Deuxième partie.
Interactions stratégiques.

Chapitre III. Théorie des jeux non coopératifs

Chapitre IV. L'oligopole non coopératif

Deuxième partie.
Interactions stratégiques

Chapitre III. Théorie des jeux non coopératifs

Chapitre IV. L'oligopole non coopératif

3. Théorie des jeux non coopératifs

3.1. Introduction

3.2. Jeux avec décisions simultanées

3.3. Jeux avec décisions séquentielles

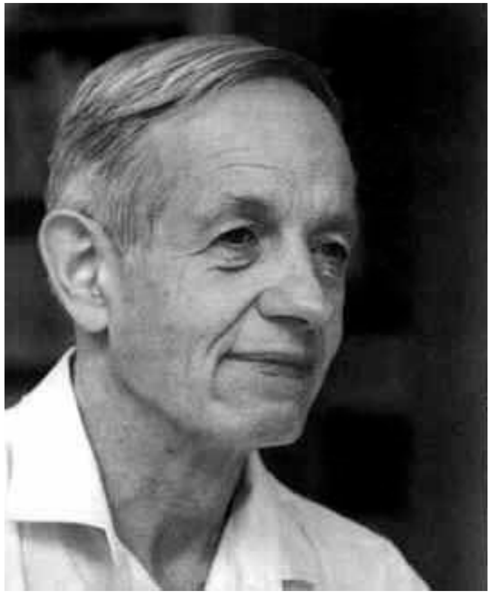
3.1. Introduction

- **Préalable : le jeu de l'OPEP**
- **La théorie des jeux**
  - *Objet* : comprendre les interactions qui fondent la coopération et les conflits
  - *Origine* : Von Neumann et Morgenstern (1944)
  - *Grands noms* : John Nash, R. Selten et J. Harsanyi (Prix « Nobel », 1994) ; R.J. Aumann (Prix « Nobel », 2005) ; Lloyd Shapley (Prix « Nobel », 2012)
  - *Utilisation :* sciences sociales, sciences de la vie, mathématiques appliquées (recherche opérationnelle)

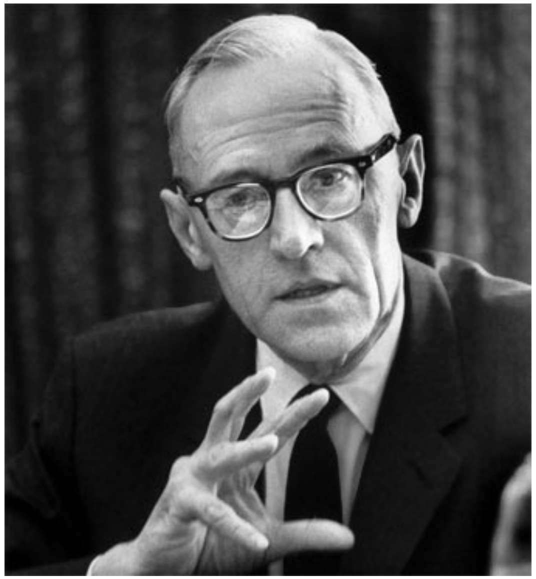
3.1. Introduction

John Von Neumann

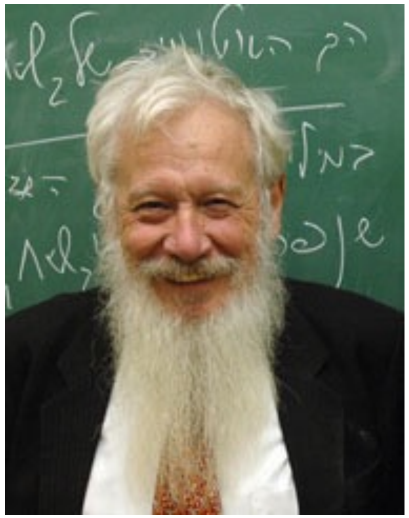
Lloyd Shapley



John Nash



Oskar Morgenstern



Robert J. Aumann

3.1. Introduction

- **La théorie des jeux en économie**
  - Concurrence imparfaite et comportements stratégiques des firmes dans leur environnement concurrentiel
    - Oligopole, cartel, partenariat
  - Contrats incitatifs
    - Principal et agent, relation d'emploi
  - Coordination et incitations des actions au sein de l'entreprise
    - Jeux d'équipe, jeux de coordination

3.1. Introduction

- **Deux branches dans la théorie des jeux**
  - Jeux non-coopératifs
  - Jeux coopératifs

3.1. Introduction

- **Types de jeux non coopératifs**
  - Jeux simultanés
  - Jeux séquentiels

3.1. Introduction

- **L'information dans la théorie des jeux non coopérative**
  – Information complète et information incomplète

  – Information parfaite et imparfaite

3.1. Introduction

- **Stratégies pures et stratégies mixtes**
  - Stratégie pure
  - Stratégie mixte

3.1. Introduction

Nous allons nous intéresser à des jeux non-coopératifs

- En information complète
- Sous forme normale
  - Stratégies pures et stratégies mixtes
- Sous forme extensive

3. Théorie des jeux non coopératifs

3.1. Introduction

<u>3.2. Jeux avec décisions simultanées</u>

3.3. Jeux avec décisions séquentielles

3. Théorie des jeux non coopératifs

3.1. Introduction

3.2. Jeux avec décisions simultanées

3.2.1. Représentation et concepts

3.2.2. Stratégies pures

3.2.3. Stratégies mixtes

3.3. Jeux avec décisions séquentielles

3.2.1. Représentation et concepts

- Jeux avec décisions simultanées : les joueurs jouent une seule fois et en même temps
- Ces jeux sont représentés sous **forme normale** (ou stratégique)

3.2.1. Représentation et concepts

- Un jeu sous forme normale est la donnée de trois éléments

  $N=\{1,\ldots,n\}$ l'ensemble des **joueurs**

  S_{i}, l'ensemble non vide des actions ou stratégies pures du joueur i

  $u_i : \underbrace{S_i \times \ldots \times S_n}_{S} \rightarrow \mathrm{R}$ La fonction d'utilité, de gain ou de paiement du joueur i

- L'utilité du joueur i dépend à la fois de son action et de l'action des autres (ses préférences sont définies sur S et non sur S_i)

3.2.1. Représentation

- **Vocabulaire**

  – On appelle un mouvement d'un joueur une *action*

  – On appelle une série d'actions qui définit totalement le comportement d'un joueur au cours d'un jeu une *stratégie*

  – Plus précisément, une stratégie *pure* en opposition à une 'stratégie mixte' qui implique une randomisation

  – Les *gains* sont les résultats du jeu associés au choix de ces stratégies

3.2.1. Représentation

- **Un premier jeu**
  - Deux entreprises A et B se partagent un marché
  - Elles vendent un bien identique
  - Si A fixe un prix élevé et B un prix faible, A fait un gain de 0 et B de 60.
  - Le gain de A est naturellement nul parce que, pour un même marché et un produit homogène, on considère qu'une partie des consommateurs va préférer acheter à un prix inférieur à l'entreprise B.

3.2.1. Représentation et concepts

– Les deux entreprises décident simultanément : représentation du jeu sous forme normale
– Ici, chaque entreprise a deux *stratégies:* prix élevé, prix bas

3.2.1. Représentation et concepts

- **Jeu sous forme normale (ou stratégique)**
  - Il s’agit d’une représentation matricielle, un joueur (entreprise A) étant en ligne et l’autre (entreprise B) en colonne.
  - Les gains de l’entreprise A apparaissent en premier, les gains de l’entreprise B apparaissent en second pour chaque couple de stratégies.

3.2.1. Représentation et concepts

Entreprise B

Entreprise A

	Prix élevé	*Prix bas*
Prix élevé	40, 40	0, 60
Prix bas	60, 0	30, 30

3. Théorie des jeux non coopératifs

3.1. Introduction

3.2. Jeux avec décisions simultanées

3.2.1. Représentation

3.2.2. Stratégies pures

3.2.3. Stratégies mixtes

3.3. Jeux avec décisions séquentielles

3.2.2. Stratégies pures

- **Ce jeu a-t-il une solution d'équilibre ?**

  – **Méthode d'élimination par itération des stratégies strictement dominées**

3.2.2. Stratégies pures

Entreprise B

Entreprise A		*Prix élevé*	*Prix bas*
	Prix élevé	40, 40	0, 60
	Prix bas	60, 0	30, 30

3.2.2. L'équilibre de Nash en stratégies pures

- Pour conclure, la seule solution raisonnable du jeu est que les deux entreprises fixent un prix bas

- L'issue du jeu est (*30*,*30*)

- On appelle cette issue ***l'équilibre de Nash*** à la suite de **John Nash** (Prix Nobel 1994) qui l'inventa en 1951.

3.2.2. L'équilibre de Nash en stratégies pures

- **Définition 2**

3.2.2. Stratégies pures

- **Remarques**
  - Un équilibre obtenu par élimination des stratégies dominées est toujours un équilibre de Nash
  - La réciproque n'est toutefois pas vraie
  - On peut aussi trouver des stratégies *faiblement* dominées
  - **Définition 3.**

3.2.2. L'équilibre de Nash en stratégies pures

Entreprise B

Entreprise A		*Prix élevé*	*Prix bas*
	Prix élevé	40, 40	30, 60
	Prix bas	60, 0	30, 30

La stratégie *Prix élevé* de l'entreprise A devient une stratégie faiblement dominée

3.2.2. L'équilibre de Nash en stratégies pures

- **Un deuxième jeu**
  - Un couple souhaite sortir un soir
  - Les deux aimeraient être ensemble
  - Mais *Lui* préfèrerait aller au cinéma
  - Et *Elle* préfèrerait aller au théâtre

➲ **Jeu de coordination de type « bataille des sexes »**

3.2.2. Stratégies pures

Elle

Lui

	Cinéma	*Théâtre*
Cinéma	2, 1	0, 0
Théâtre	0, 0	1, 2

3.2.2. L'équilibre de Nash en stratégies pures

- **Un deuxième jeu**
  - Existe-t-il des stratégies strictement dominées ?
  - Existe-t-il des stratégies faiblement dominées ?

➲ **Méthode de croisement des meilleures ripostes**

3.2.2. L’équilibre de Nash en stratégies pures

- **Remarques**
  - En théorie des jeux non-coopératifs, il peut y avoir multiplicité des équilibres
  - Le modélisateur a proposé des critères de raffinement des choix
    - Pareto-dominance et dominance par le risque
    - Point focal…

3.2.2. L'équilibre de Nash en stratégies pures

- **Un troisième jeu : le jeu du dilemme du prisonnier**
  – Deux hommes sont arrêtés après avoir commis un crime
  – La police n'a aucune preuve contre eux
  – Ils sont interrogés dans deux pièces séparées et ne peuvent pas communiquer entre eux

3.2.2. L'équilibre de Nash en stratégies pures

- Le procureur propose un marché à chacun des prisonniers, qui peuvent soit dénoncer ou l'autre, soit se taire :
  - Si l'un dénonce l'autre et si l'autre se tait : celui qui dénonce l'autre est libéré, celui qui se tait est lourdement condamné (5 ans de prison)
  - Si chacun dénonce l'autre : ils sont condamnés mais avec remise pour leur coopération (2 ans de prison)
  - Si les deux se taisent : ils auront un an de prison

3.2.2. L'équilibre de Nash en stratégies pures

Prisonnier 2

Prisonnier 1

	Dénonce	*Se tait*
Dénonce	(-2, -2)	(0, -5)
Se tait	(-5, 0)	(-1, -1)

3.2.2. L'équilibre de Nash en stratégies pures

Application 1. Guerre froide
URSS/EU

URSS

Etats-Unis

	Construire un arsenal	*Désarmer*
Construire un arsenal	(-2, -2)	(0, -5)
Désarmer	(-5, 0)	(-1, -1)

3.2.2. L'équilibre de Nash en stratégies pures

Application 2. *Cartel*

Firme 2

Firme 1

	Tricher	*Respecter l'accord*
Tricher	(-2, -2)	(0, -5)
Respecter l'accord	(-5, 0)	(-1, -1)

3.2.2. L'équilibre de Nash en stratégies pures

- Les joueurs peuvent-ils choisir une solution Pareto-optimale ?
  - Il faut des jeux répétés à l'infini
  - *Folk theorem*

    Pour un jeu infiniment répété, toute stratégie qui donne un gain au moins égal à celui qu'on obtiendrait avec l'équilibre de Nash du jeu de base peut être un équilibre possible, si la préférence pour le présent n'est pas trop forte

3. Théorie des jeux non coopératifs

3.1. Introduction

3.2. Jeux avec décisions simultanées

3.2.1. Représentation

3.2.2. L'équilibre de Nash en stratégies pures

3.2.3. L'équilibre de Nash en stratégies mixtes

3.3. Jeux avec décisions séquentielles

3. Théorie des jeux non coopératifs

3.2.3. L'équilibre de Nash en stratégies mixtes

3.2.3.1. Introduction

- Il n'est pas rare qu'il n'existe pas d'équilibre de Nash pour un jeu particulier. Un exemple bien connu est le jeu des « **matching pennies** ». Deux joueurs annoncent simultanément pile ou face. Si les annonces sont identiques, le joueur 1 reçoit 100 € que lui paie le joueur 2; si les annonces ne concordent pas, c'est 1 qui verse 100 € à 2.

1 \ 2	P	F
P	(100;-100)	(-100;100)
F	(-100;100)	(100;-100)

Ce jeu, qui est un jeu à somme nulle, ne possède pas d'équilibre de Nash en stratégies pures.

⇒ Recours à des **stratégies mixtes**.

3.2.3.1. Introduction

- **Définition 4.**

- **Principes de base**
  - Comme il n’est pas possible de déterminer la meilleure réponse aux décisions des autres (def. équi. de Nash), les joueurs vont attribuer des probabilités aux comportements stratégiques des autres.
  - Comme si c’était la Nature qui allait décider à la place de l’autre : mécanisme aléatoire qui décide pour les joueurs.
  - Chaque joueur vise maintenant à maximiser ses gains espérés en choisissant la meilleure « loterie » possible, c’est-à-dire la meilleure stratégie mixte.

3. Théorie des jeux non coopératifs

3.2.3. L'équilibre de Nash en stratégies mixtes

3.2.3.1. Introduction

3.2.3.2. Fonctions de réaction et équilibre

3.2.3.3. Théorème de Nash

3.2.3.4. Application

3.2.3.2. Fonctions de réaction et équilibre

- ***Un premier exemple : bataille des sexes …d'un vieux couple***

E / L	T	F
T	(2;0)	(0;2)
F	(0;1)	(1;0)

«Elle» ne veut surtout plus passer ses soirées avec «Lui», alors qu'il est toujours romantique …

3.2.3.2. Fonctions de réaction et équilibre

* Soit P_L la stratégie mixte de Lui et P_E la stratégie mixte de Elle, avec :

$P_L = (q, 1\text{-}q)$ et $P_E = (t, 1\text{-}t)$, q et t $\in [0,1]$

E / L	t T	1-t F
q T	(2;0)	(0;2)
1-q F	(0;1)	(1;0)

* Les espérances d'utilité de Lui pour ses deux stratégies pures T et F sont alors données par :

$U_L\{P_L , P_E \} = 2.t + 0.(1\text{-}t) = 2.t$ pour T

$U_L\{P_L , P_E \} = 0.t + 1.(1\text{-}t) = 1\text{-} t$ pour F

Face à un comportement aléatoire de Elle, Lui va choisir T si :

$2.t > (1\text{-}t) \Rightarrow$ **t > 1/3**

3.2.3.2. Fonctions de réaction et équilibre

* Il choisira tout le temps d'aller au Théâtre ($q = 1$) si Elle va au Théâtre plus d'une soirée sur trois ($t > 1/3$). Ou il choisira tout le temps d'aller au foot ($q = 0$) si Elle va au foot plus de deux soirées sur trois ($1\text{-}t > 2/3$).

* Par contre, si $t = 1/3$, Il est indifférent entre T et F : dans ce cas, toute combinaison de ces stratégies est équivalente pour lui.

