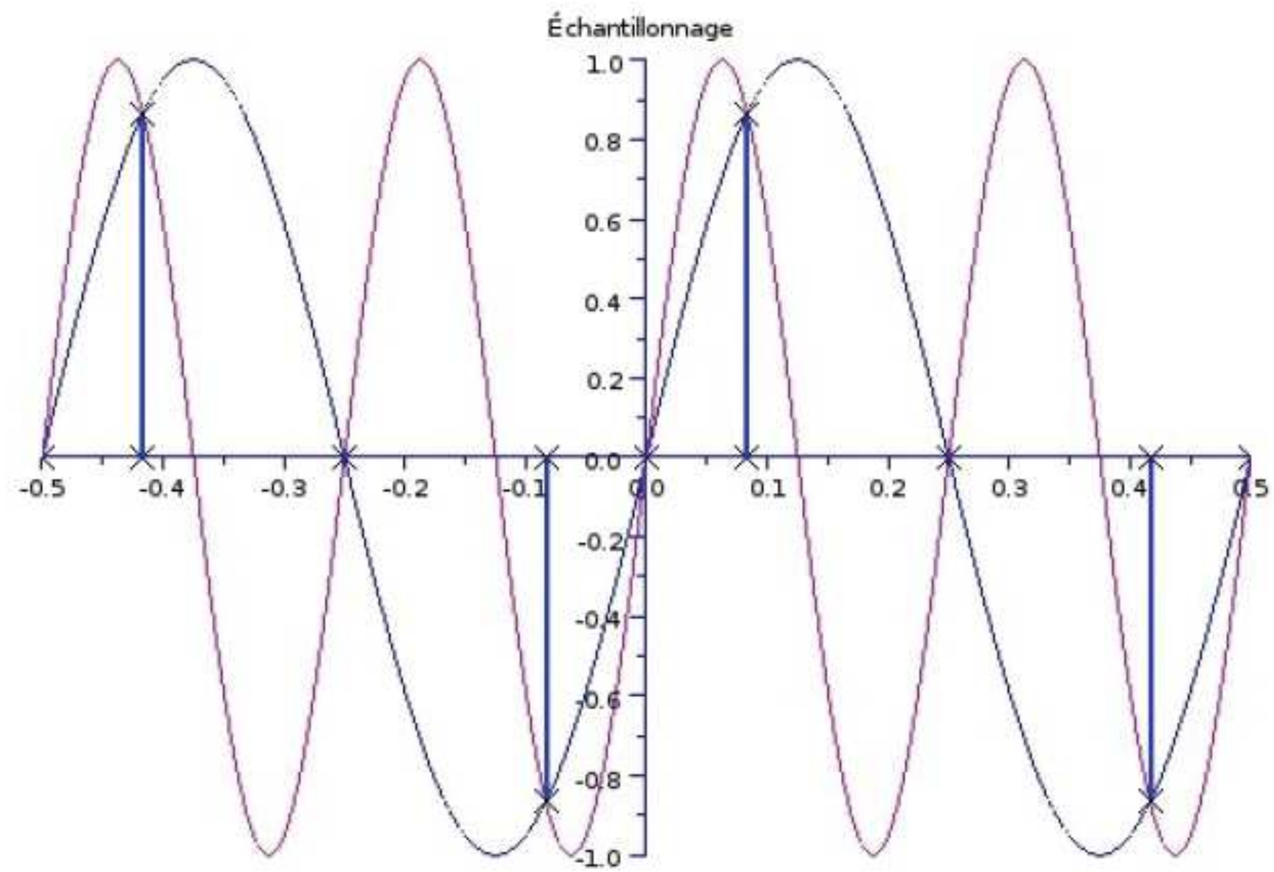
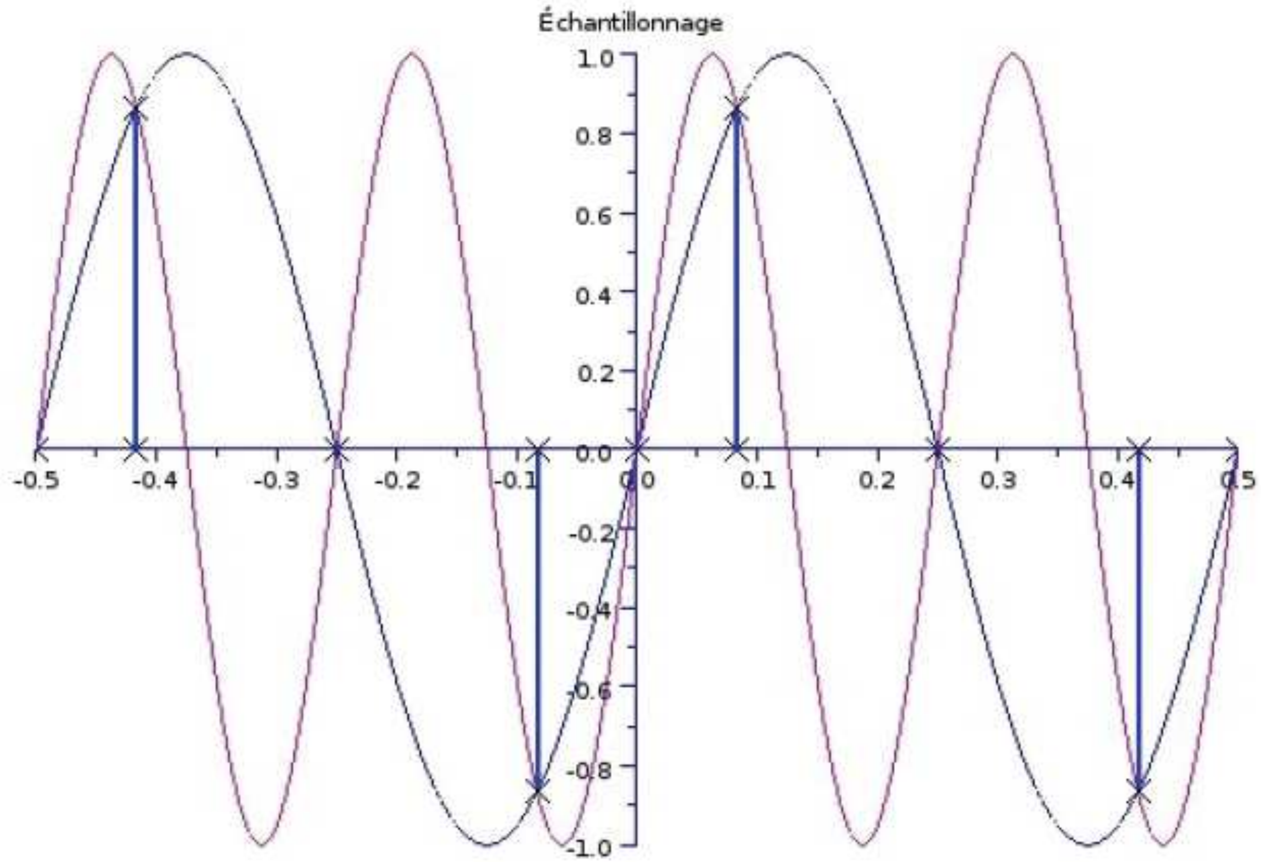
8 Échantillonnage, théorème de Shannon

