Recherche Opérationelle Alternance

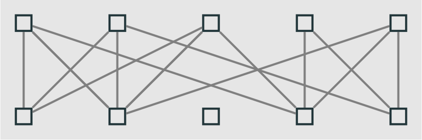
Moritz Mühlenthaler, Zoltán Szigeti

moritz.muehlenthaler@grenoble-inp.fr

G-SCOP (Sciences pour la Conception, l'Optimisation et la Production de Grenoble)
Équipe OC (Optimisation Combinatoire)

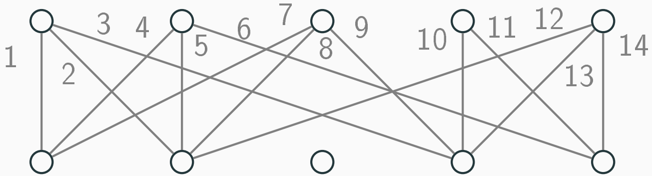
Exercice

Sur une plaquette rectangulaire on veut réaliser le schéma électrique suivant :

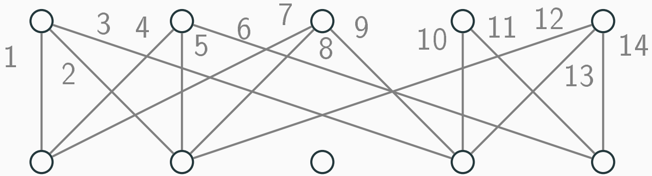


Les positions des entrées et des sorties sont prédéfinies. Il faut mettre deux traces qui se croisent sur des couches différentes. Déterminer le nombre minimum de couches de circuits imprimés que l'on doit utiliser.

Exercice



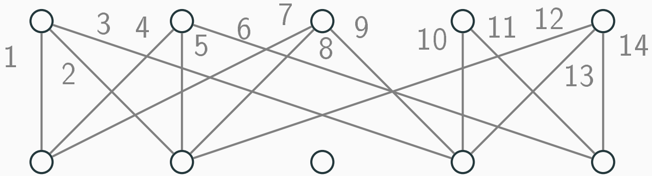
Exercice



graphe de permutation ; $\pi = 1\,4\,7\,2\,5\,8\,12\,3\,9\,10\,13\,6\,11\,14$

sommets $\{1, 2, \ldots, 14\}$

Exercice

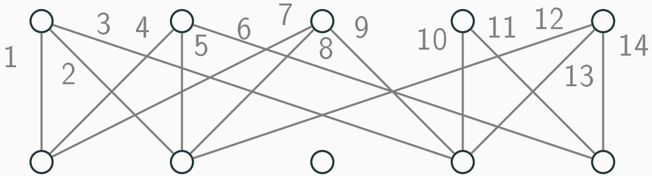


graphe de permutation ; $\pi = 1\,4\,7\,2\,5\,8\,12\,3\,9\,10\,13\,6\,11\,14$

sommets $\{1, 2, \ldots, 14\}$

arêtes $\{ij \mid i < j \text{ et } \pi_i > \pi_j\}$

Exercice



graphe de permutation ; $\pi = 1\,4\,7\,2\,5\,8\,12\,3\,9\,10\,13\,6\,11\,14$

sommets $\{1, 2, \ldots, 14\}$

arêtes $\{ij \mid i < j \text{ et } \pi_i > \pi_j\}$

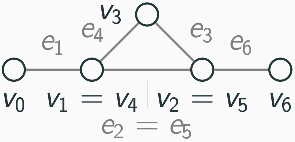
couche sans intersection = sous-suite croissante = stable !

Connexité

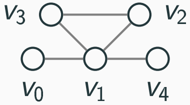
Chaînes

- chaîne de longueur k : une suite alternée de sommets et d'arêtes $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$, telle que $e_i = v_{i-1} v_i$ pour chaque $1 \leq i \leq k$. Une s-t chaîne est une chaîne de s à t.

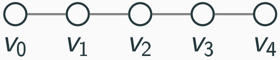
$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 e_4 v_4 e_5 v_5 e_6 v_6$



- Chaîne simple : chaîne telle que les arêtes sont distinctes



- Chaîne élémentaire : chaîne telle que les sommets sont distincts



Équivalence des Chaînes

Il existe une s-t chaîne
$\Leftrightarrow$ il existe une s-t chaîne simple
$\Leftrightarrow$ il existe une s-t chaîne élémentaire.