* Sa fonction de réaction est donnée alors par :

$$\boxed{\begin{array}{l} q^*(t) = 1 \text{ si } t > 1/3 \\ q^*(t) = [0,1] \text{ si } t = 1/3 \\ q^*(t) = 0 \text{ si } t < 1/3 \end{array}}$$

E / L	**t** T	**1-t** F
q T	(2;0)	(0;2)
1-q F	(0;1)	(1;0)

* De même, on peut déterminer les espérances d'utilité de Elle pour ses deux stratégies pures T et F sont alors données par :

$$U_E\{P_L , P_E\} = 0.q + 1.(1\text{-}q) = 1 - q \qquad \text{pour T}$$
$$U_E\{P_L , P_E\} = 2.q + 0.(1\text{-}q) = 2.q \qquad \text{pour F}$$

Face à un comportement aléatoire de Lui, Elle va choisir T si :

$$(1- q) > 2.q \Rightarrow \mathbf{q < 1/3}$$

3.2.3.2. Fonctions de réaction et équilibre

* Sa fonction de réaction est donnée alors par :

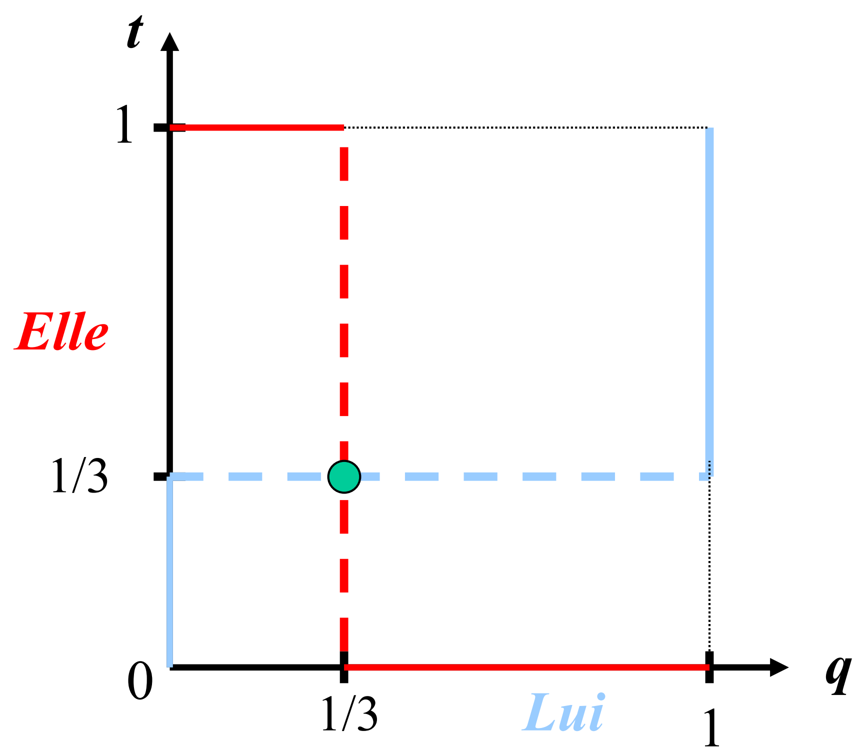
Rappel pour Lui :

$q^*(t) = 1$ si $t > 1/3$
$q^*(t) = [0,1]$ si $t = 1/3$
$q^*(t) = 0$ si $t < 1/3$

$t^*(q) = 1$ si $q < 1/3$
$t^*(q) = [0,1]$ si $q = 1/3$
$t^*(q) = 0$ si $q > 1/3$

L \ E	t T	1-t F
q T	(2;0)	(0;2)
1-q F	(0;1)	(1;0)

Représentation graphique des fonctions de meilleure réponse :



Un point d'intersection entre les deux fonctions de réactions :
(1/3 ; 1/3)

Cet **équilibre** correspond à :
- Lui va au théâtre une soirée sur trois.
- Elle va au théâtre une soirée sur trois.

Un autre exemple de bataille des sexes :

E / L	**t** T	**1-t** F
q T	(2;1)	(0;0)
1-q F	(0;0)	(1;2)

Deux équilibres de Nash en stratégie pure : (T;T) et (F;F)

Un troisième équilibre ?

* Les espérances d'utilité de Lui pour ses deux stratégies pures T et F sont alors données par :

$$U_L\{P_L , P_E\} = 2.t + 0.(1-t) = 2.t \qquad \text{pour T}$$
$$U_L\{P_L , P_E\} = 0.t + 1.(1-t) = 1- t \qquad \text{pour F}$$

Face à un comportement aléatoire de Elle, Lui va choisir T si :

$$2.t > (1-t) \Rightarrow \mathbf{t > 1/3}$$

* Sa fonction de réaction est donnée alors par :

$$\boxed{\begin{array}{l} q^*(t) = 1 \text{ si } t > 1/3 \\ q^*(t) = [0,1] \text{ si } t = 1/3 \\ q^*(t) = 0 \text{ si } t < 1/3 \end{array}}$$

* De même, on peut déterminer les espérances d'utilité de Elle pour ses deux stratégies pures T et F sont alors données par :

$U_E\{P_L, P_E\} = 1.q + 0.(1-q) = q$ pour T

$U_E\{P_L, P_E\} = 0.q + 2.(1-q) = 2.(1-q)$ pour F

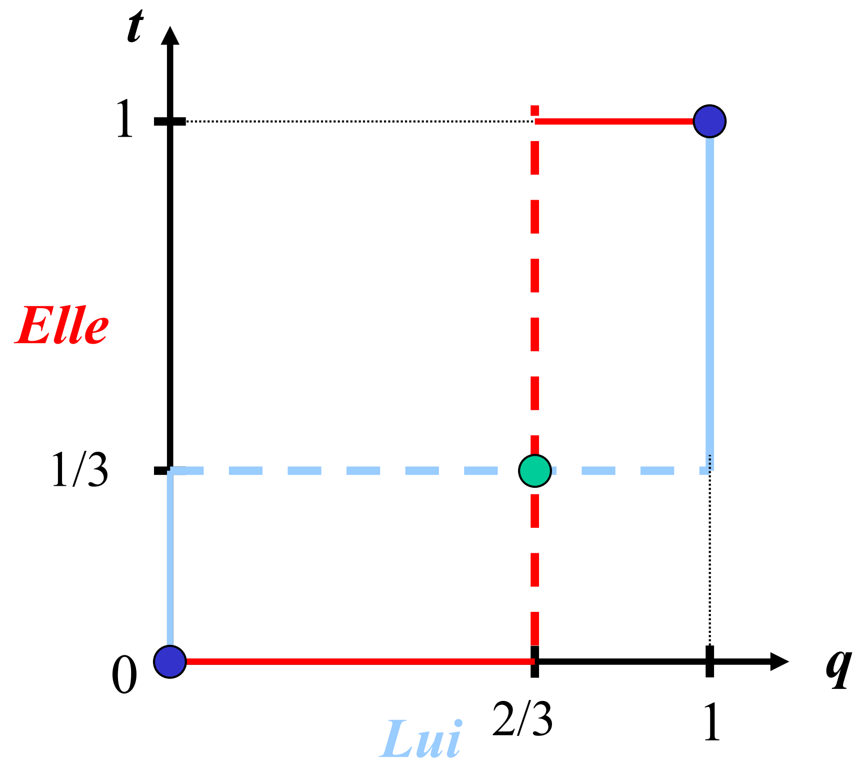
⇨ Face à un comportement aléatoire de Lui, Elle va choisir T si :

$q > 2.(1- q) \Rightarrow$ **$q > 2/3$**

* Sa fonction de réaction est donnée alors par :

$$\boxed{\begin{array}{l} t^*(q) = 1 \text{ si } q > 2/3 \\ t^*(q) = [0,1] \text{ si } q = 2/3 \\ t^*(q) = 0 \text{ si } q < 2/3 \end{array}}$$

Représentation graphique des fonctions de meilleure réponse :



Un point d'intersection entre les deux fonctions de réactions :

(1/3 ; 2/3)

+ les deux autres équilibres de Nash :

Lui

$q^*(t) = 1$ si $t > 1/3$
$q^*(t) = [0,1]$ si $t = 1/3$
$q^*(t) = 0$ si $t < 1/3$

Elle

$t^*(q) = 1$ si $q > 2/3$
$t^*(q) = [0,1]$ si $q = 2/3$
$t^*(q) = 0$ si $q < 2/3$

3. Théorie des jeux non coopératifs

3.2.3. L'équilibre de Nash en stratégies mixtes

3.2.3.1. Introduction

3.2.3.2. Fonctions de réaction et équilibre

3.2.3.3. Théorème de Nash

3.2.3.4. Application

3.2.3.3. Théorème de Nash

* La non-existence de l'équilibre de Nash correspond à l'absence d'intersection entre les fonctions de meilleure réponse.

* S'il y a des fortes discontinuités dans les fonctions de réaction, cela devient tout à fait possible. En réalité, on est assuré d'avoir au moins un équilibre de Nash si :

1. L'ensemble de stratégies de chaque joueur est convexe et compact,

et si

2. la fonction de paiement de chaque joueur est continue et concave en la propre stratégie du joueur.

Théorème (Nash) : Tout jeu fini possède au moins un équilibre de Nash si les stratégies mixtes sont autorisées.

Remarque : l'existence d'équilibre de Nash en stratégie pure n'élimine pas les possibilités d'équilibre en stratégie mixte.

3. Théorie des jeux non coopératifs

3.2.3. Stratégies mixtes

3.2.3.1. Introduction

3.2.3.2. Fonctions de réaction et équilibre

3.2.3.3. Théorème de Nash

3.2.3.4. Application

3.2.3.4. Application

- Soient deux singes, un grand et un petit, tous deux intéressés par les fruits d'un arbre
- Si les deux singes grimpent à l'arbre, secouent la branche, redescendent et mangent le fruit, grand singe obtient 5 Kc (kilocalories) et petit singe 3 Kc : grand singe obtenant presque tout.
- Si seulement le grand singe grimpe à l'arbre – petit singe attendant en bas que le fruit tombe – grand singe obtient 4 Kc et petit singe 4 Kc.
- Si petit singe grimpe seul, grand singe obtient 9 Kc et petit singe 1 Kc.
- Si aucun signe ne grimpe, naturellement, les gains sont nuls

3. Théorie des jeux non coopératifs

3.1. Introduction

3.2. Jeux avec décisions simultanées

<u>3.3. Jeux avec décisions séquentielles</u>

3. Théorie des jeux non coopératifs

3.3. Jeux avec décisions séquentielles

3.3.1. Représentation et concepts

3.3.2. L'équilibre de Nash parfait en sous-jeux

3.3.3. Applications

3.3.1. Représentation et concepts

- Un jeu sous forme extensive représente
  - le nombre de joueurs
  - quel joueur joue pour chaque étape du jeu
  - les actions de chaque joueur
  - ce que les joueurs savent au moment où ils jouent
  - les gains de chaque joueur pour chaque issue possible du jeu

3.3.1. Représentation et concepts

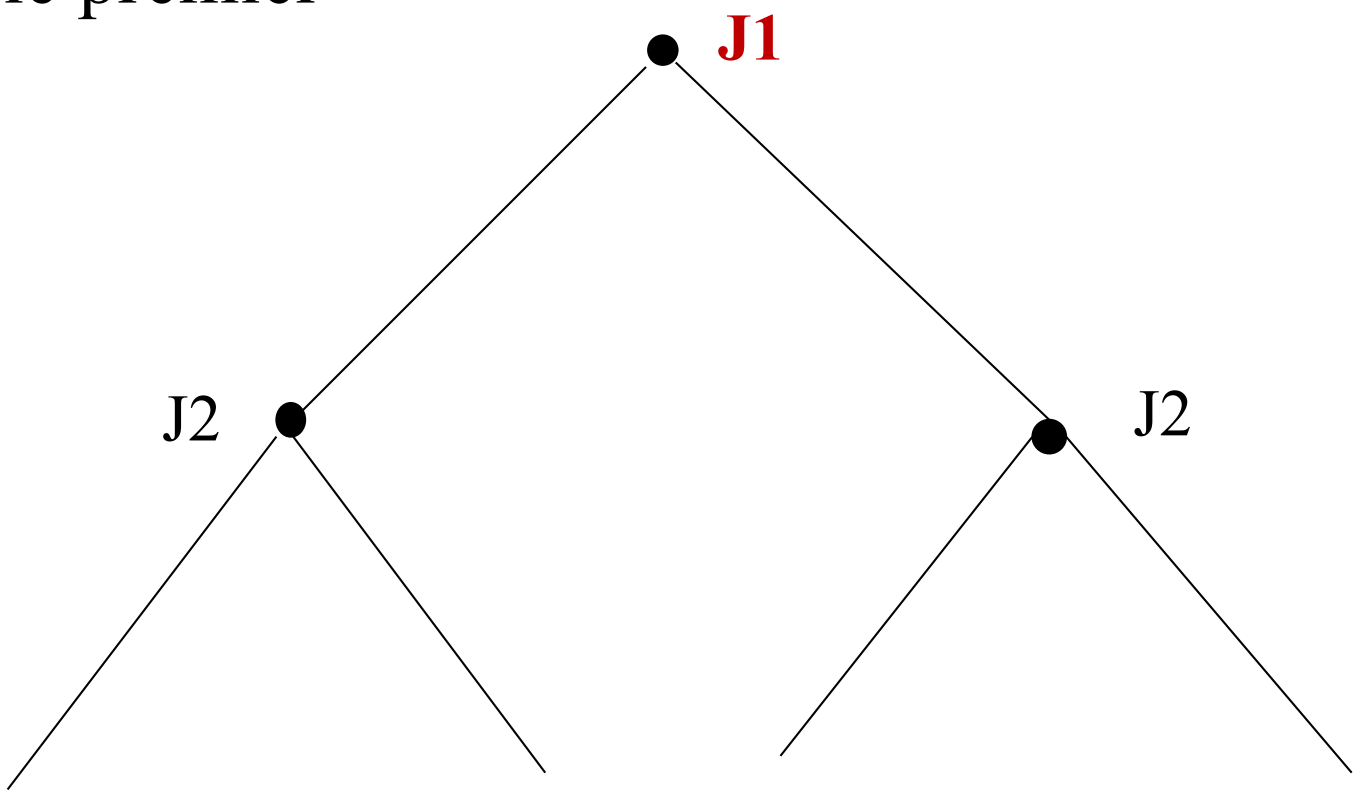
- Un exemple
  - Deux joueurs
  - Le joueur 1 peut jouer *D* (« droite ») ou *G* (« gauche »)
  - Le joueur 2 peut jouer *d* ou *g*

3.3.1. Représentation et concepts

- Supposons que le joueur 1 joue le premier.
- On peut alors dresser un *arbre de jeu* et on appelle le jeu qu'il définit un jeu de forme extensive
- Au sommet de cet arbre se trouve un *nœud de départ* et deux branches appelées *G* (*gauche*) et *D* (*droite*).
- Au bas du jeu se trouvent les *nœuds terminaux*.
- A chaque nœud terminal se trouve le *gain* des joueurs, **par ordre d'apparition dans le jeu.**

