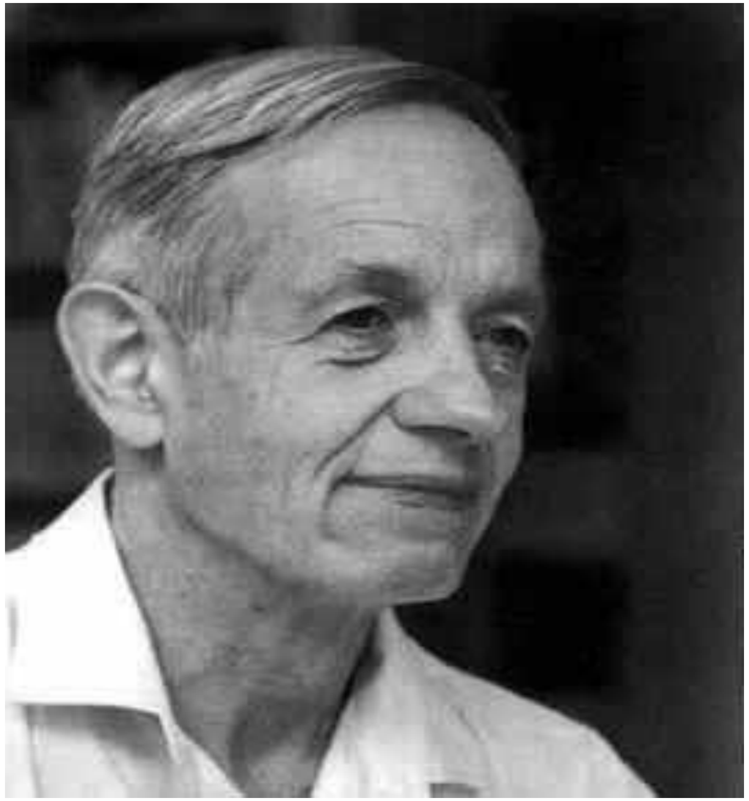
Lecture 2 Introduction à la théorie des jeux

John Nash



- Objet, représentations
- Résolution de jeux statiques
- Résolution de jeux séquentiels
- Illustrations pour des jeux classiques
- Résolution de jeux en stratégies mixtes

Déterminer (p*,q*) en interactions stratégiques (1/3)

- La théorie des jeux a pour objet l'étude des situations où des individus rationnels font des choix en interactions, pour un cadre donné :
  - Les préférences des joueurs (ex. consommateur, entreprise) sont représentables par des fonctions d'utilité strictement croissantes :
    - Ils sont capables d'assigner un nombre à chacun des résultats de leurs actions.
    - Plus le nombre est élevé, plus le résultat est préféré : $x \succsim_i y \Leftrightarrow u_i(x) \geq u_i(y)$. Les joueurs sont optimisateurs
  - Ils peuvent interagir de façon coopérative (former des coalitions) ou non coopérative (s'affronter)

Déterminer (p*,q*) en interactions stratégiques (2/3)

- Pour déterminer (p*,q*), l'économiste a besoin d'un concept de solution (un concept d'équilibre, i.e. un mécanisme particulier de coordination de stratégies individuelles)
  - les joueurs (ex. firmes) choisissent leurs stratégies, une par joueur, la combinaison des stratégies déterminent les résultats (p?, q?), lesquels conduisent à des *pay-offs* (ex. profits)
  - un concept de solution important est celui d'équilibre de Nash. Un autre, déjà vu en L1 et/ou L2 est l'équilibre de Pareto

Déterminer (p*,q*) en interactions stratégiques (3/3)

- Outre l'équilibre de Nash, nous en introduirons (parmi d'autres) deux supplémentaires :
  - Équilibre en stratégie dominante : certaines stratégies ne seront jamais jouées, parce qu'elles génèrent des gains moindres que les autres stratégies (stratégies dominées), on peut donc les éliminer (résoudre le jeu par élimination des stratégies dominées)
  - Équilibre en stratégie mixte : plutôt que de jouer en stratégie pure, les joueurs peuvent affecter des probabilités sur l'ensemble des stratégies pures, afin d'obtenir un équilibre en stratégie mixte

Définir les règles du jeu (1/2)

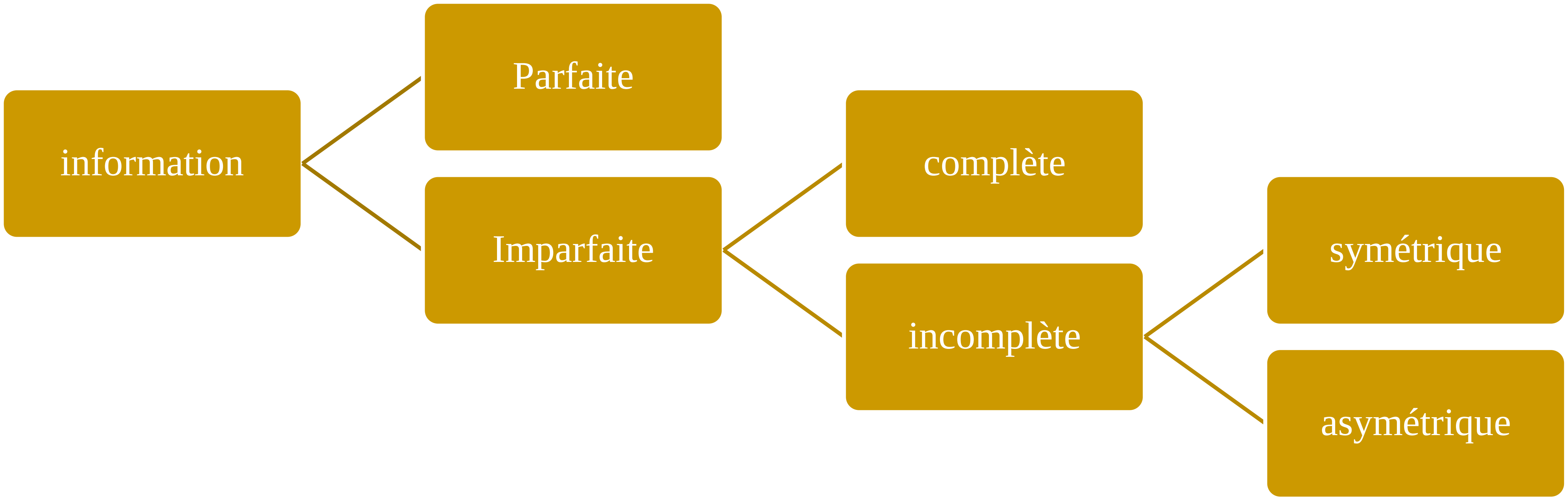
- Les règles du jeu portent sur :
  - Un ensemble de joueurs, N={1,…,n}, et un ensemble $S_i = \{s_i^1, .., s_i^m\}$ non vide d'actions ou stratégies possibles, pour $i \in N$. Pour simplifier prenons N={1,2}. L'ensemble de tous les profils (ou combinaisons) de stratégies possibles est le produit cartésien : $S = S_1 * S_2 = \sum_{i=1}^{2} S_i = \{s = (s_1, s_2)|, s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$
  - pour chaque $i \in N$, une fonction de paiement u_i: S→ ℝ associe à chaque résultat possible s ∈ S un paiement $u_i(s) \in \mathbb{R}$. Chaque paiement reçu par i dépend de la stratégie s_i qu'il choisit ET de celle choisie par l'autre joueur (paiements interdépendants)

Définir les règles du jeu (2/2)

- Le timing du jeu : décisions simultanées (jeux statiques), décisions séquentielles (jeux «dynamiques»), répétition du jeu (jeux répétés)
- L'information disponible pour chaque joueur :
  - Jeux à information (im)parfaite : les joueurs connaissent (ne connaissent pas) tout ce qu'il est utile de savoir au moment de la prise de décision (en imparfaite, ne connaissent pas l'historique des choix / mouvements des autres joueurs)
  - Jeux à information (in)complète : les joueurs connaissent (ne connaissent pas) avec certitude les règles du jeu (i.e. l'ensemble des joueurs, des actions possibles, des paiements)
  - Jeux à information (a)symétrique : les joueurs disposent (ne disposent pas) du même ensemble d'informations

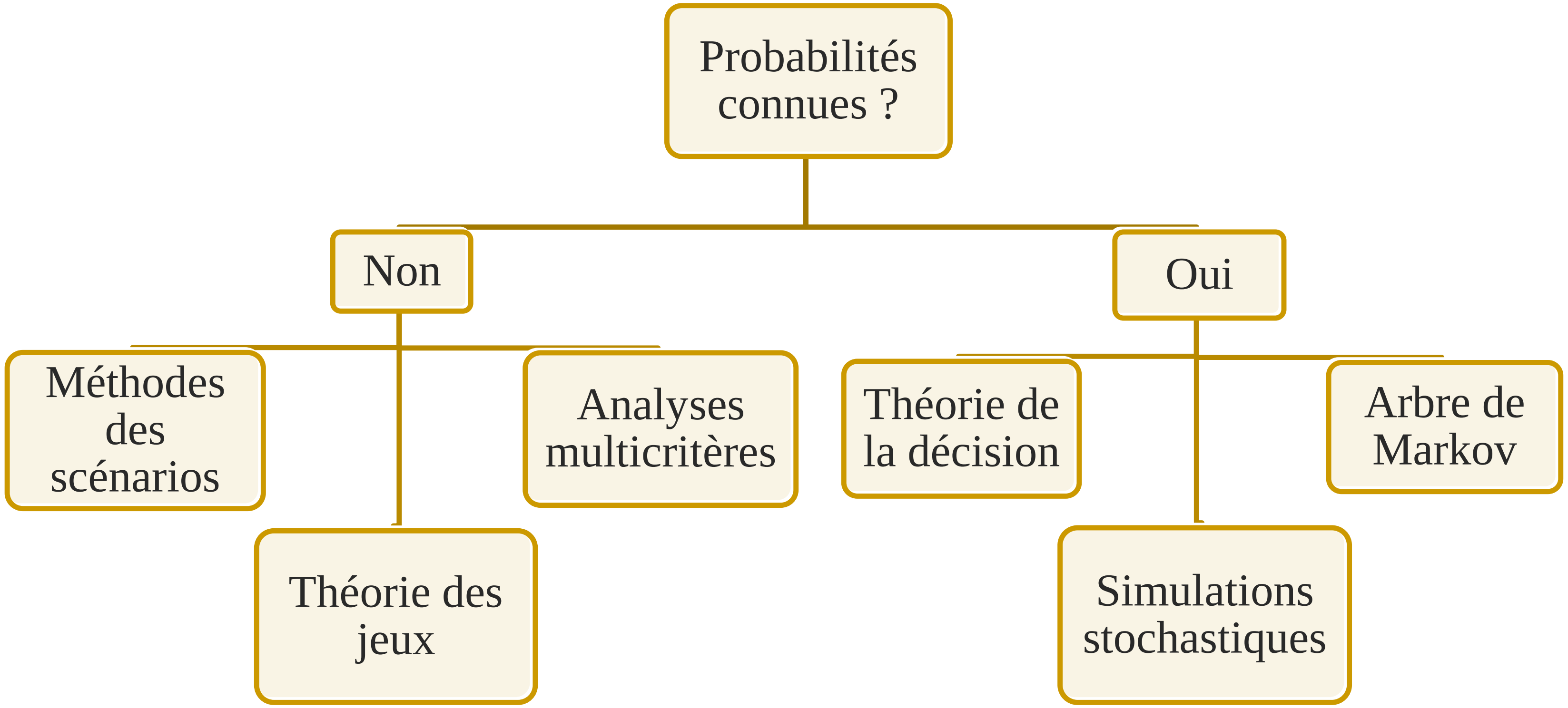
Le résultat du jeu est généralement sensible aux hypothèses posées sur les règles …

Les différents concepts d’information



Interlude

- Schéma simplifié des techniques d'aide à la décision



Représentation matricielle d'un jeu (1/3)

- Les données de base
  - A et B importent en exclusivité un bien, sont en concurrence sur le marché intérieur, le prix intérieur est unique, il est déterminé par l'offre globale (A+B) en fonction de la demande intérieure
  - durant une période donnée chaque firme a le choix d'importer et de vendre 2 ou 4 tonnes de pierres. Il y aura sur le marché soit 4, 6 ou 8 tonnes de pierres offertes
  - A et B savent que le prix est fonction de l'offre et de la demande. P=25M€/tonne pour une offre globale de 4 tonnes, p=15M€/tonne, pour 6 tonnes, p=10M€/tonne pour 8 tonnes
  - les coûts à la tonne sont de 4M€ pour A et de 2M€ pour B.

Quel sera leur choix, 2 ou 4 tonnes ?

