Part II

Théorie de Fourier et traitement du signal

Issue des travaux de Joseph Fourier (1822) sur la "théorie analytique de la chaleur", la théorie des séries de Fourier étudie la décomposition d'un signal en signaux périodiques plus simples (décomposition d'un son en harmoniques par exemple) et de sa reconstitution (synthèse harmonique)[6].

5 Introduction au traitement du signal

Un signal est le support physique d'une information ou d'une commande. Il se présente sous différentes formes : signal électromagnétique (signal électrique, signal magnétique, signal radioélectrique ...), signal acoustique (son, échographie, ...), signal graphique (film, ...)...

Signal sinusoïdal

Signal modulé

Signal binaire

Signal son « o »

Notes de musique

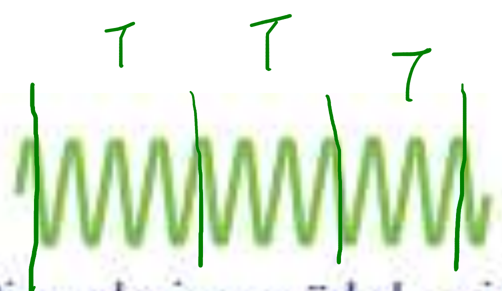
Image

Un signal déterministe (ou signal certain) est un signal dont on peut connaître les états futurs, dont l'évolution peut parfaitement être décrite par un modèle mathématique approprié : signal généralement rencontré en laboratoire.

Un signal aléatoire a une forme imprévisible à l'avance, et est donc susceptible d'être porteur d'informations.

Signal sinusoïdal : $\sin(\omega_0 t)$

Signal aléatoire : pas de représentation analytique



Signal sinusoïdal : $\sin(\omega_0 t)$

Signal aléatoire : pas de représentation analytique

Le signal de gauche est périodique. On aura tendance à le résumer par l'observation de son évolution sur la période T (série de Fourier). On ne pourra pas faire de telle restriction pour le signal de droite (transformée de Fourier).

5.1 Classification énergétique

Une classification peut être faite à partir des notions d'énergie ou de puissance d'un signal. Au signal $f(t)$ (fonction complexe ou réelle de t), on associe :

- l'énergie, E_f, définie, si elle existe, par :

$$E_f = \int_0^\tau |f(t)|^2 dt,$$

  sur le support temporel τ ;

- la puissance moyenne, P_f, définie, si elle existe par :

$$P_f = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau |f(t)|^2 dt$$

A partir de ces définitions, apparaissent deux classes de signaux :

- signaux à énergie finie : $E_x < \infty$,
- signaux à puissance moyenne finie : $PX < \infty$ (signaux à énergie infinie), qui contiennent les signaux périodiques ou les signaux aléatoires permanents.

Les signaux “réels” (rencontrés en pratique) sont des signaux à énergie finie (définis sur une durée finie), cependant les signaux à puissance moyenne finie sont souvent utilisés pour modéliser des générateurs de signaux périodiques par exemple. Enfin, certains signaux théoriques n’appartiennent ni à l’une ni à l’autre de ces catégories.

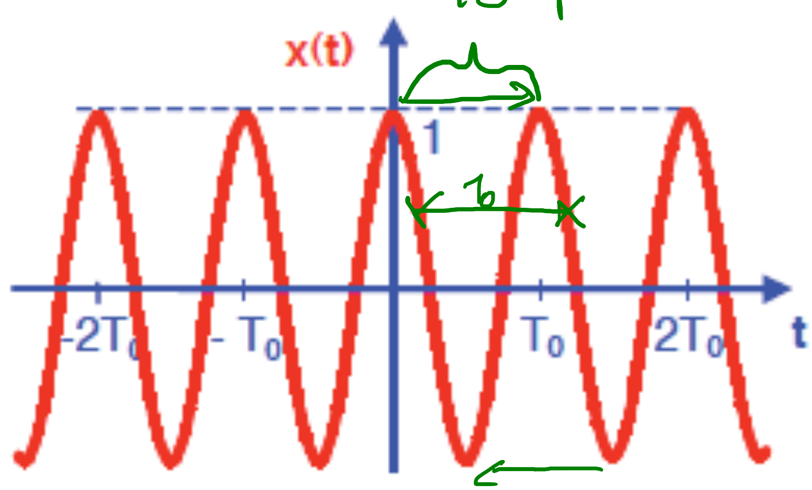
5.2 Représentation en temps et en fréquence

La description la plus simple d'un signal est donnée par la représentation des variations de l'amplitude en fonction du temps.

Une représentation très concrète pour le physicien est donnée par la représentation des amplitudes du signal en fonction de la fréquence : cette représentation est appelée spectre du signal.

On rapelle que pour une période T_0, on définit la fréquence associée $f_0 = T_0^{-1}$. Ainsi un signal élémentaire qui ne contient qu'un phénomène de période t_0, nommé **harmonique**, a un spectre qui contient f_0 et $-f_0$:

T_0 période



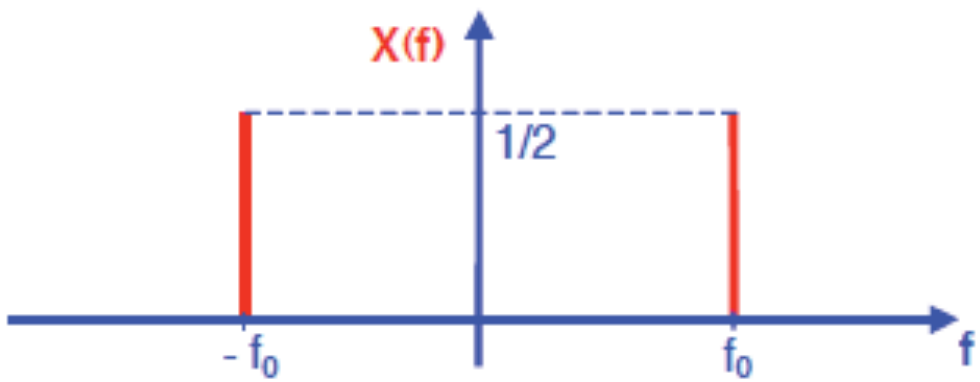
t_0

$-t_0$?

période : $\pm T_0$?

