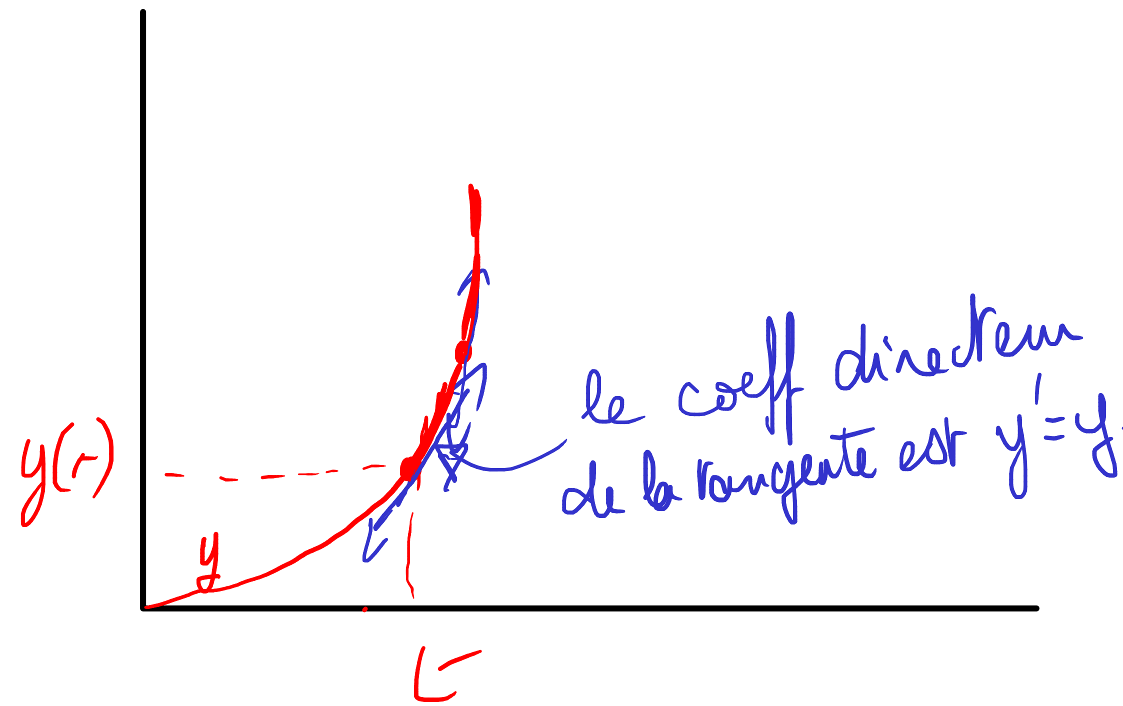
* équation dont la solution est une fonction $y(t)$.
* l'équation lie la fonction y et sa dérivée.

dérivée de $y \longrightarrow y' = y$.

* il faut une condition initiale "pour se lancer".



Part III

Équations différentielles

Definition 10.1 *Une solution de l'équation différentielle (10.8) est la donnée d'un intervalle $J \subset I$ ouvert et non réduit à un point et d'une fonction $u : J \to U$ telle que pour tout $t \in J$ on ait*

$$u'(t) = f\left(t, u(t)\right).$$

Si f est assez régulière, par exemple si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut montrer que, pour tout $(t_0, y_0) \in I \times U$, il existe une unique solution *maximale* de l'équation (10.8) telle que $u(t_0) = y_0$.

11 Définitions et existance d'une solution

Definition 11.1 *On appelle problème de Cauchy le système suivant.*

$$\begin{cases} x'(t) & = & f(t, x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \in \mathbb{R} \end{cases},$$

La condition $x(t_0) = x_0$ est dite "donnée de Cauchy" ou "condition initiale".

Theorem 11.2 *Dans le problème de Cauchy précédent, si la fonction f est continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, il existe une et une seule solution maximale au problème de Cauchy. Son intervalle de définition est ouvert.*

Notre équation : $y'(t) = f(t, y(t))$

$f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- f est continue.

- f est localement lipchitzienne par rapport à y :

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\forall t \in J$; $\forall y_1, y_2 \in [a,b]$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K_{a,b,t} |y_1 - y_2|$$

Exemple $f(t,y) = t^2 y^2$ - Cette fonction est continue et localement Lipschitzienne sur la 2è variable : $[a,b] \subset \mathbb{R}$, soit $t \in \mathbb{R}$, $\forall y_1, y_2 \in [a,b]$

$$|t^2 y_1^2 - t^2 y_2^2| = t^2 |y_1^2 - y_2^2| = t^2 \underbrace{|y_1 + y_2|}_{\leq 2\max(|a|,|b|)} |y_1 - y_2| \leq \underbrace{t^2 \times 2\max(|a|,|b|)}_{K_{a,b,t}} |y_1 - y_2|$$

12 Résolution graphique

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) & = & f(t, x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Definition 12.1 *On appelle champs de directions ou champs de tangentes de l'équation* $x'(t) = f(t, x(t))$ *l'ensemble des vecteurs de pente* $f(t, x)$ *dans le plan* (t, x).

