Troisème année de Licence MIASHS

Compléments Mathématiques 1[1]

Julien GREPAT[2]

Contents

---

[2]Contact : `julien.grepat@gmail.com`

Part I

Élément généraux d'analyse

1 Les nombres complexes

Rappelons qu'il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés nombres complexes, tels que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles dans l'ensemble $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$;
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ où a et b sont deux réels. Cette écriture est appelée la forme algébrique de z.
  - On dit que le réel a est la partie réelle de z et on la note $a = \mathcal{R}e(z)$.
  - On dit que b est la partie imaginaire[3] de z et on la note $b = \mathcal{I}m(z)$.
  - Tout nombre complexe de la forme $z = ib$ (b réel) est appelé imaginaire pur.

Proposition 1.1 *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :*

$$a + bi = a' + b'i \Longleftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'$$

En particulier :

$$a + bi = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$$

- somme : $z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i.$
- produit : $zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$
- identités remarquables : elles restent valides dans $\mathbb{C}$, en particulier :

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Definition 1.2 *Soit $z = a + ib$ un complexe. Le* conjugué *de z est le complexe $\bar{z} = a - ib$.*

- $z \in \mathbb{R}$ est donc équivalent à $\bar{z} = z$.
- Dire que z est imaginaire pur est équivalent à dire que $z + \bar{z} = 0$.

Proposition 1.3 *Soient z et z' deux complexes. On a*

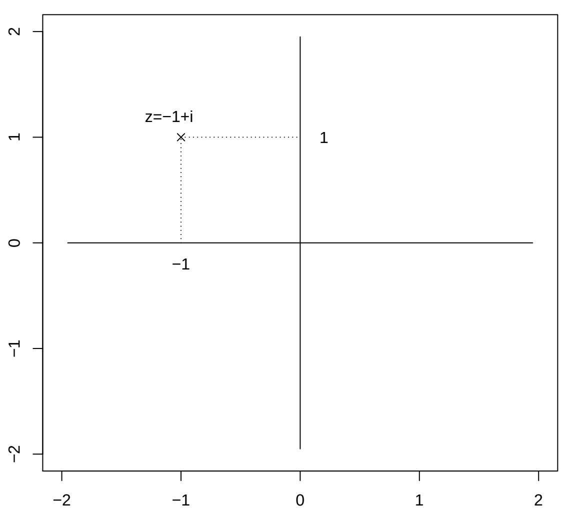
[3] Bien remarquer que la partie imaginaire d'un complexe est un *réel*

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ *pour tout naturel* n.
- *Si* $z' \neq 0$, *alors* $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ *et* $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Remarque 1.4 *Pour tout complexe* z *on a* $\overline{\overline{z}} = z$ *et, si* $z = a + ib$, $z\overline{z} = a^2 + b^2$

1.1 Forme algébrique

Nous avons vu qu'un nombre complexe z s'écrit sous sa forme algébrique $z = a + ib$, avec a et b des nombres réels. Les nombres a et b sont appelés respectivement partie réelle et partie imaginaire de z. Nous pouvons les utiliser comme abscisse et ordonnée pour repérer le nombre dans le plan dit complexe[4].



Nous filerons l'exemple

$$z = -1 + i$$

dans la suite des explications.

Ici, nous pouvons écrire

$$z = -1 + 1 \times i.$$

Ainsi, nous représenterons le nombre z par le point d'abscisse -1 et d'ordonnée 1.

1.2 Module de z

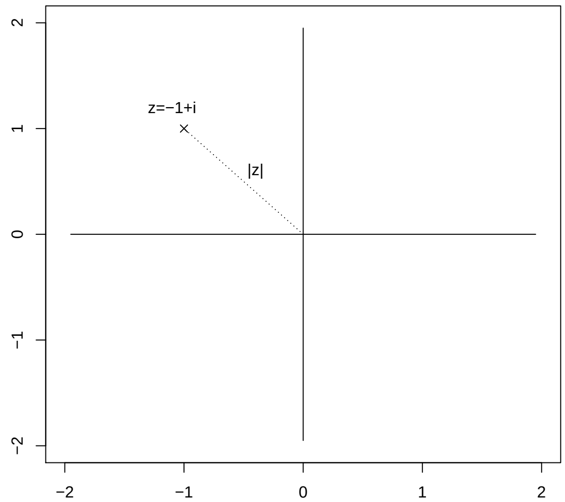
Dans un plan, on rappelle que la distance d'un point de coordonnée (a, b) à l'origine est donnée par la formule

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Par analogie, on pose la distance du point d'affixe $z = a + ib$ de coordonnées (a, b), nommée module de z, notée $|z|$:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

[4]Le complexe associé à un point de ce plan est appelé l'affixe de ce point.



Reprenons l'exemple

$$z = -1 + i = -1 + 1 \times i.$$

Notons que les coordonnées de z sont $(-1, 1)$.

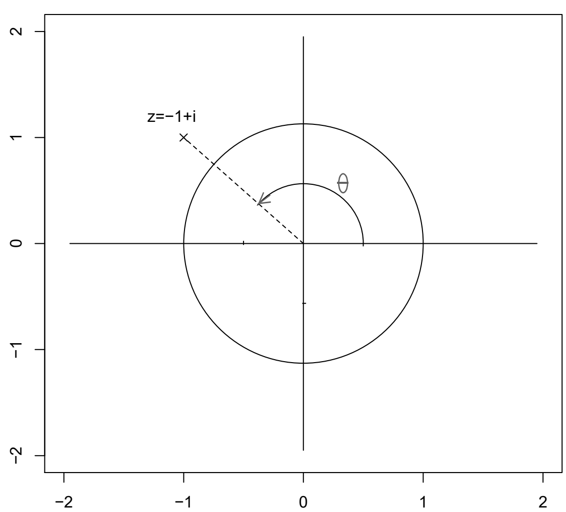
Le module de z est donné par

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Ainsi, le point d'affixe z est à une distance de $\sqrt{2}$ de l'origine.

1.3 Cercle trigonométrique

On rappelle que le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 centré sur l'origine servant de rapporteur. En effet, l'angle formé entre l'axe des abscisses ($x > 0$) et un segment d'extrêmité l'origine est repéré par l'arc de cercle (du cercle trigonométrique) partant de l'axe des abscisses et s'arrêtant à l'intersection avec le segment. Notons cet arc (ou angle exprimé en radiant) θ. Posons notre cercle trigonométrique sur notre dessin.



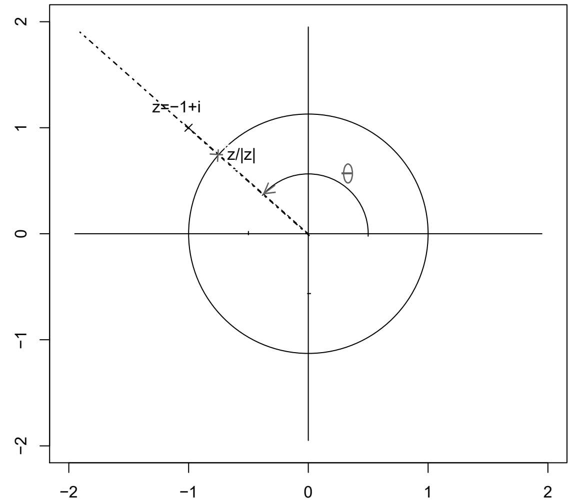
Dans l'exemple

$$z = -1 + i = -1 + 1 \times i.$$

L'angle θ, que nous chercherons sans doute à déterminer plus tard, est l'argument de z.

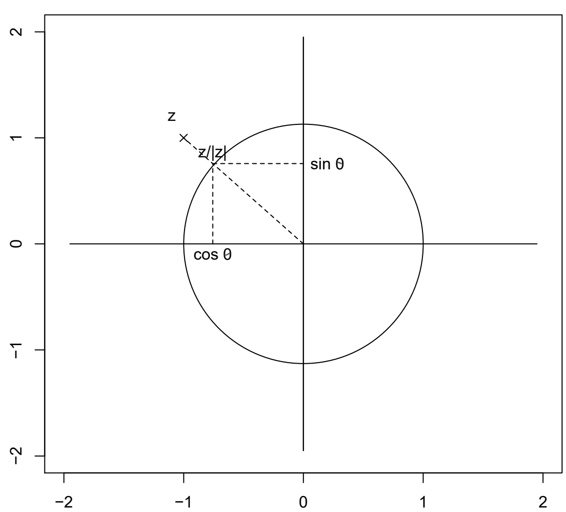
Notons que multiplier z par un nombre réel positif aura pour effet de le déplacer sur la demi-droite tracée en pointillés.

Ajoutons que le point d'affixe $\tilde{z} = z/|z|$ est à une distance de 1 de l'origine. Il est donc sur le cercle trigonométrique et puisque $1/|z|$ est un nombre réel, $\tilde{z} = z/|z|$ est aussi sur la droite en pointillés. C'est donc l'intersection de la demi-droite et du cercle.



L'angle θ est nommé **argument** de z. Rappelons que le point d'intersection entre le segment et le cercle trigonométrique a pour abscisse $\cos\theta$ et pour ordonnée $\sin\theta$. Dans notre exemple, on a

$$\tilde{z} = \frac{z}{|z|} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$



On remarque également que les coordonnées cartésiennes de $\tilde{z}$ sont $(\cos\theta, \sin\theta)$. On en déduit que

$$\tilde{z} = \cos\theta + i \times \sin\theta.$$

On peut évaluer graphiquement θ à $3\pi/4$. On rappelle que

$$\begin{aligned} cos\frac{3\pi}{4} &= \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \\ sin\frac{3\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

On voit donc qu'on peut écrire

$$\tilde{z} = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times i = \cos\frac{3\pi}{4} + i \times \sin\frac{3\pi}{4}.$$

1.4 Forme trigonométrique

On a

$$\tilde{z} = \cos\frac{3\pi}{4} + i \times \sin\frac{3\pi}{4}.$$

Puisque $\tilde{z} = z/|z|$, on en déduit que $z = |z|\tilde{z}$, et il vient que

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \times \sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Il s'agit de la forme trigonométrique de z. De manière générale, un nombre complexe s'écrit toujours sous sa forme trigonométrique

$$z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right).$$

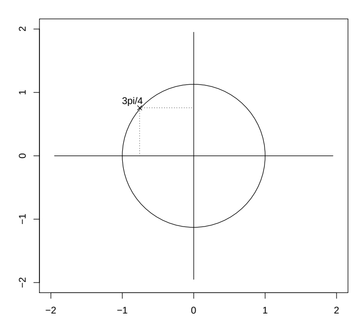
1.5 En pratique

Pour passer de la forme arithmétique d'un nombre complexe

$$z = -1 + i$$

à sa forme trigonométrique, on suit les étapes suivantes.

- On calcule le module de z :
$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$
- On force la factorisation de z par $|z|$ (ce qui fait apparaître $\tilde{z}$) :
$$z = \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times i\right).$$
- On essaie de se ramener à des valeurs de sinus et de cosinus connues :
$$z = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times i\right).$$
- On reconnaît l'angle θ dont le cosinus est le premier coefficient dans la paranthèse, et le sinus le second. Ici, on retrouvera $3\pi/4$:
$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \times \sin\frac{3\pi}{4}\right).$$



1.6 Réciproquement, retrouver la forme algébrique

Il y a égalité entre les formes du nombre complexe z. À partir de la forme trigonométrique, il suffit de calculer les sinus et cosinus et d'effectuer des simplifications usuelles pour retrouver la forme algébrique :

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\times\sin\frac{3\pi}{4}\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= \sqrt{2}\times\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{-2}{2} + i\times\frac{2}{2}\\
&= -1 + i\times 1 = -1+i.
\end{aligned}$$

1.7 Propriétes

Proposition 1.5 **[Inégalité triangulaire]** *Soient z et z' deux complexes. On a*

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|.$$

Proposition 1.6 *Soient z et z' deux complexes non nuls. On a*

- $|z\times z'| = |z|\times|z'|$
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad (2\pi)$
- *Pour tout entier n, $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z) \quad (2\pi)$*
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ *et* $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) \quad (2\pi)$.
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ *et* $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') \quad (2\pi)$.