Représentation matricielle d'un jeu (2/3)

- Supposons que A et B décident simultanément des quantités à importer (soit 2, soit 4). Pour remplir la matrice, on doit calculer les profits conditionnels

On sait p=25 pour 4 tonnes sur le marché (=2+2). Pour $q_A=2$, et un $CT_A=4q_A$, $\pi_A=25*2-4*2=42$

Pour p=25, $q_B=2$ et $CT_B=2$, $\pi_B=25*2-2*2=46$

p=15 pour 6 tonnes sur le marché. Pour $q_A=2$, et un $CT_A=4q_A$, $\pi_A=15*2-4*2=22$

A \ B	2	4
2	42 ; 46	22 ; 52
4	44 ; 26	24 ; 32

Représentation matricielle d'un jeu (2/3)

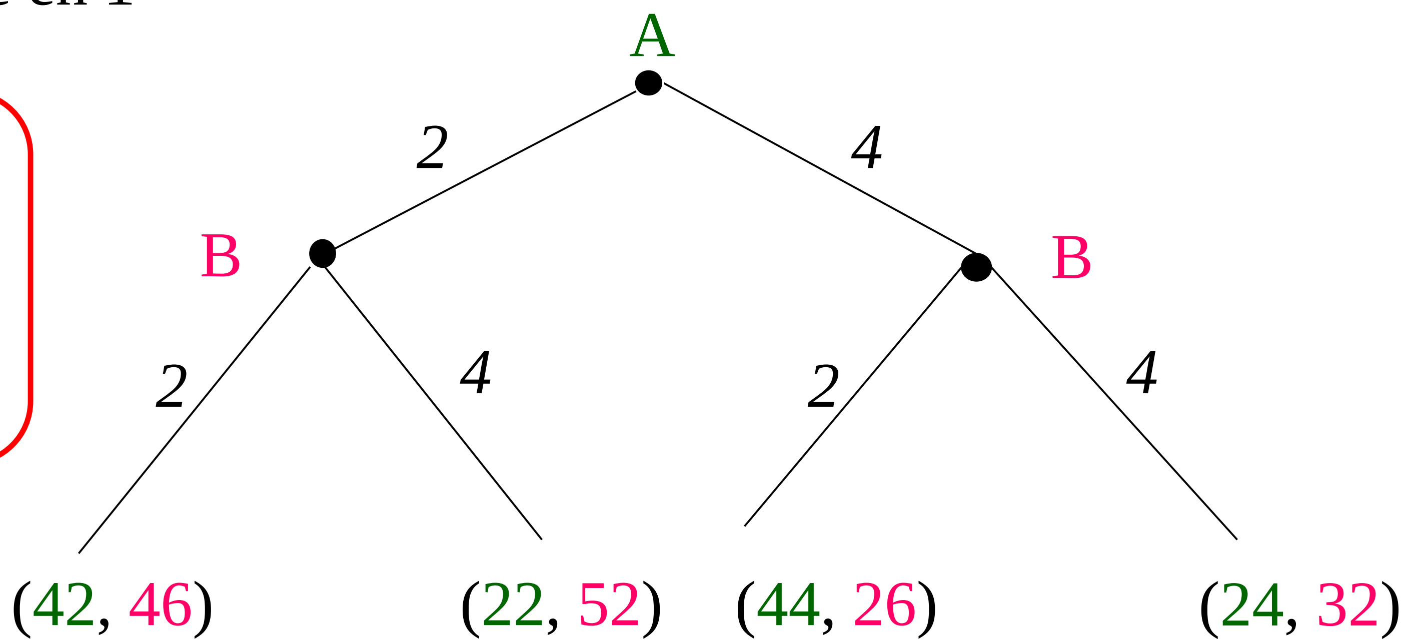
- Ce jeu sous forme matricielle (forme normale, ou encore stratégique) peut être formellement décrit par 3 éléments :
  - N={A,B} l'ensemble des joueurs
  - $S=S_A*S_B=\{(2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$
  - U(.)={(42,46), (44,26), (22,52), (24,32)}

A \ B	2	4
2	42 ; 46	22 ; 52
4	44 ; 26	24 ; 32

Représentation arborescente du même jeu de base (1/2)

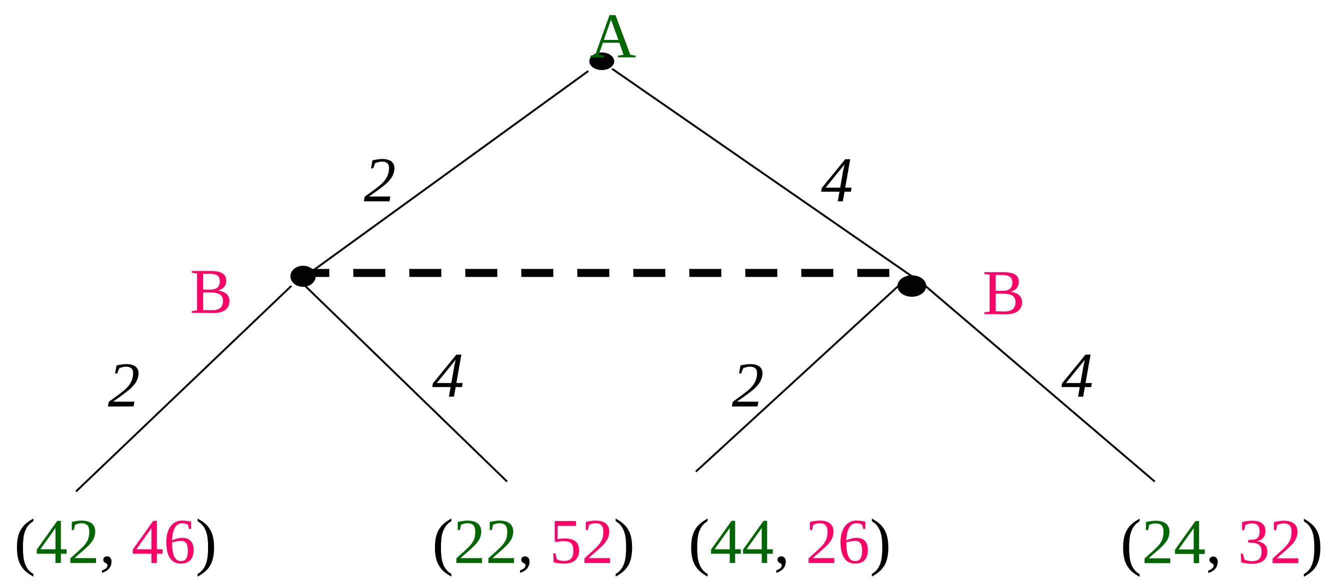
- Reprenons la matrice (jeu statique, forme normale) du jeu précédent (type dilemme du prisonnier) et supposons maintenant que A joue en 1^er, B en 2^nd, pour B sachant ce que A a joué en 1^er

Attention : Si B joue en 1^er, A en 2^nd, l'écriture des *payoffs* change (ex. B joue 2 en 1^er, A joue 2 en 2^nd, on écrirait (46, 42))



Représentation arborescente du même jeu de base (2/2)

- Supposons désormais que l'information est imparfaite (au moment de jouer, B ne sait pas si A produit 2 ou 4). Graphiquement, on relie les 2 nœuds de décision en pointillés de B (correspondent à son ensemble d'information) pour signaler l'information imparfaite



Jeux répétés (1/2)

- L’exemple du dilemme du prisonnier.

	Coopère	Trahit
Coopère	4, 4	1, 5
Trahit	5, 1	2, 2

Temps

Jeux répétés (2/2)

- La répétition du jeux de base
  - le jeu peut être répété
    - un nombre fini (ex.: pour une ressource rare – pétrole -, le jeu aura une fin)
    - ou infini (pose la question de la « mort » d'une entreprise, inévitable ? On peut ramener au cas fini en introduisant une probabilité de fin de vie)
  - nécessitera d'actualiser les gains et les pertes (facteur d'actualisation), conduira à s'interroger sur la possibilité de voir émerger la coopération, même dans le cas de dilemme du prisonnier, des questions importantes en matière *antitrust* (stabilité des ententes ?)

En L3 EI S6 pour une introduction, M pour stabiliser vos connaissances et approfondir

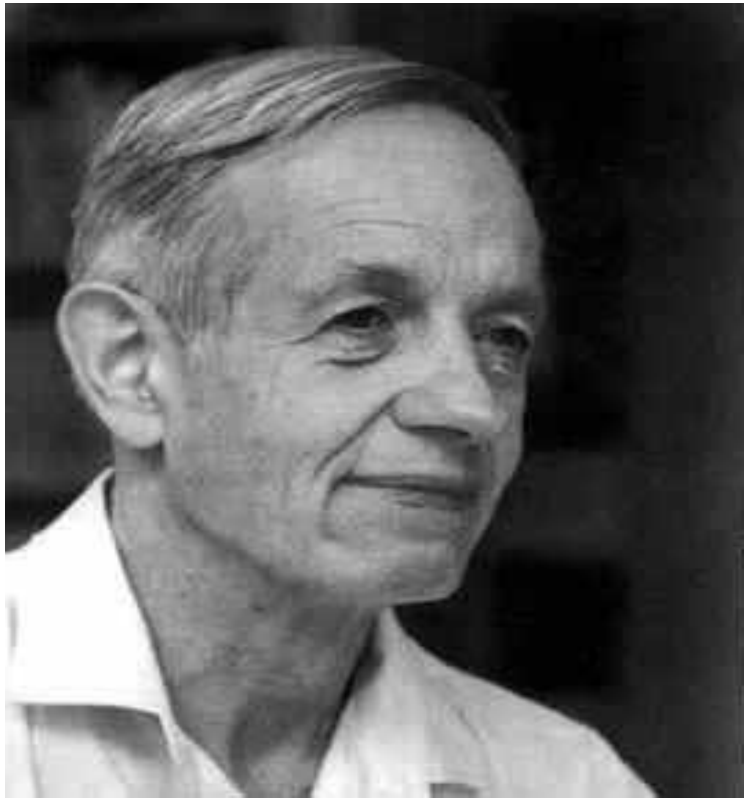
Jeux sous forme extensive, répétés : une approche dynamique ?

- La représentation sous la forme d'un arbre peut laisser à penser à une succession d'action dans le temps, idem pour les jeux répétés => approche «dynamique» ?
  - à nuancer :
    - dans le cadre d'un jeu à information complète et parfaite, comme pour les jeux répétés, les joueurs résolvent le jeu dès le départ (voir concepts de solution plus loin)
  - Alors ?
    - pour que l'on puisse parler «véritablement» de dynamique, certains considèrent qu'il faut laisser un minimum de degré de liberté. On doit revenir sur l'hypothèse d'information complète pour introduire celle d'information incomplète (voir alors les jeux bayésiens – M1).

Lecture 2 Introduction à la théorie des jeux

- Objet, représentations
- Résolution de jeux statiques
- Résolution de jeux séquentiels
- Illustrations pour des jeux classiques
- Résolution de jeux en stratégies mixtes

John Nash



Élimination des stratégies dominées (1/2)

- Certaines des stratégies peuvent être globalement plus mauvaises que d'autres, des joueurs rationnels devraient les éliminer d'emblée du jeu :
  - reprenons le cas du dilemme du prisonnier

Pour A, la stratégie q_A=2 est strictement dominée par q_A=4 (42<44 et 22<24)

B coûts de 2

A Coûts de 4

	2	4
2	42 ; 46	22 ; 52
4	44 ; 26	24 ; 32

Pour B, q_B=2 est strictement dominée par q_B=4

équilibre du jeu

Élimination des stratégies dominées (2/2)

- Modifions les gains pour A (par ex.), avec des gains à 22 s'il joue $q_A=4$, et B $q_B=4$.