Proposition 12.2 *Ces vecteurs sont tangents aux trajectoires des solutions de l'équation.*

Traitons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) & = & t \\ x(0) & = & 0 \end{cases}.$$

$x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t,x) = t$.

Le champs de directions est donc

La solution a donc la trajectoire

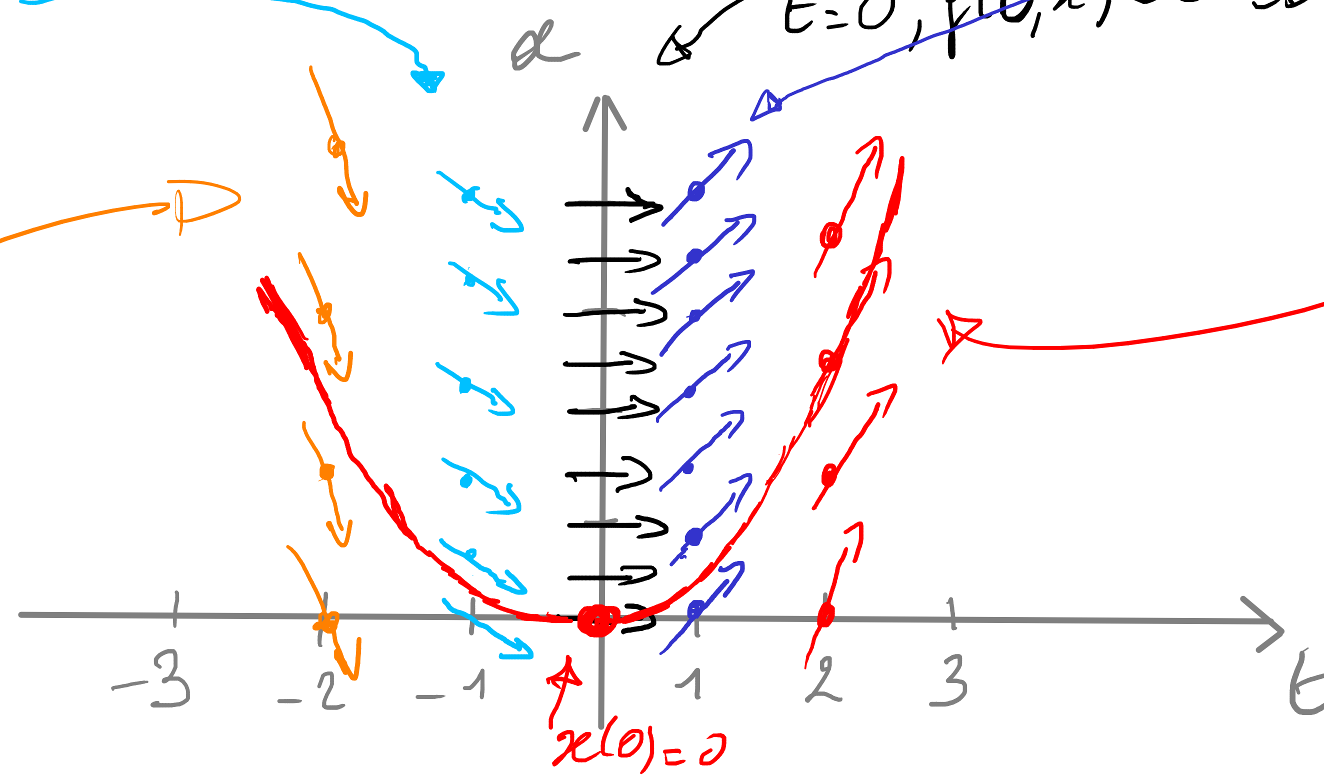
$t=1$, $f(1,x) = 1$ $\Rightarrow$ pente 1

$t=0$, $f(0,x) = 0$ $\Rightarrow$ pente nulle

$f(-1,x) = -1$ $\Rightarrow$ pente -1

pente -2

pente 2



Notons qu'avec un peu d'intuition, on vérifie par le calcul que la solution est

$$x(t) = \frac{t^2}{2}.$$

Definition 12.3 *On appelle isocline de pente* $c \in \mathbb{R}$ *l'ensemble des points du champs de directions pour lesquelles la pente vaut* c*, c'est à dire* $f(t, x) = c$*.*

Proposition 12.4 *Les solutions dont la trajectoire reste sur l'isocline zéro sont constantes (car* $x' = f(t,x) = 0$*), elles sont dites stationnaires.*

$y' = f(t) - a(t)y(t)$.

