Recherche Opérationnelle Alternance 1A
Programmation Linéaire
Résolution d'un Programme Linéaire

Zoltán Szigeti

Ensimag, G-SCOP

Algèbre Linéaire : $A \cdot x = b$

Notation

1. Les colonnes de A sont notées : $a^1, \ldots, a^n$,
2. Les lignes de A sont notées : $a_1, \ldots, a_m$.

Rappel

1. Les colonnes $a^1, \ldots, a^n$ de A engendrent un espace vectoriel.
2. Les lignes $a_1, \ldots, a_m$ de A engendrent un espace vectoriel.
3. Ces deux espaces vectoriels sont de même dimension.
4. Une base d'un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs qui
   - sont linéairement indépendants et
   - engendrent tout l'espace.

Algèbre Linéaire : $A \cdot x = b$

Théorème (Existence)

$A \cdot x = b$ possède une solution $\overline{x}$ si et seulement si il n'y pas de contradiction : une solution $\overline{y}$ de $y^T \cdot A = 0$ et $y^T \cdot b \neq 0$.

Exemple

$$
\begin{array}{rcl}
1x_1 - 2x_2 &=& 1 / \cdot 2 \\
-2x_1 + 4x_2 &=& -3 / \cdot 1 \\
\hline
0x_1 + 0x_2 &\neq& -1
\end{array}
$$

$$\overline{y}^T \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{y}^T \cdot b = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -1.$$

Résolution

Elimination de Gauss : PIVOT.

Programmation Linéaire : $A \cdot x = b, x \geq 0$

Lemme de FARKAS (Existence)

$A \cdot x = b, x \geq 0$ possède une solution $\overline{x}$ si et seulement si il n'y pas de contradiction : une solution $\overline{y}$ de $y^T \cdot A \geq 0$ et $y^T \cdot b < 0$.

Exemple

$$
\begin{array}{rcrl}
2x_1 - 1x_2 & = & 1 & / \cdot 1 \\
-1x_1 + 3x_2 & = & -2 & / \cdot 1 \\
x_1, \quad x_2 & \geq & 0 & \\
\hline
1x_1 + 2x_2 & \neq & -1 &
\end{array}
$$

$$\overline{y}^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{y}^T \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1.$$

Programmation Linéaire : $A \cdot x = b, x \geq 0$

Lemme de FARKAS (Existence)

$A \cdot x = b, x \geq 0$ possède une solution $\overline{x}$ si et seulement si il n'y pas de contradiction : une solution $\overline{y}$ de $y^T \cdot A \geq 0$ et $y^T \cdot b < 0$.

Démonstration

1. $\overline{x}$ et $\overline{y}$ ne peuvent pas tous les deux exister :
   - $0 \leq (\overline{y}^T \cdot A) \cdot \overline{x} = \overline{y}^T \cdot (A \cdot \overline{x}) = \overline{y}^T \cdot b < 0.$
2. $\overline{x}$ ou $\overline{y}$ existe :
   1. Soit b appartient au cône$(a^1, \dots, a^n)$:
      - b est une combinaison linéaire non-négative des $a^1, \dots, a^n$,
      - $\sum_1^n \overline{x}_i \cdot a^i = b, \overline{x}_i \geq 0,$
      - $A \cdot \overline{x} = b, \overline{x} \geq 0.$
   2. Soit b n'appartient pas au cône$(a^1, \dots, a^n)$:
      - il existe donc un hyperplan H qui sépare b et les a^i,
      - pour le vecteur normal $\overline{y}$ de H : $\overline{y}^T \cdot a^i \geq 0$ pour tout i et $\overline{y}^T \cdot b < 0.$
      - $\overline{y}^T \cdot A \geq 0$ et $\overline{y}^T \cdot b < 0.$

Programmation Linéaire : $A \cdot x = b, x \geq 0, c^T \cdot x = z(\max)$

Lemme de FARKAS (Existence)

$A \cdot x = b, x \geq 0$ possède une solution si et seulement si il n'y pas de contradiction : $y^T \cdot A \geq 0$ et $y^T \cdot b < 0$.

Résolution

Algorithme du simplexe : PIVOT.

