Chapitre 2 : le modèle de régression multiple

Econométrie 1

Licence 3 Economie-Gestion E2AD-EGL, MIASHS-Economie

A. Fadhuile (adelaide.fadhuile@univ-grenoble-alpes.fr)

Univ Grenoble Alpes

Année 2023-2024

1 – Introduction

- Objectif du chapitre
    - Estimation des MCO lorsque le modèle comporte plusieurs variables explicatives.
    - Estimateur des MCO dans le cas de la régression multiple et ses propriétés
    - Interprétations
    - Inférence statistique
- L'ajout de variables explicatives va permettre de
    - Réduire la partie inobservée
    - Introduire de la flexibilité dans le modèle

$$Salaire_i = \beta_0 +_1 genre_i + \beta_2 educ_i + \beta_3 experience_i + u_i$$

1 – Introduction

1.1 – Ce que vous savez après le Chapitre 1 ?

- Estimateur des MCO avec 1 seule variable explicative
- Quelles sont les propriétés, en termes de:
  - Biais ? **sous les hyp H_1, H_3,H_4 et H_5 : sans biais**
  - Variance ? **sous H_1 à H_5: variance minimal : BLUE**
  - Inférence ? **sous H_1 à H_5 et normalité**
    - Significativité
    - IC
    - Prévision

1 – Introduction

1.2 – Ce qui change et ce qui ne change pas ?

NEW Ecritures sous formes matricielles

NEW Le paramètre estimé mesure l'impact d'**une unité de x en plus sur y** ... on raisonnera **TOUTES CHOSES EGALES PAR AILLEURS**

- Les paramètres s'interprètent *individuellement*, i.e. Vous allez évaluer le changement de y suite à une variation de x_1 **EN SUPPOSANT** que x_2 est constant.

IDEM **Mais les propriétés de l'estimateur des MCO sont identiques sous H_1 à H_5**

- Sous les hyp H_1, H_3,H_4 et H_5 : sans biais
- Sous H_1 à H_5: variance minimal : BLUE - Gauss-Markov
- Sous H_1 à H_5 et normalité
  - Significativité et test; Intervalle de confiance
  - Prévision

1 – Introduction

1.3 – Exemple “Conso et revenu”

- Analyse de lien entre revenu et consommation des ménages:

$$cons_i = \beta_0 + \beta_1 inc_i + \beta_2 inc_i^2 + u_i$$

  - Avec $cons_i$ la consommation du ménage i, inc_i le revenu du ménage i et inc_i^2 le revenu au carré du ménage i;
- Quel est l’effet du revenu sur la consommation ?

$$\begin{aligned}\frac{\partial cons}{\partial inc} &= \frac{\partial[\beta_0 + \beta_1 inc_i + \beta_2 inc_i^2]}{\partial inc} \\ &= \beta_1 + 2 \times \beta_2 inc_i\end{aligned}$$

- Une augmentation du revenu d’**UNE UNITE** augmente la consommation de $\beta_1 + 2 \times \beta_2 inc_i$ **UNITES.**
- Pour chaque niveau de revenu, on peut prédire la variation de consommation de façon non linéaire.

1 – Introduction

1.4 – Exemple "Salaire dirigeant"

- Analyse du salaire des dirigeants (*salary*):

$$\log(salary_i) = \beta_0 + \beta_1 \log(sales_i) + \beta_2 anc_i + \beta_3 anc_i^2 + u_i$$

  - Avec $salary_i$, le salaire en milliers d'euros,
  - $sales_i$ le chiffres d'affaires (CA) de l'entreprise en milliers d'euros et
  - anc_i le nombre d'années d'expérience en tant que dirigeant.
- Interprétation des paramètres du modèle?

1 – Introduction

1.4 – Exemple "Salaire dirigeant"

- Analyse du salaire des dirigeants (*salary*):

$$\log(salary_i) = \beta_0 + \beta_1 \log(sales_i) + \beta_2 anc_i + \beta_3 anc_i^2 + u_i$$

- Quel est l'effet du CA sur le salaire du dirigeant?
    - Modèle :
    - Signe attendu :

1 – Introduction

1.4 – Exemple "Salaire dirigeant"

- Analyse du salaire des dirigeants (*salary*):

$$\log(salary_i) = \beta_0 + \beta_1 \log(sales_i) + \beta_2 anc_i + \beta_3 anc_i^2 + u_i$$

  - Si $\beta_3 = 0$, l'effet de l'ancienneté est mesurée par β_2
    - β_2 est une **semi-élasticité**
    - Une augmentation de l'ancienneté **d'1 an augmente le salaire de $\beta_2 \times 100$%.**

1 – Introduction

1.4 – Exemple "Salaire dirigeant"

- Analyse du salaire des dirigeants ($salary$):

$$\log(salary_i) = \beta_0 + \beta_1 \log(sales_i) + \beta_2 anc_i + \beta_3 anc_i^2 + u_i$$

  - Si $\beta_3 \neq 0$, l'effet de l'ancienneté

$$\frac{\partial \log(salary)}{\partial anc} = \frac{\partial[\beta_0 + \beta_1 \log(sales_i) + \beta_2 anc_i + \beta_3 anc_i^2]}{\partial anc}$$

    - Variation **en pourcentage de salary**.
    - Une augmentation d'**UN AN d'ancienneté** augmente le salaire de $(\beta_2 + 2 \times \beta_3 \times anc) \times 100$ %.
    - L'augmentation ne sera pas la même d'une année d'ancienneté à l'autre.
    - Cela va dépendre du niveau d'ancienneté observé, e.g. point moyen, ou un choix d'un nombre d'années spécifique.