Le traitement numérique des données (téléphonnie, CD audio *etc* ...) ne peut se faire que sur des données *finies*. Il faut donc représenter ces données par une suite de valeurs numériques ponctuelles prélevées réguliérement ou irrégulièrement. Un tel prélèvement est appelé *échantillonnage*.

Il est clair que l'échantillonnage visible sur la figure suivante ne permet pas de distinguer les deux signaux.



échantillonnage insuffisant

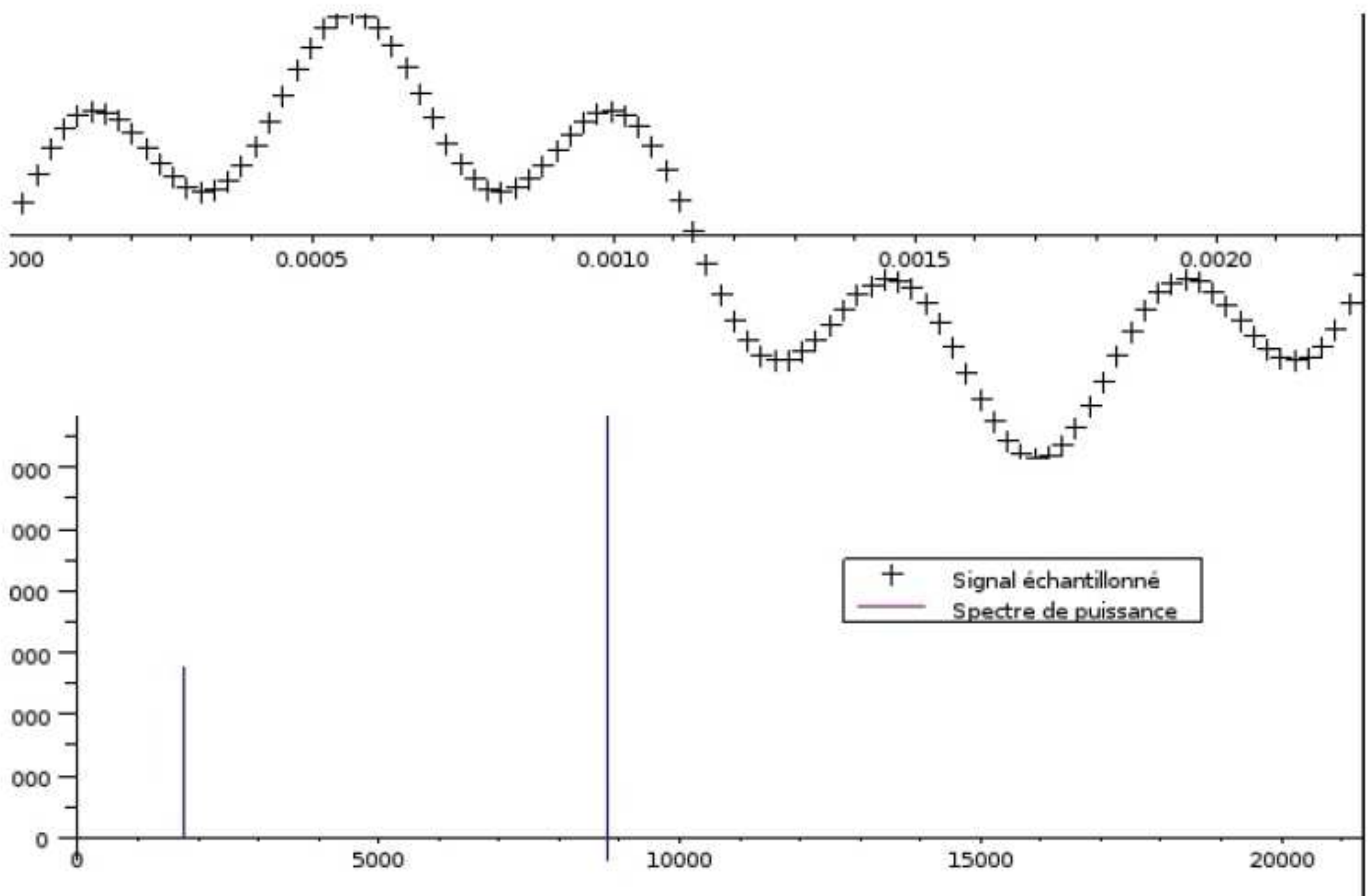


échantillonnage insuffisant

Par exemple, si $f(t) = \sin(2\pi x)$ et $g(t) = \sin\left(2\pi\left(\frac{1}{T}+1\right)x\right)$, un échantillonnage aux points $x_k = kT$, k entiers, nous donne les mêmes valeurs pour $f(x_k)$ et $g(x_k)$. On voit d'ailleurs assez facilement qu'un échantillonnage à une fréquence de moins de deux fois la fréquence maximale d'un signal ne peut pas caractériser le signal.

Échantillonnage et spectre de puissance :