Notation

Soient $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ et $\overline{J} = \{1, \ldots, n\} \setminus J$,

$$\begin{aligned} A \cdot x &= b \\ x &\geq 0 \\ c^T \cdot x &= z(\max) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \begin{pmatrix} A^J & A^{\overline{J}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_J \\ x_{\overline{J}} \end{pmatrix} &= b \\ \begin{pmatrix} x_J \\ x_{\overline{J}} \end{pmatrix} &\geq 0 \\ \begin{pmatrix} c_J^T & c_{\overline{J}}^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_J \\ x_{\overline{J}} \end{pmatrix} &= z(\max) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A^J \cdot x_J + A^{\overline{J}} \cdot x_{\overline{J}} &= b \\ x_J, \qquad x_{\overline{J}} &\geq 0 \\ c_J^T \cdot x_J + c_{\overline{J}}^T \cdot x_{\overline{J}} &= z(\max) \end{aligned}$$

Supposition

Les lignes $a_1, \dots, a_m$ de A sont linéairement indépendantes (rang(A)=m).

- Si certaines lignes sont linéairement dépendantes alors on peut en effacer une.

Définition : $J \subseteq \{1, \dots, n\}$

1. base : si $\{a^j : j \in J\}$ forme une base de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A, $(|J| = m)$.
   - si et seulement si $(A^J)^{-1}$ existe,
   - si et seulement si A^J est non-singulière : $det(A^J) \neq 0$.
2. solution de base associée à J : la solution unique de $A^J \cdot x_J = b$,
$$\begin{pmatrix} \overline{x}_J \\ \overline{x}_{\overline{J}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A^J)^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$
3. réalisable : si $(A^J)^{-1} \cdot b \geq 0$.
4. optimale : si la solution de base associée à J est une solution réalisable et optimale du PL.

Algorithmes pour résoudre un PL

Algorithme	Auteur	Théorie	Pratique
Simplexe	Dantzig'47	non-polynomial	très rapide
Ellipsoïde	Khachiyan'79	polynomial	très lent
Point intérieur	Karmarkar'84	polynomial	rapide

Remarques sur l'algorithme du simplexe

1. Il existe une solution optimale qui est un sommet (point extrême) du polyèdre (borné).
2. L'algorithme du simplexe se promène sur des sommets du polyèdre en améliorant la valeur de la fonction objectif.
3. Le nombre de sommets peut être exponentiel !
4. Il existe des exemples où l'algorithme du simplexe passe par tous les sommets du polyèdre et il y en a 2^n (n = nombre de variables).
5. Les sommets du polyèdre correspondent aux bases réalisables du PL.

Les deux étapes de l'algorithme du simplexe

Idée

1. L'algorithme du simplexe a deux étapes :
   1. Étape 1 : trouve une base réalisable s'il en existe une.
   2. Étape 2 : en utilisant cette base réalisable, il trouve une solution de base optimale s'il en existe une.
2. Les deux étapes sont très similaires.
   - Étape 2 a besoin de Étape 1 et
   - Étape 1 utilise Étape 2, sur un PL auxiliaire.
3. Les deux étapes utilisent l'itération suivante :
   - Entrée : une base réalisable J,
   - Sortie : une et une seule de
     1. J est une base optimale,
     2. il n'existe pas de base optimale bornée,
     3. une meilleure base réalisable J',
        la fonction objectif augmente dans la nouvelle solution de base.

Opérations de lignes

Définitions

1. Opération 1 : multiplication d'une ligne par une constante $\alpha_i \neq 0$:
   - $a_i \cdot x = b_i \quad \Longrightarrow \quad (\alpha_i \cdot a_i) \cdot x = (\alpha_i \cdot b_i)$.
2. Opération 2 : soustraction d'une ligne d'une autre :
   - $a_i \cdot x = b_i \quad \Longrightarrow \quad (a_i - a_j) \cdot x = (b_i - b_j)$ ou plus généralement :
   - $a_i \cdot x = b_i \quad \Longrightarrow \quad (a_i - \alpha_j \cdot a_j) \cdot x = (b_i - \alpha_j \cdot b_j)$.
3. Opération 2 peut être utilisée sur la fonction objectif !
   - $c^T \cdot x = z(\max) \quad \Longrightarrow \quad (c^T - \alpha_j \cdot a_j) \cdot x = z(\max) - \alpha_j \cdot b_j$.
   - $c^T \cdot x = z(\max) - z_0$ sera utilisée.
4. Deux PL P et P' sont équivalents si
   - $\{x : A \cdot x = b, x \geq 0\} = \{x : A' \cdot x = b', x \geq 0\}$,
   - $c^T \cdot x + z_0 = c'^T \cdot x + z'_0$.

Remarque

En utilisant des opérations de lignes on obtient un PL équivalent.