Plan du cours

2 – Le modèle de regression linéaire multiple

2.1 – Le modèle

- Considérons le modèle de régression multiple suivant :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} + u_i \ \forall i = 1, \ldots, n$$

  - y_i : observation individuelle de la variable à expliquer pour l'individu i
  - k est le nombre de variables explicatives du modèle
  - x_{ik}: les k variables explicatives.
  - N nombre d'observations
- Par convention, les indices...
  - i pour des individus (coupes transversales)
  - t pour des périodes temporelles (séries temporelles)

2 – Le modèle de regression linéaire multiple

2.1 – Le modèle

- Avec des notations matricielles, le modèle s'écrit pour n individus:

$$\mathrm{y} = X\beta + u$$

$$\underset{(n,1)}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \end{pmatrix}} = \underset{(n,k+1)}{\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}} \underset{(k+1,1)}{\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}} + \underset{(n,1)}{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}}$$

- Avec : X est la matrice des observations des variables explicatives; b est le vecteur des paramètres à estimer; u est le vecteur des perturbations.

2 – Le modèle de regression linéaire multiple

2.2 – L'estimateur des Moindres Carrés Ordinaires (MCO)

- Soit le modèle:

$$\underbrace{y}_{(n,1)} = \underbrace{X}_{(n,k+1)} \underbrace{\beta}_{(k+1,1)} + \underbrace{u}_{(n,1)}$$

- L'estimateur des MCO des coefficients:

$$\underbrace{\widehat{\beta}}_{(k+1,1)} = \underbrace{(X^T X)^{-1}}_{(k+1,k+1)} \underbrace{X^T y}_{(k+1,1)}$$

2 – Le modèle de regression linéaire multiple

2.2 – L'estimateur des Moindres Carrés Ordinaires (MCO)

- L'estimateur des MCO est donné en minimisant la somme des carrés des résidus (SCR), i.e.

$$min \sum_{i=1}^{n} \widehat{u}_i^2 \Rightarrow \ \widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2, \cdots, \widehat{\beta}_k$$

$$\text{avec } \widehat{u}_i = y_i - \widehat{y}_i$$

$$\widehat{u}_i = y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 x_{i1} - \widehat{\beta}_2 x_{i2} - \cdots - \widehat{\beta}_k x_{ik}$$

2 – Le modèle de regression linéaire multiple

2.2 – L'estimateur des Moindres Carrés Ordinaires (MCO)

2.2.1 – Equations normales - Estimateur des MCO

- Soit le modèle $y = X\beta + u$

$$
\begin{aligned}
\min_{\beta} u^T u &= \min_{\beta} (y - X\beta)^T (y - X\beta) \\
&= \min_{\beta} \left(y^T - \beta^T X^T\right)(y - X\beta) \\
&= \min_{\beta} (y^T y - 2y^T X\beta + \beta^T X^T X\beta)
\end{aligned}
$$

Or $y^T X\beta$ et $\beta^T X^T y$ sont deux scalaires donc $(y^T X\beta)^T = \beta^T X^T y = y^T X\beta$

2 – Le modèle de regression linéaire multiple

2.2 – L'estimateur des Moindres Carrés Ordinaires (MCO)

2.2.1 – Equations normales - Estimateur des MCO

- La condition de premier ordre s'écrit :

$$\left(\frac{\partial u^T u}{\partial \beta}\right)_{\beta=\widehat{\beta}} = -2X^T y + 2X^T X\widehat{\beta} = 0$$

$$X^T y = X^T X\widehat{\beta}$$

$$(X^T X)^{-1} X^T y = \widehat{\beta}(Sous\ H_5)$$

- L'estimateur des MCO est : $\widehat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$.

2 – Le modèle de regression linéaire multiple

2.3 – Variance de l'estimateur des MCO

- L'estimateur de la variance des coefficients:

$$\underbrace{V(\widehat{\beta})}_{(k+1,k+1)} = \underbrace{\widehat{\sigma}_u^2}_{(1,1)} \underbrace{(X^T X)^{-1}}_{(k+1,k+1)}$$

- Lecture, si k=2

$$V(\widehat{\beta}) = \begin{pmatrix} V(\widehat{\beta}_0) & cov(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1) & cov(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_2) \\ cov(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1) & V(\widehat{\beta}_1) & cov(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) \\ cov(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_2) & cov(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) & V(\widehat{\beta}_2) \end{pmatrix}$$

2 – Le modèle de regression linéaire multiple

2.4 – Résumé : A CONNAITRE

- Soit le modèle: $y = X\beta + u$
- L'estimateur des MCO des paramètres:

$$\widehat{\beta} = \underbrace{(X^T X)^{-1}}_{(k+1,k+1)} \underbrace{X^T y}_{(k+1,1)}$$

- L'estimateur de la variance des paramètres:

$$V(\widehat{\beta}) = \widehat{\sigma}_u^2 \underbrace{(X^T X)^{-1}}_{(k+1,k+1)}$$

- L'estimateur de la variance des perturbations

$$\widehat{\sigma}_u^2 = \frac{\widehat{u}^T \widehat{u}}{n-(k+1)} = \frac{SCR}{n-(k+1)}$$

Plan du cours

3 – Hypothèses et propriétés

3.1 – Hypothèses

- Sous les Hypothèses fondamentales
  - H_1 : $E[u] = 0, \forall\ i$ l'espérance mathématique de l'erreur est nulle
  - H_2 : $V[u] = \sigma_u^2 I_N$ la variance de l'erreur est constante
  - H_3 : la matrice $\mathbf{X}$ est non-aléatoire
  - H_4 : le modéle est correctement spécifié
  - H_5 : la matrice $\mathbf{X}$ est de plein rang : $k + 1 < n$
- A distance finie, l'estimateur des MCO, sous les hypothèses H_1 à H_5, est:
  - **Sans biais** (i.e. $E(\hat{\beta}) = \beta$) et **à Variance minimale**

  $\Leftrightarrow$ **BLUE** (Best Linear Unbiased Estimator).

