Déterminisation des Automates à Etats Finis Non-Déterministes (AEFND)

MIASHS L2

(d'après le cours de Julie Dugdale)

Jérôme GENSEL – Jerome.Gensel@univ-grenoble-alpes.fr
Prof. Université Grenoble Alpes
UFR SHS – Laboratoire d'Informatique de Grenoble

Sommaire

1. Revue des différences entre AEFD & AEFND
2. Equivalence entre AEFD et AEFND
3. Construire un AEFD à partir d'un AEFND
   1. Déterminisation
   2. ε-fermeture
4. L'algorithme de construction de sous-ensembles
5. Minimisation des AEFD

Revue des différences entre AEFD et AEFND

- Une caractéristique d'un automate fini **déterministe** est que pour un état donné et un symbole en entrée, il y a seulement un seul état suivant possible

- Cette condition est imposée par le fait que, dans la définition, la transition associée doit être une **fonction**

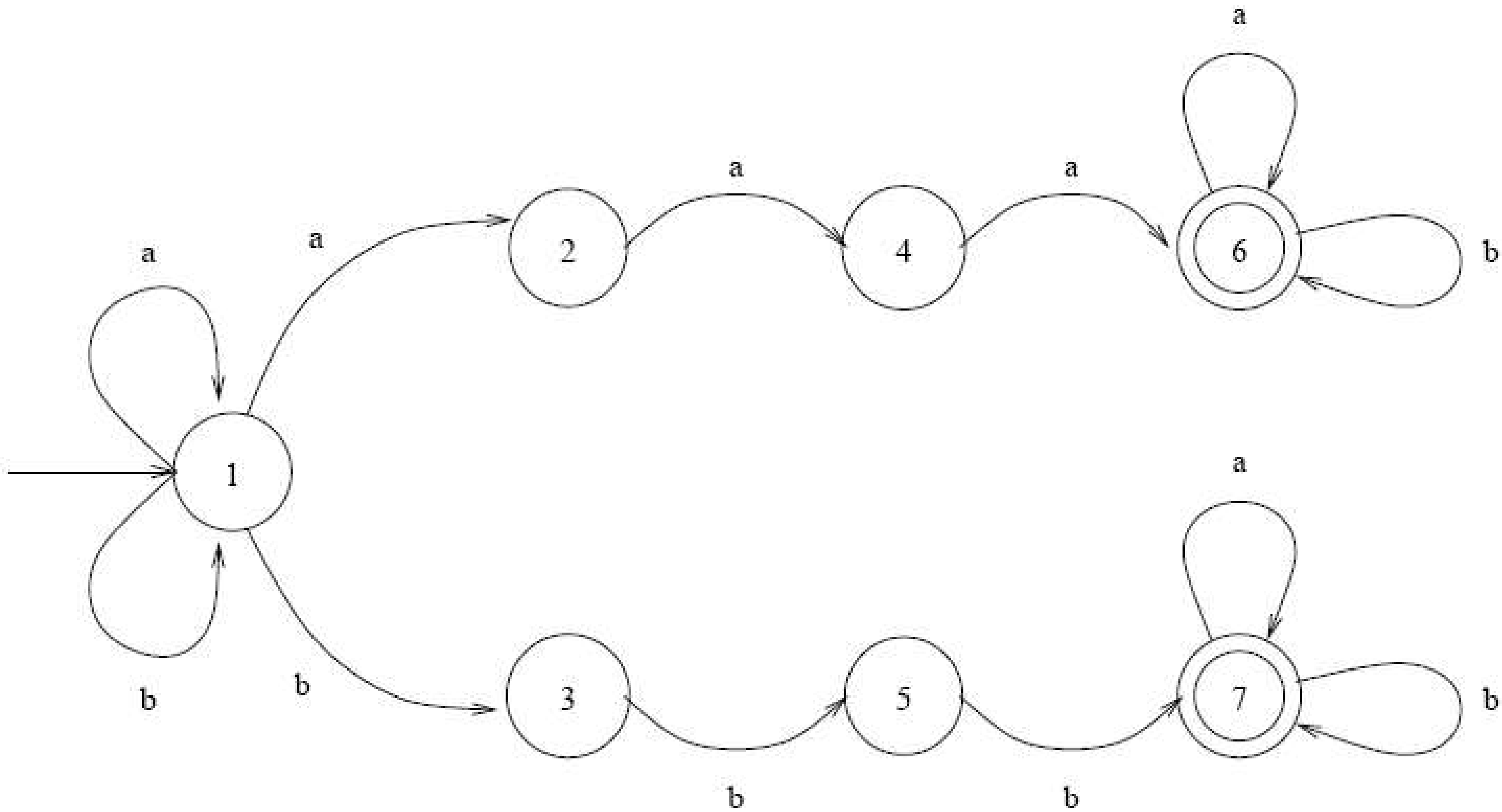
- Dans les diagrammes de transitions pour les automates déterministes, cette condition est reflétée par l'absence d'arcs multiples partant d'un même état et étiquetés par le même symbole

Revue des différences entre AEFD et AEFND

- Si on relâche la contrainte qui dit que l'automate doit avoir un unique état suivant pour chaque combinaison d'état actuel et de symbole d'entrée, alors on obtient un AEFND

- Dans les diagrammes de transitions, cela signifie qu'il peut y avoir plusieurs arcs **avec le même symbole** partant d'un même état

Par exemple



Remarques

- Un AEFND accepte une chaîne (un mot) s'il est **possible** que la machine arrive dans un état accepté.
- Toute tentative de traduire directement un AEFND par un programme sur un ordinateur série demande d'implémenter un mécanisme de **backtracking (retour en arrière)**
- C'est-à-dire, face à un choix de quel arc étiqueté par le symbole courant suivre, on peut être confronté à un choix multiple (**indéterminisme**). Dans ce cas, on choisit un des arcs étiquetés par le symbole courant mais en se souvenant de ce choix
- Pourquoi ? Parce que si le chemin choisi mène à un échec dans la reconnaissance du mot, alors on revient en arrière (backtrack) et on retourne au point de choix pour essayer alors un autre choix

Remarques

- En fait, le *backtracking* pourrait être évité par pseudo-parallélisme :
  - suivre chaque chemin possible dans le diagramme de transitions en parallèle

- Si au moins un chemin mène à un état accepté à la fin de la lecture de la chaîne (mot) d'entrée, alors la chaîne est acceptée

Remarques

- On perçoit bien qu'un AEFND permet de représenter des procédures complexes de reconnaissance de chaîne avec **moins d'états** que ce qu'un AEFD nécessiterait…

Remarques

- Question fondamentale :
  - Est-ce que les AEFND sont plus puissants que les AEFD ?
- Autrement dit :
  - Y-a-t-il des langages que les AEFND acceptent (reconnaissent) mais que les AEFD n'acceptent pas ?

Equivalence entre AEFD et AEFND

- Malgré le non-déterminisme, les AEFND ne sont pas plus puissants que les AEFD :
  - Ils acceptent la même classe de langages : **les langages réguliers**
- Pour chaque AEFND, il y a un AEFD qui accepte le même langage
- L'AEFD correspondant possède, en général, un nombre supérieur d'états, dans lesquels il modélise les ensembles d'états possibles que le AEFND peut prendre dans un cheminement donné

Equivalence entre AEFD et AEFND

- Il existe un algorithme (par construction de sous-ensembles) qui permet de convertir un AEFND en un AEFD équivalent
- *Considérations d'efficacité:* un AEFND est plus efficace et compact si :

1. C'est un AEFD (efficacité)
   ➔ Processus de *déterminisation* des AEFND
2. Il est minimal (encodage compact)
   ➔ Processus de *minimisation* des AEFD

Construire un AEFD à partir d'un AEFND (Construction de sous-ensembles)

1. Déterminisation

Idée

1. Nous **rassemblons** les états de AEFND de départ en fonction des symboles d'entrée :

➔ Si nous avons des transitions multiples sur un même symbole, alors nous pouvons considérer une transition comme passant d'un état vers un ensemble d'états.

Cet ensemble d'états c'est l'union de tous les états atteignables par une transition sur le symbole courant.

➔ Tous ces états sont combinés en **un seul état** dans AEFD correspondant que l'on cherche à construire

Exemple 1

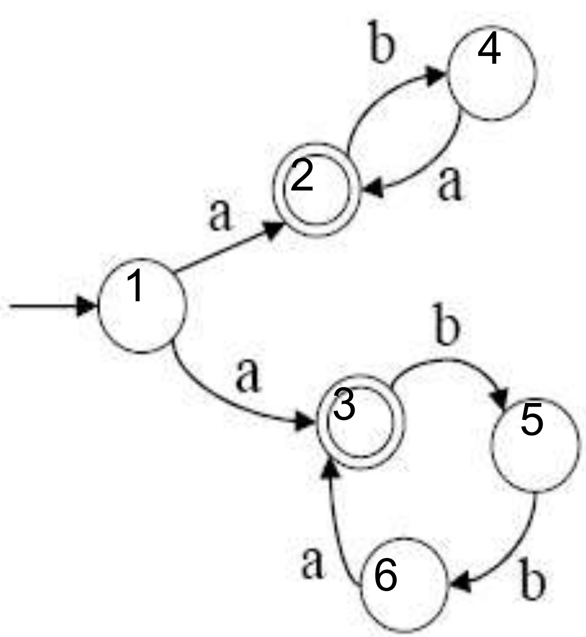
Déterminisation par construction de sous-ensembles – Exemple 1

$A = \{\Sigma, Q, q_0, F, \delta\}$

(A est l'AEFND)

$A' = \{\Sigma, Q', q'_0, F', \delta'\}$

(A' est l'AEFD)



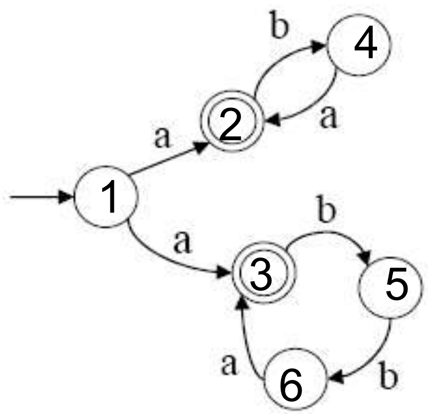
Calculer δ' à partir de δ pour tous les sous-ensembles P de Q et $s \in \Sigma$ tels que :