Problème de coopération : un équilibre Pareto dominé par une autre issue (non jouée pour des agents rationnels) (ici : (2,2), pour des gains (42,46))

Pour A, la stratégie $q_A=2$ est faiblement dominée par $q_A=4$ (42<44 et 22≤22)

B coûts de 2

A Coûts de 4

	2	4
2	42 ; 46	22 ; 52
4	44 ; 26	22 ; 32

Pour B, $q_B=2$ est strictement dominée par $q_B=4$

équilibre du jeu

Concept de solution : équilibre en stratégie dominante

- La stratégie s_i du joueur i est *strictement dominé* par la stratégie s'_i si et seulement si :
  - quelque soit le comportement des autres, i obtient avec p_i une utilité strictement inférieure à celle obtenue avec s'_i
  - Autrement dit, $\forall s_i \in S_{-i}$, $u_i(s_i,s_{-i}) < u_i(s'_i,s_{-i})$
- La stratégie s_i est faiblement dominée par s'_i si l'inégalité est faible pour toute les stratégies des autres joueurs et qu'il existe au moins un profil de stratégies des autres joueurs tel que l'utilité avec s_i est strictement inférieure à celle avec s'_i
  - $\forall\ s_i \in S_{-i}$, $u_i(s_i,s_{-i}) \leq u_i(s'_i,s_{-i})$ et $\exists s_{-i} \in S_{-i} \mid u_i(s_i,s_{-i}) < u_i(s'_i,s_{-i}))$

Rappel sur le critère de Pareto

		Joueur 2	
		x	y
Joueur 1	x	4,4	3,1
	y	2,3	7,5

- Le résultat $\hat{s}$ Pareto domine le résultat s si :
  - $u_i(\hat{s}) \geq u_i(s), \forall i\ et\ \exists j, u_j(\hat{s}) > u_j(s)$
- Un résultat s* est un optimum de Pareto s'il n'existe pas un résultat qui le Pareto domine (i.e. on ne peut améliorer la situation d'un joueur sans que cela se fasse au détriment d'au moins un autre)
- Les résultats $\hat{s}$ et s ne sont pas Pareto-comparables si
  - profil $\exists i, u_i(\hat{s}) > u_i(s), \exists j \neq i, u_j(\hat{s}) < u_j(s)$

Évidence expérimentale de résolution des jeux par élimination des stratégies dominées (Schotter, Weigelt and Wilson, 1993) (1/2)

- L'élimination des stratégies dominées semble un raisonnement intuitif (un processus mental «par étapes»), mais est-il utilisé dans la réalité ?

		B	
		b_1	b_2
A	a_1	(3,0)	(4,0)
	a_2	(6,3)	(0,2)

- b_2 est dominé par b_1 et ne devrait pas être joué par B
- sachant cela, A devrait choisir a_2 plutôt que a_1
- l'équilibre unique de ce jeu devrait être (a_2, b_1).

Évidence expérimentale de résolution des jeux par élimination des stratégies dominées (Schotter, Weigelt and Wilson, 1993) (2/2)

- Schotter et al. ont demandé à 40 étudiants de jouer ce jeu. L'expérience montre que :

		B	
		b_1	b_2
A	a_1	(3,0)	(4,0)
	a_2	(6,3)	(0,2)

  - ceux jouant A choisissent à 57% a_1 et ceux jouant B b_2 à 20%. Pourquoi ? Une explication : A craignant que B jouent leur stratégie dominée (b_2) ont joué a_1 afin d'éviter un gain nul (aversion risque)
  - mais si le jeu est mis sous forme extensive (avec A jouant en 1^{er}), seuls 9% des A jouent la sécurité (a_1), les 91% autres pensent que les B sont rationnels. De l'importance des règles du jeu !

Fonction de réaction et équilibre de Nash (1/3)

- Considérons la matrice ci-après, et cherchons s'il n'existe pas une issue parmi les issues possibles certaines telle qu'aucun des joueurs n'est incité à s'en écarter de façon unilatérale (à stratégie constante des autres).

Si B choisit a_1^B, quelle est la meilleure réponse de A ? a_1^A car $U^A(a_1^A, a_1^B) = 6 > U^A(a_2^A, a_1^B) = 4$

Si B choisit a_2^B, quelle est la meilleure réponse de A ? a_2^A car $U^A(a_2^A, a_2^B) = 5 > U^A(a_1^A, a_2^B) = 3$

Dilemme du prisonnier		B	
		a_1^B	a_2^B
A	a_1^A	6, 4	3 , 5
	a_2^A	4, 3	5 , 7

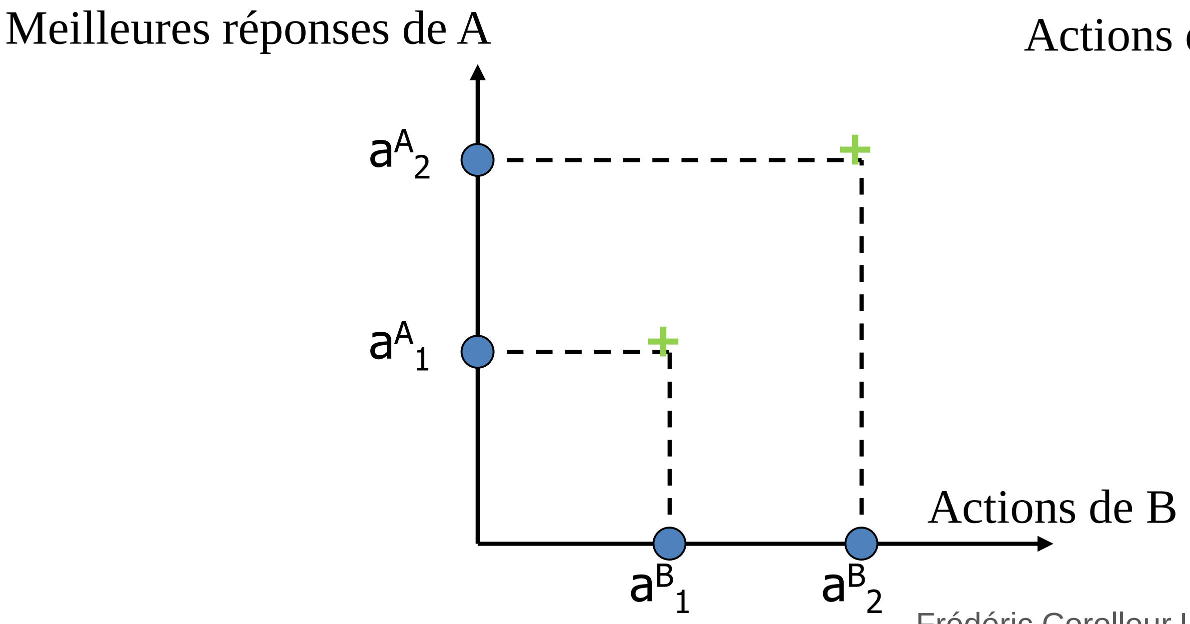
Si A choisit a_1^A, quelle est la meilleure réponse de B ? a_2^B car $U^B(a_1^A, a_2^B) = 5 > U^B(a_1^A, a_1^B) = 4$

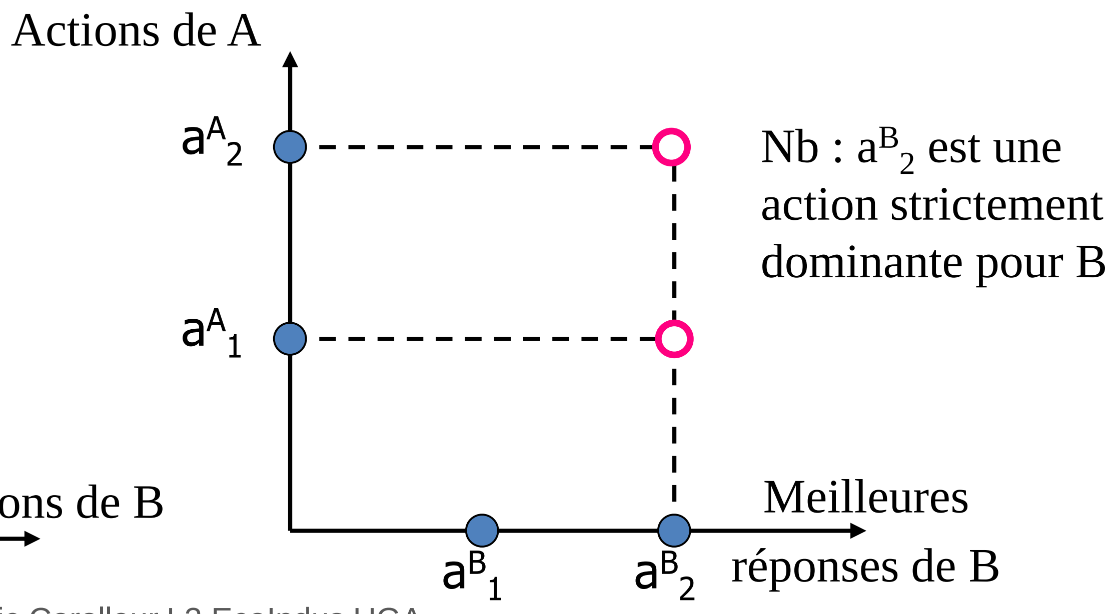
Si A choisit a_2^A, quelle est la meilleure réponse de B ? a_2^B car $U^B(a_2^A, a_2^B) = 7 > U^B(a_2^A, a_1^B) = 3$

Fonction de réaction et équilibre de Nash (2/3)

- On a vu que pour $a_1^B, A\ choisit\ a_1^A$ et pour $a_2^B, A\ choisit\ a_2^A$. La « courbe » de meilleure réponse de A est :

- On a vu que pour $a_1^A, B\ choisit\ a_2^B$ et pour $a_2^A, B\ choisit\ a_2^B$. La « courbe » de meilleure réponse de B est :

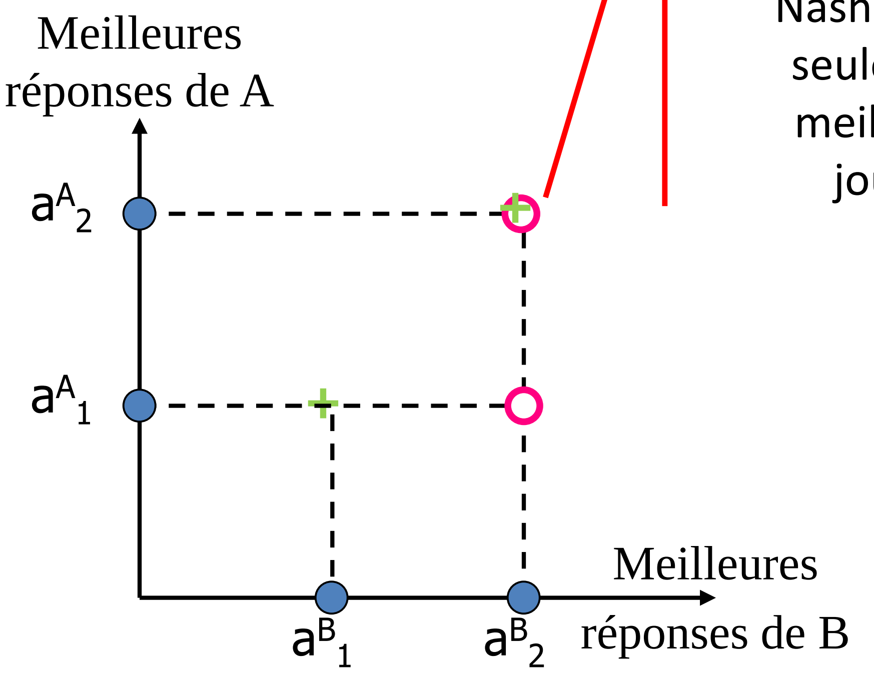




Fonction de réaction et équilibre de Nash (3/3)

- comment utiliser les courbes de meilleure réponse pour déterminer l'équilibre de Nash ? On superpose les courbes :

Un jeu peut ne pas avoir d'équilibre de Nash. Il n'y a pas d'intersection entre les fonctions de meilleure réponse dans ce cas



(a_2^A, a_2^B) est l'équilibre de Nash unique de ce jeu (la seule issue telle que les meilleures réponses de joueurs coïncident)

Concept de solution : équilibre de Nash en stratégie pure

- Formellement, un profil $s^*=(s_1^*,..,s_n^*)$ ($s_i^* \in S_i$, $i=1,..,n$) est un équilibre de Nash si aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie s_i^* quand les autres joueurs continuent à jouer le profil s_{-i}^*.
  - On doit avoir : $u_i(s_i^*,s_{-i}^*) \geq u_i(s_i,s_{-i}^*)$, $\forall s_i \in S_i$, $i=1,..,n$
  - L'équilibre de Nash est dit strict pour ; $u_i(s_i^*,s_{-i}^*) > u_i(s_i,s_{-i}^*)$, $\forall s_i \in S_i$, $i=1,..,n$ (dévier de cet équilibre est alors coûteux pour les joueurs)
- Dans un jeu à n joueurs, la fonction de meilleure réponse du joueur i, $R_i(s_{-i})$ associe, à chaque combinaison de stratégies des autres joueurs s_{-i}, la stratégie du joueur i qui maximise son gain
  - $u_i(R_i(s_{-i}),s_{-i}) \geq u_i(s_i,s_{-i})$, $\forall s_i \in S_i$, $s_{-i} \in S_{-i}$

Conditions d’existence d’un équilibre de Nash

- Pour qu’un jeu comprenne un équilibre de Nash, il faut :
  - Ensemble compact : ensemble fermé et borné
  - Convexité de l’ensemble : ensemble contenant toutes combinaisons convexes de deux points lui appartenant
  - Jeu fini : jeu où les ensembles de stratégies des joueurs sont finis
  - Continuité et concavité en son propre argument de la fonction de paiement, ainsi que ensemble de stratégies convexes et compact
    - Le maximum de cette fonction (i.e. sa meilleure réponse) se modifie de manière continue et reste toujours dans l’ensemble des stratégies