Composantes Connexes

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On considère la relation binaire $R \subseteq V \times V$ définie par

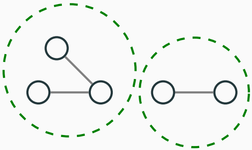
$$(s, t) \in R \Leftrightarrow \text{il existe une } s\text{-}t \text{ chaîne dans } G$$

Composantes Connexes

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On considère la relation binaire $R \subseteq V \times V$ définie par

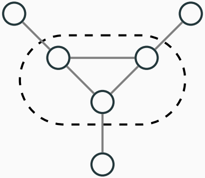
$$(s, t) \in R \Leftrightarrow \text{il existe une } s\text{-}t \text{ chaîne dans } G$$

- La relation R est une relation d'équivalence
- Le sous-graphe induit par une classe d'équivalence de R s'appelle composante connexe.
- Un graphe est connexe s'il ne possède qu'une seule composante connexe.



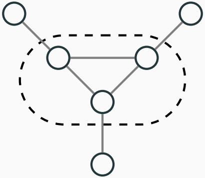
Caractérisation de la Connexité

coupe de S : l'ensemble d'arêtes entre S et $V \setminus S$.



Caractérisation de la Connexité

coupe de S : l'ensemble d'arêtes entre S et $V \setminus S$.



Un graphe $G = (V, E)$ est connexe $\Leftrightarrow$ pour tous sous-ensemble de sommets $\emptyset \subsetneq S \subsetneq V$, on a $\delta(S) \neq \emptyset$.

Exercice : Le Loup, la Chèvre et le Chou

Ils se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur (P) veut les changer de rive, mais sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Pour des raisons évidentes, on ne peut pas laisser sans surveillance le loup (L) en compagnie de la chèvre (C) ou la chèvre en compagnie du chou (X).

Comment le passeur doit-il s'y prendre ?

Exercice : Le Loup, la Chèvre et le Chou

Ils se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur (P) veut les changer de rive, mais sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Pour des raisons évidentes, on ne peut pas laisser sans surveillance le loup (L) en compagnie de la chèvre (C) ou la chèvre en compagnie du chou (X).

Comment le passeur doit-il s'y prendre ?

$$\begin{array}{cccccccc} CLXP & CLX & CLP & CXP & LXP & CL & CX & CP \\ LX & P & C & L & X & XP & LP & \emptyset \end{array}$$

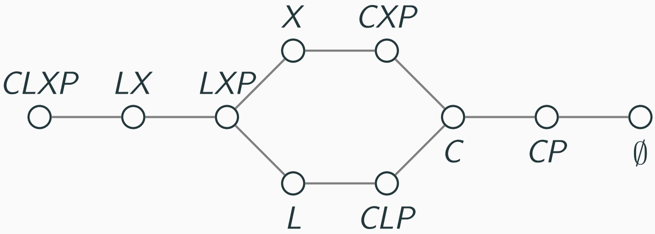
Exercice : Le Loup, la Chèvre et le Chou

Ils se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur (P) veut les changer de rive, mais sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Pour des raisons évidentes, on ne peut pas laisser sans surveillance le loup (L) en compagnie de la chèvre (C) ou la chèvre en compagnie du chou (X).

Comment le passeur doit-il s'y prendre ?

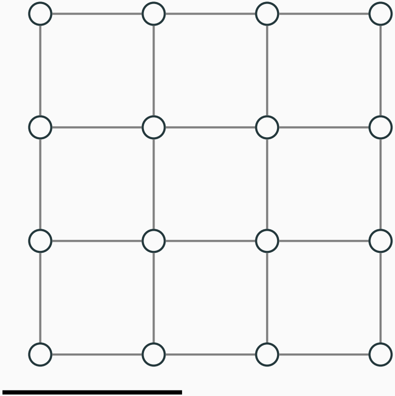
$$\begin{array}{cccccccc} CLXP & CLX & CLP & CXP & LXP & CL & CX & CP \\ LX & P & C & L & X & XP & LP & \emptyset \end{array}$$

Exercice : Le Loup, la Chèvre et le Chou

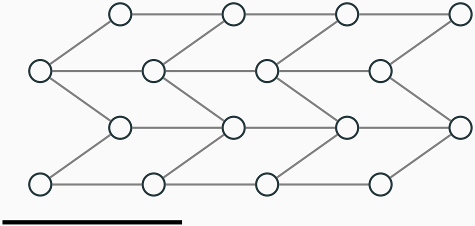


Solution : $CLXP$-$\emptyset$ chaîne dans le graphe ci-dessus.