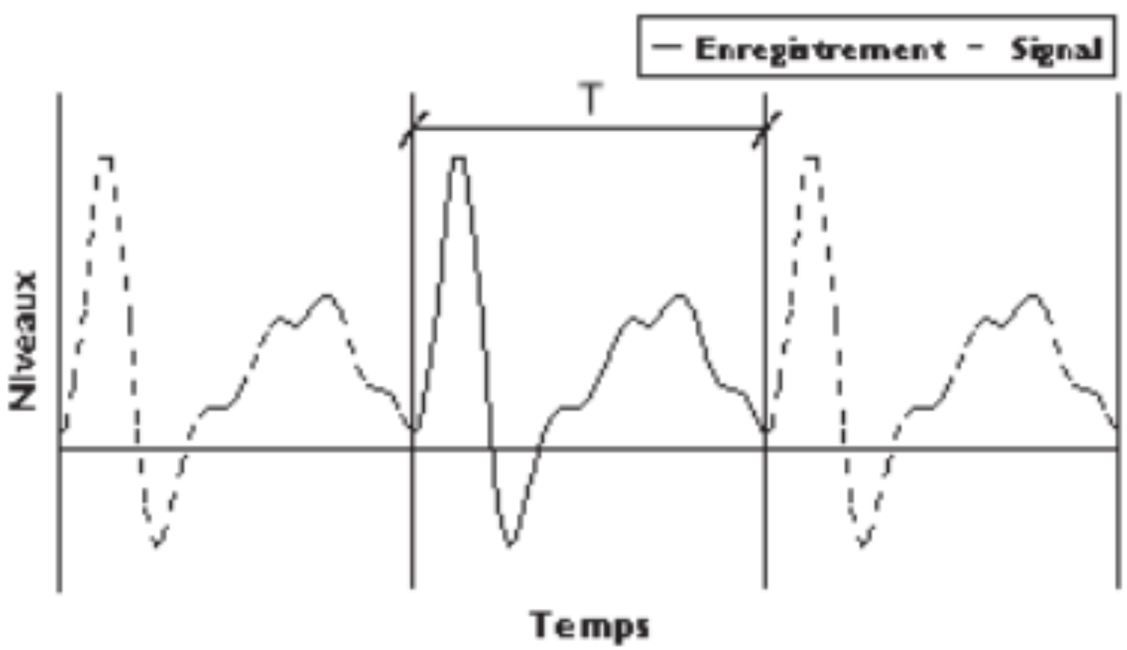
$f_0 = \frac{1}{T_0}$

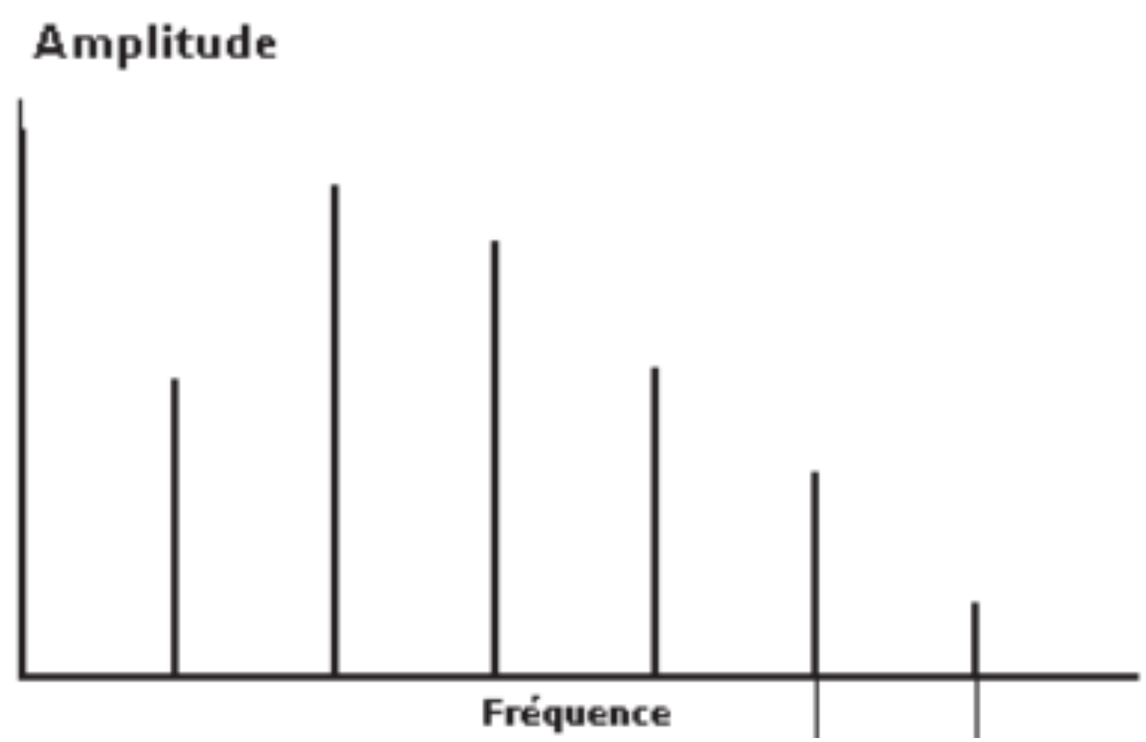
On observe $\pm f_0$.



Spectre .

Et un signal plus complexe sera composés de signaux élémentaires de différentes fréquences.