=> Interaction des fonctions (dans un cadre plus générale, des correspondances) de meilleures réponses

Pourquoi les joueurs, mis en situation joueraient l'équilibre de Nash ? (1/2)

- L'équilibre de Nash comme point fixe (i.e. « si on y est, on y reste »), résultat d'un processus d'ajustement de long terme
  - Mais il faut alors spécifier ce processus (ex. voir théorie des jeux évolutionnaires)
  - Et s'assurer que ce processus converge vers l'équilibre de Nash (non garantie)
- L'équilibre de Nash comme critère minimal de prédictibilité
  - Si la théorie fait une prédiction qui n'est pas un équilibre de Nash, au moins des joueurs peut mieux faire en jouant autre chose que ce que la théorie prédit
  - Il y a alors toutes les chances pour que la théorie soit infirmée

Pourquoi les joueurs, mis en situation joueraient l'équilibre de Nash ? (2/2)

- L'équilibre de Nash comme un équilibre à anticipations rationnelles avec des prophéties auto-réalisatrices
  - Soit la matrice ci-après, avec un équilibre de Nash unique (b,β), avec 1 le joueur ligne, 2 le joueur colonne

	α	β	δ
a	10,7	4,2	8,8
b	6,3	5,5	9,2

- On fait l'hypothèse, ad hoc, que i) 1 pense que 2 va jouer β, et que ii) 2 pense que 1 va jouer b
- Si 1 pense que 2 va jouer β, il a intérêt à jouer b, et si 2 pense qu'il va jouer b, il a intérêt à jouer β
- Au profil (b,β), en jouant b le joueur 1 **confirme** l'anticipation de 2 et le bien-fondé pour 2 de jouer β d'une part, et le joueur 2 en jouant β **confirme** l'anticipation de 1 et le bien-fondé pour 1 de jouer b
- (b,β) est le seul profit à passer ce test de cohérence

Rationalité et équité. Évidence expérimentale (1/2)

- Selon l'hypothèse de rationalité, des individus qui maximisent leurs gains, les gains des autres ne sont pris en compte que s'ils orientent leurs choix (« l'équité » est absente). Considérons le cas du jeu de l'ultimatum :
  - 1 partage une somme d'argent C avec 2. 1 annonce la part qu'il souhaite garder (a_1), laissant à 2 ($C-a_1$). 2 peut soit accepter, soit refuser. S'il refuse 1 et 2 ne reçoivent rien
  - par induction à rebours, 1 offrira $C-a_1$ la plus faible possible et 2 acceptera (un gain faible est mieux que pas de gain du tout)

Rationalité et équité. Évidence expérimentale (2/2)

- Güth, W., Schmittberger, R., & Schwarze, B. (1982) An experimental analysis of ultimatum bargaining. *Journal of economic behavior & organization*, *3*(4), 367-388 :
  - les résultats de l'expérience montrent que les individus jouant le rôle 1 réclamait [50-60%] de C, en dépit de leur avantage de 1er joueur, cependant que les joueurs jouant 2 rejetaient souvent des partages jugés inéquitables (rejet non « rationnel »)
  - l'hypothèse de rationalité (pas de prise en compte de l'équité) doit être discutée (en tout cas dans le cadre de ce jeu)

Équilibre de Nash en stratégie pure, une autre application numérique (1/2)

- Reprenons la matrice vue pour l'élimination des stratégies dominées et vérifions que l'équilibre trouvé, (4,4), est un équilibre de Nash

Pour B jouant q_B=4, la meilleure réponse de A est de jouer q_A=4

Pour B jouant q_B=2, la meilleure réponse de A est de jouer q_A=4

Pour A jouant q_A=2, la meilleure réponse de B est de jouer q_B=4

Dilemme du prisonnier		B	
		2	4
A	2	42, 46	22, 52 *
	4	44*, 26	24*, 32 *

(4,4) est un équilibre de Nash (unique ici) ($U_A(4,4)=24>22=U_A(2,4)$; $U_B(4,4)=32>26=U_B(4,2)$)

Pour A jouant q_A=4, la meilleure réponse de B est de jouer q_A=4

Équilibre de Nash en stratégie pure, une autre application numérique (2/2)

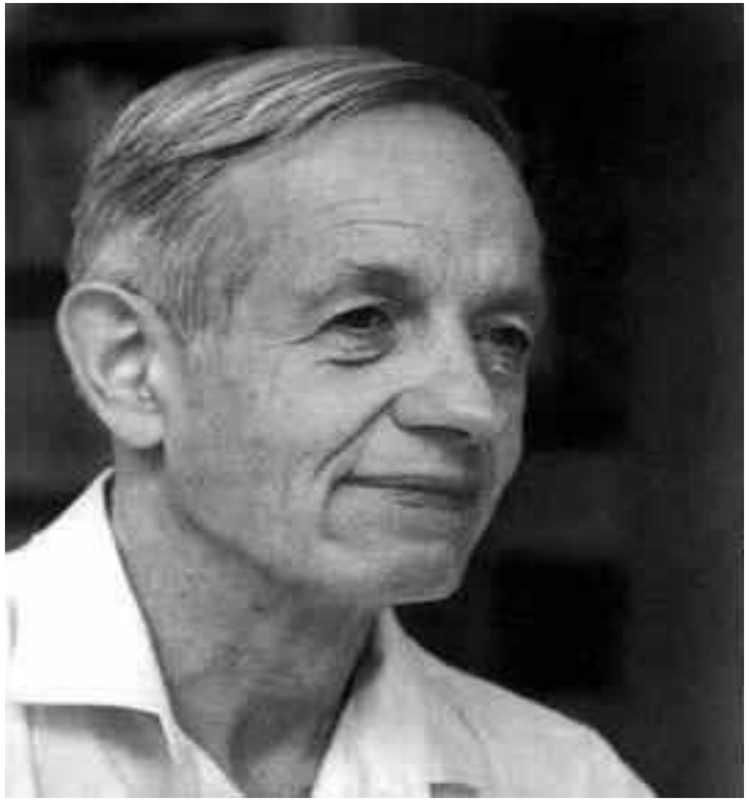
- Les joueurs sont confrontés à un problème de coopération au sein de ce jeu :
  - L'équilibre de Nash (unique ici) est Pareto dominé par l'issue (2,2) : jouer (2,2) procure un gain supérieur aux deux joueurs
  - Mais (2,2) n'est pas un équilibre de Nash (ne sera pas joué rationnellement) => problème de coopération (la coopération aurait été mutuellement avantageuse, comment sortir du dilemme ? Changer les règles ?)

Dilemme du prisonnier		B	
		2	4
A	2	42 , 46	22 , 52
	4	44 , 26	24 , 32

Lecture 2 Introduction à la théorie des jeux

- Objet, représentations
- Résolution de jeux statiques
- Résolution de jeux séquentiels
- Illustrations pour des jeux classiques
- Résolution de jeux en stratégies mixtes

John Nash



Équilibre de Nash parfait en sous-jeux (1/2)

- Soit 2 compagnies aériennes, Delta et American, pouvant fixer soit un prix élevé (P_H) soit un prix bas (P_B). La matrice des *pay-offs* est la suivante :

Problème de collaboration : 2 équilibres de Nash (dont un Pareto dominé). Comment choisir ?

L'équilibre dominant est risqué : si American (ex.) joue P_H (rationnel, joue un équilibre de Nash - EN) mais Delta P_B (rationnel, car EN), son gain sera de 50.

American

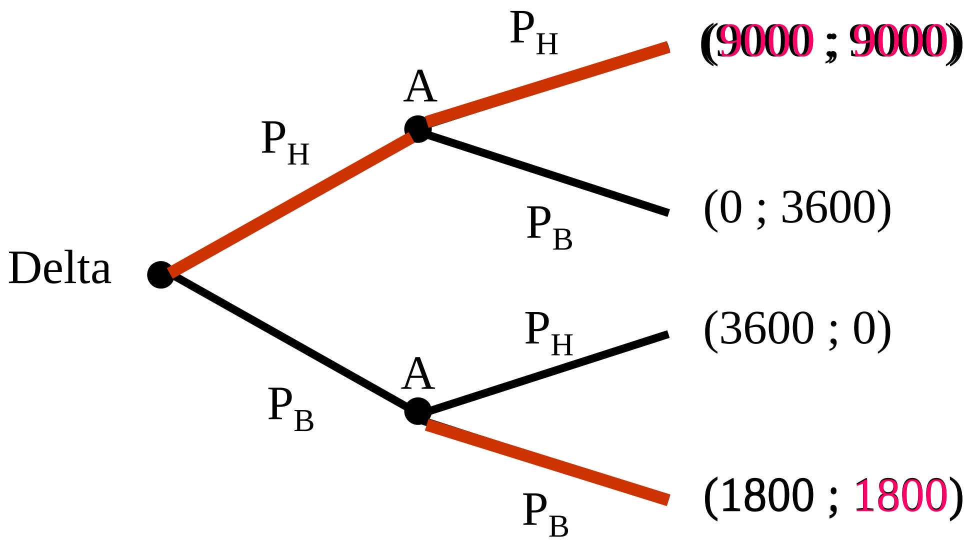
	P_H	**P_B**
P_H	9000 , 9000	50 , 3600
P_B	3600 ,50	1800 , 1800

Structure de jeu « chasse aux cerfs ». Le <u>problème rencontré est celui de la main tremblante</u>. Peut-on en sortir si les joueurs jouent en séquentiel ?

Équilibre de Nash parfait en sous-jeux (2/2)

- On représente le jeu sous forme arborescente (arbre de Kuhn) :
  - Delta joue en 1er, America en 2nd, on suppose qu'au moment de jouer America sait ce qu'à joué Delta,

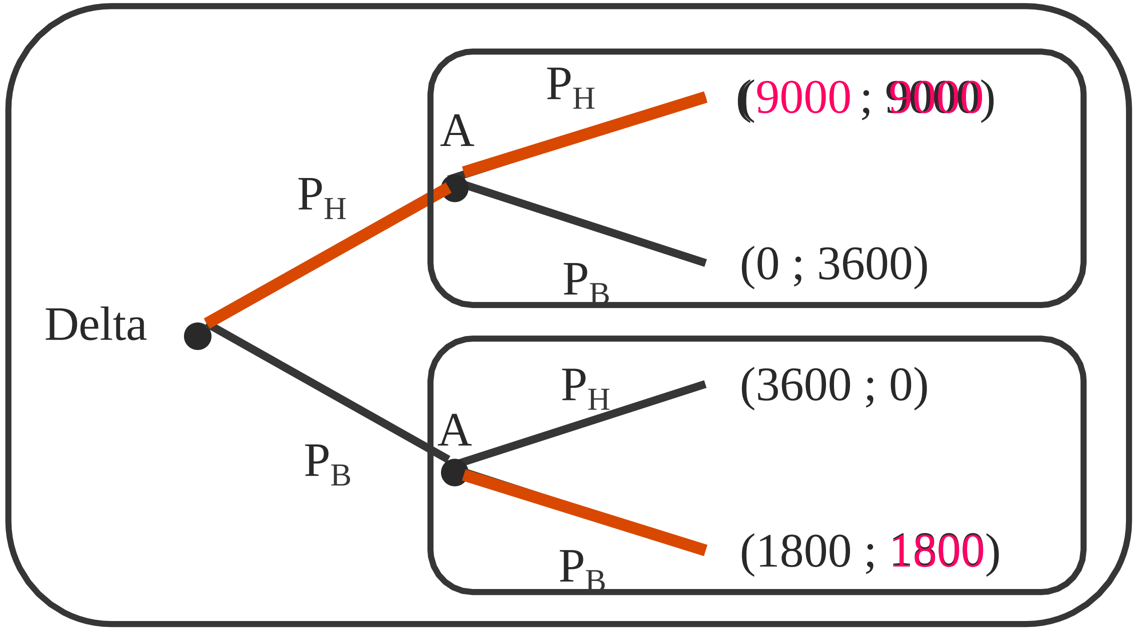
on résout par récurrence à rebours



De deux équilibres, on est passé à un (un EPSJ). On a ici un jeu séquentiel, avec information parfaite (on retrouvera ce type de modèle avec Stackelberg)

Concept de solution : EPSJ

- La méthode de résolution par récurrence à rebours
  - Consiste à résoudre de façon récursive les sous-jeux du jeux séquentiel en commençant par la fin
  - On appelle sous-jeu un nœud et l'ensemble des nœuds qui suivent (ici 3 sous-jeux)