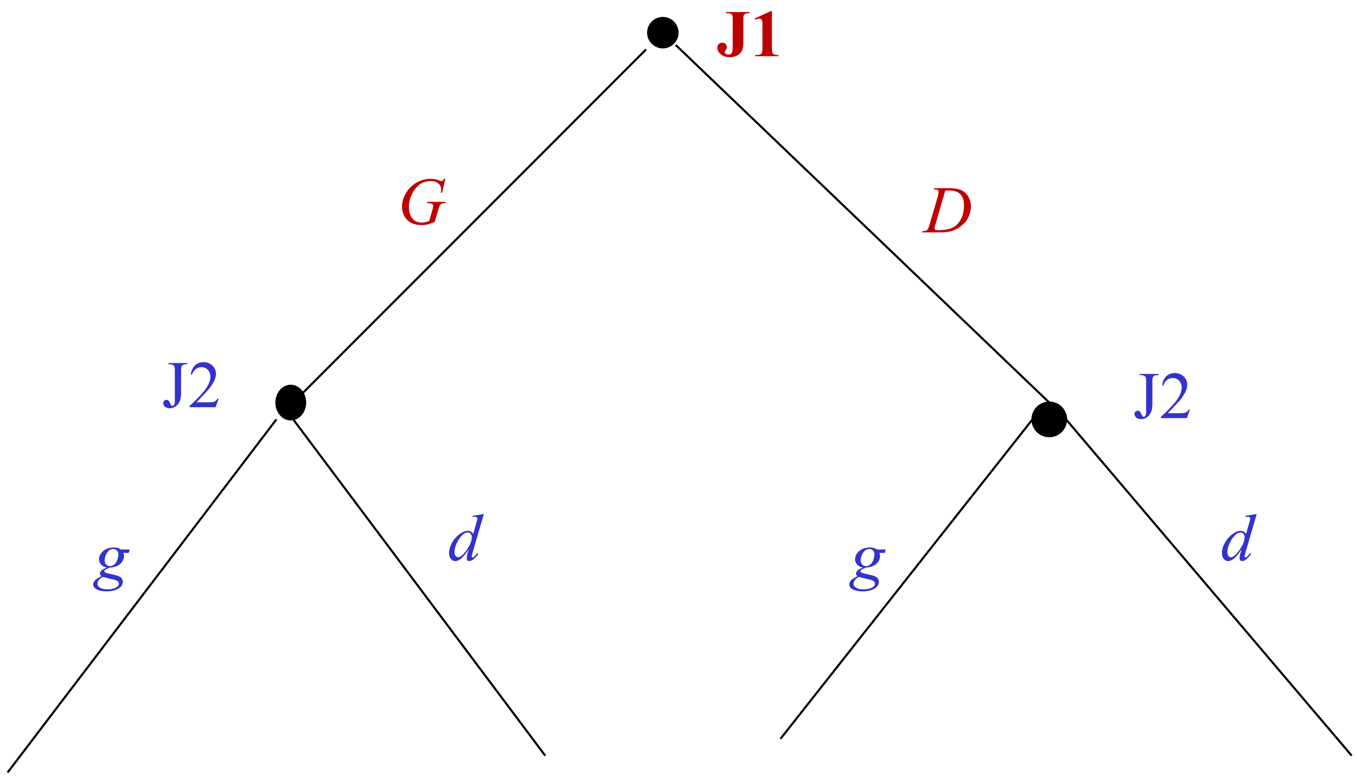
3.3.1. Représentation et concepts

J1 joue le premier



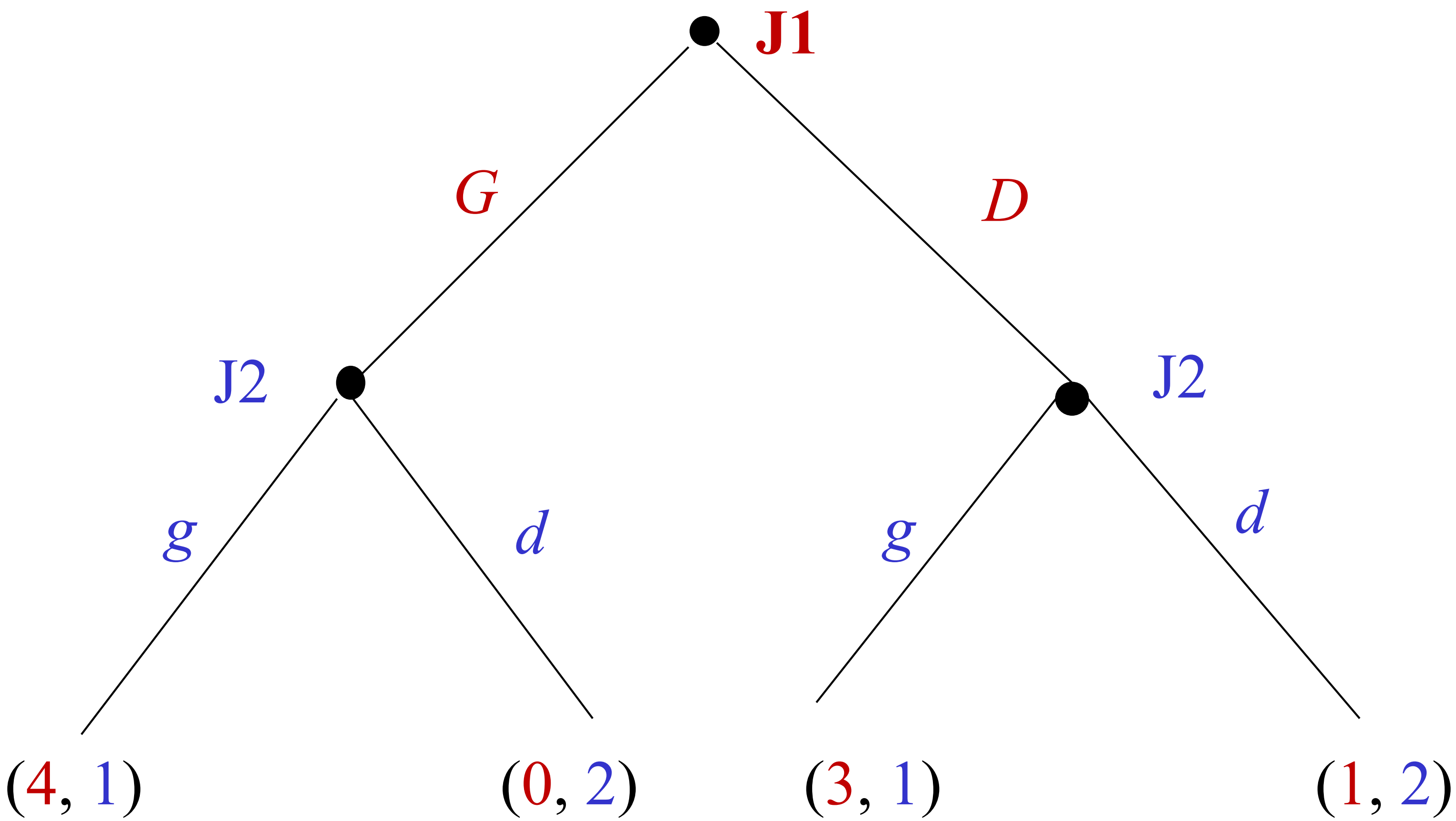
3.3.1. Représentation et concepts

J1 joue le premier



3.3.1. Représentation et concepts

J1 joue le premier



3.1.1. Représentation et concepts

Décision ≠ Stratégie

- J1 a *deux* actions qui sont aussi ses stratégies possibles : « aller à gauche » ou « aller à droite », soit **J1 = {G, D}**

- J2 a deux actions *g* et *d* mais *quatre* stratégies possibles :
  - Aller à gauche quoi que fasse J1
  - Aller à droite quoi que fasse J1
  - Aller à gauche si J1 va à gauche, aller à droite si J2 va à droite
  - Aller à gauche si J1 va à droite, aller à droite si J2 va à gauche
  - Soit **J2 = {(g si G, g si D), (d si G, d si D), (g si G, d si D), (g si D, d si G)}**

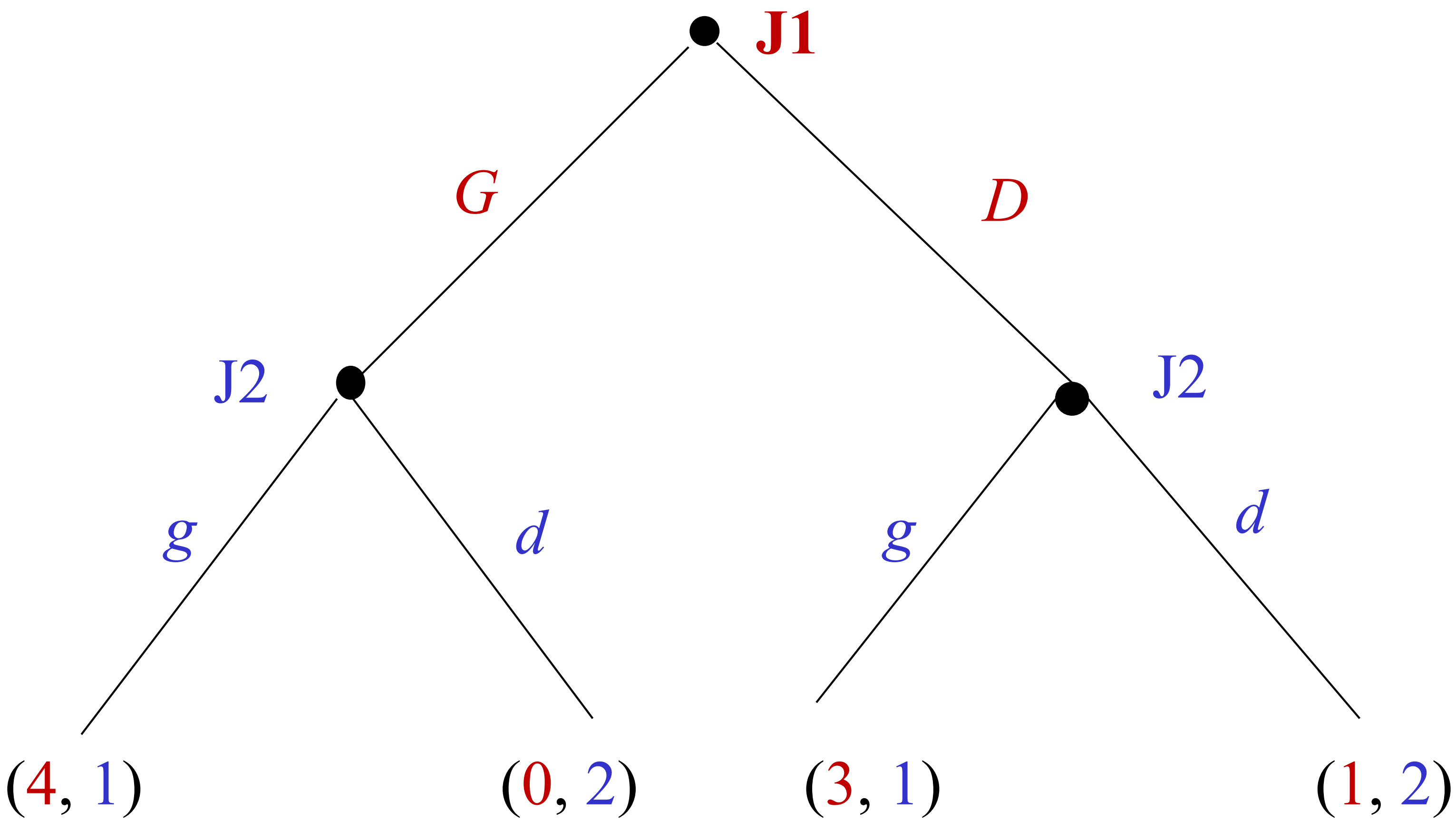
3.3.1. Représentation et concepts

Information parfaite, Information imparfaite

- **Définition 5**

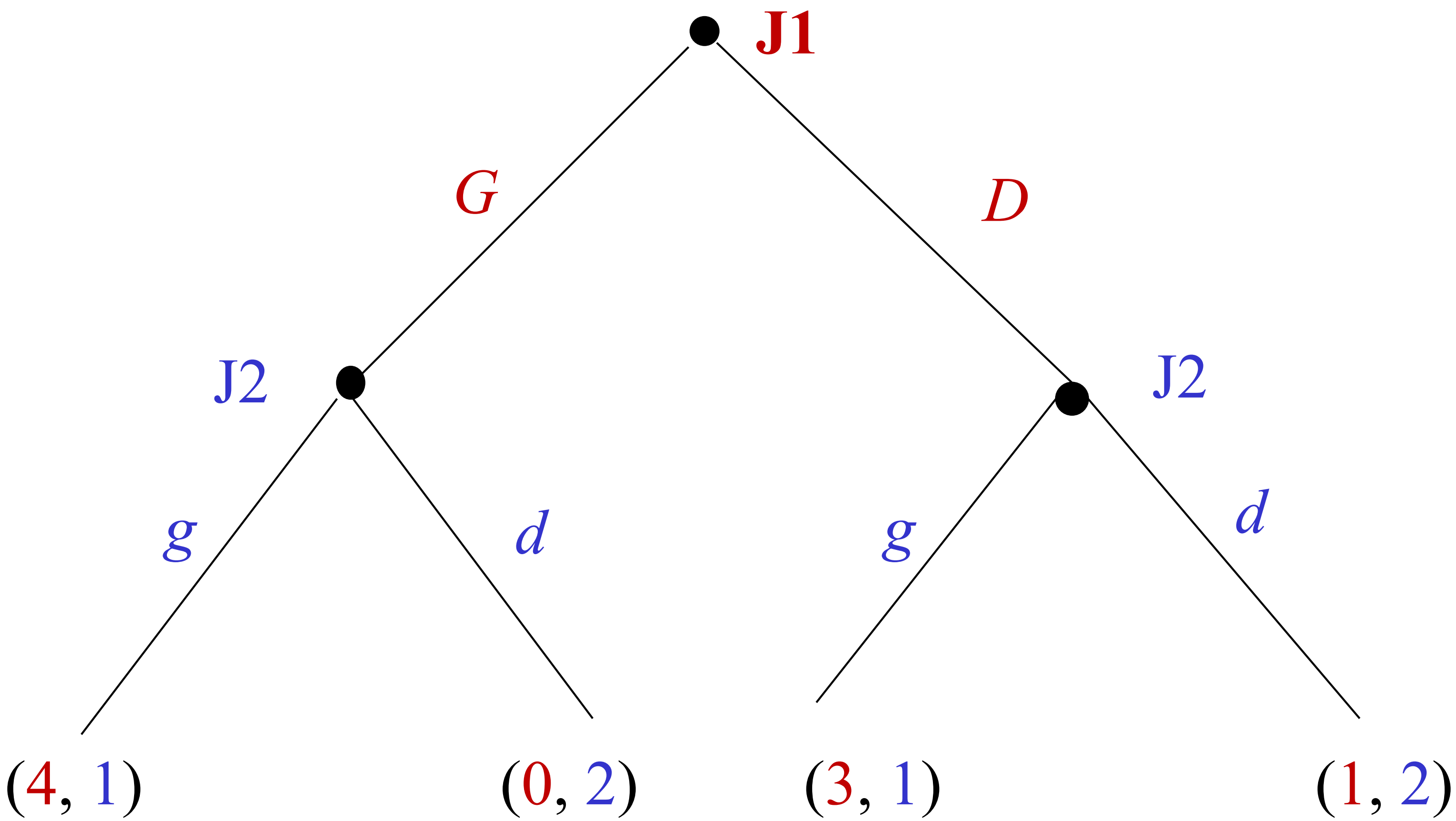
3.3.1. Représentation et concepts

Jeu à information parfaite



3.3.1. Représentation et concepts

Jeu à information imparfaite



3.3.1. Représentation et concepts

- **Jeu avec décisions séquentielles et information imparfaite**
  - Dans ce cas on fait appel au concept d'ensemble d'informations. C'est un ensemble de nœuds pour lequel :
    - Le même joueur joue
    - Le joueur qui joue ne sait pas à quel nœud particulier il se trouve

3.3.1. Représentation et concepts

- **Remarque : jeu sous forme extensive et jeu sous forme normale**
  - Tout jeu sous forme extensive peut s'écrire sous forme normale si toutes les stratégies possibles de joueurs sont spécifiées de manière suffisamment exhaustive

J 2

J1

	g	*d*
G	(4, 1)	(0, 2)
D	(3, 1)	(1, 2)

3. Théorie des jeux non coopératifs

3.3. Jeux avec décisions séquentielles

3.3.1. Représentation et concepts

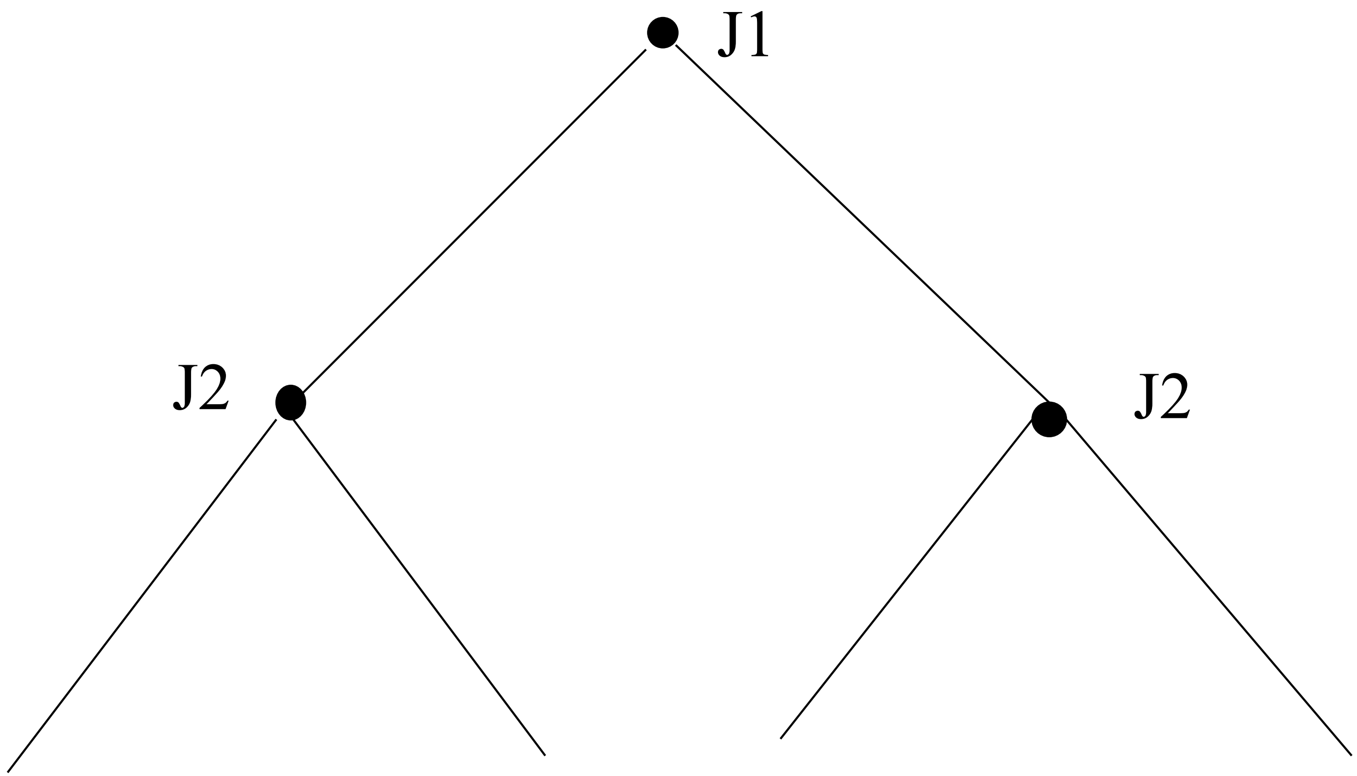
3.3.2. L'équilibre de Nash parfait en sous-jeux

