$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_1+X_2) &= \sum_{x_1\in X_1(\Omega),x_2\in X_2(\Omega)} (x_1+x_2)\mathbf{P}(X_1=x_1,X_2=x_2)\\
&= \sum_{x_1\in X_1(\Omega)} x_1\left(\sum_{x_2\in X_2(\Omega)} \mathbf{P}(X_1=x_1,X_2=x_2)\right)\\
&\quad + \sum_{x_2\in X_2(\Omega)} x_2\left(\sum_{x_1\in X_1(\Omega)} \mathbf{P}(X_1=x_1,X_2=x_2)\right)\\
&= \sum_{x_1\in X_1(\Omega)} x_1\mathbf{P}(X_1=x_1) + \sum_{x_2\in X_2(\Omega)} x_2\mathbf{P}(X_2=x_2)\\
&= \mathbf{E}X_1+\mathbf{E}X_2\,.
\end{aligned}$$

Proposition 2.10
Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes admettant une espérance . Alors le produit X_1X_2 possède une espérance et $\mathbf{E}(X_1X_2)=\mathbf{E}X_1\mathbf{E}X_2$.

Démonstration :
Il faut d'abord vérifier ses connaissances sur les séries (cf. annexe A.1). On écrit ensuite que :

$$\mathbf{E}(X_1X_2) = \sum_{x_1\in X_1(\Omega),x_2\in X_2(\Omega)} (x_1x_2)\mathbf{P}(X_1=x_1,X_2=x_2)$$

Les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\mathbf{P}(X_1=x_1,X_2=x_2) = \mathbf{P}(X_1=x_1)\mathbf{P}(X_2=x_2)\,,$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_1X_2) &= \sum_{x_1\in X_1(\Omega)} x_1\mathbf{P}(X_1=x_1) \sum_{x_2\in X_2(\Omega)} x_2\mathbf{P}(X_2=x_2)\\
&= \mathbf{E}X_1\mathbf{E}X_2\,.
\end{aligned}$$

La proposition suivante découle de la définition de l'espérance.

Proposition 2.11
Soit X une v.a. réelle. Soit g une fonction telle que la série $\sum_{x\in X(\Omega)} g(x)\mathbf{P}(X=x)$ soit absolument convergente. Alors la v.a. $g(X)$ admet une espérance et :

$$\mathbf{E}g(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)\mathbf{P}(X=x)\,.$$

2.8.2 Espérance conditionnelle

Une notion délicate que nous ne ferons qu'effleurer est celle d'espérance conditionnelle. Nous n'en donnons en fait qu'une définition.

Définition 2.10
Soit X une v.a. possédant une espérance et soit A de probabilité non nulle. L'espérance conditionnelle de X sachant A est définie par :

$$\mathbf{E}(X/A) \quad = \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}(./A)}X \; .$$

En d'autres termes :

$$\mathbf{E}(X/A) \quad = \quad \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \sum_{\omega \in A} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\}) \; .$$

Exercice 2.8.3 *($\star$)*
Quelle est l'espérance d'un dé non-pipé sachant que le nombre sorti est inférieur ou égal à trois ?

Solution :
Notons X la v.a. associée au dé. L'événement A par rapport auquel on conditionne vaut $\{1, 2, 3\}$. Sa probabilité est de $1/2$. L'espérance recherchée vaut donc

$$\mathbf{E}(X/A) = \frac{1}{1/2}(1/6 + 2/6 + 3/6) = 2 \; .$$

2.9 Moments

2.9.1 Définition

Définition 2.11
Soit m un entier positif et soit X une v.a. telle que X^m possède une espérance. Le nombre $\mathbf{E}X^m$ s'appelle le moment d'ordre m de X. Le nombre $\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^m$ s'appelle le moment centré d'ordre m de X.

$EX \wedge EX^m$ $m > 1$. et $m>0$.

Remarquons que la v.a. X possède une espérance dès que la v.a. X^m possède une espérance avec un $m \geq 1$. En effet , si la v.a. X^m possède une espérance, la série $\sum_{x \in X(\Omega)} |x|^m \mathbf{P}(X = x)$ est convergente. La série $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x)$ est bien sûr convergente. La série $\sum_{x \in X(\Omega)} \max(1, |x|^m)\mathbf{P}(X = x)$ est donc convergente. On remarque alors que $|x| \leq \max(1, |x|^m)$, ce qui prouve que la série $\sum_{x \in X(\Omega)} |x|\mathbf{P}(X = x)$ est convergente et que la v.a. X a une espérance.

2.9.2 Variance

Définition 2.12 *Variance.*
Soit X une v.a. ayant un moment d'ordre 2 fini. La variance de X est définie par :

$$varX = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 .$$

Le lemme suivant est utile dans de nombreux calculs pratiques.

Lemme 2.2

$$varX = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 .$$

Démonstration :
Il suffit de développer $(X - \mathbf{E}X)^2$:

$$\text{var}X = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}(X^2) - 2\mathbf{E}X\mathbf{E}X + (\mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 .$$

La proposition 2.11 appliquée à la fonction $g(x) = x$ puis $g(x) = x^2$ permet de calculer en pratique la variance :

$$\text{var}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 ,$$

avec :

$$\mathbf{E}X^2 = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \mathbf{P}(X = x) ,$$
$$\mathbf{E}X = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}(X = x) .$$

Proposition 2.12 *Inégalité de Cauchy-Schwarz.*
Soient X_1 et X_2 deux v.a. possèdant une variance. Alors :

$$|\mathbf{E}(X_1 X_2)| \leq \sqrt{\mathbf{E}X_1^2 \mathbf{E}X_2^2} .$$

Démonstration :
Soit λ un réel. La v.a. $(\lambda X_1 - X_2)^2$ est une v.a. positive, son espérance est donc positive. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}(\lambda X_1 - X_2)^2 = \lambda^2 \mathbf{E}X_1^2 - 2\lambda \mathbf{E}X_1 X_2 + \mathbf{E}X_2^2 .$$

On écrit alors que le polynôme $\lambda \to \mathbf{E}(\lambda X_1 - X_2)^2$ est toujours positif. Son discriminant

$$\Delta = 4(\mathbf{E}X_1 X_2)^2 - 4\mathbf{E}X_1^2 \mathbf{E}X_2^2 ,$$

est donc négatif ce qui démontre la proposition.

Définition 2.13 *Covariance et corrélation .*
Soient X_1 et X_2 deux v.a. possèdant une variance. La covariance entre X_1 et X_2 est définie par :

$$cov(X_1, X_2) = \mathbf{E}((X_1 - \mathbf{E}X_1)(X_2 - \mathbf{E}X_2)) .$$

Si les variances de X_1 et de X_2 sont non nulles, la corrélation entre X_1 et X_2 est définie par :

$$corr(X_1, X_2) = \frac{cov(X_1, X_2)}{\sqrt{varX_1 varX_2}} .$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la corrélation est un nombre compris entre -1 et 1.

Lemme 2.3
Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes possèdant une espérance. Alors :

$$cov(X_1, X_2) = 0 .$$

Attention, la réciproque est fausse : deux v.a. X_1 et X_2 peuvent être telles que $cov(X_1, X_2) = 0$ sans que ces deux v.a. soient indépendantes.

Démonstration :
On applique la proposition 2.10 :

$$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \mathbf{E}(X_1 - \mathbf{E}X_1)\mathbf{E}(X_2 - \mathbf{E}X_2) = 0 ,$$

car les v.a. $X_1 - \mathbf{E}X_1$ et $X_2 - \mathbf{E}X_2$ sont indépendantes.

2.10 Lois à valeurs dans N

Les lois de probabilité à valeur sur les entiers interviennent dans de nombreuses applications et exemples comme nous le verrons dans la section exercices. Aussi consacrons-nous une section à l'étude de ces lois.