signal échantillonné = ensemble de points

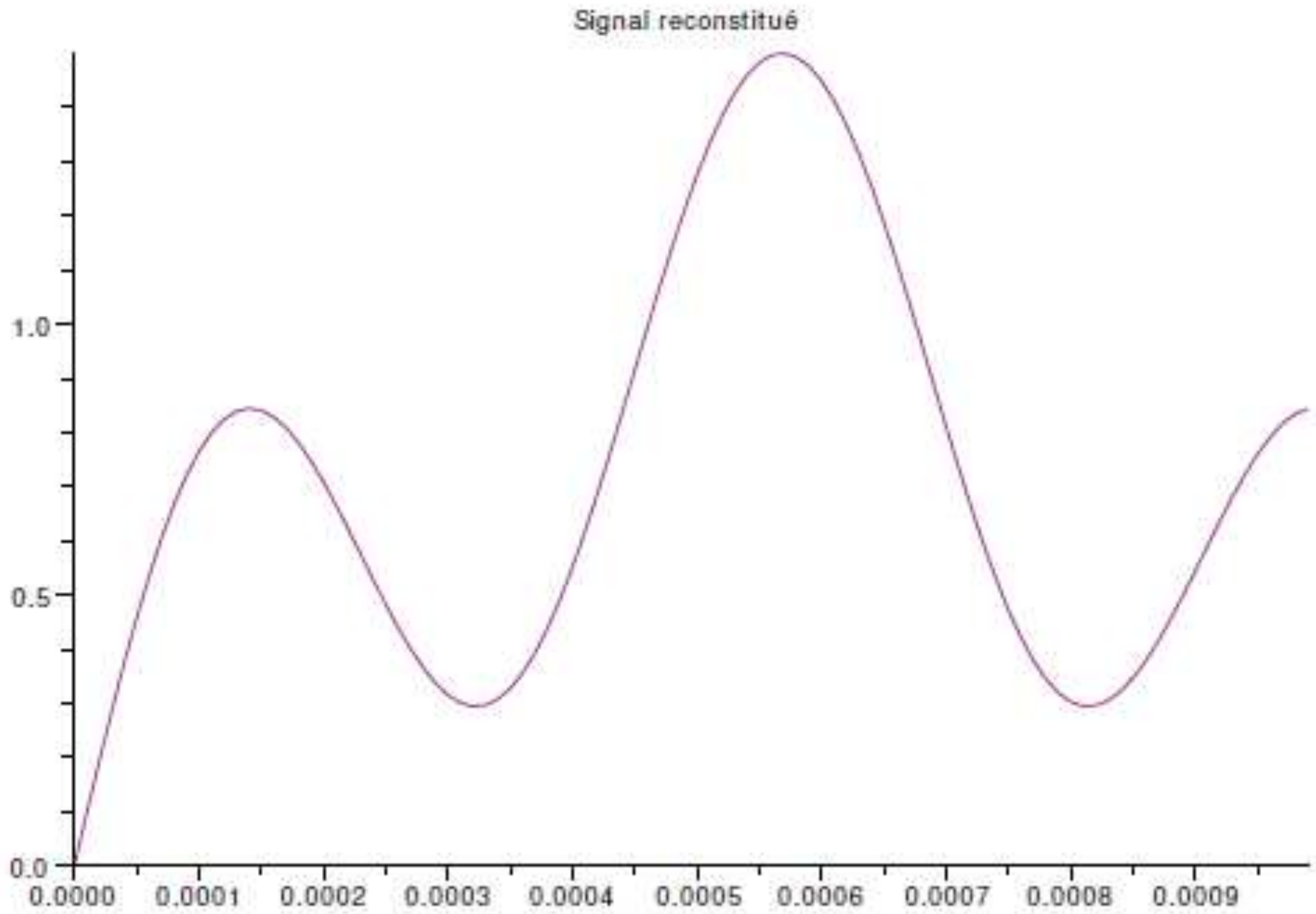


les fréquences du spectre

(cf TP)

théorème d'inversion.

Reconstruction du signal précédent :



8.1 Convolution

Soit f une fonction intégrable. Pour éliminer des fréquences génantes dans le spectre de f, il suffit de multiplier, par exemple, $\hat{f}$ par une fonction g nulle hors d'un intervalle $[a, b]$ (on parle alors de

filtre * passe-bas

* passe-haut

* passe-bande.

On calcule donc $H(y) = \hat{f}(y)\hat{g}(y)$: c'est une fonction continue par morceaux nulle hors de $[a, b]$ donc intégrable. Supposons que H soit la transformée de Fourier d'une fonction continue h. Le théorème d'inversion donne alors :

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int_{\mathbb{R}} H(y)e^{2\pi iyx}\, dy && (8.4)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-2\pi uy}\, du \right) \hat{g}(y)e^{2\pi ixy}\, dy && (8.5)\\
&= \int_{\mathbb{R}} f(u) \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y)e^{-2\pi i(u-x)y)} dy \right) du && (8.6)\\
&= \int_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u)\, du. && (8.7)
\end{aligned}$$

Dans ce cas l'original du signal est donc la fonction définie par

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u)\, du.$$

Definition 8.2 *Si f et g sont continues intégrables, pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $u \mapsto f(u)g(x-u)$ est intégrable. La fonction $f \star g$ définie par*

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(x-u)\,du$$

est le produit de convolution de f et g .

$f * g(x) = g * f(x)$:

$$f * g(x) = \int_{u \to -\infty}^{u \to +\infty} f(u) g(x-u) du$$

$$= \int_{t \to +\infty}^{t \to -\infty} - f(x-t) g(t) dt$$

chg^t de variable

$t = x - u$

$u = x - t$

$du = - dt$.

$\begin{cases} u \to +\infty \\ t \to -\infty \end{cases}$

$\begin{cases} u \to -\infty \\ t \to +\infty \end{cases}$

Donc $f * g(x) = -\int_{+\infty}^{-\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt = g * f(x)$$

Theorem 8.4 *Si f et g sont intégrable on a*

$$\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}.$$

Autrement dit, la transformation de Fourier transforme un produit de convolution en produit ordinaire. Ceci explique, en partie, l'intérêt de la convolution pour le filtrage.

