Recherche Opérationnelle Alternance 1A
Programmation Linéaire
Modèles classiques

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Programmation Linéaire

Plan

1. Modélisation,
2. Résolution : L'Algorithme du Simplexe,
3. Dualité,
4. Application : Jeux de stratégie.

Programmation Linéaire

Plan

1. Modélisation,
2. Résolution : L'Algorithme du Simplexe,
3. Dualité,
4. Application : Jeux de stratégie.

C'est quoi la Programmation Linéaire ?

Programmation Linéaire

Plan

1. Modélisation,
2. Résolution : L'Algorithme du Simplexe,
3. Dualité,
4. Application : Jeux de stratégie.

C'est quoi la Programmation Linéaire ?

1. Modéliser des problèmes par des Programmes Linéaires,

Programmation Linéaire

Plan

1. Modélisation,
2. Résolution : L'Algorithme du Simplexe,
3. Dualité,
4. Application : Jeux de stratégie.

C'est quoi la Programmation Linéaire ?

1. Modéliser des problèmes par des Programmes Linéaires,
2. Résoudre ces Programmes Linéaires.

Programmation Linéaire

Plan

1. Modélisation,
2. Résolution : L'Algorithme du Simplexe,
3. Dualité,
4. Application : Jeux de stratégie.

C'est quoi la Programmation Linéaire ?

1. Modéliser des problèmes par des Programmes Linéaires,
2. Résoudre ces Programmes Linéaires.

C'est quoi un Programme Linéaire ?

Programmation Linéaire

Plan

1. Modélisation,
2. Résolution : L'Algorithme du Simplexe,
3. Dualité,
4. Application : Jeux de stratégie.

C'est quoi la Programmation Linéaire ?

1. Modéliser des problèmes par des Programmes Linéaires,
2. Résoudre ces Programmes Linéaires.

C'est quoi un Programme Linéaire ?

1. Optimiser une Fonction Linéaire sur un domaine défini par des Contraintes Linéaires.

Programme Linéaire

Exemple,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 &\leq 8 \\ 1x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \\ 4x_1 + 5x_2 &= z(\max) \end{aligned}$$

Programme Linéaire

Exemple, **Définitions**

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 1x_2 &\le 8\\
1x_1 + 2x_2 &\le 7\\
x_2 &\le 3\\
x_1,\ x_2 &\ge 0\\
4x_1 + 5x_2 &= z(\max)
\end{aligned}
$$

Variables

Programme Linéaire

Exemple,

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 1x_2 &\leq 8 \\
1x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\
x_2 &\leq 3 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0 \\
4x_1 + 5x_2 &= z(\max)
\end{aligned}
$$

Définitions

Variables

Contraintes d'inégalités

Programme Linéaire

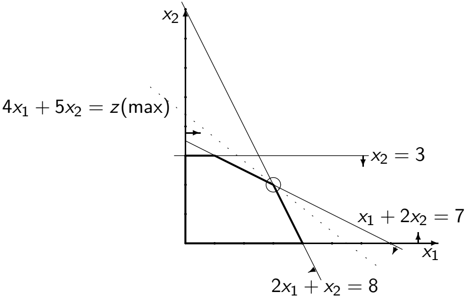
Exemple,	Définitions
$2x_1 + 1x_2 \leq 8$	Variables
$1x_1 + 2x_2 \leq 7$	Contraintes d'inégalités
$x_2 \leq 3$	
$x_1,\ x_2 \geq 0$	Contraintes de non-négativité
$4x_1 + 5x_2 = z(\max)$	

Programme Linéaire

Exemple,	Définitions
$2x_1 + 1x_2 \leq 8$	Variables
$1x_1 + 2x_2 \leq 7$	Contraintes d'inégalités
$x_2 \leq 3$	
$x_1,\ x_2 \geq 0$	Contraintes de non-négativité
$4x_1 + 5x_2 = z(\max)$	Fonction Objectif

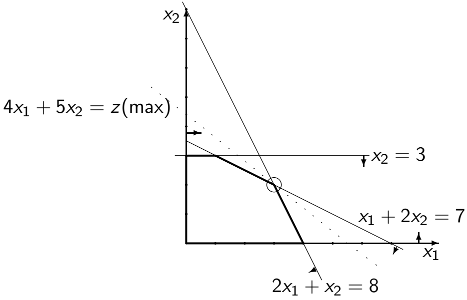
Programme Linéaire

Exemple,	Définitions	
$2x_1 + 1x_2 \leq 8$	Variables	
$1x_1 + 2x_2 \leq 7$	Contraintes d'inégalités	Solution
$x_2 \leq 3$		
$x_1,\ x_2 \geq 0$	Contraintes de non-négativité	
$4x_1 + 5x_2 = z(\max)$	Fonction Objectif	



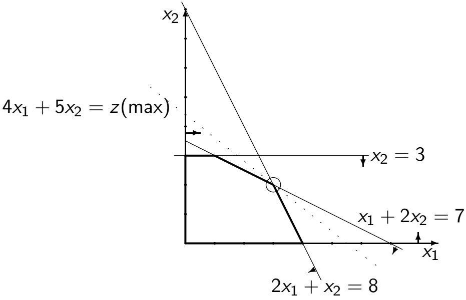
Programme Linéaire

Exemple,	Définitions	
$2x_1 + 1x_2 \le 8$	Variables	
$1x_1 + 2x_2 \le 7$	Contraintes d'inégalités	Solution
$x_2 \le 3$		
$x_1,\ x_2 \ge 0$	Contraintes de non-négativité	Solution réalisable
$4x_1 + 5x_2 = z(\max)$	Fonction Objectif	



Programme Linéaire

Exemple,	Définitions	
$2x_1 + 1x_2 \leq 8$	Variables	
$1x_1 + 2x_2 \leq 7$	Contraintes d'inégalités	Solution
$x_2 \leq 3$		
$x_1,\ x_2 \geq 0$	Contraintes de non-négativité	Solution réalisable
$4x_1 + 5x_2 = z(\max)$	Fonction Objectif	Solution optimale



Programme Linéaire

Exemple,	Définitions	
$2x_1 + 1x_2 \leq 8$	Variables	
$1x_1 + 2x_2 \leq 7$	Contraintes d'inégalités	Solution
$x_2 \leq 3$		
$x_1,\ x_2 \geq 0$	Contraintes de non-négativité	Solution réalisable
$4x_1 + 5x_2 = z(\max)$	Fonction Objectif	Solution optimale

Programme Linéaire

1. Etant données des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$,
2. Domaine = Polyèdre : Ensemble des solutions réalisables, c-à-d Ensemble des vecteurs satisfaisant des inégalités linéaires
   - Contraintes d'inégalités + Contraintes de non-négativité
3. Fonction Objectif : Maximiser ou minimiser une combinaison linéaire des variables.