Définition 2.14 *Fonction génératrice.*
Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbf{N}$. La fonction génératrice de X est définie par :

$$\phi(s) = \mathbf{E}\left(s^X\right) = \sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(X = k)s^k .$$

La fonction génératrice est au moins définie pour $|s| \leq 1$ puisque la série $\sum \mathbf{P}(X = k)$ est absolument convergente. De plus, pour $0 \leq s \leq 1$, la fonction génératrice est croissante et vérifie :

$$0 \leq \phi(s) \leq 1 .$$

Remarque 2.5
En pratique, on ne cherchera pas à déterminer le domaine de définition de la fonction génératrice, car la connaissance de ce domaine ne nous apportera pas grand-chose.

Exercice 2.10.1 *($\star$) Calculer la fonction génératrice d'une v.a. de Poisson de paramètre θ.*

Solution :
Soit X la v.a. de Poisson : $\mathbf{P}(X = k) = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}$. La fonction génératrice $\phi(s)$ est donnée par :

$$\phi(s) = \sum_{k\geq 0} \mathbf{P}(X = k)s^k = e^{-\theta}\sum_{k\geq 0}\frac{(s\theta)^k}{k!} = e^{\theta(s-1)} .$$

Il est clair que si l'on connait les probabilités $\mathbf{P}(X = k)$, on connait aussi la fonction génératrice. Réciproquement (cf. théorème sur les séries dérivées en section A.1), on vérifie par récurrence que la fonction génératrice est C^∞ au moins sur $]-1, 1[$. On a donc le lemme suivant.

Lemme 2.4
Pour tout entier k, la k-ième dérivée de la fonction génératrice vérifie :

$$\phi^{(k)}(0) \;=\; k!\mathbf{P}(X = k) .$$

Remarque 2.6
La fonction génératrice caractérise donc bien la loi de X $\mathbf{P}$, c'est-à-dire que la loi de probabilité est déterminée de manière unique par la fonction génératrice et réciproquement la fonction génératrice est déterminée de manière unique par la loi de probabilité. Il faut donc dans la pratique (résolution d'exercices !) penser à utiliser la fonction génératrice.

Proposition 2.13
Soit X une v.a. de fonction génératrice ϕ. On suppose qu'il existe un entier positif n tel que :

$$\sum_{k\geq 0}\mathbf{P}(X = k)k^n < +\infty .$$

Alors, pour $1 \leq p \leq n$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \phi'(1) ,\\
\mathbf{E}X(X-1) &= \phi''(1) ,\\
&\dots\\
\mathbf{E}X(X-1)\dots(X-p+1) &= \phi^{(p)}(1) ,\\
&\dots\\
\mathbf{E}X(X-1)\dots(X-n+1) &= \phi^{(n)}(1) .
\end{aligned}$$

Démonstration :
On sait que, pour $0 \leq x < 1$:

$$\phi^{(p)}(x) = \sum_{k \geq p} \mathbf{P}(X = k) k(k-1) \dots (k-p+1) x^{k-p} .$$

La fonction $x \to \phi^{(p)}(x)$ est croissante pour $0 \leq x < 1$, elle est majorée par $\sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(X = k) k^n < +\infty$. La fonction $x \to \phi^{(p)}(x)$ admet donc une limite en $x = 1^-$ et cette limite vaut :

$$\begin{aligned} \phi^{(p)}(1) &= \sum_{k \geq p} \mathbf{P}(X = k) k(k-1) \dots (k-p+1) \\ &= \mathbf{E} X(X-1) \dots (X-p+1) . \end{aligned}$$

La proposition 2.8 appliquée à la fonction $\psi(x) = s^x$ conduit au résultat suivant.

Proposition 2.14
Soient $X_1, \dots, X_n$ une suite de v.a. indépendantes. Pour $|s| \leq 1$, on a :

$$\mathbf{E}\left(s^{\sum_1^n X_i}\right) = \prod_1^n \mathbf{E}\left(s^{X_i}\right) .$$

En d'autres termes, si des v.a. sont indépendantes, la fonction génératrice de leur somme est le produit des fonctions génératrices.

L'exercice suivant peut être considéré comme un résultat de cours.

Exercice 2.10.2 *($\star\star$) Loi de Bernoulli*[9]*. Loi binomiale.*

Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. i.i.d.[10] telles que[11] :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 = 0) &= 1 - p , \\ \mathbf{P}(X_1 = 1) &= p , \end{aligned}$$

avec $0 \leq p \leq 1$. Soit la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k .$$

Calculer, pour k entier, $\mathbf{P}(S_n = k)$. En déduire l'espérance et la variance de S_n.

9. Jacques Bernoulli 1654-1705 démontra la loi faible des grands nombres, que nous allons voir d'ici peu, dans le cas paticulier de la loi dite de Bernoulli. Il est un des membres de l'impressionante dynastie des mathématiciens Bernoulli.

10. i.i.d. = indépendantes et identiquement distribuées, c'est-à-dire indépendantes et de même loi.

11. Puisque les v.a. sont identiquement distribuées, on ne donne que la loi de X_1.

La v.a. X_1 s'appelle loi de Bernoulli de paramètre p et la v.a. S_n s'appelle loi binomiale de paramètres n et p et est souvent notée $B(n,p)$.

Solution :

On commence par calculer la fonction génératrice ϕ de S_n. Puisque les $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a. indépendantes :

$$\phi(s) = \mathbf{E}\left(s^{S_n}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(s^{X_i}\right) .$$

Les X_i sont identiquement distribués et ont donc même fonction génératrice. Calculons celle de X_1.

$$\mathbf{E}(s^{X_1}) = s^0\mathbf{P}(X_1 = 0) + s^1\mathbf{P}(X_1 = 1) = 1 - p + ps .$$

On en déduit :

$$\phi(s) = \prod_{i=1}^{n}(1 - p + ps) = (1 - p + ps)^n .$$

La formule du binôme donne :

$$\phi(s) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} s^k ,$$

d'où, en identifiant termes à termes :

$$\mathbf{P}(S_n = k) \quad = \quad C_n^k p^k (1-p)^{n-k} .$$

En appliquant la proposition 2.13, on obtient :

$$\mathbf{E}S_n = \phi'(1) = np ,$$

$$\mathbf{E}S_n(S_n - 1) = \phi''(1) = n(n-1)p^2 .$$

Soit :

$$\mathrm{var}S_n \quad = \quad np(1-p) .$$

Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 2.1

Soit $X_n, n \geq 0$ une suite de v.a. de fonctions génératrices ϕ_n et soit X une v.a. de fonction génératrice ϕ. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.

1. *Pour tout $k \in \mathbf{N}$,*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(X_n = k) \quad = \quad \mathbf{P}(X = k) .$$

2. Pour tout $0 \leq s \leq 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} \phi_n(s) \;=\; \phi(s)\,.$$

Corollaire 2.1 *Approximation poissonnienne.*
Soit X_n *une suite de v.a. de loi binomiale de paramètres* p_n *et* n *tels qu'il existe* $\lambda > 0$ *avec* $\lim_{n \to +\infty} np_n = \lambda$. *Alors, pour tout* $k \in \mathbf{N}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(X_n = k) \;=\; e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\,.$$

Démonstration :
Nous avons vu dans l'exercice 2.10.2 que la fonction génératrice ϕ_n de X_n vaut :

$$\phi_n(s) \;=\; (1 - p_n + p_n s)^n\,.$$

Lorsque $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \phi_n(s) &= \exp\{n \log(1 - p_n + p_n s)\} \\ &\sim \exp\{np_n(s-1)\} \\ &\sim \exp\{\lambda(s-1)\}\,. \end{aligned}$$

On reconnait dans la fonction $\exp\{\lambda(s-1)\}$ la fonction génératrice d'une loi de Poisson (cf. exercice 2.10.1). Une application immédiate de la proposition 2.1 permet de conclure.
L'approximation d'une loi binomiale de paramètres p_n et n sous la condition $\lim_{n \to +\infty} np_n = \lambda$ que nous venons d'effectuer porte le nom d'approximation poissonnienne et est utile dans de nombreuses situations pratiques comme le montre l'exemple suivant. En pratique, il existe un flou artistique certain quant au domaine de validité de l'approximation poissonnienne (i.e. à partir de quelles valeurs de n et jusqu'à quelle valeur de λ peut-on utiliser cette approximation).

