12 Note : Produit scalaire – algèbre bilinéaire

12.1 Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une application

$$(x, y) \in E \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$$

est un produit scalaire sur E si elle vérifie les propriétés suivantes.

- Elle est linéaire par rapport à chaque variable (on dit qu'elle est bilinéaire).

  $$\langle x + \lambda x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \lambda \langle x', y \rangle, \qquad x, x', y \in E, \lambda \in \mathbb{R},$$

  et

  $$\langle x, y + \lambda y' \rangle = \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, y' \rangle, \qquad x, y, y' \in E, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Elle est symétrique :

  $$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \qquad \forall (x, y) \in E^2.$$

- Elle est définie positive :

  $$\forall x \in E, \quad \langle x, x \rangle > 0, \qquad \text{et} \qquad \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Proposition 12.1 *Sur $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$, l'application*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

définit un produit scalaire.

On peut définir des produits scalaires plus étonnants. Par exemple, sur l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n,

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$$

définit un produit scalaire.

12.2 Norme et distance issues d'un produit scalaire

On "rappelle" les défnitions d'une norme et d'une distance

Definition 12.2

- *L'application* $x \mapsto ||x|| \in \mathbb{R}^+$ *telle que*

  (i) $||\lambda x|| = |\lambda|\ ||x||, \qquad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},$

  (ii) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||, \qquad \forall x, y \in E,$ *(inégalité triangulaire),*

  (iii) $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0,$

  est une norme.

- *L'application* $(x, y) \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}^+$ *telle que*

  (i) $d(x, y) = 0 \iff x = y,$

  (ii) $d(x, y) = d(y, x), \qquad \forall x, y \in E,$

  (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \qquad \forall x, y, z \in E$ *(inégalité triangulaire),*

  est une distance.

On peut définir une norme à l'aide du produit scalaire :

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

ainsi qu'une distance

$$d(x, y) = ||x - y||.$$

Dans $\mathbb{R}^N$, ces norme et distance induites par le produit scalaire sont dites euclidiennes.
L'inégalité suivante est fondamentale.

Proposition 12.3 (Inégalité de Cauchy–Schwarz) *Quelque soit* x, y *deux vecteurs.*

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \times ||y||.$$

Autrement formulée,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Il y a égalité (en valeur absolue) si et seulement si les vecteurs x *et* y *sont colinéaires.*

12.3 Ortogonalité

Definition 12.4 *Soit* x *et* y *deux vecteurs. On dit que* x *est orthogonal à* y *si* $\langle x, y\rangle = 0$.

Rappelons le si familier théorème de Pythagore.

Theorem 12.5 (Théorème de Pythagore) *Deux vecteurs* x *et* y *de* E *sont orthogonaux si et seulement si*

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Le sens direct du théorème de Pyhtagore se généralise par une récurrence immédiate. Nous ne parlerons pas de sa réciproque.

Theorem 12.6 *Si la famille de vecteurs* $(x_1, \cdots, x_k)$ *est orthogonale, c'est à dire avec* $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ *si* $i \neq j$*, alors*

$$||x_1 + \cdots + x_k||^2 = ||x_1||^2 + \cdots + ||x_k||^2.$$

On peut alors définir l'orthogonal d'un sous espace vectoriel F de E comme l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à ceux de F.

Definition 12.7 *Soit* F *un sous espace vectoriel de* E*. L'orthogonal de* F*, noté* $F^\perp$ *est le sous espace vectoriel*

$$F^\perp = \{y \in E : \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in F\}.$$

Notons que $(F^\perp)^\perp = F$. On pourra vérifier que, dans $\mathbb{R}^n$, si $F = vect\{u\}$ où $u = (a_1, \cdots a_n)$, alors

$$\begin{aligned} F^\perp &= \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = 0, \quad \forall x \in F\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \lambda u, y \rangle = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : \lambda \langle u, y \rangle = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : \langle u, y \rangle = 0\} \\ &= \{y = (x_1, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots a_n x_n = 0\}. \end{aligned}$$

Proposition 12.8 *On a la somme directe*

$$E = F \oplus F^\perp.$$

Note. On a vu dans un chapitre précédent que si un sous espace vectoriel est décrit par une équation cartésienne, dans un espace de dimension N, alors ce sous espace est de dimension $N - 1$. Il s'agit d'une conséquence de ce que nous venons de voir. En effet si F est engendré par un vecteur, donc de dimension 1, $F^\perp$ est décrit par une équation cartésienne et

$$E = F \oplus F^\perp \qquad \Rightarrow \qquad dim(E) = dim(F) + dim(F^\perp) \qquad \Rightarrow \qquad dim(F^\perp) = N - 1.$$