  $\Leftrightarrow$ Estimateur de Gauss-Markov

  $\Leftrightarrow$ Estimateur efficace

3 – Hypothèses et propriétés

3.2 – Propriétés

- Pour obtenir un estimateur sans biais $\Rightarrow$ Calcul de l'espérance

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta} &= (X^TX)^{-1}X^Ty[\text{sous } H_5] \\
E[\hat{\beta}] &= E[(X^TX)^{-1}X^Ty] \\
&= E[(X^TX)^{-1}X^T(X\beta + u)][\text{sous } H_4] \\
&= E[(X^TX)^{-1}X^TX\beta + (X^TX)^{-1}X^Tu] \\
&= E[\beta + (X^TX)^{-1}X^Tu] \\
&= \beta + (X^TX)^{-1}X^TE[u]\ [\text{sous } H_3] \\
E[\hat{\beta}] &= \beta\ \ [\text{sous } H_1]
\end{aligned}
$$

- L'estimateur, $\hat{\beta}$, de β des MCO est sans biais

3 – Hypothèses et propriétés

3.2 – Propriétés

- Pour calculer sa variance

$$
\begin{array}{rcl}
V[\hat{\beta}] & = & E\left[(\hat{\beta} - E[\hat{\beta}])(\hat{\beta} - E[\hat{\beta}])^T\right] \\
 & = & E\left[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^T\right] \\
\text{Avec } \hat{\beta} - \beta & = & (X^TX)^{-1}X^Ty - \beta \\
 & = & (X^TX)^{-1}X^Tu \\
\text{D'où } V[\hat{\beta}] & = & E\left[(X^TX)^{-1}X^Tuu^TX(X^TX)^{-1}\right] \\
 & = & (X^TX)^{-1}X^T\,E[uu^T]\,X(X^TX)^{-1} \text{ [sous } H_3\text{]} \\
 & = & \sigma_u^2(X^TX)^{-1}X^TX(X^TX)^{-1} \text{ [sous } H_2\text{]} \\
V[\hat{\beta}] & = & \sigma_u^2(X^TX)^{-1}
\end{array}
$$

3 – Hypothèses et propriétés

3.3 – Variance des perturbations

- Puisque les u ne sont pas directement observables, il est possible d'estimer σ_u^2 grâce à la SCR $(\widehat{u}^T\widehat{u})$

$$
\begin{aligned}
\widehat{u} &= y - \widehat{y} \\
&= y - X\widehat{\beta} \\
&= y - X(X^TX)^{-1}X^Ty \\
&= My, \text{avec } M = I_n - X(X^TX)^{-1}X^T \\
\widehat{u} &= M(Xb+u) \\
&= MXb + Mu \\
&= Mu
\end{aligned}
$$

- Avec

$$
\begin{aligned}
MX &= \left(I_T - X(X^TX)^{-1}X^T\right)X \\
&= X - X(X^TX)^{-1}X^TX \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$M^T = M$, i.e. M symétrique,

$MM^T = M^TM = M$,i.e. M idempotente,

$Rg(M) = tr(M) = N - k$

Donc $\hat{u}^T\hat{u} = u^TM^TMu = u^TMu$

3 – Hypothèses et propriétés

3.3 – Variance des perturbations

- L'estimateur de la variance des perturbations des MCO est sans biais $\Rightarrow$ $\mathrm{E}(\sigma^2) = \sigma^2$

$$
\begin{aligned}
E(\hat{u}^T \hat{u}) &= E[tr(u^T Mu)] \ \text{[puisque } u^T Mu \text{ est un scalaire]} \\
&= E[tr(Muu^T)]\text{[puisque } tr(AB) = tr(BA)\text{, en posant } A = u^T \text{ et } B = Mu] \\
&= tr[E(Muu^T)] = tr[ME(uu^T)] \\
&= tr(M\sigma^2) = \sigma^2 tr(M) \\
&= \sigma^2 (N - k)
\end{aligned}
$$

- Donc

$$
\sigma^2 = \frac{E(\hat{u}^T \hat{u})}{N - k}
$$

Plan du cours

4 – Qualité de l'ajustement

4.1 – Analyse de la variance

- **NE CHANGE PAS PAR RAPPORT AU CHAPITRE 1**
- Equation d'analyse de la variance:

$$\text{Variance de } y = \text{Variance de } \hat{y} + \text{Variance de } \hat{u}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}_{SCT} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}_{SCE} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}(\hat{u}_i - \bar{\hat{u}})^2}_{SCR}$$

- SCT : Somme des carrés totaux
- SCE : Somme des carrés expliqués
- SCR : Somme des carrés des résidus

$\Rightarrow$ On en déduit le coefficient de détermination : R^2

4 – Qualité de l'ajustement

4.2 – Coefficient de détermination R^2

- le coefficient de détermination : R^2

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

- **Le R^2 augmente si le nombre de variables explicatives augmente.**
- Le $\overline{R}^2$ ajusté permet d'**ajuster des degrés de liberté**, et permet de comparer la qualité de l'ajustement de deux modèles comprenant le même nombre de degrés de liberté $(N - (k + 1))$.

$$\overline{R}^2 = R^2 - \frac{k-1}{n-k}(1 - R^2) = 1 - \frac{SCR/(n-k)}{SCT/(k-1)} \tag{1}$$