Exercice 2.10.3 *($\star$)*
Dans une gare, 9000 voyageurs viennent chaque jour au kiosque à journaux et achètent avec une probabilité $p = 0.001$ *le quotidien "les probas pour les nuls". On suppose que chaque voyageur a un comportement indépendant des autres voyageurs. Quel est le nombre minimum d'exemplaires du quotidien "les probas pour les nuls" que le gérant du kiosque doit se faire livrer le matin s'il veut être en mesure de pouvoir satisfaire toutes les demandes de la journée avec une probabilité supérieure ou égale à 0.95 ?*

Solution :
Notons X la v.a. "nombre d'exemplaires achetés". X suit une loi binomiale de paramètres $p = 0.001$ et $n = 9000$. On propose de faire une approximation poissonienne avec $\lambda = 9$. Notons Y la v.a. de Poisson de paramètre $\lambda = 9$. Notons

m le nombre minimum d'exemplaires du quotidien “les probas pour les nuls” que le gérant du kiosque doit se faire livrer le matin. D'après le corollaire 2.1, puisque n est grand, on peut approximer $\mathbf{P}(X \leq m)$ par $\mathbf{P}(Y \leq m)$. La lecture d'une table de la loi de Poisson (cf. A.7.1) nous indique que $\mathbf{P}(Y \leq 13) < 0.95$ et que $\mathbf{P}(Y \leq 14) > 0.95$. Le gérant décidera donc de se faire livrer 14 exemplaires.

2.11 Inégalités

Proposition 2.15 *Inégalité de Markov*[12].
Soit ϕ une fonction réelle positive croissante et non nulle sauf éventuellement en 0. Soit X une v.a. sur $(\Omega, \mathbf{P})$ telle que la v.a. $\phi(|X|)$ admette une espérance. Alors, pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\mathbf{P}(|X| \geq \delta) \;\leq\; \frac{\mathbf{E}(\phi|X|)}{\phi(\delta)} .$$

$P(|X-E(X)|$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\phi|X|) &= \sum_{x \in |X|(\Omega)} \mathbf{P}(|X| = x)\phi(x) \\
&\geq \sum_{x \in |X|(\Omega), x \geq \delta} \phi(\delta)\mathbf{P}(|X| = x) \\
&= \phi(\delta)\mathbf{P}(|X| \geq \delta) .
\end{aligned}$$

Nous en déduisons l'inégalité célèbre de Bienaymé-Tchebicheff qui va nous servir de suite dans la démonstration de la loi faible des grands nombres.

Corollaire 2.2 *Inégalité de Bienaymé*[13]*-Tchebicheff*[14].

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq \delta) \;\leq\; \frac{varX}{\delta^2} ,$$

sous réserve que X ait une variance.

Démonstration
On applique la proposition 2.15 à la fonction $\phi(x) = x^2$, et à la v.a. $Y = X - \mathbf{E}X$. On remarque alors que $\mathbf{E}Y^2 = \mathrm{var}X$.

Remarque 2.7
Lorsque $\delta \to 0$, la quantité $\dfrac{varX}{\delta^2}$ tend vers $+\infty$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff revient alors à majorer une probabilité par un nombre (beaucoup) plus grand que 1. Il faut donc garder à l'esprit que l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff peut être très grossière.

---

12. Andrei Markov, probabiliste russe, 1856-1922 introduit notamment les systèmes récurrents aléatoires, qui portent le nom de chaînes de Markov.
13. Jules Bienaymé, 1796-1876, probabiliste français.
14. Pafnouti Tchebicheff, 1821-1894, mathématicien russe.

2.12 Loi faible des grands nombres

La loi faible[15] dit que la moyenne arithmétique d'une suite de v.a. i.i.d. converge vers l'espérance de ces v.a..

Théorème 2.2 *Loi faible des grands nombres.*
Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de v.a. i.i.d.. On suppose que X_1 possède une variance. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mathbf{E}X_1\right| \geq \varepsilon\right) = 0 .$$

Démonstration :
Posons :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mathbf{E}X_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbf{E}X_i) ,$$

puisque les X_i sont identiquement distribués. L'espérance de S_n est nulle car :

$$\mathbf{E}S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i - \mathbf{E}X_i) = 0 .$$

La variance de S_n vaut :

$$\begin{aligned}\mathrm{var}S_n &= \mathbf{E}S_n^2 - (\mathbf{E}S_n)^2 = \mathbf{E}S_n^2 \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n \mathbf{E}\left((X_i - \mathbf{E}X_i)(X_j - \mathbf{E}X_j)\right) .\end{aligned}$$

Lorsque $i \neq j$, puisque les X_i sont indépendants :

$$\mathbf{E}\left((X_i - \mathbf{E}X_i)(X_j - \mathbf{E}X_j)\right) = \mathbf{E}(X_i - \mathbf{E}X_i)\mathbf{E}(X_j - \mathbf{E}X_j) = 0 .$$

Lorsque $i = j$,

$$\mathbf{E}\left((X_i - \mathbf{E}X_i)(X_j - \mathbf{E}X_j)\right) = \mathrm{var}X_1 .$$

D'où :

$$\mathrm{var}S_n = \frac{\mathrm{var}X_1}{n} ,$$

On applique ensuite l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff à la v.a. S_n :

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{var}X_1}{n\varepsilon^2}$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon) = 0 .$$

Exercice 2.12.1 *(⋆)*
On lance n fois, et de façon indépendante, un dé non-pipé. On note n_1 le nombre de fois où la face supérieure du dé a été 1. Quelle est la limite de $\mathbf{P}\left(\left|\frac{n_1}{n} - \frac{1}{6}\right| \geq \frac{1}{100}\right)$?

15. loi "faible" car il existe une loi "forte", cf. problème 3.16.3.

Solution :
Notons Y_i la v.a. correspondant au i-ème lancer du dé. Notons $X_i = \mathbf{1}_{Y_i=1}$. D'après la proposition 2.8, les v.a. X_i sont indépendantes. L'espérance de X_i vaut la probabilité que Y_i vaille 1, à savoir 1/6, puisque le dé est non-pipé.
Posons $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{6} = \frac{n_1}{n} - \frac{1}{6}$. La loi des grands nombres nous dit alors que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{n_1}{n} - \frac{1}{6}\right| \geq \frac{1}{100}\right) = 0$.

2.13 Exercices et Problèmes (Enoncés)

Exercice 2.13.1 *($\star$)*
Le salaire des fonctionnaires français est une variable d'espérance $8000F$ et de variance 10^6 F^2. Quelles sont les espérance et variance du salaire des fonctionnaires français en euros ?

Exercice 2.13.2 *($\star\star$)*
Lors d'une de ses lointaines vies antérieures, votre pire ennemi, en mourrant, vous a maudit et a expiré ... un litre d'air. Quelle est l'ordre de grandeur de la probabilité que vous avaliez au moins une de ses molécules d'air en inspirant un litre ? (Dans un litre d'air, on trouve environ $n = 2.7\ 10^{22}$ molécules et l'atmosphère terrestre contient environ $N = 1.1\ 10^{44}$ molécules).

