Généralités sur les Files d'attentes

Description d'une file A/T/s/N/c

A : désigne le processus d'**arrivée** dans la file. On note son **intensité** $\lambda > 0$.

T : représente les **temps de services** : v.a. positives $i.i.d.$ de moyenne $1/\mu$.

On note $\rho = \lambda/\mu$, appelé **intensité de traffic**. On utilise les lettres :

- M (Markov) pour la loi exponentielle (arrivées : processus de Poisson).
- E (Erlang) ou $E_k(\nu)$ pour la loi Gamma $\Gamma(k, \nu)$ de moyenne k/ν.
- G ou GI pour une loi (de probabilité) générale ;
- D pour le cas déterministe : intervalles de temps réguliers non aléatoires.

s : le **nombre de serveurs**, i.e. un nombre entier (étendu) $1 \leq s \leq \infty$.

N : la **capacité de la file**, i.e. un entier (étendu)$1 \leq N \leq \infty$ (par défaut $N = \infty$).

c : **Nombre maximal de clients**, i.e. un entier (étendu) $1 \leq c \leq \infty$ (par défaut $c = \infty$).

Disciplines de service les plus courantes :

- FIFO ou FCFS : premier arrivé premier servi (choix par défaut) ;
- LIFO ou LCFS : Dernier arrivé premier servi ;
- RSS : selection au hasard d'un client en attente.

Étude des files : généralités sur les trois principaux régimes

On observe le processus X_t : taille de la file d'attente au temps t, le temps (de réponse) d'attente + service des clients dans le système.

Comme il s'agit d'un processus aléatoire il apparait principalement 3 régimes :

- Un régime transitoire : comportement depuis l'origine du temps ($t = 0$) jusqu'à t donné. Question type : quelle est la probabilité que $X_t = k$ alors qu'on a commencé avec 0 clients dans la file ? Ce régime est généralement très complexe et peu utilisé en dehors de la simulation.
- Un régime asymptotique : évolution en temps long de la file. Questions types : la file est-elle stable ? ou dérive elle ? La probabilité d'avoir k clients tend-il un équilibre : $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X_t = k) = \pi(k)$?
- Un régime stationnaire : lorsque un équilibre existe. Questions types : Quelle est la taille moyenne de la file ? Quel est le temps de réponse moyen ? Probabilité de perte ? etc...

Files $M/M/1$

Les arrivées se font suivant un processus de Poisson d'intensité λ.
Les temps de service suivent la loi exponentielle de paramètre μ.
Il y a un seul serveur.
On note $X = (X_t)_{t\geq 0}$ le processus du nombre de clients dans le système (en attente + en service) au cours du temps.
On reconnait un **processus de naissances et morts** sur $E = \mathbb{N}$, de taux de naissance λ et de taux de mort μ que nous avons déjà abordé.

C'est à dire qu'on passe de n à $n+1$ clients dans le système avec une intensité λ ; et on passe de n à $n-1$ clients (si $n \geq 1$) avec intensité μ.

Un peu plus formellement on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+\delta} = n+1 | X_t = n) &\approx \lambda\delta + o(\delta) \\ \mathbb{P}(X_{t+\delta} = n-1 | X_t = n) &\approx \mu\delta + o(\delta) \end{aligned}$$

Et de plus si T est un instant de saut du processus alors pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_T = n+1 | X_{T^-} = n) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ \mathbb{P}(X_T = n-1 | X_{T^-} = n) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} \end{aligned}$$

et $\mathbb{P}(X_T = 1 | X_{T^-} = 0) = 1$.

Files $M/M/1$: Régime asymptotique

- Lorsque $\rho = (\lambda/\mu) < 1$ le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ admet un équilibre (on a pour tout n : $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(X_t = n) = \pi(n)$) où π est l'**unique mesure invariante de probabilité** sur $\mathbb{N}$ donnée par
$$\pi(n) = (1-\rho)\rho^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N};$$
c'est une loi Géométrique translatée : c.à.d. qu'elle a même loi que $Y - 1$ où Y est une v.a. de loi $\mathcal{G}(1-\rho)$. Sa moyenne est donc
$$\mathbb{E}(Y-1) = \mathbb{E}(Y) - 1 = \frac{1}{1-\rho} - 1 = \frac{\rho}{1-\rho}$$
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{P}(X_t = n) = \pi(n) = (1-\rho)\rho^n$.
- Lorsque $\rho = 1$ il n'y a pas d'équilibre : il y a de possible grandes fluctuations du nombre de clients dans le système.

- Lorsque $\rho > 1$ le processus dérive vers $+\infty$ et il n'y a pas de d'équilibre.
- Dans les deux derniers cas $\rho \geq 1$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{P}(X_t = n) = 0$.

Files $M/M/1$: Régime stationnaire

Rappel notation On suppose $\rho < 1$ c.à.d. $\mu > \lambda$. On note
L la v.a. nombre de clients dans le système à l'équilibre ;
L^q la v.a. nombre de clients en attente (hors service) à l'équilibre ;
W la v.a. durée de séjour (attente+service) d'un client dans le système à l'équilibre ;
W^q la v.a. temps d'attente (avant service) d'un client dans le système à l'équilibre.
De par ce qui précède la mesure invariante est donnée par $\pi(n) = (1-\rho)\rho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on en déduit que

$$\mathbb{E}(L) = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Par les **Formules de Little** on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W) &= \frac{\mathbb{E}(L)}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}; \\
\mathbb{E}(W^q) &= \mathbb{E}(W) - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu-\lambda}; \\
\mathbb{E}(L^q) &= \lambda\mathbb{E}(W^q) = \mathbb{E}(L) - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho};
\end{aligned}$$

On peut montrer que W suit une loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda$.