$$\widehat{f \star g}(y) = \int_{\mathbb{R}} f \star g(x)\, e^{-i2\pi xy}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, dt\; \underbrace{e^{-i2\pi xy}}\, dx$$

retrouver mes variables $\longrightarrow x=(x-t)+t$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, e^{-i2\pi \cancel{x} y}\, dt\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, e^{-i2\pi(x-t+t)y}\, dt\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x-t)\, e^{-i2\pi(x-t)y}\, e^{-i2\pi ty}\, dt\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x-t)\, e^{-i2\pi(x-t)y}\, dx\; f(t)\, e^{-i2\pi ty}\, dt$$

$u = x-t$

$du = dx$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(u)\, e^{-i2\pi uy}\, du\; f(t)\, e^{-i2\pi ty}\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y)\, f(t)\, e^{-i2\pi ty}\, dt = \hat{g}(y)\int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-i2\pi ty}\, dt = \hat{g}(y)\,\hat{f}(y)$$

8.2 Support

Soit $I = (a, b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (ouvert, semi ouvert ou fermé). *L'adhérence* de I est l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) qui continent I. C'est donc l'intervalle fermé de bornes a et b.

Definition 8.5 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le* support de f *est l'adhérence de* $\{x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) \neq 0\}$.

Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, On note $A + B$ l'ensemble $A + B = \{a + b \in \mathbb{R}\ ;\ a \in A, b \in B\}$.

Proposition 8.6 *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux à supports bornés. $f \star g$ est à support borné et*

$$supp\,(f \star g) \subset supp(A) + supp(B).$$

Exemple Prenos $f = g = \Pi$; Ces deux fonctions sont convolables et

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} \Pi(t)\Pi(x-t)dt = \int_{-1/2}^{1/2} \Pi(x-t)dt.$$

Le changement de variable $u = x - t$ donne

$$f \star g(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} \Pi(u)\, du.$$

Si $x < -1$, $x + 1/2 < -1/2$ et $f \star g(x) = 0$; de même, si $x > 1$, $f \star g(x) = 0$. Si $x \in [-1, 0]$, $f \star g(x) = 1 + x$ et, si $x \in [0, 1]$, $f \star g(x) = 1 - x$. Il en résulte que $f \star g = \Lambda$.