Forme standard par rapport à une base réalisable

Étant donné un PL sous forme standard et une base réalisable J,
on utilisera une forme plus adaptée :

$$\begin{array}{rcl} A^J \cdot x_J + A^{\overline{J}} \cdot x_{\overline{J}} = b & & I \cdot x_J + A'^{\overline{J}} \cdot x_{\overline{J}} = b' \\ x_J, \quad x_{\overline{J}} \geq 0 & \Longrightarrow & x_J, \quad x_{\overline{J}} \geq 0 \\ c_J^T \cdot x_J + c_{\overline{J}}^T \cdot x_{\overline{J}} = z(\max) & & 0 \cdot x_J + c'^T_{\overline{J}} \cdot x_{\overline{J}} = z(\max) - z'_0 \end{array}$$

Définition

Forme standard par rapport à une base réalisable J :

1. $A^J = I_m$ (matrice identité à une permutation des colonnes près),
2. $c_J^T = 0$ (Quand $A^J = I_m$ c'est facile à avoir : $c^T \Longrightarrow c^T - c_J^T \cdot A$).

Forme standard par rapport à une base réalisable

Remarque

1. Avantage de cette forme : $$\begin{aligned} {\color{red}I} \cdot x_J + A^{\overline{J}} \cdot x_{\overline{J}} &= b \\ x_J, \qquad x_{\overline{J}} &\geq 0 \\ {\color{red}0} \cdot x_J + c_{\overline{J}}^T \cdot x_{\overline{J}} &= z(\max) - z_0 \end{aligned}$$
   - la solution de base associée à J est $\begin{pmatrix} \overline{x}_J \\ \overline{x}_{\overline{J}} \end{pmatrix} = {\color{red}\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}}$.
     - $b \geq 0$ (la solution de base est réalisable).
   - la valeur de la fonction objectif est ${\color{red}z_0}$:
     $z - z_0 = c_J^T \cdot \overline{x}_J + c_{\overline{J}}^T \cdot \overline{x}_{\overline{J}} = 0 \cdot \overline{x}_J + c_{\overline{J}}^T \cdot 0 = 0.$
2. Si on a la forme canonique avec $b \geq 0$ alors la forme standard sera une forme standard par rapport à une base réalisable :
$$\begin{aligned} A \cdot x &\leq b \\ x &\geq 0 \\ c^T \cdot x &= z(\max) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} A \cdot x + {\color{red}I} \cdot y &= b \\ x, \qquad y &\geq 0 \\ c^T \cdot x + {\color{red}0} \cdot y &= z(\max) \end{aligned}$$

Idée de l'amélioration de la base sur un exemple

Exemple : forme standard par rapport à $J = \{1, 2\}$

$$
\begin{array}{rrrrrl}
+1x_1 & & +1x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = 1 \\
& +1x_2 & +2x_3 & +1x_4 & +2x_5 & = 3 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \\
& & +2x_3 & +1x_4 & -1x_5 & = z(\max) - 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
A^J = I_2 \\
b \geq 0 \\
\\
c_J^T = 0
\end{array}
$$

- On voudrait augmenter la valeur de la fonction objectif.
- On essaie d'augmenter une variable dont le coefficient dans la fonction objectif est strictement positif, en gardant les autres variables hors de base fixées à 0.
- On augmente celle dont le coefficient est le plus grand, donc x_3.
- Les variables dans J doivent rester non-négatives en augmentant x_3 :
  - $x_1 = 1 - 1x_3$, $\qquad \overline{x}_3 = 1$, $\overline{x}_1$ devient 0.
  - $x_2 = 3 - 2x_3$, $\qquad J' = \{3, 2\}$.

Idée de l'amélioration de la base sur un exemple

Exemple : forme standard par rapport à $J = \{1,2\}$

$$
\begin{array}{rrrrrl}
+1x_1 & & +1x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = 1 \\
 & +1x_2 & +2x_3 & +1x_4 & +2x_5 & = 3 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \\
 & & +2x_3 & +1x_4 & -1x_5 & = z(\max) - 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
A^J = I_2 \\
b \geq 0 \\
\\
c_J^T = 0
\end{array}
$$

Exemple : forme standard par rapport à $J' = \{3,2\}$

$$
\begin{array}{rrrrrl}
+1x_1 & & +1x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = 1 \\
-2x_1 & +1x_2 & & +5x_4 & -2x_5 & = 1 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \\
-2x_1 & & & +5x_4 & -5x_5 & = z(\max) - 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
A'^{J'} = I_2 \\
b' \geq 0 \\
\\
c'^T_{J'} = 0
\end{array}
$$

Idée de l'amélioration de la base sur un exemple

Exemple : forme standard par rapport à $J' = \{3,2\}$

$$\begin{array}{rrrrrll}
+1x_1 & & +1x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = 1 & \qquad A'^{J'} = I_2 \\
-2x_1 & +1x_2 & & +5x_4 & -2x_5 & = 1 & \qquad b' \geq 0 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 & \\
-2x_1 & & & +5x_4 & -5x_5 & = z(\max) - 2 & \qquad {c'}^T_{J'} = 0
\end{array}$$

On continue de la même façon : 4 entre dans la base et 2 sort de la base.