Plan du cours

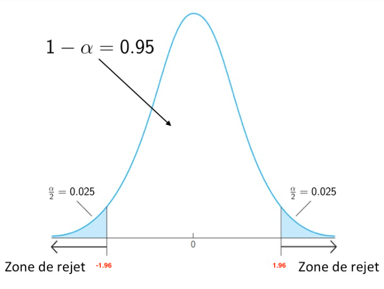
5 – Inférence statistique

5.1 – Test d'égalité - bilatéral

- Soit le modèle : $y = X\beta + u$
- La première variable explicative est-elle significativement différente de 0 ?
- **Hypothèse testée, au seuil $\alpha\%$**
  - $H_0 : \beta_1 = 0$ vs $H_1 : \beta_1 \neq 0$
- **Statistique de Student** :

$$t_{\widehat{\beta}_1} = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_1}} \sim t_{1-\alpha/2}(n - (\mathbf{k} + 1))$$

- **Règle de decision**
  - si $|t_{\widehat{\beta}_1}| > t_{1-\alpha/2}(n - (k+1))$, on rejette H_0



5 – Inférence statistique

5.2 – Intervalle de confiance

- **Identique à chapitre 1**
- L'intervalle de confiance à $1-\alpha$ % est donc donné par:

$$[\widehat{\beta}_k - t_{1-\alpha/2}(n-(k+1))\,\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_k}; \widehat{\beta}_k + t_{1-\alpha/2}(n-(k+1))\,\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_k}]$$

- Si $H_0 : \beta_k = a$ et si a n'est pas dans l'intervalle de confiance, alors l'hypothèse H_0 sera rejetée.

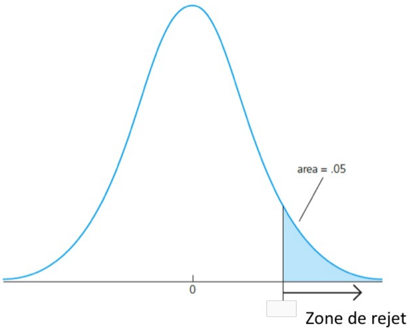
5 – Inférence statistique

5.3 – Test unilatéral

- Hypothèse
  - $H_0 : \beta_k \leq 0$ vs $H_1 : \beta_k > 0$
- Statistique de test

$$t_{\widehat{\beta}_1} = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_1}} \sim t_{1-\alpha}(n - (\mathbf{k} + 1))$$

- Si $t_{\widehat{\beta}_k} > t_{1-\alpha}(n - (k+1))$, on **rejette** l'hypothèse H_0 pour préférer l'hypothèse alternative
  - ie la statistique de test est dans la zone bleue.



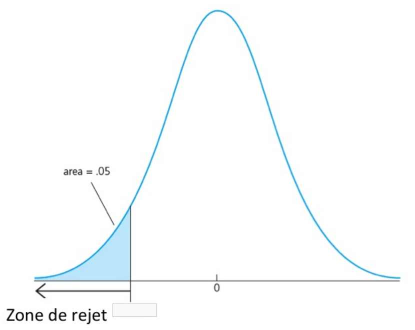
5 – Inférence statistique

5.3 – Test unilatéral

- Hypothèse
  - $H_0 : \beta_k \geq 0$ vs $H_1 : \beta_k < 0$
- Statistique de test

$$t_{\widehat{\beta}_1} = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_1}} \sim t_{1-\alpha}(n - (\mathbf{k} + 1))$$

- Si $t_{\widehat{\beta}_k} < -\mathbf{t}_{1-\alpha}(n - (k + 1))$, on **rejette** l'hypothèse H_0 pour préférer l'hypothèse alternative
  - la statistique de test est dans la zone bleue.



5 – Inférence statistique

5.4 – Significativité globale du modèle

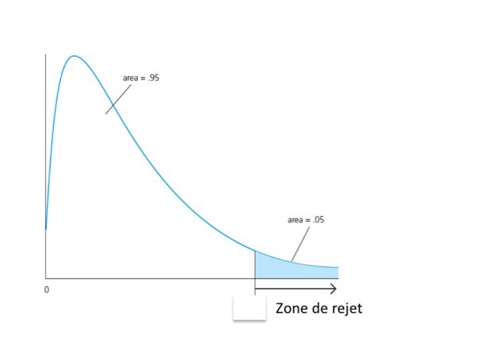
Hypothese testée : $H_0 : \beta_i = 0$ contre $H_1 : \beta_i \neq 0$ avec $i \in \{1.2...., k\}$

- **Statistique de test**

$$F = \frac{SCE/k}{SCR/\left[N-(k+1)\right]} \text{ ou}$$

$$F = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/\left[N-(k+1)\right]}$$

- **Régle de décision**
  - si $F > F_{v_1,v_2}$, on rejette $H_0 \Rightarrow$ Le modèle est **globalement significatif**
- F_{v_1,v_2}: valeur critique dans la table usuelle statistique de Fisher à $v_1 = k$ et $v_2 = N - (\mathbf{k} + 1)$.



Plan du cours

6 – Applications

6.1 – "Production"

- On considère le modèle de production suivant :

$$logQ_i = b_0 + b_1 \log L_i + b_2 \log K_i + u_i, u_i \sim N(0, \sigma_u^2), i = 1, \ldots, 23$$

où l'indice i fait référence à la i-ème firme.

- **Fonction de production** en utilisant une **fonction de Cobb-Douglas** : $Y_i = Ax_{1i}^{b_1} x_{2i}^{b_2}$
  - La linéarisation de cette fonction permet d'écrire le **modèle économique**:

$$\ln Y_i = \ln(Ax_{1i}^{b_1} x_{2i}^{b_2})$$
$$\ln Y_i = b_0 + b_1 \ln x_{1i} + b_2 \ln x_{2i}$$

  - Cela conduit à estimer le **modèle économétrique** suivant :

$$\ln Y_i = b_0 + b_1 \ln x_{1i} + b_2 \ln x_{2i} + u_i$$

$\rightarrow$ Le modèle estimé est **log linéaire, (ie log-log)** $\Rightarrow$ **élasticités**

- Pour simplifier les calculs, considérons un modèle **sans constante**, ie supposons que b_0=0.