$\delta'(P,s) = \{q' \mid \exists\, q \in P,$ t.q. $(q, s, q') \in \delta\}$

Déterminisation par construction de sous-ensembles – Exemple 1

- Etat de départ de A' (AEFD) = état de départ de A (AEFND) = 1
- $\delta(1,a) = \{2\}$ ou $\{3\} = \{2,3\}$ donc $\delta'(1,a) = \{2,3\}$: un état de A'
- $\delta\,(1,b) = \varnothing$ donc $\delta'(1,b) = \varnothing$

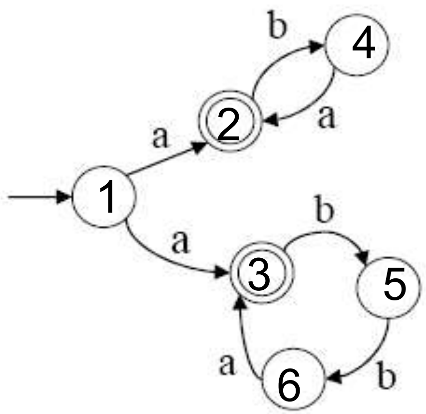
➔ On a créé le nouvel état {2,3} pour A' (nouveau et final)



Déterminisation par construction de sous-ensembles – Exemple 1

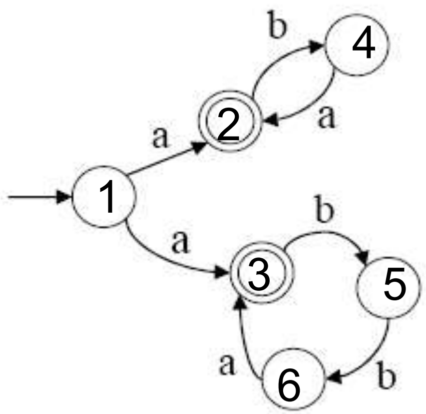
- $\delta'(\{2,3\},a) = \delta(2,a) \cup \delta(3,a) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
- $\delta'(\{2,3\},b) = \delta(2,b) \cup \delta(3,b) = \{4\} \cup \{5\} = \{4,5\}$

➔ On a créé le nouvel état {4,5} pour A' (nouveau)



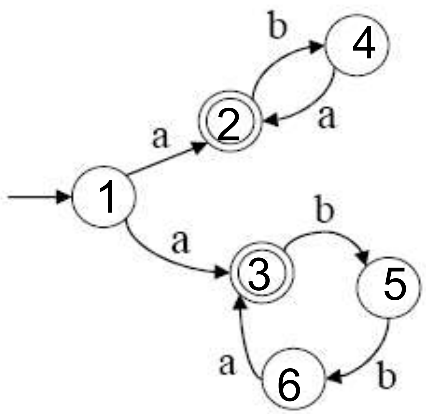
Déterminisation par construction de sous-ensembles – Exemple 1

- $\delta'(\{4,5\},a) = \delta(4,a) \cup \delta(5,a)$
  $= \{2\} \cup \varnothing = \{2\}$ (état existant)
- $\delta'(\{4,5\},b) = \delta(4,b) \cup \delta(5,b)$
  $= \varnothing \cup \{6\} = \{6\}$ (état existant)
- $\delta'(\{2\},a) = \delta(2,a) = \varnothing$
- $\delta'(\{2\},b) = \delta(2,b) = \{4\}$ (état existant)



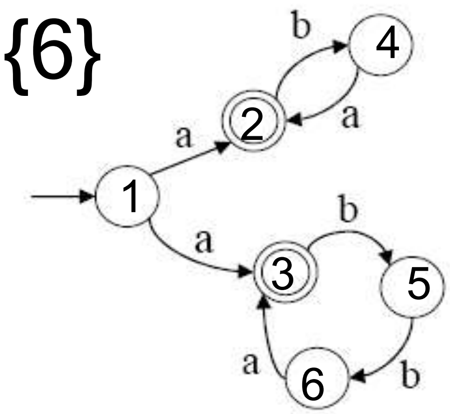
Déterminisation par construction de sous-ensembles – Exemple 1

- $\delta'(\{6\},a) = \delta(6,a) = \{3\}$
- $\delta'(\{6\},b) = \delta(6,b) = \varnothing$
- $\delta'(\{4\},a) = \delta(4,a) = \{2\}$
- $\delta'(\{4\},b) = \delta(4,b) = \varnothing$
- $\delta'(\{3\},a) = \delta(3,a) = \varnothing$
- $\delta'(\{3\},b) = \delta(3,b) = \{5\}$
- $\delta'(\{5\},a) = \delta(5,a) = \varnothing$
- $\delta'(\{5\},b) = \delta(5,b) = \{6\}$



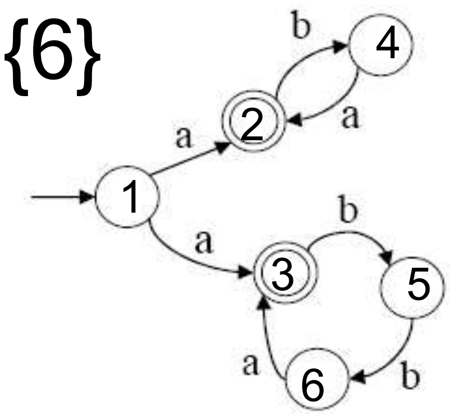
Déterminisation par construction de sous-ensembles – Exemple 1

- $A = \{\Sigma, Q, q_0, F, \delta\}$ (AEFND)
- $A' = \{\Sigma, Q', q'_0, F', \delta'\}$ (AEFD)
- $q'_0 = 1$
- $\delta'(1,a) = \{2,3\}$
- $\delta'(1,b) = \varnothing$
- $\delta'(\{2,3\},a) = \varnothing$
- $\delta'(\{2,3\},b) = \{4,5\}$
- $\delta'(\{4,5\},a) = \{2\}$
- $\delta'(\{4,5\},b) = \{6\}$
- $\delta'(\{2\},a) = \varnothing$
- $\delta'(\{2\},b) = \{4\}$
- $\delta'(\{6\},a) = \{3\}$
- $\delta'(\{6\},b) = \varnothing$
- $\delta'(\{4\},a) = \{2\}$
- $\delta'(\{4\},b) = \varnothing$
- $\delta'(\{3\},a) = \varnothing$
- $\delta'(\{3\},b) = \{5\}$
- $\delta'(\{5\},a) = \varnothing$
- $\delta'(\{5\},b) = \{6\}$



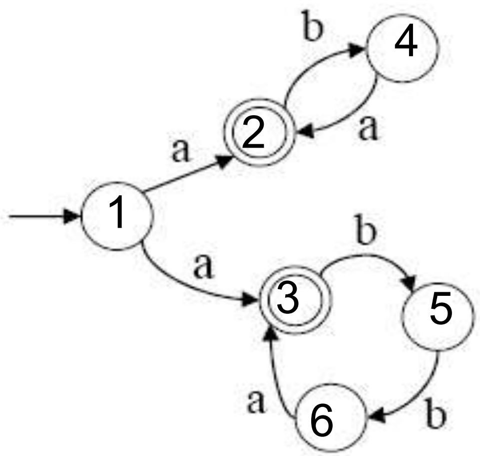
Déterminisation par construction de sous-ensembles – Exemple 1

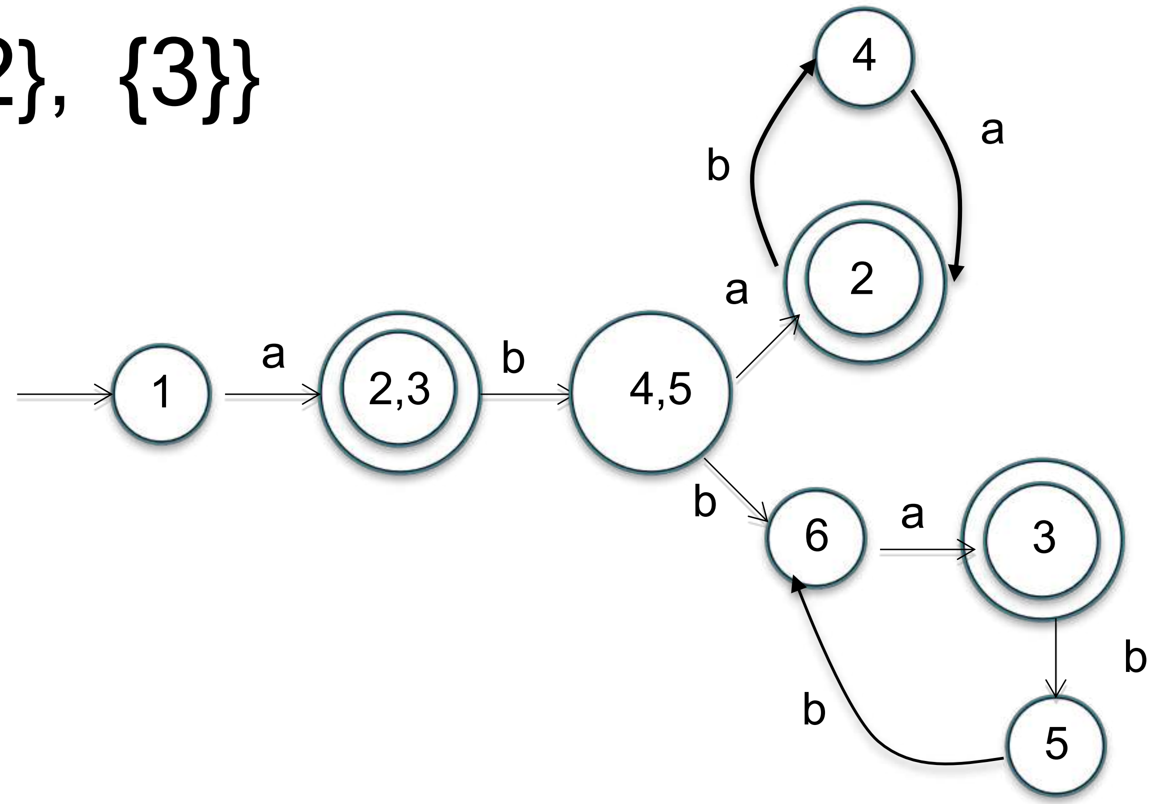
- $A = \{\Sigma, Q, q_0, F, \delta\}$ (AEFND)
- $A' = \{\Sigma, Q', q'_0, F', \delta'\}$ (AEFD)
- $q'_0 = I$
- $\delta'(I,a) = \{2,3\}$
- $\delta'(I,b) = \varnothing$
- $\delta'(\{2,3\},a) = \varnothing$
- $\delta'(\{2,3\},b) = \{4,5\}$
- $\delta'(\{4,5\},a) = \{2\}$
- $\delta'(\{4,5\},b) = \{6\}$
- $\delta'(\{2\},a) = \varnothing$
- $\delta'(\{2\},b) = \{4\}$
- $\delta'(\{6\},a) = \{3\}$
- $\delta'(\{6\},b) = \varnothing$
- $\delta'(\{4\},a) = \{2\}$
- $\delta'(\{4\},b) = \varnothing$
- $\delta'(\{3\},a) = \varnothing$
- $\delta'(\{3\},b) = \{5\}$
- $\delta'(\{5\},a) = \varnothing$
- $\delta'(\{5\},b) = \{6\}$