3.3.3. Applications

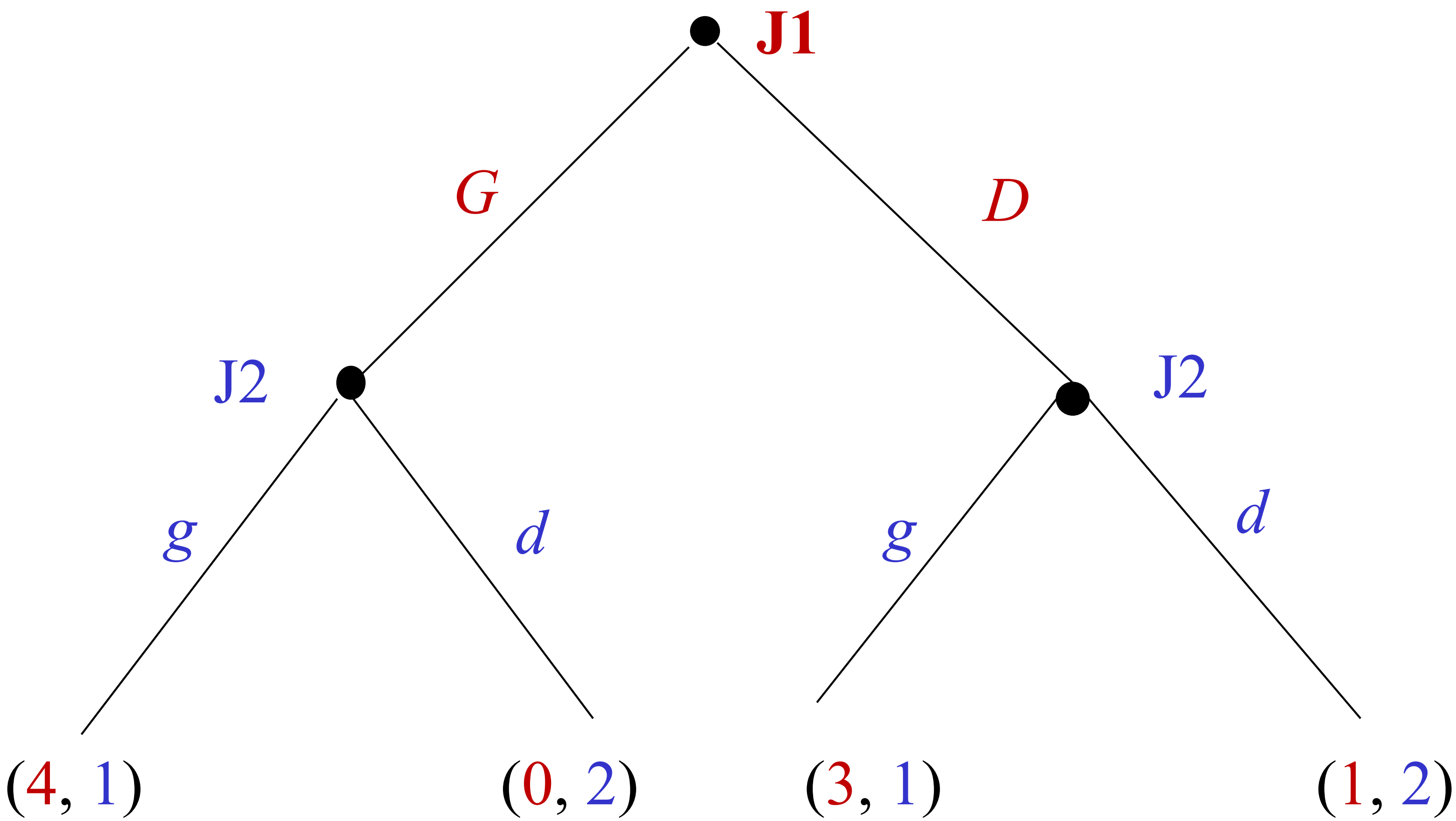
3.3.2. L'équilibre de Nash parfait en sous-jeux

- On utilise la méthode d'**induction à rebours**

3.3.2. L'équilibre de Nash parfait en sous-jeux



3.3.2. L'équilibre de Nash parfait en sous-jeux



3.3.2. L'équilibre de Nash parfait en sous-jeux

- Cet équilibre est un ***équilibre parfait en sous-jeux***
    - **Définition 7**.

  – Un équilibre parfait en sous-jeux est toujours un équilibre de Nash, mais la réciproque n'est pas vraie

3.3.3. Applications

- **Un jeu d'entrée sur un marché**
  - Deux entreprises, une firme installée et un nouvel entrant
  - L'entrant joue en premier, la firme installée en second
  - La firme installée dégage un profit de monopole si elle reste seule sur le marché (gain de 8)
  - Elle cherche à dissuader l'entrant en lui annonçant que s'il entre sur le marché il fera face à une guerre des prix conduisant à des profits négatifs pour chacune des deux firmes (perte de -2 pour chacune)
  - Si la firme installée s'accomode de l'entrée, les deux entreprises peuvent se partager sur le marché et dégager des profits positifs (gain de 2)

➲**Représenter l'arbre de jeu et trouver l'équilibre de Nash du jeu**

3.3.3. Applications

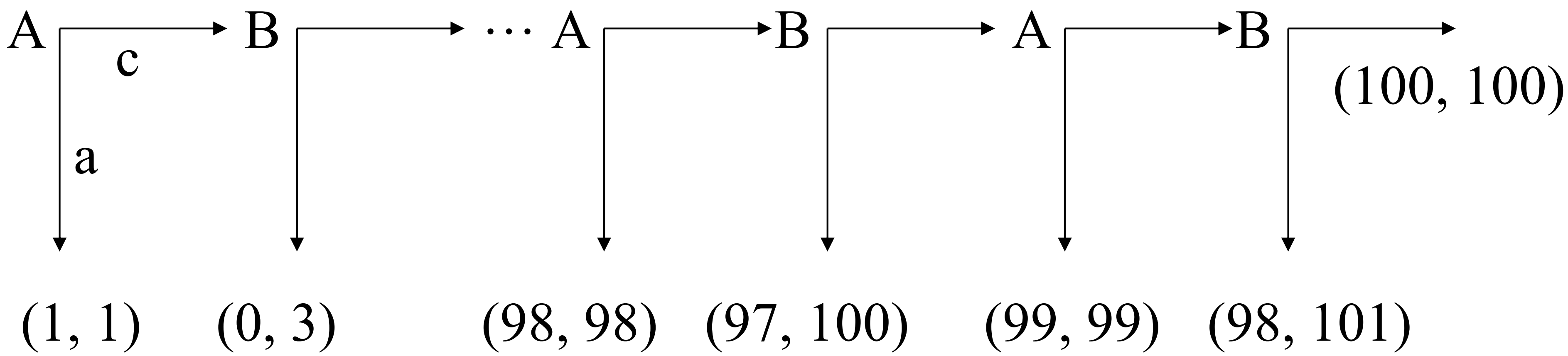
3.3.3. Applications

3.3.3. Applications

3.3.3. Applications

- **Le jeu du mille-pattes** (Rosenthal, 1981)
  - ✓Jeu séquentiel
  - ✓ A chaque nœud, chaque joueur peut décider de s'arrêter ou de continuer
  - ✓ Il y a un nombre fini de périodes de jeu

3.3.3. Applications



Le jeu du mille-pattes (Rosenthal, 1981)

3.3.3. Applications.

Menace crédible et engagement stratégique

- La notion de menace crédible en théorie des jeux
- Une menace crédible dans un jeu de prix limite : l'engagement stratégique

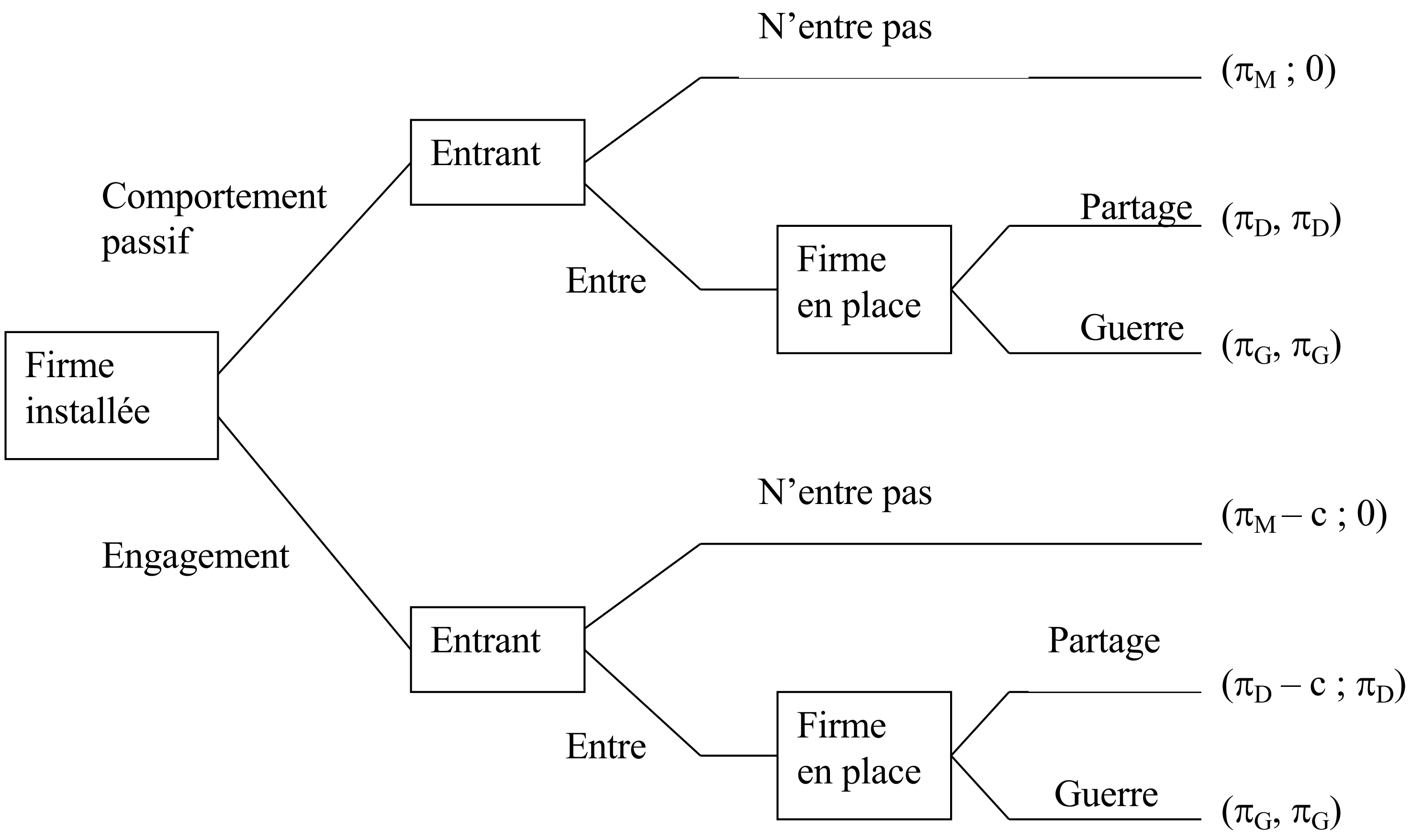
3.3.3. Applications

Reformulation du prix – limite sous forme d'un jeu avec engagement irréversible

- Les gains des joueurs :
  - si l'entrant potentiel n'entre pas, la firme installée gagne un profit de monopole π_M.
  - si l'entrée a lieu, la firme installée peut choisir entre :
    - un partage du marché, où les duopoleurs obtiennent un profit π_D
    - une guerre, mutuellement destructrice, où les deux firmes ont des pertes d'un montant π_G.
- On suppose donc logiquement que $\pi_M > \pi_D > 0 > \pi_G$

3.3.3. Applications

Reformulation du prix – limite sous forme d'un jeu avec engagement irréversible



4. L'oligopole non-coopératif

Introduction

4.1. La concurrence par les quantités

4.1.1. Le duopole de Cournot

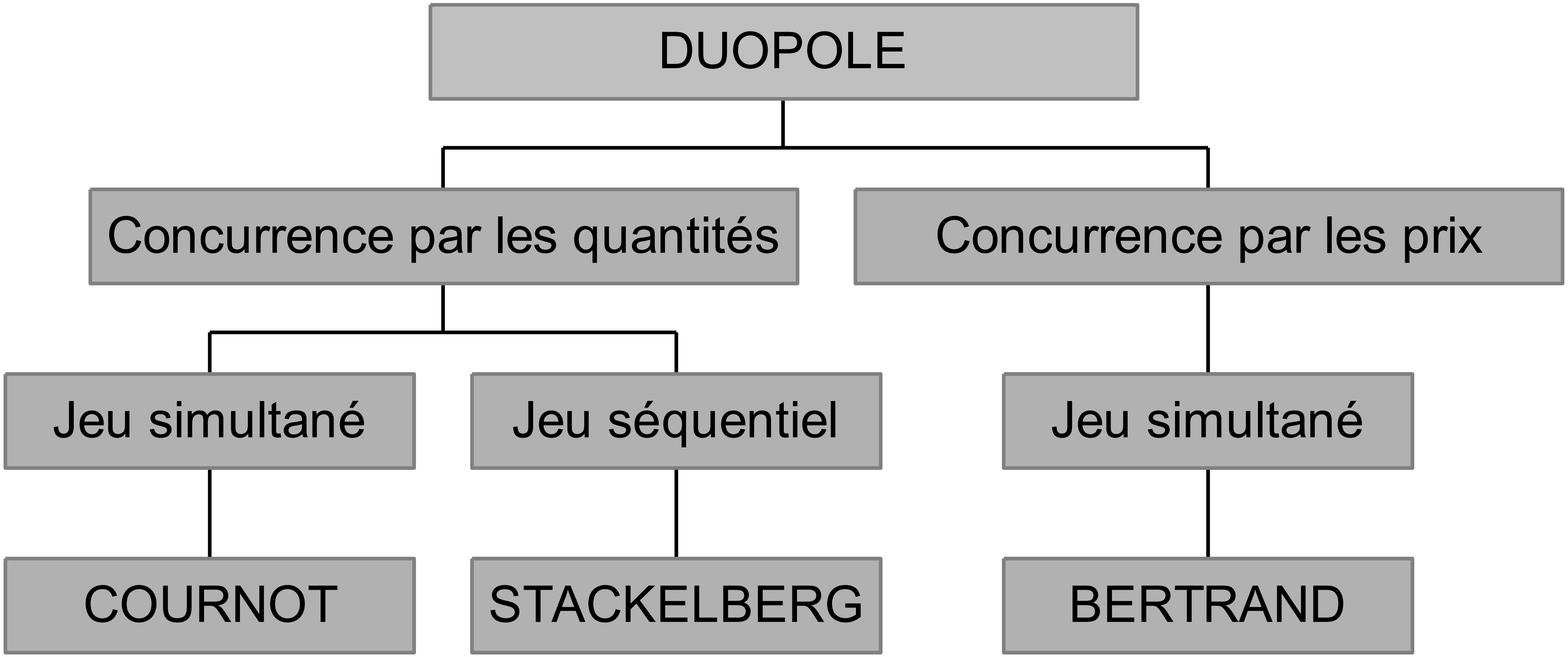
4.1.2. Le duopole de Stackelberg

4.2. La concurrence par les prix

4.2.1. Le duopole de Bertrand

Introduction

Modèles d'oligopole



Introduction

Augustin Cournot

Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses (1838)

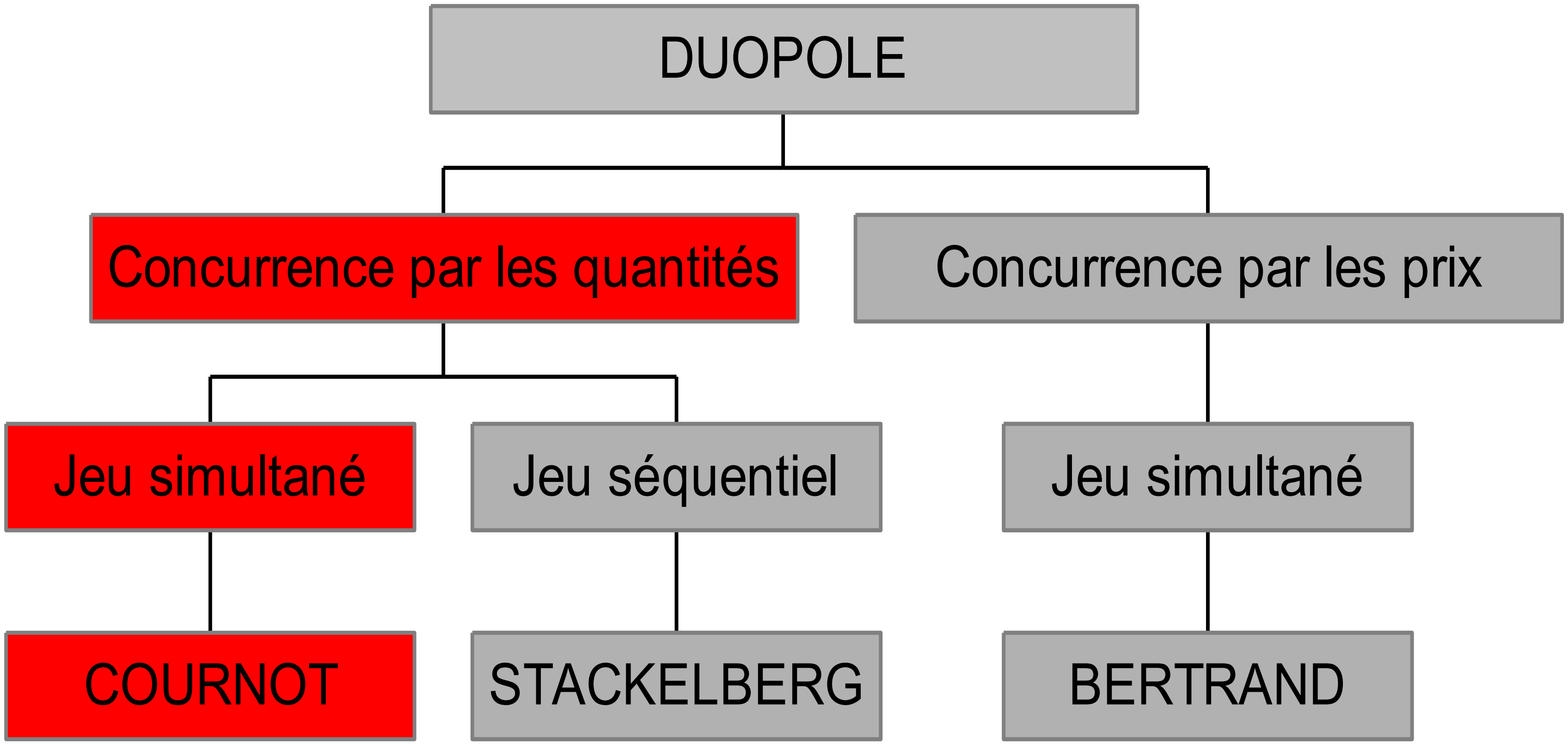
Joseph Bertrand

Théorie mathématique de la richesse sociale, 1883

Heinrich Freiherr von Stackelberg

Grundlagen einer reinen Kostentheorie (Foundations of Cost Theory), 1932

Modèles d'oligopole



4.1.1. Le duopole de Cournot

a. Description et hypothèses du modèle

b. L'équilibre de Cournot-Nash

c. Analyse graphique

d. Représentation sous forme normale

e. Application numérique

Conclusions

4.1.1. Le duopole de Cournot

a. Description et hypothèses du modèle

- Deux firmes produisant un bien homogène en quantités q_1 et q_2
- Fonctions de coût total identiques $C_i\,(q_i)$.
- La production totale s'élève à $Q = q_1 + q_2$.

