

# Chapitre 4 : Non respect des hypothèses du modèle de régression multiple

## Partie 4-2 : Autocorrélation

---

A. Fadhuile ([adelaide.fadhui@univ-grenoble-alpes.fr](mailto:adelaide.fadhui@univ-grenoble-alpes.fr))

Univ Grenoble Alpes

Année 2023-2024

# Plan du cours

## Introduction

- Autocorrelation Positive

- Autocorrelation Negative

- Pas de tendance dans les résidus – Pas d'autocorrelation

- Définition "Variable retardée"

- Conséquences pour les MCO

Détecter la présence d'autocorrélation

Correction de l'autocorrélation en présence de variables explicatives exogènes

Conclusion

# 1 – Introduction

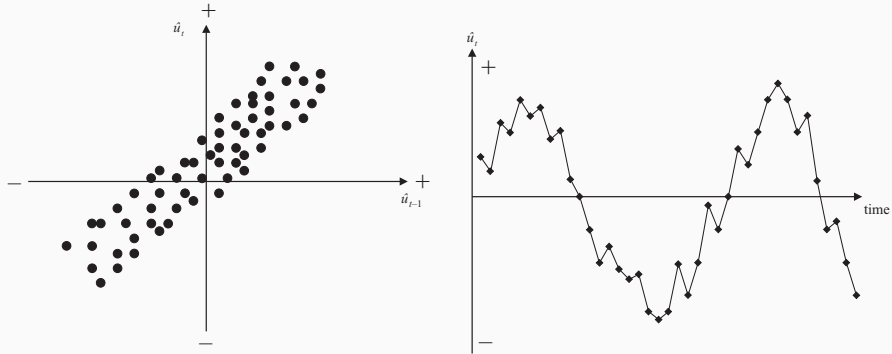
- Soit le modèle  $y = X\beta + u$ , avec  $T$  observations.
  - Sous les hyp  $H_1$  à  $H_5$ , l'estimateur des MCO reste sans biais et convergent.
- Si  $H_2 : V[u] = E(uu^T) = \sigma_u^2 I_T$  la variance de l'erreur est constante
- Si  $H_2 : V[u] = E(uu^T) = \sigma_u^2 \Omega \neq \sigma_u^2 I_T$  tel que :

$$V[u] = E(uu^T) = \begin{bmatrix} 1 & \omega_{12} & \omega_{13} & \cdots & \omega_{1N} \\ \omega_{21} & 1 & \omega_{31} & \cdots & \omega_{2N} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 1 & \cdots & \omega_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N1} & \omega_{N1} & \omega_{N1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Autocorrélation
    - corrélation entre les perturbations sont **supposées non nulles**
- ⇒ dépendance temporelle entre les observations

# 1 – Introduction

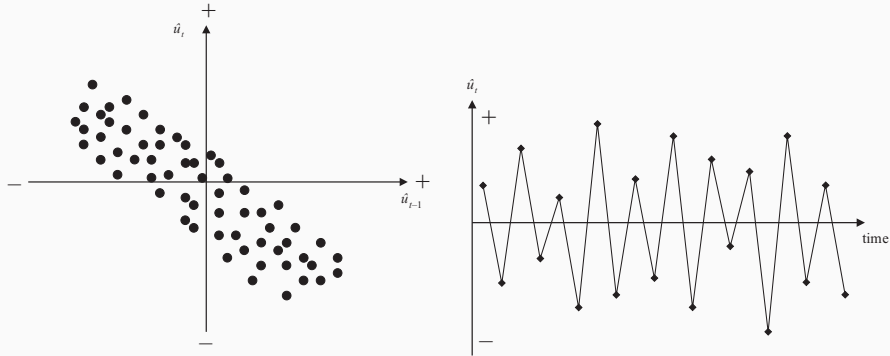
## 1.1 – Autocorrelation Positive



Corrélation positive illustrée par un cycle.

# 1 – Introduction

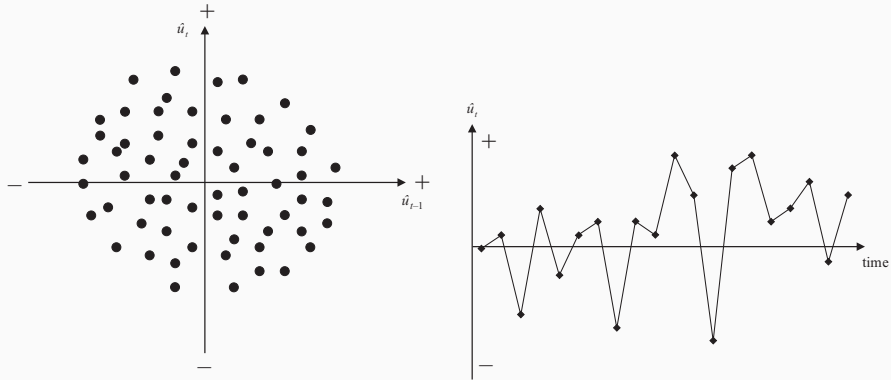
## 1.2 – Autocorrelation Negative



L'autocorrélation est indiquée par une alternance positif négatif des résidus. Cela est plus fréquent que s'ils étaient distribués de façon aléatoire.

# 1 – Introduction

## 1.3 – Pas de tendance dans les résidus – Pas d'autocorrelation



Pas de tendance.

# 1 – Introduction

## 1.4 – Définition "Variable retardée"

$t$	$y_t$	$y_{t-1}$	$\Delta y_t$
2006M09	0.8	—	—
2006M10	1.3	0.8	$(1.3 - 0.8) = 0.5$
2006M11	-0.9	1.3	$(-0.9 - 1.3) = -2.2$
2006M12	0.2	-0.9	$(0.2 - -0.9) = 1.1$
2007M01	-1.7	0.2	$(-1.7 - 0.2) = -1.9$
2007M02	2.3	-1.7	$(2.3 - -1.7) = 4.0$
2007M03	0.1	2.3	$(0.1 - 2.3) = -2.2$
2007M04	0.0	0.1	$(0.0 - 0.1) = -0.1$
.	.	.	.

