Exercice 3.2 *Le but de cet exercice est de déterminer les premiers coefficients de Fourier réels et les principales harmoniques d'un signal.*

Les formules d'Euler permettent d'exprimer les coefficients de Fourier réels nommés a_n et b_n :

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,\mathrm{d}t;$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos\left(nt\frac{2\pi}{T}\right)\mathrm{d}t, \qquad \textit{pour } n > 0 :$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin\left(nt\frac{2\pi}{T}\right)\mathrm{d}t \qquad \textit{pour } n > 0.$$

La série de Fourier est alors

$$S_n(f(x)) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k(f)\cos\left(kx\frac{2\pi}{T}\right) + b_k(f)\sin\left(kx\frac{2\pi}{T}\right)\right),$$

et les prorpiétes classiques s'adaptent.

Notons que l'on peut retrouver les coefficients c_n par les systèmes suivants

$$\begin{cases} a_n(f) &= c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) &= \mathrm{i}(c_n(f) - c_{-n}(f)) \end{cases} \qquad \begin{cases} c_n(f) &= \frac{a_n(f)-\mathrm{i}\cdot b_n(f)}{2} \\ c_{-n}(f) &= \frac{a_n(f)+\mathrm{i}\cdot b_n(f)}{2}. \end{cases}$$

formules d'Euler : $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ $\quad \sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}\,dx$$

$$c_{-n}(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{i\frac{2\pi}{T}nx}\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} c_n(f) \\ + c_{-n}(f) \end{array}\right) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\left(e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} + e^{i\frac{2\pi}{T}nx}\right)dx$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, 2\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx = a_n(f)$$

de même : $b_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx = i(c_n - c_{-n})$

Il y a donc une bijection entre c_n, c_{-n} et a_n, b_n.

On peut tout définir avec des harmoniques réelles a_n, b_n.

On reviendra

Les formules d'Euler permettent d'exprimer les coefficients de Fourier réels nommés a_n et b_n :

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,\mathrm{d}t;$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos\left(nt\frac{2\pi}{T}\right)\mathrm{d}t, \qquad \textit{pour } n > 0 :$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin\left(nt\frac{2\pi}{T}\right)\mathrm{d}t \qquad \textit{pour } n > 0.$$

La série de Fourier est alors

$$S_n(f(x)) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k(f)\cos\left(kx\frac{2\pi}{T}\right) + b_k(f)\sin\left(kx\frac{2\pi}{T}\right)\right),$$

et les prorpiétes classiques s'adaptent.

Partie A Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x.$$

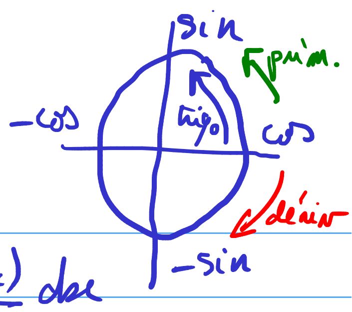
(i) Montrer que $I_n = -\frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}$.

$$I_n = \int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nx)\,dx = \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$0 \qquad = \frac{\sin(n\pi)}{n} - \frac{\sin(n\pi/2)}{n} = -\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

(ii) À l'aide d'une intégration par partie, montrer que

$$J_n = \frac{\pi}{2n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}.$$



$$J_n = \int_0^{\pi/2} \underset{u}{x}\,\underset{v'}{\cos(nx)}\,dx \overset{IPP}{=} \left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(nx)}{n}\,dx$$

$$v(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$$

$$= \left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\cos\left(n\pi/2\right) - \frac{1}{n^2}$$

(iii) Déterminer I_1, I_2 et I_3, puis J_1, J_2 et J_3.

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}$$

$I_1 = -1$ $\qquad$ $J_1 = \frac{\pi}{2} - 1$

$I_2 = 0$ $\qquad$ $J_2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$

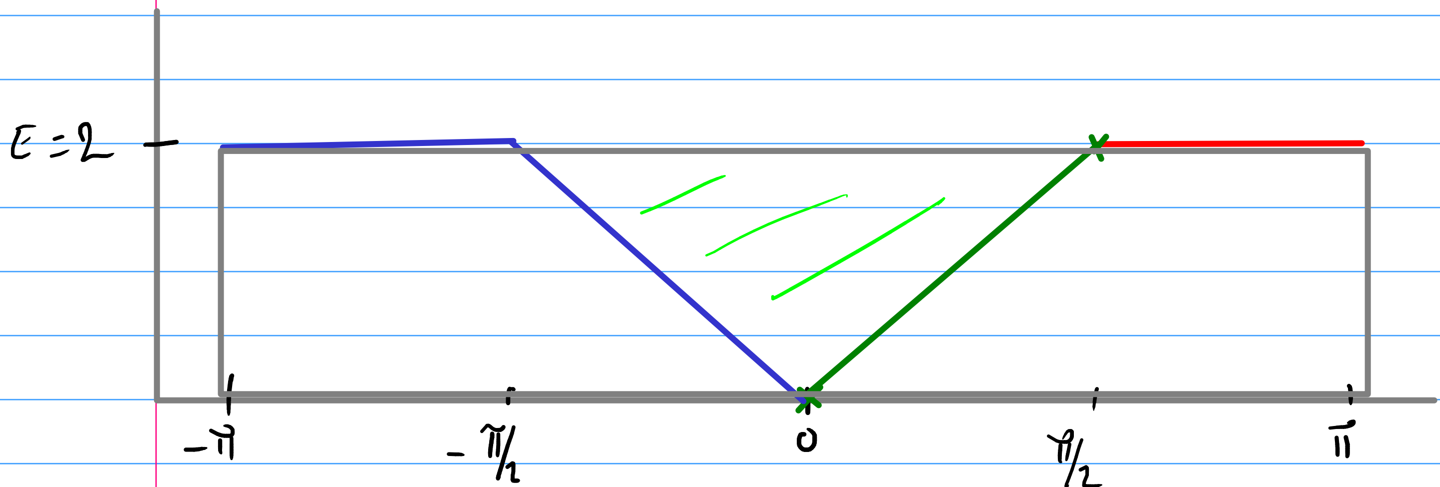
$I_3 = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $J_3 = -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{9}$