Modélisation

Modèles classiques

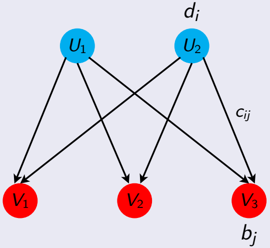
1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation

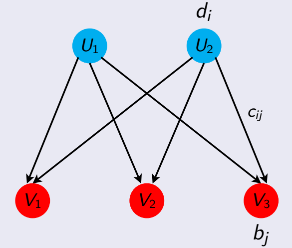


Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



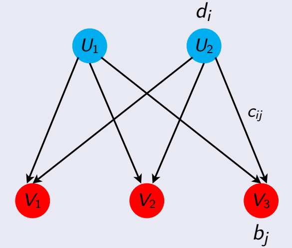
Problème de production

Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



Problème de production

Matières premières

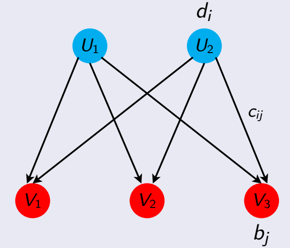
Produits

Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



Problème de production

Disponibilité

Matières premières

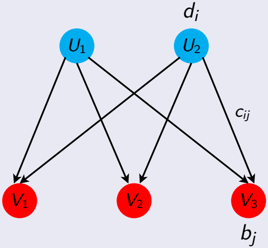
Produits

Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



Problème de production

Disponibilité

Matières premières

Produits

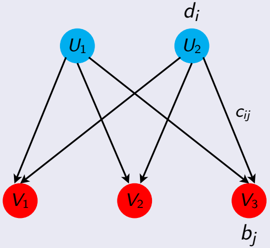
Bénéfice

Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



Problème de production

Disponibilité
Matières premières

Contenu

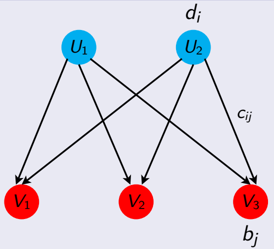
Produits
Bénéfice

Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



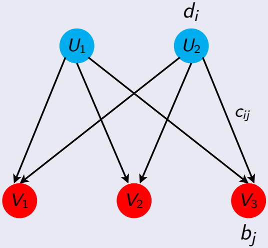
Problème de transport

Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



Problème de transport

Usines

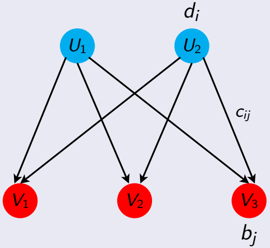
Ateliers

Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



Problème de transport

Disponibilité

Usines

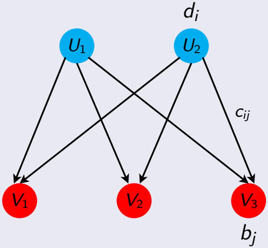
Ateliers

Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



Problème de transport

Disponibilité
Usines

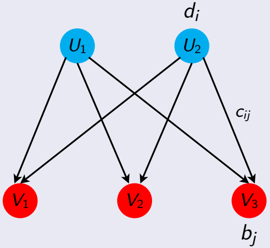
Ateliers
Besoin

Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



Problème de transport

Disponibilité
Usines

Coût de transport

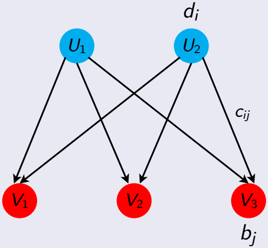
Ateliers
Besoin

Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



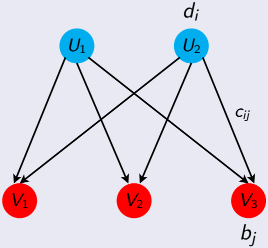
Problème d'alimentation

Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



Problème d'alimentation

Aliments

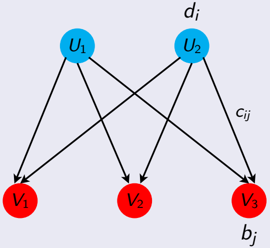
Vitamines

Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



Problème d'alimentation

Dépense

Aliments

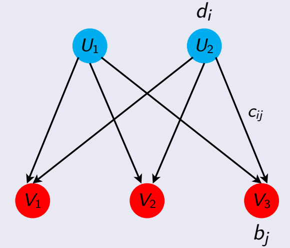
Vitamines

Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



Problème d'alimentation

Dépense

Aliments

Vitamines

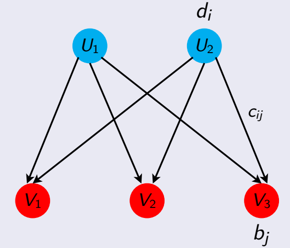
Besoin

Modélisation

Modèles classiques

1. Problème de production,
2. Problème de transport,
3. Problème d'alimentation.

Visualisation



Problème d'alimentation

Dépense
Aliments

Contenu

Vitamines
Besoin

Problème de production

Problème de production

- Avant l'arrivage massif de nouveaux modèles, un vendeur de téléphones portables veut écouler rapidement son stock composé de

Problème de production

- Avant l’arrivage massif de nouveaux modèles, un vendeur de téléphones portables veut écouler rapidement son stock composé de
  1. **8** appareils,

Problème de production

- Avant l'arrivage massif de nouveaux modèles, un vendeur de téléphones portables veut écouler rapidement son stock composé de
  1. **8** appareils,
  2. **4** kits "mains libres" et

Problème de production

- Avant l'arrivage massif de nouveaux modèles, un vendeur de téléphones portables veut écouler rapidement son stock composé de
  1. **8** appareils,
  2. **4** kits "mains libres" et
  3. **19** cartes avec des communications prépayées.

Problème de production

- Avant l'arrivage massif de nouveaux modèles, un vendeur de téléphones portables veut écouler rapidement son stock composé de
    1. **8** appareils,
    2. **4** kits "mains libres" et
    3. **19** cartes avec des communications prépayées.
- Après une étude de marché, il sait très bien que, dans cette période de soldes, il peut proposer aux clients deux coffrets qui vont lui rapporter des profits nets :

Problème de production

- Avant l'arrivage massif de nouveaux modèles, un vendeur de téléphones portables veut écouler rapidement son stock composé de
  1. **8** appareils,
  2. **4** kits "mains libres" et
  3. **19** cartes avec des communications prépayées.
- Après une étude de marché, il sait très bien que, dans cette période de soldes, il peut proposer aux clients deux coffrets qui vont lui rapporter des profits nets :
  1. Coffret 1 : **1** téléphone, **0** kit et **2** cartes, avec un profit net de **7€**.

Problème de production

- Avant l'arrivage massif de nouveaux modèles, un vendeur de téléphones portables veut écouler rapidement son stock composé de
  1. **8** appareils,
  2. **4** kits "mains libres" et
  3. **19** cartes avec des communications prépayées.
- Après une étude de marché, il sait très bien que, dans cette période de soldes, il peut proposer aux clients deux coffrets qui vont lui rapporter des profits nets :
  1. Coffret 1 : **1** téléphone, **0** kit et **2** cartes, avec un profit net de **7**€.
  2. Coffret 2 : **1** téléphone, **1** kit et **3** cartes, avec un profit net de **9**€.