6 – Applications

6.1 – "Production"

- L'information sur les 23 firmes est résumée par les éléments suivants :

$$\frac{\sum_{i=1}^{23}\left(\log Q_i-\overline{\log Q}\right)^2}{n}=10 \qquad \frac{\sum_{i=1}^{23}\left(\log Q_i-\overline{\log Q}\right)\left(\log L_i-\overline{\log L}\right)}{n}=10 \qquad \frac{\sum_{i=1}^{23}\left(\log Q_i-\overline{\log Q}\right)\left(\log K_i-\overline{\log K}\right)}{n}=8$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{23}\left(\log Q_i-\overline{\log Q}\right)\left(\log L_i-\overline{\log L}\right)}{n}=10 \qquad \frac{\sum_{i=1}^{23}\left(\log L_i-\overline{\log L}\right)^2}{n}=12 \qquad \frac{\sum_{i=1}^{23}\left(\log Q_i-\overline{\log Q}\right)\left(\log K_i-\overline{\log K}\right)}{n}=8$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{23}\left(\log Q_i-\overline{\log Q}\right)\left(\log K_i-\overline{\log K}\right)}{n}=8 \qquad \frac{\sum_{i=1}^{23}\left(\log L_i-\overline{\log L}\right)\left(\log K_i-\overline{\log K}\right)}{n}=8 \qquad \frac{\sum_{i=1}^{23}\left(\log K_i-\overline{\log K}\right)^2}{n}=12$$

- Cela revient à considérer la matrice suivante :

$$\left(\begin{array}{llll} & \log Q-\overline{\log Q} & \log L-\overline{\log L} & \log K-\overline{\log K} \\ \log Q-\overline{\log Q} & 10 & 10 & 8 \\ \log L-\overline{\log L} & 10 & 12 & 8 \\ \log K-\overline{\log K} & 8 & 8 & 12 \end{array}\right)$$

où : $10=\frac{\sum_{i=1}^{23}\left(\log Q_i-\overline{\log Q}\right)^2}{n}$

6 – Applications

6.1 – “Production”

6.1.1 – Estimation par les MCO

$$X^T X = \frac{1}{23} \times \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} \text{ Avec } det|X^T X| = (144 - 64)/23 = 80/23$$

$$(X^T X)^{-1} = \frac{23}{80} \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 12 \end{pmatrix} \text{ et } X^T y = \frac{1}{23} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{b}_{MCO} = \frac{1}{80} \begin{pmatrix} 120 - 64 \\ -80 + 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

Equation estimée:

$$\widehat{\log Q_i} = \widehat{b}_1 \log L_i + \widehat{b}_2 \log K_i \Leftrightarrow \widehat{\log Q_i} = 0.7 \log L_i + 0.2 \log K_i$$

6 – Applications

6.1 – "Production"

6.1.1 – Estimation par les MCO

- On sait que: $V[\widehat{b}] = \hat{\sigma}_u^2(X^TX)^{-1}$ et $\widehat{\sigma}_u^2 = \frac{\widehat{u}^T\widehat{u}}{N-k}$
- Remarque importante : on suppose qu'on a un modèle sans constante.
- Avec:

$$\begin{aligned}
\hat{u}^T\hat{u} &= (Y - X\widehat{b})^T(Y - X\widehat{b}) \\
&= Y^TY - Y^TX\widehat{b} - \widehat{b}^TX^TY + \widehat{b}^TX^TX\widehat{b} \\
&= Y^TY - 2\widehat{b}^TX^TY + \widehat{b}^TX^TX\widehat{b}
\end{aligned}$$

6 – Applications

6.1 – "Production"

6.1.1 – *Estimation par les MCO*

$$\text{Avec } Y^T Y = 23 \times 10$$

$$\widehat{b}^T X^T Y = 23 \times \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} = 23 \times 8.6$$

$$\widehat{b}^T X^T X \widehat{b} = 23 \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.2 \end{pmatrix} = 23 \times 8.6$$

$$\Rightarrow \widehat{\sigma}_u^2 = Y^T Y - 2\widehat{b}^T X^T Y + \widehat{b}^T X^T X \widehat{b}$$

$$= \frac{23(10 - 2 \times 8.6 + 8.6)}{23 - 2} = \frac{32.2}{21} = 1.533$$

6 – Applications

6.1 – "Production"

6.1.1 – Estimation par les MCO

- Donc:

$$
\begin{aligned}
\hat{V}[\widehat{b}] &= \hat{\sigma}_u^2 (X^T X)^{-1} \\
&= 1.533 \, \frac{1}{23 \times 80} \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.01 & -0.0066 \\ -0.0066 & 0.01 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- Donc $V(\widehat{b_1}) = 0.01$, $V(\widehat{b_2}) = 0.01$, et $cov(\widehat{b_1}, \widehat{b_2}) = -0.0066$

6 – Applications

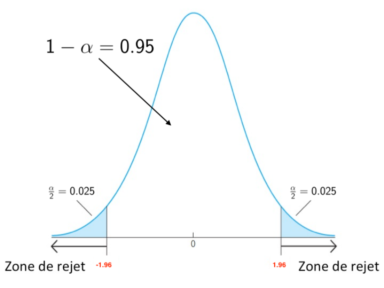
6.1 – "Production"

6.1.2 – *Tests d'Hypothèses*

- $H_0 : b_1 = 0$ vs $H_1 : b_1 \neq 0$
- **Statistique de Student** :

$$t_{\widehat{b}_1} = \frac{\widehat{b}_1 - b_1}{\widehat{\sigma}_{\widehat{b}_1}} \sim t_{1-\alpha/2}(n-(2))$$

- **Règle de decision**
  - si $|t_{\widehat{b}_1}| > t_{1-\alpha/2}(23-2)$, on rejette H_0
- Application
  - $|t_{\widehat{b}_1}| = \frac{0.7}{\sqrt{0.01}} = 7$ et $t_{21} = 2.07$
  - Rejet $H_0 \Rightarrow$ Conclusion Economique ???