Exercice 2.13.3 *($\star$)*
Dans un jeu à deux joueurs, on lance quatre dés. Si aucun 6 n'est sorti, le premier joueur gagne la mise, sinon, c'est le deuxième qui l'empoche. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 2.13.4 *($\star$)*
n personnes sont réunies lors d'une soirée. A partir de combien de personnes (i.e. à partir de quelle valeur de n) acceptez-vous de parier qu'au moins deux des personnes réunies ont la même date d'anniversaire ?

Exercice 2.13.5 *($\star\star$)*
On considère p urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire selon une loi uniforme une boule dans chaque urne. Les tirages sont indépendants. Quelle est la probabilité pour que le nombre tiré le plus élevé soit un nombre m déterminé ?

Exercice 2.13.6 *($\star$) Loi hyper-géométrique.*
On considère une urne contenant n boules dont m $(1 \leq m \leq n)$ sont noires et les autres blanches. On tire successivement, et sans les remettre dans l'urne, p boules. Quelle est la probabilité que parmi ces p boules, il y en ait k qui soient noires ?

Exercice 2.13.7 *($\star$) Loi multinomiale.*

1. *Soit $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ muni d'une probabilité $\mathbf{P}$ telle que $\mathbf{P}(\{i\}) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. On tire n fois de suite un élément dans Ω avec la probabilité p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 1, k_1 fois, le nombre 2, k_2 fois, ..., le nombre n, k_n fois ?*

2. *On lance un dé non-pipé 12 fois. Quelle est la probabilité que les six faces apparaissent le même nombre de fois ?*

Exercice 2.13.8 $(\star)$ *Loi binomiale négative.*
Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de v.a. i.i.d. de Bernoulli de paramètre p. Soit m un nombre fixé. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Soit X la v.a. telle que $S_X = m$. En d'autres termes, X représente le nombre de tirages n de v.a. $X_i, i = 1, \ldots, n$ qu'il faut effectuer pour que leur somme vaille m. Quelle est la loi de X ?

Exercice 2.13.9 $(\star\star\star)$
Lors d'une élection, deux candidats A et B ont obtenu respectivement m et n voix. C'est le candidat A qui a gagné l'élection : $m > n$. Quelle est la probabilité pour que A garde constamment la majorité lors du dépouillement ?

Exercice 2.13.10 $(\star\star\star)$
Soit $\Omega_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ muni de la loi uniforme.

1. *Quelle est la probabilité p_n pour que, dans un couple arbitraire $(i, j) \in \Omega_n^2$, i et j soient des entiers premiers[16] entre eux ?*
2. *Quelle est la limite p de p_n quand $n \to +\infty$?*
3. *En admettant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que $p = \frac{6}{\pi^2}$.*
4. *Dans une université, on range les étudiants par ordre de taille et on les regroupe par couples : le premier avec le deuxième, le troisième avec le quatrième, le cinquième avec le sixième, etc. Pour chaque couple d'étudiants, on ajoute 1 si leurs numéros de carte d'étudiants sont des nombres premiers entre eux, et 0 sinon. On divise le résultat obtenu par le nombre d'étudiants. Qu'attendez-vous comme résultat ?*

Exercice 2.13.11 $(\star)$
Soient m et n deux entiers. Posons $\Omega_1 = \{1, 2, \ldots, m\}$, $\Omega_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. On munit Ω de la loi uniforme. On définit les v.a. X_1 et X_2 par :

$$\begin{aligned} X_1(\omega_1, \omega_2) &= \omega_1 , \\ X_2(\omega_1, \omega_2) &= \omega_2 , \end{aligned}$$

pour tout couple $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$. Montrer que les lois des v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes.

Exercice 2.13.12 $(\star\star)$
Soit la probabilité définie sur $\mathbf{N}^2$ par :

$$\mathbf{P}(m, n) = \frac{C}{(m + n + 1)!} .$$

1. *Déterminer C.*

16. Deux entiers sont premiers entre eux s'ils n'ont pas de diviseurs communs autres que 1.

2. *On pose* $X(m,n) = m$ *et* $Y(m,n) = n$.

Les v.a. X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*

Exercice 2.13.13 *(⋆⋆⋆)*
Soit $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ *avec* n *pair. Soit* X *une v.a. sur* Ω *de probabilité* $\mathbf{P}(X = i) = p_i, i = 1, 2, \ldots, n$ *et* Y *une v.a. sur* Ω *de probabilité* $\mathbf{P}(Y = i) = p_i, i = 1, 2, \ldots, n$. *On suppose que les v.a.* X *et* Y *sont indépendantes. On pose* $Z = X + Y$. *Montrer que la loi de la v.a.* Z *ne peut être la loi uniforme sur* $\{2, 3, \ldots, 2n\}$. *(Indication : penser aux fonctions génératrices.)*

Exercice 2.13.14 *(⋆⋆⋆) Loi de Poisson.*
Soit X *une v.a. sur* $\mathbf{N}$ *dont la loi est donnée par :*

$$\mathbf{P}(X = k) \quad = \quad e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!},$$

où θ *est un réel strictement positif donné. On dit que* X *suit une loi de Poisson de paramètre* θ.

1. *Calculer la fonction génératrice de* X *et en déduire l'espérance et la variance de* X.

2. *Soit* Y *une v.a. de Poisson de paramètre* λ. *On suppose que les v.a.* X *et* Y *sont indépendantes. Quelle est la loi de* $X + Y$ *?*

3. (a) *Soit* $\varepsilon > 0$. *Montrer que :*

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X}{\theta} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \quad \leq \quad \frac{1}{\theta\varepsilon^2}.$$

   (b) *En déduire que* $\displaystyle\lim_{\theta\to+\infty} \sum_{k=0}^{[\theta t]} e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!} = 1$ *si* $t > 1$, $= 0$ *si* $0 \leq t < 1$.

Exercice 2.13.15 *(⋆⋆) Loi géométrique.*
Soit X *une v.a. sur* $\mathbf{N}$ *dont la loi est donnée par :*

$$\mathbf{P}(X = k) \quad = \quad Cp^k,$$

où $0 < p < 1$. *On dit que* X *suit une loi géométrique de paramètre* p.

1. *Déterminer* C.

2. *Soit* $x \in \mathbf{N}$. *Calculer* $\mathbf{P}(X \geq x)$.

3. *Calculer la fonction génératrice, l'espérance de* X *et sa variance.*

4. *Soient* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *des v.a. i.i.d. de même loi que* X. *On note* I_n *le nombre (aléatoire) de* X_i *non nuls.*

   (a) *calculer la fonction génératrice de* I_n.

(b) *En déduire* $\mathbf{P}(I_n = k)$ *pour* k *entier.*

Exercice 2.13.16 *(⋆)*
Soient X *une v.a. géométrique de paramètre* p *et* Y *une v.a. de Poisson de paramètre* λ. *On suppose que les v.a.* X *et* Y *sont indépendantes. Calculer, quand elle existe, l'espérance de la v.a.* $Z = X^Y$.

Exercice 2.13.17 *(⋆)*
Soit X *une v.a. sur* $\mathbf{N}$ *dont la loi est donnée par :*

$$\mathbf{P}(X = k) \;=\; \frac{C}{(k+1)(k+2)} \,.$$

1. *Déterminer* C.