Files $M/M/s$, $s \geq 2$

Les arrivées se font suivant un processus de Poisson d'intensité λ.
Les temps de service suivent la loi exponentielle de paramètre μ.
Il y a s **serveurs** : c'est à dire que tout client entrant alors qu'il y a au moins un serveur inactif passe immédiatement en service.
C'est de nouveau un processus de Naissance et Mort, de taux de naissance λ et de taux de mort $\mu_n = n\mu$ pour $n \leq s$ et $\mu_n = s\mu$ pour $n \geq s$.

- On pose $\varrho = \dfrac{\lambda}{s\mu} = \dfrac{\rho}{s}$ appelé **intensité de traffic global**.
- On appelle $s\mu$ le **taux de service global** de la file $M/M/s$.

File $M/M/s$, $s \geq 2$: Régime stationnaire

Lorsque $\varrho = \lambda/(s\mu) = \rho/s < 1$ le processus admet un équilibre. Et sa mesure invariante est :

$$\pi(n) = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!}\,\pi(0) & \text{si } n \leq s \\[2ex] \dfrac{\rho^s}{s!}\,\varrho^{n-s}\,\pi(0) = \varrho^{n-s}\,\pi(s) & \text{si } n > s \end{cases} \quad \text{où } \pi(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!}\frac{\varrho}{1-\varrho}}.$$

Cas particulier :

pour $s = 1$ c'est la file M/M/1 déjà étudiée

pour $s = +\infty$ c'est la loi de Poisson de paramètre ρ, et on a $\pi(n) = \frac{\rho^n}{n!}e^{-\rho}$.

À retenir : l'ajout de serveurs supplémentaires favorise les conditions pour avoir un équilibre.

Probabilité d'attente :

La probabilité qu'un client, entrant dans le système, doive attendre avant d'entrer en service est donnée par

$$\mathbb{P}(L \geq s) = \pi(s) \sum_{n=s}^{\infty} \varrho^{n-s} = \frac{\pi(s)}{1-\varrho} = \frac{1}{1-\varrho}\frac{\rho^s}{s!}\pi(0)$$

Files $M/M/s$, $s \geq 2$: Régime stationnaire

Rappel On suppose $\varrho < 1$ c.à.d. $s\mu > \lambda$. On note
L la v.a. nombre de clients dans le système à l'équilibre ;
L^q la v.a. nombre de clients en attente (hors service) à l'équilibre ;
W la v.a. durée de séjour (attente+service) d'un client dans le système à l'équilibre ;
W^q la v.a. temps d'attente (avant service) d'un client dans le système à l'équilibre.

On peut calculer

$$\mathbb{E}(L^q) = \frac{\varrho}{(1-\varrho)^2}\pi(s) = \frac{\rho^s}{s!}\frac{\varrho}{(1-\varrho)^2}\pi(0).$$

Les **Formules de Little** donnent ici

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L) &= \mathbb{E}(L^q) + \rho = \frac{\rho^s}{s!}\frac{\varrho}{(1-\varrho)^2}\pi(0) + \rho; \\
\mathbb{E}(W^q) &= \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(L^q) = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho^s}{s!}\frac{\varrho}{(1-\varrho)^2}\pi(0); \\
\mathbb{E}(W) &= \mathbb{E}(W^q) + \frac{1}{\mu};
\end{aligned}$$

Pour $s = +\infty$ on a bien entendu $\mathbb{E}(L) = \rho$, $\mathbb{E}(L^q) = 0$, $\mathbb{E}(W) = \frac{1}{\mu}$ et $\mathbb{E}(W^q) = 0$.

File $M/M/s/N$, $N \geq s \geq 1$: régime stationnaire

Même modèle que précédemment sauf que l'on n'autorise qu'un nombre maximum N de clients dans le système : $E = \{0, 1, ..., N\}$. Lorsqu'un client arrive alors que le système est plein, il est rejeté. C'est donc un système avec perte. Cependant indépendamment du choix de λ et μ on a toujours une unique mesure invariante de probabilité

$$\pi(k) = \begin{cases} \dfrac{\rho^k}{k!}\,\pi(0) & \text{si } 0 \leq k \leq s \\ \\ \dfrac{\rho^s}{s!}\varrho^{k-s}\pi(0) & \text{si } N \geq k > s \end{cases}$$

avec $\pi(0)$ constante de normalisation afin d'avoir $\sum_{k=0}^{N} \pi(k) = 1$.
Probabilité de perte de clients : $\mathbb{P}(L = N) = \pi(N)$.

Taux d'entrée effectif dans le système : $\lambda_e = \lambda(1 - \pi(N))$. Les formules de Little doivent être corrigées en remplaçant λ par λ_e et ρ par $\rho_e = \lambda_e/\mu$.

Files $M/G/1$

Les arrivées se font selon un processus de Poisson indépendant des temps de service.
On suppose les temps de service indépendants, de loi G (de densité g), de moyenne $1/\mu = \int_0^{+\infty} tg(t)\ dt$ et de variance $\sigma^2 = \int_0^{+\infty} (t - 1/\mu)^2 g(t)\ dt$.
La loi G n'est plus sans mémoire (i.e. plus exponentielle) donc le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ n'est plus Markovien.
Cependant on a toujours un équilibre si $\rho < 1$. Et dans ce cas on a le résultat suivant

Théorème (Pollaczek-Khintchine)
Pour la file $M/G/1$ le nombre moyen de clients à l'équilibre est

$$\mathbb{E}(L) = \rho + \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{\lambda^2\sigma^2 - \rho^2}{2(1-\rho)}.$$

et le temps moyen de séjour à l'équilibre

$$\mathbb{E}(W) = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda} + \frac{\lambda^2\sigma^2 - \rho^2}{2\lambda(1-\rho)}.$$