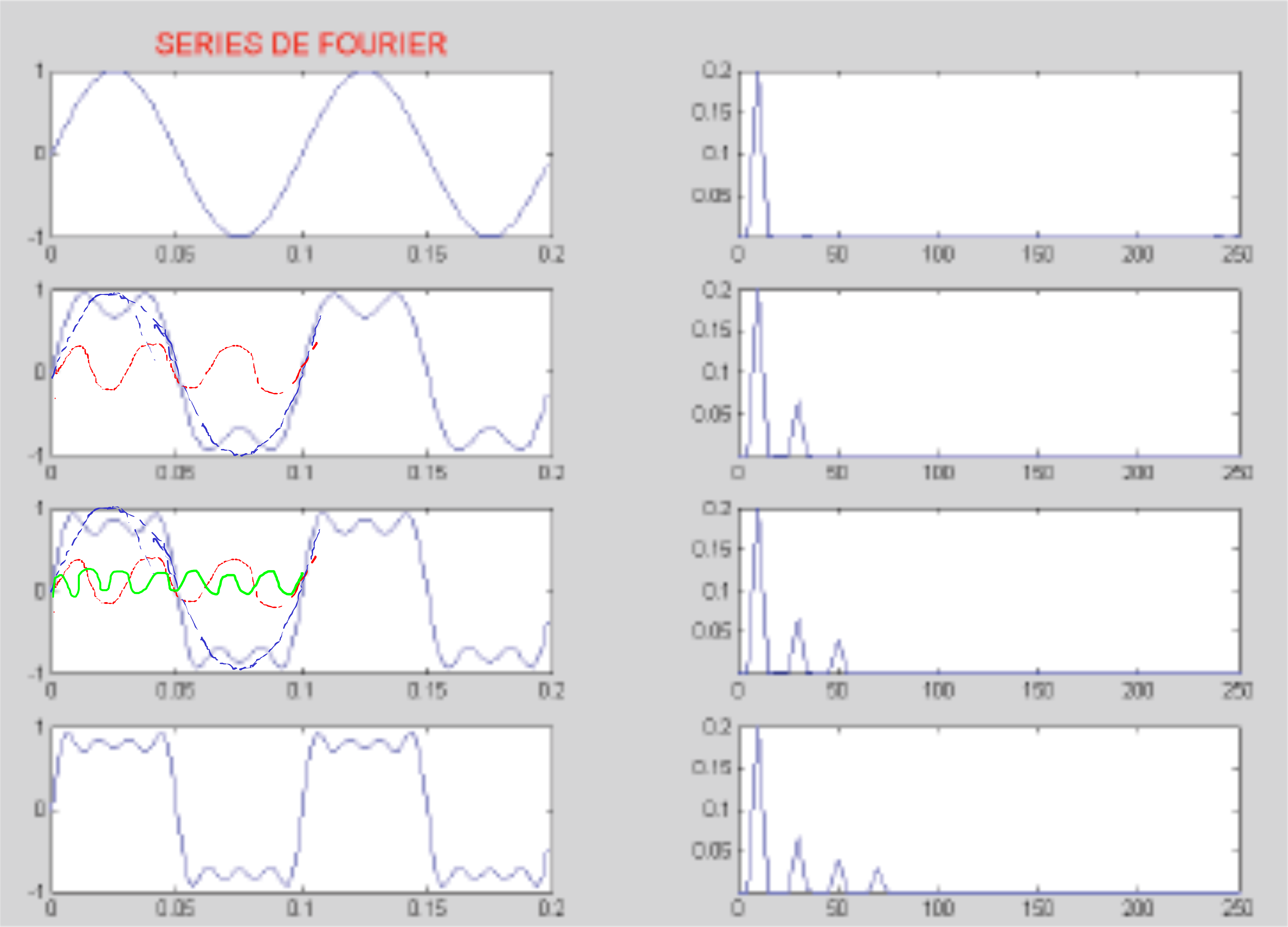




Réciproquement, une fréquence f_0 donnée donnera donc naissance à un signal élémentaire, parfaitement régulier de période T_0 appelé ondelette. Quantifier la quantité de chaque ondelette dans un signal revient à utiliser la théorie de Fourier, détaillée dans ce qui suit.

6 Séries de Fourier

Chaque signal périodique s'associe donc à un spectre.



SERIES DE FOURIER

connaître l'expression des harmoniques

→ famille de fonctions

quantifier dans un signal la présence de chaque harmonique

→ projection orthogonale.

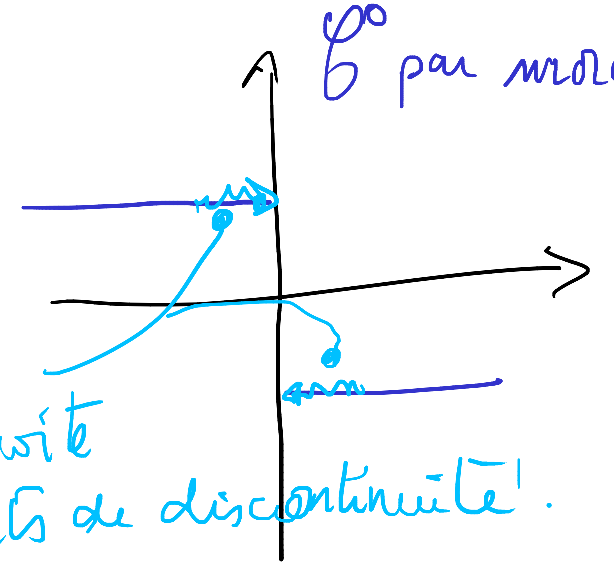
6.1 Rappels

Une fonction f définie sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$$

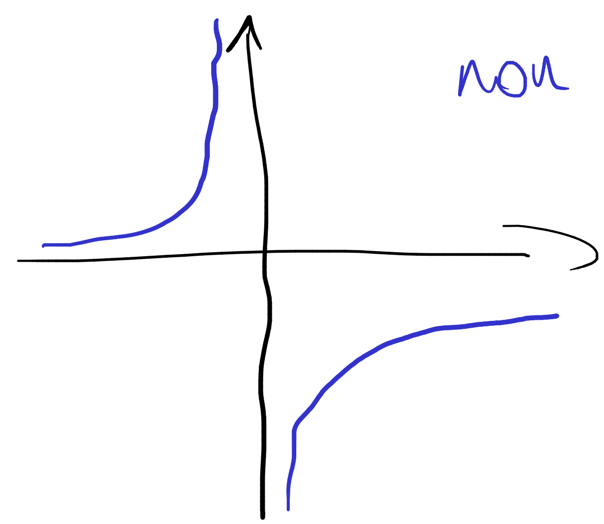
de I telle que f est continue sur tout intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, pour $k \in \{0, \cdots, p-1\}$ et admet en chacun des points x_k des limites à gauche et à droite finies. On dit que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ si elle est continue par morceaux sur tout segment. (faire un dessin)

$\mathcal{C}^0$ par morceaux

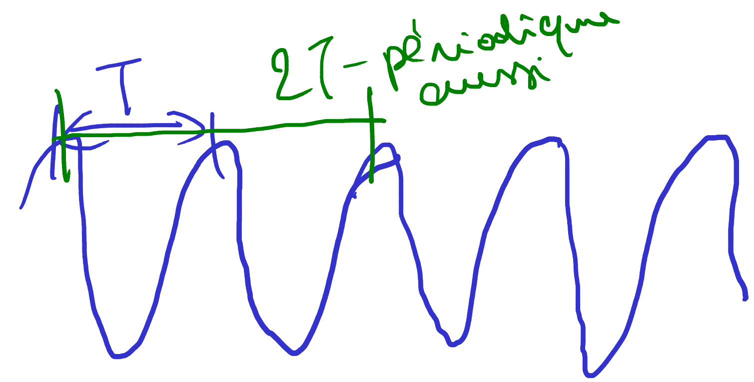


limites à gauche et à droite des points de discontinuité !

non continu par morceaux.



Definition 6.1 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et soit T un réel strictement positif. On dit que f est périodique de période T si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(x+T)$.*

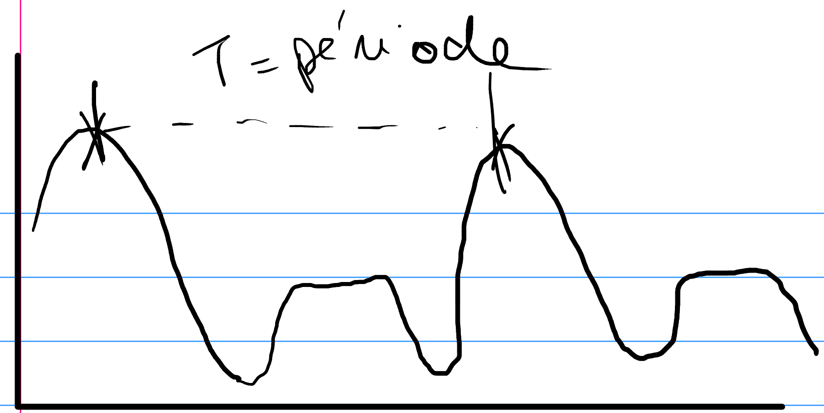


Remarque 6.2 • *Si f est périodique de période T, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, f est périodique de période kT.*