$= g(t, y(t))$ continue, linéaire en y : $g(t,y) = f(t) - a(t)y$.

$\Rightarrow$ loc lipschitzienne sur la deuxième variable.

Pour toute condition initiale, il existe une unique solution.

14 Équations différentielles du premier ordre

Considérons l'équation linéaire du premier ordre

$$y' + a(t)y(t) = f(t) \tag{E}$$

où a et f sont des fonctions *continues* sur un intervalle I. Si y_1 et y_2 sont solutions de (E), $y_1 - y_2$ est solution de l'équation *homogène*

$$y' + a(t)y(t) = 0. \tag{E_0}$$

Pour résoudre l'équation linéaire (E), il suffit de

(i) Déterminer toutes les solutions de l'équation *homogène* (E_0)

(ii) Trouver *une* solution de l'équation complète (E).

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t).$$

Stratégie de résolution:

$y_0' = -a(t)y_0(t)$

* y_0 vérifie $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ (Équation homogène).

* y_* solution particulière de $y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$.

* la solution générale est $y = y_0 + y_*$: $y_*'(t) = f(t) - a(t)y_*(t)$

On le vérifie

$$y' = y_0' + y_*'$$

$$= -a(t)y_0(t) + f(t) - a(t)y_*(t)$$

$$= -a(t)\left(y_0(t) + y_*(t)\right) + f(t)$$

$$= -a(t)\,y(t) + f(t)$$

$$y' + a(t)y(t) = f(t).$$

$y = y_0 + y_*$ est bien solution.

Exemple: $y' + \underbrace{2}_{a(t)=2}y = \underbrace{t^2 - 3t}_{f(t)=t^2-3t}$.

On cherche la solution de l'équation homogène $y'+2y=0$...

14.0.1 Résolution de l'équation homogène

Sur l'intervalle I, a, étant continue, admet des primitives. Si $t_0 \in I =]\alpha, \beta[$, le théorème de dérivation des fonctions composées montre que

constante C

$$y_0 \mapsto \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right) = \exp(-A(t) + A(t_0)) = \exp(-A(t)) \times \exp(A(t_0))$$

est solution de $y' + a(t)y(t) = 0$. Si g est une autre solution de cette équation, soit

La solution, en toute généralité, est

$$y_0(t) = C\exp(-A(t))$$

Dans notre exemple: $a(t)=2$; $A(t)=2t$ et $y_0(t)=Ce^{-2t}$

Solution homogène : $y_0(t) = C \exp(-A(t))$

14.0.2 Résolution de l'équation complète

Il suffit maintenant de trouver *une* solution de l'équation *complète* (E). Pour ce faire, on peut utiliser la méthode de variation de la constante (méthode de Lagrange). On cherche une solution de la forme

$$y(t) = C(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right).$$

$$y_*(t) = C(t) \exp(-A(t))$$

On n'a "plus qu'à" dériver $y_*(t)$ et résoudre l'équation complète pour trouver la fonction $C(t)$.

Notre exemple: $y' + 2y = t^2 - 3t$

* Solution homogène: $y_0 = C e^{-2t}$

* Solution particulière : (variat° de la constante)

$y_*(t) = C(t)\, e^{-2t}$ et on cherche $C(t)$

$$y_*'(t) = C'(t)e^{-2t} - 2\,C(t)\,e^{-2t}$$

$$= e^{-2t}\left(C'(t) - 2C(t)\right)$$

On a l'équation : $y_*' + 2y = t^2 - 3t$

$$e^{-2t}\left(C'(t) - 2C(t)\right) + 2\,C(t)\,e^{-2t} = t^2 - 3t$$

$$e^{-2t}\left(C'(t) \cancel{-2C(t)} \cancel{+2C(t)}\right) = t^2 - 3t$$

$$e^{-2t} c'(r) = t^2 - 3t$$

$$c'(r) = (t^2 - 3t) e^{2t}$$

On trouve C par intégration: $C(r) = \int (t^2 - 3t) e^{2t} dt$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Truc \& astuces -} \\ \text{Dérivons ...} \quad \left(P(x) e^{ax}\right)' = \left(P'(x) + a P(x)\right) e^{ax} \\ \text{Donc la primitive de } \left(P'(x) + a P(x)\right) e^{ax} \text{ est } P(x) e^{ax}\end{array}}$$