a. Description et hypothèses du modèle

- **H1** Demande composée par un très grand nombre d'acheteurs (atomicité des demandeurs) $P = P(Q) = P(q_1 + q_2)$
- **H2** La variable stratégique de chacune des firmes sur le marché est la quantité d'output produite et non pas les prix
- **H3** Le bien produit dans la branche est parfaitement homogène

a. Description et hypothèses du modèle

- **H4** Chaque firme a pour objectif la maximisation de son profit en fonction de la quantité qu'elle choisit de mettre sur le marché
- **H5** Chaque firme va maximiser son profit en faisant une conjecture sur la production de son concurrent en réaction à son offre propre.
  - On parle de *variation conjecturale*.
  - L'hypothèse de Cournot dans son modèle est que cette variation conjecturale est *nulle*.

a. Description et hypothèses du modèle

Programme de maximisation des deux firmes

- Objectif de chaque firme : maximiser son profit en fonction de la quantité qu'elle choisit de mettre sur le marché
- Les deux firmes choisissent leurs quantités vendues de façon non coopérative

Le programme de maximisation de la firme 1 est **:**

$$Max\Pi_{(q_1,q_2)} = P(Q).q_1 - C_1(q_1) = P(q_1+q_2).q_1 - C_1(q_1)$$

Même raisonnement pour la firme 2 :

$$Max\Pi_{(q_1,q_2)} = P(Q).q_2 - C_2(q_2) = P(q_1+q_2).q_2 - C_2(q_2)$$

4.1.1. Le duopole de Cournot

a. Description et hypothèses du modèle

<u>b. L'équilibre de Cournot-Nash</u>

c. Analyse graphique

d. Représentation sous forme normale

e. Application numérique

Conclusions

b. L'équilibre de Cournot-Nash

- Pour déterminer l'équilibre de Cournot, chaque entreprise va maximiser son profit pour un niveau de production donné du concurrent
- Donc l'équilibre va vérifier les deux conditions de premier ordre suivantes :

$$\frac{\partial \Pi_1(q_1+q_2)}{\partial q_1} = \frac{\partial P(q_1+q_2)}{\partial q_1}.q_1 + P(q_1+q_2) - \frac{\partial C_1(q_1)}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_2(q_1+q_2)}{\partial q_2} = \frac{\partial P(q_1+q_2)}{\partial q_2}.q_2 + P(q_1+q_2) - \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2} = 0$$

b. L'équilibre de Cournot-Nash

- La condition de premier ordre pour la firme 1 exprime sa production optimale en fonction de ses anticipations sur le choix de la firme 2.

- C'est ce que l'on appelle la *fonction de réaction de la firme 1*

- On a donc une fonction de réaction pour chacune des deux firmes.

b. L'équilibre de Cournot-Nash

- Il vient alors :

$$\frac{\partial P(q_1+q_2)}{\partial q_1}.q_1+P(q_1+q_2)=\frac{\partial C_1(q_1)}{\partial q_1}\Rightarrow q_1=R_1(q_2)$$

$$\frac{\partial P(q_1+q_2)}{\partial q_2}.q_2+P(q_1+q_2)=\frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2}\Rightarrow q_2=R_2(q_1)$$

b. L'équilibre de Cournot-Nash

- Les fonctions de réaction des deux firmes ont été obtenues et on cherche à déterminer les quantités optimales pour chacune.

- Ces deux fonctions de réaction sont les fonctions de meilleure réponse à la quantité offerte par l'autre firme.

b. L’équilibre de Cournot-Nash

- Pour trouver l’équilibre, il faut remplacer q_2 dans la fonction de réaction de la firme 2 qui dépend de q_1 : $q_1 = R_1(R_2(q_1)) \Rightarrow q_1^*$

- Puis on remplace q_1^* dans la fonction de réaction de la firme 2 et on trouve q_2^*

b. L'équilibre de Cournot-Nash

- L'équilibre (q_1^*, q_2^*) est un **équilibre de Cournot – Nash**.
- On représente souvent le couple (Q*, P*) avec $Q^* = q_1^* + q_2^*$ et $P^* = P(q_1^* + q_2^*)$

- Graphiquement, l'équilibre (q_1^*, q_2^*) correspond à l'intersection des fonctions de réaction.

4.1.1. Le duopole de Cournot

a. Description et hypothèses du modèle

b. L'équilibre de Cournot-Nash

<u>c. Analyse graphique</u>

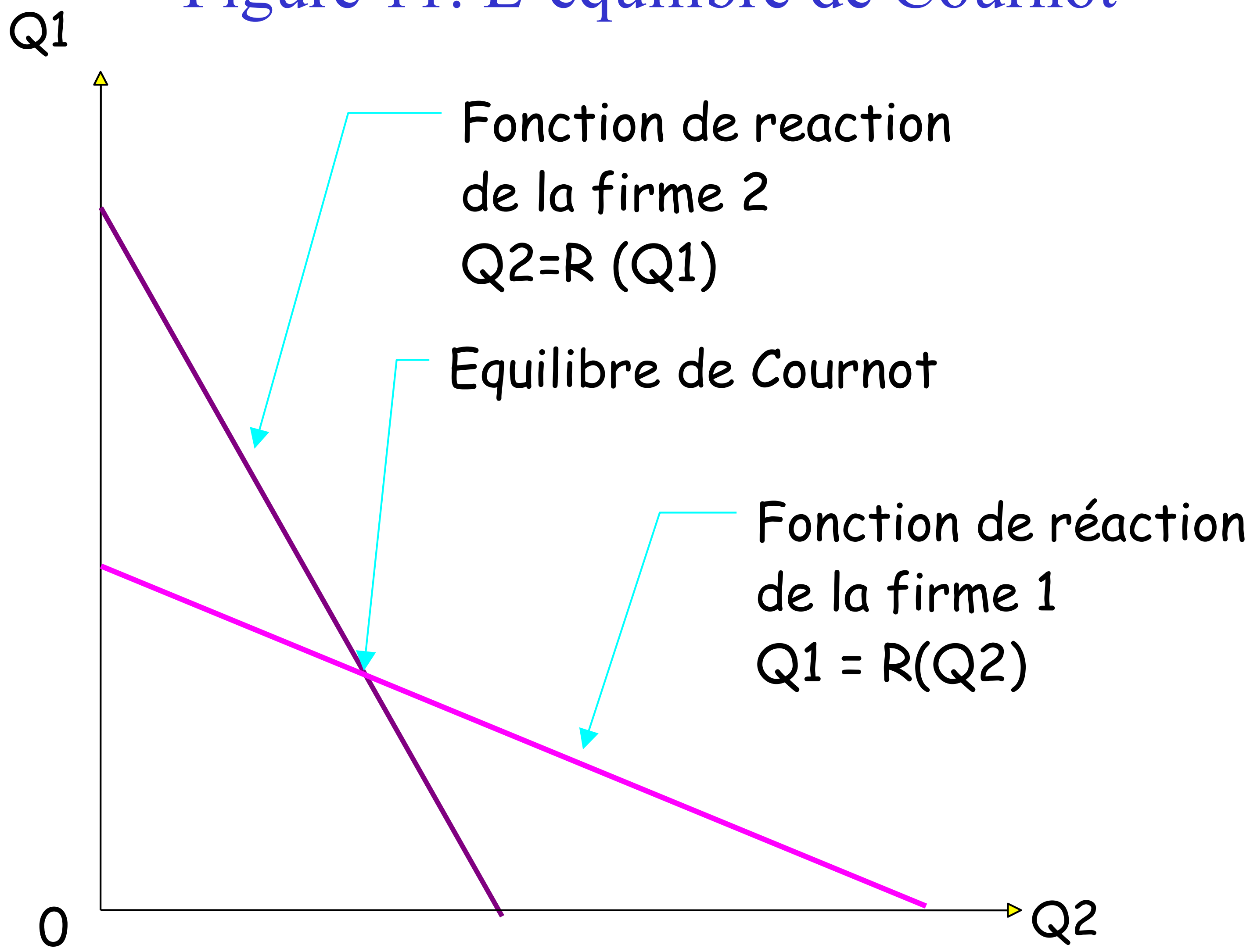
d. Représentation sous forme normale

e. Application numérique

Conclusions

c. Analyse graphique

Figure 11. L'équilibre de Cournot



c. Analyse graphique

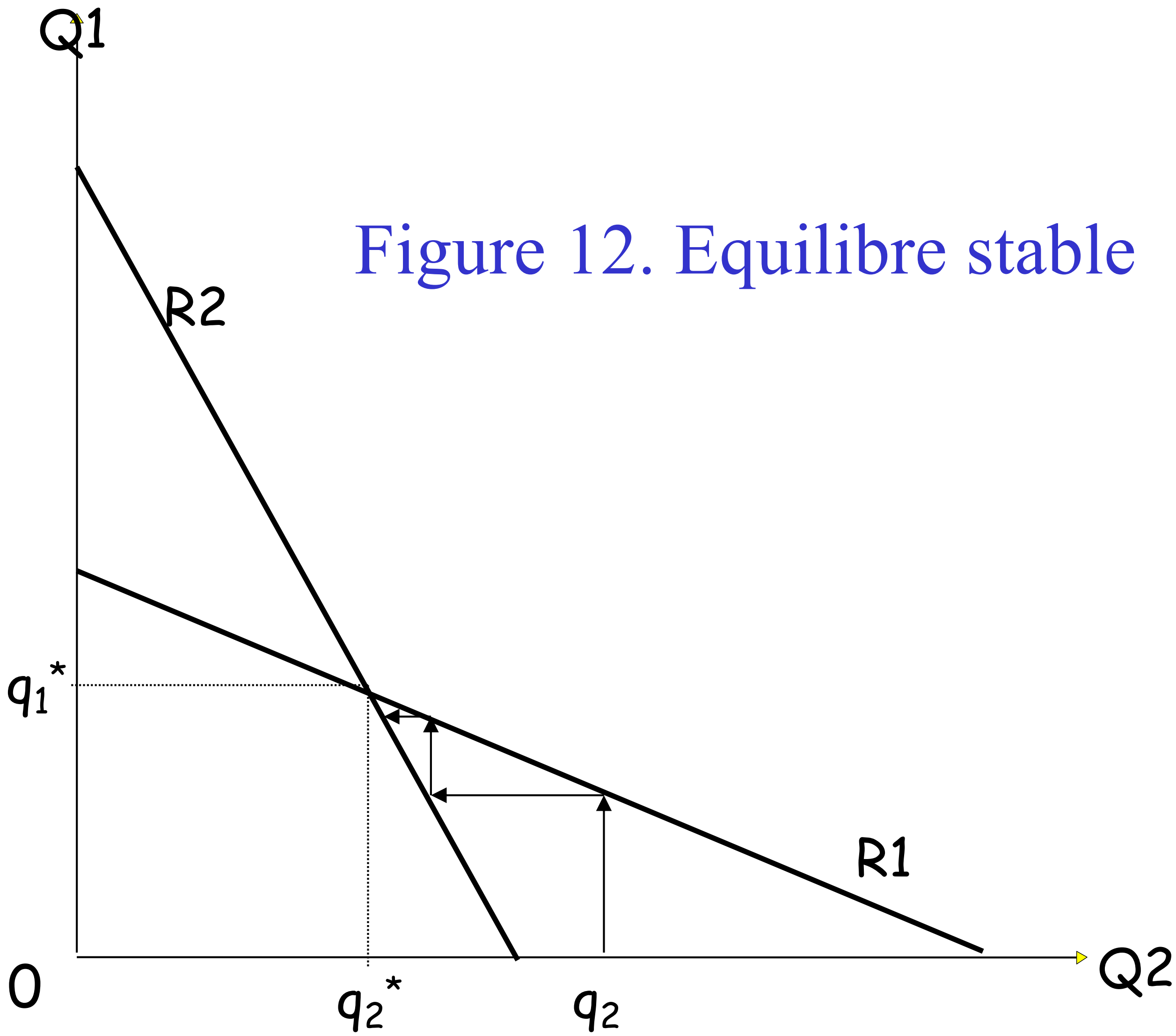
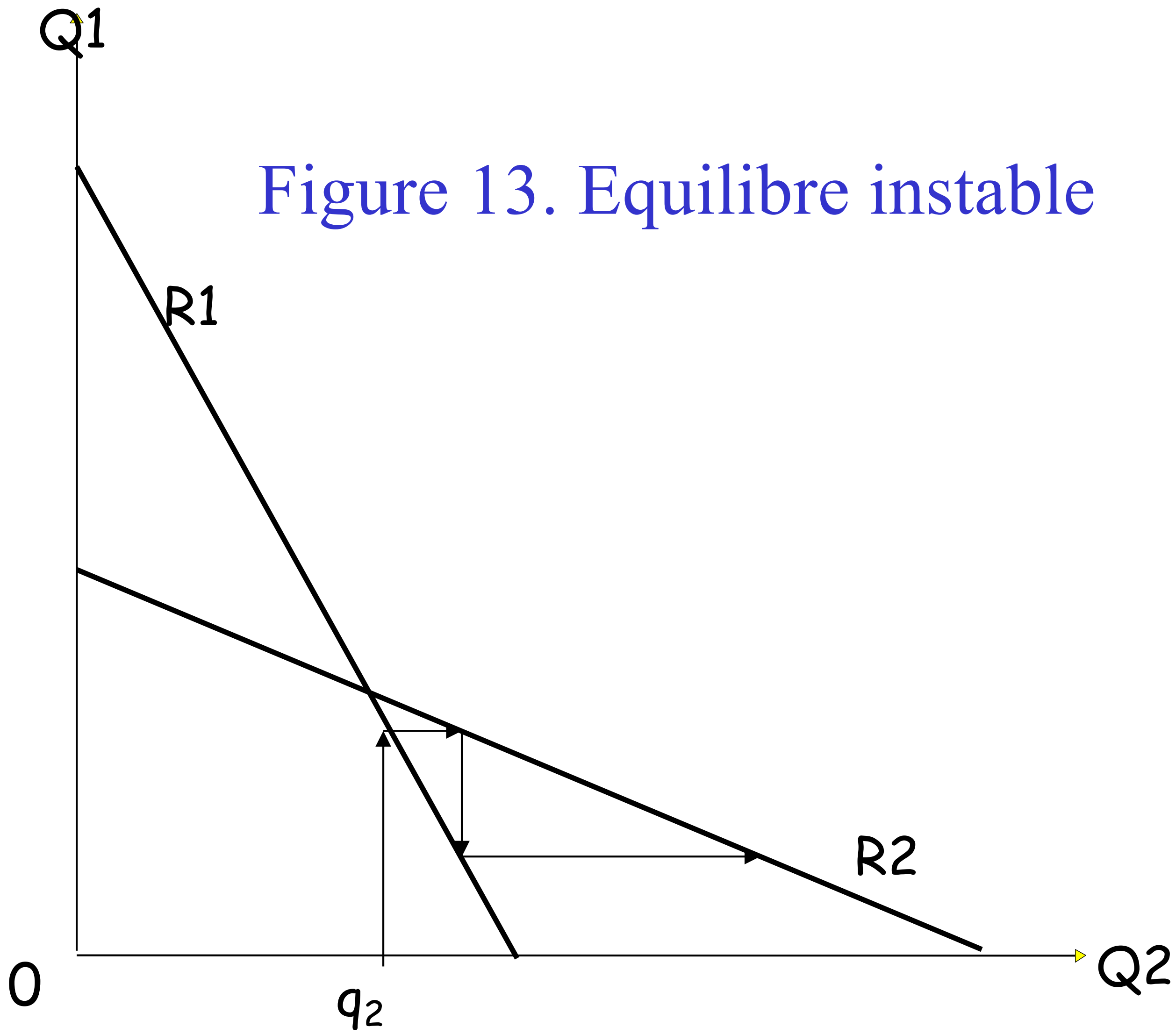


Figure 12. Equilibre stable

c. Analyse graphique

Figure 13. Equilibre instable



4.1.1. Le duopole de Cournot

a. Description et hypothèses du modèle

b. L'équilibre de Cournot-Nash

c. Analyse graphique

<u>d. Représentation sous forme normale</u>

e. Application numérique

Conclusions

d. Jeu de Cournot

Entreprise 2

Entreprise 1

	Produire q_2^1	*Produire* q_2^2
Produire q_1^1	$(\Pi_{q_1^1}, \Pi_{q_2^1})$	$(\Pi_{q_1^1}, \Pi_{q_2^2})$
Produire q_1^2	$(\Pi_{q_1^2}, \Pi_{q_2^1})$	$(\Pi_{q_1^2}, \Pi_{q_2^2})$