- $y_{t-1}$  est une variable retardée à l'ordre 1 pour  $y_t$
- $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$  est une mesure en différences premières
- On peut raisonner à des ordres "supérieurs"

# 1 – Introduction

## 1.5 – Conséquences pour les MCO

- Seule  $H_2$  n'est pas vérifiée : l'estimateur des MCO reste sans biais et convergent
- L'interprétation du  $R^2$  est inchangée, mais
- La matrice des variances-covariances est de la forme :

$$V[\hat{\beta}] = \sigma_u^2 (X^T X)^{-1} X^T \Omega X (X^T X)^{-1}$$

- Donc
  - non validité les formules de variance pour les estimateurs des MCO rend l'inférence statistique habituelle non valides
- Démarche méthodologique pour dépasser ces limites :
  - Estimation par les Moindres Carrés Quasi Généralisés (MCQG) : adaptation à chaque hypothèse non respectée



# Plan du cours

Introduction

Détecter la présence d'autocorrélation

- Test de Durbin Watson

- Application 1

- Test de Breusch-Godfrey

- Application 2

Correction de l'autocorrélation en présence de variables explicatives exogènes

Conclusion

## 2 – Détecter la présence d'autocorrélation

### 2.1 – Test de Durbin Watson

- Tester l'autocorrélation à l'ordre 1, i.e. l'erreur à la période  $t$  et l'erreur à la période  $t - 1$  sont corrélées  
$$u_t = \rho u_{t-1} + v_t, \text{ où } v_t \sim N(0, \sigma_v^2).$$

- Hypothèses :  $H_0 : \rho = 0$  et  $H_1 : \rho \neq 0$
- La statistique de test est donnée par:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^T (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2} \approx 2(1 - \hat{\rho})$$

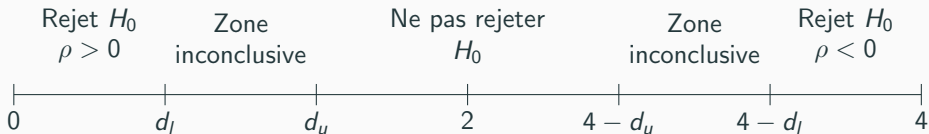
où  $\hat{\rho}$  est le coefficient de corrélation, son estimation convergente est donnée par :

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{DW}{2}$$

## 2 – Détecter la présence d'autocorrélation

### 2.1 – Test de Durbin Watson

- Règle de décision



- Rappels :  $-1 \leq \hat{\rho} \leq 1$
- Donc  $0 \leq DW \leq 4$ .
- Si  $\hat{\rho} = 0$ ,  $DW=2$ .
  - Donc, pas de rejet de  $H_0$ , il y a peu de chance pour qu'il y ait de l'autocorrélation.
- La lecture se fait sur la Table de  $DW$  : où  $d_l$  et  $d_u$  sont les valeurs critiques

## 2 – Détecter la présence d'autocorrélation

### 2.1 – Test de Durbin Watson

TABLE de DURBIN-WATSON : Test unilatéral de  $\rho = 0$  contre  $\rho > 0$ , au seuil de 5% (test bilatéral : seuil  $\alpha = 10\%$ )

n	k' = 1		k' = 2		k' = 3		k' = 4		k' = 5		k' = 6		k' = 7		k' = 8		k' = 9		k' = 10	
	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21	0,45	2,47	0,34	2,73	0,25	2,98	0,17	3,22	0,11	3,44
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15	0,50	2,40	0,40	2,62	0,30	2,86	0,22	3,09	0,15	3,30
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10	0,55	2,32	0,45	2,54	0,36	2,76	0,27	2,97	0,20	3,20
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06	0,60	2,26	0,50	2,46	0,41	2,67	0,32	2,87	0,24	3,07
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02	0,65	2,21	0,46	2,40	0,46	2,59	0,37	2,78	0,29	2,97
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99	0,69	2,16	0,60	2,34	0,50	2,52	0,42	2,70	0,34	2,88
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96	0,73	2,12	0,64	2,29	0,55	2,46	0,46	2,63	0,38	2,81
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94	0,77	2,09	0,68	2,25	0,59	2,41	0,50	2,57	0,42	2,73
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92	0,80	2,06	0,71	2,21	0,63	2,36	0,54	2,51	0,46	2,67
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90	0,84	2,03	0,75	2,17	0,67	2,32	0,58	2,46	0,51	2,61
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89	0,87	2,01	0,78	2,14	0,70	2,28	0,62	2,42	0,54	2,56
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88	0,90	1,99	0,82	2,12	0,73	2,25	0,66	2,38	0,58	2,51
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86	0,92	1,97	0,84	2,09	0,77	2,22	0,69	2,34	0,62	2,47
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85	0,95	1,96	0,87	2,07	0,80	2,19	0,72	2,31	0,65	2,43
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84	0,97	1,94	0,90	2,05	0,83	2,16	0,75	2,28	0,68	2,40
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83	1,00	1,93	0,93	2,03	0,85	2,14	0,78	2,25	0,71	2,36
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83	1,02	1,92	0,95	2,02	0,88	2,12	0,81	2,23	0,74	2,33
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82	1,04	1,91	0,97	2,00	0,90	2,10	0,84	2,20	0,77	2,31
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81	1,06	1,90	0,99	1,99	0,93	2,08	0,86	2,18	0,79	2,28
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81	1,08	1,89	1,01	1,98	0,95	2,07	0,88	2,16	0,82	2,26
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80	1,10	1,88	1,03	1,97	0,97	2,05	0,91	2,14	0,84	2,24
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80	1,11	1,88	1,05	1,96	0,99	2,04	0,93	2,13	0,87	2,22
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80	1,13	1,87	1,07	1,95	1,01	2,03	0,95	2,11	0,89	2,20
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79	1,15	1,86	1,09	1,94	1,03	2,02	0,97	2,10	0,91	2,18
39	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79	1,16	1,86	1,10	1,93	1,05	2,01	0,99	2,08	0,93	2,16
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79	1,17	1,85	1,12	1,92	1,06	2,00	1,01	2,07	0,95	2,14
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78	1,24	1,84	1,19	1,90	1,14	1,96	1,09	2,00	1,04	2,09
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77	1,29	1,82	1,25	1,87	1,20	1,93	1,16	1,99	1,11	2,04
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77	1,33	1,81	1,29	1,86	1,25	1,91	1,21	1,96	1,17	2,01
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77	1,37	1,81	1,33	1,85	1,30	1,89	1,26	1,94	1,22	1,98
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77	1,40	1,80	1,37	1,84	1,34	1,88	1,30	1,92	1,27	1,96
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77	1,43	1,80	1,40	1,84	1,37	1,87	1,34	1,91	1,30	1,95
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,49	1,77	1,46	1,80	1,43	1,83	1,40	1,87	1,37	1,90	1,34	1,94
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77	1,48	1,80	1,45	1,83	1,42	1,86	1,40	1,89	1,37	1,92
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77	1,50	1,80	1,47	1,83	1,45	1,86	1,42	1,89	1,40	1,92
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78	1,52	1,80	1,49	1,83	1,47	1,85	1,44	1,88	1,42	1,91
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78	1,54	1,80	1,51	1,83	1,49	1,85	1,46	1,88	1,44	1,90
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78	1,55	1,80	1,53	1,83	1,51	1,85	1,48	1,87	1,46	1,90
150	1,72	1,75	1,71	1,76	1,69	1,77	1,68	1,79	1,66	1,80	1,65	1,82	1,64	1,83	1,62	1,85	1,60	1,86	1,59	1,88
200	1,73	1,78	1,75	1,79	1,73	1,80	1,73	1,81	1,72	1,82	1,71	1,83	1,70	1,84	1,69	1,85	1,68	1,86	1,66	1,87