Problème de production

- Avant l'arrivage massif de nouveaux modèles, un vendeur de téléphones portables veut écouler rapidement son stock composé de
  1. **8** appareils,
  2. **4** kits "mains libres" et
  3. **19** cartes avec des communications prépayées.
- Après une étude de marché, il sait très bien que, dans cette période de soldes, il peut proposer aux clients deux coffrets qui vont lui rapporter des profits nets :
  1. Coffret 1 : **1** téléphone, **0** kit et **2** cartes, avec un profit net de **7**€.
  2. Coffret 2 : **1** téléphone, **1** kit et **3** cartes, avec un profit net de **9**€.
- Il est assuré de pouvoir vendre tranquillement n'importe quelle quantité de ses offres dans la limite du stock disponible.

Problème de production

- Avant l'arrivage massif de nouveaux modèles, un vendeur de téléphones portables veut écouler rapidement son stock composé de
  1. **8** appareils,
  2. **4** kits "mains libres" et
  3. **19** cartes avec des communications prépayées.
- Après une étude de marché, il sait très bien que, dans cette période de soldes, il peut proposer aux clients deux coffrets qui vont lui rapporter des profits nets :
  1. Coffret 1 : **1** téléphone, **0** kit et **2** cartes, avec un profit net de **7**€.
  2. Coffret 2 : **1** téléphone, **1** kit et **3** cartes, avec un profit net de **9**€.
- Il est assuré de pouvoir vendre tranquillement n'importe quelle quantité de ses offres dans la limite du stock disponible.
- Quelle quantité de chaque offre notre vendeur doit-il préparer pour maximiser son profit net?

Problème de production

Solution

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit			

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I		

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	
Téléphone			

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	
Téléphone			
Kit			

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	
Téléphone			
Kit			
Carte			

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone			
Kit			
Carte			

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone			
Kit			
Carte			
Profit			

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**		
Kit			
Carte			
Profit			

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**		
Kit	**0**		
Carte			
Profit			

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**		
Kit	**0**		
Carte	**2**		
Profit			

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**		
Kit	**0**		
Carte	**2**		
Profit	**7**		

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	
Kit	**0**		
Carte	**2**		
Profit	**7**		

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	
Kit	**0**	**1**	
Carte	**2**		
Profit	**7**		

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	
Kit	**0**	**1**	
Carte	**2**	**3**	
Profit	**7**		

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	
Kit	**0**	**1**	
Carte	**2**	**3**	
Profit	**7**	**9**	

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	
Carte	**2**	**3**	
Profit	**7**	**9**	

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	
Profit	**7**	**9**	

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	**19**
Profit	**7**	**9**	

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	**19**
Profit	**7**	**9**	?

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	**19**
Profit	**7**	**9**	?

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	**19**
Profit	**7**	**9**	?

2. Variables :

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	**19**
Profit	**7**	**9**	?

2. Variables : x_i quantité du produit i;

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	**19**
Profit	**7**	**9**	?

2. Variables : x_i quantité du produit i; x_1, x_2.

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	**19**
Profit	**7**	**9**	?

2. Variables : x_i quantité du produit i; x_1, x_2.
3. Contraintes de disponibilité :

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	**19**
Profit	**7**	**9**	?

2. Variables : x_i quantité du produit i; x_1, x_2.
3. Contraintes de disponibilité : Pour produire x_1 (x_2) Coffrets I (II),

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	**19**
Profit	**7**	**9**	?

2. Variables : x_i quantité du produit i; x_1, x_2.
3. Contraintes de disponibilité : Pour produire x_1 (x_2) Coffrets I (II),
    1. on a besoin de $x_1 + x_2$ téléphones mais il y en a seulement 8,

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	**19**
Profit	**7**	**9**	?

2. Variables : x_i quantité du produit i; x_1, x_2.
3. Contraintes de disponibilité : Pour produire x_1 (x_2) Coffrets I (II),
   1. on a besoin de $x_1 + x_2$ téléphones mais il y en a seulement 8,
   2. on a besoin de x_2 kits mais il y en a seulement 4,

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	**19**
Profit	**7**	**9**	?

2. Variables : x_i quantité du produit i; x_1, x_2.
3. Contraintes de disponibilité : Pour produire x_1 (x_2) Coffrets I (II),
    1. on a besoin de $x_1 + x_2$ téléphones mais il y en a seulement 8,
    2. on a besoin de x_2 kits mais il y en a seulement 4,
    3. on a besoin de $2x_1 + 3x_2$ cartes mais il y en a seulement 19.

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	**19**
Profit	**7**	**9**	?

2. Variables : x_i quantité du produit i; x_1, x_2.
3. Contraintes de disponibilité : Pour produire x_1 (x_2) Coffrets I (II),
    1. on a besoin de $x_1 + x_2$ téléphones mais il y en a seulement 8,
    2. on a besoin de x_2 kits mais il y en a seulement 4,
    3. on a besoin de $2x_1 + 3x_2$ cartes mais il y en a seulement 19.
4. Contraintes de non-négativité :

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	**19**
Profit	**7**	**9**	?

2. Variables : x_i quantité du produit i; x_1, x_2.
3. Contraintes de disponibilité : Pour produire x_1 (x_2) Coffrets I (II),
   1. on a besoin de $x_1 + x_2$ téléphones mais il y en a seulement 8,
   2. on a besoin de x_2 kits mais il y en a seulement 4,
   3. on a besoin de $2x_1 + 3x_2$ cartes mais il y en a seulement 19.
4. Contraintes de non-négativité : $x_1, x_2 \geq 0.$

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	**19**
Profit	**7**	**9**	?

2. Variables : x_i quantité du produit i; x_1, x_2.
3. Contraintes de disponibilité : Pour produire x_1 (x_2) Coffrets I (II),
    1. on a besoin de $x_1 + x_2$ téléphones mais il y en a seulement 8,
    2. on a besoin de x_2 kits mais il y en a seulement 4,
    3. on a besoin de $2x_1 + 3x_2$ cartes mais il y en a seulement 19.
4. Contraintes de non-négativité : $x_1, x_2 \geq 0$.
5. Fonction Objectif :

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	**19**
Profit	**7**	**9**	?

2. Variables : x_i quantité du produit i; x_1, x_2.
3. Contraintes de disponibilité : Pour produire x_1 (x_2) Coffrets I (II),
    1. on a besoin de $x_1 + x_2$ téléphones mais il y en a seulement 8,
    2. on a besoin de x_2 kits mais il y en a seulement 4,
    3. on a besoin de $2x_1 + 3x_2$ cartes mais il y en a seulement 19.
4. Contraintes de non-négativité : $x_1, x_2 \geq 0$.
5. Fonction Objectif : maximiser le profit :

Problème de production

Solution

1. Tableau de données :

Produit	Coffret I	Coffret II	En stock
Téléphone	**1**	**1**	**8**
Kit	**0**	**1**	**4**
Carte	**2**	**3**	**19**
Profit	**7**	**9**	?

2. Variables : x_i quantité du produit i; x_1, x_2.
3. Contraintes de disponibilité : Pour produire x_1 (x_2) Coffrets I (II),
   1. on a besoin de $x_1 + x_2$ téléphones mais il y en a seulement 8,
   2. on a besoin de x_2 kits mais il y en a seulement 4,
   3. on a besoin de $2x_1 + 3x_2$ cartes mais il y en a seulement 19.
4. Contraintes de non-négativité : $x_1, x_2 \geq 0$.
5. Fonction Objectif : maximiser le profit : $7x_1 + 9x_2 = z(\max)$.