Exemple : forme standard par rapport à $J'' = \{3,4\}$

$$\begin{array}{rrrrrll}
+\frac{1}{5}x_1 & +\frac{2}{5}x_2 & +1x_3 & & +\frac{6}{5}x_5 & = \frac{7}{5} & \qquad A''^{J''} = I_m \\
-\frac{2}{5}x_1 & +\frac{1}{5}x_2 & & +1x_4 & -\frac{2}{5}x_5 & = \frac{1}{5} & \qquad b'' \geq 0 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 & \\
 & -1x_2 & & & -3x_5 & = z(\max) - 3 & \qquad {c''}^T_{J''} = 0
\end{array}$$

On ne peut plus augmenter la fonction objectif, on a une base optimale.

En utilisant un tableau des coefficients

$$\begin{array}{|ccccc|c|} 1 & 0 & \boxed{1} & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{|ccccc|c|} 1 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \boxed{5} & -2 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 0 & 5 & -5 & -2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ell_1' = \ell_1/1 \\ \ell_2' = \ell_2 - 2\ell_1' \\ \ell_3' = \ell_3 - 2\ell_1' \end{array}$$

$$\begin{array}{|ccccc|c|} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ell_1'' = \ell_1' - (-2)\ell_2'' \\ \ell_2'' = \ell_2'/5 \\ \ell_3'' = \ell_3' - 5\ell_2'' \end{array}$$

- Dans le dernier tableau la fonction objectif est non-positive donc
- une solution optimale est $(\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \overline{x}_3,\ \overline{x}_4,\ \overline{x}_5) = (0,\ 0,\ \frac{7}{5},\ \frac{1}{5},\ 0)$
- de valeur 3.

Itération du simplexe

ENTRÉE : Un PL sous forme standard par rapport à une base réalisable J.

$$\begin{aligned} I \cdot x_J + A_{\overline{J}} \cdot x_{\overline{J}} &= b \\ x_J, \qquad x_{\overline{J}} &\geq 0 \\ c^T_{\overline{J}} \cdot x_{\overline{J}} &= z(\max) \end{aligned}$$

SORTIE : Une et une seule des trois possibilités suivantes:

- La solution de base $\binom{\overline{x}_J}{\overline{x}_{\overline{J}}} = \binom{b}{0}$ est une solution optimale.
- Il n'y a pas de solution optimale bornée.
- Une meilleure base réalisable.

1. Soit $s \in \overline{J}$ pour lequel $c_s = \max\{c_i : i \in \overline{J}\}$.
2. Si $c_s \leq 0$ `arrêter`. (la solution de base est optimale.)
3. Si $A_i^s \leq 0 \ \forall\ 1 \leq i \leq m$ `arrêter`. ($z(\max) = \infty$.)
4. Sinon soit r tel que $\frac{b_r}{A_r^s} = \min\{\frac{b_i}{A_i^s} : 1 \leq i \leq m \text{ tel que } A_i^s > 0\}$.
5. Pivoter à A_r^s et `arrêter` avec la nouvelle base $J' = J + s - J_r$.

Pivot

Itération du simplexe

1. Soit $s \in \overline{J}$ pour lequel $c_s = \max\{c_i : i \in \overline{J}\}$.
2. Si $c_s \leq 0$ `arrêter`. (la solution de base est optimale.)
3. Si $A_i^s \leq 0 \ \forall\ 1 \leq i \leq m$ `arrêter`. ($z(\max) = \infty$.)
4. Sinon soit r tel que $\frac{b_r}{A_r^s} = \min\{\frac{b_i}{A_i^s} : 1 \leq i \leq m$ tel que $A_i^s > 0\}$.
5. Pivoter à A_r^s et `arrêter` avec la nouvelle base $J' = J + s - J_r$.

Pivot

- $(a'_r, b'_r) = (a_r, b_r)/A_r^s$,
- $(a'_i, b'_i) = (a_i, b_i) - (a'_r, b'_r) \cdot A_i^s$, pour tout $i \neq r$,
- $(c'^T, -z'_0) = (c^T, -z_0) - (a'_r, b'_r) \cdot c_s$.