## 2 – Détecter la présence d'autocorrélation

### 2.1 – Test de Durbin Watson

**Conditions sous lesquelles les résultats de ce test sont valides**

1. Présence de la constante
2. Matrice des X non aléatoire
3. Mais de pas de termes de retard dans la régression.

## 2 – Détecter la présence d'autocorrélation

### 2.2 – Application 1

- Modèle économétrique illustrant la fonction de production d'une firme

$$\log Q_t = b_0 + b_1 \log K_t + b_2 \log L_t + u_t$$

- Données trimestrielles de 1970 à 1994 :  $25 \times 4 = 100$  obs
- L'estimation de ce modèle par les MCO donne:

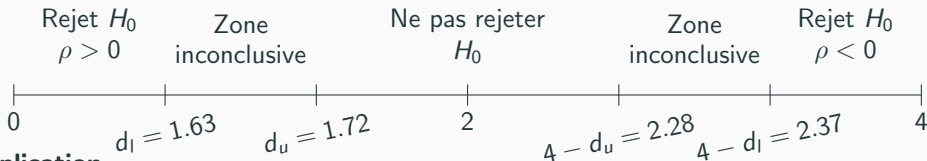
$$\widehat{\log Q_t} = \begin{array}{ccc} 10,4 + & 0,38 \log K_t + & 0,72 \log L_t \\ (2,971) & (9,50) & (12,0) \end{array}$$

$\widehat{\text{cov}}[\widehat{b}_1, \widehat{b}_2] = 0.05$ ,  $R^2 = 0.81$ ,  $\bar{R}^2 = 0.79$ ,  $DW = 1.87$  et  $\hat{\sigma}_u^2 = 0.97$  **entre parenthèses : les statistiques de Student**

## 2 – Détecter la présence d'autocorrélation

### 2.2 – Application 1

- Règle de décision :



- Application

- Les valeurs critiques, du  $d$  de DW, sont pour :
  - $T = 25 * 4 = 100$ , et  $k = 2 \Rightarrow d_l = 1,63$  et  $d_u = 1,72$
- Ici,  $d_s = 1,72 < DW = 1,87 < 4 - d_u$ ,
- alors  $\hat{\rho} = 1 - \frac{1,87}{2} = 0,065$ .

- Conclusion :

- On ne rejette pas  $H_0$ , il n'y a pas d'autocorrélation des perturbations.
- L'estimateur des MCO est efficace: variances covariances permet des tests fiables.

## 2 – Détecter la présence d'autocorrélation

### 2.3 – Test de Breusch-Godfrey

- Test plus général qui introduit des corrélation d'ordre  $r^{th}$

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \dots + \rho_r u_{t-r} + v_t, \text{ avec } v_t \sim N(0, \sigma_v^2)$$

- L'hypothèse est donnée par:

$$H_0 : \rho_1 = 0 \text{ et } \rho_2 = 0 \text{ et } \dots \text{ et } \rho_r = 0$$

$$H_1 : \rho_1 \neq 0 \text{ ou } \rho_2 \neq 0 \text{ ou } \dots \text{ ou } \rho_r \neq 0$$



## 2 – Détecter la présence d'autocorrélation

### 2.3 – Test de Breusch-Godfrey

- Déroulement du test
  - Estimation par les MCO pour obtenir :  $\hat{u}_t$ .
  - Regression auxiliaire :
    - $\hat{u}_t$  sur tous les variables explicatives initiales (les  $x$ ) et  $\hat{u}_{t-1}, \hat{u}_{t-2}, \dots, \hat{u}_{t-r}$ ;
    - Récupérer le  $R^2$
  - Statistique de Test :

$$(T - r)R^2 \sim \chi_r^2$$

- Règle de décision:
  - Si  $(T - r)R^2 > \chi_r^2$ : rejet de  $H_0$ , ie rejet de l'hyp nulle de non corrélation.

## 2 – Détecter la présence d'autocorrélation

### 2.4 – Application 2

- Considérons le modèle de demande de glaces

$$cons_t = b_0 + b_1 price_t + b_2 income_t + b_3 temp_t + u_t \quad \forall t = 1, \dots, 30.$$

- $cons_t$  est la consommation de glaces par tête (en pintes),
- $income_t$ , le revenu moyen des ménages par semaine (en dollars),
- $price_t$ , le prix de la glace (par pinte)
- $temp_t$ , la température (en degrés Fahrenheit).
- *Hildreth et Lu* (1960); toutes les 4 semaines du 18 mars 1951 au 11 juillet 1953.