Déterminisation par construction de sous-ensembles – Exemple 1

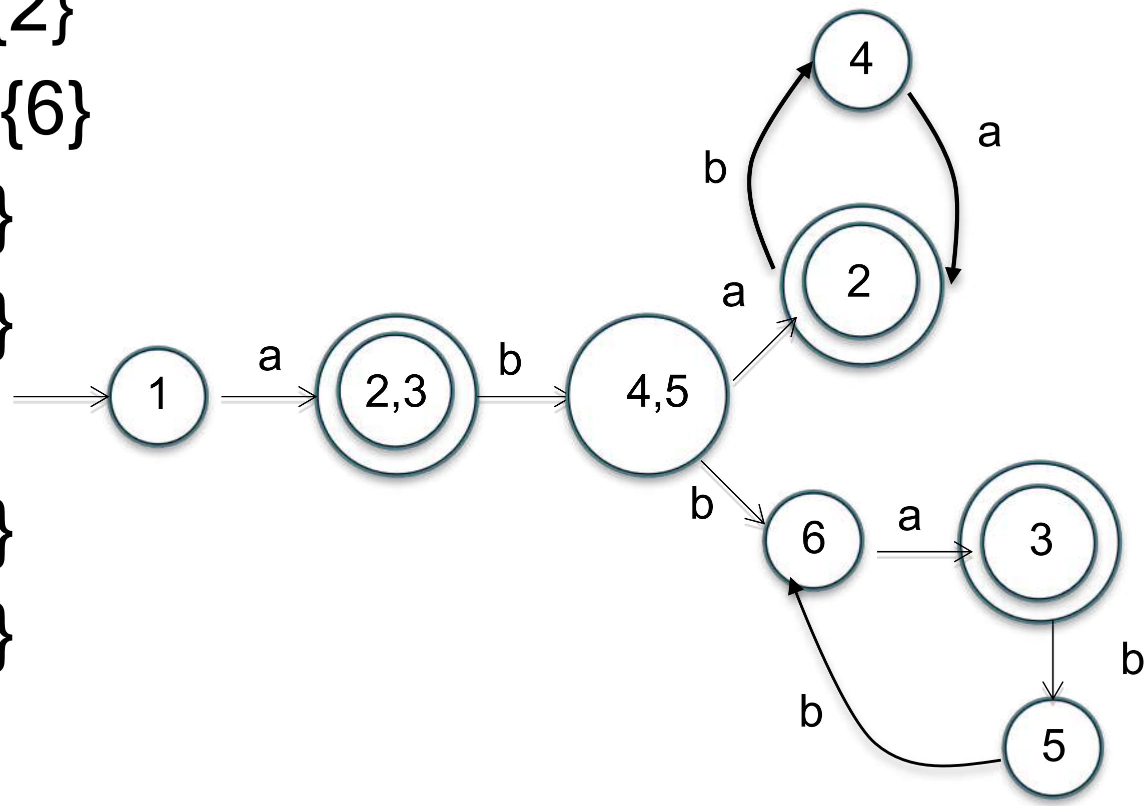
- A = {Σ, Q, q_0, F, δ} (AEFND)
- A' = {Σ, Q ', q'$_0$, F', δ'} (AEFD)
- Q'={{1}, {2,3}, {2},{3}, {4,5}, {4}, {5}, {6}}
- F'= {{2,3}, {2}, {3}}





Déterminisation par construction de sous-ensembles – Exemple 1

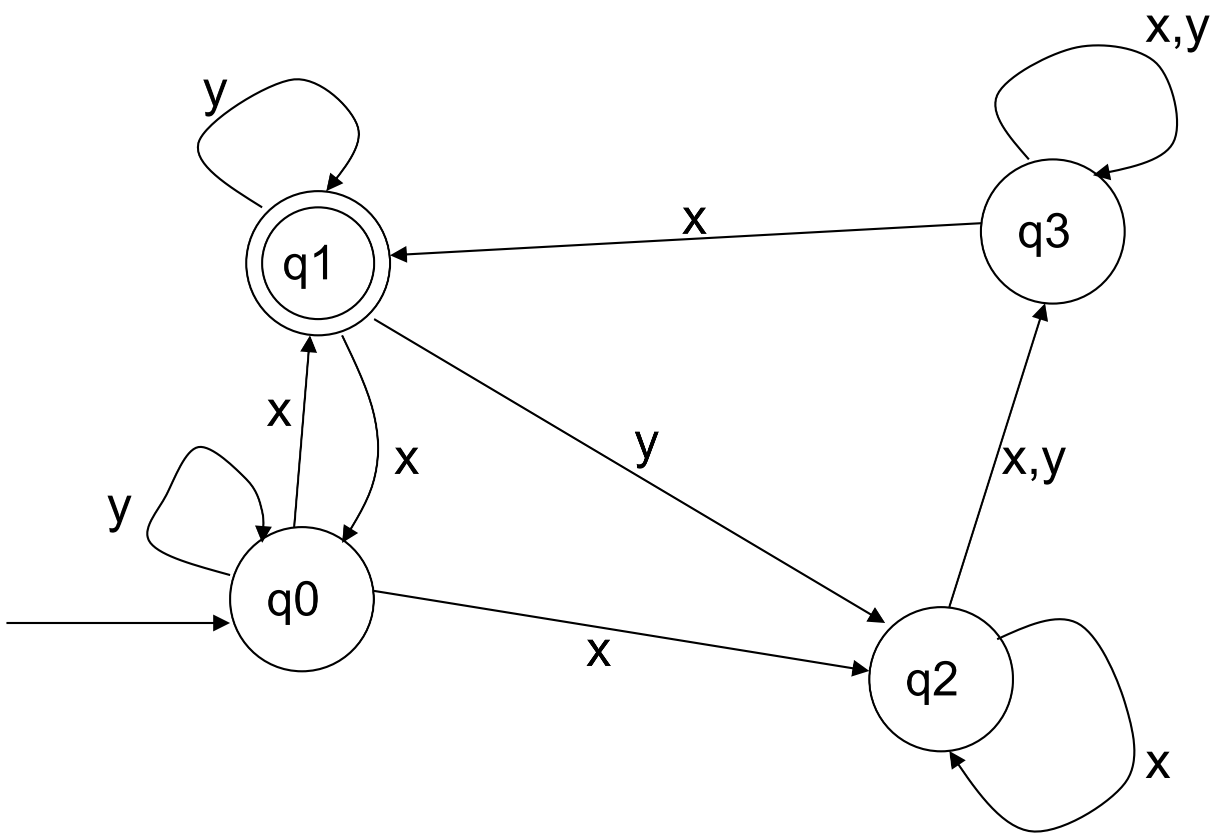
- A’ = {Σ, Q ’, q’$_0$, F’, δ’} (AEFD)
- δ’(1,a) = {2,3}
- δ’({2,3},b) = {4,5}
- δ’({4,5},a) = {2}
- δ’({4,5},b) = {6}
- δ’({2},b) = {4}
- δ’({6},a) = {3}
- δ’({4},a) = {2}
- δ’({3},b) = {5}
- δ’({5},b) = {6}



Exemple 2

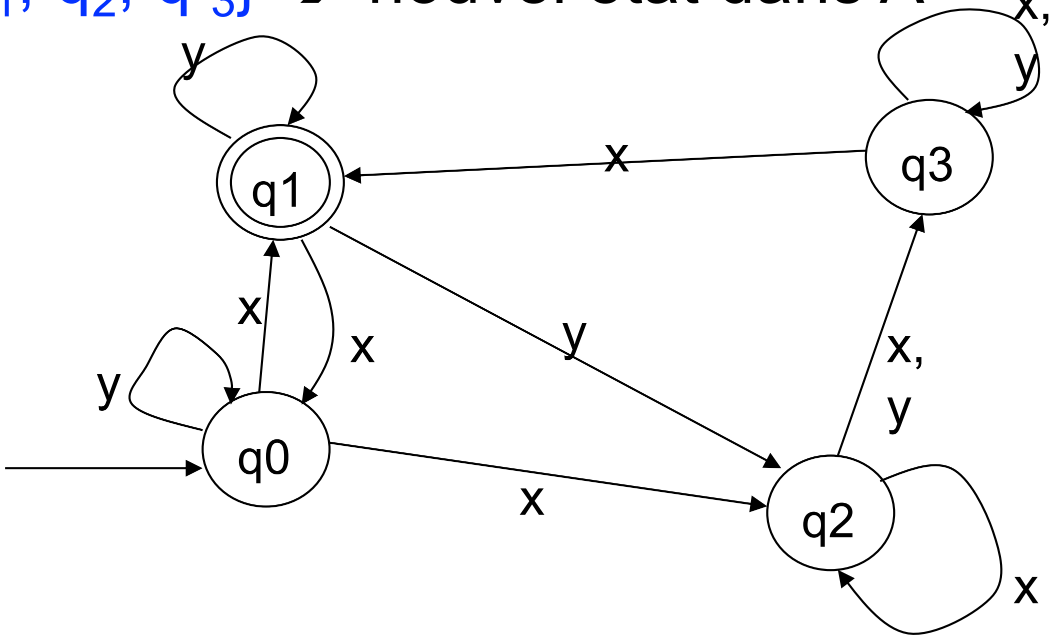
Déterminisation par construction de sous-ensembles – Exemple 2