2. *La v.a.* X *a-t-elle une espérance ?*

Exercice 2.13.18 *(⋆⋆)*
Soit λ *un réel strictement positif. Soit* X *une v.a. sur* $(\Omega, \mathbf{P})$ *telle que la v.a.* $\mathbf{E}e^{\lambda|X|}$ *ait une espérance. Montrer que pour tout* $\delta > 0$ *:*

$$\mathbf{P}(|X| \geq \delta) \;\leq\; e^{-\delta\lambda}\,\mathbf{E}e^{\lambda|X|} \,.$$

Exercice 2.13.19 *(⋆⋆⋆) Théorème de Stone-Weierstrass.*
Soit $X_n, n \geq 1$ *une suite de v.a. de Bernoulli de paramètre* x, $0 \leq x \leq 1$. *On pose* $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. *Soit* f *une fonction continue sur* $[0,1]$.

Cours

1. *Calculer* $\mathbf{E}f(S_n)$.

2. *En déduire que, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un polynôme* P *tel que* $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$.

Exercice 2.13.20 *(⋆⋆⋆)*
Soit $\varepsilon_n, n > 0$ *une suite de v.a. i.i.d. définies par :*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\varepsilon_n = 0) &= 1/2 \,, \\ \mathbf{P}(\varepsilon_n = 2) &= 1/2 \,. \end{aligned}$$

On définit la suite de v.a. X_n *par récurrence.* X_0 *est une v.a. quelconque sur* $\mathbf{N}$ *indépendante de* ε_0 *et*

$$X_{n+1} \;=\; 1 + \varepsilon_n X_n \,.$$

1. *Calculer la fonction génératrice* $\phi_{n+1}(s)$ *de* X_{n+1} *en fonction de la fonction génératrice* $\phi_n(s)$ *de* X_n.

2. *Soit* $|s| \leq 1$. *Quelle est la limite de* $\phi_n(s)$ *quand* $n \to +\infty$ *?*

Exercice 2.13.21 *(⋆⋆⋆)*
Soit $X_n, n \geq 0$ une suite de v.a. i.i.d. définies sur les entiers strictement positifs. Notons ϕ leur fonction génératrice. Posons :

$$S_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} X_k \,.$$

On définit l'ensemble (aléatoire) S par : $S = \{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots\}$. Pour k entier strictement positif, on définit la suite u_k par : $u_k = \mathbf{P}(k \in S)$.

1. *Montrer que : $u_k = \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(S_n = k)$.*
2. *Posons : $U(s) = \sum_{k \geq 1} u_k s^k$.*
   (a) *Vérifier que le rayon de convergence de la série $\sum_{k \geq 1} u_k s^k$ est supérieur ou égal à 1.*
   (b) *Montrer que, pour $|s| < 1$: $U(s) = \dfrac{\phi(s)}{1 - \phi(s)}$.*

Problème 2.13.1 *(⋆⋆⋆) Processus de branchements.*
Ce problème modélise un phénomène simple, à savoir un arbre généalogique aléatoire. Pour se représenter un processus de branchement, le mieux est de penser à la transmission des noms propres en supposant le nombre de fils aléatoire.
Définition
Soit $(p_k)_{k \geq 0}$ une loi de probabilité sur $\mathbf{N}$. Soient $\xi_{i,n}, i \geq 1, n \geq 0$ une suite de v.a. i.i.d. de probabilité $(p_k)_{k \geq 0}$: $\forall i \geq 1, n \geq 0,\ \ \mathbf{P}(\xi_{i,n} = k) = p_k$. La fonction génératrice des $\xi_{i,n}, i \geq 1, n \geq 0$ est notée $\phi(s)$. Un processus de branchement est la suite de v.a. $Z_n, n \geq 0$ définie par la récurrence :

$$Z_0 = 1\,, \quad Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \xi_{i,n} \,.$$

Z_0 est l'ancêtre de la génération 0. Z_n est le nombre d'individus de la génération n.
Nous supposerons dans la suite la condition suivante :

$$\sum_{k \geq 0} p_k k^2 < +\infty \,.$$

ainsi que $p_0 \neq 0$ et $p_0 + p_1 \neq 1$.

1. *Soit $\xi_i, i \geq 1$ une suite de v.a. i.i.d. entières positives de fonction génératrice ϕ. Soit Y une v.a. entière positive indépendante de la suite $\xi_i, i \geq 1$, de*

fonction génératrice ψ. Montrer que la fonction génératrice de la somme $Z = \sum_{i=1}^{Y} \xi_i$ *est donnée par :*

$$\mathbf{E}\left(s^Z\right) = \psi \circ \phi(s) ,$$

pour $|s| \leq 1$.

2. *Montrer que la fonction génératrice de* Z_n *est donnée par :*

$$\mathbf{E}\left(s^{Z_n}\right) = \phi_n(s) ,$$

avec $\phi_n = \phi \circ \phi \circ \ldots \circ \phi$ *n fois.*

3. *Posons :* $m = \sum_{k \geq 0} k p_k = \mathbf{E}(\xi_{i,n})$. *m s'appelle l'espérance de reproduction du processus de branchement. Montrer que :* $\mathbf{E}(Z_n) = m^n$.

4. *On définit l'événement extinction du processus par* $Ext = \{\exists n,\ Z_n = 0\}$. *Montrer que :* $\mathbf{P}(Ext) = \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(Z_n = 0)$.

5. *Vérifier que :* $\mathbf{P}(Z_n = 0) = \phi_n(0)$.

6. *Montrer que si l'espérance de reproduction m du processus est inférieure ou égale à 1, la population s'éteint avec la probabilité 1.*

   Montrer que si l'espérance de reproduction du processus est strictement supérieure à 1, la probabilité d'extinction q du processus est l'unique solution, strictement inférieure à 1, de l'équation $\phi(s) = s,\ s \in]0,1[$.

7. *Après une période que nous supposerons fixe, une cellule soit se divise en deux cellules avec probabilité* $0 < p < 1$, *soit meurt sans descendance.*

   (a) *Montrer que ce processus de division cellulaire peut se modéliser par un processus de branchement.*

   (b) *Quelle est alors la probabilité d'extinction en fonction de p ?*

8. *Considérons le processus de branchement défini par la loi de reproduction* $p_k = bp^{k-1}, k \geq 1$ *et* $p_0 = \dfrac{1-b-p}{1-p}$, *avec* $b > 0$ *et* $0 < p < 1 - b$.

   (a) *Que vaut l'espérance de reproduction m ? Quelle est la probabilité d'extinction q ? On supposera dans la suite de cette question que l'espérance de reproduction m est strictement supérieure à 1.*

   (b) *Soit ϕ la fonction génératrice de ce processus. Montrer que :*

$$\frac{1-p}{1-pq} = \frac{1}{m} .$$

En déduire que :

$$\begin{aligned}\frac{\phi(s)-q}{\phi(s)-1} &= \frac{1}{m}\frac{s-q}{s-1},\\ \frac{\phi_n(s)-q}{\phi_n(s)-1} &= \frac{1}{m^n}\frac{s-q}{s-1}.\end{aligned}$$

(c) Calculer $\mathbf{P}(Z_n = 0)$.

2.14 Exercices et Problèmes (Solutions)

Solution de l'exercice 2.13.1
Notons X la variable "salaire d'un fonctionnaire français en francs" . D'après l'énoncé, $\mathbf{E}X = 8000$ et $\operatorname{var} X = 10^6$. Soit Y la variable "salaire d'un fonctionnaire français en euros" . En prenant 1 euro= 6.56F, on a $Y = X/6.56$. D'où $\mathbf{E}Y = 8000/6.56 \sim 1219$ euros et $\operatorname{var} Y = 10^6/(6.56)^2 \sim 23237$ euros^2.

Solution de l'exercice 2.13.2
On suppose que, depuis la lointaine vie antérieure dont il s'agit, les molécules d'air ont eu le temps de se distribuer uniformément autour de la Terre. La probabilité, en respirant une unique molécule, qu'elle ne provienne pas de votre ennemi vaut $1 - \frac{n}{N}$. La probabilité q , en respirant n molécules, qu'elles ne proviennent pas de votre ennemi vaut $q = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{n}{N-k}\right)$. Puisque n est très petit devant N, un excellente approximation de q est donnée par $\left(1 - \frac{n}{N}\right)^n$, qui peut être approximé par $\exp\left(-\frac{n^2}{N}\right)$. La probabilité recherchée vaut approximativement 0.997.