• *Soit $f_1, \cdots, f_n$ des fonctions périodiques de période T. Si $a_1, \cdots, a_n$ sont des complexes, $\sum_j a_j f_j$ est périodique de période T.*

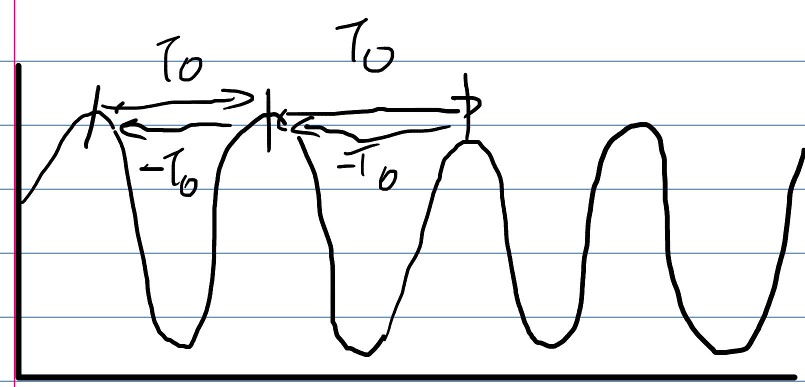
→ une fonction $\frac{T}{n}$ périodique est aussi T périodique

→ Une combinaison linéaire de fonctions $\frac{T}{n}$-périodiques (avec n différents dans $\mathbb{Z}$) reste T périodique.



signal T-périodique

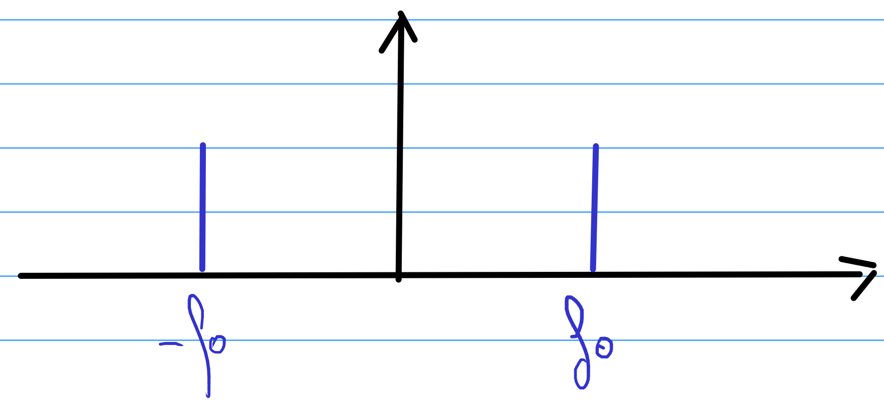
$$\forall t : f(t+T) = f(t)$$



signal "compliqué"

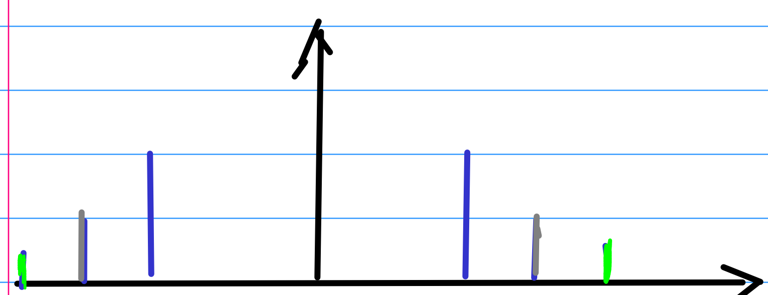
signaux élémentaires = harmoniques

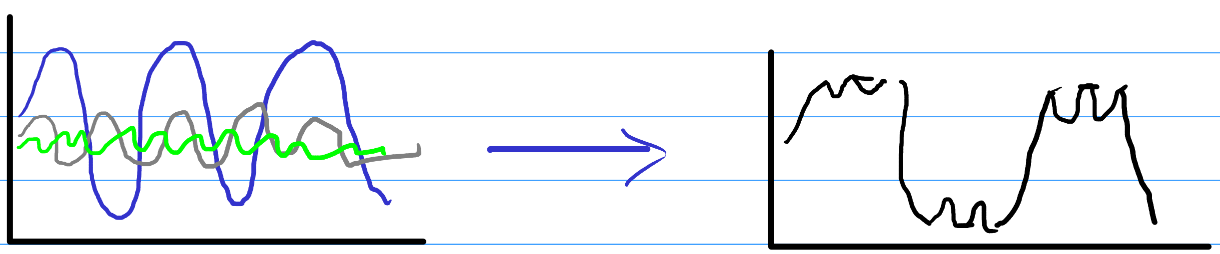
période $\pm T_0$. $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$



spectre.

= Représentation en fréquences.





Séries de Fourier.

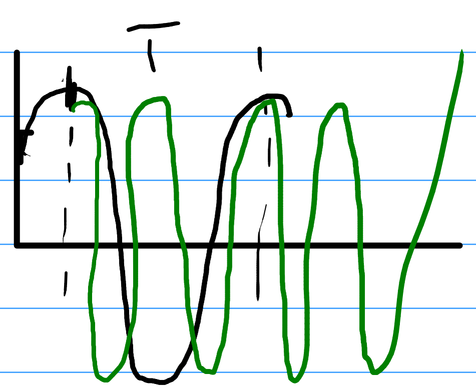
- une fonction T périodique est aussi $2T$-périodique
$3T$ ou $4T$ ... kT périodique
$k \in \mathbb{Z}$

- une fonction $\frac{T}{k}$-périodique est aussi T périodique.

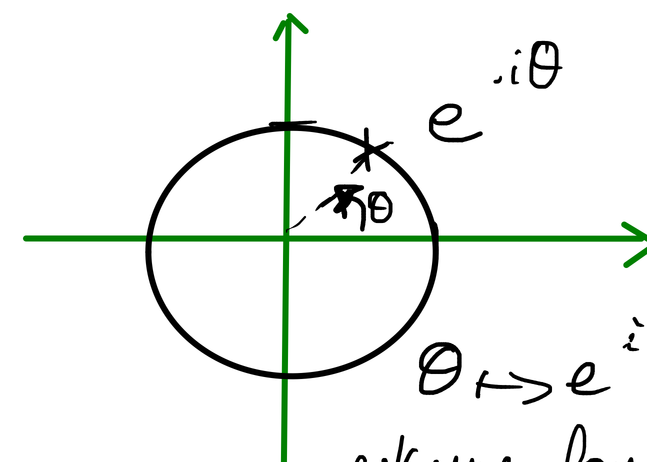
- Dans les deux remarques, ce n'est pas vrai si $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Sinon il y a des événements qui sont sur certaines périodes et pas sur d'autres.