- Soit l'AEFND A



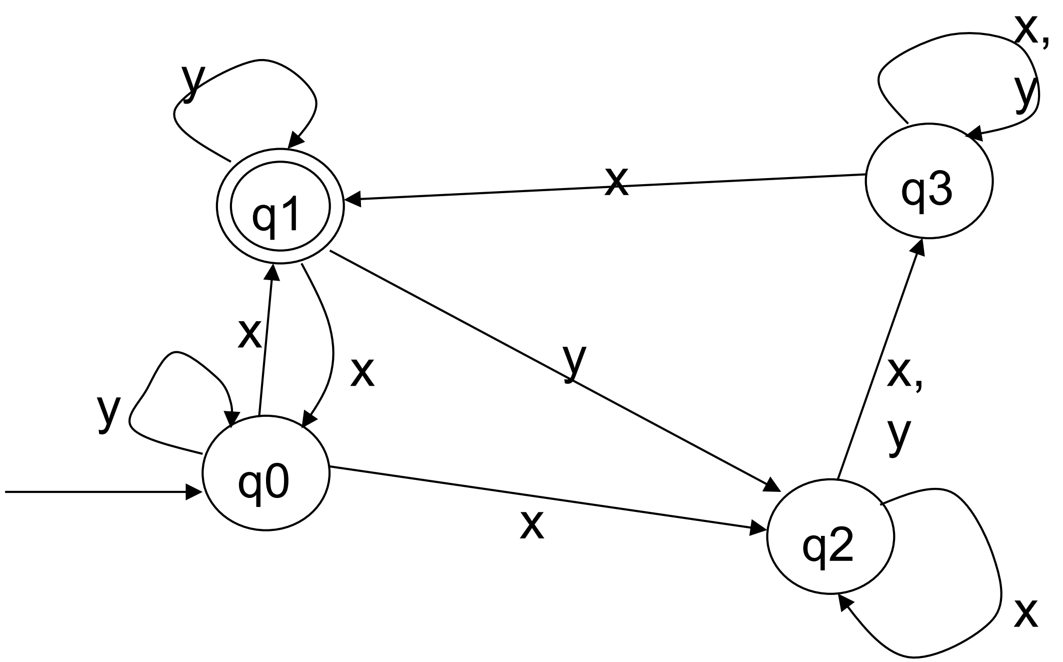
Déterminisation par construction de sous-ensembles – Exemple 2

- $\delta(q_0, x) = \{q_1,q_2\}$ et $q_1 \in F_1$
  ➔ $\{q_1, q_2\}$ nouvel état dans A' et dans dans F_2.
- $\delta(q_0,y) = \{q_0\}$
- $\delta'(\{q_1, q_2\},x) = \delta(q_1,x) \cup \delta(q_2,x)$
  $= \{q_0\} \cup \{q_2, q_3\} = \{q_0, q_2, q_3\}$ ➔ nouvel état dans A'
- $\delta'(\{q_1, q_2\},y) = \delta(q_1,y) \cup \delta(q_2,y) = \{q_1, q_2\} \cup \{q_3\}$
  $= \{q_1, q_2, q_3\}$ ➔ nouvel état dans A'



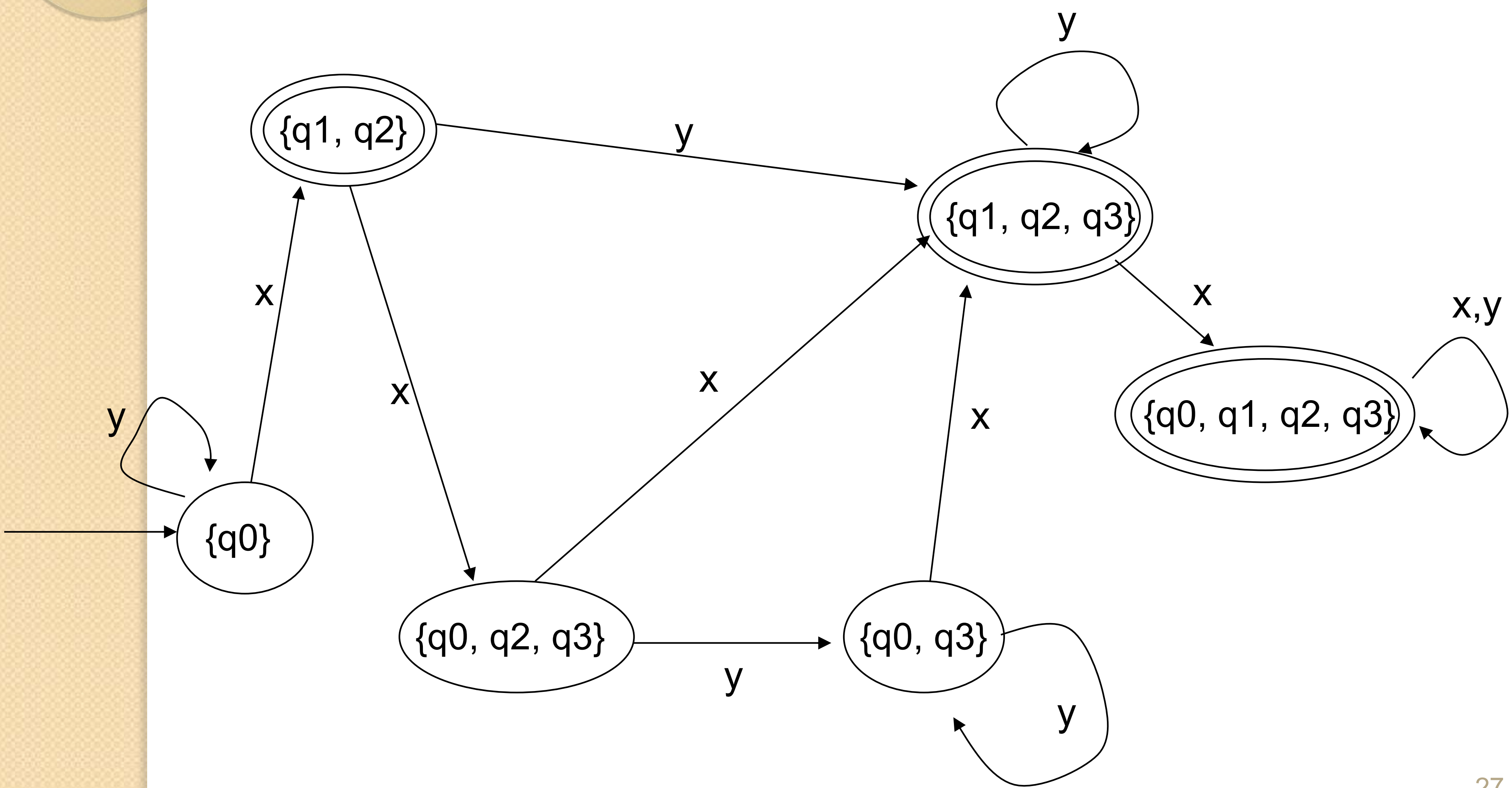
Déterminisation par construction de sous-ensembles – Exemple 2

- $\delta(\{q0, q2, q\ 3\}, x) = \delta(q0,x) \cup \delta(q2,x) \cup \delta(q3,x) = \{q1,q2\} \cup \{q2\ ,q\ 3\} \cup \{q1\ ,q\ 3\} = \{q1, q2, q\ 3\}$ nouvel état dans A'.
- $\delta(\{q0, q2, q\ 3\}, y) = \delta(q0,y) \cup \delta(q2,y) \cup \delta(q3,y) = \{q0\} \cup \{q\ 3\} \cup \{q\ 3\} = \{q0, q\ 3\}$ nouvel état dans A'.
- etc.