1.7.1 Notation exponentielle et applications

Si z est un complexe de module 1, il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Notant f la fonction qui à tout réel θ associe le nombre complexe $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$, on vérifie que $f(\theta+\theta') = f(\theta)f(\theta')$ et $f(0) = 1$. On note alors

$$f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Definition 1.7 *Tout nombre complexe* non nul *de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite notation exponentielle :*

$$z = re^{i\theta} \quad \textit{avec} \quad r = |z| \quad \textit{et } \theta = \arg(z) \quad (2\pi)$$

1.8 Formules d'Euler

Puisque,

$$e^{ix} = cos(x) + isin(x), \qquad \text{et} \qquad e^{-ix} = cos(x) - isin(x,) \qquad x \in \mathbb{R},$$

on déduit les formules d'Euler pour définir les fonctions sinus et cosinus

$$\begin{aligned} cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \\ sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{aligned}$$

Exemple On se sert des formules d'Euler pour *linéariser* $(\cos\theta)^n$ *etc ...* en utilisant le binôme de Newton.

$$(\cos\theta)^3 = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3\theta} + e^{-i3\theta}}{2} + 3\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\cos 3\theta + 3\cos\theta\right).$$

1.9 Racines de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul. Si $z^n = 1$, alors $z \neq 0$ et on peut donc écrire $z = re^{i\theta}$ de plus,

$$z^n = 1 \Longleftrightarrow r = 1 \quad \text{et } \theta = \frac{2k\pi}{n}.$$

On a donc n racines de l'unité souvent notées

$$\xi_k = e^{\frac{2ki\pi}{n}}.$$

Si $z_0 \neq 0$, pour résoudre l'équation $z^n = z_0$, on utilisera la forme exponentielle.

1.10 Équation du second degré

Soient a, b et c des complexes avec $a \neq 0$. Comme

$$\begin{aligned} aX^2 + bX + c &= a\left(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left((X + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left((X + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

résoudre l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ revient à chercher un complexe δ tel que $\delta^2 = b^2 - 4ac$. On obtient alors

$$X = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$

2 Espaces métriques

2.1 Topologie

On se place sur un ensemble E, par exemple, $\mathbb{R}^n$ ou un espace de fonctions.

Definition 2.1

- *L'application* $x \mapsto ||x|| \in \mathbb{R}^+$ *telle que*

  (i) $||\lambda x|| = |\lambda| \; ||x||, \qquad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},$

  (ii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \qquad \forall x, y \in E,$ *(inégalité triangulaire),*

  (iii) $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0,$

  est une norme.

- *L'application* $(x, y) \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}^+$ *telle que*

  (i) $d(x, y) = 0 \iff x = y,$

  (ii) $d(x, y) = d(y, x), \qquad \forall x, y \in E,$

  (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \qquad \forall x, y, z \in E$ *(inégalité triangulaire),*

  est une distance (appelée parfois métrique).

Un espace E muni d'une distance d est nommé espace métrique (E, d). Tout espace muni d'une norme peut être considéré comme un espace métrique d'après la propriété suivante.

Proposition 2.2 *De toute norme* $|| \cdot ||$*, on peut définir la distance*

$$d(x, y) = ||x - y||.$$

Exemples fondamentaux de normes

(i) La valeur absolue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, l'application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $d(x, y) \mapsto |x - y|$ est une distance sur $\mathbb{R}$. De même, le module d'un complexe est une norme sur $\mathbb{C}$.

(ii) Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$:

  Soit $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$:

  - $||x||_\infty = Max_{i \leq n}(|x_i|)$ est la norme-sup (dite aussi norme infinie),
  - $||x||_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$ est la norme-un,
  - $||x||_2 = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$ est la norme-deux (norme euclidienne),
  - $||x||_p = (x_1^p + x_2^p + ... + x_n^p)^{1/p}$ est la norme-p.

(iii) Normes usuelles sur les suites :

  Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ une suite de l'espace des suites à valeurs réelles noté souvent $\updownarrow^0(\mathbb{R})$.

- $||x||_\infty = Max_{i\geq 0}(|xi|)$ est la norme-sup (dite aussi norme infinie),
- $||x||_1 = \sum_{i\geq 0}|x_i|$ est la norme-un,
- $||x||_2 = \left(\sum_{i\geq 0} x_i^2\right)^{1/2}$ est la norme-deux (norme euclidienne),
- $||x||_p = \left(\sum_{i\geq 0} x_i^p\right)^{1/p}$ est la norme-p.

(iv) Les normes usuelles sur les fonctions feront l'objet d'une section nommée *Espaces L^p*.

Definition 2.3 (Normes équivalentes)
Soit E un ensemble. On dit que deux normes N et N' sur E sont équivalentes s'il existe deux réels $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x),$$

pour tout $x \in E$.

Naturellement, cette relation est symétrique, si N et N' sont équivalentes avec

$$\alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x),$$

pour tout $x \in E$, alors

$$\beta^{-1}N'(x) \leq N(x) \leq \alpha^{-1}N'(x).$$

Theorem 2.4 *Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes entre elles.*

Ce qui n'est pas le cas dans tout espace métrique, en particulier sur les espaces de fonctions.

Definition 2.5 (Boule ouverte et fermée)
Soit (E, d) un espace métrique, $x \in E$ et $r > 0$:

- *on définit la boule ouverte de centre x et rayon r par*

$$B(x, r) = \{y \in E|\ d(x, y) < r\};$$

- *on définit la boule fermée de centre x et rayon r par*

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in E|\ d(x, y) \leq r\}.$$

On peut alors définir les ouverts et les fermés d'un espace métrique.

Definition 2.6
- *On dit qu'une partie U de E est un (sous ensemble) ouvert si*

$$\forall a \in U, \exists r > 0 : \quad B(a, r) \subset U.$$

- *On dit qu'une partie F de E est un (sous-ensemble) fermé si son complémentaire $F^c = E \setminus F$ est ouvert.*

Il en suit les propriétés plus ou moins élémentaires suivantes.

Proposition 2.7 *(i) Toute boule ouverte est un ouvert.*

(ii) Toute boule fermée est un fermé.

(iii) $\emptyset$ et E sont à la fois ouverts et fermés.

(iv) Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

(v) Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

(vi) Toute intersection de fermés est un fermé.

(vii) Toute réunion finie de fermés est un fermé.

(viii) Un ouvert (resp. un fermé) est un ouvert (resp. fermé) pour toute norme équivalente.

Notons qu'une intersection infinie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. Prenons par exemple la suite d'intervalles ouverts $]-1/n; 1/n[$ de $\mathbb{R}$, l'intersection

$$\bigcap \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\},$$

est un fermé.

Note. Dans $\mathbb{R}^n$ un ensemble fermé et borné (admettant un élément dont la norme est maximale) est un ensemble compact.

On termine ce paragraphe par un résultat qui nous permet de restreindre nos espaces généraux, en particulier de fonctions, à un sous espace métrique sans changer la distance.

Theorem 2.8 *Soit (E, d) un espace métrique. Tout sous-ensemble A de E, muni de la restriction d_A de la distance d sur $A \times A$:*

$$d_A(x, y) = d(x; y), \qquad \forall x, y \in A,$$

est un espace métrique.

2.2 Suites et topologie

De manière générale, la convergence d'une suite d'éléments d'un espace métrique dépend du choix de la distance. En effet, si deux distances ne sont pas équivalentes, une suite convergente pour une métrique ne l'est pas forcément pour l'autre.

Definition 2.9 *Soit (E, d) un espace métrique et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $a \in E$, et on note $x_k \to a$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n_0$, on ait $d(a, x_k) < \varepsilon$.*

De manière équivalente, on peut formuler la convergence d'une suite à l'aide des boules

$$x_k \to a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon, \exists n_0, \forall k \geq n_0 : \; x_k \in B(a, \varepsilon).$$

Les suites permettent une caractérisation séquentielle des fermés.

Proposition 2.10 *Un ensemble F de E est fermé si et seulement si, pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers une limite l, on a $l \in F$.*

2.3 Continuité et fonctions lipschitziennes

Definition 2.11 *Soit (E, d), (E', d') deux espaces métriques et f une application $E \to E'$.*

(i) On dit que f est continue en un point $x_0 \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$f\big(B(x_0, \delta)\big) \subset B\big(f(x_0), \varepsilon\big).$$

(ii) Si A est un sous-ensemble de E, on dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point de A.

Naturellement, la définition de la continuité en terme de boule n'est pas commode. Pour autant, si pour toute boule ouverte de rayon quelconque on peut trouver une boule ouverte dont l'image est incluse dans cette première, on peut montrer que f est continue en a si pour toute suite $x_k \to a$, $f(x_k) \to f(a)$. D'où la caractérisation séquentielle suivante.

Theorem 2.12 *Une application f est continue en a si et seulement si pour toute suite $x_k \to a$, on a $f(x_n) \to f(a)$.*

Terminons cette section avec les fonctions lipschitziennes, fondamentale dans bien des théorèmes d'analyse fonctionnelle.

Definition 2.13 *Soit (E, d), (E', d') deux espaces métriques et f une application $E \to E'$. On dit que f est L-lipschitzienne, où L est un réel strictement positif, si pour tout $x, y \in E$ on a*

$$d'(f(x), f(y)) \leq L d(x, y).$$

Si L est le plus petit réel strictement positif vérifiant l'inégalité, on dit que L est la constante de Lipschitz de f.

Il est clair qu'une telle application Lipschitzienne est continue. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$d(x, y) < \frac{\varepsilon}{L} \quad \Rightarrow \quad d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

La réciproque n'est pas vrai. Prenons $f(x) = x^2$, et posons $\varepsilon > 0$, bien que $d(x, x + \varepsilon) \leq \varepsilon$ pour tout x,

$$|f(x + \varepsilon) - f(x)| = (x + \varepsilon)^2 - x^2 = 2x\varepsilon + \varepsilon^2 \to \infty, \quad \text{pour } x \to \infty.$$

Definition 2.14 *Soit (E,d), (E',d') deux espaces métriques et f une application $E \to E'$. Si, sur tout compact de E, la fonction f est lipschitzienne, on dite que f est localement lipschitzienne sur E.*

On peut voir que la fonction $f(x) = x^2$ est localement lipschitzienne. En effet, si K est un compact de E dont l'élément de norme maximale a pour norme α,

$$|f(x+\varepsilon) - f(x)| = (x+\varepsilon)^2 - x^2 = 2x\varepsilon + \varepsilon^2 \leq 2\alpha\varepsilon.$$

Definition 2.15 *Une application $K-$lipschitzienne ayant une constante $K < 1$ est dite contractante.*

2.4 Théorème du point fixe

Le théorème du point fixe est un résultat fondamental en analyse fonctionnelle. Il assure et identifie la convergence d'une suite récurrente définie à l'aide d'une fonction contractante.

Theorem 2.16 *Soit E un espace métrique complet*[5] *et f une application contractante de constante $k < 1$ de E dans E. Il existe un point fixe unique x^* de f (c'est-à-dire un x^* dans E tel que $f(x^*) = x^*$). De plus, toute suite d'éléments de E vérifiant la récurrence*

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

vérifie la majoration

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k}\, d(x_0, x_1),$$

donc converge vers x^*.

En économie, on citera l'utilisation du théorème du point pour la démonstration de l'existence d'un équilibre général en concurrence parfaite (pour l'unicité et la stabilité c'est pas la même !).

3 Espaces hilbertiens et hermitiens

3.1 Le cas réel : produit scalaire

Cette première partie nous renvoie à des rappels d'algèbre 3.

Definition 3.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une application*

$$(x,y) \in E^2 \mapsto \langle x,y \rangle \in \mathbb{R}$$

est un produit scalaire sur E si elle vérifie les propriétés suivantes :

(i) Elle est linéaire par rapport à chaque variable (on dit qu'elle est bilinéaire).

[5] Nos espaces usuels sont complets, c'est-à-dire, toute suite de Cauchy y est convergente

(ii) Elle est symétrique :

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \qquad \forall x, y \in E.$$

(iii) Elle est définie positive :

$$\langle x, x\rangle \geq 0, \quad \forall x \in E$$

et

$$\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0.$$

Exemple.

- Sur $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$, l'application

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

  définit un produit scalaire.

- Sur l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n,

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

  définit un produit scalaire.

Proposition 3.2 *Un produit scalaire permet de définir une norme en posant*

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Definition 3.3 *Un espace vectoriel muni de la norme issue d'un produit scalaire et nommé espace hilbertien (ou espace de Hilbert).*

Proposition 3.4 *Soit E un espace hilbertien muni d'un produit scalaire. Nous avons les deux inégalités suivantes pour tout $(x, y) \in E^2$:*

- **[inégalité de Schwarz :]** $|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\ ||y||$.

  On rappellera que l'égalité est vérifiées si et seulement si x et y sont colinéaires.

- **[Inégalité de Minkowski :]** $\sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} \leq ||x|| + ||y||$.

  Il s'agit, en réalité, d'une version de l'inégalité triangulaire dans le cadre du produit scalaire.

3.2 Le cas complexe : produit hermitien

Definition 3.5 *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Un produit hermitien sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ telle que*

- $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ *est linéaire par rapport à la première variable,*
- $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ *(ou $\bar{z}$ est le conjugué de z),*
- $\langle x, x\rangle \geq 0$, *pour tout $x \in E$,*
- $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

Exemple.

- Sur $\mathbb{C}^n$, en notant $x = (z_1, \cdots, z_n)$ et $y = (z'_1, \cdots, z'_n)$, l'application

$$\langle x, y \rangle = z_1 \bar{z}'_1 + z_2 \bar{z}'_2 + \cdots + z_n \bar{z}'_n$$

  définit un produit hermitien.

- Sur l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients complexes,

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)\bar{Q}(t)dt$$

  définit un produit hermitien.