4.1.1. Le duopole de Cournot

a. Description et hypothèses du modèle

b. L'équilibre de Cournot-Nash

c. Analyse graphique

d. Représentation sous forme normale

<u>e. Application numérique</u>

Conclusions

e. Application numérique

- Deux entreprises 1 et 2 récoltent et vendent de la canne à sucre sur un même périmètre géographique
- Ce marché respecte les hypothèses de Cournot : information complète, absence de nouvelles entrées, produit homogène et une seule période.
- Supposons d'abord que les entreprises s'entendent sur les prix et les quantités, formant un cartel
- Elles vont donc maximiser leur profit joint comme le ferait un monopole

e. Application numérique

- Posons $Q = q_1 + q_2$
- D telle que $P = 1 - 0{,}001\ Q$, $C(q) = 0{,}28\ q$
- $\Pi = (1 - 0{,}001\ Q)Q - 2\ C\ (Q/2)$ où $q_i = Q/2$
- Max Π tel que $\dfrac{\partial \Pi}{\partial Q} = 0$

$\Rightarrow Q_M =$, $P_M =$, et $\Pi =$

e. Application numérique

Supposons maintenant que les firmes 1 et 2 rompent leur entente et décident de vendre en concurrence la canne à sucre, passant alors du monopole au duopole

e. Application numérique

- *Programme de maximisation des firmes*
  - Rappel : D telle que P = 1 – 0,001 Q, C(q) = 0,28 q
  - Le programme de maximisation de la firme 1 est : $Max\Pi_{(q_1,q_2)} =$
  - Même raisonnement pour la firme 2 dont le programme de maximisation est :

$$Max\Pi_{(q_1,q_2)} =$$

e. Application numérique

- *Détermination de l'équilibre de Cournot Nash*
  - Calcul des fonctions de réaction

$$\frac{\partial \Pi_1(q_1+q_2)}{\partial q_1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Pi_2(q_1+q_2)}{\partial q_2} = 0 \quad \Rightarrow$$

e. Application numérique

- Pour trouver l'équilibre de Cournot-Nash, il reste à résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues constitué par les fonctions de réaction des deux firmes :

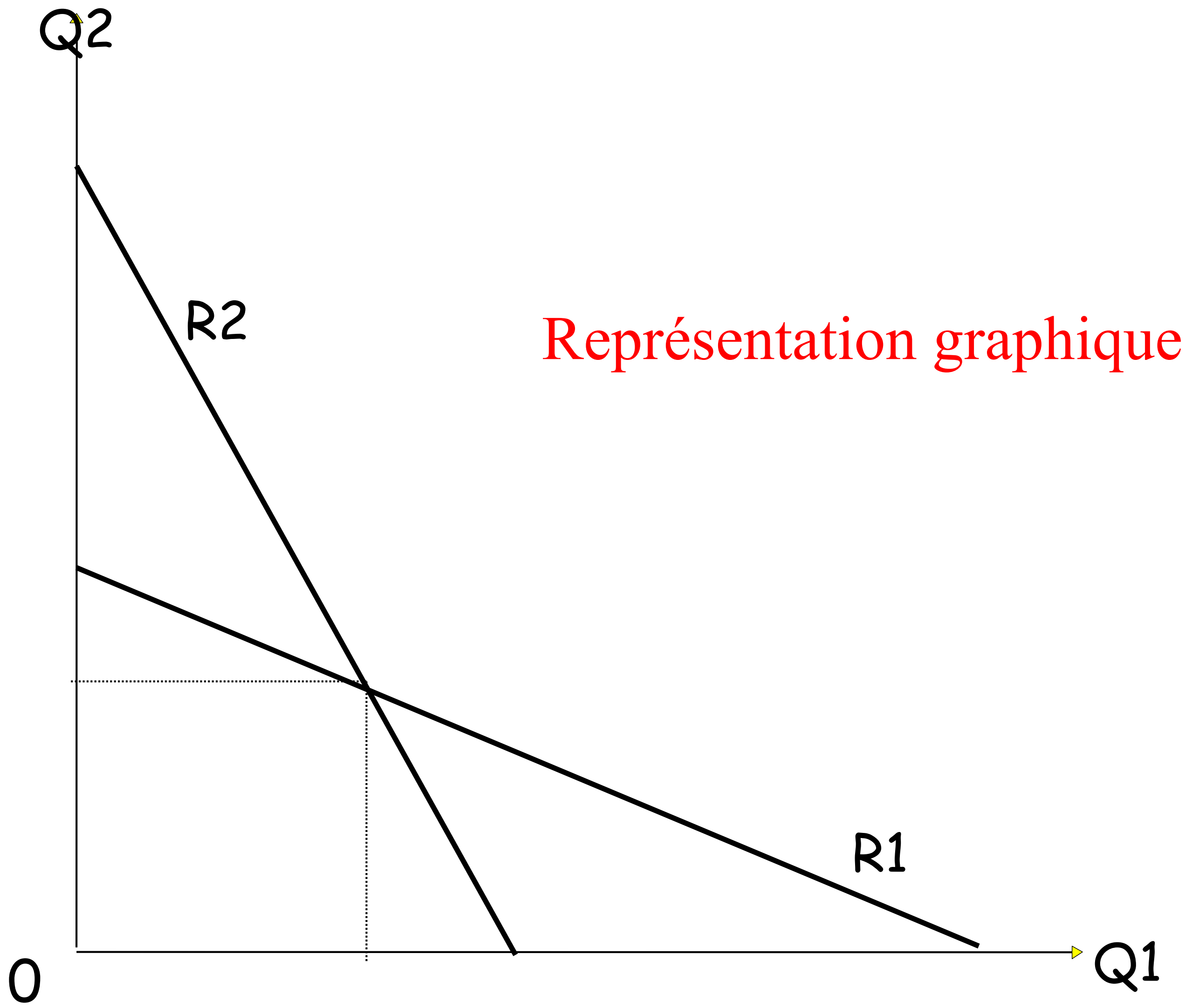
$$\begin{cases} q_1 = \\ q_2 = \end{cases} \qquad \Rightarrow q_1^* = q_2^* =$$

- On obtient :

$$Q_q^* = q_1^* + q_2^* = \qquad ; \; P_d^* = \qquad ;$$

$$\Pi_{d\,(tot)} =$$

e. Application numérique



Représentation graphique

e Application numérique

Jeu sous forme normale
(stratégique)

Entreprise 2

Entreprise 1		*Produire*	*Produire*
	Produire		
	Produire		

Conclusions

- **Résultat**

$$P_d < P_M,\ q_d > q_M \text{ et } \Pi_d < \Pi_M$$

  – L'équilibre Cournot-Nash de duopole s'établit à un prix intermédiaire entre le prix de monopole et le prix concurrentiel

  – *Idem* pour les quantités et les profits

Conclusions

- **Efficacité du duopole de Cournot**
  - Du point de vue de l'économie du bien-être
    - En situation de Cournot, le bien-être s'accroît avec le nombre des producteurs
    - Un oligopole de Cournot est préférable à une situation de monopole
  - Du point de vue de l'entreprise
    - Il est moins profitable d'être en situation de Cournot qu'en situation de monopole

4. L'oligopole non-coopératif

Introduction

4.1. La concurrence par les quantités

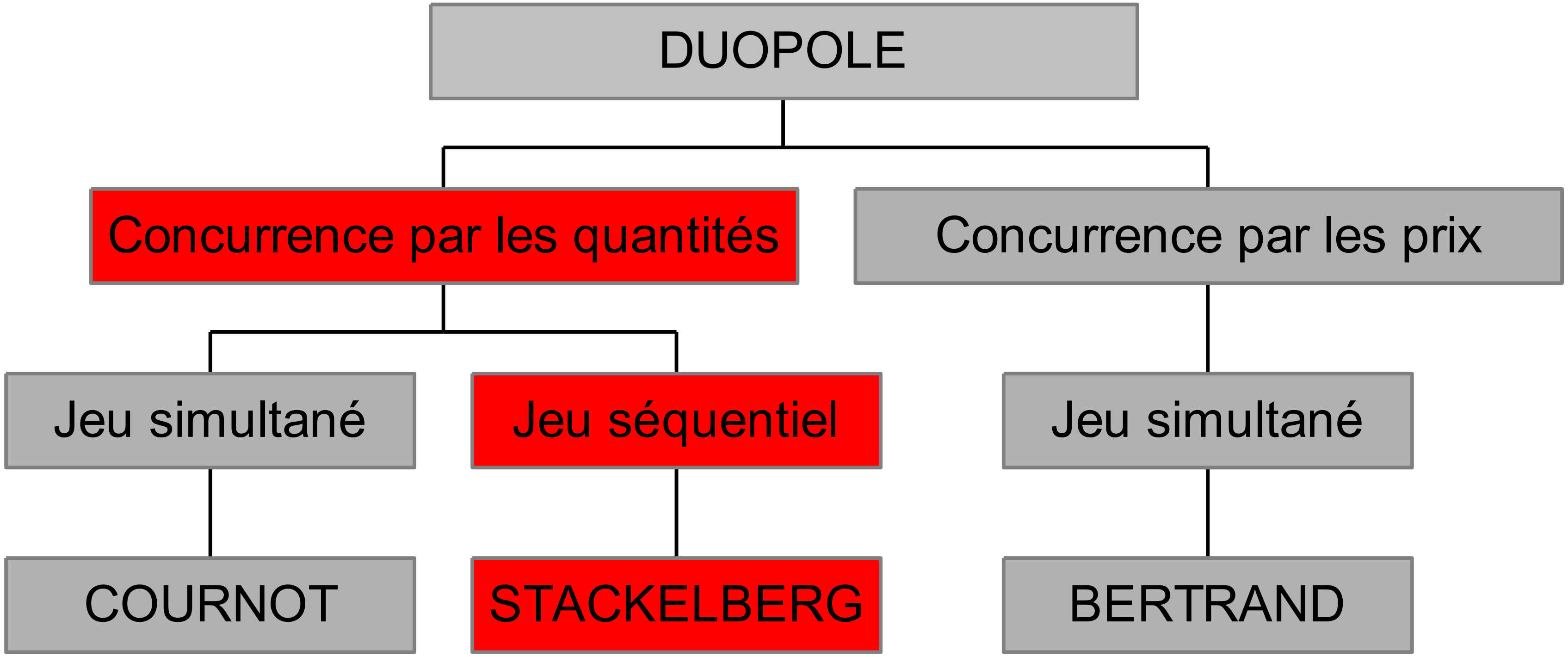
4.1.1. Le duopole de Cournot

<u>4.1.2. Le duopole de Stackelberg</u>

4.2. La concurrence par les prix

4.2.1. Le duopole de Bertrand

Modèles d'oligopole



Deuxième partie
L'interaction stratégique
L'oligopole non-coopératif

4.1.2. Le duopole de Stackelberg

a. Description et hypothèses de base

b. Détermination de l'équilibre

c. Analyse graphique

d. Représentation sous forme extensive

e. Application numérique

Conclusion

Deuxième partie
L'interaction stratégique
L'oligopole non-coopératif

4.1.2. Le duopole de Stackelberg

a. Description et hypothèses de base

b. Détermination de l'équilibre

c. Analyse graphique

d. Représentation sous forme extensive

e. Application numérique

Conclusion

a. Description et hypothèses du modèle

- Deux firmes produisant un bien homogène en quantités q_1 et q_2
- Fonctions de coût total identiques $C_i(q_i)$.
- La production totale s'élève à $Q = q_1 + q_2$.

a. Description et hypothèses du modèle

- **H1** Demande composée par un très grand nombre d'acheteurs (atomicité des demandeurs) $P = P(Q) = P\,(q_1 + q_2)$
- **H2** La variable stratégique de chacune des firmes sur le marché est la quantité d'output produite et non pas les prix
- **H3** Le bien produit dans la branche est parfaitement homogène

a. Description et hypothèses du modèle

- **H4** Chaque firme a pour objectif la maximisation de son profit en fonction de la quantité qu'elle choisit de mettre sur le marché
- **H5** La firme “ leader ” a une information complète sur la courbe de réaction de l'autre firme. La firme “ follower ” cherchera à maximiser son profit compte-tenu de la situation qui a été créée par la firme “ leader ”

a. Description et hypothèses du modèle

Programme de maximisation des deux firmes

- Objectif de chaque firme : maximiser son profit en fonction de la quantité qu'elle choisit de mettre sur le marché
- Les deux firmes choisissent leurs quantités vendues de façon non coopérative
- *Le programme de maximisation de la firme 1 est* **:**

$$Max\Pi_{(q_1,q_2)} = P(Q).q_1 - C_1(q_1) = P(q_1+q_2).q_1 - C_1(q_1)$$

- *Même raisonnement pour la firme 2 :*

$$Max\Pi_{(q_1,q_2)} = P(Q).q_2 - C_2(q_2) = P(q_1+q_2).q_2 - C_2(q_2)$$

Deuxième partie
L’interaction stratégique
L’oligopole non-coopératif

4.1.2. Le duopole de Stackelberg

a. Description et hypothèses de base

<u>b. Détermination de l'équilibre</u>

c. Analyse graphique

d. Représentation sous forme extensive

e. Application numérique

Conclusion

b. Détermination de l'équilibre

- Le leader choisira une quantité qui maximise le profit en prenant en considération la quantité qu'il escompte que le *follower* fixera en réaction à son propre choix.

- Le leader suppose que le *follower* voudra aussi maximiser son profit mais qu'il acceptera le choix de production du leader comme une donnée.

- Cette supposition permet au leader de prévoir le choix de production du *follower* et de le prendre en compte quand il choisira son propre niveau de production

b. Détermination de l'équilibre

- Pour déterminer l'équilibre, on doit calculer la fonction de réaction de la firme *follower* et maximiser le profit de la firme leader sachant comment la firme *follower* va réagir.

$$\frac{\partial \Pi_2(q_1+q_2)}{\partial q_2} = \frac{\partial P(q_1+q_2)}{\partial q_2}.q_2 + P(q_1+q_2) - \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2} = 0$$

  – Ou sous une autre forme : $\frac{\partial P(q_1+q_2)}{\partial q_2}.q_2+P(q_1+q_2)=\frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2}$

  – On a donc une fonction de réaction pour la firme « follower » : $q_2=R_2(q_1)$

b. Détermination de l'équilibre

Maximisation du profit de la firme « leader » : détermination de $(q_1)^*$

• Maintenant que nous connaissons la fonction de réaction de la firme « follower », il faut maximiser le profit de la firme « leader » :

$$\Pi_{1(q_1,q_2)} = P(Q).q_1 - C_1(q_1) = P\big(q_1 + R_2(q_1)\big).q_1 - C_1(q_1)$$

• D'où pour la maximisation : $\dfrac{\partial \Pi_1\big(q_1, R_2(q_1)\big)}{\partial q_1} = 0$

• On obtient ainsi directement q_1^*

b. Détermination de l'équilibre

Réponse de la firme follower

• En reportant cette valeur q_1^* dans la fonction de réaction de la firme *follower*, on obtient q_2^*

• L'équilibre sur le marché est un équilibre de Stackelberg et il sera représenté par (Q*, P*) avec $Q^*=q_1^*+q_2^*$ et $P^*=P(q_1^*+q_2^*)$