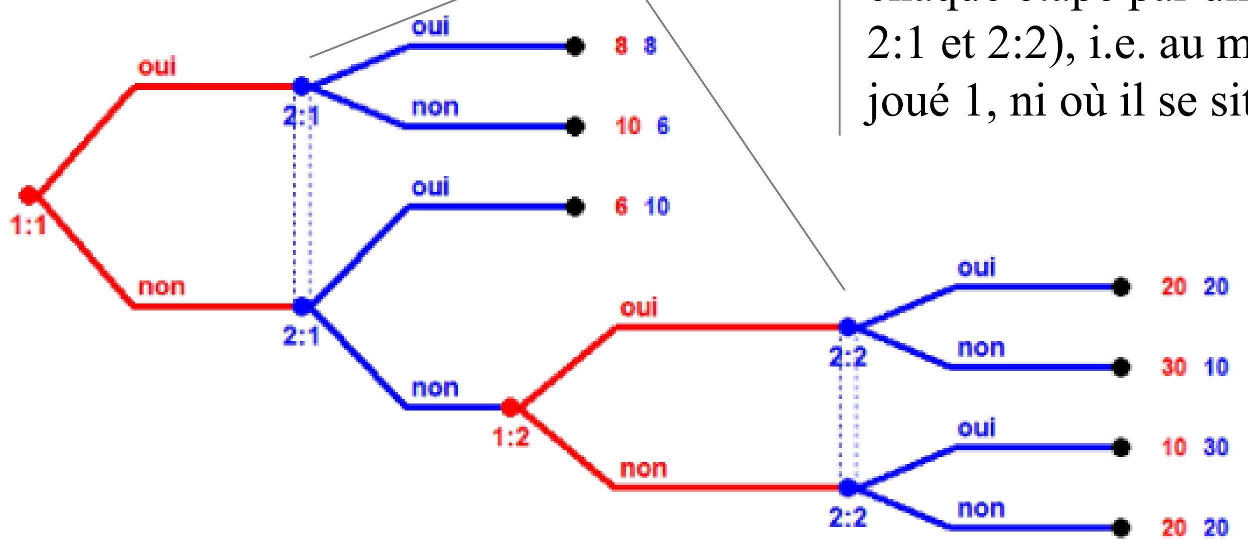


EPSJ avec information imparfaite (1/4)

- Soit deux investisseurs, $N = \{1,2\}$. Chacun a déposé une somme D sur un compte bancaire, D étant investi dans un projet de long terme. On sait :
  - Si le projet n'arrive pas à maturité, seul le montant 2r peut être recouvert, avec r<D (opération déficitaire). S'il arrive à son terme, le rendement brut du projet est 2R, avec R>D (retour sur investissement positif)
  - Les investisseurs peuvent retirer leurs fonds à deux moments : en t=1, avant terme, en t=2, après que le projet ne soit arrivé à maturité.
    - Si les deux investisseurs se retirent en t=1, chacun reçoit r et le jeu se termine
    - Si un seul se retire en t=1, celui qui se retire récupère D, l'autre perçoit 2r-D et le jeu se termine
    - Si personne ne se retire en t=1, le projet arrive à son terme, les investisseurs doivent décider en t=2 s'ils retirent leur fonds (1 seul retire, récupère 2R-D, R pour chacun dans les deux cas restants)

EPSJ avec information imparfaite (2/4)

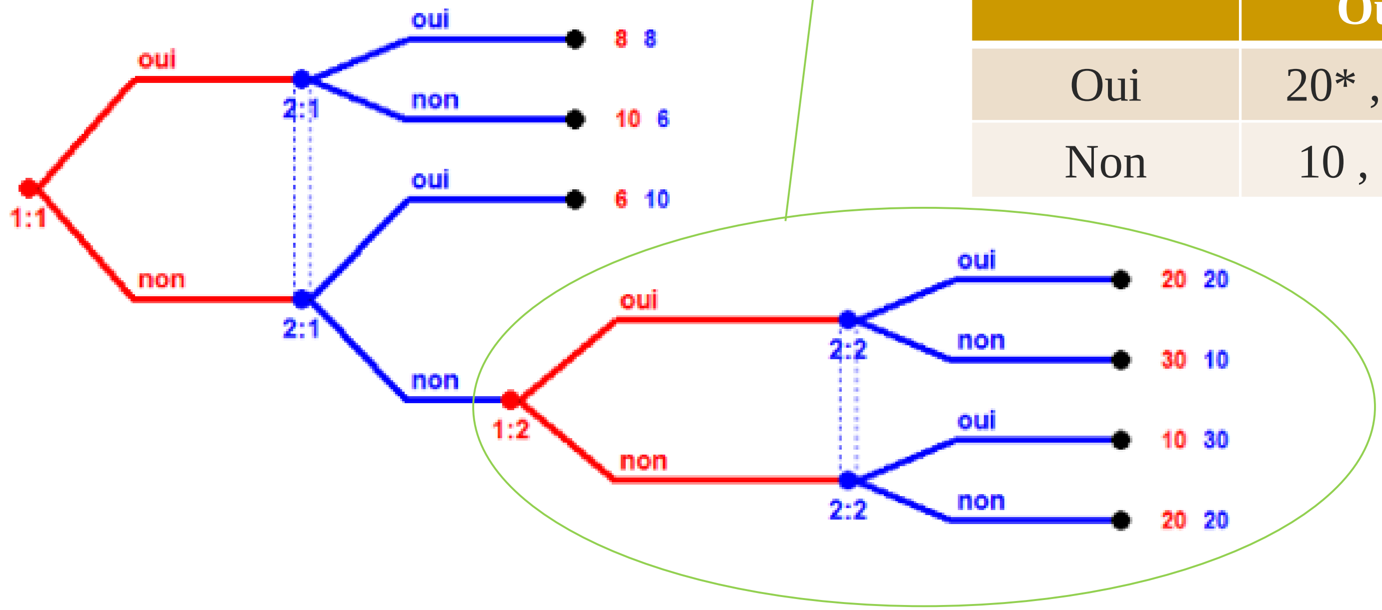
- Représentation du jeu sous forme d’un arbre de décision, avec ensemble d’informations (avec D=10, r=8 et R=30)
  - On construit l’arbre, on renseigne les paiements



Les nœuds de décision du joueur 2 sont reliés à chaque étape par un ensemble d’information, notés 2:1 et 2:2), i.e. au moment de jouer ne sait ni ce qu’a joué 1, ni où il se situe dans l’arbre de décision

EPSJ avec information imparfaite (3/4)

- On résout le jeu par récurrence à rebours



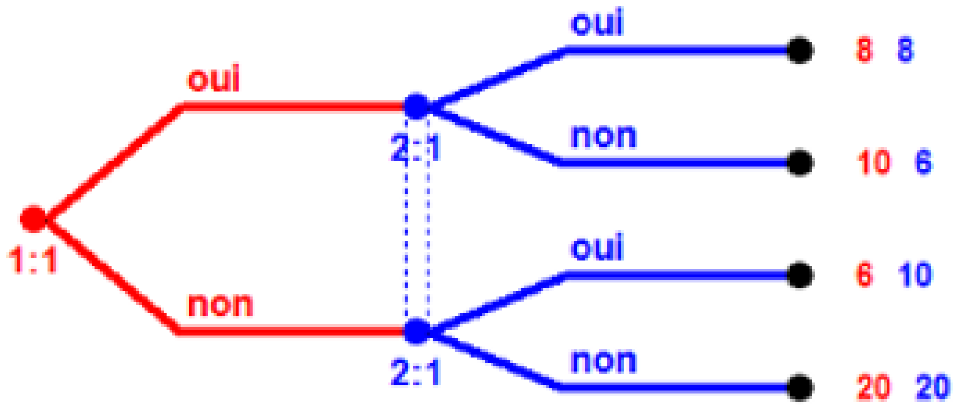
En 2ème étape, on doit résoudre un jeux à deux joueurs, aucun des joueurs ne sachant ce que l'autre a choisi au moment de jouer

	Oui	Non
Oui	20* , 20*	30* , 10
Non	10 , 30*	20 , 20

EPSJ avec information imparfaite (4/4)

- En 1ère étape, connaissant (Non, Non) joué en 2ème période, le jeu devient

	Oui	Non
Oui	8* , 8*	10 , 6
Non	6 , 10	20* , 20*



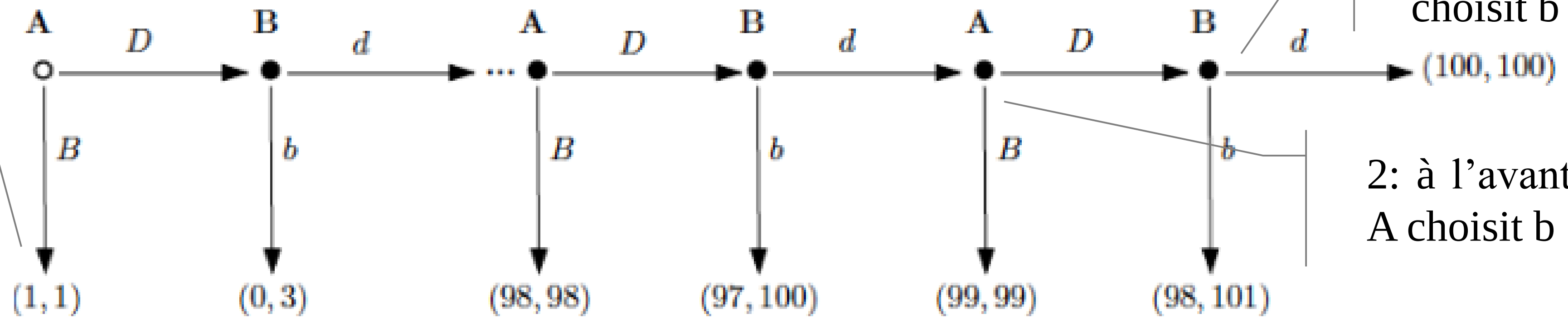
Le jeu de 1ère étape comprend deux EN, (N,N) et (O,O). On en conclut que le jeu initial comprend deux EPSJ, (N,N) et (O,O), avec le 1er qui Pareto domine le 2nd . Alors ?

- (O,O) peut s'interpréter comme une panique bancaire (i.e. si 1 pense que 2 retire ses fonds, sa meilleure réponse est de les retirer, et réciproquement)
- Ce modèle ne prédit pas quand les paniques se produisent, mais montre que lorsqu'elles se produisent elles renvoient à des comportements rationnels

Analyse critique de l'EPSJ (1/2)

- La méthode par récurrence à rebours apparaît comme assez « naturelle », mais :
  - elle requiert dans certains contexte (ex. : jeux d'échecs) des capacités cognitives particulièrement élevées (même pour un *homooeconomicus*)
  - des résultats d'économie expérimentale questionnent le fait que les individus jouent des EPSJ. On peut considérer le jeu du mille-pattes : 2 joueurs, 2 stratégies, n répétitions (Rosenthal, R. W. (1981) Games of perfect information, predatory pricing and the chain-store paradox. *Journal of Economic theory*, *25*(1), 92-100)

En remontant par récurrence à rebours, A joue b (1>0)



1: à la dernière étape B choisit b (101 > 100)

2: à l'avant dernière étape, A choisit b (99 > 98)

Analyse critique de l’EPSJ (2/2)

- Plusieurs expériences remettent en cause cette prédiction (i.e. arrêt du jeu dès le début) :
  - McKelvey, R. D., Palfrey, T. R. (1992) An experimental study of the centipede game. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 803-836
    - Pour n=6, la majorité arrête entre n=3 et n=5
  - Palacios-Huerta, I., & Volij, O. (2009) Field centipedes. *American Economic Review*, *99*(4), 1619-35
    - Pour n=6 et des joueurs d’échecs comme joueurs, convergent vers EPSJ
  - Levitt, S. D., List, J. A., & Sadoff, S. E. (2011). Checkmate: Exploring backward induction among chess players. *American Economic Review*, *101*(2), 975-90
    - Toujours pour des joueurs d’échecs, ne répliquent pas les résultats de (Palacios-Huerta et Volij, 2009)

Bilan d’étape

M1&2 pour approfondir, discuter, appliquer

3 autres à venir, rendant compte d’autres situations en EI

- Nous avons considéré quatre concepts de solution :
  - Équilibre en stratégies dominante
  - Équilibre de Nash en stratégie pure
  - Équilibre de Nash en stratégie mixte
  - Équilibre de Nash parfait en sous-jeux (EPSJ)
- Nous avons soulevé deux problèmes :
  - de coopération (dilemme du prisonnier, avec un équilibre de Nash unique Pareto dominé)
  - de la main tremblante (chasse au cerf, équilibres de Nash multiples, un Pareto dominant et risque dominé)

Lecture 2 Introduction à la théorie des jeux

- Objet, représentations
- Résolution de jeux statiques
- Résolution de jeux séquentiels
- Illustrations pour des jeux classiques
- Résolution de jeux en stratégies mixtes

Le problème du RDV, problème de co-sélection (1/3)

- Version « classique »
  - Arthur et Bob veulent se rencontrer à Paris, mais n'ont pas décidé d'un lieu de RDV
  - Ils peuvent se rendre chacun soit à la tour Eiffel, soit au Louvre
  - Le but est de se rencontrer, peu importe où
  - Où vont ils aller ?