Proposition 3.6 *Un produit hermitien permet de définir une norme en posant*

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Definition 3.7 *Un espace vectoriel complexe muni de la norme issue d'un produit hermitien et nommé espace hermitien (ou espace de Hermite).*

Les propriétés d'un produit scalaire s'étendent sans restriction au produit hermitien.

Proposition 3.8 *Soit E un espace hermitien muni d'un produit hermitien. Nous avons les deux inégalités suivantes pour tout $(x, y) \in E^2$:*

- **[inégalité de Schwarz :]** $|\langle x, y \rangle| \leq ||x||\ ||y||$.

  On rappellera que l'égalité est vérifiées si et seulement si x et y sont colinéaires.

- **[Inégalité de Minkowski :]** $\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq ||x|| + ||y||$.

3.3 Ortogonalité

Definition 3.9 *Soit x et y deux vecteurs. On dit que x est orthogonal à y si $\langle x, y \rangle = 0$.*

Rappelons le si familier théorème de Pythagore.

Theorem 3.10 (Théorème de Pythagore) *Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si et seulement si*

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Le sens direct du théorème de Pyhtagore se généralise par une récurrence immédiate. Nous ne parlerons pas de sa réciproque.

Theorem 3.11 *Si la famille de vecteurs $(x_1, \cdots, x_k)$ est orthogonale, c'est à dire avec $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ si $i \neq j$, alors*

$$||x_1 + \cdots + x_k||^2 = ||x_1||^2 + \cdots + ||x_k||^2.$$

On peut alors définir l'orthogonal d'un sous espace vectoriel F de E comme l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à ceux de F.

Definition 3.12 *Soit F un sous espace vectoriel de E. L'orthogonal de F, noté $F^\perp$ est le sous espace vectoriel*

$$F^\perp = \{y \in E : \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in F\}.$$

Notons que $(F^\perp)^\perp = F$. On pourra vérifier que, dans $\mathbb{R}^n$, si $F = vect\{u\}$ où $u = (a_1, \cdots a_n)$, alors

$$\begin{aligned} F^\perp &= \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = 0, \quad \forall x \in F\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \lambda u, y \rangle = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : \lambda \langle u, y \rangle = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : \langle u, y \rangle = 0\} \\ &= \{y = (x_1, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_n x_n = 0\}. \end{aligned}$$

Proposition 3.13 *On a la somme directe*

$$E = F \oplus F^\perp.$$

3.4 Base orthonormées

Dans la suite de cette section, on se place dans E, un espace hilbertien ou hermitien, sans restriction.

Definition 3.14 *Soit $(e_1, \cdots, e_n, \cdots)$ une base de E. On dit qu'elle est orthonormée si*

(i) pour tout $i \in 1, \cdots, n$, $||e_i|| = 1$,

(ii) ses éléments sont deux à deux orthogonaux :

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0, \qquad i \neq j.$$

Notons que sur un vecteur e_1 de norme 1, le projeté de u sur $F = Vect\{e_1\}$ est

$$p_F(u) = \langle u, e_1 \rangle e_1.$$

Pour bien comprendre, $|\langle u, e_1 \rangle|$ est la longueur du projeté orthogonal, et e_1, de norme 1, dirige le projeté.

Il suit que si $(e_1, \cdots, e_n, \cdots)$ est une base orthonormée, un vecteur $u \in E$ s'écrit

$$u = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle u, e_n \rangle e_n + \cdots,$$

i.e. le vecteur u est la somme de ses projetés dans les directions de chaque vecteur de la base orthonormée.

On observe que les coefficients $\langle u, e_i \rangle$ sont les coordonnées de u dans la base orthonormée, et le théorème de Pythagore nous dit

$$||u||^2 = \langle u, e_1 \rangle^2 + \cdots + \langle u, e_n \rangle^2 + \cdots.$$

Note. Il est fondamental que $||e_i||$ soit de norme 1, sans quoi, en posant $F = Vect\{v\}$, avec v un vecteur quelconque,

$$p_F(u) = \frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2} v.$$

Theorem 3.15 *Soit E un espace hilbertien ou hermitien. Il existe dans E des bases orthonormées.*

La preuve réside dans la construction algorithmique suivante d'une base ortonormée à partir d'une base quelconque, appelé procédé de Gram–Schmidt. Soit $(e_1, \cdots e_n, \cdots)$ une base de E. On initialise la construction,

$$u_1 = \frac{e_1}{||e_1||}.$$

Le $k$ieme vecteur est la normalisation du vecteur e_k auquel on a retiré les projetés sur les espaces vectoriels engendrés par les vecteurs précédents,

$$\tilde{u}_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i\rangle, \qquad u_k = \frac{\tilde{u}_k}{||\tilde{u}_k||}.$$

Alors $(u_1, \cdots u_n, \cdots)$ ainsi définis forment une base orthonormée de E.

3.5 Projection orthogonale

Sur l'espace hilbertien ou hermitien E, on considère le sous espace F de base orthonormée $(e_1, \cdots, e_p, \cdots)$ et $F^\perp$ de base orthonormée $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \cdots)$.

Theorem 3.16 *Le projeté orthogonale de x sur F est donné par*

$$p_F(x) = \langle x, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_p\rangle e_p + \cdots .$$

On peut rappeler le théorème de Pythagore dans notre cas,

$$||x||^2 = ||p_F(x)||^2 + ||p_{F^\perp}(x)||^2,$$

À l'aide du théorème de Pythagore, on peut montrer que la projection orthogonale de u sur un sous espace F de E est l'unique point v de F qui minimise la distance de u à v :

$$||u - p_F(u)|| = \inf\{||u - v||; \quad v \in F\}.$$

En effet, pour tout $v \in F$,

$$||u - v||^2 = ||u - p_F(u) + p_F(u) - v||^2 = ||p_{F^\perp}(u) + p_F(u) - v||^2.$$

On note que $p_F(u) - v \in F$ est orthogonal à $p_{F^\perp}(u)$. Par le théorème de Pythagore,

$$||u - v||^2 = ||p_{F^\perp}(u)||^2 + ||p_F(u) - v||^2,$$

qui est minimale pour $v = p_F(u)$.

4 Espaces de fonctions

Nos fonctions usuellement utilisées définie sur un espace ou un sous-ensemble E à valeur dans un espace F peuvent être regroupées dans un ensemble noté $L^0(E,F)$ ou juste $L^0(E)$ si F est implicite. Nous proposons de donner un catalogue des ensembles de fonctions qui pourront nous intéresser.

(i) Les classes de régularité :

- $\mathcal{C}^0(J,\mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions continues de J vers $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{C}^k(J,\mathbb{R})$: le sous-ensemble de $L^0(J,\mathbb{R})$ constitué des fonctions dont la k-ième dérivée est continue ;
- $\mathcal{C}^\infty(J,\mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables (c'est-à-dire n fois dérivables pour tout entier n de J vers $\mathbb{R}$, aussi appelées fonctions lisses ou régulières.
- $L^\infty(J,\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions bornées sur J.

On peut munir ces espaces de la norme

$$||f||_\infty = sup_{x\in J}|f(x)|.$$

Il suit que

$$L^\infty = \{f \in L^0,\ ||f||_\infty < \infty\}.$$

(ii) Posons $a_0, \cdots, a_n$ d'une subdivision de $J = [a_0, a_n] = \bigcup_{i=0}^n [a_i, a_{i+1}]$. On peut définir les $\mathcal{C}^k$ *par morceaux*, c'est à dire que la propriété de régularité est vérifiée sur les intervalles ouverts $]a_i, a_{i+1}[$ et la dérivée $k$ème prolongeable par continuité sur l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$. Par exemple, les fonctions $\mathcal{C}^1(J)$ sont dérivables et continues sur $]a_i, a_{i+1}[$ et admettent une dérivée à gauche de a_{i+1} (finie) et à droite de a_i (finie).

(iii) Le support d'une fonction est l'ensemble des valeurs de J pour lesquelles l'image par la fonction n'est pas nulle. On pourra définir l'ensemble des fonctions à support compact. Notons le résultat suivant.

Theorem 4.1 *Une fonction continue à support compact est bornée et atteint ses bornes.*

(iv) Les espaces L^p (pour $p \geq 1$).

Notons que, pour tout $p \geq 1$,

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$$

est une norme. On note, pour $p \geq 1$

$$L^p = \left\{f \in L^0 : ||f||_p < \infty\right\}.$$

Ainsi, L^1 est l'ensemble des fonctions intégrables, L^2 est l'ensemble des fonctions dont le carré est intégrable ...

Theorem 4.2 *L'ensemble L^2 muni de sa norme $||\cdot||_2$ est un espace hilbertien (resp. hermitien) dont la norme découle du produit scalaire*

$$\langle f,g\rangle = \int f(u)g(u)du \qquad \left(resp.\ \langle f,g\rangle = \int f(u)\bar{g}(u)du\right).$$

Part II

Théorie de Fourier et traitement du signal

Issue des travaux de Joseph Fourier (1822) sur la "théorie analytique de la chaleur", la théorie des séries de Fourier étudie la décomposition d'un signal en signaux périodiques plus simples (décomposition d'un son en harmoniques par exemple) et de sa reconstitution (synthèse harmonique)[6].

5 Introduction au traitement du signal

Un signal est le support physique d'une information ou d'une commande. Il se présente sous différentes formes : signal électromagnétique (signal électrique, signal magnétique, signal radioélectrique ...), signal acoustique (son, échographie, ...), signal graphique (film, ...)...

Par abus de langage, le modèle mathématique permettant de représenter le signal réel est souvent désigné par le mot signal.

Un signal déterministe (ou signal certain) est un signal dont on peut connaître les états futurs, dont l'évolution peut parfaitement être décrite par un modèle mathématique approprié : signal généralement rencontré en laboratoire.

Un signal aléatoire a une forme imprévisible à l'avance, et est donc susceptible d'être porteur d'informations.

Le signal de gauche est périodique. On aura tendance à le résumer par l'observation de son évolution sur la période T (série de Fourier). On ne pourra pas faire de telle restriction pour le signal de droite (transformée de Fourier).

[6] La possibilité de représenter une fonction périodique par une série trigonométrique était déjà étudiée au 18e siècle.

5.1 Classification énergétique

Une classification peut être faite à partir des notions d'énergie ou de puissance d'un signal. Au signal $f(t)$ (fonction complexe ou réelle de t), on associe :

- l'énergie, E_f, définie, si elle existe, par :
$$E_f = \int_0^\tau |f(t)|^2 dt,$$
sur le support temporel τ ;
- la puissance moyenne, P_f, définie, si elle existe par :
$$P_f = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau |f(t)|^2 dt$$

A partir de ces définitions, apparaissent deux classes de signaux :

- signaux à énergie finie : $E_x < \infty$,
- signaux à puissance moyenne finie : $PX < \infty$ (signaux à énergie infinie), qui contiennent les signaux périodiques ou les signaux aléatoires permanents.

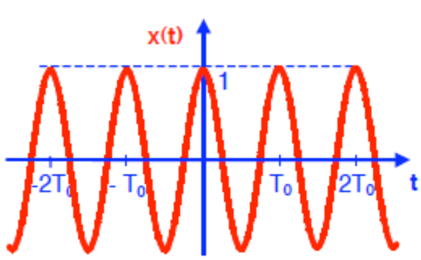
Les signaux "réels" (rencontrés en pratique) sont des signaux à énergie finie (définis sur une durée finie), cependant les signaux à puissance moyenne finie sont souvent utilisés pour modéliser des générateurs de signaux périodiques par exemple. Enfin, certains signaux théoriques n'appartiennent ni à l'une ni à l'autre de ces catégories.

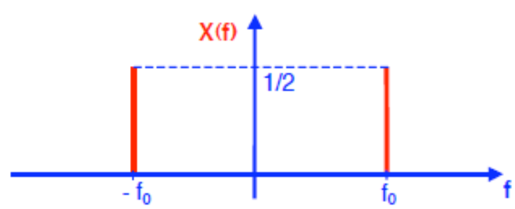
5.2 Représentation en temps et en fréquence

La description la plus simple d'un signal est donnée par la représentation des variations de l'amplitude en fonction du temps.

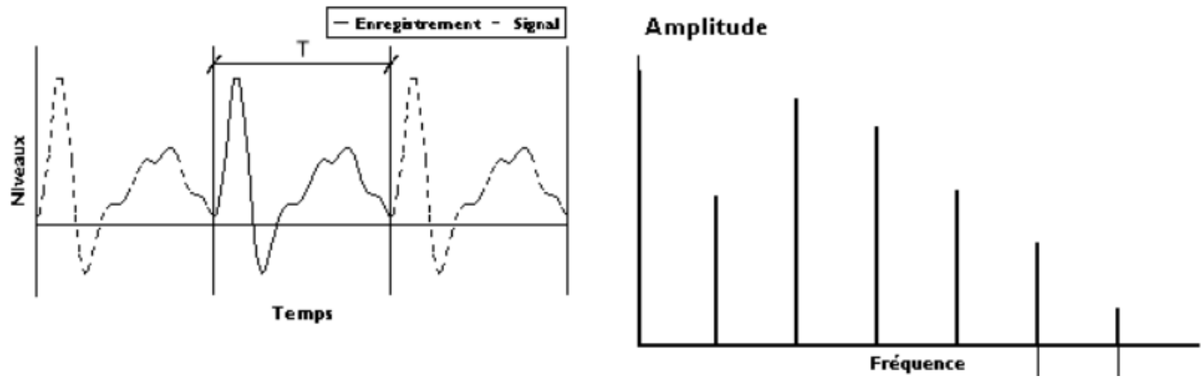
Une représentation très concrète pour le physicien est donnée par la représentation des amplitudes du signal en fonction de la fréquence : cette représentation est appelée spectre du signal.