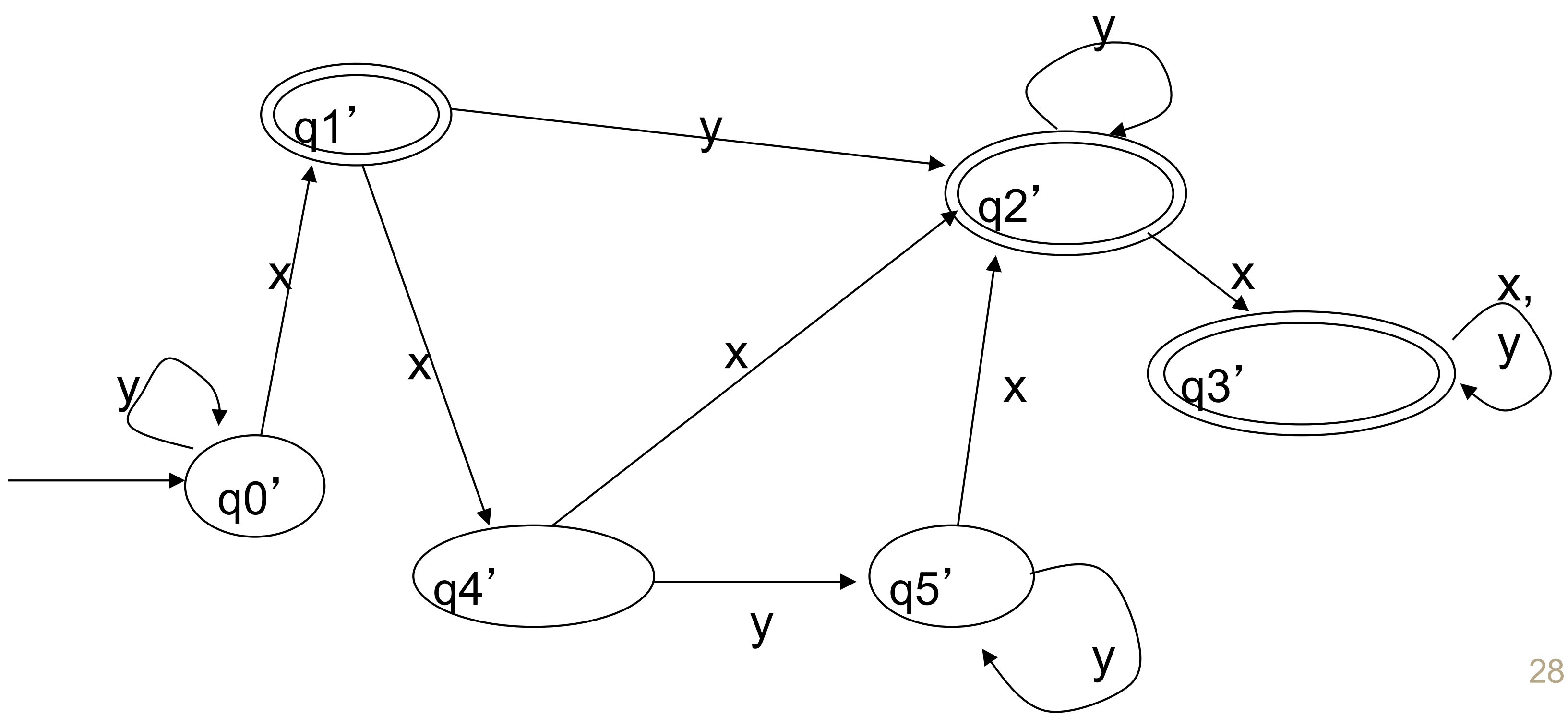
Déterminisation par construction de sous-ensembles – Exemple 2

- Pour arriver finalement à :



Déterminisation par construction de sous-ensembles – Exemple 2

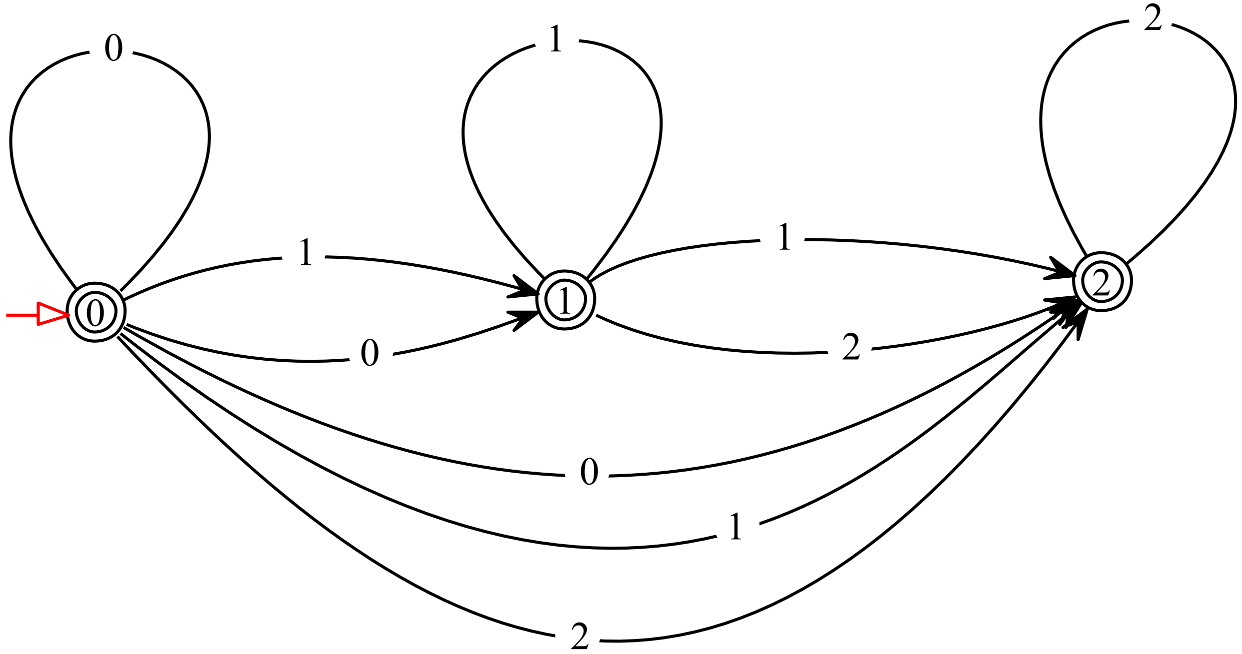
- On peut renommer les états de A'
- A' = {Σ={x,y}, Q'={q'_0, q'_1, q'_2, q'_3, q'_4, q'_5}, q'_0, F'={q'_1, q'_2, q'_3}, δ'} (c'est un AEFD)
- Avec $q'_0=q_0$, $q'_1=\{q_1, q_2\}$, $q'_2=\{q_1, q_2, q_3\}$, $q'_3=\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $q'_4=\{q_0, q_2, q_3\}$, $q'_5=\{q_0, q_3\}$,



Exemple 3

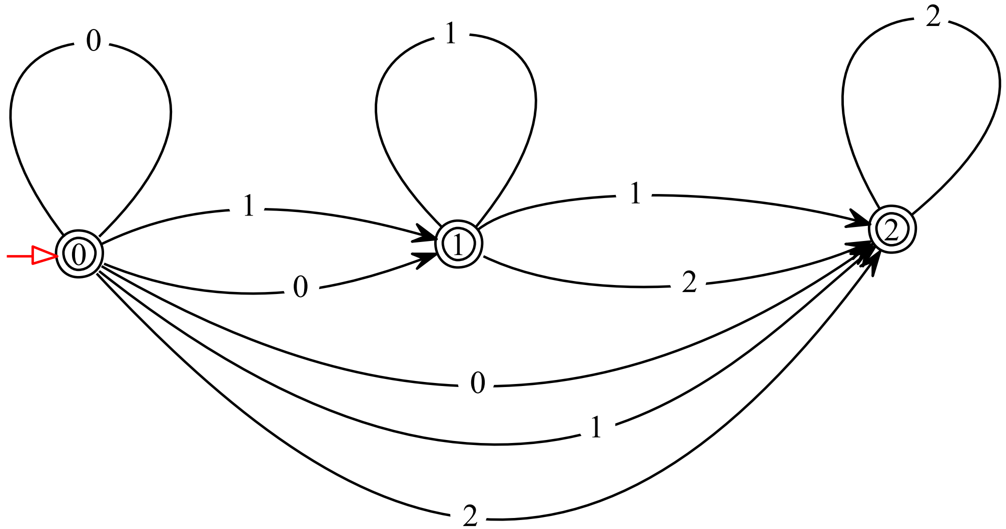
Exemple 3

- Déterminisons l'automate suivant:



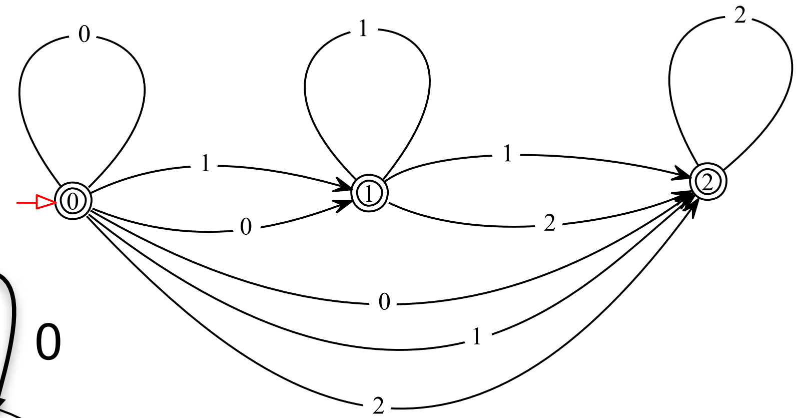
Définition de δ'

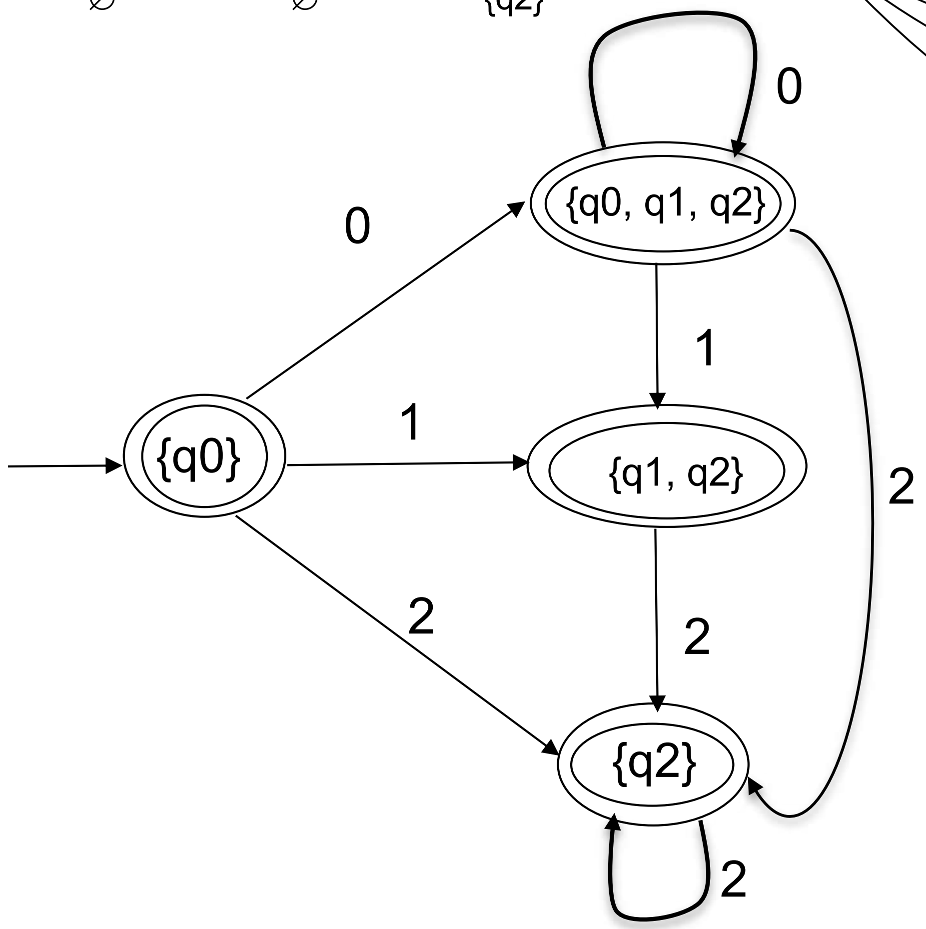
	0	1	2
{q0}	{q0, q1, q2}	{q1, q2}	{q2}
{q0, q1, q2}	{q0, q1, q2}	{q1, q2}	{q2}
{q1, q2}	∅	{q1, q2}	{q2}
{q2}	∅	∅	{q2}