Deuxième partie
L’interaction stratégique
L’oligopole non-coopératif

4.1.2. Le duopole de Stackelberg

a. Description et hypothèses de base

b. Détermination de l'équilibre

c. Analyse graphique

d. Représentation sous forme extensive

e. Application numérique

Conclusion

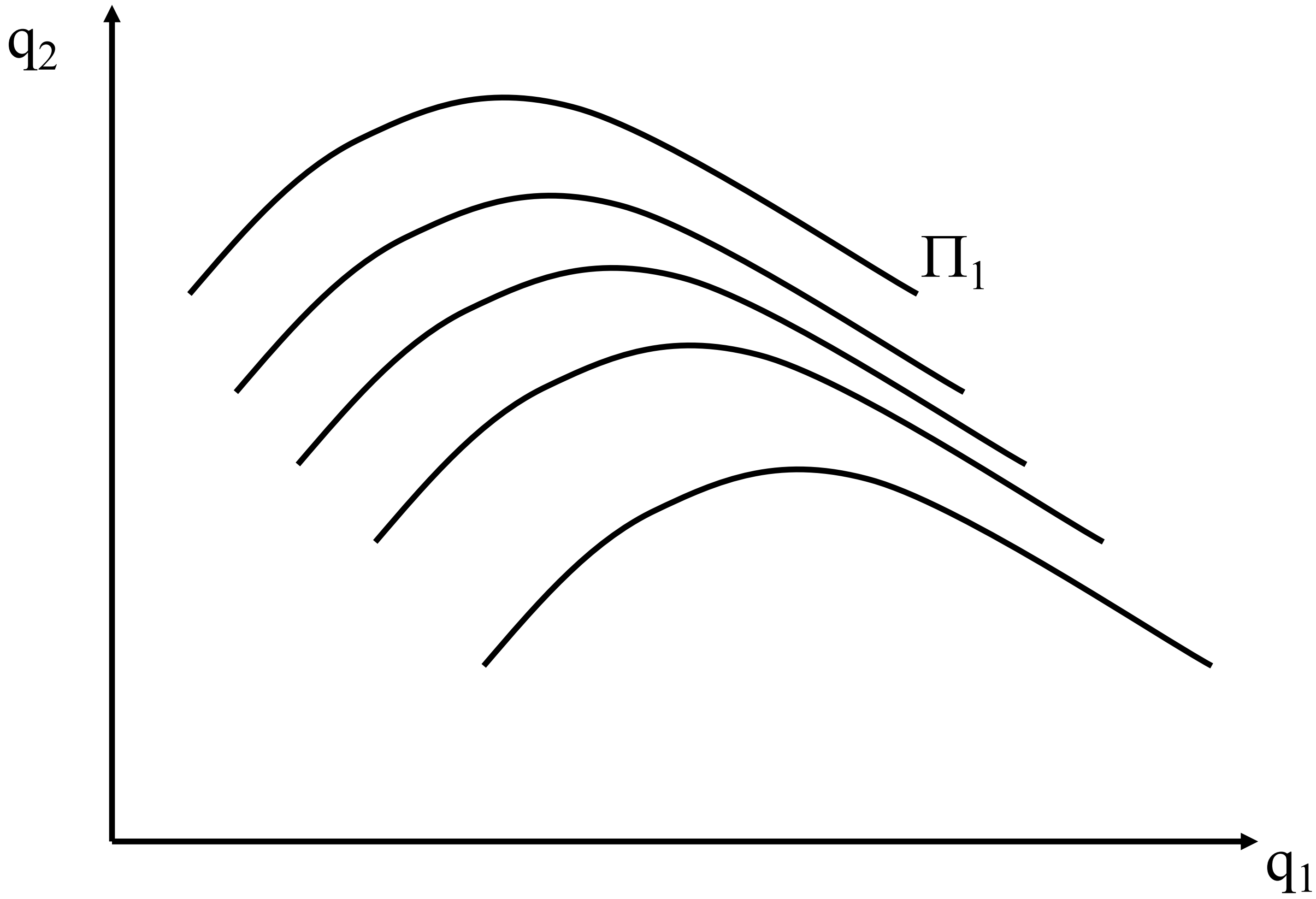
c. Analyse graphique

- Pour représenter graphiquement l'équilibre de Stackelberg, il faut tracer les courbes de réaction des deux firmes mais aussi leurs courbes d'**isoprofit**

- Il s'agit de courbes représentant les combinaisons de q_1 et de q_2 qui engendrent un niveau constant de profit pour chaque entreprise

- Les courbes d'isoprofit représentent l'ensemble des combinaisons de q_1 et q_2 qui engendrent le même niveau de profit : $\bar{\Pi} = f(q_1, q_2)$

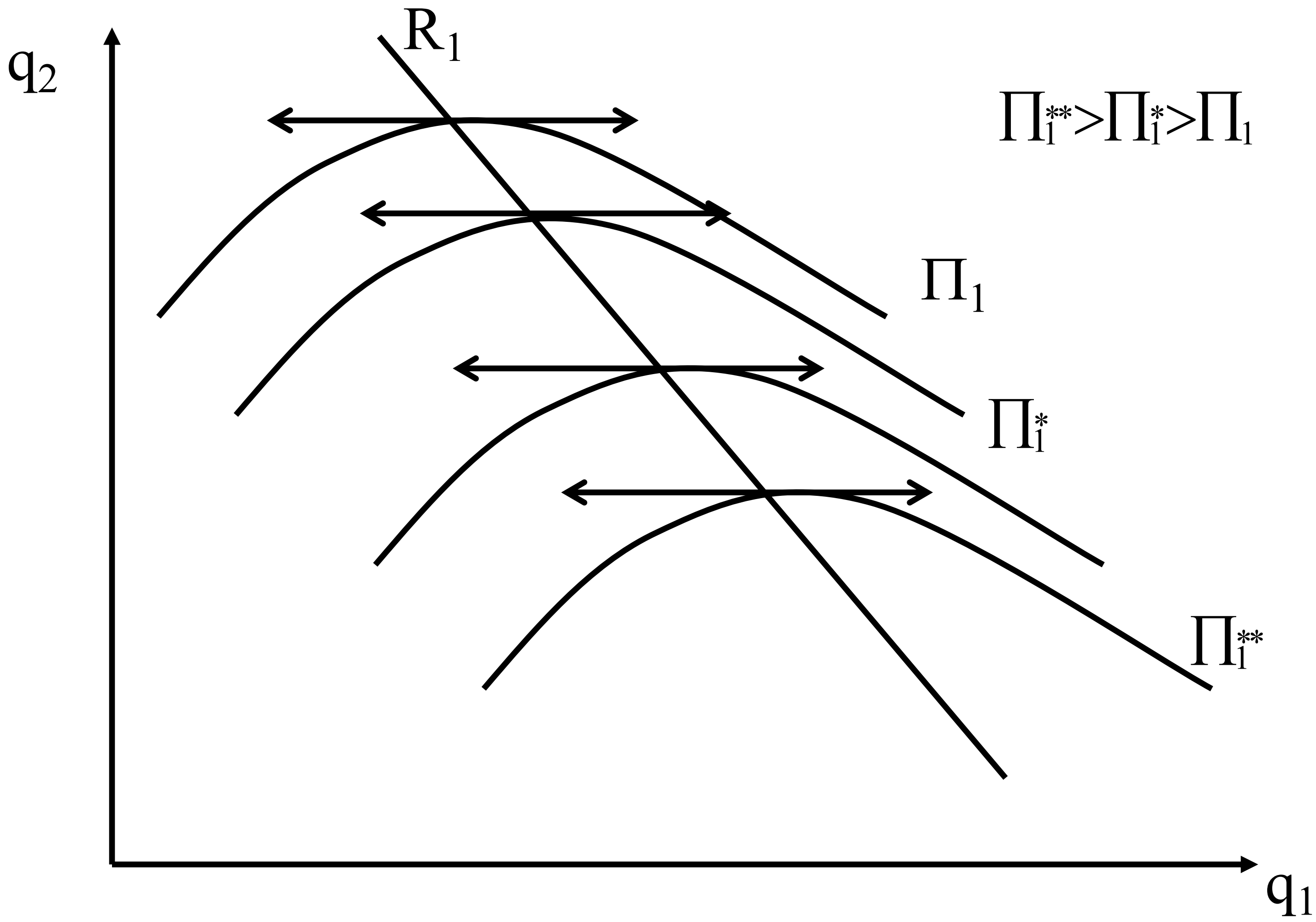
c. Analyse graphique



c. Analyse graphique

- Pour chaque niveau de production fixé par la firme 2 (q_2), la firme 1 peut fixer son propre niveau de production (q_1) de façon à maximiser son profit (courbe d'isoprofit la plus à droite)
- Ce point satisfait une condition de tangence : la pente de la courbe d'isoprofit doit être horizontale.
- L'ensemble des points de tangence définit la fonction de réaction

1.2.3. Analyse graphique

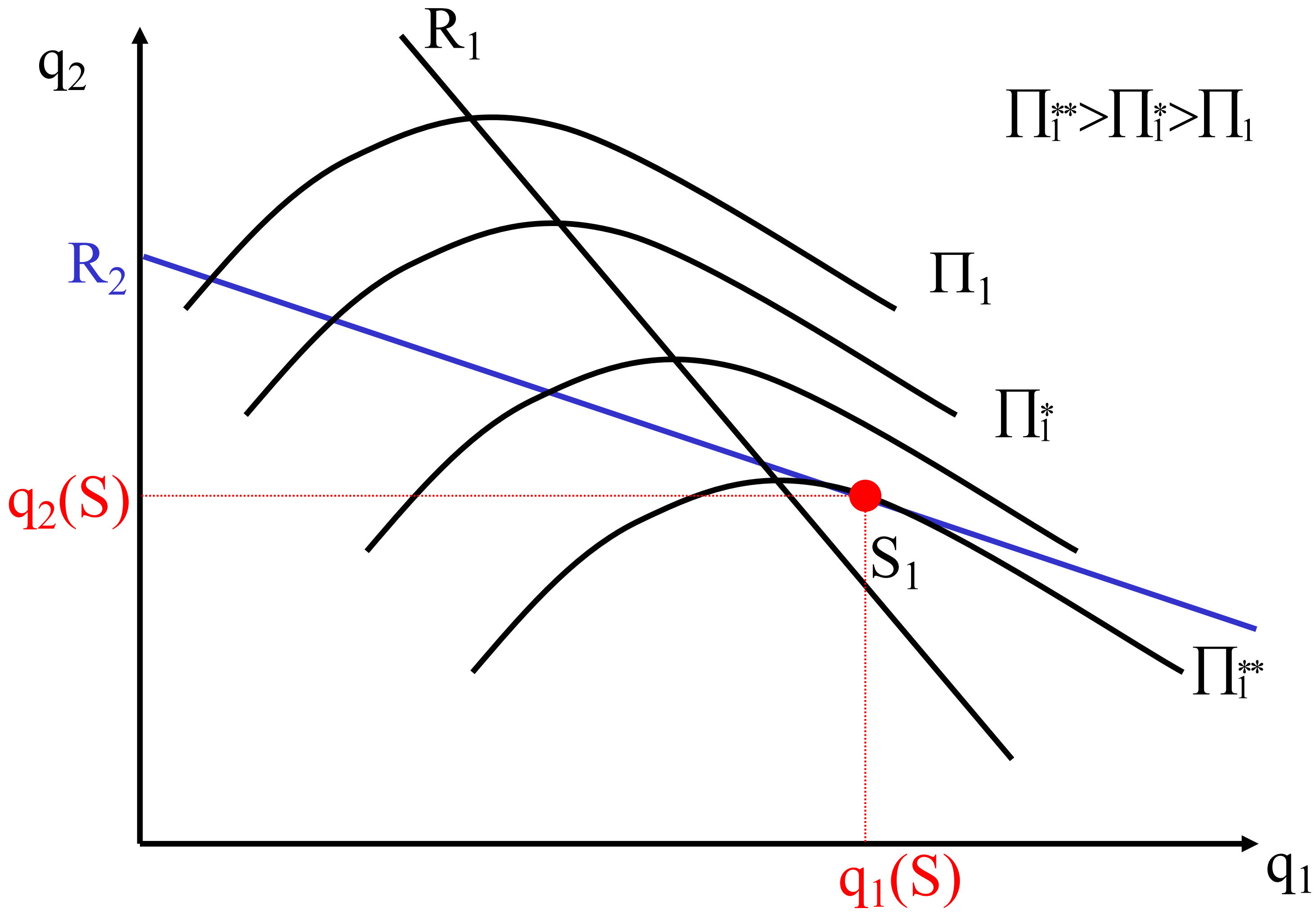


c. Analyse graphique

Equilibre de Stackelberg où la firme 1 est leader

- La firme 1 va chercher à maximiser son profit connaissant la fonction de réaction de la firme 2
- Cette quantité offerte par la firme 1 sera forcément celle qui maximise son profit.
- Elle se situera donc sur la courbe d'isoprofit la plus basse, ce qui représente le maximum de production de la firme 1 sachant la production de la firme 2

c. Analyse graphique



Deuxième partie
L'interaction stratégique
L'oligopole non-coopératif

4.1.2. Le duopole de Stackelberg

a. Description et hypothèses de base

b. Détermination de l'équilibre

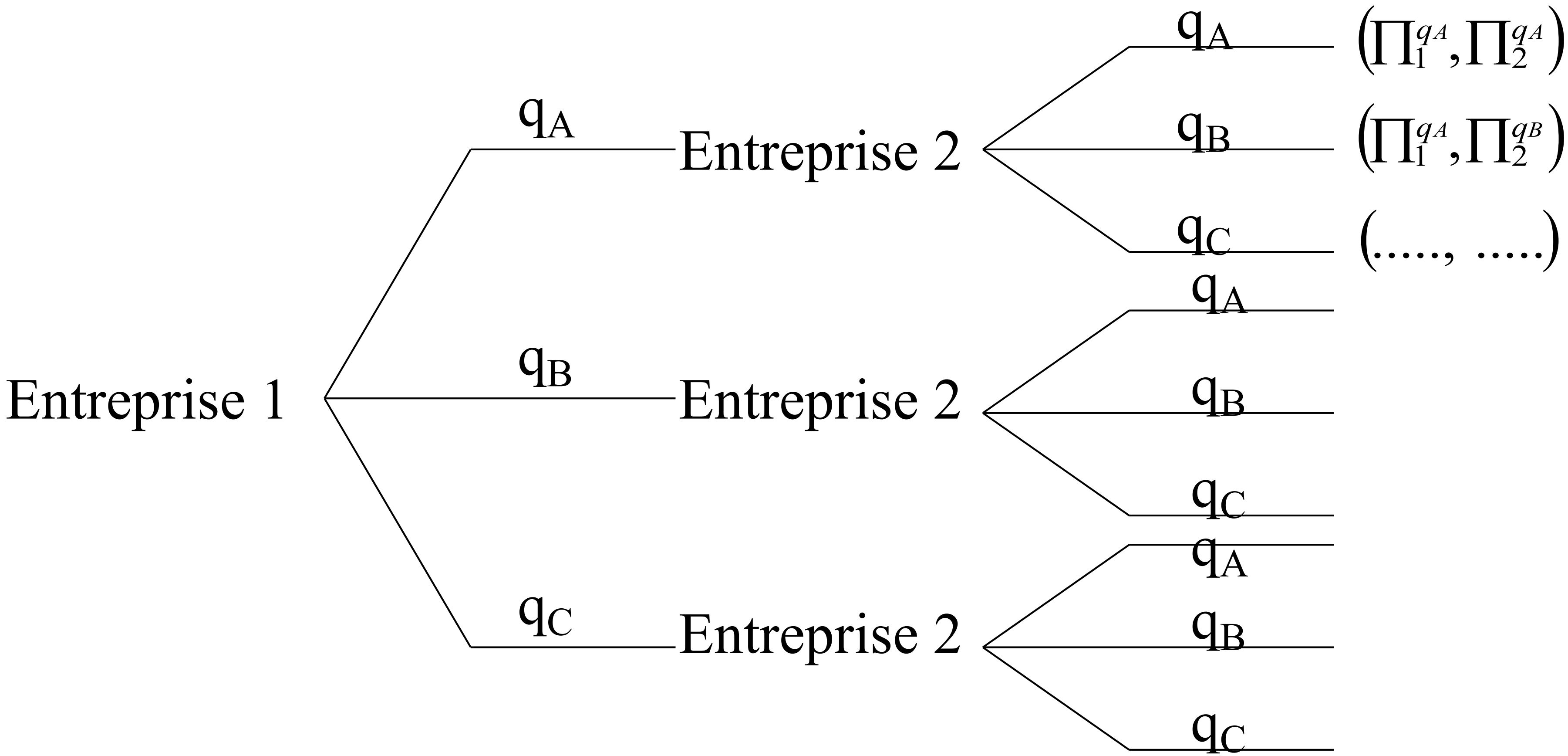
c. Analyse graphique

<u>d. Représentation sous forme extensive</u>

e. Application numérique

Conclusion

d. Duopole de Stackelberg sous la forme extensive



Deuxième partie
L’interaction stratégique
L’oligopole non-coopératif

4.1.2. Le duopole de Stackelberg

a. Description et hypothèses de base

b. Détermination de l'équilibre

c. Analyse graphique

d. Représentation sous forme extensive

e. Application numérique

Conclusion

d. Application numérique

- Reprenons l'application numérique débutée avec le duopole de Cournot.