On rapelle que pour une période T_0, on définit la fréquence associée $f_0 = T_0^{-1}$. Ainsi un signal élémentaire qui ne contient qu'un phénomène de période t_0, nommé **harmonique**, a un spectre qui contient f_0 et $-f_0$:





Et un signal plus complexe sera composés de signaux élémentaires de différentes fréquences.



Réciproquement, une fréquence f_0 donnée donnera donc naissance à un signal élémentaire, parfaitement régulier de période T_0 appelé ondelette. Quantifier la quantité de chaque ondelette dans un signal revient à utiliser la théorie de Fourier, détaillée dans ce qui suit.

6 Séries de Fourier

Chaque signal périodique s'associe donc à un spectre.

Nous allons introduire la famille des signaux associés à tous les éléments possibles du spectre.

6.1 Rappels

Une fonction f définie sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$$

de I telle que f est continue sur tout intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, pour $k \in \{0, \cdots, p-1\}$ et admet en chacun des points x_k des limites à gauche et à droite finies. On dit que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ si elle est continue par morceaux sur tout segment. (faire un dessin)

Definition 6.1 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et soit T un réel strictement positif. On dit que f est périodique de période T si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(x+T)$.*

Notons que pour définir une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ il suffit de la définir sur un intervalle de la forme $[a, a+T[$. La parité permet parfois de se restreindre à un intervalle de la forme $[a, a+T/2[$.

Remarque 6.2

- *Si f est périodique de période T, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, f est périodique de période kT.*
- *Soit $f_1, \cdots, f_n$ des fonctions périodiques de période T. Si $a_1, \cdots, a_n$ sont des complexes, $\sum_j a_j f_j$ est périodique de période T.*

Exemple.

(i) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction
$$x \mapsto e^{2\pi ikx}$$
est périodique de période 1.

(ii) Si $T \neq 0$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction
$$x \mapsto e^{\frac{2\pi}{T}ikx}$$
est périodique de période T.

(iii) Il résulte donc de ce qui précède que tout polynôme trigonométrique
$$P_N(x) = \sum_{-N}^{N} c_k e^{\frac{2\pi}{T}ikx}$$
avec les c_k des complexes, est une fonction périodique de période T.

6.2 Rappels d'intégration

Soit T un réel strictement positif et f une fonction continue par morceaux, périodique de période T. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a
$$\int_a^{a+T} f(u)du = \int_0^T f(u)du.$$
En effet,
$$\int_a^{a+t} f(u)du = \int_a^0 f(u)du + \int_0^T f(u)du + \int_T^{T+a} f(u)du.$$
Or, le changement de variable $u = T + x$ montre que
$$\int_T^{a+T} f(u)du = \int_0^a f(x-T)dx = -\int_a^0 f(u)du.$$
ce qui termine la démonstration.

6.3 Définition

Dans l'espace $E(T)$ des fonctions continues par morceaux périodiques de période T, l'application

$$\langle f, g\rangle \in E^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\bar{g}(u)du$$

définit un produit hermitien.

Les harmoniques élémentaire pour reconstituer un signal T périodique sont données par la famille suivante.

Theorem 6.3 *La famille*

$$(e_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \left(e^{\frac{2\pi}{T}ikx}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$$

est une base de l'espace des fonctions continues par morceaux et $T-$périodiques.

Proof. Soit T un réel positif. Pour tout couple d'entiers $(n \neq p)$ on a

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_p\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{\frac{2\pi}{T}inkx}e^{-\frac{2\pi}{T}ipx}dx \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T e^{\frac{2\pi}{T}i(n+p)x}dx \\
&= \frac{1}{T}\left[\frac{e^{\frac{2\pi}{T}i(n+p)x}}{\frac{2\pi}{T}i(n+p)}\right]_0^T = \frac{1}{T}\left(\frac{e^{\frac{2\pi}{T}i(n+p)T}}{\frac{2\pi}{T}i(n+p)} - \frac{1}{\frac{2\pi}{T}i(n+p)}\right) = \frac{1}{T}\left(\frac{e^{2\pi\ i(n+p)}}{\frac{2\pi}{T}i(n+p)} - \frac{1}{\frac{2\pi}{T}i(n+p)}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Si $n = p$,

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_n\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{\frac{2\pi}{T}inkx}e^{-\frac{2\pi}{T}inx}dx \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T e^{\frac{2\pi}{T}i(n-n)x}dx \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T 1dx \\
&= \frac{1}{T}\times T = 1.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\langle e^{\frac{2\pi}{T}inx}, e^{\frac{2\pi}{T}ipx}\rangle \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = p \\ T & \text{si} \quad n \neq p \end{cases}.$$

Il suit que la famille

$$(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$$

est orthonormée (donc libre). Le caractère générateur de la famille est assuré par des théorèmes plus compliqués mais on peut donner, ici, une intuition d'un tel résultat.

- Notons la $T-$périodicité des harmoniques $e^{i\frac{\pi k}{T}x}$ pour $k \in \mathbb{Z}$:

  $$e_k(x+T) = e^{\frac{2\pi}{T}ik(x+T)} = e^{\frac{2\pi}{T}ikx} \times e^{\frac{2\pi}{T}ikT} = e^{\frac{2\pi}{T}ikx} \times e^{2\pi ik},$$

  qui est égal à $e_k(x)$ si et seulement si $k \in \mathbb{Z}$. Notons, et c'est fondamental, que si $k \notin \mathbb{Z}$, l'harmonique n'est plus $T-$périodique.

- Notons qu'un signal ne peut contenir que des harmoniques de période inférieure à T. Sinon, sur certaines périodes, un événement apparaîtrait mais pas sur d'autres.

On observe ainsi que les harmoniques

$$(e_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \left(e^{\frac{2\pi}{T}ikx}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$$

couvrent tous les phénomènes $T-$périodiques à l'exclusion de toute autre fréquence. □

On va définir les coefficients de Fourier d'une fonction comme les coordonnées dans la base orthonormée précédente.

Definition 6.4 *Soit f une fonction continue par morceaux et périodique de période T. Le complexe*

$$c_p = \langle f, e_p\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-\frac{2\pi}{T}ipx}dx$$

est le $p-$ième coefficient de Fourier complexe de f.

6.4 Propriétés élémentaires

Proposition 6.5 *(i) Si f et g sont continues par morceaux et égales sauf en leurs points de discontinuité, leurs coefficients de Fourier sont égaux.*

(ii) Si f est continue par morceaux et si $T > 0$,

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-\frac{2\pi}{T}ipx}dx\right| \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|dx,$$

de sorte que les coefficients de Fourier de f sont bornés.

(iii) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$

$$c_n(f') = \frac{2\pi in}{T}c_n(f).$$

En particulier, pour $n \neq 0$ on a

$$c_n(f) = \frac{T}{2\pi in}c_n(f').$$

La preuve est laissée en exercice.

6.5 Série de Fourier

En reprenant le fait que les coefficients de Fourier d'une fonction f sont les coordonnées de f dans une base orthonormée, on comprend que c_p quantifie la quantité d'harmonique $e^{i\frac{p\pi}{T}x}$ dans le signal, c'est-à-dire la quantité de signal élémentaire de période T/n. On imagine également pouvoir reconstituer la fonction f par la série suivante

Definition 6.6 *Si f est continue par morceaux et périodique, la série*

$$S_f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \langle f, e^{\frac{2\pi}{T}ipx} \rangle e^{\frac{2\pi}{T}ipx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_p e^{\frac{2\pi}{T}ipx},$$

lorsqu'elle converge, est la série de Fourier de f. Pour tout entier N,

$$S_N(x) = \sum_{-N}^{+N} c_p e^{\frac{2\pi}{T}ipx}$$

est la $N-$ième somme partielle de la série de Fourier de f.

Intuitivement, on peut supposer que

$$S_f(x) = f(x).$$

Malheureusement, la convergence n'est pas si évidente.

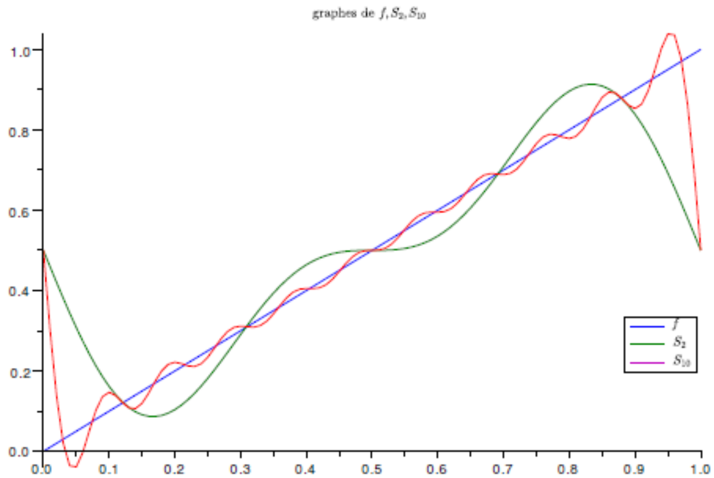
6.6 Convergence

La convergence des séries

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{2\pi}{T}ipx}$$

est celle de la suite des sommes partielles symétriques

$$S_N = \sum_{-N}^{N} c_k e^{\frac{2\pi}{T}ipx}.$$



La série de Fourier d'une fonction f ne converge pas nécessairement, et, même lorsqu'elle converge en un point x_0, sa somme n'est pas toujours égale à $f(x_0)$.

Theorem 6.7 (Dirichelet)
Soit f une fonction continue par morceaux, périodique de période T. Si f admet en tout point une dérivée à gauche et une dérivée à droite, sa série de Fourier converge en tout point x_0. De plus

$$S_f(x) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}.$$

Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue on a convergence uniforme de la série :

$$\lim_{N \to \infty} ||S_N - f||_\infty = 0.$$

6.7 Théorème de Bessel–Parseval

Dans le cadre de l'espace hermitien que nous étudions depuis le début de cette section, nous pouvons considérer que la somme partielle symétrique

$$S_N = \sum_{-N}^{N} c_k e^{\frac{2\pi}{T} ipx}$$

est le projeté de f sur le sous espace $Vact\{e_{-N}, \cdots, e_0, \cdots e_N\}$. Les projections étant des contractions, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 6.8 (Inégalité de Bessel)
Si f est continue par morceaux périodique de période T, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ on a

$$||S_N||^2 = \sum_{-N}^{N} |c_k|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(u)|^2 du = ||f||^2.$$

Enfin, la généralisation du théorème de Pythagore amène au Théorème de Parseval qui donne la conservation de l'énergie entre la fonction et sa sértie de Fourier.

Theorem 6.9 (Théorème de Parseval)
Si f est continue par morceaux périodique de période T, on a

$$||S_f||^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(u)|^2 du = ||f||^2.$$

7 Transformée de Fourier

Tout signal peut être représenté dans l'espace temps et dans l'espace des fréquences. Ces deux représentations sont liées par la transformée de Fourier.

Si on observe des signaux non périodiques, la restriction à un intervalle portant la période ne suffit plus. La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ précédente ne suffit plus.

7.1 Rappels

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est *localement intégrable* si $|f|$ est intégrable sur tout segment. Toute fonction continue par morceaux est localement intégrable. Une fonction f est dite intégrable sur $\mathbb{R}$ si

- f est localement intégrable.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$ c'est à dire si $\int_A^B |f(x)|\, dx$ a une limite finie quand $A \to -\infty$ et $B \to +\infty$.

Si f et g sont continues par morceaux et si $|g(x)| \leq |f(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrabilité de f entraîne celle de g.

Exemple

(i) Une fonction nulle hors d'un segment $[a, b]$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.[7]

(ii) La fonction continue $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (ici on peut faire le calcul).

(iii) Une fonction de la forme $P(x)e^{-b|x|}$ est intégrable.

(iv) De même pour tout polynôme P, la fonction $x \mapsto P(x)e^{-x^2}$ est intégrable.

(v) Une fonction continue périodique non nulle n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

(vi) Si g est intégrable et h contiue bornée, alors gh est intégrable

Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, il en est de méme de $x \mapsto f(x)e^{2\pi ixy}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ puisque $|e^{-2\pi ixy}| = 1$.

[7] En théorie du signal on n'observe en pratique un signal que sur un intervalle de temps fini $[a, b]$.