$\Rightarrow$ Les seules fonctions T périodiques sont les fonction $\frac{T}{k}$-périodiques avec $k \in \mathbb{Z}$.



plan complexe



$\theta \mapsto e^{i\theta}$ est une fonction qui fait le tour du cercle !

$\Rightarrow$ périodique de période 2π.

Exemple.

(i) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction

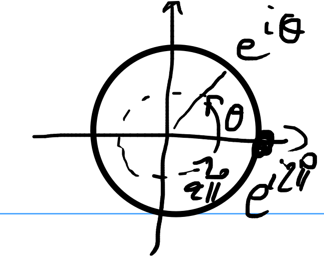
$$x \mapsto e^{2\pi i k x}$$

est périodique de période 1.

$f : x \mapsto e^{2\pi i x}$

est 1-périodique.

$$f(x+1) = e^{2\pi i (x+1)} = e^{2\pi i x + 2\pi i} = \underbrace{e^{2\pi i}}_{1} e^{2\pi i x} = e^{2\pi i x} = f(x).$$



$f_k : x \mapsto e^{2\pi i k x}$ est $\frac{1}{k}$ périodique

$$f_k\left(x+\frac{1}{k}\right) = e^{2\pi i k\left(x+\frac{1}{k}\right)} = e^{2\pi i k x + 2\pi i k \times \frac{1}{k}}$$

$$= e^{2\pi i k x}\underbrace{e^{2i\pi}}_{1} = f(x).$$

Si f_k est $\frac{1}{k}$ périodique, elle est aussi 1-périodique.

(ii) Si $T \neq 0$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction

$$x \mapsto e^{\frac{2\pi}{T} ikx}$$

est périodique de période T.

harmoniques

fondamentales !

$(e^a)^b = e^{ab}$

$\left(e^{\frac{2\pi}{T} i x}\right)^k = e^{\frac{2\pi}{T} i k x}$

(iii) Il résulte donc de ce qui précède que tout polynôme trigonométrique

$$P_N(x) = \sum_{-N}^{N} c_k \underbrace{e^{\frac{2\pi}{T} ikx}}_{\text{puissance } k \text{ de } e^{i\frac{2\pi}{T}x} \text{ ("polynôme")}}$$

avec les c_k des complexes, est une fonction périodique de période T.

__Pb :__ peut-on trouver des polynômes trigonométriques qui approchent les signaux ?

6.2 Rappels d'intégration

Soit T un réel strictement positif et f une fonction continue par morceaux, périodique de période T. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_a^{a+T} f(u)du = \int_0^T f(u)du.$$

Preuve : $\displaystyle\int_a^{a+T} f(u)du = \int_a^0 f(u)du + \int_0^T f(u)du + \int_T^{a+T} f(u)du.$

On pose $x = u - T \iff u = x + T$ et $du = dx$ $\begin{cases} u = T \iff x = 0 \\ u = a + T \iff x = a \end{cases}$

$$\int_{u=T}^{u=a+T} f(u)du = \int_{x=0}^{x=a} f(x+T)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx = -\int_a^0 f(u)du.$$

$$\iff \int_a^{a+T} f(u)\,du = \int_0^T f(u)du.$$

$\blacksquare$

Sur $[0,T]$, elles sont continues sur les sous-intervalles d'une partition de $[0,T]$ et avec des limites finies aux bornes.

on ne les regarde que sur $[0,T]$

6.3 Définition

Dans l'espace $E(T)$ des fonctions continues par morceaux périodiques de période T, l'application

$$\langle f, g\rangle \in E^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\bar{g}(u)du$$

$\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$ à valeur complexes.

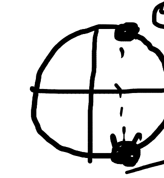
définit un produit hermitien. linéaire sur chaque argument. $\langle f,f\rangle > 0$. sauf si $f=0$.

Les harmoniques élémentaire pour reconstituer un signal T périodique sont données par la famille suivante.

Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ avec $e_k(x) = e^{i\frac{2\pi}{T}kx}$

Thm : (e_k) est une famille orthonormée de $E(T)$. En fait, c'est une base.

Si $p \neq n$



$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$\langle e_n, e_p \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}nx}\ \overline{e^{i\frac{2\pi}{T}px}}\, dx$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}nx}\ e^{-i\frac{2\pi}{T}px}\, dx$$

$$\int e^{ax}\,dx = \left[\frac{e^{ax}}{a}\right]$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e^{\overbrace{i\frac{2\pi}{T}(n-p)}^{a}x}\, dx$$

$$= \cancel{\frac{1}{T}}\left[\frac{e^{i\frac{2\pi}{T}(n-p)x}}{i\frac{2\pi}{\cancel{T}}(n-p)}\right]_0^T$$

$$= \frac{e^{i\frac{2\pi}{\cancel{T}}(n-p)\cancel{T}}}{i2\pi(n-p)} - \frac{1}{i2\pi(n-p)} = \frac{1}{i2\pi(n-p)}\left(\underbrace{e^{i2\pi\times\underbrace{(n-p)}_{\in\mathbb{Z}}}}_{1} - 1\right)$$

nombre entier de tours de cercle trigonométrique.

donc $\langle e_n, e_p \rangle = 0$ si $n \neq p$

$$\langle e_n, e_n \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}nx}\,\overline{e^{i\frac{2\pi}{T}nx}}\,dx$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}nx}\,e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}\,dx$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}(n-n)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T e^{0}\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T 1\,dx = \frac{1}{T}x^{T} = \underline{1}.$$

$$\|e_n\| = \sqrt{\langle e_n, e_n\rangle} = \sqrt{1} = \underline{1}.$$

On a donc

$$\langle e^{\frac{2\pi}{T}inx}, e^{\frac{2\pi}{T}ipx}\rangle \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = p \\ 0 & \text{si} \quad n \neq p \end{cases}.$$

Il suit que la famille

$$(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$$

est orthonormée (donc libre). Le caractère générateur de la famille est assuré par des théorèmes plus compliqués mais on peut donner, ici, une intuition d'un tel résultat.

- Notons la $T-$périodicité des harmoniques $e^{i\frac{2\pi k}{T}x}$ pour $k \in \mathbb{Z}$:

- Notons qu'un signal ne peut contenir que des harmoniques de période inférieure à T. Sinon, sur certaines périodes, un événement apparaîtrait mais pas sur d'autres.

On observe ainsi que les harmoniques

$$(e_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \left(e^{\frac{2\pi}{T}ikx}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$$

couvrent tous les phénomènes $T-$périodiques à l'exclusion de toute autre fréquence. $\square$

<u>Rappels</u>: $(e_k)_k$ une base orthonormée.

<u>expl</u>: $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et v un "vecteur" de F

le projeté orthogonal de v sur F $\quad P_F(v) = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 + \langle v, e_3\rangle e_3$.

sur $F = \mathrm{Vect}(e_p)$. $\quad P_{\mathrm{Vect}(e_p)}(v) = \langle v, e_p\rangle e_p$.

$$v = \sum_{p}' \underbrace{\langle v, e_p \rangle}_{} e_p$$

↳ quantifie la quantité de vecteur de base e_p dans v.