## 2 – Détecter la présence d'autocorrélation

### 2.4 – Application 2

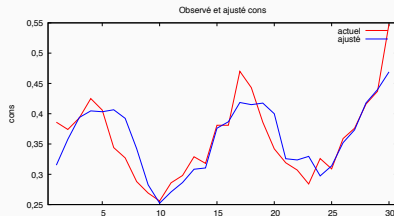
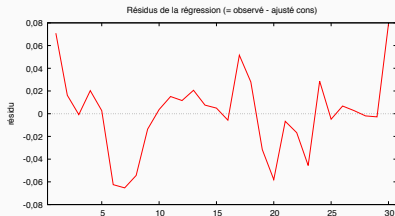
Modèle 1: MCO, utilisant les observations 1-30  
Variable dépendante: cons

	coefficient	erreur std.	t de Student	p. critique	
const	0,197315	0,270216	0,7302	0,4718	
price	-1,04441	0,834357	-1,252	0,2218	
income	0,00330776	0,00117142	2,824	0,0090	***
temp	0,00345843	0,000445547	7,762	3,10e-08	***
Moy. var. dép.	0,359433	Éc. type var. dép.	0,065791		
Somme carrés résidus	0,035273	Éc. type de régression	0,036833		
R2	0,718994	R2 ajusté	0,686570		
F(3, 26)	22,17489	p. critique (F)	2,45e-07		
Log de vraisemblance	58,61944	Critère d'Akaike	-109,2389		
Critère de Schwarz	-103,6341	Hannan-Quinn	-107,4459		
rho	0,400633	Durbin-Watson	1,021169		

Constante mise à part, la probabilité critique est la plus élevée pour la variable 2 (price)

## 2 – Détecter la présence d'autocorrélation

### 2.4 – Application 2



- Résidu positif presque toujours suivi d'un résidu négatif, cette situation est le reflet d'un autocorrélation des perturbations.
- Durant les 5 premières années, les résidus semblent autocorrélées positivement, etc...
- Ce sont les signes d'une autocorrélation qu'il va falloir corriger.

## 2 – Détecter la présence d'autocorrélation

### 2.4 – Application 2

```
gretl: Durbin-Watson

Statistique de Durbin-Watson = 1,02117
p. critique = 0,000302531

Test de Breusch-Godfrey d'autocorrélation de premier ordre
MCO, utilisant les observations 1-30
Variable dépendante: uhat

      coefficient   erreur std.   t de Student   p. critique
-----
const      0,0615533    0,257165      0,2394        0,8128
price     -0,147642     0,791862     -0,1864       0,8536
income    -0,000115793    0,00110852   -0,1045       0,9176
temp      -0,000203335    0,000432839  -0,4698       0,6426
uhat_1     0,428282        0,211215      2,028         0,0534 *
```

R2 non-ajusté = 0,141236

Statistique de test: LMF = 4,111594,  
avec p. critique =  $P(F(1,25) > 4,11159) = 0,0534$

Statistique alternative:  $TR^2 = 4,237069$ ,  
avec p. critique =  $P(\text{Chi-deux}(1) > 4,23707) = 0,0396$

Ljung-Box  $Q' = 3,6$ ,  
avec p. critique =  $P(\text{Chi-deux}(1) > 3,6) = 0,0578$

## 2 – Détecter la présence d'autocorrélation

### 2.4 – Application 2

- **Test DW**

- Ici,  $T = 30$  ;  $k = 3$
- Donc:  $d_l = 1,21$  et  $d_u = 1,65$
- Ici,  $DW = 1,021 < d_l$

- **Test Breusch-Godfrey**

- Ici,  $T = 30$  ;  $R^2 = 0.14$ ,  $(T - 1)R^2 = 4.23 > \chi^2(1) = 3.84$

- **Les 2 tests permettent de conclure que**

- On rejette  $H_0$ , il y a autocorrélation des perturbations.
- L'estimateur des MCO n'est plus efficace, sa matrice des variances covariances ne permet pas d'effectuer des tests fiables.
- Quelle solution?
  - Transformer le modèle pour "faire respecter"  $H_2$

# Plan du cours

Introduction

Détecter la présence d'autocorrélation

Correction de l'autocorrélation en présence de variables explicatives exogènes

MCQG : Méthode de Prais Winsten

MCQG: Méthode de Cochrane Orcutt

MCQG: Méthode de Hildreth et Lu

EMV

Application sur Gretl

Cochrane Orcutt

Hildreth et Lu

Suite : Application Cochrane Orcutt

## 3 – Correction de l'autocorrélation en présence de variables explicatives exogènes

### 3.1 – MCQG : Méthode de Prais Winsten

- Deux étapes et itératif :  $y_t - \rho y_{t-1} = \alpha(1 - \rho) + \beta(X_t - \rho X_{t-1}) + u_t$ 
  - Estimation du modèle par les MCO. On récupère les résidus de la régression et on calcule un estimateur  $\hat{\rho}$  de  $\rho$ .
  - On remplace  $\hat{\rho}$  dans le modèle transformé, et on applique les MCO. ie : MCQG.

- Avec

$$\Omega = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\rho^2} & \frac{\rho}{1-\rho^2} & \frac{\rho^2}{1-\rho^2} & \cdots & \frac{\rho^{T-1}}{1-\rho^2} \\ \frac{\rho}{1-\rho^2} & \frac{1}{1-\rho^2} & \frac{\rho}{1-\rho^2} & \cdots & \frac{\rho^{T-2}}{1-\rho^2} \\ \frac{\rho^2}{1-\rho^2} & \frac{\rho}{1-\rho^2} & \frac{1}{1-\rho^2} & \cdots & \frac{\rho^{T-3}}{1-\rho^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\rho^{T-1}}{1-\rho^2} & \frac{\rho^{T-2}}{1-\rho^2} & \frac{\rho^{T-3}}{1-\rho^2} & \cdots & \frac{1}{1-\rho^2} \end{bmatrix}$$



## 3 – Correction de l'autocorrélation en présence de variables explicatives exogènes

### 3.2 – MCQG: Méthode de Cochrane Orcutt

- Le modèle à estimer sera :  $y_t - \rho y_{t-1} = \alpha(1 - \rho) + \beta(X_t - \rho X_{t-1}) + u_t$ 
  - procédure d'estimation identique à Prais et Winsten **en excluant première observation**

