

Idée du chapitre

Exo 2.1[†] Soit V un vocabulaire fini. Soient $A, B \subseteq V^*$. Quel est le plus petit ensemble $X \subseteq V^*$ tel que $X = A.X \cup B$?

\Rightarrow On étudie les conditions gales sur f pour définir langage L comme

“plus petit ensemble X qui vérifie $X = f(X)$ ”

- ▶ généraliser le lemme d'Arden et langages réguliers.
- ▶ une notion de “*définition récursive d'ensemble*”.
- ▶ sous certaines conditions, $L = \text{limite}$ de suite infinie $\emptyset, f(\emptyset), f(f(\emptyset)), \dots, f^i(\emptyset), \dots$
 - ▶ permet de démontrer des propriétés par récurrence sur i .
 - ▶ limite éventuellement calculable.

1/20

Relation d'inclusion entre ensembles

Exo 2.3 Soit E un ensemble. Soient $X, Y \subseteq E$ quelconques.

- ▶ Montrer que \subseteq est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.
- ▶ Est-elle totale ? (a-t-on $X \subseteq Y$ ou $Y \subseteq X$?)
- ▶ Sur un ordre (partiel) \leq , on définit la notion de *borne sup* :
 $\text{sup}(A, B)$ est le plus petit X tq $A \leq X$ et $B \leq X$.
 À quoi cela correspond sur un ordre total ? Et, sur \subseteq ?
 (Attention, dans cas général, borne sup pas toujours définie).
- ▶ idem pour *borne inf*.

NB : ordre avec bornes inf/sup = *treillis* (anglais : *lattice*).

3/20

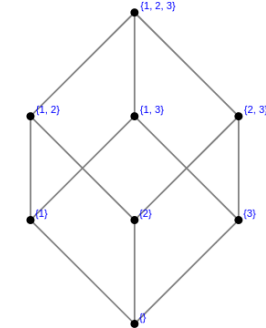
Ensemble des parties d'un ensemble

Notation on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

Par définition : $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subseteq E$
 $\Leftrightarrow \forall x \in A, x \in E$

Déf. Si E fini, le *diagramme de Hasse* de $\mathcal{P}(E)$ est le graphe ayant $\mathcal{P}(E)$ pour ensemble de sommets et dont l'ensemble des arêtes (orientées de bas en haut) relient tous les X et Y vérifiant “ Y minimal tel que $X \subsetneq Y$ ”.

Diagramme de $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$:



Exo 2.2[†] Dessiner le diagramme de Hasse de $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$.

2/20

Chapitre 2 Langages algébriques et BNF (définitions)

2.1 Définitions d'ensembles comme plus petit point fixe

2.2 Introduction aux langages algébriques et aux BNF

Introduction à la notion de +petit point fixe

Defs Soit E un ensemble et f application de $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

Un point fixe de f est un $X \subseteq E$ tq $X = f(X)$.

Un plus petit point fixe est un point fixe X tq tout point fixe Y vérifie aussi $X \subseteq Y$ (i.e. *unique point fixe minimal*).

Exo 2.4 Soit $\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$. Pour chacune des équations suivantes, y a-t-il point-fixe unique ? quel est le +petit ?

► $X = \{a, \varepsilon\}.X \cup \{b, \varepsilon\}$

...

► $X = \{a\}.X.\{b\} \cup \{\varepsilon\}$

...

► $X = \{a\}.X.\{b, \varepsilon\} \cup X \cup \{a\}$

...

Exo 2.5 M question avec $X \subseteq \mathbb{N}$ pour $X = \{u + 2 \mid u \in X\} \cup \{0\}$

...

Théorème du point fixe de Knaster-Tarski (1928)

Énoncé Si f application *croissante* de $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$, alors f admet un +petit point fixe : $\bigcap \{X \in \mathcal{P}(E) \mid f(X) \subseteq X\}$.

Catalogue de fonctions croissantes

- pour A fixé, fonctions $X \mapsto X \cup A$ et $X \mapsto X \cap A$ croissantes.
- sur \mathcal{V}^* , $X \mapsto X.A$ et $X \mapsto A.X$ et $X \mapsto X^*$ croissantes.
- composée de fonctions croissantes est croissante.