Problème de production

Programme linéaire

Problème de production

Programme linéaire

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 &\leq 8 \\ x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 19 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \\ 7x_1 + 9x_2 &= z(\max) \end{aligned}$$

Problème de production

Programme linéaire

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 &\leq 8 \\ x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 19 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \\ 7x_1 + 9x_2 &= z(\max) \end{aligned}$$

Contraintes d'inégalités

Problème de production

Programme linéaire

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 &\leq 8 \\ x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 19 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \\ 7x_1 + 9x_2 &= z(\max) \end{aligned}$$

Contraintes d'inégalités

Contraintes de non-négativité

Problème de production

Programme linéaire

$$\begin{array}{rl}
1x_1 + 1x_2 \leq 8 & \\
x_2 \leq 4 & \text{Contraintes d'inégalités} \\
2x_1 + 3x_2 \leq 19 & \\
x_1,\ x_2 \geq 0 & \text{Contraintes de non-négativité} \\
7x_1 + 9x_2 = z(\max) & \text{Fonction Objectif}
\end{array}$$

Problème de production

Programme linéaire

$$\begin{array}{rl} 1x_1 + 1x_2 \leq 8 & \\ x_2 \leq 4 & \text{Contraintes d'inégalités} \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 19 & \\ x_1,\ x_2 \geq 0 & \text{Contraintes de non-négativité} \\ 7x_1 + 9x_2 = z(\max) & \text{Fonction Objectif} \end{array}$$

Programme linéaire sous forme générale

Problème de production

Programme linéaire

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 &\leq 8 \\ x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 19 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \\ 7x_1 + 9x_2 &= z(\max) \end{aligned}$$

Contraintes d'inégalités

Contraintes de non-négativité

Fonction Objectif

Programme linéaire sous forme générale

$Ax \leq b$ Contraintes d'inégalités

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix},$$

Problème de production

Programme linéaire

$$
\begin{array}{rl}
1x_1 + 1x_2 \leq 8 & \\
x_2 \leq 4 & \text{Contraintes d'inégalités} \\
2x_1 + 3x_2 \leq 19 & \\
x_1,\ x_2 \geq 0 & \text{Contraintes de non-négativité} \\
7x_1 + 9x_2 = z(\max) & \text{Fonction Objectif}
\end{array}
$$

Programme linéaire sous forme générale

$$
\begin{array}{rl}
Ax \leq b & \text{Contraintes d'inégalités} \\
x \geq 0 & \text{Contraintes de non-négativité}
\end{array}
$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix},$$

Problème de production

Programme linéaire

$$\begin{array}{rl} 1x_1 + 1x_2 \leq 8 & \\ x_2 \leq 4 & \text{Contraintes d'inégalités} \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 19 & \\ x_1,\ x_2 \geq 0 & \text{Contraintes de non-négativité} \\ 7x_1 + 9x_2 = z(\max) & \text{Fonction Objectif} \end{array}$$

Programme linéaire sous forme générale

$$\begin{array}{rl} Ax \leq b & \text{Contraintes d'inégalités} \\ x \geq 0 & \text{Contraintes de non-négativité} \\ c^T x = z(\max) & \text{Fonction Objectif} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}, \quad c^T = \begin{pmatrix} 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Problème de production

Programme linéaire

$$\begin{aligned} 1x_1 + 1x_2 &\leq 8 \\ x_2 &\leq 4 & \text{Contraintes d'inégalités} \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 19 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 & \text{Contraintes de non-négativité} \\ 7x_1 + 9x_2 &= z(\max) & \text{Fonction Objectif} \end{aligned}$$

Programme linéaire sous forme générale

$$\begin{aligned} Ax &\leq b & \text{Contraintes d'inégalités} \\ x &\geq 0 & \text{Contraintes de non-négativité} \\ c^T x &= z(\max) & \text{Fonction Objectif} \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 19 \end{pmatrix}, \quad c^T = \begin{pmatrix} 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

P	C I	C II	S
T	1	1	8
K	0	1	4
C	2	3	19
P	7	9	?

Problème de transport

Problème de transport

- Un modèle de voiture est assemblé dans un des trois ateliers situés dans les villes V_1, V_2 et V_3. Les besoins hebdomadaires des trois ateliers d'assemblage sont au moins **5**, **4** et **3** moteurs.

Problème de transport

- Un modèle de voiture est assemblé dans un des trois ateliers situés dans les villes V_1, V_2 et V_3. Les besoins hebdomadaires des trois ateliers d'assemblage sont au moins **5**, **4** et **3** moteurs.
- Le moteur qui équipe ce modèle est fourni par une des deux usines situées dans les villes U_1 et U_2. Chaque usine peut fournir au plus **6** moteurs.

Problème de transport

- Un modèle de voiture est assemblé dans un des trois ateliers situés dans les villes V_1, V_2 et V_3. Les besoins hebdomadaires des trois ateliers d'assemblage sont au moins **5**, **4** et **3** moteurs.
- Le moteur qui équipe ce modèle est fourni par une des deux usines situées dans les villes U_1 et U_2. Chaque usine peut fournir au plus **6** moteurs.
- Le seul souci pour la direction est de minimiser le coût total de transport des moteurs entre les deux lieux de fabrication et les trois ateliers d'assemblage.

Problème de transport

- Un modèle de voiture est assemblé dans un des trois ateliers situés dans les villes V_1, V_2 et V_3. Les besoins hebdomadaires des trois ateliers d'assemblage sont au moins **5**, **4** et **3** moteurs.
- Le moteur qui équipe ce modèle est fourni par une des deux usines situées dans les villes U_1 et U_2. Chaque usine peut fournir au plus **6** moteurs.
- Le seul souci pour la direction est de minimiser le coût total de transport des moteurs entre les deux lieux de fabrication et les trois ateliers d'assemblage.
- Le tableau suivant donne les coûts unitaires (par moteur transporté) pour tous les trajets envisageables.

	V_1	V_2	V_3
U_1	**38**	**27**	**48**
U_2	**37**	**58**	**45**

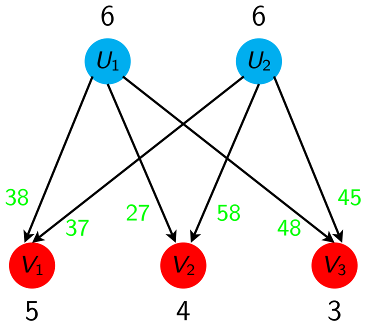
Problème de transport

- Un modèle de voiture est assemblé dans un des trois ateliers situés dans les villes V_1, V_2 et V_3. Les besoins hebdomadaires des trois ateliers d'assemblage sont au moins **5**, **4** et **3** moteurs.
- Le moteur qui équipe ce modèle est fourni par une des deux usines situées dans les villes U_1 et U_2. Chaque usine peut fournir au plus **6** moteurs.
- Le seul souci pour la direction est de minimiser le coût total de transport des moteurs entre les deux lieux de fabrication et les trois ateliers d'assemblage.
- Le tableau suivant donne les coûts unitaires (par moteur transporté) pour tous les trajets envisageables.

	V_1	V_2	V_3
U_1	**38**	**27**	**48**
U_2	**37**	**58**	**45**

- Comment minimiser le coût total de transport en respectant l'offre et la demande ?