- Avec

$$\Omega = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\rho^2} & \frac{\rho}{1-\rho^2} & \frac{\rho^2}{1-\rho^2} & \cdots & \frac{\rho^{T-1}}{1-\rho^2} \\ \frac{\rho}{1-\rho^2} & \frac{1}{1-\rho^2} & \frac{\rho}{1-\rho^2} & \cdots & \frac{\rho^{T-2}}{1-\rho^2} \\ \frac{\rho^2}{1-\rho^2} & \frac{\rho}{1-\rho^2} & \frac{1}{1-\rho^2} & \cdots & \frac{\rho^{T-3}}{1-\rho^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\rho^{T-1}}{1-\rho^2} & \frac{\rho^{T-2}}{1-\rho^2} & \frac{\rho^{T-3}}{1-\rho^2} & \cdots & \frac{1}{1-\rho^2} \end{bmatrix}$$

## 3 – Correction de l'autocorrélation en présence de variables explicatives exogènes

### 3.3 – MCQG: Méthode de Hildreth et Lu

- Méthode fondée sur une procédure de balayage
  - on définit  $p$  valeurs de  $\rho_i$ , dans l'intervalle  $[0; 1]$  si l'autocorrélation est positive
  - On calcule :
    - $y_t^{**(i)} = y_t - \rho_i y_{t-1}$  pour  $t = 2, \dots, T$
    - $X_t^{T**(i)} = X_t^T - \rho_i X_{t-1}^T$  pour  $t = 2, \dots, T$
    - $u_t^{**(i)} = u_t - \rho_i u_{t-1}$  pour  $t = 2, \dots, T$
    - Non prise en compte de la première observation,
  - Pour chaque ensemble  $i$  de données transformées, on applique les MCO au modèle transformé :
 
$$y_t^{**(i)} = X_t^{T**(i)} + u_t^{**(i)} \text{ pour } t = 2, \dots, T$$

puis on calcule la SCR
  - L'estimateur  $\hat{\rho}$  de  $\rho$  est celui qui minimise la SCR. Pour cette valeur de  $\hat{\rho}$ , il s'agit de l'estimateur des MCQG.

## 3 – Correction de l'autocorrélation en présence de variables explicatives exogènes

### 3.4 – EMV

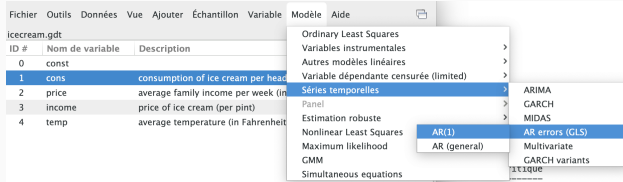
- Estimateur maximum de vraisemblance (EMV)

La log vraisemblance s'écrit, sous  $H_2^*$  :

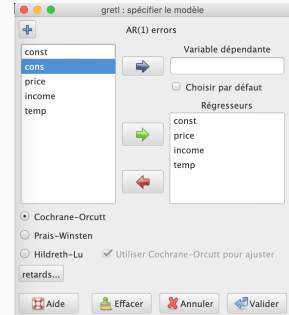
$$\begin{aligned}\log L(\theta^*) &= \log L(y_1, \dots, y_T; b, \sigma_u^2, \Omega) \\ &= -\frac{T}{2} \log 2\pi - \frac{T}{2} \log \sigma_u^2 + \frac{1}{2} \log(1 - \rho^2) - \frac{1}{2\sigma_u^2} (y^* - \mathbf{X}^* \mathbf{b})^T (y^* - \mathbf{X}^* \mathbf{b})\end{aligned}$$

## 3 – Correction de l'autocorrélation en présence de variables explicatives exogènes

### 3.5 – Application sur Gretl



(a)



(b)

## 3 – Correction de l'autocorrélation en présence de variables explicatives exogènes

### 3.5 – Application sur Gretl

#### 3.5.1 – Prais Winsten

Exécution d'un calcul itératif de rho...

ITER	RHO	ESS
1	0,48063	0,0290935
2	0,49824	0,0283796
3	0,55528	0,0280361
4	0,59724	0,0278214

21	0,79847	0,0271560
22	0,79897	0,0271555
23	0,79933	0,0271552
24	0,79958	0,0271549
25	0,79977	0,0271548
26	0,79990	0,0271547
27	0,79999	0,0271546
28	0,80006	0,0271545
29	0,80011	0,0271545
30	0,80014	0,0271544
31	0,80017	0,0271544
32	0,80018	0,0271544
33	0,80020	0,0271544
34	0,80021	0,0271544
35	0,80021	0,0271544
36	0,80022	0,0271544
37	0,80022	0,0271544
38	0,80022	0,0271544
39	0,80022	0,0271544
40	0,80023	0,0271544
41	0,80023	0,0271544

Modèle 3: Prais-Winsten, utilisant les observations 1-30  
Variable dépendante: cons  
rho = 0,800226

	coefficient	erreur std.	t de Student	p. critique
const	0,587005	0,295270	1,988	0,0574 *
price	-1,04085	0,759751	-1,381	0,1792
income	-0,000002236	0,00204577	-0,3921	0,6981
temp	0,00295405	0,000710051	4,156	0,0003 ***

Statistiques basées sur les données rho-différencées:

	Moy. var. dép.	0,359433	Éc. type var. dép.	0,065791
Somme carrés résidus	0,027154	Éc. type de régression	0,032317	
R <sup>2</sup>	0,798068	R <sup>2</sup> ajusté	0,766728	
F(3, 26)	14,34589	p. critique (F)	0,000010	
rho	-0,077679	Durbin-Matson	1,846795	

Constante mise à part, la probabilité critique est la plus élevée pour la variable 3 (income)

## 3 – Correction de l'autocorrélation en présence de variables explicatives exogènes

### 3.6 – Cochrane Orcutt

Exécution d'un calcul itératif de rho...