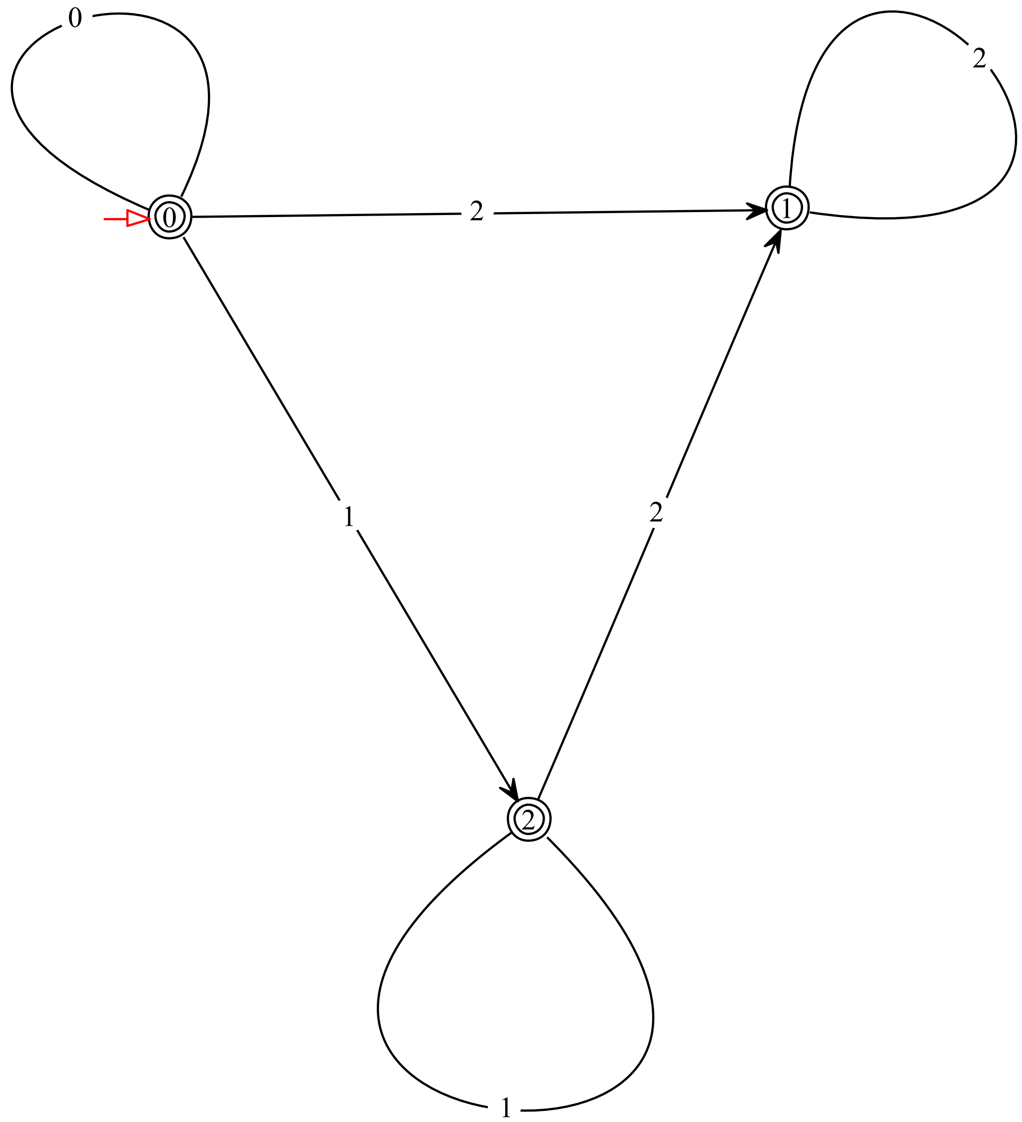
Obtention de l'AEFD

	0	1	2
{q0}	{q0, q1, q2}	{q1, q2}	{q2}
{q0, q1, q2}	{q0, q1, q2}	{q1, q2}	{q2}
{q1, q2}	∅	{q1, q2}	{q2}
{q2}	∅	∅	{q2}





Equivalent à AEFD ?



Construire un AEFD à partir d'un AEFND (Construction de sous-ensembles)

1. Déterminisation

L'idée était :

1. Nous **rassemblons** les états AEFND en fonction des symboles d'entrée :

➔ Si nous avons des transitions multiples sur un même symbole, alors nous pouvons considérer une transition comme passant d'un état vers un ensemble d'états.

Cet ensemble d'états c'est l'union de tous les états atteignables par une transition sur le symbole courant.

➔ Tous ces états sont combinés en un seul état dans AEFD correspondant que l'on cherche à construire

Nous l'avons fait

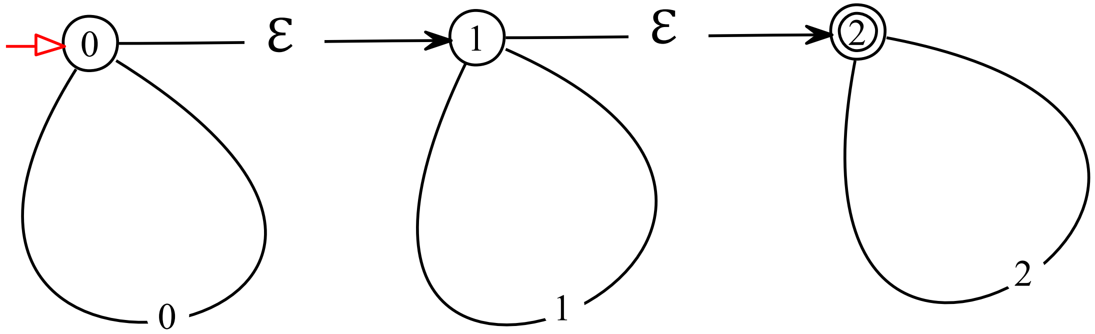
Construire un AEFD à partir d'un AEFND (Construction de sous-ensembles)

- … Mais il est aussi nécessaire de prendre en compte les ε-transitions : toutes les paires d'états qui sont connectées par une ε-transition peuvent aussi bien être un seul et même état…

Pourquoi ?

- Nous pouvons nous déplacer d'un état à un autre sans consommer aucun caractère.
- Les états qui sont connectés par une ε-transition seront représentés par les mêmes états dans l'AEFD correspondant à l'AEFND à déterminiser

Exemple d'automate avec transitions vides



La fonction de transition δ est définie par:

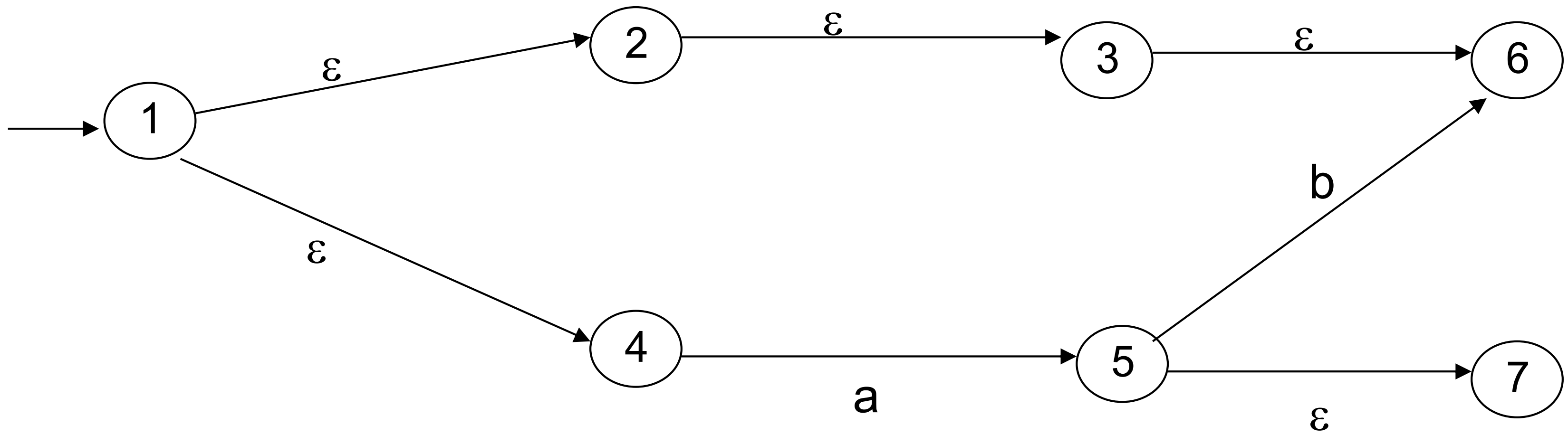
	0	1	2	ε
0	0	-	-	1
1	-	1	-	2
2	-	-	2	-

ε-fermeture

- Soit un état q, on définit son ε-fermeture, E(q) par
  - E(q) = l'ensemble des sommets que l'on peut atteindre à partir de q par une suite quelconque de transitions vides (0, 1 ou plusieurs)
- On peut alors étendre δ en ajoutant
  - $\delta(q, \varepsilon) = E(q)$