Exemple : caractère croissant des membres droits de l'exo 2.4, en décomposant la vérification à l'aide des "briques" ci-dessus.

Avec ce thm, +petit point fixe "connu" mais pas "calculable".

Idee : f croissante, donc $\emptyset \subseteq f(\emptyset) \subseteq f(f(\emptyset)) \subseteq \dots$

La suite des $(f^i(\emptyset))_{i \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Et, s'il existe i tq $f^i(\emptyset) = f^{i+1}(\emptyset)$, alors point fixe atteint !

Inexistence ou non-unicité des points fixes minimaux

Soit E ensemble avec au moins deux éléments a et b distincts.

Exo 2.6 Quels sont les ensembles $X \subseteq E$ tq $X = E \setminus X$?

...

Exo 2.7 Quels sont les ensembles minimaux $X \subseteq E$ tq

$$X = \begin{cases} \{b\} & \text{si } b \in X \\ \{a\} & \text{sinon} \end{cases}$$

...

Solution pour éliminer ces contre-exemples

Garantir que "agrandir" le membre gauche de l'équation implique "agrandir" le membre droit de l'équation.

donc, se restreindre aux équations " $X = f(X)$ " avec f croissante, c-à-d. $X \subseteq Y \Rightarrow f(X) \subseteq f(Y)$.

Vers le calcul des +petits points fixes

Exo 2.8[†] Soit $f : X \mapsto \{a\}.X.\{b\} \cup \{\varepsilon\}$ (pour $X \subseteq \{a, b\}^*$).

Que vaut $f^i(\emptyset)$ pour $i \in \mathbb{N}$? ...

Que vaut $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^i(\emptyset)$? ...

Notation Pour $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ suite sur $\mathcal{P}(E)$, $\lim_{i \rightarrow +\infty} A_i \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

Exo 2.9 Soit f application *croissante* de $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

Montrer que :

1. pour tout i , $f^i(\emptyset) \subseteq f^{i+1}(\emptyset)$.
En déduire, $\bigcup_{i \in [0, n]} f^i(\emptyset) = f^n(\emptyset)$.
2. tout point fixe de f contient $\lim_{i \rightarrow +\infty} f^i(\emptyset)$.
3. pour tout i , si $f^i(\emptyset)$ pas point-fixe, alors son cardinal $\geq i$.
4. si E est fini de cardinal n , alors $\lim_{i \rightarrow +\infty} f^i(\emptyset) = f^n(\emptyset)$ est un point fixe de f !

Quand $\lim_{i \rightarrow +\infty} f^i(\emptyset)$ n'est pas un point fixe...

On se place sur $E \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}^*$. On pose

$$f(X) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \{a\}.X \cup \{\epsilon\} & \text{si } X \text{ partie finie de } \{a\}^* \\ \{a\}^* \cup \{b\} & \text{sinon} \end{cases}$$

On a les propriétés suivantes (aisément vérifiables) :

- ▶ f croissante
- ▶ pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f^i(\emptyset) = \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } n < i\}$
- ▶ $\lim_{i \rightarrow +\infty} f^i(\emptyset) = \{a\}^*$
- ▶ $f(\lim_{i \rightarrow +\infty} f^i(\emptyset)) = \{a\}^* \cup \{b\}$
 \Rightarrow c'est lui le +petit point fixe !

Pb de “discontinuité” en l'infini !

Application aux langages du TP

Soit $\mathbb{N}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et soit $V \stackrel{\text{def}}{=} \{-, \&, |, >, \mathfrak{t}, \mathfrak{f}\} \cup \mathbb{N}_1$.

Exo 2.11[†] Définir par plus petit point fixe, l'ensemble des mots de V^* qui correspondent à la notation *préfixe* d'une formule propositionnelle (cf. syntaxe du TP).

On doit trouver un f tq le langage recherché est $\lim_{h \rightarrow +\infty} f^h(\emptyset)$.

Exo 2.12 Calculer $f(\emptyset)$ et $f^2(\emptyset)$. Exprimer “ $f^h(\emptyset)$ ” en fonction de la structure d'AST du TP.

Exo 2.13[†] Définir par plus petit point fixe, l'ensemble des mots de $(V \cup \{(\,, \,)\})^*$ qui correspondent à la notation *infixe* d'une formule propositionnelle (cf. syntaxe du TP).