ITER	RHO	ESS
1	0,40063	0,0254519
2	0,40083	0,0254519
3	0,40090	0,0254519
4	0,40092	0,0254519

Modèle 2: Cochrane-Orcutt, utilisant les observations 2-30 (T = 29)

Variable dépendante: cons

rho = 0,400917

	coefficient	erreur std.	t de Student	p. critique	
const	0,157143	0,289628	0,5426	0,5922	
price	-0,892393	0,810850	-1,101	0,2816	
income	0,00320278	0,00154604	2,072	0,0488	**
temp	0,00355839	0,000554675	6,415	1,02e-06	***

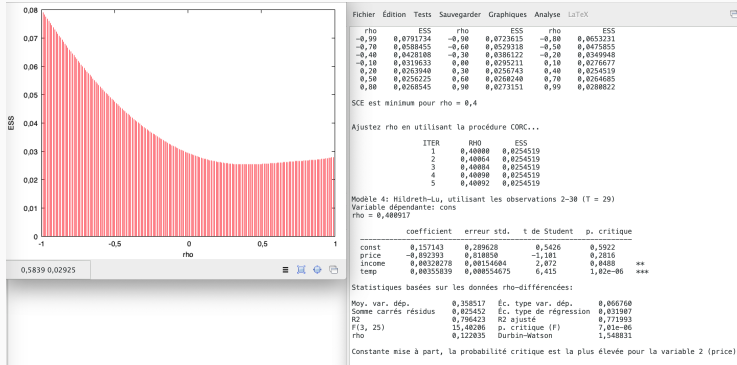
Statistiques basées sur les données rho-différencées:

Moy. var. dép.	0,358517	Éc. type var. dép.	0,066760
Somme carrés résidus	0,025452	Éc. type de régression	0,031907
R2	0,796423	R2 ajusté	0,771993
F(3, 25)	15,40207	p. critique (F)	7,01e-06
rho	0,122035	Durbin-Watson	1,548831

Constante mise à part, la probabilité critique est la plus élevée pour la variable 2 (price)

## 3 – Correction de l'autocorrélation en présence de variables explicatives exogènes

### 3.7 – Hildreth et Lu



## 3 – Correction de l'autocorrélation en présence de variables explicatives exogènes

### 3.8 – Suite Application 2 - synthèse

	Variables	Estimations des paramètres	Ecart-types estimés	DW
Moindres Carrés Ordinaires	Constante	0.19732	0.27022	1.021
	Price	-1.04441	0.83436	
	Income	0.00331*	0.00117	
	Temp	0.00346*	0.00044555	
Prais-Winsten	Constante	0.3075	0.2895	1.38
	Price	-1.1712	0.8563	
	Income	0.002509**	0.001468	
	Temp	0.003350*	0.000549	
Cochrane-Orcutt	Constante	0.1037	0.2909	1.4613
	Price	-0.7657	0.8369	
	Income	0.003631*	0.001431	
	Temp	0.000531*	0.000531	
Hildreth et Lu	Constante	0.2624	0.3253	1.6890
	Price	-0.7472	0.8343	
	Income	0.001584**	0.002010	
	Temp	0.003498*	0.000812	
Maximum de Vraisemblance	Constante	0.5373	0.3020	1.7821
	Price	-1.0862	0.8023	
	Income	-0.000190	0.002030	
	Temp	0.003030*	0.000846	



## 3 – Correction de l'autocorrélation en présence de variables explicatives exogènes

### 3.8 – Suite Application 2 - synthèse

- Sur la significativité des paramètres :
  - ni le prix et ni la constante n'ont d'effets significatifs sur la demande de glace dans chacune des méthodes proposées.
  - le revenu et la température ont une influence significatifs de la demande de glace.
  - Les signes des paramètres estimés correspondent aux signes espérés.
- Sur les écart-types estimés :
  - ceux des MCO sont sous-estimés et donc erronés car l'estimation ne tiens pas compte de l'autocorrélation des perturbations.
    - Ils sont calculés à partir de la formule  $V(\hat{b}_{MCO}) = \sigma_u^2(X^T X)^{-1}$   
→ tous les tests et intervalles de confiances calculés à partir de cette matrice seront faux.
    - et non pas la bonne matrice des variances-covariances :  
 $V(\hat{b}_{MCO}) = \sigma_u^2(X^T X)^{-1} X^T \Omega X (X^T X)^{-1}$ .

## 3 – Correction de l'autocorrélation en présence de variables explicatives exogènes

### 3.8 – Suite Application 2 - synthèse

- Sur l'autocorrélation :
  - Dans les deux premières méthodes (Prais-Winsten et Cochrane-Orcutt):
    - $d_l < DW < d_u \rightarrow$  la décision est incertaine.
    - Estimation par les MCQG à privilégier.
  - Dans les deux dernières méthodes (Hildreth et Lu, EMV):
    - $d_u < DW < 4 - d_u$ ,
    - problème lié à l'autocorrélation des perturbations est corrigé.
- Remarque
  - Les estimateurs de Prais-Winsten et du EMV lorsque l'on souhaite estimer avec un nombre limité d'observations, ie  $T < 30$ .

# Plan du cours

Introduction

Détecter la présence d'autocorrélation

Correction de l'autocorrélation en présence de variables explicatives exogènes

Conclusion

Conséquences pour les MCO

## 4 – Conclusion

### 4.1 – Conséquences pour les MCO

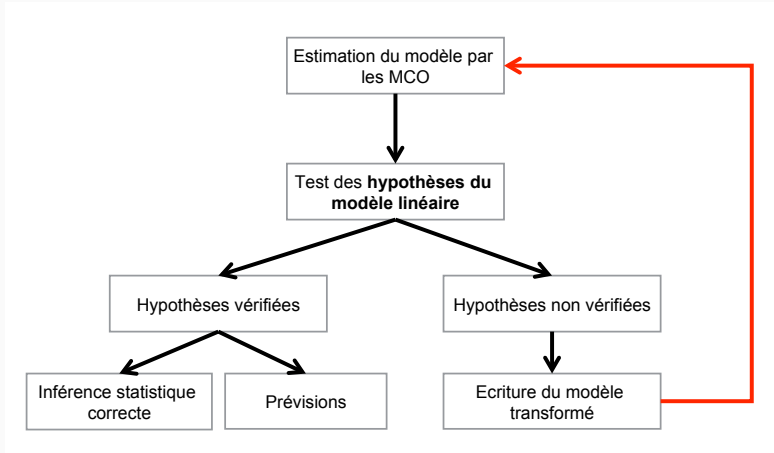
- Seule  $H_2$  n'est pas vérifiée : l'estimateur des MCO reste sans biais et convergent
- L'interprétation du  $R^2$  est inchangée, mais
- La matrice des variances-covariances est de la forme :

$$V[\hat{b}] = \sigma_u^2 (X^T X)^{-1} X^T \Omega X (X^T X)^{-1} \text{ [sous } H_2\text{]}$$