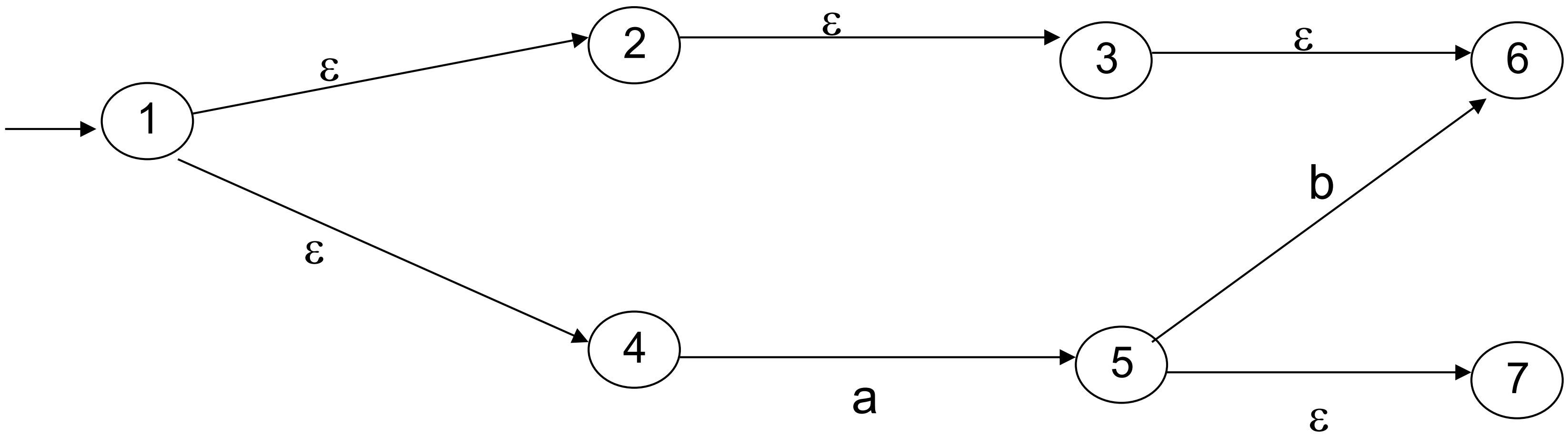
ε-fermeture - Exemple

- Sur ce diagramme de transitions, qu'est-ce que E(1)?



ε-fermeture - Exemple

- Sur ce diagramme de transitions, qu'est-ce que E(1)?



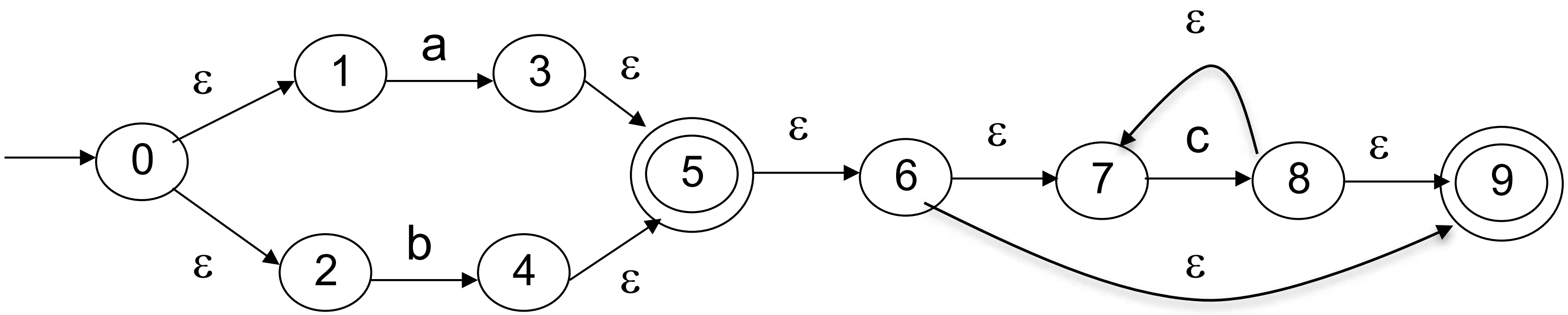
- E(1) = {1,2,3,4,6}

Construction de sous-ensembles pour ε-AEFND

- Calculer δ' à partir de δ avec la même procédure qu'avant, mais en prenant en compte les ε-transitions.

Construction de sous-ensembles pour ε-AEFND - Exemple

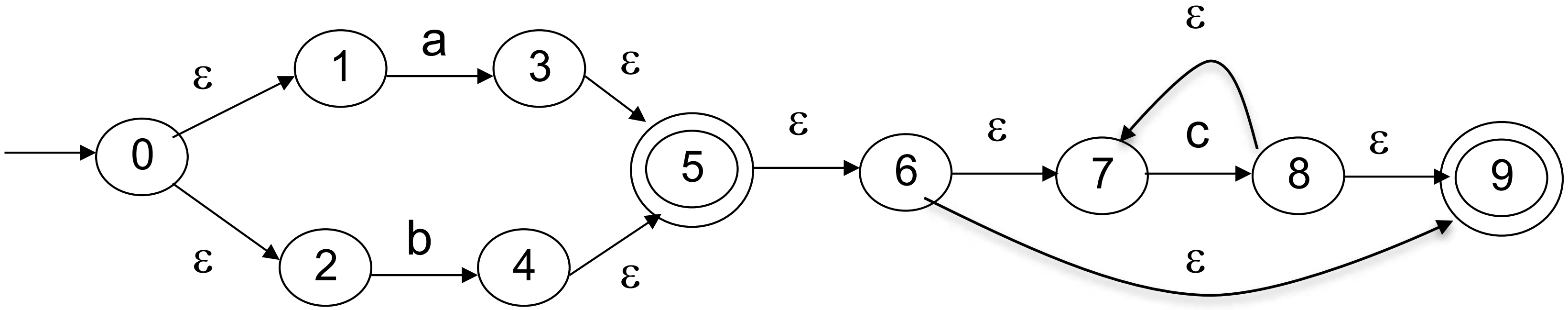
- Soit l'AEFND du langage (a+b)c*



- ε-fermeture pour tous les états
  - ε-fermeture(0)={0,1,2}
  - ε-fermeture(1)={1}
  - ε-fermeture(2)={2}
  - ε-fermeture(3)={3,5,6,7,9}
  - ε-fermeture(4)={4,5,6,7,9}
  - ε-fermeture(5)={5,6,7,9}
  - ε-fermeture(6)={6,7,9}
  - ε-fermeture(7)={7}
  - ε-fermeture(8)={7,8,9}
  - ε-fermeture(9)={6,9}

Construction de sous-ensembles pour ε-AEFND - Exemple

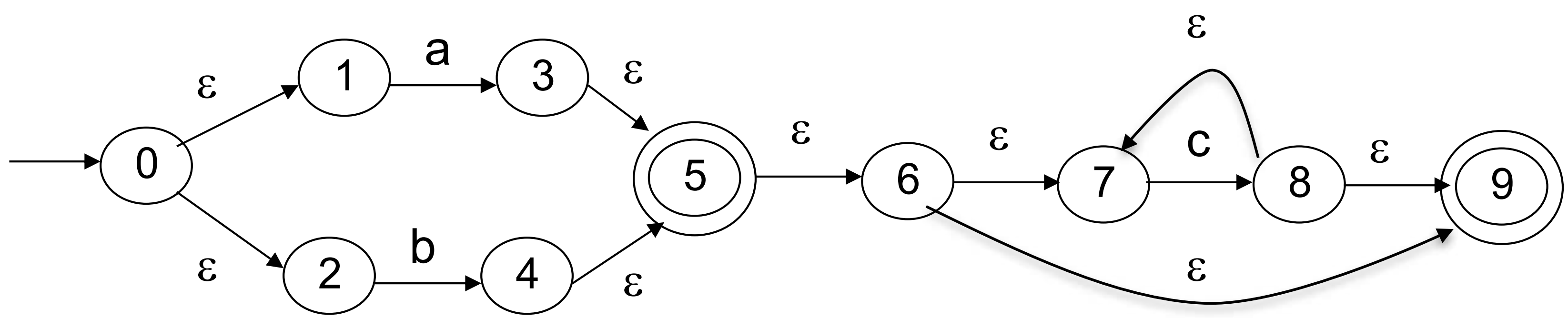
- Soit l'AEFND du langage (a+b)c*



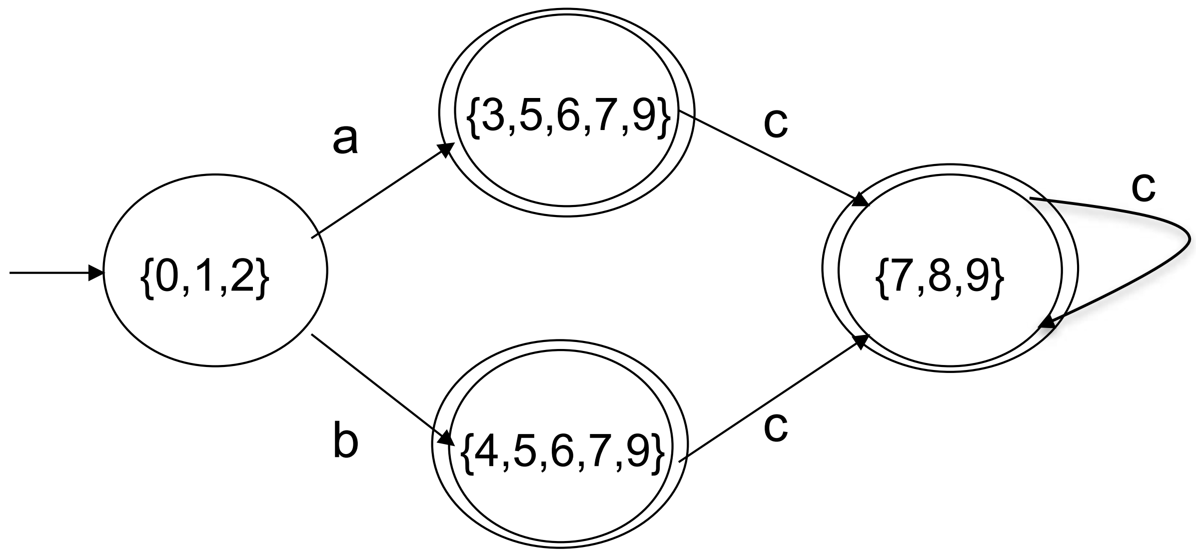
- Transition pour tous les nouveaux états
  - δ'({0},ε)={0,1,2} (état initial)
  - δ'({0,1,2}, a) = {3,5,6,7,9} car ε-fermeture(3)={3,5,6,7,9}
  - δ'({0,1,2}, b) = {4,5,6,7,9}
  - δ'({3,5,6,7,9), c} = {7,8,9}
  - δ'({4,5,6,7,9}, c) = {7,8,9}
  - δ'({7,8,9}, c) = {7,8,9}