Solution de l'exercice 2.13.3
La probabilité qu'il ne sorte aucun 6 vaut $(5/6)^4 \sim 0.48$. Le jeu n'est donc pas équitable.

Solution de l'exercice 2.13.4
Nous supposerons (ce qui est presque vrai) que les naissances suivent une loi uniforme sur l'année, et les années bissextiles sont écartées. La probabilité que toutes les personnes aient des dates d'anniversaire différentes vaut $\prod_{k=1}^{n-k+1} \frac{365-k}{365}$.
Si, par exemple, vous décidez que votre probabilité de gain soit supérieure à 0.5 pour parier, un calcul numérique vous dit qu'il faut au moins 23 personnes, ce qui est un nombre étonnament faible comparé à 365 !

Solution de l'exercice 2.13.5
Il est clair qu'il faut $m \leq n$. Notons p_m la probabilité recherchée. La somme $p_1 + p_2 + \ldots + p_m$ représente la probabilité pour qu'aucun des nombres $m+1, m+2, \ldots, n$ ne soit sorti. Cette probabilité vaut $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = \left(\frac{m}{n}\right)^p$. Nous obtenons donc le système d'équations :

$$\begin{aligned}
p_1 + p_2 + \ldots + p_n &= 1\,, \\
p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^p, \\
\ldots &\quad \ldots, \\
p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-m} &= \left(\frac{n-m}{n}\right)^p, \\
\ldots &\quad \ldots,
\end{aligned}$$

$$p_1 = \left(\frac{1}{n}\right)^p .$$

On en déduit, en faisant la différence entre deux lignes successives :

$$p_m = \frac{m^p - (m-1)^p}{n^p} .$$

Solution de l'exercice 2.13.6

Les p boules peuvent être choisies parmi les n boules de C_n^p façons : C_n^p représente le nombre de tirages possibles. Les k boules noires peuvent être choisies parmi les m noires de C_n^k façons. Les $(p-k)$ boules blanches peuvent elles être choisies de C_{n-m}^{p-k} façons. Il y a donc $C_n^k\, C_{n-m}^{p-k}$ tirages qui donnent k boules noires et $p-k$ boules blanches. La probabilité P recherchée vaut donc :

$$P = \frac{C_n^k\, C_{n-m}^{p-k}}{C_n^p} .$$

Solution de l'exercice 2.13.7

1. Il y a $\dfrac{n!}{k_1!(n-k_1)!}$ façons de choisir k_1 fois le nombre 1. Il y a ensuite $\dfrac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_2)!}$ façons de choisir k_2 fois le nombre 2. Une récurrence immédiate donne alors $\dfrac{n!}{\prod_{i=1}^n k_i!}$ possibilités. La probabilité p recherchée vaut donc :

$$p = \frac{n!}{\prod_{i=1}^n k_i!} \prod_{i=1}^n p_i^{k_i} .$$

2. On applique la question précédente : $p = \dfrac{12!}{2^{12}\, 6^{24}}$.

Solution de l'exercice 2.13.8

X est à valeurs dans $\{m, m+1, m+2, \ldots\}$. X vaut $m+k$ si la $(m+k)$-ième v.a. de Bernoulli a donné un 1 et si, dans les $m+k-1$ précédents tirages, on a obtenu $m-1$ fois 1 (et donc k fois 0). Il y a donc C_{m+k-1}^{m-1} façons d'y arriver :

$$\mathbf{P}(X = m+k) = C_{m+k-1}^{m-1} p^m (1-p)^k .$$

Solution de l'exercice 2.13.9

Nous allons calculer la probabilité pour que le candidat A perde la majorité lors du dépouillement à un instant quelconque. Cet événement peut se produire selon deux cas de figure.

1. A possède au début du dépouillement la majorité. Il la perd à un instant du dépouillement. A cet instant les deux candidats sont à égalité de voix.

2. B possède la majorité au début. Il la perd alors nécessairement. Au moment de la perte, les deux candidats sont à égalité de voix. C'est notamment le cas lorsque le premier bulletin dépouillé est un B.

En conséquence, un combinaison (i.e. un dépouillement électoral) où A perd la majorité est donc une combinaison où A et B arrivent à égalité après un nombre pair de dépouillement. Dans ce genre de combinaisons, l'ordre d'apparition des bulletins A et B est indifférent : il y a donc autant de combinaisons commençant par un B que par un A. Or le nombre de combinaisons commençant par un bulletin B (et qui implique nécessairement que A n'ait pas la majorité lors du dépouillement) vaut $\dfrac{n}{m+n}$. La probabilité que A n'ait pas la majorité lors du dépouillement vaut donc $\dfrac{2n}{m+n}$. La probabilité que A garde constamment la majorité lors du dépouillement vaut donc $1-\dfrac{2n}{m+n}$.

Solution de l'exercice 2.13.10

1. On commence par compter le nombre de couples (i,j) où i et j sont tous deux multiples de 2 : il y en a $\left[\dfrac{n}{2}\right]^2$. Plus généralement, pour q entier premier, il y a $\left[\dfrac{n}{q}\right]^2$ couples (i,j) où i et j sont tous deux multiples de q (cette relation reste valable pour $q>n$ car alors $\left[\dfrac{n}{q}\right]^2=0$). Dire que (i,j) ne sont pas premiers entre eux, c'est dire qu'il existe un nombre premier q qui divise simultanément i et j. Le cardinal de Ω_n^2 est n^2, la probabilité p_n vaut donc :

$$p_n \;=\; \prod_{q\geq 2,\, q \text{ premier}} \left(1-\frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{q}\right]^2\right).$$

2. Posons $r_n=\log p_n$.

$$r_n \;=\; \sum_{q\geq 2,\, q \text{ premier}} \log\left(1-\frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{q}\right]^2\right).$$

La fonction $\log(1+x)$, avec $x\in[-1/2,0]$, vérifie $|\log(1+x)|\leq 2|x|$, d'où l'on déduit :

$$\left|\log\left(1-\frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{q}\right]^2\right)\right| \;\leq\; \frac{2}{q^2}.$$

On vérifie que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[\dfrac{n}{q}\right]^2=\dfrac{1}{q^2}$. La série $\displaystyle\sum_{q\geq 2,\, q \text{ premier}}\frac{2}{q^2}$ est convergente car elle est majorée par la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$. Le théorème de convergence dominée pour les séries (il ne s'agit en fait que d'un cas particulier du corollaire A.5) assure alors :

$$p = \prod_{q\geq 2,\ q \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) .$$

3. On écrit que :

$$\left(1 - \frac{1}{q^2}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{q^{2k}} .$$

$$\frac{1}{p} = \prod_{q\geq 2,\ q \text{ premier}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{q^{2k}}\right) .$$

On remarque alors que $\frac{1}{p}$ se met sous la forme d'une série double en k et q. Cette série double est convergente, l'ordre de sommation est donc indifférent. Pour tout entier n, n se décompose de façon unique en produit de nombres premiers. On en déduit que n^2 apparaît une unique fois dans le développement en série double de $\frac{1}{p}$. On en déduit donc $\frac{1}{p} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4. Il faut supposer d'une part qu'il n'y a pas de relation entre la taille d'un étudiant et son numéro de carte d'étudiant et d'autre part que les numéros de carte d'étudiants balayent tous les entiers. Dans ce cas, le résultat obtenu sera d'autant plus proche de $\frac{3}{\pi^2}$ que le nombre d'étudiants sera élevé, ce qui constitue une méthode comme une autre (?) d'estimer π.