- Donc
  - non validité des formules de variance pour les estimateurs des MCO rend les tests de student habituels non valides
  - La stat de Fisher ne suit plus une distribution de Fisher
  - MCO n'est plus le meilleur estimateur linéaire non biaisé (BLUE); il peut y avoir des estimateurs linéaires plus efficaces.
- Estimation par les MCQG : adaptation à chaque hypothèse non respectée

## 4 – Conclusion

### 4.1 – Conséquences pour les MCO



# Table Durbin Watson

TABLE DE DURBIN-WATSON : Test unilatéral de  $\rho = 0$  contre  $\rho > 0$ , au seuil de 5% (test bilatéral : seuil  $\alpha = 10\%$ )

	k' = 1		k' = 2		k' = 3		k' = 4		k' = 5		k' = 6		k' = 7		k' = 8		k' = 9		k' = 10	
n	d <sub>L</sub>	d <sub>U</sub>	d <sub>L</sub>	d <sub>U</sub>	d <sub>L</sub>	d <sub>U</sub>	d <sub>L</sub>	d <sub>U</sub>	d <sub>L</sub>	d <sub>U</sub>	d <sub>L</sub>	d <sub>U</sub>	d <sub>L</sub>	d <sub>U</sub>	d <sub>L</sub>	d <sub>U</sub>	d <sub>L</sub>	d <sub>U</sub>	d <sub>L</sub>	d <sub>U</sub>
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21	0,45	2,47	0,34	2,73	0,25	2,98	0,17	3,22	0,11	3,44
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15	0,50	2,40	0,40	2,62	0,30	2,86	0,22	3,09	0,15	3,30
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10	0,55	2,32	0,45	2,54	0,36	2,76	0,27	2,97	0,20	3,20
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06	0,60	2,26	0,50	2,46	0,41	2,67	0,32	2,87	0,24	3,07
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02	0,65	2,21	0,46	2,40	0,46	2,59	0,37	2,78	0,29	2,97
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99	0,69	2,16	0,60	2,34	0,50	2,52	0,42	2,70	0,34	2,88
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96	0,73	2,12	0,64	2,29	0,55	2,46	0,46	2,63	0,38	2,81
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94	0,77	2,09	0,68	2,25	0,59	2,41	0,50	2,57	0,42	2,73
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92	0,80	2,06	0,71	2,21	0,63	2,36	0,54	2,51	0,46	2,67
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90	0,84	2,03	0,75	2,17	0,67	2,32	0,58	2,46	0,51	2,61
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89	0,87	2,01	0,78	2,14	0,70	2,28	0,62	2,42	0,54	2,56
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88	0,90	1,99	0,82	2,12	0,73	2,25	0,66	2,38	0,58	2,51
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86	0,92	1,97	0,84	2,09	0,77	2,22	0,69	2,34	0,62	2,47
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85	0,95	1,96	0,87	2,07	0,80	2,19	0,72	2,31	0,65	2,43
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84	0,97	1,94	0,90	2,05	0,83	2,16	0,75	2,28	0,68	2,40
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83	1,00	1,93	0,93	2,03	0,85	2,14	0,78	2,25	0,71	2,36
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83	1,02	1,92	0,95	2,02	0,88	2,12	0,81	2,23	0,74	2,33
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82	1,04	1,91	0,97	2,00	0,90	2,10	0,84	2,20	0,77	2,31
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81	1,06	1,90	0,99	1,99	0,93	2,08	0,86	2,18	0,79	2,28
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81	1,08	1,89	1,01	1,98	0,95	2,07	0,88	2,16	0,82	2,26
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80	1,10	1,88	1,03	1,97	0,97	2,05	0,91	2,14	0,84	2,24
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80	1,11	1,88	1,05	1,96	0,99	2,04	0,93	2,13	0,87	2,22
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80	1,13	1,87	1,07	1,95	1,01	2,03	0,95	2,11	0,89	2,20
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79	1,15	1,86	1,09	1,94	1,03	2,02	0,97	2,10	0,91	2,18
39	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79	1,16	1,86	1,10	1,93	1,05	2,01	0,99	2,08	0,93	2,16
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79	1,17	1,85	1,12	1,92	1,06	2,00	1,01	2,07	0,95	2,14
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78	1,24	1,84	1,19	1,90	1,14	1,96	1,09	2,00	1,04	2,09
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77	1,29	1,82	1,25	1,87	1,20	1,93	1,16	1,99	1,11	2,04
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77	1,33	1,81	1,29	1,86	1,25	1,91	1,21	1,96	1,17	2,01
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77	1,37	1,81	1,33	1,85	1,30	1,89	1,26	1,94	1,22	1,98
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77	1,40	1,80	1,37	1,84	1,34	1,88	1,30	1,92	1,27	1,96
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77	1,43	1,80	1,40	1,84	1,37	1,87	1,34	1,91	1,30	1,95
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,49	1,77	1,46	1,80	1,43	1,83	1,40	1,87	1,37	1,90	1,34	1,94
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77	1,48	1,80	1,45	1,83	1,42	1,86	1,40	1,89	1,37	1,92
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77	1,50	1,80	1,47	1,83	1,45	1,86	1,42	1,89	1,40	1,92
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78	1,52	1,80	1,49	1,83	1,47	1,85	1,44	1,88	1,42	1,91
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78	1,54	1,80	1,51	1,83	1,49	1,85	1,46	1,88	1,44	1,90
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78	1,55	1,80	1,53	1,83	1,51	1,85	1,48	1,87	1,46	1,90
150	1,72	1,75	1,71	1,76	1,69	1,77	1,68	1,79	1,66	1,80	1,65	1,82	1,64	1,83	1,62	1,85	1,60	1,86	1,59	1,88
200	1,73	1,78	1,75	1,79	1,73	1,80	1,73	1,81	1,72	1,82	1,71	1,83	1,70	1,84	1,69	1,85	1,68	1,86	1,66	1,87