Problème de co-sélection (équilibres multiples)

- Version « entreprise »
  - 1 et 2 sont en concurrence sur le même marché, ont le choix entre un standard A et un standard B
  - Elles sont *indifférentes* entre A ou B, elles ont toutes deux intérêt à un standard unique
  - Quel standard vont elles choisir si elles ne peuvent communiquer ?

Le problème du RDV, problème de co-sélection (2/3)

Il y a deux équilibres de Nash : (A,A) et (B,B). Ils sont identiques et symétriques

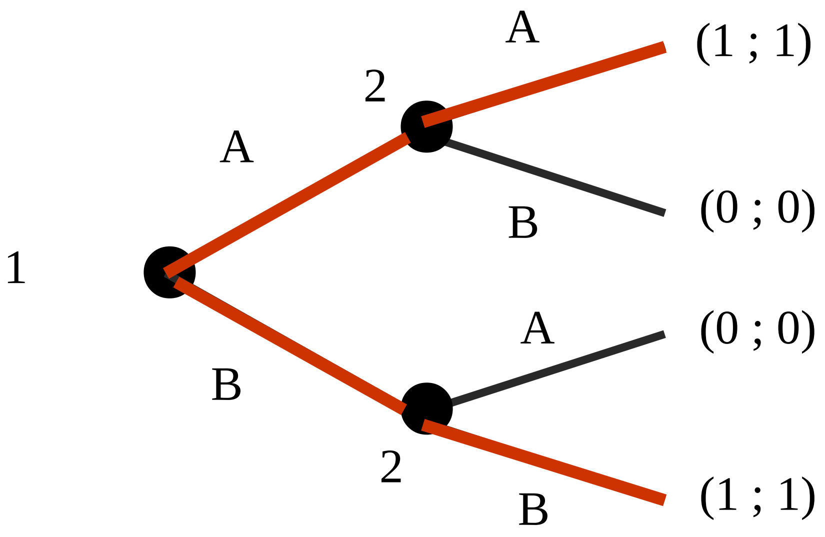
Cette version du jeu du RDV appartient à la catégorie des jeux à intérêts communs (les joueurs ont les mêmes préférences, $u_i = u_j, pour\ tous\ i, j$)

1 \ 2	A	B
A	1,1	0,0
B	0,0	1,1

Les deux joueurs ont chacun intérêt à être sur un des équilibres, procurant les mêmes gains ($u_i = u_j, pour\ tous\ i, j$). Ils sont confrontés à un problème de coordination. On parle ici de <u>problème de co-sélection</u>

Le problème du RDV, problème de co-sélection (3/3)

		2	
		A	**B**
1	A	1,1	0,0
	B	0,0	1,1



- Supposons que 1 joue en 1er . Partant de la matrice, on construit alors l'arbre de décision suivant

- Le jeux comprend deux EPSJ, (A,A) et (B,B). Le problème de co-sélection n'est pas réglé (idem si 2 joue en 1er)
- Les paiements dans cette version du jeu sont identiques et symétriques, aucun équilibre ne Pareto domine l'autre

La bataille des sexes, problème de co-sélection (1/3)

- Version « classique »
  - Deux amoureux souhaitent sortir ensemble le samedi soir
  - Un ballet et un match de boxe sont programmés ce soir
  - Ils veulent sortir ensemble, mais elle préfère le ballet, et lui la boxe
  - Où vont ils aller ?

Problème de co-sélection (équilibres multiples)

- Version « entreprise »
  - Sony et Toshiba développent chacune un nouveau standard de stockage de vidéo HD
  - Le développement achevé, chacune réalise que le marché serait plus large si un seul standard était adopté
  - Mais chacune préfère que ce soit son standard qui s'impose. Alors ?

La bataille des sexes, problème de co-sélection (2/3)

Il y a deux équilibres de Nash : (Ballet, Ballet) et (Boxe, Boxe). Ils sont asymétriques : chacun est préféré par un des joueurs

lui

elle

	Ballet	Boxe
Ballet	3,2	1,1
Boxe	0,0	2,3

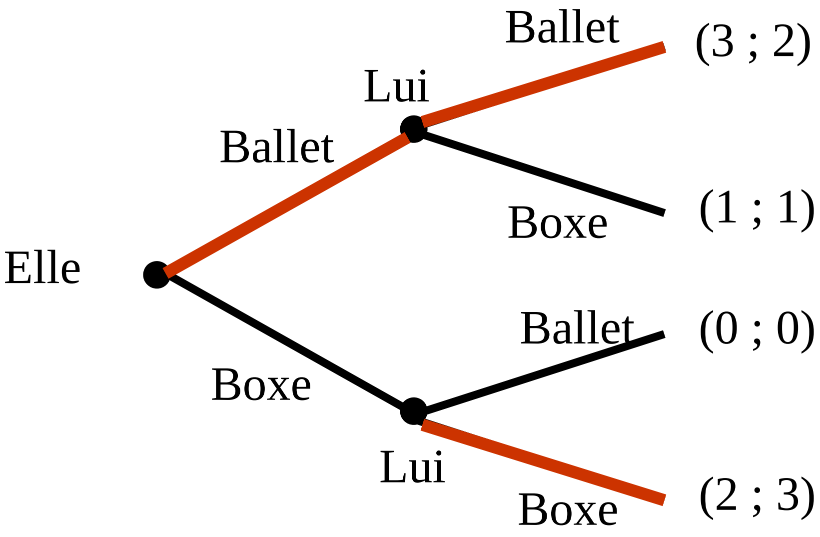
Les deux joueurs ont chacun intérêt à être sur un des équilibres, distincts de celui de l'autre. Ils sont confrontés à un problème de coordination ET de compatibilité. On parle ici de <u>problème de co-sélection forte</u>

La bataille des sexes, problème de co-sélection (3/3)

lui

elle

	Ballet	Boxe
Ballet	3,2	1,1
Boxe	0,0	2,3



- Supposons que Elle joue en 1er . Partant de la matrice, on construit alors l'arbre de décision suivant
- Un équilibre unique => problème de co-sélection réglé
- Le leader a un avantage pour cette structure de jeu (*the first mover advantage*)
- Mais pourquoi Elle en leader ? Choix exogène ici => d'autres modèles explicatifs en M pour l'endogénéiser

Chicken game, problème de co-sélection (1/3)

- Version «fureur de vivre»
  - Jim et Buzz prennent chacun place dans une voiture volée
  - Ils conduiront leur voiture à toute allure jusqu'à l'extrémité de la falaise dominant l'océan
  - Celui des deux qui aura sauté le 1er sera considéré comme un lâche. Alors ?

- Version « entreprise »
  - 2 pharma investissent en R&D, même maladie ciblée
  - Proches du but, elles doivent encore investir 10M pour enregistrer leur brevet
  - La 1ère a déposer emporte tout. Pour un dépôt simultané, les 2 font des pertes (partage du marché pour CF élevé). Si elles abandonnent, elles économisent les 10M. Alors ?

Chicken game, problème de co-sélection (2/3)

Il y a deux équilibres de Nash asymétriques

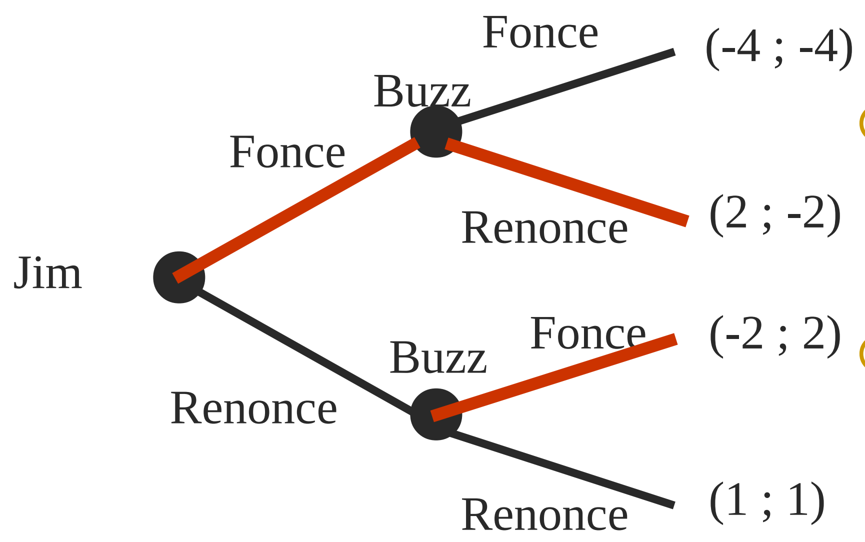
		Buzz	
		Fonce	**Renonce**
Jim	Fonce	-4,-4	2,-2
	Renonce	-2,2	1,1

C'est encore un problème de co-sélection forte. Mais les deux équilibres sont risqués. Les joueurs peuvent préférer le choix (Renoncer, Renoncer) dont le montant global est supérieur à toutes les autres issues du jeu (mais il faudrait relâcher l'hypothèse de neutralité au risque et introduire d'autres concepts de solution (maximin))

Équilibre de Nash parfait en sous-jeux (3/3)

Buzz

J		Fonce	Renonce
	Fonce	-4,-4	2,-2
	Renonce	-2,2	1,1



- Supposons que Jim joue en 1er . Partant de la matrice, on construit alors l'arbre de décision suivant
- Un équilibre unique => problème de co-sélection réglé
- Le leader a un avantage pour cette structure de jeu (*the first mover advantage*)
- Mais pourquoi Jim en leader ? Choix exogène ici => d'autres modèles explicatifs en M pour l'endogénéiser

Renvoie d’ascenseur, problème de l’élimination des stratégies faiblement dominées (1/3)

- Version «classique»
  - C’est le matin. Vous arrivez au BATEG, vous avez RDV au 4ème , comme d’autres étudiants de la promo
  - Arrivé(e) au 4ème, sachant que l’usager suivant partira probablement du RDC, vous avez le choix de renvoyer l’ascenseur en bas (réduit le temps d’attente du suivant) ou pas. Alors ?

- Version « entreprise »
  - Au cours d’une conférence, 2 dirigeants (non concurrents) se sont promis, informellement, de s’envoyer la documentation dont chacun dispose sur la Chine, pays qu’ils visent à terme commercialement
  - Vont-ils le faire en rentrant chez eux ?

Renvoie d'ascenseur, problème de l'élimination des stratégies faiblement dominées (2/3)

Il y a 4 équilibres de Nash Pareto ordonnés, avec un Pareto dominant

B

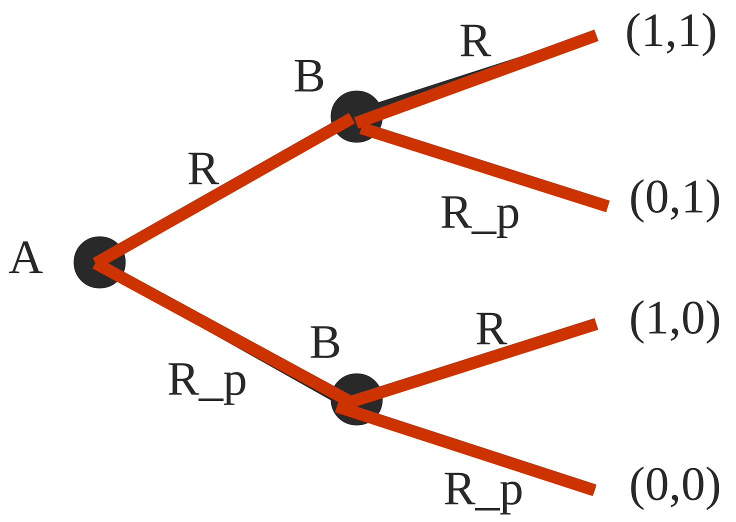
A		Renvoie	Ne renvoie pas
	Renvoie	1,1	0,1
	Ne renvoie pas	1,0	0,0

Le problème naît de l'élimination impossible des stratégies faiblement dominées

Renvoie d'ascenseur, problème de l'élimination des stratégies faiblement dominées (3/3)