6 – Applications

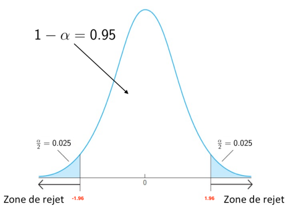
6.1 – “Production”

6.1.2 – Tests d'Hypothèses

- Hypothèse testée, au seuil α%
  - $H_0 : b_1 + b_2 = 1 \Rightarrow$ RE constants
    vs $H_1 : b_1 + b_2 \neq 1$
- Statistique de Student

$$t_c = \frac{(\widehat{b}_1 + \widehat{b}_2 - 1) - (b_1 + b_2 - 1)}{\widehat{\sigma}_{\widehat{b}_1 + \widehat{b}_2 - 1}} \sim t_{1-\alpha/2}(n - (2))$$

- **Règle de decision**
  - si $|t_c| > t_{1-\alpha/2}(23 - 2)$, on rejette H_0



6 – Applications

6.1 – “Production”

6.1.2 – Tests d’Hypothèses

- Application

$$\hat{V}[\widehat{b}] = \hat{\sigma}_u^2 (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.01 & -0.0066 \\ -0.0066 & 0.01 \end{pmatrix}$$

- Donc $V(\widehat{b}_1) = 0.01$, $V(\widehat{b}_2) = 0.01$, et $cov(\widehat{b}_1, \widehat{b}_2) = -0.0066$

$$V(\widehat{\sigma}_{\widehat{b}_1+\widehat{b}_2-1}) = V(\widehat{b}_1) + V(\widehat{b}_2) + 2cov(\widehat{b}_1, \widehat{b}_2) = 0.0068$$

$$t_c = \frac{0.7 + 0.2 - 1}{\sqrt{0.0068}} = -1.212$$

6 – Applications

6.1 – "Production"

6.1.2 – Tests d'Hypothèses

- $H_0 : b_2 \geq 0.2$ vs $H_1 : b_2 < 0.2$
- Statistique de test

$$t_{calc} = \frac{\widehat{b}_2 - b_2}{\widehat{\sigma}_{\widehat{b}_2}} \sim t_{1-\alpha}(n - (\mathbf{k}))$$

- RD : Si $t_{calc} < \mathbf{-t}_{1-\alpha}(21)$, on **rejette** de H_0
- Application

$$t_{calc} = \frac{0.2 - 0.2}{\sqrt{0.01}} = 0.0 \text{et } t_{th} = 1.72$$

- Donc $t_{calc} > -t_{th} \Rightarrow$ Pas de rejet de H_0

images/unilateral_ga

6 – Applications

6.2 – Exemple "Salaires dirigeants"

6.2.1 – *Estimation de l'équation de salaire par les MCO*

Equation générale : $\log(salary_i) = \beta_0 + \beta_1 \log(sales_i) + \beta_2 anc_i + \beta_3 anc_i^2 + u_i$

```
Modèle 3: MCO, utilisant les observations 1-177
Variable dépendante: l_salary

             coefficient   erreur std.   t de Student   p. critique
  ------------------------------------------------------------------
  const        4,71635     0,208399        22,63        1,38e-53    ***
  l_sales      0,227800    0,0264767        8,604       4,54e-15    ***
  ceoten       0,0450131   0,0142767        3,153       0,0019      ***
  sq_ceoten   -0,00121625  0,000480114     -2,533       0,0122      **

Moy. var. dép.          6,582848   Éc. type var. dép.      0,606059
Somme carrés résidus    43,69439   Éc. type de régression  0,502562
R2                      0,324100   R2 ajusté               0,312379
F(3, 173)               27,65165   p. critique (F)         1,17e-14
Log de vraisemblance   -127,3468   Critère d'Akaike        262,6936
Critère de Schwarz      275,3982   Hannan-Quinn            267,8461
```

6 – Applications

6.2 – Exemple "Salaires dirigeants"

6.2.1 – *Estimation de l'équation de salaire par les MCO*

- Equation

$$\log(salary_i) = \beta_0 + \beta_1 \log(sales_i) + \beta_2 anc_i + \beta_3 anc_i^2 + u_i$$

- Equation estimée

$$\widehat{\log(salary_i)} = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 \log(sales_i) + \widehat{\beta}_2 anc_i + \widehat{\beta}_3 anc_i^2$$

$$\widehat{\log(salary_i)} = \underset{(0{,}208)}{4,72} + \underset{(0{,}0265)}{0,228} * \log(sales_i) + \underset{(0{,}0143)}{0,0450} * anc_i - \underset{(0{,}000480)}{0,00122} * anc_i^2$$

$$n = 177, R^2 = 0,324$$

(écarts-types entre parenthèses)

6 – Applications

6.2 – Exemple “Salaires dirigeants”

6.2.2 – Commentaires

- Interprétations des coefficients estimés ?
- Qualité de l’ajustement ?