# Table Student



$\alpha$	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
$1 - \alpha$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
$v = \text{ddl}$											
1	0.0000	0.3249	0.7265	1.3764	3.0777	6.3137	12.706	31.821	63.656	318.29	636.58
2	0.0000	0.2887	0.6172	1.0607	1.8856	2.9200	4.3027	6.9645	9.9250	22.328	31.600
3	0.0000	0.2767	0.5844	0.9785	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408	10.214	12.924
4	0.0000	0.2707	0.5686	0.9410	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041	7.1729	8.6101
5	0.0000	0.2672	0.5594	0.9195	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	5.8935	6.8685
6	0.0000	0.2648	0.5534	0.9057	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.2075	5.9587
7	0.0000	0.2632	0.5491	0.8960	1.4149	1.8946	2.3646	2.9979	3.4995	4.7853	5.4081
8	0.0000	0.2619	0.5459	0.8889	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	4.5008	5.0414
9	0.0000	0.2610	0.5435	0.8834	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.2969	4.7809
10	0.0000	0.2602	0.5415	0.8791	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.1437	4.5868
11	0.0000	0.2596	0.5399	0.8755	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.0248	4.4369
12	0.0000	0.2590	0.5386	0.8726	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	3.9296	4.3178
13	0.0000	0.2586	0.5375	0.8702	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.8520	4.2209
14	0.0000	0.2582	0.5366	0.8681	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.7874	4.1403
15	0.0000	0.2579	0.5357	0.8662	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467	3.7329	4.0728
16	0.0000	0.2576	0.5350	0.8647	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.6861	4.0149
17	0.0000	0.2573	0.5344	0.8633	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.6458	3.9651
18	0.0000	0.2571	0.5338	0.8620	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.6105	3.9217
19	0.0000	0.2569	0.5333	0.8610	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.5793	3.8833
20	0.0000	0.2567	0.5329	0.8600	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.5518	3.8496
21	0.0000	0.2566	0.5325	0.8591	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.5271	3.8193
22	0.0000	0.2564	0.5321	0.8583	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.5050	3.7922
23	0.0000	0.2563	0.5317	0.8575	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.4850	3.7676
24	0.0000	0.2562	0.5314	0.8569	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7970	3.4668	3.7454
25	0.0000	0.2561	0.5312	0.8562	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.4502	3.7251
26	0.0000	0.2560	0.5309	0.8557	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.4350	3.7067
27	0.0000	0.2559	0.5306	0.8551	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.4210	3.6895
28	0.0000	0.2558	0.5304	0.8546	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.4082	3.6739
29	0.0000	0.2557	0.5302	0.8542	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.3963	3.6595
30	0.0000	0.2556	0.5300	0.8538	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.3852	3.6460
40	0.0000	0.2550	0.5286	0.8507	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	3.3069	3.5510
50	0.0000	0.2547	0.5278	0.8489	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	3.2614	3.4960
60	0.0000	0.2545	0.5272	0.8477	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	3.2317	3.4602
70	0.0000	0.2543	0.5268	0.8468	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479	3.2108	3.4350
80	0.0000	0.2542	0.5265	0.8461	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387	3.1952	3.4164
90	0.0000	0.2541	0.5263	0.8456	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316	3.1832	3.4019
100	0.0000	0.2540	0.5261	0.8452	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259	3.1738	3.3905
200	0.0000	0.2537	0.5252	0.8434	1.2858	1.6525	1.9719	2.3451	2.6006	3.1315	3.3398
$\infty$	0.0000	0.2533	0.5244	0.8416	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0903	3.2906

# Table Fisher

Variable de FISHER :  $F = F(n_1, n_2)$

$F = \frac{Y_1/n_1}{Y_2/n_2}$  où  $Y_1 = \chi^2(n_1)$  et  $Y_2 = \chi^2(n_2)$  indépendants

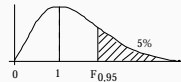
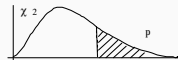


Table du quantile  $F_{0,95}$  en fonction de  $n_1$  et  $n_2$  :  $P(F > F_{0,95}) = 5\%$

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	30	40	50	100	200	$\infty$
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254	254
2	18,5	19,0	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,69	8,66	8,64	8,62	8,59	8,58	8,56	8,54	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,84	5,80	5,77	5,75	5,72	5,70	5,66	5,65	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,40	4,38	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,71	3,69	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,28	3,25	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,20	3,15	3,12	3,08	3,04	3,03	2,98	2,96	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	2,98	2,94	2,90	2,86	2,83	2,80	2,76	2,73	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,82	2,77	2,74	2,70	2,66	2,64	2,59	2,56	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,50	2,45	2,42	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,60	2,54	2,51	2,47	2,43	2,40	2,35	2,32	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,32	2,26	2,24	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,19	2,16	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,39	2,33	2,29	2,25	2,20	2,18	2,12	2,10	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,33	2,28	2,24	2,19	2,15	2,13	2,07	2,04	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,29	2,23	2,19	2,15	2,10	2,08	2,02	1,99	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,25	2,19	2,15	2,11	2,06	2,04	1,98	1,95	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,21	2,16	2,11	2,07	2,03	2,00	1,94	1,91	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,96	1,90	1,87	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,15	2,10	2,05	2,01	1,96	1,93	1,87	1,84	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,13	2,07	2,03	1,98	1,94	1,91	1,84	1,81	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,10	2,05	2,01	1,96	1,91	1,88	1,82	1,79	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,09	2,03	1,98	1,94	1,89	1,86	1,80	1,76	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,06	2,01	1,96	1,92	1,87	1,84	1,77	1,74	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,69	1,66	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,59	1,55	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02	1,95	1,85	1,78	1,74	1,69	1,63	1,60	1,52	1,48	1,44
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92	1,85	1,75	1,68	1,63	1,57	1,51	1,48	1,39	1,34	1,28
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87	1,80	1,69	1,62	1,57	1,52	1,45	1,42	1,32	1,26	1,19
$\infty$	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,64	1,57	1,52	1,46	1,40	1,35	1,24	1,17	1,00



TABLE DU CHI-DEUX :  $\chi^2(n)$ 

# Table $\chi^2$

n \ P	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Pour  $n > 30$ , on peut admettre que  $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1} \approx N(0,1)$