$\left(\langle v, e_p \rangle \right)_p$ sont les coordonnées de v dans la base $(e_k)_k$.

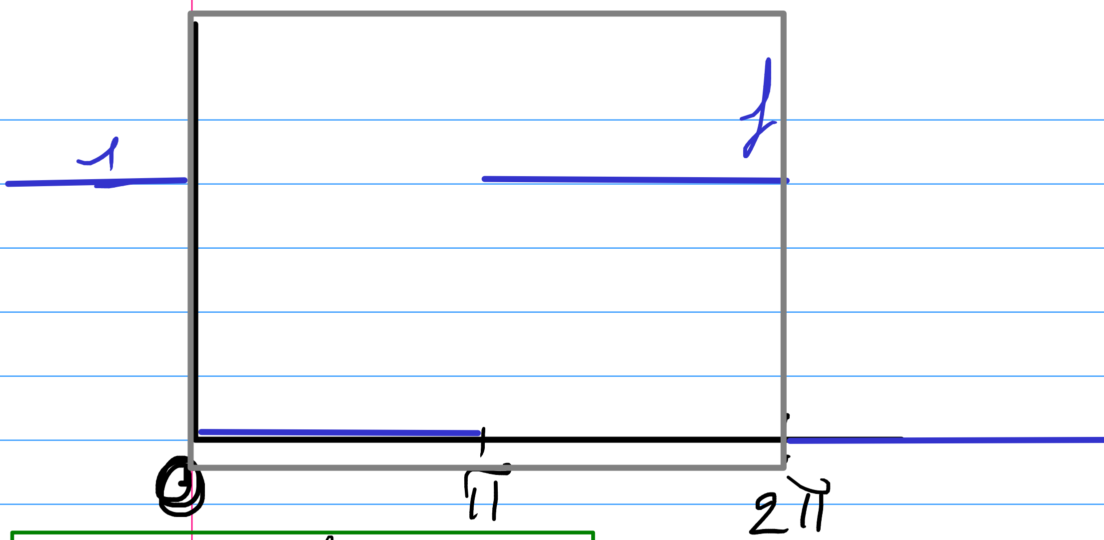
On va définir les coefficients de Fourier d'une fonction comme les coordonnées dans la base orthonormée précédente.

Definition 6.4 *Soit f une fonction continue par morceaux et périodique de période T. Le complexe*

analogue aux coordonnées dans la base orthonormée $(e_p)_p$

$$c_p = \langle f, e_p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-\frac{2\pi}{T} ipx} dx$$

est le $p-$ième coefficient de Fourier complexe de f.



f 2π-périodique $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Coefficients de Fourier :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-i\frac{2\pi}{2\pi}nx}\,dx$$

$T \to 2\pi$

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\underbrace{e^{-i\times 0\times x}}_{1}\,dx$$

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\times\pi = \frac{1}{2}$$

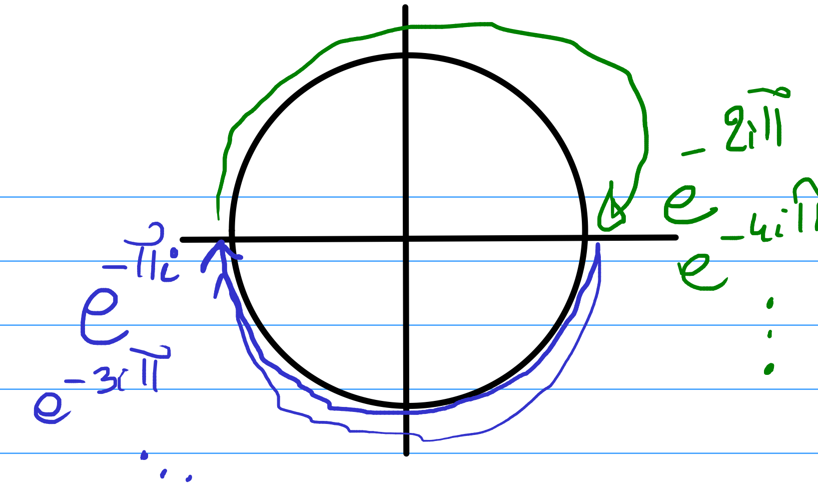
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{f(x)}_{0 \text{ sur } [0,\pi]} e^{-inx}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \underbrace{f(x)}_{1 \text{ sur } [\pi,2\pi]} e^{-inx}\,dx$$

$$\int e^{ax}\,dx = \left[\frac{e^{ax}}{a}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{e^{-in2\pi} - e^{-in\pi}}{-2in\pi}$$

Donc $$c_n(f) = \frac{1 - e^{-in\pi}}{-2in\pi}$$



- Si n est pair : $e^{-in\pi} = 1$
- Si n est impair : $e^{-in\pi} = -1$

Donc $$c_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair, } n \neq 0 \\ 1/2 & \text{si } n = 0 \\ \frac{2}{-2in\pi} = \frac{-1}{in\pi} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$c_{-n}(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{-1}{i(-n)\pi} = \frac{1}{in\pi} = \overline{\frac{-1}{in\pi}} = \overline{c_n(f)} \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$ si f est réelle.

Rappel: fonction f T-périodique continue par morceaux.

Produit hermitien $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\overline{g}(x)\,dx$

On considère la base $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ orthonormée.

$$e_n(x) = e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$$

Les coordonnés dans la base sont

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}\,dx$$

coefficients de Fourier

Dans l'exemple: la fonction 2π-périodique, définie sur $[0,2\pi]$ par $\mathbb{1}_{[\pi,2\pi]}$

Donc $c_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair } n\neq 0 \\ 1/2 & \text{si } n=0 \\ \frac{2}{-2in\pi} = \frac{-1}{in\pi} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

6.4 Propriétés élémentaires

Proposition 6.5 *(i) Si f et g sont continues par morceaux et égales sauf en leurs points de discontinuité, leurs coefficients de Fourier sont égaux.*

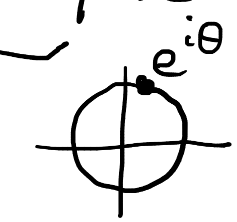
(ii) Si f est continue par morceaux et si $T > 0$,

$$\left|\int_0^T h(x)\,dx\right| \le \int_0^T |h(x)|\,dx$$

$$c_n(f) = \left|\frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{f(x)e^{-\frac{2\pi}{T}ipx}dx}\right| \le \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|dx < \infty \text{ dès que } f \text{ intégrable.}$$

de sorte que les coefficients de Fourier de f sont bornés.

$$\le \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|\underbrace{\left|e^{-\frac{2\pi}{T}ipx}\right|}_{1}dx$$