Problème de transport



Problème de transport

Solution

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes				

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1			

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2		

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	
U_1				

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	
U_1				
U_2				

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1				
U_2				

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1				
U_2				
demande				

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	
U_2	**37**	**58**	**45**	
demande				

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	
U_2	**37**	**58**	**45**	
demande	5	4	3	

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

2. Variables :

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

2. Variables : x_{ij} quantité de moteurs transportés de l'usine i à l'atelier j.

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

2. Variables : x_{ij} quantité de moteurs transportés de l'usine i à l'atelier j.
3. Contraintes de disponibilité :

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

2. Variables : x_{ij} quantité de moteurs transportés de l'usine i à l'atelier j.
3. Contraintes de disponibilité : on veut transporter

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

2. Variables : x_{ij} quantité de moteurs transportés de l'usine i à l'atelier j.
3. Contraintes de disponibilité : on veut transporter
   1. $x_{11} + x_{12} + x_{13}$ moteurs de l'usine 1 mais il y en a seulement 6,

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

2. Variables : x_{ij} quantité de moteurs transportés de l'usine i à l'atelier j.
3. Contraintes de disponibilité : on veut transporter
   1. $x_{11} + x_{12} + x_{13}$ moteurs de l'usine 1 mais il y en a seulement 6,
   2. $x_{21} + x_{22} + x_{23}$ moteurs de l'usine 2 mais il y en a seulement 6,

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

2. Variables : x_{ij} quantité de moteurs transportés de l'usine i à l'atelier j.
3. Contraintes de disponibilité : on veut transporter
    1. $x_{11} + x_{12} + x_{13}$ moteurs de l'usine 1 mais il y en a seulement 6,
    2. $x_{21} + x_{22} + x_{23}$ moteurs de l'usine 2 mais il y en a seulement 6,
4. Contraintes de demande :

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

2. Variables : x_{ij} quantité de moteurs transportés de l'usine i à l'atelier j.
3. Contraintes de disponibilité : on veut transporter
    1. $x_{11} + x_{12} + x_{13}$ moteurs de l'usine 1 mais il y en a seulement 6,
    2. $x_{21} + x_{22} + x_{23}$ moteurs de l'usine 2 mais il y en a seulement 6,
4. Contraintes de demande : on veut transporter

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

2. Variables : x_{ij} quantité de moteurs transportés de l'usine i à l'atelier j.
3. Contraintes de disponibilité : on veut transporter
    1. $x_{11} + x_{12} + x_{13}$ moteurs de l'usine 1 mais il y en a seulement 6,
    2. $x_{21} + x_{22} + x_{23}$ moteurs de l'usine 2 mais il y en a seulement 6,
4. Contraintes de demande : on veut transporter
    1. $x_{11} + x_{21}$ moteurs à l'atelier 1 mais il en faut 5,

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

2. Variables : x_{ij} quantité de moteurs transportés de l'usine i à l'atelier j.
3. Contraintes de disponibilité : on veut transporter
    1. $x_{11} + x_{12} + x_{13}$ moteurs de l'usine 1 mais il y en a seulement 6,
    2. $x_{21} + x_{22} + x_{23}$ moteurs de l'usine 2 mais il y en a seulement 6,
4. Contraintes de demande : on veut transporter
    1. $x_{11} + x_{21}$ moteurs à l'atelier 1 mais il en faut 5,
    2. $x_{12} + x_{22}$ moteurs à l'atelier 2 mais il en faut 4,

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

2. Variables : x_{ij} quantité de moteurs transportés de l'usine i à l'atelier j.
3. Contraintes de disponibilité : on veut transporter
    1. $x_{11} + x_{12} + x_{13}$ moteurs de l'usine 1 mais il y en a seulement 6,
    2. $x_{21} + x_{22} + x_{23}$ moteurs de l'usine 2 mais il y en a seulement 6,
4. Contraintes de demande : on veut transporter
    1. $x_{11} + x_{21}$ moteurs à l'atelier 1 mais il en faut 5,
    2. $x_{12} + x_{22}$ moteurs à l'atelier 2 mais il en faut 4,
    3. $x_{13} + x_{23}$ moteurs à l'atelier 3 mais il en faut 3,

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

2. Variables : x_{ij} quantité de moteurs transportés de l'usine i à l'atelier j.
3. Contraintes de disponibilité : on veut transporter
    1. $x_{11} + x_{12} + x_{13}$ moteurs de l'usine 1 mais il y en a seulement 6,
    2. $x_{21} + x_{22} + x_{23}$ moteurs de l'usine 2 mais il y en a seulement 6,
4. Contraintes de demande : on veut transporter
    1. $x_{11} + x_{21}$ moteurs à l'atelier 1 mais il en faut 5,
    2. $x_{12} + x_{22}$ moteurs à l'atelier 2 mais il en faut 4,
    3. $x_{13} + x_{23}$ moteurs à l'atelier 3 mais il en faut 3,
5. Contraintes de non-négativité :

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

2. Variables : x_{ij} quantité de moteurs transportés de l'usine i à l'atelier j.
3. Contraintes de disponibilité : on veut transporter
    1. $x_{11} + x_{12} + x_{13}$ moteurs de l'usine 1 mais il y en a seulement 6,
    2. $x_{21} + x_{22} + x_{23}$ moteurs de l'usine 2 mais il y en a seulement 6,
4. Contraintes de demande : on veut transporter
    1. $x_{11} + x_{21}$ moteurs à l'atelier 1 mais il en faut 5,
    2. $x_{12} + x_{22}$ moteurs à l'atelier 2 mais il en faut 4,
    3. $x_{13} + x_{23}$ moteurs à l'atelier 3 mais il en faut 3,
5. Contraintes de non-négativité : $x_{ij} \geq 0$.

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

2. Variables : x_{ij} quantité de moteurs transportés de l'usine i à l'atelier j.
3. Contraintes de disponibilité : on veut transporter
    1. $x_{11} + x_{12} + x_{13}$ moteurs de l'usine 1 mais il y en a seulement 6,
    2. $x_{21} + x_{22} + x_{23}$ moteurs de l'usine 2 mais il y en a seulement 6,
4. Contraintes de demande : on veut transporter
    1. $x_{11} + x_{21}$ moteurs à l'atelier 1 mais il en faut 5,
    2. $x_{12} + x_{22}$ moteurs à l'atelier 2 mais il en faut 4,
    3. $x_{13} + x_{23}$ moteurs à l'atelier 3 mais il en faut 3,
5. Contraintes de non-négativité : $x_{ij} \geq 0$.
6. Fonction Objectif :

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

2. Variables : x_{ij} quantité de moteurs transportés de l'usine i à l'atelier j.
3. Contraintes de disponibilité : on veut transporter
   1. $x_{11} + x_{12} + x_{13}$ moteurs de l'usine 1 mais il y en a seulement 6,
   2. $x_{21} + x_{22} + x_{23}$ moteurs de l'usine 2 mais il y en a seulement 6,
4. Contraintes de demande : on veut transporter
   1. $x_{11} + x_{21}$ moteurs à l'atelier 1 mais il en faut 5,
   2. $x_{12} + x_{22}$ moteurs à l'atelier 2 mais il en faut 4,
   3. $x_{13} + x_{23}$ moteurs à l'atelier 3 mais il en faut 3,
5. Contraintes de non-négativité : $x_{ij} \geq 0$.
6. Fonction Objectif : minimiser le coût des transports :