Remarque 8.8 *Il résulte du théorème de dérivation sous le signe intégral que si f est intégrable et g de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact (borné), $f \star g$ est $\mathcal{C}^\infty$ et*

$$(f \star g)^{(k)} = f \star g^{(k)}.$$

On dit que la convolution régularise.

Theorem 8.9 *Soient f et g deux fonctions intégrables telles que*

(i) $f \cdot g$ est intégrable.

(ii) $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont intégrables.

Alors la transformée de Fourier du produit fg est le produit de convolution $\hat{f} \star \hat{g}$.

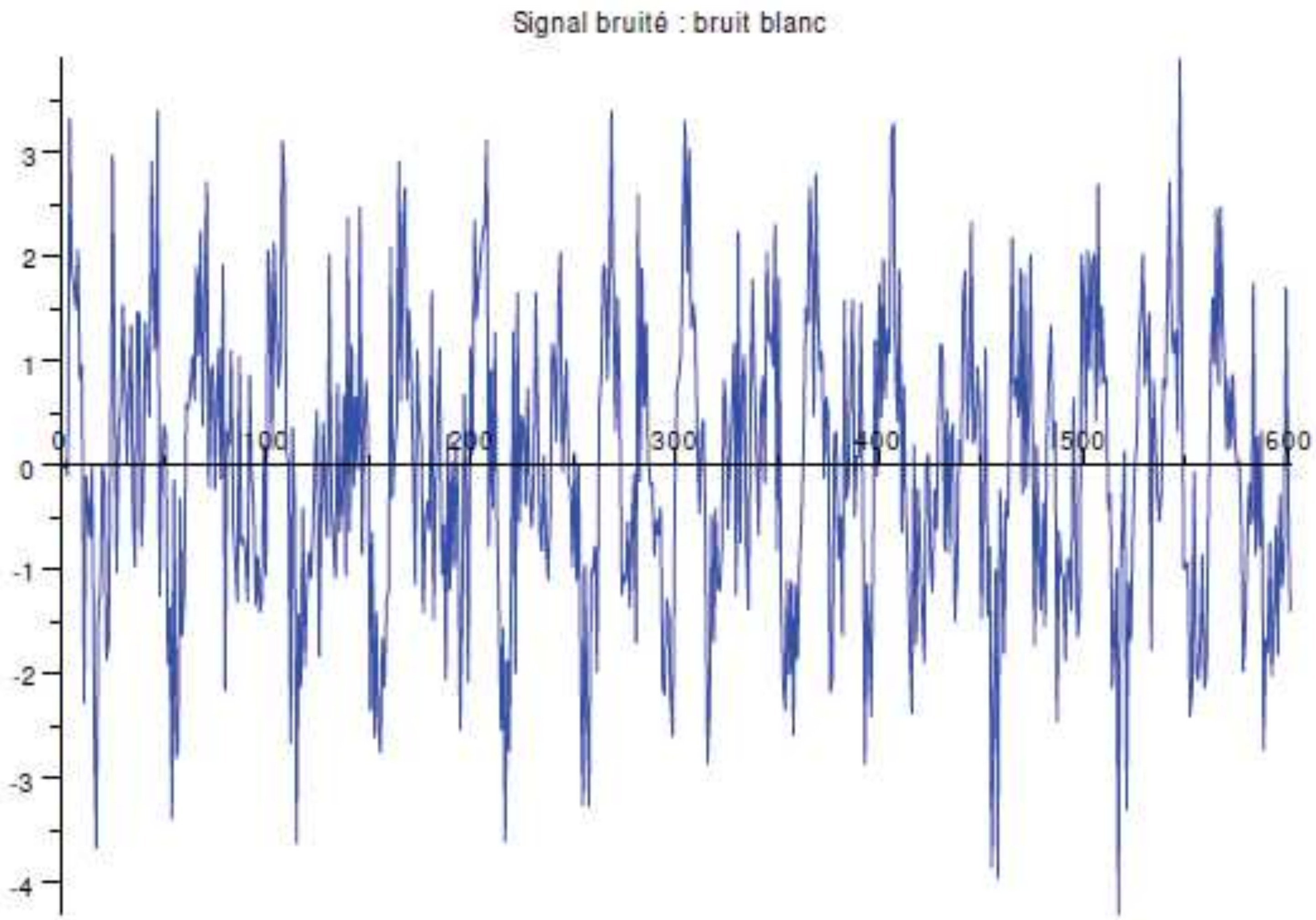
$$\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$$

théorème d'inversion.