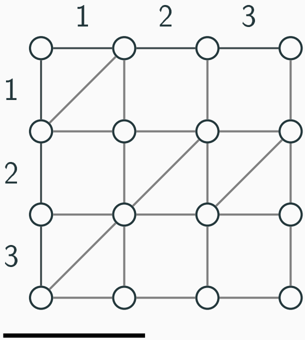
Application : Rigidité



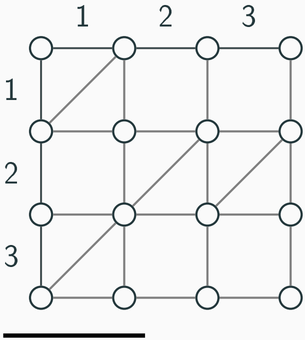
Application : Rigidité

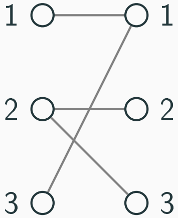


Application : Rigidité

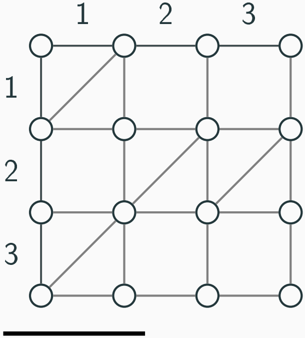


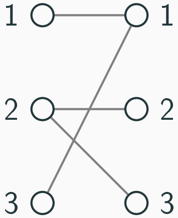
Application : Rigidité





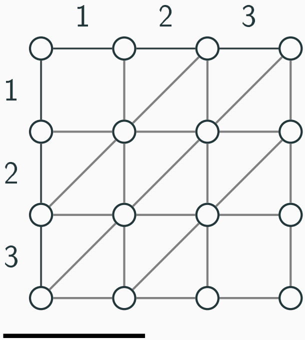
Application : Rigidité

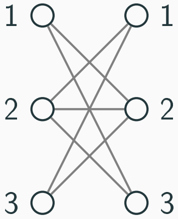




(Bolker & Crapo, 1977.) La grille avec $m \times n$ carrés est rigide $\Leftrightarrow$ le graphe biparti associé est connexe.

Application : Rigidité

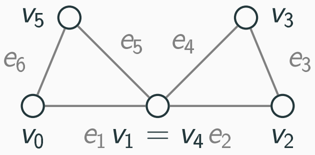




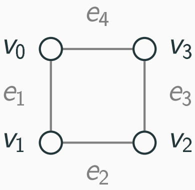
Cycles

Cycles

- Cycle de longueur k : une séquence circulaire de sommets et d'arêtes : $v_0 e_1 v_1 \ldots v_{k-1} e_k$, telle que $e_i = v_{i-1} v_i$ pour $1 \leq i < k$ et $e_k = v_0 v_{k-1}$ sont des arêtes distinctes.

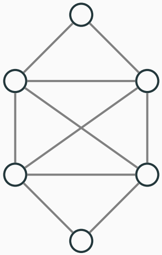


- Cycle élémentaire : cycle dont les sommets sont distincts



Cycles Eulériens

- Chaîne eulérienne de G : chaîne simple contenant toutes les arêtes
- Cycle eulérien de G : cycle contenant toutes les arêtes
- Un graphe est eulérien s'il admet un cycle eulérien



Graphes Eulériens

Un graphe connexe admet un cycle eulérien $\Leftrightarrow$ tous ses sommets sont de degré pair.

Graphes Eulériens

Algorithme 1 : Algorithme de Fleury

Entrée : Graphe connexe G dont tous les sommets sont de degré pair

Sortie : Cycle eulérien C de G

1 $u \leftarrow$ sommet quelconque de G
2 $C \leftarrow u$
3 **tant que** *u n'est pas isolé* **faire**
4   choisir une arête $e = uv$ telle que, si possible, en supprimant e le nombre de composantes connexes n'augmente pas
5     $C \leftarrow Cev$
6     $G \leftarrow G - e$
7     $u \leftarrow v$
8 **fin**.