Problème de transport

Solution

1. Tableau de données :

Villes	V_1	V_2	V_3	disponible
U_1	**38**	**27**	**48**	6
U_2	**37**	**58**	**45**	6
demande	5	4	3	

2. Variables : x_{ij} quantité de moteurs transportés de l'usine i à l'atelier j.
3. Contraintes de disponibilité : on veut transporter
    1. $x_{11} + x_{12} + x_{13}$ moteurs de l'usine 1 mais il y en a seulement 6,
    2. $x_{21} + x_{22} + x_{23}$ moteurs de l'usine 2 mais il y en a seulement 6,
4. Contraintes de demande : on veut transporter
    1. $x_{11} + x_{21}$ moteurs à l'atelier 1 mais il en faut 5,
    2. $x_{12} + x_{22}$ moteurs à l'atelier 2 mais il en faut 4,
    3. $x_{13} + x_{23}$ moteurs à l'atelier 3 mais il en faut 3,
5. Contraintes de non-négativité : $x_{ij} \geq 0$.
6. Fonction Objectif : minimiser le coût des transports :
   $38x_{11} + 27x_{12} + 48x_{13} + 37x_{21} + 58x_{22} + 45x_{23} = w(\min)$.

Problème de transport

Programme linéaire

$$\begin{array}{rrrrrrl}
x_{11} + & x_{12} + & x_{13} & & & & \leq 6 \\
 & & & x_{21} + & x_{22} + & x_{23} & \leq 6 \\
x_{11} + & & & x_{21} & & & \geq 5 \\
 & x_{12} + & & & x_{22} & & \geq 4 \\
 & & x_{13} + & & & x_{23} & \geq 3 \\
 & & & & & x_{ij} & \geq 0 \\
38x_{11} + & 27x_{12} + & 48x_{13} + & 37x_{21} + & 58x_{22} + & 45x_{23} & = w(\min)
\end{array}$$

Problème de transport

Programme linéaire

$$\begin{array}{rrrrrrl}
-x_{11} - & x_{12} - & x_{13} & & & & \geq -6 \\
& & & -x_{21} - & x_{22} - & x_{23} & \geq -6 \\
x_{11} + & & & x_{21} & & & \geq 5 \\
& x_{12} + & & & x_{22} & & \geq 4 \\
& & x_{13} + & & & x_{23} & \geq 3 \\
& & & & & x_{ij} & \geq 0 \\
\multicolumn{6}{r}{38x_{11} + 27x_{12} + 48x_{13} + 37x_{21} + 58x_{22} + 45x_{23}} & = w(\min)
\end{array}$$

Problème de transport

Programme linéaire

$$\begin{array}{rrrrrrl}
-x_{11} - & x_{12} - & x_{13} & & & & = -6 \\
& & & -x_{21} - & x_{22} - & x_{23} & = -6 \\
x_{11} + & & & x_{21} & & & = 5 \\
& x_{12} + & & & x_{22} & & = 4 \\
& & x_{13} + & & & x_{23} & = 3 \\
& & & & & x_{ij} & \geq 0 \\
38x_{11} + & 27x_{12} + & 48x_{13} + & 37x_{21} + & 58x_{22} + & 45x_{23} & = w(\min)
\end{array}$$

Problème de transport

Programme linéaire sous forme générale

Problème de transport

Programme linéaire sous forme générale

$Ax = b$ Contraintes d'inégalités

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Problème de transport

Programme linéaire sous forme générale

$Ax = b$ Contraintes d'inégalités

$x \geq 0$ Contraintes de non-négativité

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

Problème de transport

Programme linéaire sous forme générale

$Ax = b$	Contraintes d'inégalités
$x \geq 0$	Contraintes de non-négativité
$c^T x = w(\min)$	Fonction Objectif

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$c^T = \begin{pmatrix} 38 & 27 & 48 & 37 & 58 & 45 \end{pmatrix}.$$

Problème de transport

Programme linéaire sous forme générale

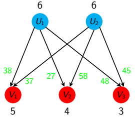
$Ax = b$	Contraintes d'inégalités
$x \geq 0$	Contraintes de non-négativité
$c^T x = w(\min)$	Fonction Objectif

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$c^T = \begin{pmatrix} 38 & 27 & 48 & 37 & 58 & 45 \end{pmatrix}.$$

Remarque

A est la matrice d'incidence du graphe biparti orienté.



Problème d'alimentation

Problème d'alimentation

- Le régime nutritionnel d'un sportif devrait garantir au moins

Problème d'alimentation

- Le régime nutritionnel d'un sportif devrait garantir au moins
  - **9** unités de vitamine A et

Problème d'alimentation

- Le régime nutritionnel d'un sportif devrait garantir au moins
  - **9** unités de vitamine A et
  - **19** unités de vitamine C par jour.

Problème d'alimentation

- Le régime nutritionnel d'un sportif devrait garantir au moins
  - **9** unités de vitamine A et
  - **19** unités de vitamine C par jour.
- On trouve sur le marché six produits (numérotés de 1 à 6) riches en ces vitamines. Un kilogramme de chacun de ces produits contient respectivement

Problème d'alimentation

- Le régime nutritionnel d'un sportif devrait garantir au moins
  - $\mathbf{9}$ unités de vitamine A et
  - $\mathbf{19}$ unités de vitamine C par jour.
- On trouve sur le marché six produits (numérotés de 1 à 6) riches en ces vitamines. Un kilogramme de chacun de ces produits contient respectivement
  - $\mathbf{1, 0, 2, 2, 1, 2}$ unités de vitamine A et

Problème d'alimentation

- Le régime nutritionnel d'un sportif devrait garantir au moins
  - $\mathbf{9}$ unités de vitamine A et
  - $\mathbf{19}$ unités de vitamine C par jour.
- On trouve sur le marché six produits (numérotés de 1 à 6) riches en ces vitamines. Un kilogramme de chacun de ces produits contient respectivement
  - $\mathbf{1, 0, 2, 2, 1, 2}$ unités de vitamine A et
  - $\mathbf{0, 1, 3, 1, 3, 2}$ unités de vitamine C et

Problème d'alimentation

- Le régime nutritionnel d'un sportif devrait garantir au moins
  - $\mathbf{9}$ unités de vitamine A et
  - $\mathbf{19}$ unités de vitamine C par jour.
- On trouve sur le marché six produits (numérotés de 1 à 6) riches en ces vitamines. Un kilogramme de chacun de ces produits contient respectivement
  - $\mathbf{1, 0, 2, 2, 1, 2}$ unités de vitamine A et
  - $\mathbf{0, 1, 3, 1, 3, 2}$ unités de vitamine C et
  - coûte respectivement $\mathbf{35, 30, 58, 50, 27, 22}$€.