Solution de l'exercice 2.13.11

On vérifie aisément que, pour tout couple $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 = \omega_1) &= 1/n , \\ \mathbf{P}(X_2 = \omega_2) &= 1/m , \end{aligned}$$

d'où :

$$\mathbf{P}(X_1 = \omega_1)\mathbf{P}(X_2 = \omega_2) = 1/(mn) .$$

Par définition de la loi uniforme :

$$\mathbf{P}(X_1 = \omega_1, X_2 = \omega_2) = 1/(mn) .$$

Les v.a. X_1 et X_2 sont donc indépendantes d'après la définition 2.8.

Solution de l'exercice 2.13.12

1. Il faut que $\sum_{m,n\geq 0} \mathbf{P}(m,n) = 1$. La série double $\sum \mathbf{P}(m,n)$ étant absolument convergente, l'ordre de sommation est indifférent. En posant $k = m+n$:

$$\sum_{m,n\geq 0} \mathbf{P}(m,n) = C \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{m=0}^{k} \frac{1}{(k+1)!} \right) = C \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} = Ce\,,$$

   d'où $C = e^{-1}$.

2. Calculons $\mathbf{P}(X=0)$ et $\mathbf{P}(Y=0)$:

$$\mathbf{P}(X=0) = \mathbf{P}(Y=0) = \sum_{n\geq 0} \mathbf{P}(0,n) = e^{-1} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)!} = 1 - 1/e\,.$$

   Par ailleurs : $\mathbf{P}(X=0, Y=0) = e^{-1}$.

   Il s'agit alors de vérifier que $\mathbf{P}(X=0, Y=0) \neq \mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=0)$. On peut pour cela soit faire un calcul en choisissant une valeur approchée de e, soit remarquer que les racines de $(1-x)^2 = x$ sont hors de l'intervalle $[0,1]$ et donc que $(1-1/e)^2 \neq 1/e$. Les v.a. X et Y ne sont donc pas indépendantes d'après la définition 2.8.

Solution de l'exercice 2.13.13

Notons $\phi(s)$ la fonction génératrice de X et $\psi(s)$ celle de Y :

$$\phi(s) = sR(s)\,,\ \ \psi(s) = sT(s)\,,$$

avec

$$R(s) = \sum_{i=1}^{n} p_i s^{i-1}\,,\ \ T(s) = \sum_{i=1}^{n} q_i s^{i-1}\,.$$

Notons $\eta(s)$ la fonction génératrice de Z, en supposant Z uniforme :

$$\eta(s) = \frac{1}{2n-2} \sum_{i=2}^{2n} s^i = \frac{s^2}{2n-2} P(s)\,,$$

avec $P(s) = \dfrac{s^{2n-1}-1}{s-1}$. Puisque X et Y sont indépendants, on a $\eta(s) = \phi(s)\,\psi(s)$ et $P(s) = (2n-2)R(s)\,T(s)$. Les racines du polynôme P sont toutes imaginaires pures (et égales à $e^{i\frac{2k\pi}{2n-1}}, k \neq 0$). R et T sont deux polynômes de degré $n-1$, donc impair, qui admettent en conséquence au moins une racine réelle. Z ne peut suivre une loi uniforme.

Solution de l'exercice 2.13.14

1. La fonction génératrice ϕ de X vaut :

$$\phi(s) = \mathbf{E}\left(s^X\right) = \sum_{k\geq 0} \mathbf{P}(X=k)s^k$$

$$= e^{-\theta} \sum_{k \geq 0} \frac{(\theta s)^k}{k!} = e^{\theta(s-1)} .$$

On en déduit :

$$\phi'(s) = \theta e^{\theta(s-1)} , \quad \phi''(s) = \theta^2 e^{\theta(s-1)} ,$$

et, d'après la proposition 2.13 :

$$\mathbf{E}X = \phi'(1) = \theta ,$$

$$\mathbf{E}X(X-1) = \phi''(1) = \theta^2 .$$

Puis

$$\mathrm{var} X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \theta .$$

2. Puisque les v.a. X et Y sont indépendantes (cf. proposition 2.14) :

$$\mathbf{E}\left(s^{(X+Y)}\right) = \mathbf{E}\left(s^X\right)\mathbf{E}\left(s^Y\right) .$$

En utilisant la question précédente :

$$\mathbf{E}\left(s^{(X+Y)}\right) = e^{\theta(s-1)} e^{\lambda(s-1)} = e^{(\theta+\lambda)(s-1)} .$$

La loi de $X+Y$ est une loi de Poisson de paramètre $\theta + \lambda$.

3. (a) Une application directe de Bienaymé-Tchebicheff donne :

$$\mathbf{P}(|X - \theta| \geq \delta) \leq \frac{\mathrm{var} X}{\delta^2} = \frac{\theta}{\delta^2} .$$

On obtient l'inégalité désirée en posant $\varepsilon = \dfrac{\delta}{\theta}$.

(b) Posons :

$$S_\theta = \sum_{k=0}^{[\theta t]} e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} = \mathbf{P}(X \leq [\theta t]) = \mathbf{P}\left(\frac{X}{\theta} - 1 \leq \frac{[\theta t]}{\theta} - 1\right) .$$

Lorsque $\theta \to +\infty$, $\dfrac{[\theta t]}{\theta}$ tend vers t.

- $0 \leq t < 1$. Pour θ assez grand, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\dfrac{[\theta t]}{\theta} - 1 \leq -\varepsilon < 0$. D'où :

$$S_\theta \leq \mathbf{P}\left(\frac{X}{\theta} - 1 \leq -\varepsilon\right) \leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{X}{\theta} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\theta \varepsilon^2} .$$

On en déduit $\lim\limits_{\theta \to +\infty} S_\theta = 0$.

– $t > 1$. Pour θ assez grand, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{[\theta t]}{\theta} - 1 \geq \varepsilon > 0$. D'où, par un raisonnement identique au précédent :

$$1 - S_\theta \leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{X}{\theta} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\theta\varepsilon^2} .$$

On en déduit $\lim_{\theta\to+\infty} 1 - S_\theta = 0$, et $\lim_{\theta\to+\infty} S_\theta = 1$.

Solution de l'exercice 2.13.15

1. Il faut que $\sum_{k\geq 0} \mathbf{P}(X = k) = 1$, d'où $C = 1 - p$.

2. $\mathbf{P}(X \geq x) = (1-p)\sum_{k\geq x} p^k = (1-p)p^x \sum_{k\geq x} p^{k-x}$. En posant $q = k - x$:

$$\mathbf{P}(X \geq x) = (1-p)p^x \sum_{q\geq 0} p^q = \frac{(1-p)p^x}{1-p} = p^x .$$

3. Notons ϕ la fonction génératrice :

$$\phi(s) = \sum_{k\geq 0} \mathbf{P}(X = k)s^k = (1-p)\sum_{k\geq 0} p^k s^k .$$

$$\phi(s) = \frac{1-p}{1-ps} .$$

$$\phi'(s) = \frac{(1-p)p}{(1-ps)^2}, \quad \phi''(s) = \frac{2(1-p)p^2}{(1-ps)^3} .$$

On en déduit, d'après la proposition 2.13 :

$$\mathbf{E}X = \phi'(1) = \frac{p}{1-p} .$$

$$\mathrm{var}X = \phi''(1) + \phi'(1) - \phi'^2(1) = \frac{2p^2}{(1-p)^2} .$$

4. (a) On peut réécrire I_n sous la forme : $I_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i \neq 0}$. Notons $\phi(s)$ la fonction génératrice de I_n : $\phi(s) = \mathbf{E}(s^{I_n})$. Les X_i sont des v.a. indépendantes. D'après la proposition 2.8, les v.a. $\mathbf{1}_{X_i\neq 0}$ sont aussi des v.a. indépendantes. On en déduit, d'après la proposition 2.14 :

$$\phi(s) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(s^{\mathbf{1}_{X_i\neq 0}}\right) .$$