Construction de sous-ensembles pour ε-AEFND - Exemple

- Soit l'AEFND du langage (a+b)c*



- L'AEFD correspondant est :



Construire un AEFD à partir d'un AEFND (Construction de sous-ensembles)

Souvenez-vous:

1. Nous **rassemblons** les états AEFND en regardant les symboles d'entrée :
   - Si nous avons des transitions multiples sur un <u>même symbole</u>, alors nous pouvons considérer une transition comme passant d'un état vers un ensemble d'états.

2. Il est aussi nécessaire de prendre en compte les ε-transitions:
   - tous les paires d'états qui sont connectée par une ε-transition peuvent aussi bien être un seul et même état,

<u>Pour effectuer cette opération, définissons deux fonctions:</u>

- La fonction de ε **-fermeture** prend un état en entrée et retourne l'ensemble des états atteignables à partir de cet état, à partir d'une ou plusieurs ε transitions.
- La fonction **déplacer** prend un état et un caractère, et retourne l'ensemble des états atteignables par <u>une</u> transition sur ce caractère.

L'algorithme de construction de sous-ensembles

- Créer l'état de départ de l'AEFD en prenant la ε-fermeture de l'état de départ du AEFND.
- Pour tout nouvel nouvel état AEFD :
  Pour chaque symbole d'entrée possible :
  1. Appliquer déplacer à l'état nouvellement créé et au symbole d'entrée ; cela retournera un ensemble d'états.
  2. Appliquer la ε-fermeture à cet ensemble d'états, potentiellement résultant en un nouvel ensemble.
- Cet ensemble d'états AEFND sera un seul état dans l'AEFD.
- Chaque fois que nous générons un nouvel état AEFD, nous devons lui appliquer l'étape 2.
- Le processus est complet lorsque l'application de l'étape 2 ne génère plus de nouvel état.
- Les états de fin du AEFD sont ceux qui contiennent au moins un état de fin du AEFND.

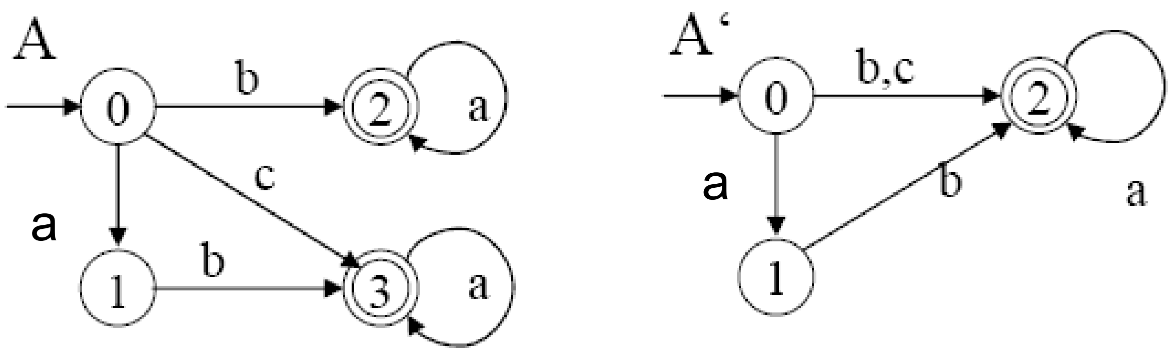
Minimisation des AEFD

Minimisation des AEFD

- Question : pouvons-nous transformer un « grand » automate en un plus « petit » (moins d'états, moins de transitions)…équivalent… s'il en existe un… ?

- Si A est un AEFD, y-a-t-il un algorithme pour construire un automate minimal équivalent A_{min} à partir de A ?

Minimisation des AEFD



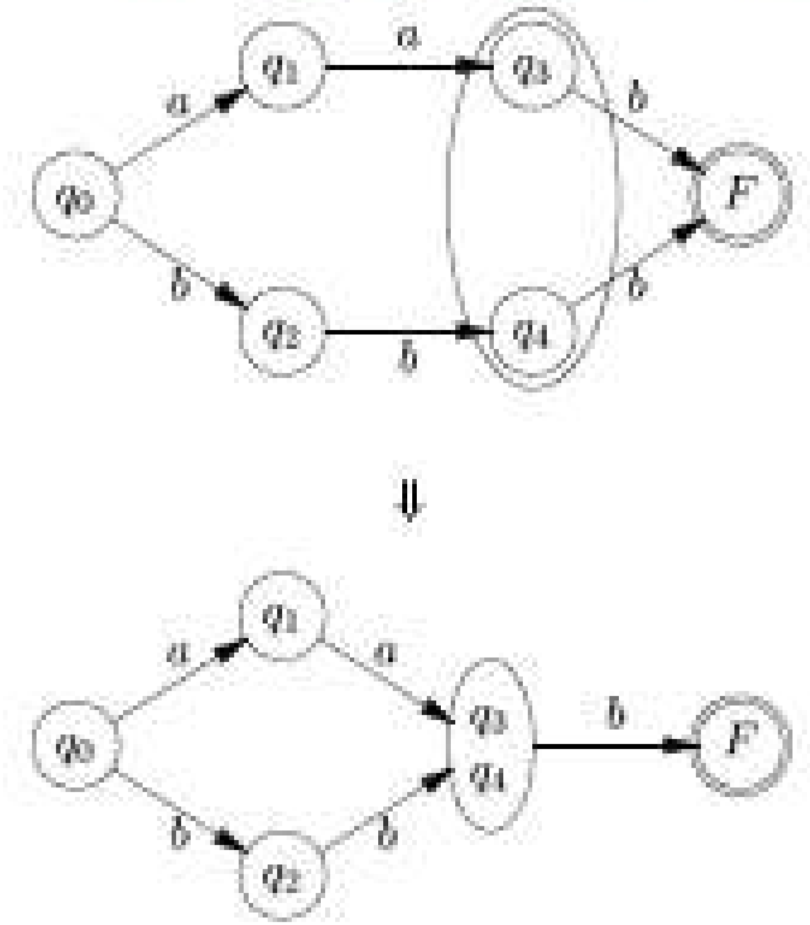
- A peut être transformé en A' :
  - les états 2 et 3 dans A "*jouent le même rôle*" :
  - une fois que A est dans l'état 2 ou 3, il *accepte la même chaîne suffixe* (a*).
- De tels états sont appelés ***équivalents***
- Nous pouvons éliminer l'état 3 sans changer le langage de A, en redirigeant vers 2 les arcs menant vers 3

Minimisation des AEFD

- Un AEFD peut être minimisé s'il y a des paires d'états (q,q') avec $q \in Q$ et $q' \in Q$ qui sont *équivalentes*

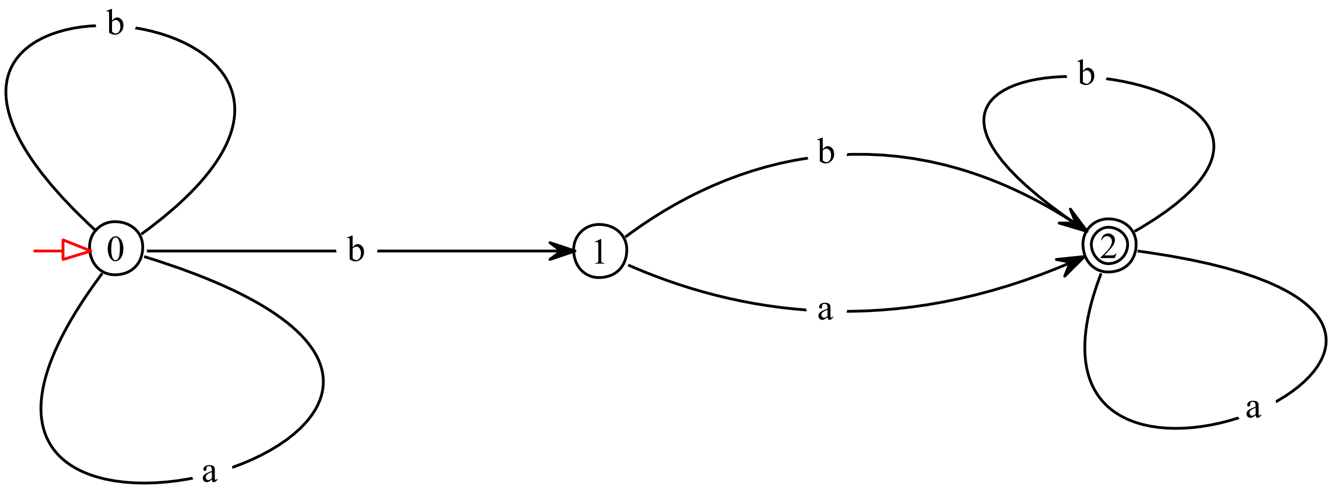
- Deux états q et q' sont *équivalents* s'ils acceptent le même *langage*

Exemple de minimisation



Exercices

- 1. Déterminiser l'automate suivant:



Exercices

- 2. Supprimer les transitions vides :