B

A		R	R_pas
	R	1,1	0,1
	R_pas	1,0	0,0

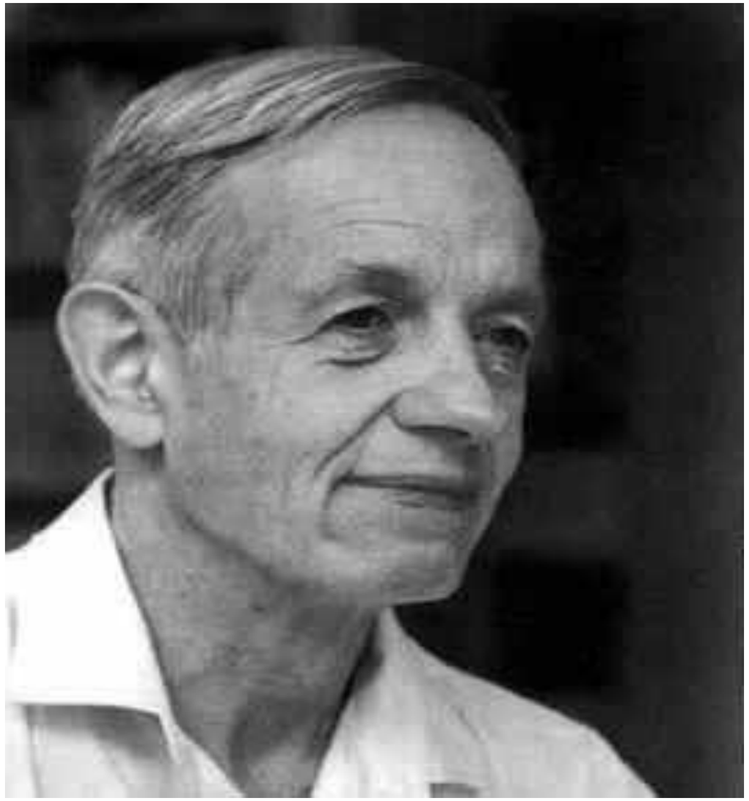


- Supposons que A joue en 1er . Partant de la matrice, on construit alors l'arbre de décision suivant

- Le jeu séquentiel ne règle pas le problème
- Comment des joueurs rationnels peuvent-ils se sortir de cette situation ? Répétition du jeu avec stratégies mettant en œuvre une menace crédible (ex. jouer R si RR, sinon jouer R_p les tours suivants)

Lecture 2 Introduction à la théorie des jeux

John Nash



- Objet, représentations
- Résolution de jeux statiques
- Résolution de jeux séquentiels
- Illustrations pour des jeux classiques
- Résolution de jeux en stratégies mixtes

Stratégie pure vs stratégie mixte (1/2)

- Plutôt que de retenir une action (ou une suite d'actions), les joueurs affectent des probabilités aux actions parmi lesquelles ils choisissent
  - Les joueurs prennent leurs décisions non pas en fonction des gains mais en fonction de l'espérance mathématique des gains
  - Recourir aux stratégies mixtes permet d'obtenir un équilibre de Nash (en stratégie mixte) là où il n'y en avait pas (en stratégie pure)
  - Mais pourquoi jouer en stratégie mixte plutôt qu'en stratégie pure ? Une interprétation possible : pour introduire le doute chez l'adversaire

Stratégie pure vs stratégie mixte (2/2)

- Prenons une analogie sportive :
  - Supposons qu'un gardien de but soit meilleur pour arrêter les ballons à droite qu'à gauche. Si vous frappez systématiquement sur son côté faible, il va finir par s'en rendre compte ….. D'où l'intérêt d'instiller le doute
  - Au moment des tirs aux buts, les buteurs choisiront de tirer un certain nombre de fois à gauche et un certain nombre de fois à droite. Mais combien de fois ? L'équipe, si elle réfléchit de la sorte, doit définir des probabilités de jouer une stratégie et une probabilité d'en jouer une autre

Équilibre de Nash en stratégies mixtes (1/6)

- Considérons le cas du jeu d'appariement (*matching pennies*), jeu à information imparfaite, 2 joueurs neutres au risque

		Anna	
		Pile	Face
Paul	Pile	1 , -1	-1 , 1
	Face	-1 , 1	1 , -1

- Anna et Paul, ont chacun une pièce en poche. Ils doivent dévoiler le côté de leur pièce simultanément. Même côté => Paul gagne la pièce de Hanna. Côté différent => Hanna l'emporte

- version *business* : Paul a un avantage en coût, pour des biens homogènes, il l'emporte. Pour des biens différenciés, Anna l'emporte (qualité supérieure, identifiée et consentement à payer des consommateurs)

Équilibre de Nash en stratégies mixtes (2/6)

- ce jeu est à somme nulle (la somme des fonctions de gains des joueurs est toujours égale à zéro), ne comprend pas d'équilibre de Nash en stratégie pure (problème de comptabilité)
- Et si Anna et Paul jouait en probabilité ? Posons :
  - Paul pense que Anna joue pile avec une probabilité q, et face avec une probabilité (1-q), c-à-d la stratégie mixte (q,1-q). $S_1 = \{(p, 1-p) \in \mathbb{R}^2 | p \in [0,1\ ]\}$
  - Anna pense que Paul joue pile avec une probabilité p, et face avec une probabilité (1-p), c-à-dire la stratégie mixte (p,1-p). $S_2 = \{(q, 1-q) \in \mathbb{R}^2 | q \in [0,1\ ]\}$

		Anna	
		Pile (q)	Face (1-q)
Paul	Pile (p)	1 , -1	-1 , 1
	Face (1-p)	-1 , 1	1 , -1

Le produit cartésien $S_1 * S_2$ donne l'ensemble de toutes les loteries :

$$\mathcal{L}(p,q) = \begin{cases} (pile, pile) & (pile, face) & (f,p) & (f,f) \\ pq & p(1-q) & (1-p)q & (1-p)(1-q) \end{cases}$$

Équilibre de Nash en stratégies mixtes (3/6)

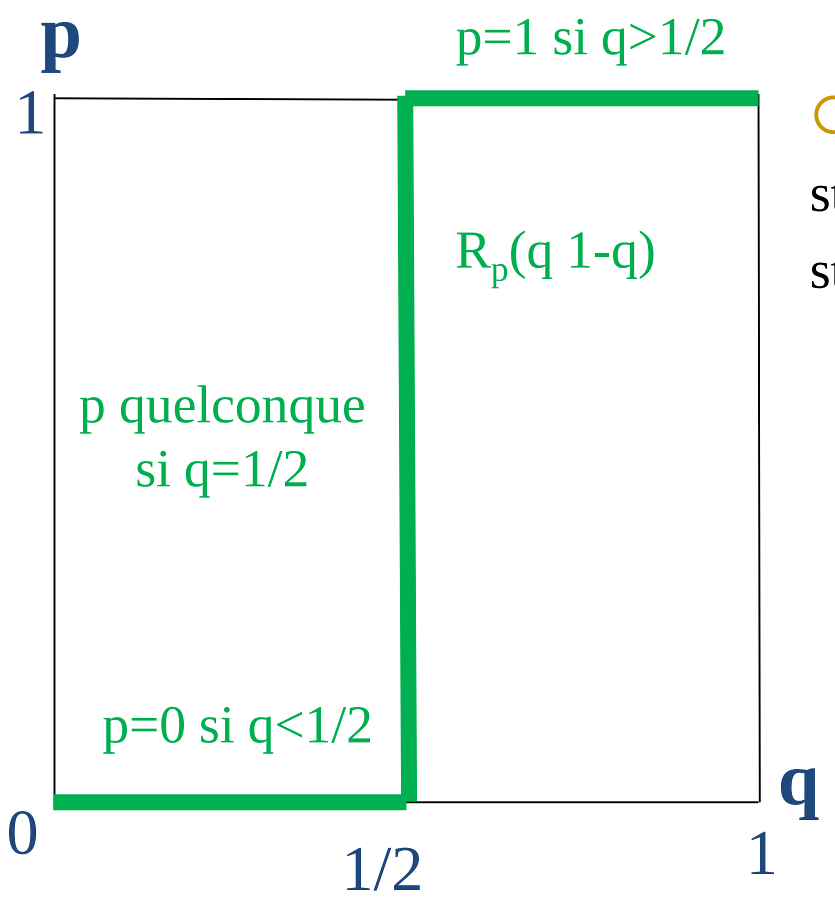
- Commençons par déterminer la fonction de meilleure réponse de Paul
  - Quels sont ses gains espérés ?
    - Son espérance de gains à jouer pile : q*(1)+(1-q)*(-1)=2q-1
    - Son espérance de gains à jouer face : q*(-1)+(1-q)*(1)=1-2q

		Anna		
		Pile (q)	Face (1-q)	
Paul	Pile (p)	1 , -1	-1 , 1	=> 2q-1
	Face (1-p)	-1 , 1	1 , -1	=> 1-2q

Pour q=1/2, Paul est indifférent entre jouer pile ou face (toute combinaison de ces stratégies est équivalente pour lui)

Face rapporte plus que pile si 2q-1<1-2q <=> q<1/2.
Pour q<1/2, Paul jouera alors face

Équilibre de Nash en stratégies mixtes (4/6)



- la meilleure réponse de Paul à la stratégie mixte (q,1-q) est alors la stratégie mixte (p,1-p) :
  - jouer face avec certitude (p=0) si q<1/2
  - jouer indifféremment pile ou face (p quelconque) si q=1/2
  - jouer pile avec certitude (p=1) si q>1/2

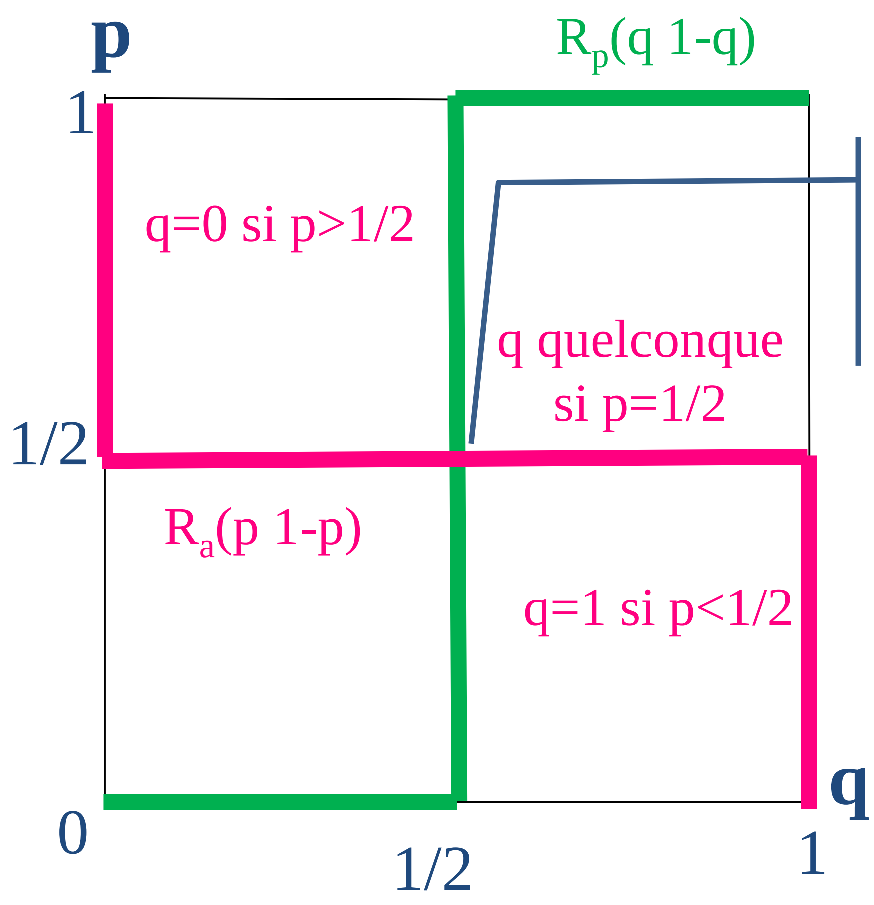
Équilibre de Nash en stratégies mixtes (5/6)

- Déterminer de façon similaire la fonction de réaction de Anna
  - Quels sont ses gains espérés ?
    - Son espérance de gains à jouer pile : p*(-1)+(1-p)*(1)=1-2p
    - Son espérance de gains à jouer face : p*(1)+(1-p)*(-1)=2p-1

		Anna	
		Pile (q)	Face (1-q)
Paul	Pile (p)	1 , -1	-1 , 1
	Face (1-p)	-1 , 1	1 , -1
		=> 1-2p	=> 2p-1

Pile rapporte plus que face si 1-2p>2p-1<=> p<1/2.
Pour p<1/2, Anna jouera alors pile avec certitude (q=1)

Équilibre de Nash en stratégies mixtes (6/6)



L'équilibre de Nash en stratégies mixtes est : {(1/2,1/2),(1/2,1/2)}

Concept de solution : équilibre de Nash en stratégie mixte (1/2)