Partie B Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2π, telle que :

$$\begin{cases} \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, & f(t) = \dfrac{2E}{\pi}t \\ \text{si } \dfrac{\pi}{2} < t \leqslant \pi, & f(t) = E \end{cases}.$$

où E est un nombre réel donné, strictement positif.

(i) Tracer la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ +\pi]$ avec $E = 2$.



(ii) Soit a_0 et pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, a_n et b_n les coefficients de Fourier associés à f.

(a) Calculer a_0.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}(\text{aire rectangle} - \text{aire triangle})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(E \times 2\pi - \frac{E\pi}{2}\right) = \frac{E}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3E}{4}$$

(b) Pour tout $n \geqslant 1$, donner la valeur de b_n.

$$b_n(f) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{paire}}\, \underbrace{\sin\left(nt\cancel{\frac{2\pi}{T}}\right)}_{\text{impaire}}}^{\text{impaire}}\, \mathrm{d}t = 0$$

intervalle symétrique

(c) En utilisant la partie A, vérifier que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2E}{\pi^2}(2J_n + \pi I_n)$.
Calculer a_{4k} pour tout entier $k \geqslant 1$.

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos\left(nt\frac{2\pi}{T}\right)\,\mathrm{d}t, = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{pair}}\underbrace{\cos(nt)}_{\text{pair}}}^{\text{pair}}\,dt$$

intervalle symétrique

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{2E}{\pi}t\cos(nt)\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} E\cos(nt)\,dt\right)$$

$$= \frac{2E}{\pi^2}\left(2\underbrace{\int_0^{\pi/2} t\cos(nt)\,dt}_{J_n} + \pi\underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nt)\,dt}_{I_n}\right)$$

$$= \frac{2E}{\pi^2}(2J_n + \pi I_n)$$

Calculer a_{4k} pour tout entier $k \geqslant 1$.

$I_{4k} = 0$ et $J_{4k} = 0$ donc $a_{4k} = 0$.

$$\left(J_n = \frac{\pi}{2n}\underbrace{\sin\left(\overset{4k}{n}\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + \frac{1}{n^2}\underbrace{\cos\left(\overset{4k}{n}\frac{\pi}{2}\right)}_{1} - \frac{1}{n^2}. \right)$$

Partie C

(i) Déterminer les coefficients a_1, a_2, a_3.

$$a_n = \frac{2E}{\pi^2}\left(2J_n + \pi I_n\right)$$

$I_1 = -1$ $\quad J_1 = \frac{\pi}{2} - 1$

$I_2 = 0$ $\quad J_2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$

$I_3 = \frac{1}{3}$ $\quad J_3 = -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{9}$

$$a_1 = \frac{2E}{\pi^2}\left(2\times\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \pi\right)$$

$$= -\frac{4E}{\pi^2}$$

$$a_2 = \frac{2E}{\pi^2}\left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right) - \pi\times 0\right) = -\frac{2E}{\pi^2}$$

$$a_3 = \frac{2E}{\pi^2}\left(2\times\left(\frac{-\pi}{6} - \frac{1}{9}\right) + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{4E}{9\pi^2}$$

(ii) Calculer F^2, carré de la valeur efficace de la fonction f sur une période.

On rappelle que dans le cas où f est paire, périodique de période T, on a :

$$F^2 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,\mathrm{d}t. \quad T = 2\pi$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)\,dt \quad \text{car } f \text{ paire.}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{4E^2}{\pi^2} t^2\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} E^2\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{4E^2}{\pi^2}\underbrace{\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2}}_{\pi^3/24} + \frac{\pi}{2}E^2\right)$$

$$= \frac{4}{24}E^2 + \frac{1}{2}E^2 = \frac{2}{3}E^2$$

(iii) On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne

$$F^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

Soit P le nombre défini par $P = a_0^2 + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$. Calculer P, puis donner la valeur décimale arrondie au millième du rapport $\frac{P}{F^2}$.

$$\frac{P}{F^2} = \frac{\frac{9}{16}\cancel{E}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{16\cancel{E}^2}{\pi^4} + \frac{4\cancel{E}^2}{\pi^4} + \frac{16\cancel{E}^2}{81\pi^4}\right)}{\frac{2}{3}\cancel{E}^2}$$

$$= \frac{3}{2} \times \left(\frac{9}{16} + \frac{10}{\pi^4} + \frac{8}{81\pi^4}\right) = 0,9996.$$