Continuité (de Scott) & Point fixe de Kleene

Def Soient E_1, E_2 ensembles et f application de $\mathcal{P}(E_1) \rightarrow \mathcal{P}(E_2)$, f est *continue* (au sens de Scott)
 ssi pour toute suite de $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}(E_1)$ tq $\forall i, A_i \subseteq A_{i+1}$,
 on a $f(\lim_{i \rightarrow +\infty} A_i) = \lim_{i \rightarrow +\infty} f(A_i)$.

Exo 2.10 Montrer que :

- ▶ Une fonction continue est croissante.
- ▶ Toutes fonctions croissantes en exemple sur la diapo du thm “Knaster-Tarski” sont en fait continues.
- ▶ La composée de 2 fonctions continues est continue.

Thm de Kleene (1938) Si f application *continue* de $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$, alors le +petit point fixe est $\lim_{i \rightarrow +\infty} f^i(\emptyset)$.

Une technique centrale pour calculer image d'un pt fixe !

Lemme de commutation Pour $k \in \{1, 2\}$, soient f_k applications *continues* de $\mathcal{P}(E_k) \rightarrow \mathcal{P}(E_k)$, et g application de $\mathcal{P}(E_1) \rightarrow \mathcal{P}(E_2)$ telle que $g \circ f_1 = f_2 \circ g$,
 si f_2 a un *unique* point-fixe **ou** si g *continue* et $g(\emptyset) = \emptyset$, alors

$$g(\lim_{i \rightarrow +\infty} f_1^i(\emptyset)) = \lim_{i \rightarrow +\infty} f_2^i(\emptyset)$$

Soient $A, B \subseteq V^*$ et $E_1 \stackrel{\text{def}}{=} V^*$

Exo 2.14[†] Pour $f_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} A.X.B \cup B^*$ et $g(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\epsilon\} \setminus X$.
 montrer $g(\lim_{i \rightarrow +\infty} f_1^i(\emptyset)) = \emptyset$.

Exo 2.15[†] Soient $f_1(X) \stackrel{\text{def}}{=} A.X \cup \{\epsilon\}$ et $f_2(Y) \stackrel{\text{def}}{=} A.Y \cup B$
 Par définition $A^* = \lim_{i \rightarrow +\infty} f_1^i(\emptyset)$.

En appliquant le lemme de commutation, redémontrer
 $A^*.B = \lim_{i \rightarrow +\infty} f_2^i(\emptyset)$ (**lemme d'Arden**).

Applications typiques du lemme de commutation (cf. chap. 5)

Pour f_1 et g fixés avec E_1 infini et E_2 de cardinal fini n .

Pour calculer $g(\lim_{i \rightarrow +\infty} f_1^i(\emptyset))$ **sans calculer** $\lim_{i \rightarrow +\infty} f_1^i(\emptyset)$

1. On trouve f_2 en exprimant $g(f_1(X))$ à partir de $g(X)$ sous la forme $g(f_1(X)) = f_2(g(X))$.
2. On se ramène au calcul de $\lim_{i \rightarrow +\infty} f_2^i(\emptyset) = f_2^n(\emptyset)$.

NB un tel f_2 n'existe pas forcément !
Auquel cas, méthode inapplicable.

Chapitre 2 Langages algébriques et BNF (définitions)

2.1 Définitions d'ensembles comme plus petit point fixe

2.2 Introduction aux langages algébriques et aux BNF

Généralisation/application aux systèmes d'équations

Idee : système d'équations codée comme une unique équation.

Soit un *système d'équations* donné par fonction

$$f : \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n) \rightarrow \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n)$$

Comme $\mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n) \simeq \mathcal{P}(\{1\} \times E_1 \cup \dots \cup \{n\} \times E_n)$
on peut appliquer la théorie des +-petits points fixes à f

Pour (X_1, \dots, X_n) et (Y_1, \dots, Y_n) de $\mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n)$
on a " $(X_1, \dots, X_n) \subseteq (Y_1, \dots, Y_n)$ " ssi pr tt i , $X_i \subseteq Y_i$
et " $(X_1, \dots, X_n) \cup (Y_1, \dots, Y_n) = (X_1 \cup Y_1, \dots, X_n \cup Y_n)$ "

Exo 2.16[†] Soit le système suivant sur $\{a, b\}^* \times \{a, b\}^*$,

$$X_1 = \{b\} \cup X_2.X_2 \quad X_2 = \{a\}.X_1$$

Calculer $f^4(\emptyset, \emptyset)$.