Si aucune arête uv reste à choisir dans la ligne 4, alors u est isolé ou le degré de u était impair ; absurde !

Chaînes Eulériennes

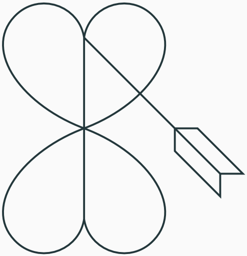
Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne $\Leftrightarrow$
le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

Chaînes Eulériennes

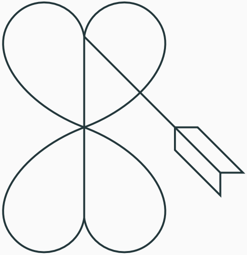
Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne $\Leftrightarrow$ le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

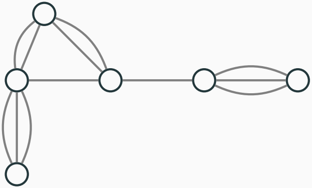
Exercice

Pouvez vous réaliser ce dessin sans lever le stylo en passant une et une seule fois sur chacun de tous les traits ?

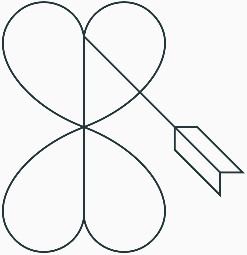


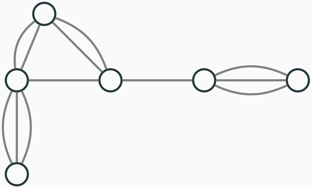
Chaînes Eulériennes





Chaînes Eulériennes

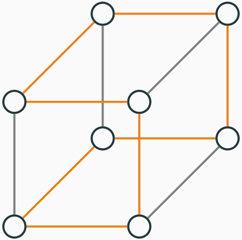




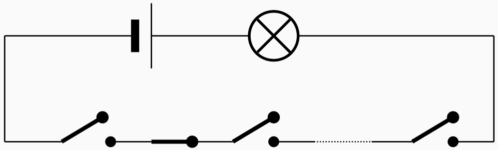
Trouver une chaîne eulérienne dans le graphe à droite.

Cycles Hamiltoniens

- Un cycle hamiltonien est un cycle élémentaire qui contient tous les sommets.
- Une chaîne hamiltonienne est une chaîne élémentaire qui contient tous les sommets.
- Un graphe est hamiltonien s'il admet un cycle hamiltonien.

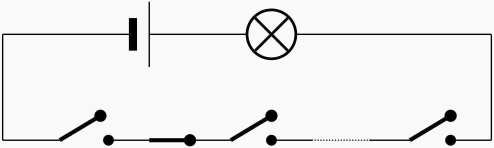


Exercice

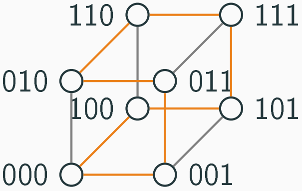


Les n interrupteurs dans le circuit électrique sont de type poussoir. Comment peut-on procéder pour allumer la lampe en actionnant les interrupteurs un à un ? Donnez une borne supérieure du nombre d'opérations à effectuer.

Exercice

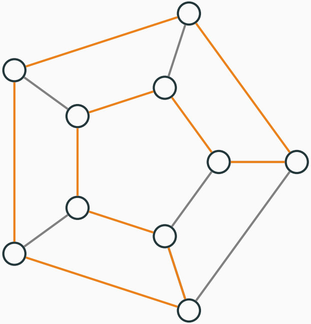


Les n interrupteurs dans le circuit électrique sont de type poussoir. Comment peut-on procéder pour allumer la lampe en actionnant les interrupteurs un à un ? Donnez une borne supérieure du nombre d'opérations à effectuer.

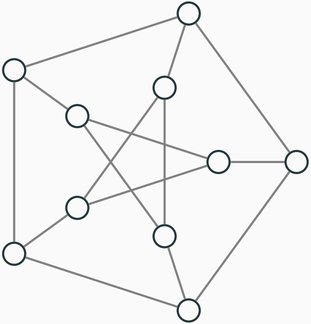


Cycles Hamiltoniens : Complexité

Problème : Décider si un graphe donné est hamiltonien.



Oui.



Non.

S'il n'existe pas de cycle hamiltonien, on n'a pas de certificat "simple".