Il suit que tout élément x de E s'écrit de façon unique $x_F + x_{F^\perp}$ avec $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$. La projection orthogonale p_F sur F est donc définie par $p_F(x) = x_F$, et on a

$$p_F(x) + p_{F^\perp}(x) = x,$$

ou de façon équivalente

$$p_F + p_{F^\perp} = Id,$$

de sorte que si $dimF^\perp < dimF$, on a intérêt à projeter sur $F^\perp$. Avant d'en dire plus sur les projetés orthogonaux, nous avons besoin de parler de bases orthonormées.

13 Base orthonormées

Definition 13.1 *Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On dit qu'elle est orthonormée si*

(i) pour tout $i \in 1, \cdots, n, ||e_i|| = 1$,

(ii) ses éléments sont deux à deux orthogonaux :

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0, \qquad i \neq j.$$

Notons que sur un vecteur e_1 de norme 1, le projeté de u sur $F = Vect\{e_1\}$ est

$$p_F(u) = \langle u, e_1 \rangle e_1.$$

Pour bien comprendre, $|\langle u, e_1 \rangle|$ est la longueur du projeté orthogonal, et e_1, de norme 1, dirige le projeté.

Il suit que si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée, un vecteur $u \in E$ s'écrit

$$u = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle u, e_n \rangle e_n,$$

i.e. le vecteur u est la somme de ses projetés dans les directions de chaque vecteur de la base orthonormée.

On observe que les coefficients $\langle u, e_i \rangle$ sont les coordonnées de u dans la base orthonormée, et le théorème de Pythagore nous dit

$$||u||^2 = \langle u, e_1 \rangle^2 + \cdots + \langle u, e_n \rangle^2.$$

Note. Il est fondamental que $||e_1||$ soit de norme 1, sans quoi, en posant $F = Vect\{v\}$, avec v un vecteur quelconque,

$$p_F(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{||v||^2} v.$$

Theorem 13.2 *Soit E un espace de dimension n muni d'un produit scalaire. Il existe dans E des bases orthonormées.*

La preuve réside dans la construction algorithmique suivante d'une base ortonormée à partir d'une base quelconque, appelé procédé de Gram–Schmidt. Soit $(e_1, \cdots e_n)$ une base de E. On initialise la construction,

$$u_1 = \frac{e_1}{||e_1||}.$$

Le $k$ieme vecteur est la normalisation du vecteur e_k auquel on a retiré les projetés sur les espaces vectoriels engendrés par les vecteurs précédents,

$$\tilde{u}_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle, \qquad u_k = \frac{\tilde{u}_k}{||\tilde{u}_k||}.$$

Alors $(u_1, \cdots u_n)$ ainsi définis forment une base orthonormée de E.

Notons alors que la matrice de passage de la base quelconque $(e_1, \cdots e_n)$ à la base orthonormée $(u_1, \cdots, u_n)$, qui porte les vecteurs $(u_1, \cdots u_n)$ en colonne, est une matrice P dite orthogonale d'inverse ${}^tP$:

$${}^tPP = I.$$

13.1 Projection orthogonale

Sur l'espace vectoriel E de dimension n, on considère le sous espace F de base orthonormée $(e_1, \cdots e_p)$ et $F^\perp$ de base orthonormée $(e_{p+1}, \cdots, e_n)$.

Theorem 13.3 *Le projeté orthogonale de x sur F est donné par*

$$p_F(x) = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_p \rangle e_p.$$

On peut rappeler le théorème de Pythagore dans notre cas,

$$||x||^2 = ||p_F(x)||^2 + ||p_{F^\perp}(x)||^2,$$

À l'aide du théorème de Pythagore, on peut montrer que la projection orthogonale de u sur un sous espace F de E est l'unique point v de F qui minimise la distance de u à v :

$$||u - p_F(u)|| = \inf\{||u - v||; \quad v \in F\}.$$

En effet, pour tout $v \in F$,

$$||u - v||^2 = ||u - p_F(u) + p_F(u) - v||^2 = ||p_{F^\perp}(u) + p_F(u) - v||^2.$$

On note que $p_F(u) - v \in F$ est orthogonal à $p_{F^\perp}(u)$. Par le théorème de Pythagore,

$$||u - v||^2 = ||p_{F^\perp}(u)|^2 + ||p_F(u) - v||^2,$$

qui est minimale pour $v = p_F(u)$.