Problème d'alimentation

- Le régime nutritionnel d'un sportif devrait garantir au moins
  - $\mathbf{9}$ unités de vitamine A et
  - $\mathbf{19}$ unités de vitamine C par jour.
- On trouve sur le marché six produits (numérotés de 1 à 6) riches en ces vitamines. Un kilogramme de chacun de ces produits contient respectivement
  - $\mathbf{1, 0, 2, 2, 1, 2}$ unités de vitamine A et
  - $\mathbf{0, 1, 3, 1, 3, 2}$ unités de vitamine C et
  - coûte respectivement $\mathbf{35, 30, 58, 50, 27, 22}$€.
- Quels produits faut-il acheter, et en quelles quantités, pour se nourrir en minimisant les dépenses?

Problème d'alimentation

Solution

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits							

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	
A							
C							

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A							
C							

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A							
C							
Prix							

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	
C							
Prix							

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	
C	**0**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	
Prix							

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	
C	**0**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	
Prix	35	30	58	50	27	22	

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	9
C	**0**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	19
Prix	35	30	58	50	27	22	

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	9
C	**0**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	19
Prix	35	30	58	50	27	22	?

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	9
C	**0**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	19
Prix	35	30	58	50	27	22	?

2. Variables :

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	9
C	**0**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	19
Prix	35	30	58	50	27	22	?

2. Variables : x_i quantité (kg) du produit i à acheter.

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	9
C	**0**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	19
Prix	35	30	58	50	27	22	?

2. Variables : x_i quantité (kg) du produit i à acheter.
3. Contraintes de demande :

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	9
C	**0**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	19
Prix	35	30	58	50	27	22	?

2. Variables : x_i quantité (kg) du produit i à acheter.
3. Contraintes de demande : on aura

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	9
C	**0**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	19
Prix	35	30	58	50	27	22	?

2. Variables : x_i quantité (kg) du produit i à acheter.
3. Contraintes de demande : on aura
   1. $x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6$ unités de vitamine A mais il en faut 9,

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	9
C	**0**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	19
Prix	35	30	58	50	27	22	?

2. Variables : x_i quantité (kg) du produit i à acheter.
3. Contraintes de demande : on aura
   1. $x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6$ unités de vitamine A mais il en faut 9,
   2. $x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6$ unités de vitamine C mais il en faut 19,

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	9
C	**0**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	19
Prix	35	30	58	50	27	22	?

2. Variables : x_i quantité (kg) du produit i à acheter.
3. Contraintes de demande : on aura
    1. $x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6$ unités de vitamine A mais il en faut 9,
    2. $x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6$ unités de vitamine C mais il en faut 19,
4. Contraintes de non-négativité :

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	9
C	**0**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	19
Prix	35	30	58	50	27	22	?

2. Variables : x_i quantité (kg) du produit i à acheter.
3. Contraintes de demande : on aura
    1. $x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6$ unités de vitamine A mais il en faut 9,
    2. $x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6$ unités de vitamine C mais il en faut 19,
4. Contraintes de non-négativité : $x_i \geq 0$.

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	9
C	**0**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	19
Prix	35	30	58	50	27	22	?

2. Variables : x_i quantité (kg) du produit i à acheter.
3. Contraintes de demande : on aura
    1. $x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6$ unités de vitamine A mais il en faut 9,
    2. $x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6$ unités de vitamine C mais il en faut 19,
4. Contraintes de non-négativité : $x_i \geq 0$.
5. Fonction Objectif :

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	9
C	**0**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	19
Prix	35	30	58	50	27	22	?

2. Variables : x_i quantité (kg) du produit i à acheter.
3. Contraintes de demande : on aura
    1. $x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6$ unités de vitamine A mais il en faut 9,
    2. $x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6$ unités de vitamine C mais il en faut 19,
4. Contraintes de non-négativité : $x_i \geq 0$.
5. Fonction Objectif : minimiser la dépense :

Problème d'alimentation

Solution

1. Tableau de données :

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	9
C	**0**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	19
Prix	35	30	58	50	27	22	?

2. Variables : x_i quantité (kg) du produit i à acheter.
3. Contraintes de demande : on aura
   1. $x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6$ unités de vitamine A mais il en faut 9,
   2. $x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6$ unités de vitamine C mais il en faut 19,
4. Contraintes de non-négativité : $x_i \geq 0$.
5. Fonction Objectif : minimiser la dépense :
   $35x_1 + 30x_2 + 58x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6 = w(\text{min}).$

Problème d'alimentation

Programme linéaire

$$\begin{array}{rrrrrrl}
1x_1 + & & + \; 2x_3 + & 2x_4 + & 1x_5 + & 2x_6 & \geq 9 \\
& & 1x_2 + \; 3x_3 + & 1x_4 + & 3x_5 + & 2x_6 & \geq 19 \\
& & & & & x_i & \geq 0 \\
\multicolumn{6}{r}{35x_1 + 30x_2 + 58x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6} & = w(\min)
\end{array}$$

Problème d'alimentation

Programme linéaire

$$\begin{array}{rrrrrrl} 1x_1 + & + & 2x_3 + & 2x_4 + & 1x_5 + & 2x_6 & \geq 9 \\ & 1x_2 + & 3x_3 + & 1x_4 + & 3x_5 + & 2x_6 & \geq 19 \\ & & & & & x_i & \geq 0 \\ 35x_1 + 30x_2 + 58x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6 & & & & & & = w(\min) \end{array}$$

Programme linéaire sous forme générale

$$\begin{aligned} Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \\ c^T x &= w(\min) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \end{pmatrix}, c^T = \begin{pmatrix} 35 & 30 & 58 & 50 & 27 & 22 \end{pmatrix}.$$

Problème d'alimentation

Programme linéaire

$$\begin{array}{rrrrrrl}
1x_1 + & & + \ 2x_3 + & 2x_4 + & 1x_5 + & 2x_6 & \geq 9 \\
& 1x_2 + & 3x_3 + & 1x_4 + & 3x_5 + & 2x_6 & \geq 19 \\
& & & & & x_i & \geq 0 \\
\multicolumn{6}{r}{35x_1 + 30x_2 + 58x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6} & = w(\min)
\end{array}$$

Programme linéaire sous forme générale

$$\begin{aligned} Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \\ c^T x &= w(\min) \end{aligned}$$

Produits	1	2	3	4	5	6	besoin
A	1	0	2	2	1	2	9
C	0	1	3	1	3	2	19
Prix	35	30	58	50	27	22	?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \end{pmatrix}, c^T = \begin{pmatrix} 35 & 30 & 58 & 50 & 27 & 22 \end{pmatrix}.$$

Formes Générales

Définition

Forme canonique

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \\ c^T x &= z(\max) \end{aligned}$$

Forme standard

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \\ c^T x &= z(\max) \end{aligned}$$

Formes Générales

Définition

Forme canonique	Forme standard
$Ax \leq b$	$Ax = b$
$x \geq 0$	$x \geq 0$
$c^T x = z(\max)$	$c^T x = z(\max)$

Théorème

Tout programme linéaire admet

1. une forme canonique et
2. une forme standard.