Système d'équations algébriques sur V^*

Def Soit V ensemble dénombrable. Un *système d'équations algébriques sur V^** est un ensemble d'équations (avec $(X_k)_{k \in [1, n]}$ suite de variables 2 à 2 distinctes)

$$X_1 = f_1(X_1, \dots, X_n)$$

$$\dots$$

$$X_n = f_n(X_1, \dots, X_n)$$

où chaque $f_k(X_1, \dots, X_n)$ est une *expression* constituée uniquement à partir des variables X_k et des "opérateurs" ensemblistes :

- ▶ $\{\epsilon\}$
- ▶ A , pour tout $A \subseteq V$ fixé (indépendant des X_k)
- ▶ union \cup
- ▶ concénation $.$

Thm Soit

$$f \stackrel{\text{def}}{=} (X_1, \dots, X_n) \mapsto (f_1(X_1, \dots, X_n), \dots, f_n(X_1, \dots, X_n)).$$

On a f continue (avec $\lim_{i \rightarrow +\infty} f^i(\vec{\emptyset})$ comme +petit point fixe).

Langages algébriques

Définition Un langage L_1 est *algébrique* sur V^* ssi il existe $(L_k)_{k \in 2..n}$ tel que (L_1, \dots, L_n) est +petit point-fixe d'un système d'équations algébriques sur V^* .

Exo 2.17[†] Montrer que les langages définis dans le TP (Prop, Nnf en notations préfixes ou infixes) sont algébriques.

Mini-exemples de langages algébriques non-réguliers

Exo 2.18[†] Pour $V \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, c\}$, donner une BNF pour chacun des langages suivants.

1. $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. $\{a^n b^p \mid n \geq p \geq 0\}$
3. $\{a^n b^p \mid n \neq p\}$
4. $\{a^n b^p \mid 2p \geq n \geq p\}$
5. $\{a^n b^p c^q \mid n + p = q\}$
6. $\{w \in \{a, b\}^* \mid w = \bar{w}\}$ où \bar{w} est le renversé de w .

Exemple de renversé : $a a b a = a b a a$.

NB : un mot égal à son renversé s'appelle un *palindrome*.

Exemples de palindromes : " $a b a$ " et " $a b b a$ ".

Les BNF "Backus-Naur Form" (années 1960)

BNF=notation pour définir des langages algébriques (inventée pour syntaxe du 1er langage de prog structurée ALGOL).

Par ex, sur l'alphabet $V \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, -, (,)\}$, la BNF

$$\begin{aligned} E &::= L \mid E - E \mid (E) \\ L &::= 0 \mid 1 \mid L L \end{aligned}$$

définit E comme langage algébrique associé au système

$$\begin{aligned} E &= L \cup E.\{-\}.E \cup \{(.\}.E.\} \\ L &= \{0\} \cup \{1\} \cup L.L \end{aligned}$$

Terminologie

- Les éléments de V s'appellent aussi "*symboles terminaux*".
- Les "variables" s'appellent aussi "*symboles non-terminaux*".
- Membre gauche de la 1ère équation s'appelle aussi "*axiome*".
- Membre droit d'une équation = union "*d'alternatives*".

Autres exos sur les BNF

Exo 2.19[†] Donner une BNF sur $\{0, 1\}$ qui définit le langage des mots ayant un nombre pair de 0 et un nombre impair de 1.

Exo 2.20[†] Montrer que tout langage régulier peut être défini par une BNF. Réciproquement, à quelles conditions (suffisantes), une BNF définit-elle un langage régulier ?

Exo 2.21 Définir la syntaxe des BNF comme un langage algébrique sur un alphabet formés de deux sous-ensembles disjoints : V (pour les symboles) et $\{::=, |, \backslash n\}$. On autorisera l'alternative vide pour représenter ϵ . Par convention, les non-terminaux sont les symboles qui apparaissent en tant que membre gauche d'une équation.