Puis, on est ramené au calcul d'une loi de Bernoulli (cf. exercice 2.10.2) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(s^{\mathbf{1}_{X_i\neq 0}}\right) &= 1 - p + ps , \\ \phi(s) &= (1 - p + ps)^n . \end{aligned}$$

(b) D'après la formule du binôme :

$$\phi(s) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} s^k \ ,$$

soit, pour $0 \leq k \leq n$:

$$\mathbf{P}(I_n = k) \quad = \quad C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \ .$$

Solution de l'exercice 2.13.16

Sous réserve d'existence, et en raison de l'indépendance des v.a. X et Y :

$$\mathbf{E}X^Y = \sum_{m,n\geq 0} m^n \mathbf{P}(X=m, Y=n) = \sum_{m,n\geq 0} m^n \mathbf{P}(X=m)\mathbf{P}(Y=n)$$

$$\mathbf{E}X^Y = \sum_{m,n\geq 0} m^n (1-p)p^m \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \ .$$

Si cette série double est convergente, on peut la sommer dans n'importe quel ordre :

$$\mathbf{E}X^Y = (1-p)e^{-\lambda} \sum_{m\geq 0} p^m \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(\lambda m)^n}{n!} \right) = (1-p)e^{-\lambda} \sum_{m\geq 0} p^m e^{\lambda m} \ .$$

La série $\sum p^m e^{\lambda m}$ est convergente ssi $pe^{\lambda} < 1$. La v.a. X^Y a donc une espérance ssi $pe^{\lambda} < 1$. Dans ce cas :

$$\mathbf{E}X^Y = \frac{(1-p)e^{-\lambda}}{1-pe^{\lambda}} \ .$$

Solution de l'exercice 2.13.17

1. On vérifie que : $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}$, d'où : $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1$, puisque les termes s'éliminent deux à deux sauf le premier. On en déduit $C = 1$.
2. Lorsque k est grand, $\dfrac{k}{(k+1)(k+2)}$ est équivalent à $\dfrac{1}{k}$. La série $\displaystyle\sum \frac{k}{(k+1)(k+2)}$ est divergente donc la v.a. X n'a pas d'espérance.

Solution de l'exercice 2.13.18

On applique l'inégalité de Markov (cf. proposition 2.15) avec la fonction $\phi(x) = e^{\lambda|x|}$.

Solution de l'exercice 2.13.19

1. On a vu lors de l'exercice 2.10.2 que $\mathbf{P}\left(S_n = \dfrac{k}{n}\right) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$. On en déduit $\mathbf{E}f(S_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

2. f est continue sur $[0,1]$, elle est donc uniformément continue. Rappelons la définition d'une fonction uniformément continue sur $[0,1]$:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\,,\ \forall x, y \in [0,1]\,, |x-y| \le \delta \Rightarrow\,,\ |f(x) - f(y)| \le \varepsilon\,.$$

Posons $I = \{0 \le k \le n,\ |k - nx| \le n\delta\}$.

– On a, pour les $k \in I$:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| &\le \varepsilon \sum_{k \in I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\le \varepsilon \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

– f est continue sur $[0,1]$, donc bornée. On a, pour les $k \notin I$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \notin I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right| &\le 2 \sup_{[0,1]} |f| \sum_{k \notin I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\le 2 \sup_{[0,1]} |f| \mathbf{P}(|S_n - x| > \delta)\,. \end{aligned}$$

D'après Bienaymé-Tchebicheff

$$\mathbf{P}(|S_n - x| > \delta) \le \frac{\mathrm{var}(X_1)}{n\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \le \frac{1}{n\delta^2}\,.$$

On peut donc trouver n_0 indépendant de x, tel que, pour $n \ge n_0$, $\left| \sum_{k \notin I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right| \le \varepsilon.$

Nous avons donc montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0, tel que, pour $n \ge n_0$,

$$\sup_{x \in [0,1]} |\mathbf{E} f(S_n) - f(x)| \ \le\ 2\varepsilon\,.$$

On remarque alors que $x \to \mathbf{E} f(S_n)$ est un polynôme, ce qui montre le théorème de Stone-Weierstrass.

Solution de l'exercice 2.13.20

1. Notons d'abord que X_n est une fonction des $\varepsilon_k, k < n$. X_n et ε_n sont donc indépendants.

   On a :

$$\phi_{n+1}(s) = \mathbf{E}\left(s^{X_{n+1}}\right) = \mathbf{E}\left(s^{1+\varepsilon_n X_n}\right) = s\ \mathbf{E}\left(s^{\varepsilon_n X_n}\right)\,.$$

$$\mathbf{E}\left(s^{\varepsilon_n X_n}\right) \ = \ \sum_{k \ge 0} \mathbf{P}(\varepsilon_n X_n = k) s^k\,.$$

D'après la proposition 2.7 :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\varepsilon_n X_n = k) &= \mathbf{P}(\varepsilon_n X_n = k/\varepsilon_n = 0)\mathbf{P}(\varepsilon_n = 0)\\ &\quad +\mathbf{P}(\varepsilon_n X_n = k/\varepsilon_n = 2)\mathbf{P}(\varepsilon_n = 2)\,.\end{aligned}$$

Si k est impair, $\mathbf{P}(\varepsilon_n X_n = k) = 0$. Si k est pair avec $k \neq 0$, en posant $k = 2p$:

$$\mathbf{P}(\varepsilon_n X_n = k) = 1/2\mathbf{P}(X_n = p)\,.$$

Si $k = 0$

$$\mathbf{P}(\varepsilon_n X_n = 0) = 1/2 + 1/2\mathbf{P}(X_n = 0)\,.$$

On en déduit :

$$\mathbf{E}(s^{\varepsilon_n X_n}) = 1/2 \sum_{p \geq 0} \mathbf{P}(X_n = p) s^{2p} + 1/2\,,$$

et

$$\phi_{n+1}(s) = s\left(1/2 + 1/2\mathbf{E}(s^{2X_n})\right)\,.$$

On en déduit la relation de récurrence suivante :

$$\phi_{n+1}(s) = 1/2(s + s\phi_n(s^2))\,.$$

2. On reprend la relation précédente de récurrence entre ϕ_{n+1} et ϕ_n , ce qui nous donne :

$$\phi_n(s) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} s^{2^k - 1} + 2^{-n} s^{2^n - 1} \phi_0(s^{2^n})\,.$$

Puisque $|s^{2^n}| \leq 1$, on en déduit $|\phi_0(s^{2^n})| \leq 1$, d'où $\lim_{n \to +\infty} 2^{-n} s^{2^n - 1} \phi_0(s^{2^n}) = 0$.
On a donc montré que :

$$\lim_{n \to +\infty} \phi_n(s) = \sum_{k \geq 1} 2^{-k} s^{2^k - 1}\,.$$

Solution de l'exercice 2.13.21

1. La suite des S_n est strictement croissante car les X_i sont des entiers strictement positifs. Dire que $k \in S$, c'est donc dire qu'il existe un unique n_0 tel que $S_{n_0} = k$, $S_n < k$ pour $n < n_0$ et $S_n > k$ pour $n > n_0$. L'événement $\{k \in S\}$ est donc égal à $\bigcup_{n \geq 1} \{S_n = k\}$, et les événements $\{S_n = k\}$ sont deux à deux disjoints. La propriété de σ-additivité permet alors d'affirmer :

$$u_k = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} \{S_n = k\}\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(S_n = k)\,.$$