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$a_i \cdot x \geq b_i$$

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$a_i \cdot x \geq b_i \qquad\qquad \Longrightarrow$$

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$a_i \cdot x \geq b_i \qquad \Longrightarrow \qquad (-a_i) \cdot x \leq (-b_i).$$

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$a_i \cdot x \geq b_i \qquad \Longrightarrow \qquad (-a_i) \cdot x \leq (-b_i).$$

$$a_i \cdot x = b_i$$

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$a_i \cdot x \geq b_i \quad \Longrightarrow \quad (-a_i) \cdot x \leq (-b_i).$$

$$a_i \cdot x = b_i \quad \Longrightarrow$$

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$
\begin{aligned}
a_i \cdot x \geq b_i \quad & \Longrightarrow \quad (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\
a_i \cdot x = b_i \quad & \Longrightarrow \quad a_i \cdot x \leq b_i, (-a_i) \cdot x \leq (-b_i).
\end{aligned}
$$

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$\begin{aligned} a_i \cdot x \geq b_i \quad &\Longrightarrow \quad (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ a_i \cdot x = b_i \quad &\Longrightarrow \quad a_i \cdot x \leq b_i, (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ x_i \leq 0 \quad & \end{aligned}$$

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$\begin{aligned} a_i \cdot x \geq b_i &\Longrightarrow (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ a_i \cdot x = b_i &\Longrightarrow a_i \cdot x \leq b_i, (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ x_i \leq 0 &\Longrightarrow \end{aligned}$$

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$\begin{array}{ccc} a_i \cdot x \geq b_i & \Longrightarrow & (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ a_i \cdot x = b_i & \Longrightarrow & a_i \cdot x \leq b_i, (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ x_i \leq 0 & \Longrightarrow & x_i' = -x_i \geq 0. \end{array}$$

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$\begin{array}{rcc} a_i \cdot x \geq b_i & \Longrightarrow & (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ a_i \cdot x = b_i & \Longrightarrow & a_i \cdot x \leq b_i, (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ x_i \leq 0 & \Longrightarrow & x'_i = -x_i \geq 0. \end{array}$$

x_i sans contrainte de non-négativité

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$\begin{array}{rcc} a_i \cdot x \geq b_i & \Longrightarrow & (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ a_i \cdot x = b_i & \Longrightarrow & a_i \cdot x \leq b_i, (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ x_i \leq 0 & \Longrightarrow & x_i' = -x_i \geq 0. \\ x_i \text{ sans contrainte de non-négativité} & \Longrightarrow & \end{array}$$

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$\begin{array}{ccc} a_i \cdot x \geq b_i & \Longrightarrow & (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ a_i \cdot x = b_i & \Longrightarrow & a_i \cdot x \leq b_i, (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ x_i \leq 0 & \Longrightarrow & x_i' = -x_i \geq 0. \\ x_i \text{ sans contrainte de non-négativité} & \Longrightarrow & x_i' \geq 0,\ x_i'' \geq 0,\ x_i = x_i' - x_i''. \end{array}$$

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$\begin{array}{rcc}
a_i \cdot x \geq b_i & \Longrightarrow & (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\
a_i \cdot x = b_i & \Longrightarrow & a_i \cdot x \leq b_i, (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\
x_i \leq 0 & \Longrightarrow & x'_i = -x_i \geq 0. \\
x_i \text{ sans contrainte de non-négativité} & \Longrightarrow & x'_i \geq 0,\ x''_i \geq 0,\ x_i = x'_i - x''_i. \\
c^T \cdot x = w(\min) & &
\end{array}$$

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$\begin{array}{ccc} a_i \cdot x \geq b_i & \Longrightarrow & (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ a_i \cdot x = b_i & \Longrightarrow & a_i \cdot x \leq b_i, (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ x_i \leq 0 & \Longrightarrow & x_i' = -x_i \geq 0. \\ x_i \text{ sans contrainte de non-négativité} & \Longrightarrow & x_i' \geq 0,\ x_i'' \geq 0,\ x_i = x_i' - x_i''. \\ c^T \cdot x = w(\min) & \Longrightarrow & \end{array}$$

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$\begin{array}{ccc}
a_i \cdot x \geq b_i & \Longrightarrow & (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\
a_i \cdot x = b_i & \Longrightarrow & a_i \cdot x \leq b_i, (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\
x_i \leq 0 & \Longrightarrow & x'_i = -x_i \geq 0. \\
x_i \text{ sans contrainte de non-négativité} & \Longrightarrow & x'_i \geq 0,\ x''_i \geq 0,\ x_i = x'_i - x''_i. \\
c^T \cdot x = w(\min) & \Longrightarrow & (-c)^T \cdot x = z(\max).
\end{array}$$

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$
\begin{array}{ccc}
a_i \cdot x \geq b_i & \Longrightarrow & (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\
a_i \cdot x = b_i & \Longrightarrow & a_i \cdot x \leq b_i, (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\
x_i \leq 0 & \Longrightarrow & x_i' = -x_i \geq 0. \\
x_i \text{ sans contrainte de non-négativité} & \Longrightarrow & x_i' \geq 0,\ x_i'' \geq 0,\ x_i = x_i' - x_i''. \\
c^T \cdot x = w(\min) & \Longrightarrow & (-c)^T \cdot x = z(\max).
\end{array}
$$

Démonstration (pour la forme standard)

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$\begin{array}{ccc} a_i \cdot x \geq b_i & \Longrightarrow & (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ a_i \cdot x = b_i & \Longrightarrow & a_i \cdot x \leq b_i, (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ x_i \leq 0 & \Longrightarrow & x_i' = -x_i \geq 0. \\ x_i \text{ sans contrainte de non-négativité} & \Longrightarrow & x_i' \geq 0,\ x_i'' \geq 0,\ x_i = x_i' - x_i''. \\ c^T \cdot x = w(\min) & \Longrightarrow & (-c)^T \cdot x = z(\max). \end{array}$$

Démonstration (pour la forme standard)

$$a_i \cdot x \leq b_i$$

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$\begin{array}{ccc} a_i \cdot x \geq b_i & \Longrightarrow & (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ a_i \cdot x = b_i & \Longrightarrow & a_i \cdot x \leq b_i, (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ x_i \leq 0 & \Longrightarrow & x_i' = -x_i \geq 0. \\ x_i \text{ sans contrainte de non-négativité} & \Longrightarrow & x_i' \geq 0,\ \ x_i'' \geq 0,\ \ x_i = x_i' - x_i''. \\ c^T \cdot x = w(\min) & \Longrightarrow & (-c)^T \cdot x = z(\max). \end{array}$$

Démonstration (pour la forme standard)

$$a_i \cdot x \leq b_i \qquad \Longrightarrow$$

Formes Générales

Démonstration (pour la forme canonique)

$$\begin{array}{rcc} a_i \cdot x \geq b_i & \Longrightarrow & (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ a_i \cdot x = b_i & \Longrightarrow & a_i \cdot x \leq b_i, (-a_i) \cdot x \leq (-b_i). \\ x_i \leq 0 & \Longrightarrow & x_i' = -x_i \geq 0. \\ x_i \text{ sans contrainte de non-négativité} & \Longrightarrow & x_i' \geq 0,\ x_i'' \geq 0,\ x_i = x_i' - x_i''. \\ c^T \cdot x = w(\min) & \Longrightarrow & (-c)^T \cdot x = z(\max). \end{array}$$

Démonstration (pour la forme standard)

$$a_i \cdot x \leq b_i \quad \Longrightarrow \quad a_i \cdot x + y_i = b_i,\ y_i \geq 0.$$