6 – Applications

6.2 – Exemple “Salaires dirigeants”

6.2.3 – Tests

- Effet de l’ancienneté sur le salaire
- Si $\beta_3 \neq 0$, l’effet de l’ancienneté

$$\frac{\partial \log(salary)}{\partial anc}$$

- Hypothèse: $H_0 : \beta_2 + 2 \times \beta_3 = 0$
- Stat de test:

$$t_{\widehat{\beta}_2 + 2 \times \widehat{\beta}_3} = \frac{\widehat{\beta}_2 + 2 \times \widehat{\beta}_3 - (\beta_2 + 2 \times \beta_3)}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_2 + 2 \times \widehat{\beta}_3}} \sim t_{1-\alpha}(n - (\mathbf{k+1}))$$

6 – Applications

6.2 – Exemple "Salaires dirigeants"

6.2.3 – *Tests*

- La matrice des variances-covariances est donnée par:

Matrice de covariance des coefficients

const	log(sales)	ceoten	$ceoten^2$	
0,043430	−0,0051385	−0,00098512	2,6197e−05	const
	0,00070101	1,2456e−05	−2,5959e−07	log(sales)
		0,00020382	−6,3643e−06	ceoten
			2,3051e−07	$ceoten^2$

6 – Applications

6.2 – Exemple “Salaires dirigeants”

6.2.3 – Tests

- Calcul de l'écart-type estimé pour le test:

$$V(\widehat{\beta}_2 + 2 \times \widehat{\beta}_3) = V(\widehat{\beta}_2) + 2^2 V(\widehat{\beta}_3) + 2cov(\widehat{\beta}_2, \widehat{\beta}_3) = .00021679$$

- Donc $t_{\widehat{\beta}_2 + 2\times\widehat{\beta}_3} = 2.8932733 > 1.96$
- Conclusion : Rejet H_0
- **[Rappel : Hypothèse:** $H_0 : \beta_2 + 2 \times \beta_3 = 0$ **]**

6 – Applications

6.2 – Exemple “Salaires dirigeants”

- **Hypothese testée** : $H_0 : b_i = 0$ contre $H_1 : b_i \neq 0$ avec $i \in \{1.2...., k\}$
- **Statistique de test : Test de Fisher**

$$F = \frac{R^2 / k}{(1 - R^2) / [N - (k+1)]}$$
$$= \frac{0.32/3}{(1 - 0.32) / [177 - (4)]} = 27.65$$
$$F_{(3,173)} = 2.60$$

- **Règle de décision**
  - $F > F_{v_1, v_2}$, on rejette $H_0 \Rightarrow$ Le modèle est **globalement significatif**

Plan du cours

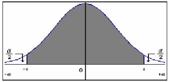
7 – Conclusion

- Ecritures sous formes matricielles
- **Les propriétés de l'estimateur des MCO sous H_1 à H_5**
  - sous les hyp H_1, H_3,H_4 et H_5 : sans biais
  - sous H_1 à H_5: variance minimal : BLUE - Gauss-Markov
  - sous H_1 à H_5 et normalité
    - Significativité individuelle et tests joints !!!!
    - IC
    - Prévision
- Le paramètre estimé mesure l'impact d'**une unité de x en plus sur y** ... on raisonnera **TOUTES CHOSES EGALES PAR AILLEURS**
  - Les paramètres s'interprètent *individuellement*, i.e. Vous allez évaluer le changement de y suite à une variation de x_1 **EN SUPPOSANT** que x_2 est constant.

Bibliographie

Claudio Araujo, Jean-François Brun, Jean-Louis Combes, and Jean-Louis Combes.
Econométrie.
Bréal éd., 2004.

Jeffrey Wooldridge.
Introductory econometrics: A modern approach.
Nelson Education, 2015.



α	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1 − α	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,998	0,999
ν = ddl											
1	0,0000	0,3249	0,7265	1,3764	3,0777	6,3137	12,706	31,821	63,656	318,29	636,58
2	0,0000	0,2887	0,6172	1,0607	1,8856	2,9200	4,3027	6,9645	9,9250	22,328	31,600
3	0,0000	0,2767	0,5844	0,9785	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8408	10,214	12,924
4	0,0000	0,2707	0,5686	0,9410	1,5332	2,1318	2,7765	3,7469	4,6041	7,1729	8,6101
5	0,0000	0,2672	0,5594	0,9195	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	5,8935	6,8685
6	0,0000	0,2648	0,5534	0,9057	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,2075	5,9587
7	0,0000	0,2632	0,5491	0,8960	1,4149	1,8946	2,3646	2,9979	3,4995	4,7853	5,4081
8	0,0000	0,2619	0,5459	0,8889	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	4,5008	5,0414
9	0,0000	0,2610	0,5435	0,8834	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,2969	4,7809
10	0,0000	0,2602	0,5415	0,8791	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,1437	4,5868
11	0,0000	0,2596	0,5399	0,8755	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,0248	4,4369
12	0,0000	0,2590	0,5386	0,8726	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	3,9296	4,3178
13	0,0000	0,2586	0,5375	0,8702	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	3,8520	4,2209
14	0,0000	0,2582	0,5366	0,8681	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	3,7874	4,1403
15	0,0000	0,2579	0,5357	0,8662	1,3406	1,7531	2,1315	2,6025	2,9467	3,7329	4,0728
16	0,0000	0,2576	0,5350	0,8647	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	3,6861	4,0149
17	0,0000	0,2573	0,5344	0,8633	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,6458	3,9651
18	0,0000	0,2571	0,5338	0,8620	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,6105	3,9217
19	0,0000	0,2569	0,5333	0,8610	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,5793	3,8833
20	0,0000	0,2567	0,5329	0,8600	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,5518	3,8496
21	0,0000	0,2566	0,5325	0,8591	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,5271	3,8193
22	0,0000	0,2564	0,5321	0,8583	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,5050	3,7922
23	0,0000	0,2563	0,5317	0,8575	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,4850	3,7676
24	0,0000	0,2562	0,5314	0,8569	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7970	3,4668	3,7454
25	0,0000	0,2561	0,5312	0,8562	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,4502	3,7251
26	0,0000	0,2560	0,5309	0,8557	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,4350	3,7067
27	0,0000	0,2559	0,5306	0,8551	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,4210	3,6895
28	0,0000	0,2558	0,5304	0,8546	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,4082	3,6739
29	0,0000	0,2557	0,5302	0,8542	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,3963	3,6595
30	0,0000	0,2556	0,5300	0,8538	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,3852	3,6460
40	0,0000	0,2550	0,5286	0,8507	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,3069	3,5510
50	0,0000	0,2547	0,5278	0,8489	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,2614	3,4960
60	0,0000	0,2545	0,5272	0,8477	1,2958	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,2317	3,4602
70	0,0000	0,2543	0,5268	0,8468	1,2938	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,2108	3,4350
80	0,0000	0,2542	0,5265	0,8461	1,2922	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,1952	3,4164
90	0,0000	0,2541	0,5263	0,8456	1,2910	1,6620	1,9867	2,3685	2,6316	3,1832	3,4019
100	0,0000	0,2540	0,5261	0,8452	1,2901	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,1738	3,3905
200	0,0000	0,2537	0,5252	0,8434	1,2858	1,6525	1,9719	2,3451	2,6006	3,1315	3,3398
∞	0,0000	0,2533	0,5244	0,8416	1,2816	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,0903	3,2906