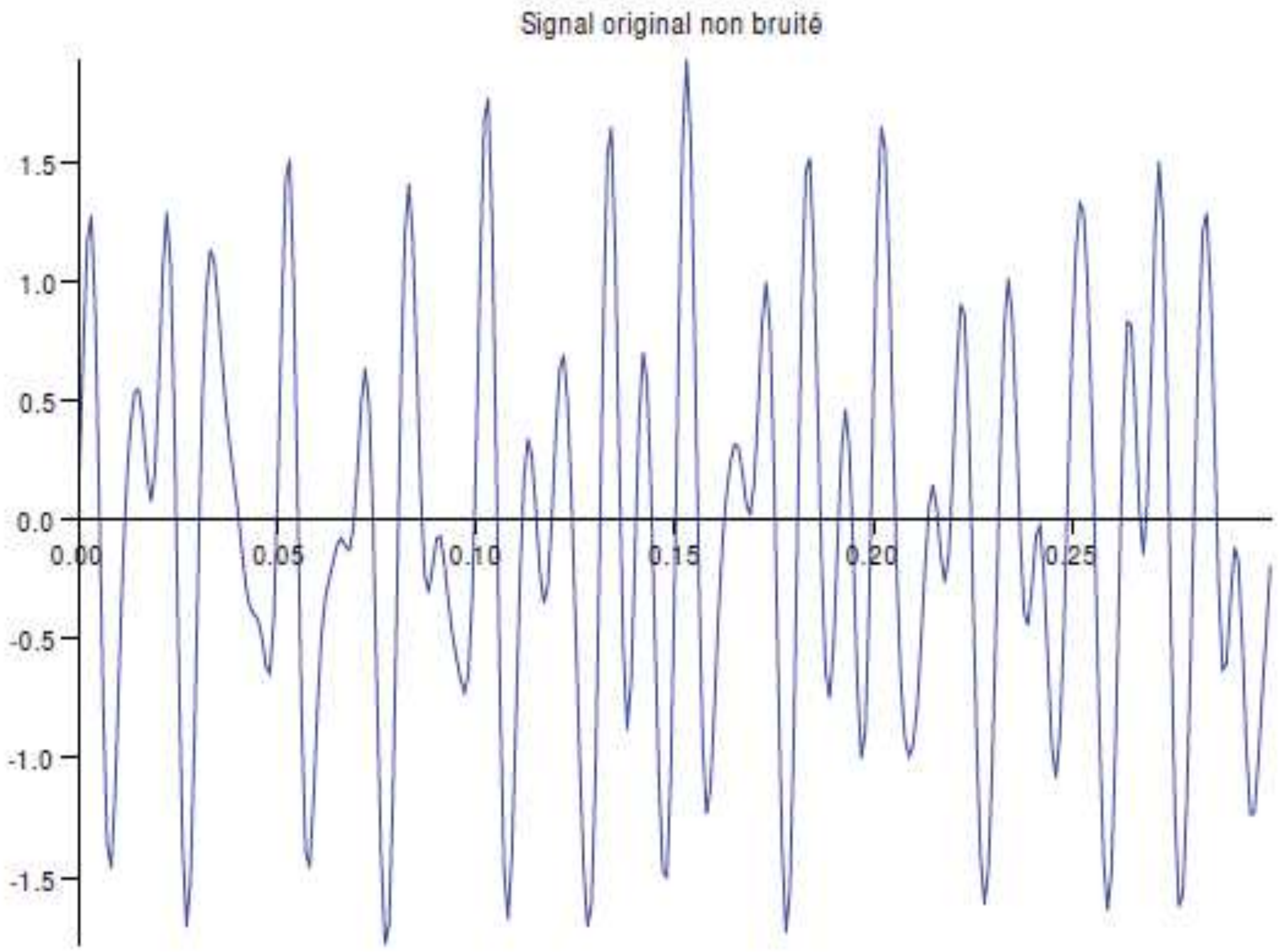
(On avait aussi $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$)

