bien compliqué de calculer directement:

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} e^{-2i\pi xy}\, dx$$



7.6 Théorème de parseval

Theorem 7.14 *Soient f et g deux fonctions intégrables. Si $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont intégrables*

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}\overline{\hat{g}}dx = \int_{\mathbb{R}} f\overline{g}dx.$$

Corollary 7.15 *Si f et $\hat{f}$ sont de carrés intégrables,*

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 dx.$$

énergie dans la transformée de Fourier

énergie du signal.