- Une stratégie mixte du joueur i est une mesure de probabilités p_i définie sur l'ensemble des stratégies pures du joueur i ($\Sigma_{si}\, p_i,s_i=1$). On note P_i l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i. p_i,s_i est la probabilité que i joue la stratégie pure s_i. $p_i \in P_i$ correspond donc à une stratégie mixte du joueur i

- Dans un jeu à n joueurs, la fonction de meilleure réponse (de réaction) du joueur i, $R_i(p_{-i})$ associe à chaque combinaison de stratégies pures des autres joueurs p_{-i}, la (les) stratégie(s) du joueur i qui maximise(nt) son gain :
  - $U_i(R_i(p_{-i}),p_{-i}) \geq u_i(p_i,p_{-i}), \forall\ p_i \in P_i,\ p_{-i} \in P_{-i}$
- Un profil $p^*=(p^*_1,\ldots,p^*_n)$ ($p^*_i \in P_i$, $i=1,..n$) est un équilibre de Nash en stratégies mixtes si :
  - $U_i(p^*_i,p^*_{-i}) \geq u_i(p_i,p^*_{-i}), \forall\ p_i \in P_i, \forall i=1,..n$

Concept de solution : équilibre de Nash en stratégie mixte (2/2)

- Lemme :
  - Un joueur qui maximise son utilité en utilisant une stratégie mixte sera nécessairement indifférent entre toutes les stratégies pures auxquelles la stratégie mixte attribue une probabilité strictement positive
    - Si cette indifférence n’était pas vérifiée, une stratégie qui donne une probabilité nulle à la stratégie pure la moins préférée serait meilleure
    - Preuve : voir (Osborne & Rubinstein, 1994 #33-34)

La bataille des sexes, équilibre en stratégie mixte (1/5)

- Résolvons un jeu type bataille des sexes en stratégie mixte
  - On note la stratégie mixte des deux joueurs par :
    - $p_1 = (q, 1-q), avec\ q \in [0,1]$
    - $p_2 = (t, 1-t), avec\ t \in [0,1]$

Pour mémoire, deux équilibres de Nash en stratégie pure

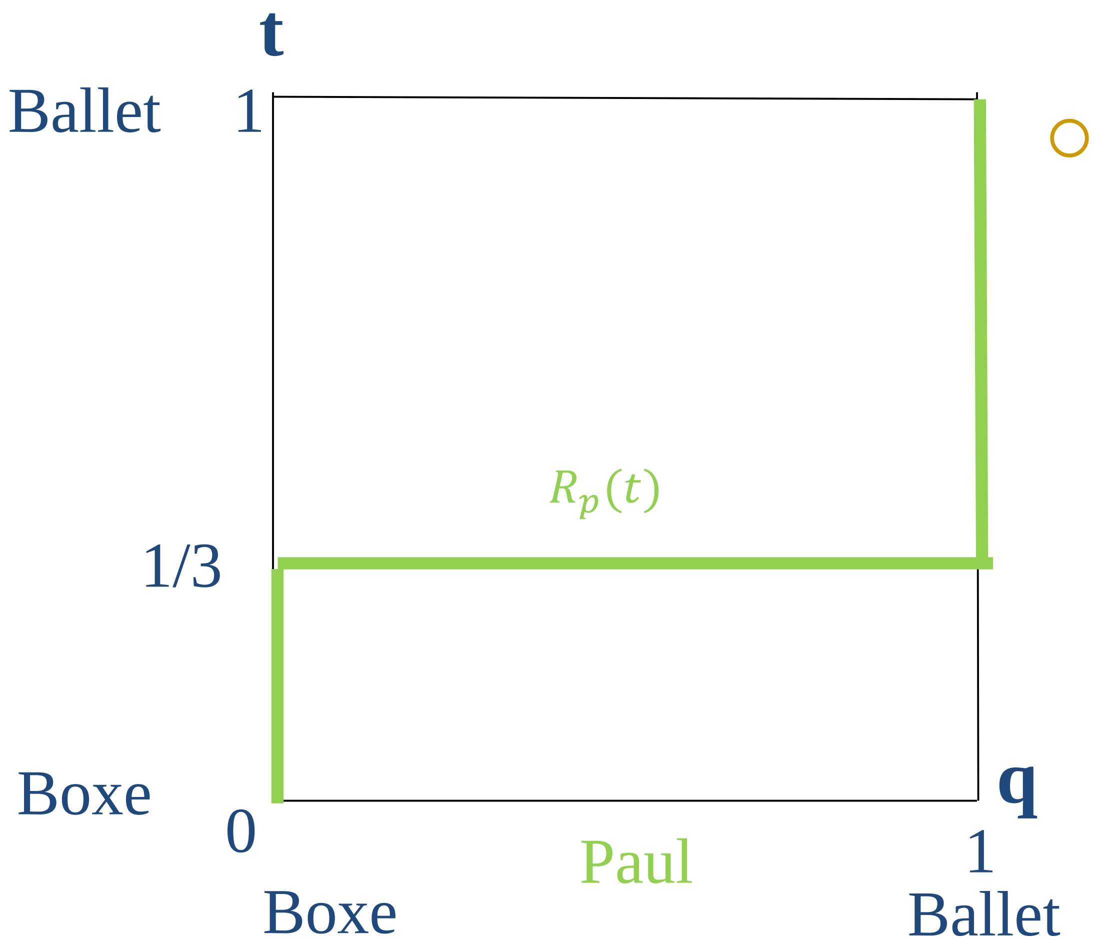
			Jacqueline	
			t	1-t
			Ballet	Boxe
Paul	q	Ballet	2 ; 1	0 ; 0
	1-q	Boxe	0 ; 0	1 ; 2

La bataille des sexes, équilibre en stratégie mixte (2/5)

- Quelle est la meilleure réponse en stratégies mixtes pour Paul ?
  - On Compare l'espérance d'utilité de Paul pour ses deux stratégies
    - Ballet : $U_1(p_1, p_2) = E_{u1}(p_1, p_2) = 2t + 0(1-t) = 2t$
    - Boxe :$U_1(p_1, p_2) = E_{u1}(p_1, p_2) = 0t + 1(1-t) = 1-t$
  - Face à la stratégie mixte p_2 de Jacqueline, Paul choisira Ballet si :
    - $2t > 1 - t \Leftrightarrow t > \frac{1}{3}$, Paul choisira d'aller tout le temps au Ballet (q=1) si Jacqueline va au ballet plus d'une soirée sur trois ($t > \frac{1}{3}$)
    - Il ira tout le temps à la boxe (q=0) si Jacqueline va au ballet plus de deux soirées sur trois ($t < \frac{1}{3} \Leftrightarrow (1-t) > \frac{2}{3}$)
    - Pour $t = \frac{1}{3}$, il est indifférent entre les deux (combinaison de stratégies équivalentes)

		Jacqueline	
		t	1-t
		Ballet	Boxe
Paul q	Ballet	2 ; 1	0 ; 0
Paul 1-q	Boxe	0 ; 0	1 ; 2

La bataille des sexes, équilibre en stratégie mixte (3/5)



- la fonction de meilleure réponse de Paul :

$$R_1(t) = q^*(t) = \begin{cases} 1 \quad si \quad t > \frac{1}{3} \\ [0,1] \quad si \quad t = \frac{1}{3} \\ 0 \quad si \quad t < \frac{1}{3} \end{cases}$$

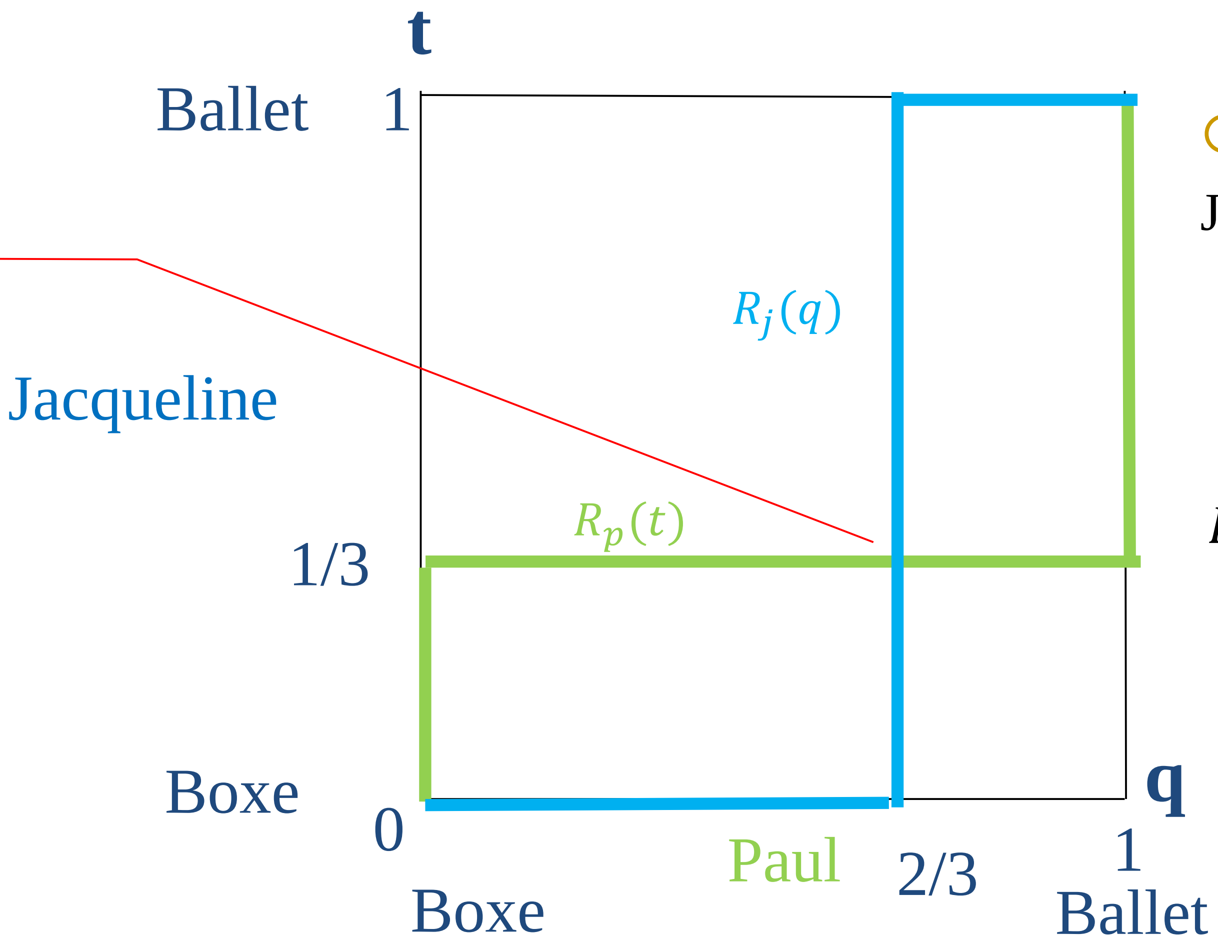
La bataille des sexes, équilibre en stratégie mixte (4/5)

- Quelle est la meilleure réponse en stratégies mixtes pour Jacqueline ?
  - On Compare l'espérance d'utilité de Jacqueline pour ses deux stratégies
    - Ballet : $U_2(p_1, p_2) = E_{u2}(p_1, p_2) = 1q + 0(1-q) = q$
    - Boxe :$U_2(p_1, p_2) = E_{u2}(p_1, p_2) = 0q + 2(1-q) = 2 - 2q$
  - Face à la stratégie mixte de Paul p_1, Jacqueline choisira Ballet (t=1) si :
    - $q > 2 - 2q \Leftrightarrow q > \frac{2}{3}$, elle choisit le ballet pour Paul le choisissant également plus de deux soirées sur trois (q$> \frac{2}{3}$)
    - elle ira tout le temps à la boxe (t=0) pour Paul allant plus d'une soirée sur trois à la boxe ($q < \frac{2}{3} \Leftrightarrow (1-q) > \frac{1}{3}$)
    - Pour $q = \frac{1}{3}$, elle est indifférente entre les deux

			Jacqueline	
			t	1-t
			Ballet	Boxe
Paul	q	Ballet	2 ; 1	0 ; 0
	1-q	Boxe	0 ; 0	1 ; 2

La bataille des sexes, équilibre en stratégie mixte (5/5)

Équilibre de Nash en stratégie mixte : $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, Paul va au ballet deux soirées sr trois, Jacqueline une soirée sur trois, leur gain espéré est alors $E_{ui} = \frac{2}{3}, i = 1, 2$



- la fonction de meilleure réponse de Jacqueline :

$$R_2(q) = t^*(q) = \begin{cases} 1 & si \quad q > \frac{2}{3} \\ [0,1] & si \quad q = \frac{2}{3} \\ 0 & si \quad q < \frac{1}{3} \end{cases}$$