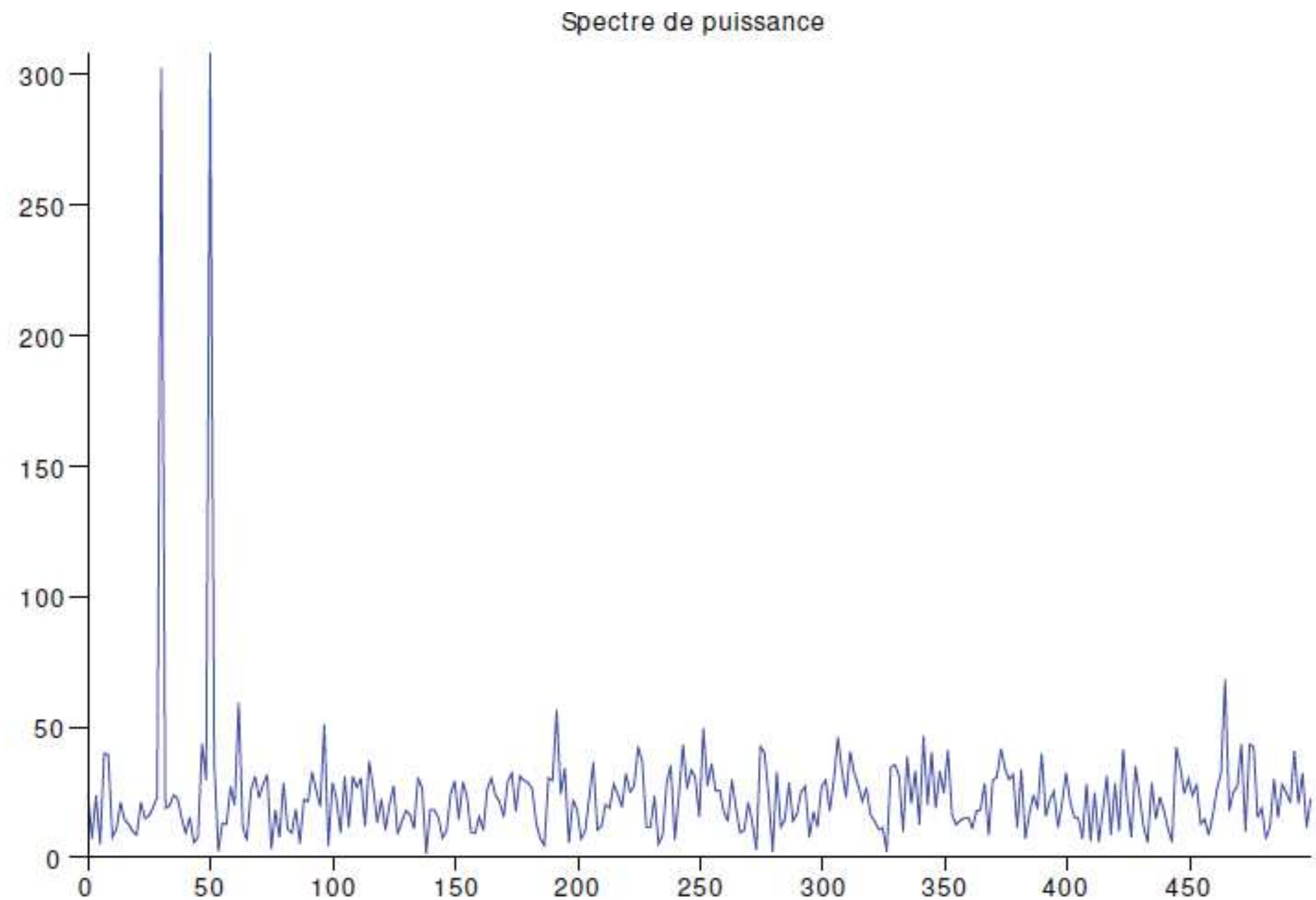
C'est une conséquence de ce qui précède et du théorème d'inversion.

Signal bruité :