7.2 Définition

Definition 7.1 *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ on appelle* transformée de Fourier de f *la fonction, notée $\hat{f}$ définie par*

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x y} dx.$$

Remarque 7.2 (Interprétation en terme de signal)
Si $t \mapsto f(t)$ est un un signal, on parle de signal temporel.
En tout point y, $\hat{f}(y)$ est la composante fréquentielle du signal f à la fréquence y. Autrement dit, la transformée de Fourier n'est qu'une traduction dans le domaine fréquentiel. *Elle consiste simplement à peser le poids relatif de chaque fréquence dans un signal temporel donné. Elle quantifie la présence de l'harmonique $1/y-$périodique $x \mapsto e^{-2\pi i y x}$.*
En particulier, si f est intégrable,

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\, du.$$

$\widehat{f}(0)$ est la composante fréquentielle de f à la fréquence nulle : c'est la composante continue du signal.

Exemple fondamental Soit Π la fonction (dite fonction porte)[8] caractéristique de $[-1/2, 1/2]$:

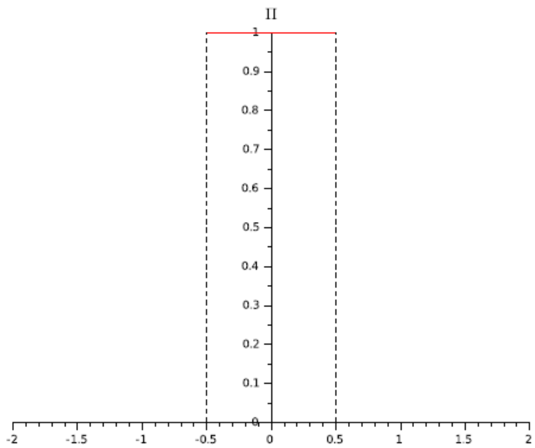
$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{si} \quad |x| > \frac{1}{2} \end{cases} .$$

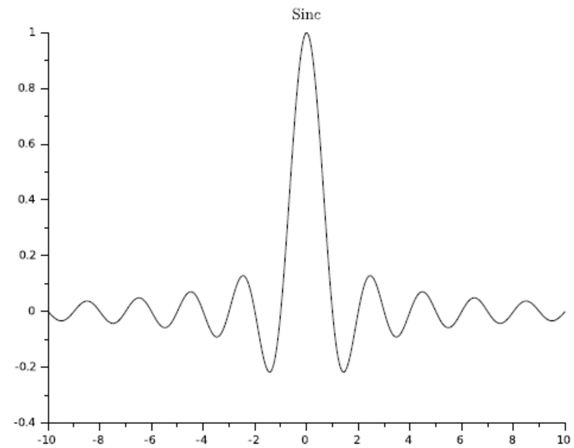
Π est continue par morceaux nulle hors d'un segment donc intégrable. De plus, pour tout $y \neq 0$,

$$\hat{\Pi}(y) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i t y}\, dt = \frac{e^{-\pi i y} - e^{+\pi i y}}{-2\pi i y} = \frac{\sin(\pi y)}{\pi y}.$$

En outre, $\hat{\Pi}(0) = 1$. On note $\hat{\Pi}(y) = \mathrm{Sinc}(y)$.
Remarquons tout de suite que $\hat{\Pi}$ est une fonction continue

[8]Les portes sont essentielles en théorie du signal puisque l'observation d'un signal ne peut se faire que sur un intervalle de temps borné : autrement dit on observe en général un signal de la forme $f(t)\xi(t)$ où ξ est une fonction caractéristique d'intervalle.





On note Λ la fonction affine par morceaux, nulle hors de $[-1,1]$, égale à $1+t$ sur $[-1,0]$ et $1-t$ sur $[0,1]$.
Un calcul direct montre que $\widehat{\Lambda}(y) = \mathrm{Sinc}^2(y)$.

Remarque 7.3 *Toute fonction continue par morceaux et à support compact (borné) est intégrable et admet donc une transformée de Fourier. Il faut cependant remarquer que la transformée de Fourier d'une telle fonction n'est* jamais *à support borné.*

Theorem 7.4 *La transformation de Fourier est une application linéaire de l'espace des fonctions continues par morceaux intégrables dans l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini. Autrement dit, si f et g sont intégrables et si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ on a*

$$\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}.$$

Remarque 7.5 *Si f et g sont intégrables et égales sauf en leurs points de discontinuité, elles ont même transformée de Fourier.*

Proposition 7.6 *Si f est intégrable, $\hat{f}$ est une fonction continue.*

Preuve. Ceci résulte du théorème de continuité des intégrales à paramétre (*i.e.* du théorème de convergence dominée) .
□

Comme dans le cas des séries de Fourier, on remarque que si f est intégrable,

$$\left| \hat{f}(y) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx.$$

$\hat{f}$ est donc une fonction bornée. En fait...

Proposition 7.7 **[Théorème de Riemann Lebesgue]**
Si f est intégrable, $\hat{f}$ tend vers 0 à l'infini.

Preuve. On peut donner ici une *idée de démonstration*. Le résultat étant clair pour les fonctions caractéristiques d'intervalle, donc aussi pour les fonctions en escalier nulles hors d'un compact, il suffit ensuite d'utiliser un argument de densité. □

Proposition 7.8 *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux intégrables. On a*

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\hat{g}(t)dt.$$

Preuve. g étant intégrable et $\hat{f}$ continue bornée, le produit $g\hat{f}$ est intégrable (5). Cette proposition est une conséquence du théorème de Fubini. □

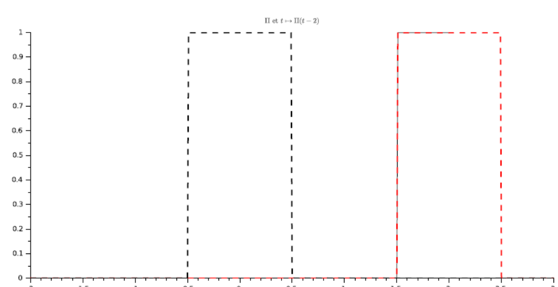
7.3 Premières propriétés

Il est en général difficile de calculer directement une transformée de Fourier. On s'attachera donc à limiter au maximum les calculs d'intégrales en utilisant les *propriétés opératoires* de cette transformation.

Soient f une fonction intégrable et a un réel. Si on définit $g : t \mapsto f(t-a)$ le changement de variable $u = x - a$ montre que

$$\hat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x-a)e^{-2\pi ixy}\,dx = e^{-2\pi iay}\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{2\pi iuy}\,du.$$

Il est courant de noter $\tau_a f$ la fonction g. On dit que la transformation de Fourier transforme une translation en multiplication par une exponentielle.



Π et une translatée $t \mapsto \Pi(t-2)$

Exemple Soit f un signal intégrable. Moduler ce signal en amplitudes revient à multiplier f par $t \mapsto A\cos(2\pi Ft)$. Le signal obtenu est donc $g\ : t \mapsto A\cos(2\pi Ft)f(t)$. En écrivant le cosinus comme somme d'exponentielles, on obtient alors

$$\widehat{g}(y) = \frac{A}{2}\left(\widehat{f}\,(y-F) + \widehat{f}\,(y+F)\right).$$

De même si $h(t) = e^{2\pi i a t} f(t)$ on obtient

$$\hat{h}(y) = \hat{f}(y - a).$$

Enfin, si $a > 0$ et $k(t) = f(at)$ un calcul simple (changement de variable $u = t/a$ le faire pour leur faire manipuler des intégrales) montre que

$$\hat{k}(y) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{y}{a}\right). \tag{7.1}$$

Si $a \neq 0$ et $k(t) = f(t/a)$

$$\hat{k}(y) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{y}{a}\right).$$

Plus généralement, on peut calculer la transformée de Fourier de la fonction u définie par $u(t) = f(at + b)$

Exemple Notons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g_n(t) = n\Pi(nt).$$

C'est la fonction égale à n sur $[-1/2n, 1/1n]$ et nulle hors de cet intervalle. Ce qui précède montre que, pour $y \neq 0$,

$$\hat{g_n}(y) = \frac{\sin\left(\pi\frac{y}{n}\right)}{\pi\frac{y}{n}}.$$

La continuité de $\widehat{g_n}$ entraîne alors que $\widehat{g_n}(0) = 1$. De plus, puisque $\lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{u} = 1$, on a, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\lim_n g_n(y) = 1$.

Noter que la fonction constante égale 1 *n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable* (7.7). On dit que g_n converge vers la masse de Dirac.[9].

L'idée principale ici est de pouvoir calculer la transformée de Fourier d'une fonction f simple *sans calculer d'intégrale.*

7.4 Transformation de Fourier et dérivation

Le théorème de dérivation sous le signe intégral donne le résultat suivant :

Theorem 7.9 *Si f et $t \mapsto tf(t)$ sont intégrables, la transformée de Fourier de f est dérivable et*

$$\hat{f}'(y) = -\widehat{2\pi i t f}(t).$$

Remarque 7.10 *$tf(t)$ peut être intégrable sans que f le soit (voir la fonction égale à $1/t$ sur $]0,1[$ et nulle ailleurs. Et si f est intégrable, $tf(t)$ ne l'est en général pas.*

Theorem 7.11 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si f et f' sont intégrables, on a*

$$\widehat{f'}(y) = 2\pi i y \hat{f}(y).$$

[9] la convergence ayant lieu au sens des distributions

Preuve. Pour tout $(A,B)\in\mathbb{R}^2$

$$\int_A^B f'(t)e^{-2\pi ity}\,dt = \left[f(u)e^{-2\pi iuy}\right]_A^B + \int_A^B f(t)(2\pi iy)e^{-2\pi ity}\,dt.$$

Mais, f' étant supposée intégrable, et puisque

$$f(u) = f(0) + \int_0^u f'(t)\,dt,$$

$f(u)$ admet une limite finie quand u tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. L'intégrabilité de f montre alors que cette limite est nécessairement nulle. $\Box$

Plus généralement si f est $\mathcal{C}^k$ et si $f, f', \cdots f^{(k)}$ sont intégrables on a

$$\widehat{f^{(k)}}(y) = (2\pi iy)^k\,\hat{f}(y).$$

Comme dans le cas des séries de Fourier, on voit que plus une fonction est régulière plus sa transformée de fourier décroît rapidement à l'infini.

On dit que la transformation de Fourier transforme dérivation en multiplication. Ce dernier résultat explique en partie l'utilité de la transformation de Fourier dans les problèmes d'équations aux dérivées partielles.

Exemple Soit f définie par $f(x) = e^{-x^2}$. Nous savons que f est intégrable de même que f' (7.1). De plus si φ est la transformée de Fourier de f,

$$\varphi'(y) = \int_{\mathbb{R}} (2\pi it)e^{-t^2}e^{-2\pi ity}\,dt.$$

et une intégration par parties montre que

$$\varphi'(y) = -2\pi^2 y\varphi(y).$$

Il en résulte que $\varphi(y) = Ce^{-\pi^2y^2}$ avec $C = \varphi(0) = \sqrt{\pi}$.

Un calcul simple montre alors que $t \mapsto e^{-\pi x^2}$ est invariante par transformation de Fourier. De plus, en utilisant (7.1), pour $t > 0$ on obtient :

$$\widehat{e^{-\pi t^2x^2}}(y) = \frac{1}{t}e^{-\pi\frac{x^2}{t^2}}. \tag{7.2}$$

Exemple Connaissant la transformée de Fourier de Π on peut par exemple déterminer *sans calcul* celle de la fonction f nulle hors de $[2,4]$ et égale à 3 sur cet intervalle. En effet, $f(t) = 3\Pi\left(\frac{t-3}{2}\right)$.

7.5 Théorème d'inversion

La synthèse harmonique n'est possible que si l'on peut, à partir d'une transformée de Fourier, revenir au signal temporel. Le théorème suivant montre en quelque sorte que $\hat{f}$ caractérise la fonction f.

Theorem 7.12 *Soit f une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}$. Si $\hat{f}$ est intégrable, on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{-2\pi i t x} dt.$$

La fonction $x \mapsto f(-x)$ est encore notée $\check{f}$: le résultat précédent s'écrit alors $\check{f} = \hat{\hat{f}}$.

Corollary 7.13 *Soient f et g deux fonctions continues intégrables. Si $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont integrables et egales, alors $f = g$.*

Exemple On utilise parfois le théorème d'inversion pour calculer des transformées de Fourier. Par exemple, il n'est pas très facile[10] de calculer directement la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Mais, un calcul direct montre que, si $g : x \mapsto \pi e^{-2\pi|x|}$

$$\widehat{g}(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

et le théorème d'inversion permet donc de conclure.