Dans notre cas, $P(t) e^{2t}$ est la primitive de

$$(P'(r) + 2P(r)) \cancel{e^{2r}} = (t^2 - 3t) \cancel{e^{2t}}$$

Trouvons $P(t) = at^2 + bt + c$

$$P'(t) + 2P(t) = 2at^2 + (2a + 2b)t + (b + 2c) = t^2 - 3t$$

Donc $a = 0{,}5$; $b = -2$; $c = 1$ (identification)

$$C(t) = \int (t^2 - 3t)e^{2t}\,dt = \overbrace{(0{,}5t^2 - 2t + 1)e^{2t}}^{P(t)e^{2t}}$$

$$y_*(t) = C(t)e^{-2t}$$

$$= (0{,}5t^2 - 2t + 1)e^{2t}e^{-2t} = 0{,}5t^2 - 2t + 1.$$

La solution générale de l'équation est

$$y(t) = y_0(t) + y_*(t) = \underbrace{C e^{-2t}}_{y_0(t)} + 0{,}5t^2 - 2t + 1$$

15 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'intéresse ici aux équations de la forme constantes.

$$y" + ay' + by = c(x) \qquad (F)$$

Comme dans le cas d'une équation linéaire du premier ordre, pour résoudre l'équation linéaire (F), il suffit de

(i) déterminer toutes les solutions de l'équation *homogène* (F_0); $\Rightarrow$ $y'' + ay' + by = 0$

(ii) trouver *une* solution de l'équation complète (F) grâce à une solution particulière

Solution homogène de $y'' + ay' + by = 0$

On passe par l'équation caractéristique

$x^2 + ax + b = 0$

On va la résoudre et trouver les racines :

2 racines (réelles ou complexes) $\qquad$ 1 racine double

$\alpha_1 ; \alpha_2$ $\qquad$ α

Les solutions homogènes

$y_0(x) = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$ $\qquad$ $y_0(x) = (Ax + B)e^{\alpha x}$

constantes à déterminer $\qquad$ constantes à déterminer

15.1 Résolution de l'équation complète

Pour résoudre l'équation (F) il nous suffit donc de trouver une solution de l'équation complète. Si f_1 et f_2 sont deux solutions *linéairement indépendantes* de l'équation sans second membre, toute solution de cette dernière s'écrit sous la forme $C_1 f_1 + C_2 f_2$ où C_1 et C_2 sont des constantes.

Note : il existe une méthode de variation de la constante

...

On cherche une solution de la forme $C_1(t)f_1(t)+C_2(t)f_2(t)$. en imposant la condition $C_1'(x)f_1(x)+C_2'(x)f_2(x)=0$ et tout revient alors à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_1'f_1'+C_2'f_2' & = & c(x) \\ C_1'f_1+C_2'f_2 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Elle est compliquée et très peu usitée ...

Solution particulière de $y'' + ay' + by = P(t)e^{\beta t}$

β peut être nul

En pratique, si $c(t) = P(t)e^{\beta t}$ où P est un polynôme de degré n on cherche une solution de la forme $y_*(t) = Q(t)e^{\beta t}$ avec

$d^0 P = n$.

a) $d^0 Q = n$ si β n'est pas racine de l'équation caractéristique

b) $d^0 Q = n + 1$ si β est racine simple de l'équation caractéristique

c) $d_0 Q = n + 2$ si β est racine double de l'équation caractéristique

Si le second membre $c(x)$ est une fonction trigonométrique, on essaie les $a \sin x + b \cos x$.

15.3 Exemples

(i) On voudrait résoudre l'équation suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

* Équation homogène : $y'' - 3y' + 2y = 0$

Éq. caractéristique : $x^2 - 3x + 2 = 0$

racines $\Delta = 9 - 8 = 1$.

$$\alpha_1 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$\alpha_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Solution homogène : $y_0(x) = C_1 e^{\overset{\alpha_1}{x}} + C_2 e^{\overset{\alpha_2}{2x}}$

* Solution particulière de $y''-3y'+2y=e^{x}=\underbrace{\overbrace{P(x)}^{1}}_{d^oP=0}\underbrace{e^{\beta x}}_{\beta \text{ est racine de l'équation.}}$

La solution particulière est $Q(x)e^{x}$ avec

$d^o(Q)=0+1=1$

$d^o(P)$ car β est racine simple de l'équation caractéristique.

La solution particulière est $(ax+b)e^{x}=y_*(x)$.

$$y_*'(x)=ae^{x}+(ax+b)e^{x}=(ax+a+b)e^{x}$$

$$y_*''(x)=ae^{x}+(ax+a+b)e^{x}=(ax+2a+b)e^{x}$$

On injecte dans l'équation.

$$y_*''-3y_*'+2y_*=e^{x} \iff (ax+2a+b)\cancel{e^{x}}-3(ax+a+b)\cancel{e^{x}}+2(ax+b)\cancel{e^{x}}=\cancel{e^{x}}$$

$$\iff 2a+b-3a-3b+2b=1$$

$$\iff -a=1 \iff a=-1$$

b = ce qu'on veut donc b = 0

Solution particulière : $y_*(x) = -xe^{x}$ -

Solution générale : $y(x) = y_0(x) + y_*(x)$

$= C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} - xe^{x}$

(ii) On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$y" + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}.$$