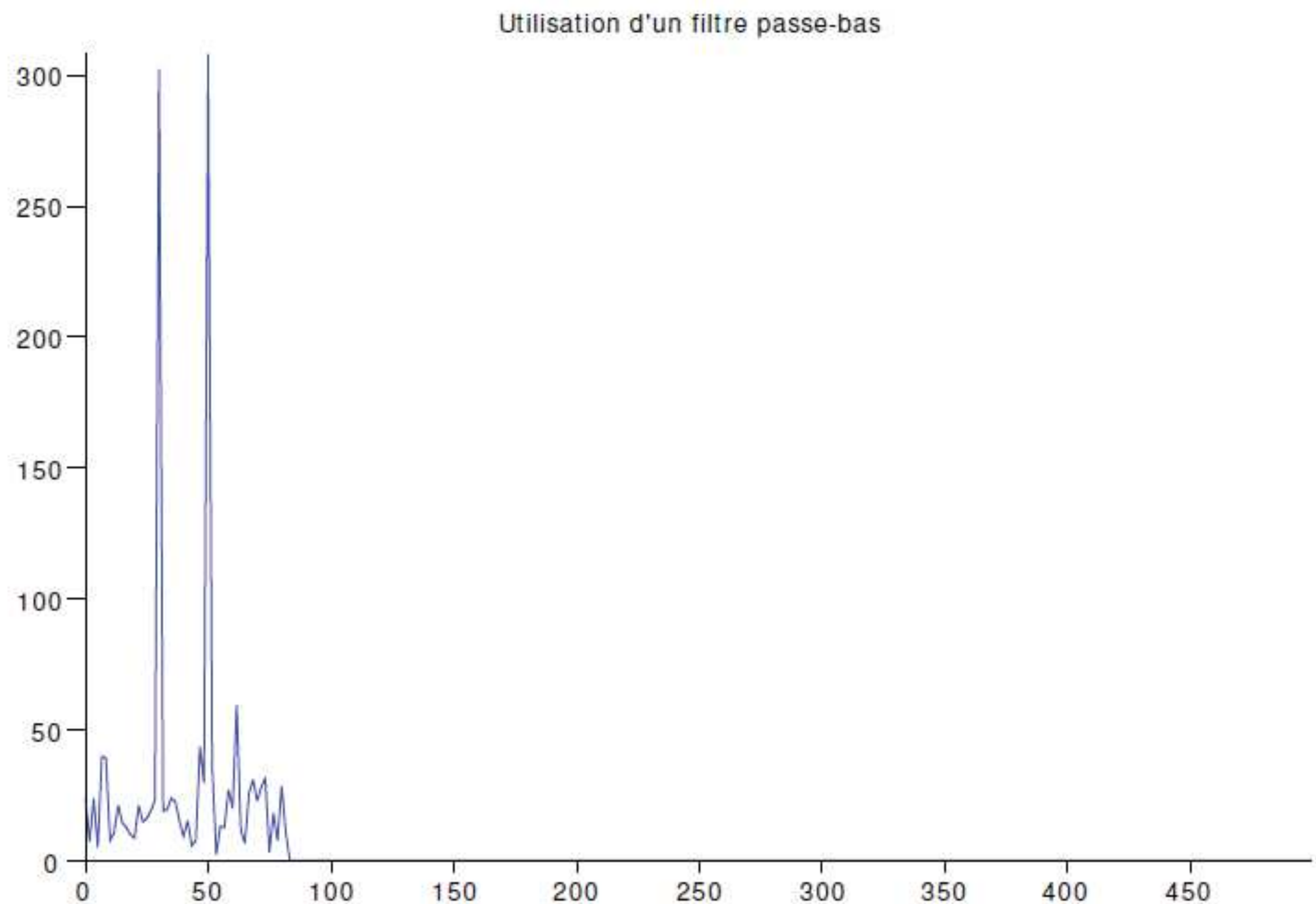


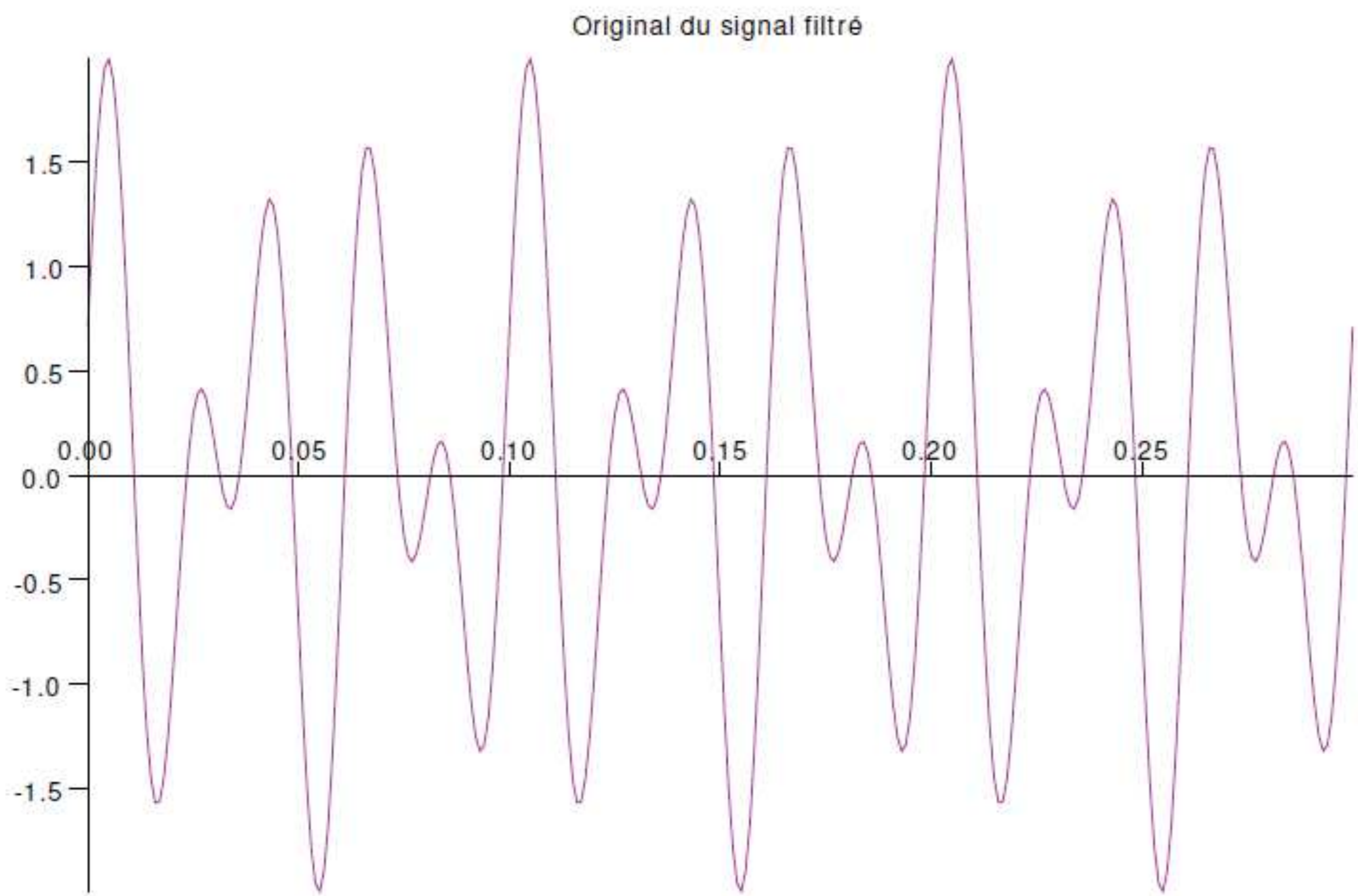
Signal non bruité :




Spectre de puissance
300
250
200
150
100
50
0
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450

Filtre passe bas :




Original du signal filtré
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25