- Supposons cette fois que l'entreprise 1, qui est implantée depuis plus longtemps sur la zone de récolte de la canne à sucre, est le leader du marché et peut anticiper les réactions de l'entreprise 2

d. Application numérique

- Nous connaissons déjà la fonction de réaction de l'entreprise 2

$$q_2 =$$

- On rappelle que le programme de maximisation de la firme 1 est :

$$Max \ \Pi_{1(q_1,q_2)} =$$

$$Soit \ Max \ \Pi_{1(q_1,q_2)} =$$

d. Application numérique

- L'entreprise 1 connaît la fonction de réaction de l'entreprise 2. Elle va donc l'intégrer dans son programme de maximisation du profit

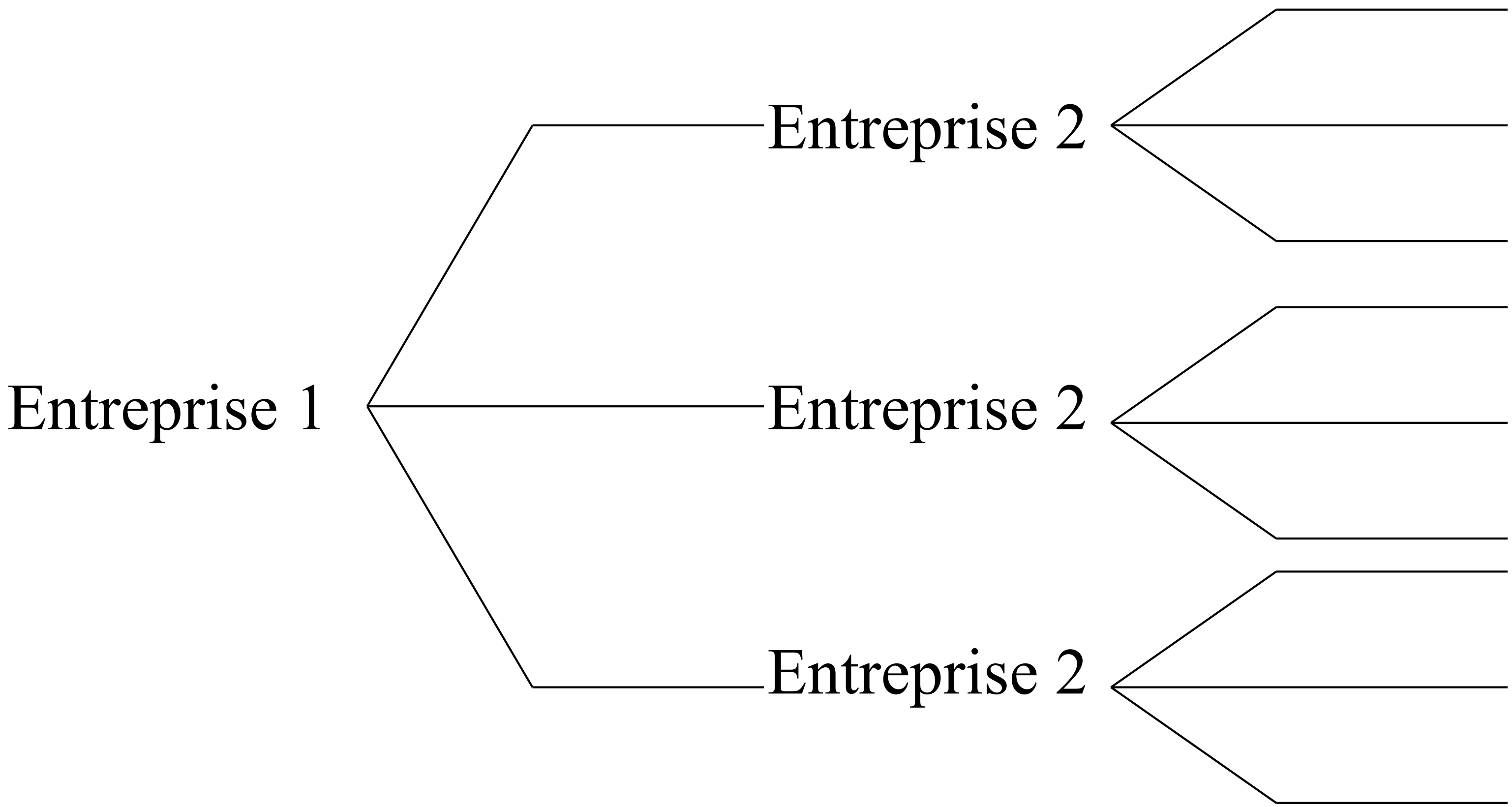
$$Max \prod_{1(q_1,q_2)} =$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \prod_1 (q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow q_1^* = \\ q_2^* = \end{cases}$$

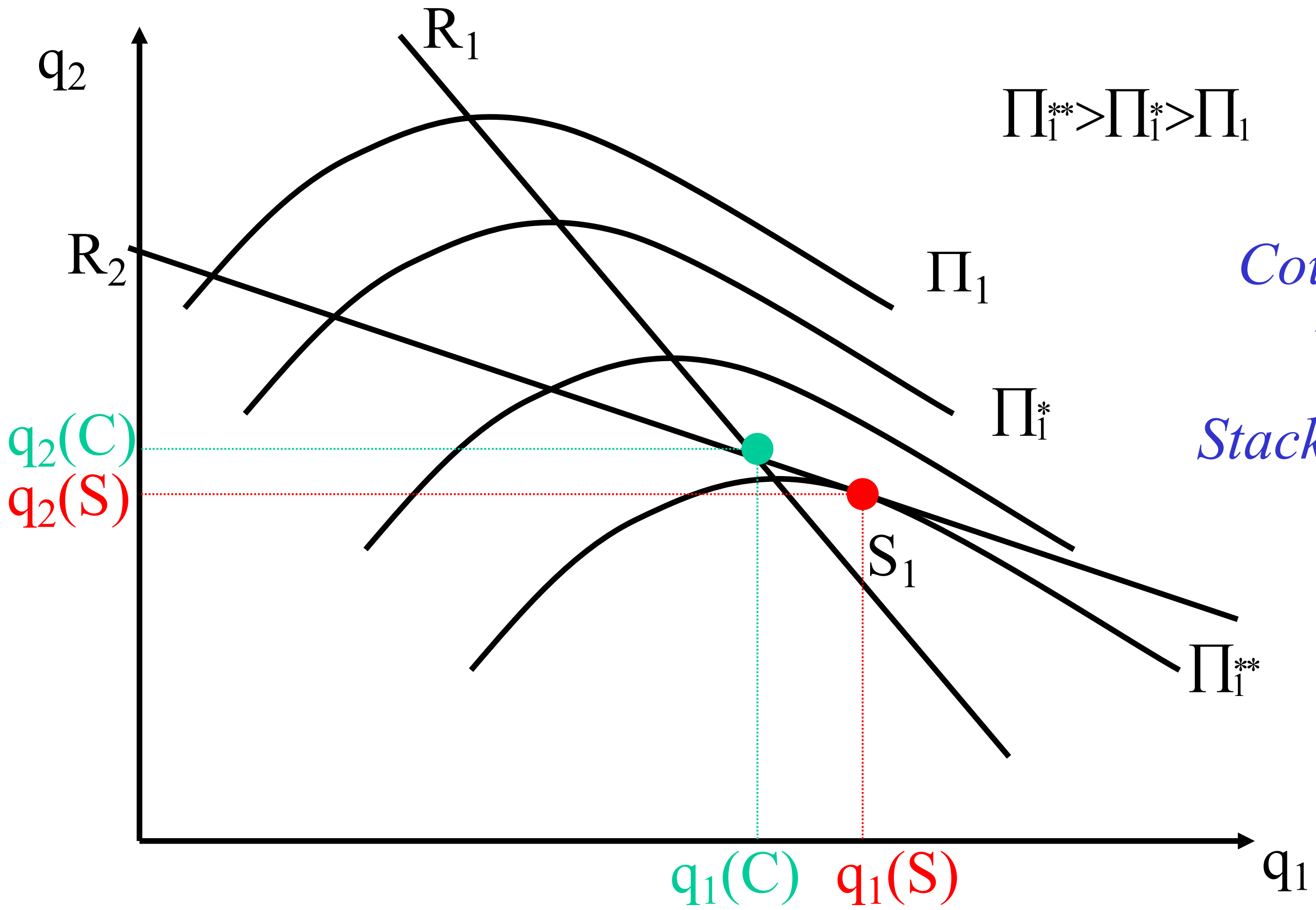
- Par suite il vient

$$P^* = \qquad ; \prod_1 = \qquad ; \prod_2 =$$

e. Application numérique



Conclusion



Cournot

Vs

Stackelberg

Conclusion

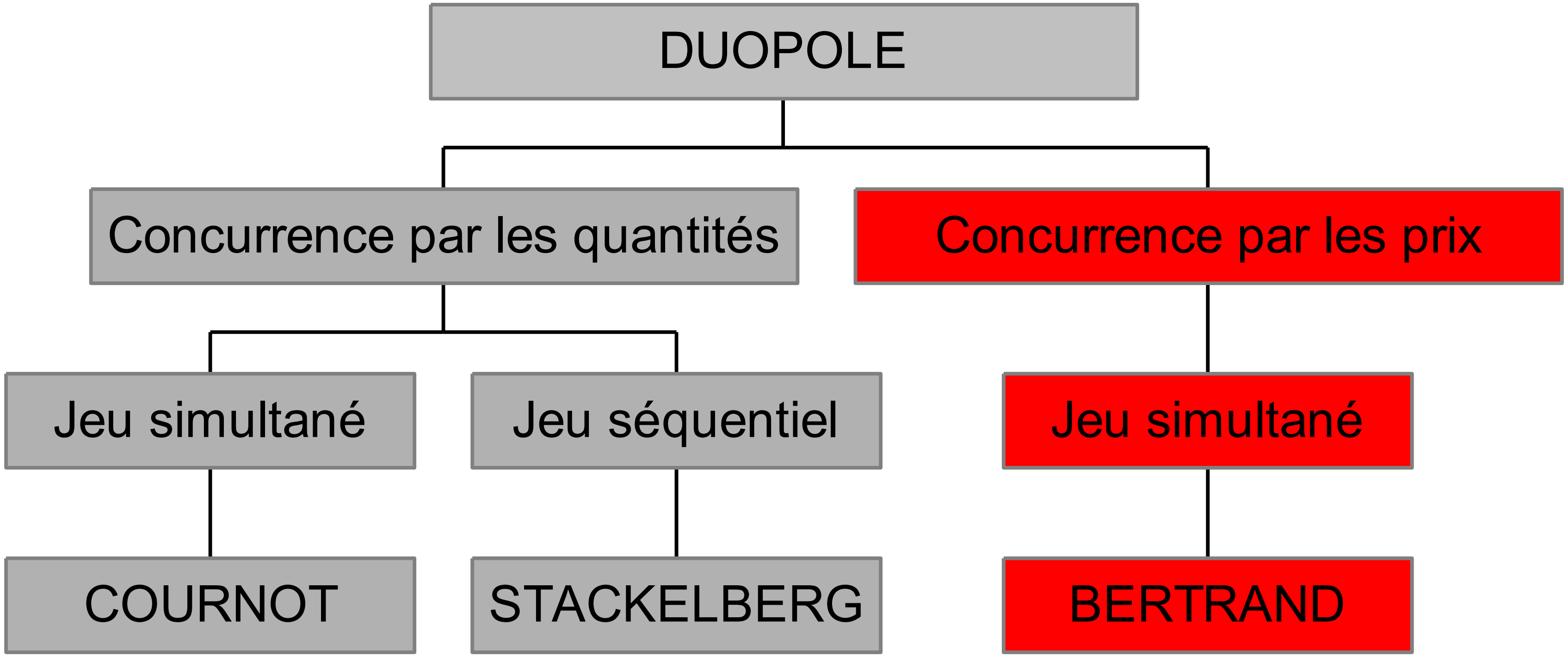
- Graphiquement, à l'équilibre de Stackelberg, la firme 1 (leader) choisit un niveau de production plus élevé qu'elle ne l'a fait précédemment à l'équilibre de Cournot et reçoit des profits plus importants.
- Cela est dû à l'avantage du leader dans le modèle de Stackelberg : il prend sa décision en premier.

- Revenons sur l'application numérique….

Conclusion

. . . .et dressons un tableau synthétique des résultats obtenus pour le monopole, pour le duopole de Cournot et pour le duopole de Stackelberg

Modèles d'oligopole



Deuxième partie
L'interaction stratégique
L'oligopole non-coopératif

4.2.1 Le duopole de Bertrand

a. Description et hypothèses de base

b. Détermination de l'équilibre

c. Application numérique

Conclusion

a. Description et hypothèses du modèle

- **H1** La demande est contingente, c'est à dire qu'elle est dépendante du niveau de prix décidé par l'autre firme
  – La firme *i* fixe son prix à P_i. La fonction de demande totale est D(P). Quelle est la demande pour l'entreprise *j* ?

$D_j (P_j) = D (P_j)$	si $P_j < P_i$	*j* capte toute la demande
$D_j (P_j) = D_i (P_i) = ½ D(P)$	si $P_i = P_j = P$	*i* et *j* se partagent la demande
$D_j (P_j) = 0$	si $P_j > P_i$	*j* n'a aucune demande

b. Description et hypothèses du modèle

- **H2** On suppose que toutes les firmes ont assez de capacités de production pour fournir la totalité du marché
- **H3** La variable stratégique de chacune des firmes sur le marché est le prix
- **H4** Le bien produit dans la branche est parfaitement homogène (= parfaitement substituable)
- **H5** Chaque firme va chercher à maximiser le profit contingent qu'elle pourrait réaliser dans les circonstances créées par l'un des duopoleurs

c. Détermination de l'équilibre

- Supposons que les deux firmes vendent le bien à un prix supérieur au coût marginal
  - Résultat : un prix supérieur au coût marginal ne peut pas constituer un équilibre

- **Théorème de Bertrand**
  - **Sous les hypothèses 1 à 5, il n'existe qu'un seul équilibre de prix : $P_1^* = P_2^* = Cm$**

c. Détermination de l'équilibre

- Il en résulte que l'équilibre est celui de la concurrence parfaite

- Le profit de chaque firme est représenté par :

$$\Pi_i = P_i \,.\, (D_i\,(P_i)) - C_i\,(D_i\,(P_i)) \text{ avec } i = 1, 2$$

c. Détermination de l'équilibre

- Supposons que les deux prix soient supérieurs ou égaux au coût marginal noté Cm
- Envisageons les cas successifs suivants

$$P_1 > P_2 > Cm$$
$$P_1 = P_2 > Cm$$
$$P_1 > P_2 = Cm$$
$$P_1 = P_2 = Cm$$

c. Détermination de l’équilibre

- ***Paradoxe de Bertrand***

  Alors qu’elles sont deux, les entreprises agissent comme si elles étaient un nombre infini. Elles se comportent ainsi conformément à l’hypothèse d’atomicité de la concurrence parfaite

- L’équilibre de Bertrand comme l’équilibre de Cournot est un équilibre de Nash

d. Application numérique

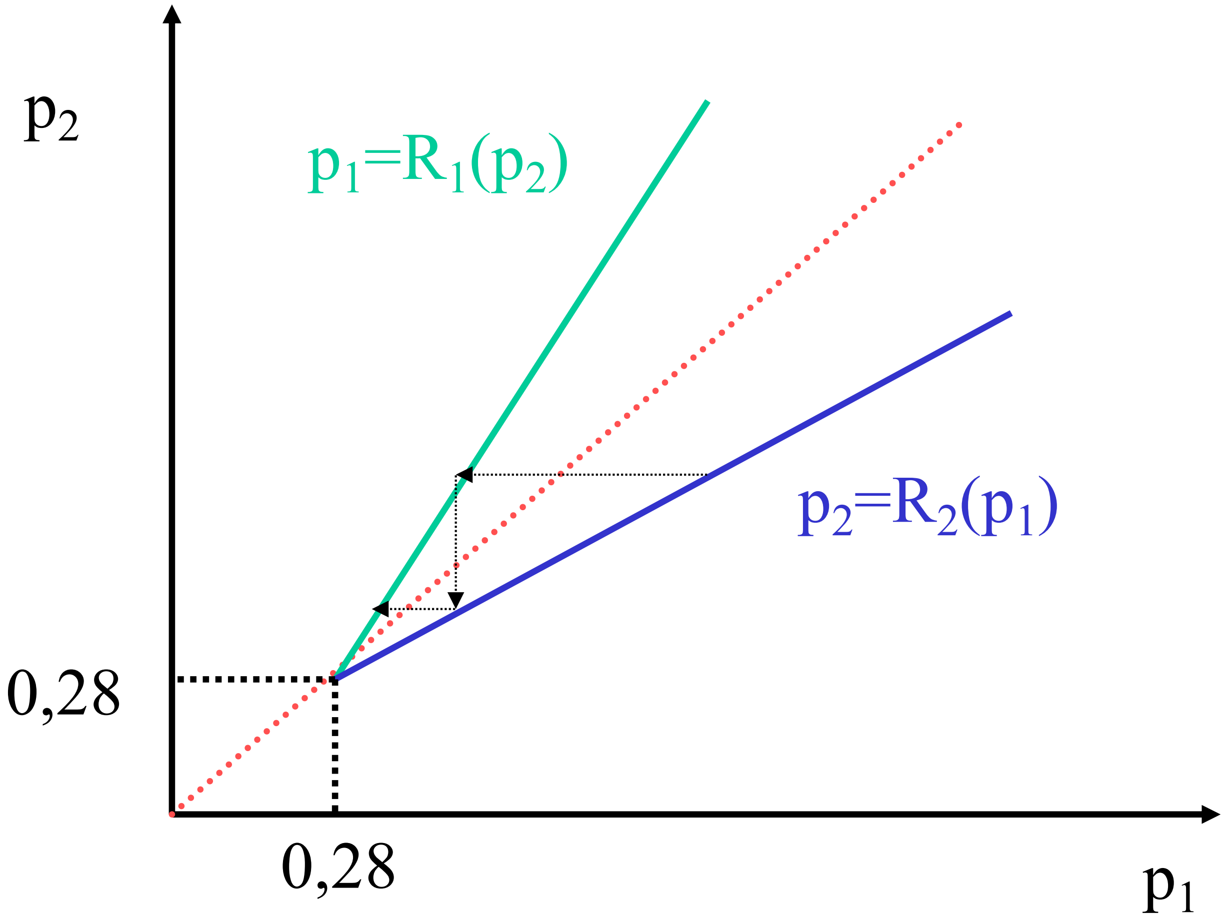
- **Reprise de l'exemple**

  $Q = q_1 + q_2$

  D telle que $P = 1 – 0{,}001\ Q$, $C(q) = 0{,}28\ q$

- L'équilibre de Bertrand ou équilibre de Nash en prix est tel que $p_1 = p_2 = Cm =$

d. Application numérique



Conclusion

- L'équilibre de Bertrand correspond à l'optimum social (équilibre de concurrence)
- Du point de vue des consommateurs, l'équilibre de Bertrand est donc préférable aux équilibres de cartel, de Cournot et de Stackelberg
- Mais le résultat de Bertrand dépend de plusieurs hypothèses très restrictives

Conclusion Générale

- Cournot ou Bertrand : quelle variable d'action choisir ?
- Intérêt du modèle de Stackelberg