7.6 Théorème de parseval

Theorem 7.14 *Soient f et g deux fonctions intégrables. Si $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont intégrables*

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}\overline{\hat{g}} dx = \int_{\mathbb{R}} f\overline{g} dx.$$

Corollary 7.15 *Si f et $\hat{f}$ sont de carrés intégrables,*

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 dx.$$

7.7 Relation d'incertitude

Soit f un signal intégrable *d'énergie finie i.e.* tel que $|f|^2$ soit intégrable. On suppose en outre que $\widehat{f}$ est intégrable et de carré intégrable. D'après le théorème de Parseval, l'énergie du signal vérifie

$$E = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, dt = \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f}\right|^2 dt.$$

$t \mapsto \frac{|f|^2}{E}$ et $t \mapsto \frac{|\widehat{f}|^2}{E}$ sont des fonction positives d'intégrale égale à 1 : ce sont des densités de probabilité. On peut alors montrer que les variances correspondantes Δ_1^2 et Δ_2^2 vérifient l'inégalité suivante :

$$\Delta_1 \Delta_2 \geq \frac{1}{4\pi}. \tag{7.3}$$

Le cas de l'égalité étant obtenu dans le cas gaussien.

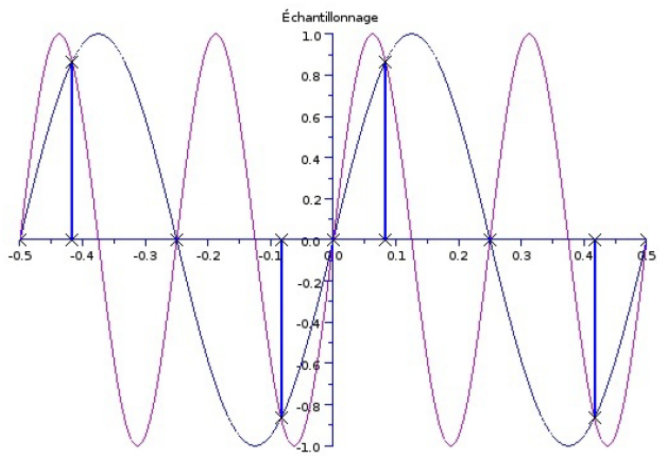
L'équation (7.3) s'interprète de la façon suivante. Plus un signal est concentré dans le domaine temporel, plus il est étalé dans le domaine fréquentiel (et réciproquement).

[10] On utilise pour ce faire le théorème des résidus.

8 Échantillonnage, théorème de Shannon

Le traitement numérique des données (téléphonnie, CD audio *etc* ...) ne peut se faire que sur des données *finies*. Il faut donc représenter ces données par une suite de valeurs numériques ponctuelles prélevées régulièrement ou irrégulièrement. Un tel prélèvement est appelé *échantillonnage*.

Il est clair que l'échantillonnage visible sur la figure suivante ne permet pas de distinguer les deux signaux.



échantillonnage insuffisant

Par exemple, si $f(t) = \sin(2\pi x)$ et $g(t) = \sin\left(2\pi\left(\frac{1}{T}+1\right)x\right)$, un échantillonnage aux points $x_k = kT$, k entiers, nous donne les mêmes valeurs pour $f(x_k)$ et $g(x_k)$. On voit d'ailleurs assez facilement qu'un échantillonnage à une fréquence de moins de deux fois la fréquence maximale d'un signal ne peut pas caractériser le signal.

Theorem 8.1 *Soit f une fonction continue intégrable à spectre borné. Si supp$\hat{f} \subset [-\nu, \nu]$, alors, pour tout réel x,*

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k\pi}{\nu}\right)\frac{\sin(\nu x - k\pi)}{\nu x - k\pi}.$$

Preuve. $\hat{f}$ est intégrable puisque continue à support compact. On peut donc appliquer le théorème d'inversion :

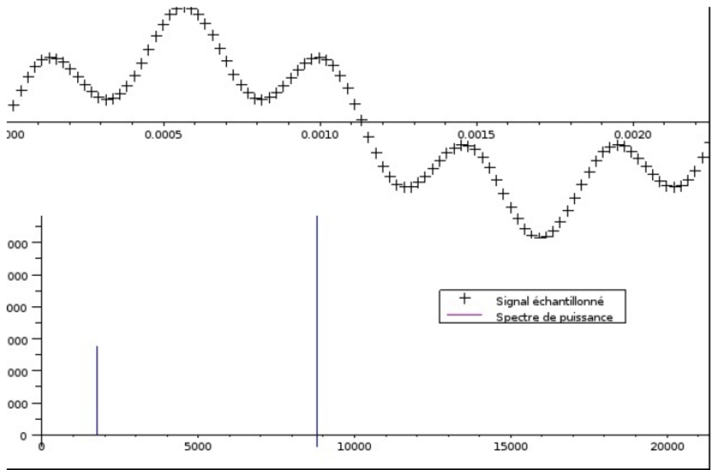
$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{2\pi itx}dt = \int_{-\nu}^{\nu} \hat{f}(t)e^{2\pi itx}dt.$$

En particulier, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$,

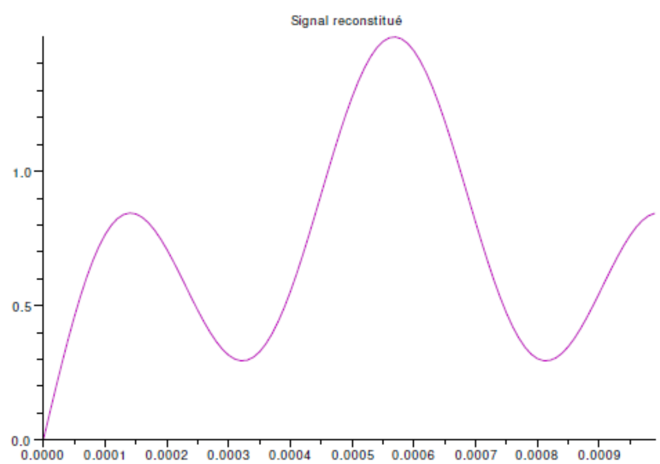
$$f\left(\frac{2k\pi}{\nu}\right) = \int_{-\nu}^{\nu} \hat{f}(t)e^{2\pi i\frac{2k\pi}{\nu}t}dt.$$

On reconnaît ici, à une constante prés, les coefficients de Fourier de la fonction périodique de période 2ν égale à $\hat{f}$ sur $[-\nu, \nu]$. Le théorème de Dirichlet montre donc que $\hat{f}$ est entièrement déterminée par la famille $\left(f\left(\frac{2k\pi}{\nu}\right)\right)$. Le théorème d'interversion série-intégrale fournit alors le résultat. $\square$[11]

Échantillonnage et spectre de puissance :



Reconstruction du signal précédent :



8.1 Convolution

Soit f une fonction intégrable. Pour éliminer des fréquences génantes dans le spectre de f, il suffit de multiplier, par exemple, $\hat{f}$ par une fonction g nulle hors d'un intervalle $[a, b]$ (on parle alors de

[11] En pratique, on n'échantillonne que sur un intervalle de temps *fini*. Mais la transformée de Fourier d'une fonction à support compact n'est jamais à support compact : il faut donc utiliser des distributions tempérées.

filtre passe bande)[12].

On calcule donc $H(y) = \hat{f}(y)\hat{g}(y)$: c'est une fonction continue par morceaux nulle hors de $[a, b]$ donc intégrable. Supposons que H soit la transformée de Fourier d'une fonction continue h. Le théorème d'inversion donne alors :

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int_{\mathbb{R}} H(y)e^{2\pi iyx}\,dy && (8.4)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-2\pi uy}\,du\right)\hat{g}(y)e^{2\pi ixy}\,dy && (8.5)\\
&= \int_{\mathbb{R}} f(u)\left(\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y)e^{-2\pi i(u-x)y)}dy\right)du && (8.6)\\
&= \int_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u)\,du. && (8.7)
\end{aligned}$$

Dans ce cas l'original du signal est donc la fonction définie par

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u)\,du.$$

Definition 8.2 *Si f et g sont continues intégrables, pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $u \mapsto f(u)g(x-u)$ est intégrable. La fonction $f \star g$ définie par*

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u)\,du$$

est le produit de convolution de f et g .

Remarque 8.3 *le changement de variable $v = x - u$ montre que $f \star g = g \star f$.*

Cette convolution est en particulier définie lorsque f est intégrable et g continue par morceaux à *support* borné. Si g est nulle hors de $[a, b]$,

$$f \star g(x) = g \star f(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-t)dt = \int_a^b g(t)f(x-t)dt.$$

Si f et g sont nulles hors de l'intervalle $[0, +\infty[$ (on dit que f et g sont causales) alors, pour tout $t > x$, $g(x-t) = 0$ et pour tout $t < 0$, $f(t) = 0$ de sorte que

$$f \star g(x) = \int_0^{+\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

On a le résultat fondamental suivant :

Theorem 8.4 *Si f et g sont intégrable on a*

$$\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}.$$

Autrement dit, la transformation de Fourier transforme un produit de convolution en produit ordinaire. Ceci explique, en partie, l'intérêt de la convolution pour le filtrage.

[12] On ne peut pas prendre ici $g = \Pi$ puisque cette fonction, n'étant pas continue, n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction intégrable mais c'est la transformée de Fourier d'une distribution tempérée.

8.2 Support

Soit $I = (a, b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (ouvert, semi ouvert ou fermé). *L'adhérence* de I est l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) qui continent I. C'est donc l'intervalle fermé de bornes a et b.

Definition 8.5 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le* support de f *est l'adhérence de* $\{x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) \neq 0\}$.

Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, On note $A + B$ l'ensemble $A + B = \{a + b \in \mathbb{R}\ ;\ a \in A, b \in B\}$.

Proposition 8.6 *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux à supports bornés. $f \star g$ est à support borné et*

$$supp\,(f \star g) \subset supp(A) + supp(B).$$

Exemple Prenos $f = g = \Pi$; Ces deux fonctions sont convolables et

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} \Pi(t)\Pi(x-t)dt = \int_{-1/2}^{1/2} \Pi(x-t)dt.$$

Le changement de variable $u = x - t$ donne

$$f \star g(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} \Pi(u)\, du.$$

Si $x < -1$, $x + 1/2 < -1/2$ et $f \star g(x) = 0$; de même, si $x > 1$, $f \star g(x) = 0$. Si $x \in [-1, 0]$, $f \star g(x) = 1 + x$ et, si $x \in [0, 1]$, $f \star g(x) = 1 - x$. Il en résulte que $f \star g = \Lambda$.

Remarque 8.7 *Notons $P = \sum_0^n a(k)X^k$ et $Q(X) = \sum_0^p b(k)X^k$ deux polynômes. Les coefficients du produit sont donnés par*

$$c_k = \sum_0^k a(j)b(k-j).$$

*La suite c_k est la convolée (discrète) des suites a et b. Un produit étant beaucoup plus rapide à calculer qu'une convolution, on utilise la transformée de Fourier (*discrète*) pour calculer le produit de polynômes.*

Remarque 8.8 *Il résulte du théorème de dérivation sous le signe intégral que si f est intégrable et g de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact (borné), $f \star g$ est $\mathcal{C}^\infty$ et*

$$(f \star g)^{(k)} = f \star g^{(k)}.$$

On dit que la convolution régularise.

Theorem 8.9 *Soient f et g deux fonctions intégrables telles que*

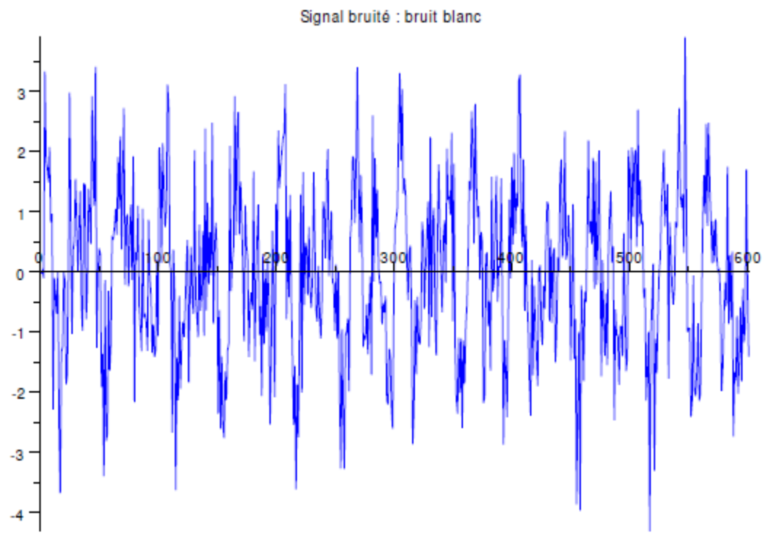
(i) $f \cdot g$ est intégrable.