Table de la loi de Fisher-Snedecor

(Valeurs de F ayant la probabilité P d'être dépassées)

	$\nu_1 = 1$		$\nu_1 = 2$		$\nu_1 = 3$		$\nu_1 = 4$		$\nu_1 = 5$	
ν_2	P = 0,05	P = 0,01	P = 0,05	P = 0,01	P = 0,05	P = 0,01	P = 0,05	P = 0,01	P = 0,05	P = 0,01
1	161,4	4052.00	199,5	4999.00	213,7	3403.00	224,6	5625.00	230,2	5764.00
2	18,51	98,49	19,00	99,00	19,16	99,17	19,25	99,25	19,30	99,30
3	10,13	34,12	9,55	30,81	9,28	29,46	9,12	28,71	9,01	28,24
4	7,71	21,20	6,94	18,00	6,59	16,69	6,39	13,98	6,26	13,32
5	6,61	16,26	5,79	13,27	5,41	12,06	5,19	11,39	5,03	10,97
6	3,99	13,74	3,14	10,91	4,76	9,78	4,53	9,13	4,39	8,75
7	3,39	12,23	4,74	9,35	4,33	8,43	4,12	7,85	3,97	7,45
8	3,32	11,26	4,46	8,63	4,07	7,39	3,84	7,01	3,69	6,63
9	5,12	10,56	4,26	8,02	3,86	6,99	3,63	6,42	3,48	6,06
10	4,96	10,04	4,10	7,56	3,71	6,33	3,48	5,99	3,33	5,64
11	4,84	9,65	3,98	7,20	3,59	6,22	3,36	5,67	3,20	5,32
12	4,75	9,33	3,88	6,93	3,49	5,93	3,26	5,41	3,11	5,06
13	4,67	9,07	3,80	6,70	3,41	5,74	3,18	5,20	3,02	4,86
14	4,60	8,86	3,74	6,31	3,34	5,56	3,11	5,03	2,96	4,69
15	4,34	8,68	3,68	6,36	3,29	5,42	3,06	4,89	2,90	4,56
16	4,49	8,53	3,63	6,23	3,24	5,29	3,01	4,77	2,85	4,44
17	4,45	8,40	3,59	6,11	3,20	5,18	2,96	4,67	2,81	4,34
18	4,41	8,28	3,53	6,01	3,16	5,09	2,93	4,58	2,77	4,25
19	4,38	8,18	3,52	5,93	3,13	5,01	2,90	4,50	2,74	4,17
20	4,35	8,10	3,49	5,85	3,10	4,94	2,87	4,43	2,71	4,10
21	4,32	8,02	3,47	5,78	3,07	4,87	2,84	4,37	2,68	4,04
22	4,30	7,94	3,44	5,72	3,05	4,82	2,82	4,31	2,66	3,99
23	4,28	7,88	3,42	5,66	3,03	4,76	2,80	4,26	2,64	3,94
24	4,26	7,82	3,40	5,61	3,01	4,72	2,78	4,22	2,62	3,90
25	4,24	7,77	3,38	5,37	2,99	4,68	2,76	4,18	2,60	3,86
26	4,22	7,72	3,37	5,33	2,98	4,64	2,74	4,14	2,39	3,82
27	4,21	7,68	3,33	5,49	2,96	4,60	2,73	4,11	2,37	3,78
28	4,20	7,64	3,34	5,43	2,95	4,57	2,71	4,07	2,56	3,75
29	4,18	7,60	3,33	5,42	2,93	4,34	2,70	4,04	2,34	3,73
30	4,17	7,56	3,32	5,39	2,92	4,31	2,69	4,02	2,53	3,70
40	4,08	7,31	3,23	5,18	2,84	4,31	2,61	3,83	2,43	3,31
60	4,00	7,08	3,15	4,98	2,76	4,13	2,32	3,65	2,37	3,34
120	3,92	6,85	3,07	4,79	2,68	3,93	2,43	3,48	2,29	3,17
∞	3,84	6,64	2,99	4,60	2,60	3,78	2,37	3,32	2,21	3,02