(iii) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

$$c_n(f') = \frac{2\pi in}{T}c_n(f).$$

En particulier, pour $n \neq 0$ on a

$$c_n(f) = \frac{T}{2\pi in}c_n(f').$$

$$c_n(f') = \frac{1}{T}\int_0^T f'(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}dx \overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{T}\left[f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}\right]_0^T - \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\left(e^{-in\frac{2\pi}{T}x}\right)'dx$$

$$= \frac{1}{T}\left(f(T)\underbrace{e^{-in\frac{2\pi}{T}T}}_{1} - f(0)\underbrace{e^{-in\frac{2\pi}{T}\times 0}}_{1}\right) - \frac{1}{T}\int_0^T \left(-in\frac{2\pi}{T}\right)f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}dx$$

$$c_n(f') = \frac{1}{T}\underbrace{\left(f(T) - f(0)\right)}_{\substack{f \text{ est } T \text{ périodique} \\ f(T) = f(0)}} - \left(-in\frac{2\pi}{T}\right)\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-in\frac{2\pi}{T}x}\,dx}_{c_n(f)}$$

$$c_n(f') = \frac{in\,2\pi}{T}\, c_n(f)$$

Dans $\mathbb{R}^N$ (e_n) base orthonormée.

$$v = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\langle v, e_n \rangle}_{\substack{\text{coordonnées} \\ \text{dans la base } e_n}} e_n$$

Par analogie $\sum_{i=-N}^{N} c_n(f)\, e_n \xrightarrow[N \to \infty]{} ?$

6.5 Série de Fourier

Definition 6.6 *Si f est continue par morceaux et périodique, la série*

$$S_f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \langle f, e^{\frac{2\pi}{T} ipx} \rangle e^{\frac{2\pi}{T} ipx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_p e^{\frac{2\pi}{T} ipx},$$

lorsqu'elle converge, est la série de Fourier de f. Pour tout entier N,

$$S_N(x) = \sum_{p=-N}^{+N} c_p e^{\frac{2\pi}{T} ipx}$$

est la $N-$ième somme partielle de la série de Fourier de f.

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e_n(x)$$

$$\|$$

Intuitivement, on peut supposer que

$$S_f(x) = f(x).$$

Malheureusement, la convergence n'est pas si évidente.

6.6 Convergence

La convergence des séries

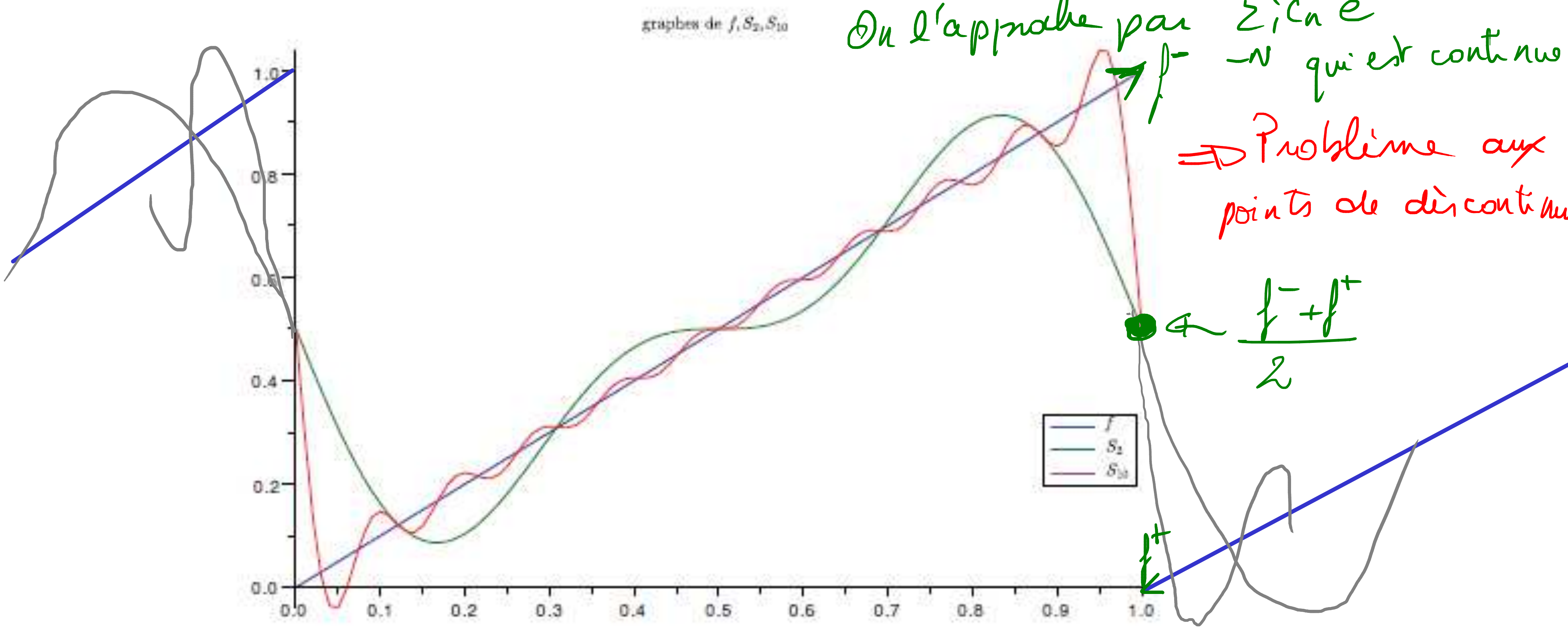
$$S_f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{2\pi}{T} ipx}$$

est celle de la suite des sommes partielles symétriques

$$S_N = \sum_{-N}^{N} c_k e^{\frac{2\pi}{T} ipx} \xrightarrow{N \to +\infty} S_f(x).$$

f n'est pas continue.

On l'approche par $\sum_{-N}^{N} c_n e^{-i2\pi n x}$ qui est continue.



f^-

$\Rightarrow$ Problème aux points de discontinuité

$\frac{f^- + f^+}{2}$

f^+

La série de Fourier d'une fonction f ne converge pas nécessairement, et, même lorsqu'elle converge en un point x_0, sa somme n'est pas toujours égale à $f(x_0)$.

limites finies à gauche et à droite des discontinuités.