(ii) $\hat{f}$ *et* $\hat{g}$ *sont intégrables.*

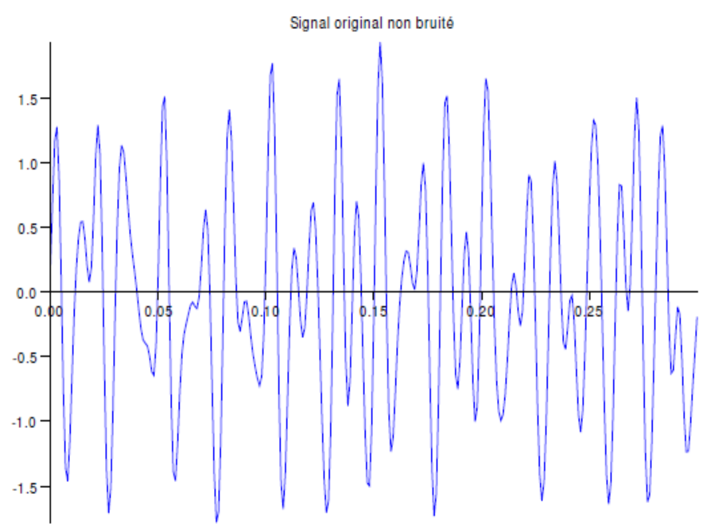
Alors la transformée de Fourier du produit fg *est le produit de convolution* $\hat{f} \star \hat{g}$.

C'est une conséquence de ce qui précède et du théorème d'inversion.

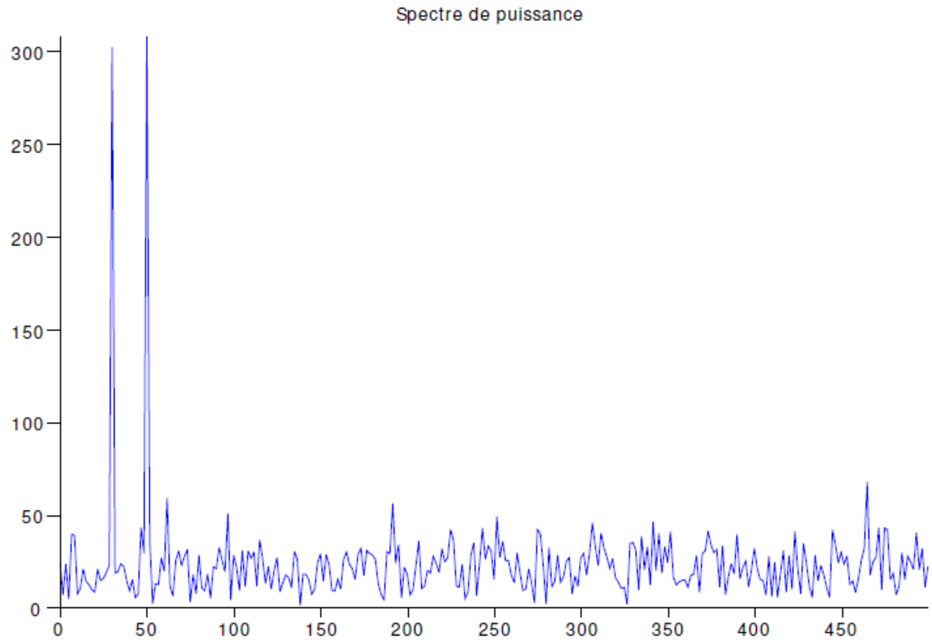
Signal bruité :



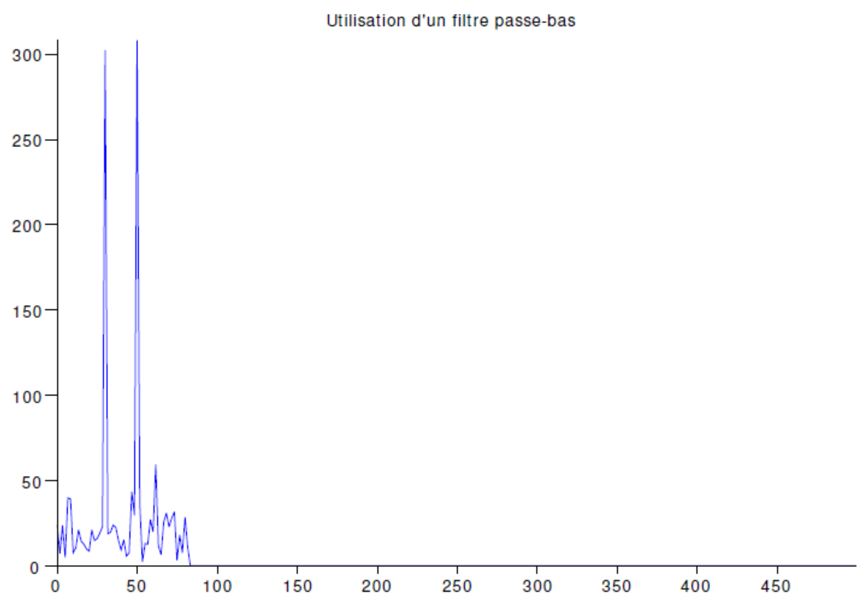
Signal non bruité :



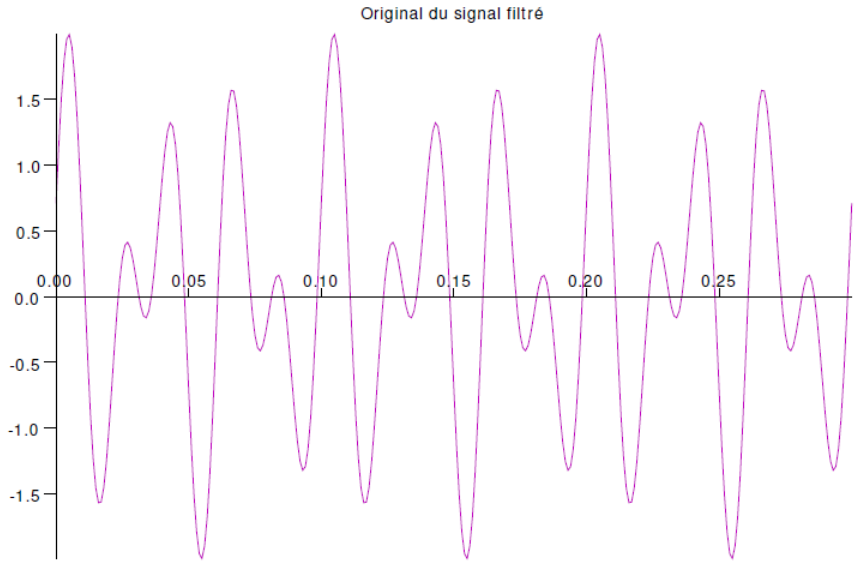
Spectre de puissance signal bruité :



Filtre passe bas :



Signal filtré :


Original du signal filtré
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25

9 Table

Fonction (de t)	Transformée (en y)
Π	Sinc
Λ	$\mathrm{Sinc}^2(y)$
$af + bg$	$a\hat{f} + b\hat{g}$
$\tau_a f : t \mapsto f(at),\ a \neq 0$	$e^{-2\pi i a y}\hat{f}(y)$
$e^{2\pi i a t} f(t)$	$\hat{f}(y-a)$
$e^{2\pi i a t}$	$\hat{f}(y-a)$
$a \neq 0,\ f(at+b)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} e^{2\pi i \frac{b}{a} y} \hat{f}\left(\frac{y}{a}\right)$
f'	$2\pi i y \hat{f}(y)$
$tf(t)$	$\frac{-1}{2\pi i y}\hat{f}'(y)$
$f \star g$	$\hat{f}\hat{g}$

Part III

Équations différentielles

10 Introduction

De très nombreux problèmes de physique, de chimie, conduisent à l'étude d'une ou plusieurs équations différentielles. Il en est ainsi, par exemple, du phénomène de décroissance radiactive (équation linéaire du premier ordre), de la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC (équation linéaire du second ordre) ou encore de l'étude du mouvement du pendule simple (équation du second ordre *non linéaire*).

Mis à part le cas des équations linéaires il n'est en général pas possible d'obtenir des solutions d'une E.D. par quadratures c'est à dire de les expliciter sous forme d'intégrales de fonctions construites à l'aide de fonctions usuelles. Souvent, en économie, on pourra (et on devra) se contenter d'une étude numérique de solutions approchées obtenues à l'aide d'un ordinateur. C'est un sujet que nous n'aborderons pas ici.

Une équation différentielle (résolue) du *premier ordre* est une équation de la forme

$$y'(t) = f\left(t, y(t)\right) \tag{10.8}$$

où f est une fonction continue de $I \times U \to E$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et U est un ouvert d'un espace $E = \mathbb{R}^n$.

Definition 10.1 *Une solution de l'équation différentielle (10.8) est la donnée d'un intervalle $J \subset I$ ouvert et non réduit à un point et d'une fonction $u : J \to U$ telle que pour tout $t \in J$ on ait*

$$u'(t) = f\left(t, u(t)\right).$$

Si f est assez régulière, par exemple si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut montrer que, pour tout $(t_0, y_0) \in I \times U$, il existe une unique solution *maximale* de l'équation (10.8) telle que $u(t_0) = y_0$.

11 Définitions et existance d'une solution

Definition 11.1 *On appelle problème de Cauchy le système suivant.*

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R} \end{cases},$$

La condition $x(t_0) = x_0$ est dite "donnée de Cauchy" ou "condition initiale".

L'existence d'une solution est assurée par le théorème suivant.

Theorem 11.2 *Dans le problème de Cauchy précédent, si la fonction f est continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, il existe une et une seule solution maximale au problème de Cauchy. Son intervalle de définition est ouvert.*

12 Résolution graphique

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

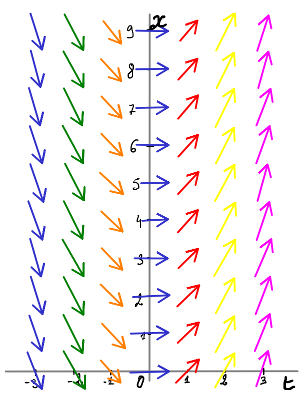
Definition 12.1 *On appelle champs de directions ou champs de tangentes de l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ l'ensemble des vecteurs de pente $f(t, x)$ dans le plan (t, x).*

Proposition 12.2 *Ces vecteurs sont tangents aux trajectoires des solutions de l'équation.*

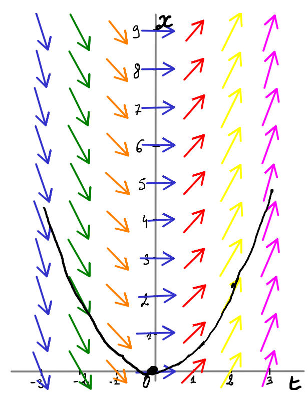
Traitons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= t \\ x(0) &= 0 \end{cases}.$$

Le champs de directions est donc



La solution a donc la trajectoire



Notons qu'avec un peu d'intuition, on vérifie par le calcul que la solution est

$$x(t) = \frac{t^2}{2}.$$

Definition 12.3 *On appelle isocline de pente $c \in \mathbb{R}$ l'ensemble des points du champs de directions pour lesquelles la pente vaut c, c'est à dire $f(t, x) = c$.*

Dans l'exemple précédent, on observera les isoclines de pente t sur les droites verticales d'équation $x = t$.

Proposition 12.4 *Les solutions dont la trajectoire reste sur l'isocline zéro sont constantes (car $x' = f(t, x) = 0$), elles sont dites stationnaires.*

13 Équations différentielles linéaires scalaires

On appelle équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n toute équation de la forme

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b \tag{E_n}$$

où les a_i et b sont des fonctions que nous supposerons continues sur un intervalle I.

Si y_1 et y_2 sont solutions de (E_n) sur un intervalle I, $y_1 - y_2$ est solution de l'équation *homogène*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0. \tag{13.9}$$

La fonction nulle est évidemment solution de cette équation et, si f et g sont solutions, pour tout scalaire λ, $\varphi f + g$ est encore solution : l'ensemble des solutions réelles (repectivement complexes) de l'équation *homogène* est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$).

On remarque aussi que si $b = b_1 + b_2$ et si f_1 est solution de $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b_1$ et f_2 est solution de $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b_2$, alors $f_1 + f_2$ est solution de (E_n) : c'est le *principe de superposition.*

14 Équations différentielles du premier ordre

Considérons l'équation linéaire du premier ordre

$$y' + a(t)y(t) = f(t) \tag{E}$$

où a et f sont des fonctions *continues* sur un intervalle I. Si y_1 et y_2 sont solutions de (E), $y_1 - y_2$ est solution de l'équation *homogène*

$$y' + a(t)y(t) = 0. \tag{E_0}$$

Pour résoudre l'équation linéaire (E), il suffit de

(i) Déterminer toutes les solutions de l'équation *homogène* (E_0)

(ii) Trouver *une* solution de l'équation complète (E).

14.0.1 Résolution de l'équation homogène

Sur l'intervalle I, a, étant continue, admet des primitives. Si $t_0 \in I =]\alpha, \beta[$, le théorème de dérivation des fonctions composées montre que

$$y \mapsto \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right)$$

est solution de $y' + a(t)y(t) = 0$. Si g est une autre solution de cette équation, soit

$$h \,:\, t \mapsto g(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right).$$

h est dérivable et un calcul simple montre que

$$h'(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)\big(g'(t) + a(t)g(t)\big) = 0.$$

La dérivée de h est nulle sur *l'intervalle* I, h est donc constante sur I.

La solution générale de l'équation homogène (E_0) est

$$t \mapsto C\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)$$

où C est une constante.

14.0.2 Résolution de l'équation complète

Il suffit maintenant de trouver *une* solution de l'équation *complète* (E). Pour ce faire, on peut utiliser la méthode de variation de la constante (méthode de Lagrange). On cherche une solution de la forme

$$y(t) = C(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right).$$

On a :

$$y'(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)\big(C'(t) - a(t)C(t)\big)$$

de sorte que y est solution si, et seulement si,

$$C'(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) = f(t)$$

soit encore

$$C'(t) = f(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right).$$

On obtient alors C par intégration.

14.1 Exemples

Exemple Considérons l'équation $y' + 2y = t^2 - 3t$. La solution générale de l'équation homogène est Ce^{-2t}. Cherchons une solution de l'équation *complète* de la forme $y(t) = C(t)e^{-2t}$. on a

$$y' + 2y = e^{-2t}\big(C'(t) - 2C(t)\big) + 2C(t)e^{-2t}$$

de sorte que $y' + 2y = t^2 - 3t$ si et seulement si

$$C'(t)e^{-2t} = t^2 - 3t.$$

Deux intégrations par parties donnent alors

$$C(t) = \frac{1}{2}\left(t^2 - 4t + 2\right)e^{2t}$$

La solution générale de l'équation proposée est donc

$$y(t) = Ke^{-2t} + \frac{1}{2}\left(t^2 - 4t + 2\right)$$

où K est une constante.

Exemple Soit à résoudre l'équation différentielle $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbf{R}$. La solution générale de $y' + y = 0$ est $x \mapsto Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. La méthode de Lagrange (variation de la constante) conduit à chercher une fonction $x \mapsto C(x)$ vérifiant

$$C'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

ce qui donne $C(x) = \ln(1 + e^x) + K$.

Exemple On voudrait résoudre l'équation différentielle $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$ sur $\mathbf{R}$. Les solutions de l'équation homogène $y' = 2xy$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{x^2}$ où C est une constante réelle.La méthode de Lagrange (variation de la constante) conduit à chercher une fonction $x \mapsto C(x)$ vérifiant

$$C'(x) = e^{-x^2}\left(-(2x-1)e^x\right) = -(2x-1)e^{-\left(x^2-x\right)}.$$

On a donc

$$C(x) = e^{-\left(x^2-x\right)} + K.$$

Exemple La vitesse de dissolution d'un composé chimique dans l'eau est proportionnelle à la quantité restante. On place 20g de ce composé, et on observe que 5 minutes plus tard, il reste 10g. Dans combien de temps restera-t-il seulement 1g?

Soit $x(t)$ la quantité de produit à l'instant t. On a $x'(t) = -Cx(t)$ où C est un réel positif de sorte que $x(t) = Ke^{-Ct}$. On sait de plus que $x(0) = 20$ et $x(5) = 10$. Il en résulte que $K = 20$ et $20e^{-5C} = 10$. On a donc $e^{5C} = 2$ soit encore $C = \frac{1}{5}\ln(2)$.

15 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'intéresse ici aux équations de la forme

$$y" + ay' + by = c(x) \tag{F}$$

Comme dans le cas d'une équation linéaire du premier ordre, pour résoudre l'équation linéaire (F), il suffit de

(i) déterminer toutes les solutions de l'équation *homogène* (F_0);

(ii) trouver *une* solution de l'équation complète (F).

On vérifie sans peine que $e^{\alpha x}$ est solution de l'équation sans second membre

$$y" + ay' + by = c(x) \tag{F_0}$$

si, et seulement si, α est racine de *l'équation caractéristique*

$$X^2 + aX + b = 0.$$

(i) Si l'équation caractéristique a deux racines (complexes) distinctes α_1 et α_2 la solution générale à valeurs complexes de (F_0) est

$$C_1e^{\alpha_1 t} + C_2e^{\alpha_2 t}.$$

(ii) Si α est racine *double* de l'équation caractéristique, la solution générale à valeurs complexes de (F_0) est

$$(At + B)e^{\alpha t}.$$

15.1 Résolution de l'équation complète

Pour résoudre l'équation (F) il nous suffit donc de trouver une solution de l'équation complète. Si f_1 et f_2 sont deux solutions *linéairement indépendantes* de l'équation sans second membre, toute solution de cette dernière s'écrit sous la forme $C_1f_1 + C_2f_2$ où C_1 et C_2 sont des constantes.

On cherche une solution de la forme $C_1(t)f_1(t)+C_2(t)f_2(t)$. en imposant la condition $C_1'(x)f_1(x)+C_2'(x)f_2(x) = 0$ et tout revient alors à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_1'f_1' + C_2'f_2' & = & c(x) \\ C_1'f_1 + C_2'f_2 & = & 0 \end{array} \right. .$$

15.2 Second membre de la forme $P(t)e^{\alpha t}$

Remarque 15.1 *Notons D l'opérateur de dérivation qui associe à toute fonction $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ sa dérivée : c'est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ dont on peut définir les itérés D^k par $D^0 = I_d$ et $D^{k+1} = D^k \circ D$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ (pour tout $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, on a $D^k(y) = y^{(k)}$). Si $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{q} q_k X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$ on peut définir l'opérateur différentiel $Q(D) = \sum\limits_{k=0}^{q} q_k D^k$ de sorte que si P, Q sont deux polynômes alors $P(D) \circ Q(D) = Q(D) \circ P(D) = (PQ)(D)$.*
Le polynôme :

$$P(X) = X^2 + aX + b$$

est le polynôme caractéristique de l'équation. De plus, l'ensemble des solutions de l'équation $y" + ay' + by = 0$, qui sont évidemment $\mathcal{C}^\infty$, n'est autre que le noyau de $P(D)$. La décomposition de P en facteurs irréductibles et le lemme des noyaux permettent alors de déterminer l'ensemble des solutions. Nous reviendrons sur ce point à propos des équations linéaires à coefficients constants d'ordre n.

En pratique, si $c(t) = P(t)e^{\alpha t}$ où P est un polynôme de degré n on cherche une solution de la forme $Q(t)e^{\alpha t}$ avec

a) $d^0Q = n$ si α n'est pas racine de l'équation caractéristique

b) $d^0Q = n + 1$ si α est racine simple de l'équation caractéristique

c) $d_0Q = n + 2$ si α est racine double de l'équation caractéristique

Dans le cas d'un second membre du type $P(t)\cos\omega t+Q(t)\sin\omega t$, on peut aussi chercher une solution particulière de la forme $R(t)\cos\omega t + S(t)\sin\omega t$. C'est en général plus rapide que la méthode de variation des constantes.

15.3 Exemples

(i) On voudrait résoudre l'équation suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

$y'' - 3y' + 2y = e^x$. Le polynôme caractéristique est $f(r) = (r-1)(r-2)$ et les solutions de l'équation homogène sont donc toutes les fonctions :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^x$, la condition sur P est : $P'' - P' = 1$, et $P(x) = -x$ convient. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$y(x) = (c_1 - x)e^x + c_2 e^{2x} \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y\text{''} + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}.$$

-2 est racine double de l'équation caractéristique de sorte que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $(at+b)e^{-2t}$. Cherchons une solution particulière de l'équation complète de la forme

$$\left(C_1(t)t + C_2(t)\right)e^{-2t}.$$

Le système à résoudre est alors le suivant :

$$\begin{cases} C_1'\, te^{-2t} + C_2'\, e^{-2t} & = & 0 \\ C_1'\,(1-2t)\,e^{-2t} - 2C_2' e^{-2t} & = & \frac{e^{-2t}}{1+t^2} \end{cases}.$$

La résolution de ce système donne

$$\begin{cases} C_1' & = & \frac{1}{1+t^2} \\ C_2' & = & \frac{-t}{1+t^2} \end{cases}.$$

On en déduit une solution particulière :

$$y(t) = t \arctan t e^{-2t} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)e^{-2t}$$

d'où la solution générale

$$y(t) = t \arctan t e^{-2t} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)e^{-2t} + (at+b)e^{-2t}.$$

16 Petite introduction à la résolution numérique

La possibilité de résoudre de façon exacte une équation différentielle est tout à fait exceptionnelle on est donc naturellement amené à faire des calculs approchés.

16.1 Méthode d'Euler

Nous admettrons ici que si f est, par exemple, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, alors il existe un intervalle $[t_0 - T, t_0 + T]$ sur lequel il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ telle que $y(t_0) = y_0$.

On se donne une subdivision $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_0 + T$ de l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ sur lequel on cherche à approcher cette solution. Pour simplifier, on peut suppposer que le *pas* $h = t_{k+1} - t_k$ est constant.La méthode d'Euler consiste à construire la fonction affine par morceaux définie par

$$h(t) = y_0 + (t - t_0)f(t_0, y_0) \quad \text{pour} \quad t \in [t_0, t_1]$$

puis,

$$h(t) = h(t_k) + (t - t_k)f\left(t_k, h(t_k)\right) \quad \text{pour} \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

On fait de même, si nécessaire sur $[t_0 - T, t_0]$.

Remarque 16.1 *Si y est solution du problème posé, sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ on a*

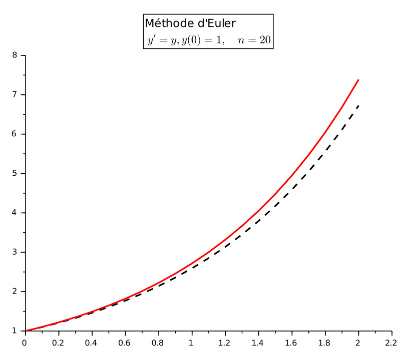
$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'^{(t)}\, dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))\, dt$$

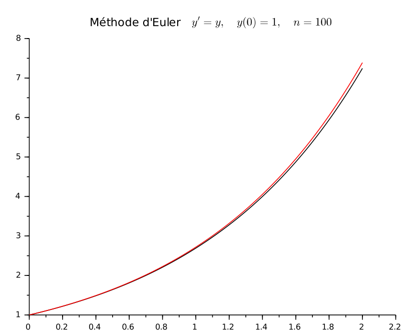
de sorte que la méthode d'Euler revient à calculer ces intégrales par la méthode des rectangles à gauche.

On peut alors montrer l'existence d'une constante C (qui dépend de f et de T) telle que que pour tout k,

$$|y(t_k) - h(t_k)| \leq Ch$$

. On dit que c'est une méthode d'ordre 1.





Méthode d'Euler ($n = 20$ et $n = 100$)

Il est alors tentant de prendre un pas extrêmement petit en espérant ainsi arriver à une précision considérable. Ce serait une erreur car les majorations précédentes ne tiennent pas compte des erreurs d'arrondi qui, elles, risquent de s'accumuler. Si $h = T/n$, l'erreur de m'éthode est majorée par K/n où K est une constante mais l'erreur d'arrondi peut être de l'ordre de $n\varepsilon$ (ε est une constante qui dépend de la machine)[13].

[13] $E(x) = x \mapsto \frac{K}{x} + \varepsilon x$ admet un minimum sur $]0, +\infty[$ et que $E(x)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Remarque 16.2 [Sous forme d'exercice]
On considère l'équation différentielle

$$y' = -50y \tag{16.10}$$

et on cherche à approcher la solution telle que $y(0) = 1$ *sur un intervalle* $I = [0, 1]$*. Pour ce faire, on pose* $h = \frac{1}{n}$ *et on considère la suite* (y_k) *définie par* $y_0 = 1$ *et, pour tout* $k \leq n - 1$*,*

$$y_{k+1} = y_k - h\,(50y_k)\,.$$

(i) Montrer par récurrence que, pour $0 \leq k \leq n$ *on a :*

$$y_k = (1 - 50h)^k\,.$$

(ii) Montrer que, si C *est une constante réelle,* $y = Ce^{-50t}$ *est solution de l'équation (16.10).*

(iii) Soit g *une solution de (16.10) telle que* $g(0) = 1$*. On note* h *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $h(t) = g(t)e^{50t}$*. Calculer la dérivée* h' *de* h *et en déduire que* h *est constante. Calculer* $h(0)$*, en déduire* g*. On a donc montré que la* seule *solution de (16.10) égale à 1 en* $t = 0$ *est* $g(t) = e^{-50t}$*. Étudier la fonction* g *et donner l'allure du graphe de* g *sur* $[0, 0.02]$ *sachant que* $e^{-0.5} \sim 0.606$ *et que* $e^{-1} \sim 0.368$*.*

(iv) On prend $h = \frac{1}{50}$*. Calculer* y_k *pour tout* $k \in \{1, \cdots, n\}$*. Qu'en pensez-vous?*

(v) Déterminer la suite y_k *lorsque* $h = \frac{2}{50}$*. Qu'en pensez-vous?*

(vi) Si vous deviez résoudre numériquement l'équation proposée à l'aide de la méthode d'Euler, que feriez-vous?