Theorem 6.7 (Dirichelet)

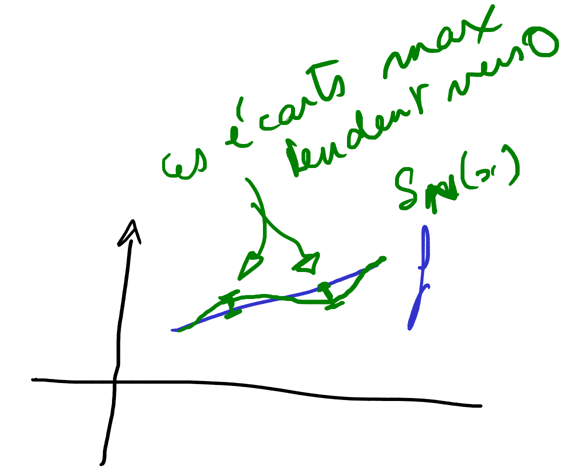
Soit f une fonction continue par morceaux, périodique de période T. Si f admet en tout point une dérivée à gauche et une dérivée à droite, sa série de Fourier converge en tout point x_0. De plus

$$S_f(x) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}.$$

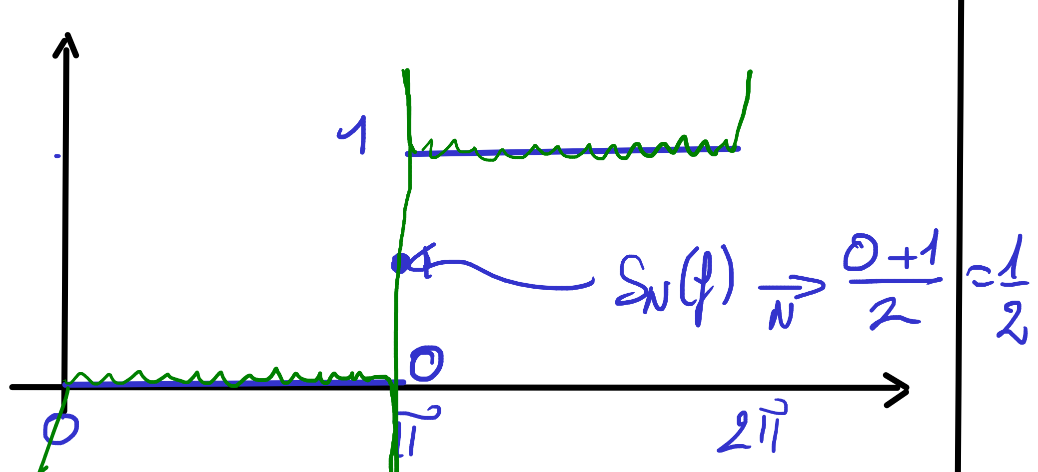
Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue on a convergence uniforme de la série :

$$\lim_{N\to\infty} ||S_N - f||_\infty = 0.$$

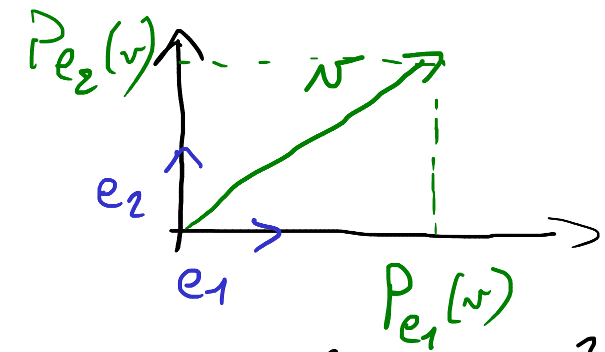
$$\| \quad \sup_{x\in[0,T]} |S_N(x) - f(x)| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$



Dans l'exemple:



Dans $\mathbb{R}^N$: théorème de Pythagore :



$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \|P_{Vect(e_i)}(v)\|^2$$

$$\|v\|^2 = \|P_{e_1}(v)\|^2 + \|P_{e_2}(v)\|^2$$

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \|\langle v, e_i\rangle e_i\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} |\langle v, e_i\rangle|^2 \underbrace{\|e_i\|^2}_{=1} = \sum_{i=1}^{N} |\langle v, e_i\rangle|^2$$

6.7 Théorème de Bessel–Parseval

Dans le cadre de l'espace hermitien que nous étudions depuis le début de cette section, nous pouvons considérer que la somme partielle symétrique

$$S_N = \sum_{-N}^{N} c_k e^{\frac{2\pi}{T} ipx}$$

est le projeté de f sur le sous espace $Vect\{e_{-N}, \cdots, e_0, \cdots e_N\}$. Les projections étant des contractions, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 6.8 (Inégalité de Bessel)

Si f est continue par morceaux périodique de période T, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\underbrace{||S_N||^2 = \sum_{-N}^{N} |c_k|^2}_{} \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(u)|^2 du = ||f||^2.$$

Somme partielle de norme inférieure à celle du signal f.

Enfin, la généralisation du théorème de Pythagore amène au Théorème de Parseval qui donne la conservation de l'énergie entre la fonction et sa sértie de Fourier.

Theorem 6.9 (Théorème de Parseval)

Si f est continue par morceaux périodique de période T, on a

$$||S_f||^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(u)|^2 du = ||f||^2.$$

$z\bar{z} = |z|^2$

On a vu que, dans $\mathbb{R}^N$, $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\langle v, e_i \rangle|^2$

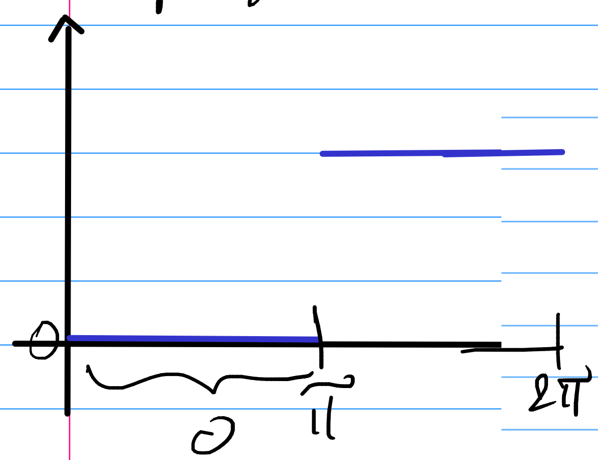
si f est réelle $\bar{f} = f$.

Ici (Fourier) : $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, \bar{f}(x)\, dx$

$= \frac{1}{T}\int |f(x)|^2 dx$

Analogie avec $\mathbb{R}^N$ $\|f\|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\underbrace{\langle f, e_n \rangle}_{c_n(f)}|^2$

Appliquons le théorème de Parseval à notre exemple :



Donc $c_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair } \; n \neq 0 \\ 1/2 & \text{si } n = 0 \\ \dfrac{2}{-2in\pi} = \dfrac{-1}{in\pi} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} 1 \, dx = \frac{1}{2\pi} \times \pi = \frac{1}{2}$$

$\rightarrow f = 0$ ou $1 \Rightarrow f^2 = f.$

$$\sum |c_n(f)|^2 = \sum_{\substack{n \text{ impair} \\ n \in \mathbb{Z}}} \left| -\frac{1}{in\pi} \right|^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{c_0^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{n \text{ impair} \\ n \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi^2}\, 2 \sum_{\substack{n \text{ impair} \\ n \in \mathbb{N}}} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{4}$$

$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$= \frac{2}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2k+1)^2} + \underbrace{\frac{1}{4}}_{c_0^2}$$

Parseval : $\|f\|^2 = \sum |c_n(f)|^2 \iff \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{\pi^2} \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4}$

Donc
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{N}}' \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{N}}' \frac{1}{(2k+1)^2}$$

D'où le résultat
$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k \in \mathbb{N}}' \frac{1}{(2k+1)^2}$$