Part II

Logique mathématiques

On définit les notions suivantes :

- une **proposition** est un énoncé qui est soit vrai, soit faux ; "L'ascenseur fonctionne"
- Vrai (1) ou Faux (0) sont appelés **valeurs de vérité** ;

20 ascenseurs numérotés de 1 à 20. Le 5 est en panne

"L'ascenseur x est en panne".

- un **prédicat** est un énoncé contenant une ou plusieurs variables et qui se transforme en proposition suivant la valeur de ces variables. "$x+7=12$"
- un atome est une proposition ou un prédicat élémentaire qui ne dépend pas d'autre proposition ou prédicat. "L'ascenseur fonctionne" est un atome.

"Les deux premiers ascenseurs fonctionnent" n'est pas un atome

"ascenseur 1 fonctionne" et "ascenseur 2 fonctionne".

Definition 6.9 *Deux propositions sont dites logiquement équivalentes, ou plus simplement équivalentes, si elles sont toutes deux vraies ou toutes deux fausses.*

7 Propositions

7.1 Les connecteurs logiques

L'élaboration de nouvelles assertions à partir d'autres se fait en utilisant les connecteurs logiques de négation, de conjonction, de disjonction, d'implication et d'équivalence. Dans ce qui suit, P et Q désignent des assertions.

- La négation de P, notée $\neg P$, ou non P ou $\overline{P}$, est l'assertion qui est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

En théorie des ensembles on admet qu'il n'existe pas d'assertion P telle que P et $\overline{P}$ soient toutes deux vraies. On dit que cette théorie est “non contradictoire ”.

Definition 7.1 *Un littéral est un atome ou sa négation.*

$\hookrightarrow$ "l'ascenseur fonctionne"

$\hookrightarrow$ "l'ascenseur ne fonctionne pas"

- La conjonction de P et Q, notée $P \wedge Q$ (lire P et Q), est l'assertion qui est vraie uniquement si P et Q sont toutes deux vraies (et donc fausse dans les trois autres cas).

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- La disjonction de P et Q, notée $P \vee Q$ (lire P ou Q), est l'assertion qui est vraie uniquement si l'une des deux assertions P ou Q est vraie (donc fausse si P et Q sont toutes deux fausses).

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- L'implication, notée $P \to Q$, est l'assertion qui est fausse uniquement si P est vraie et Q fausse

P	Q	$P \to Q$
F	V	V
F	F	V
V	V	V
V	F	F

(donc vraie dans les trois autres cas). On peut remarquer que si P est fausse, alors $P \to Q$ est vraie indépendamment de la valeur de vérité de Q. L'implication est à la base du raisonnement mathématique. En partant d'une assertion P (ou de plusieurs), une démonstration aboutit à un résultat Q. Si cette démonstration est faite sans erreur, alors $P \to Q$ est vraie et on notera $P \Rightarrow Q$ (ce qui signifie que si P est vraie, alors Q est vraie). Dans ce cas, on dit que P est une condition suffisante et Q une condition nécessaire. On peut remarquer que l'implication est transitive, c'est-à-dire que si P implique Q et Q implique R, alors P implique R.

7.2 Règles de calcul propositionnel

Avec le théorème qui suit, on résume quelques règles de calcul.

Theorem 7.2 *Soient P, Q, R des propositions. On a les équivalences :*

(i) commutativité :

$$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$$
$$(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$$

⚠ $P \Rightarrow Q \not\Leftrightarrow Q \Rightarrow P$

(sauf si $P \Leftrightarrow Q$)

(ii) associativité

$$(P \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$$

$$(P \vee (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$$

(iii) distributivité :

P	Q	R	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \wedge (Q \vee R)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$

$$(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$

(iv) négations :

$$\left(\overline{\overline{P}}\right) \Leftrightarrow (P)$$

Lois de Morgan –

P = "Ascenseur 1 fonctionne"

Q = "Ascenseur 2 fonctionne"

$P \vee Q$: je peux monter en ascenseur.

$\overline{P \vee Q}$: je prends les escaliers

$\Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$

= les deux ascenseurs ne fonctionnent pas.

$$(\overline{P \wedge Q}) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee \overline{Q})$$

$$(\overline{P \vee Q}) \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q})$$

$$(P \to Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \to \overline{P})$$ Contraposée.

$$(P \to Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$$

P	Q	$P \to Q$	$\overline{P}$	$\overline{P} \vee Q$
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F

$$\left(\overline{P \to Q}\right) \Leftrightarrow \left(P \land \overline{Q}\right)$$

- atome = Proposition qui ne dépend pas de "sous-proposition"
- littéral = atome ou sa négation.

P = "l'ascenseur fonctionne" ou $\overline{P}$ = "l'ascenseur ne fonctionne pas"

7.3 Clauses et formes normales

Les clauses sont des expressions logiques de grand intérêt en informatique. On les définit ainsi.

Definition 7.3

"et" $\wedge$

- *Une clause conjonctive est de la forme :*

$$l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_n,$$

"ou" $\vee$

- *une clause disjonctive est de la forme :*

$$l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_n,$$

où les l_i sont des littéraux, c'est-à-dire des atomes ou des négations d'atomes.

les clauses sont des successions de littéraux reliés par le même opérateur logique
- "et" clause conjonctive
- "ou" clause disjonctive.

Note . Le plus souvent, le terme clause renvoie à la clause disjonctive.

"$\vee$"

Definition 7.4 *On appelle forme normale une conjonction de clauses disjonctives.*

Pour exemple d'une forme normale, nous avons

$$(A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg D \vee E \vee F).$$

Par contre,

$$A \wedge (B \vee (C \wedge D))$$

n'est pas une forme normale car un "et" est imbriqué dans un "ou". On a le théorème suivant.

Theorem 7.5 *Toute formule admet une forme normale qui lui est équivalente.*

$A \wedge (B \vee (C \wedge D))$

distributivité de $\vee$ sur $\wedge$.

$\Longleftrightarrow A \wedge ((B \vee C) \wedge (B \vee D)) \Longleftrightarrow A \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D)$

est bien une forme normale en tant que conjonction de clauses.

rappel: associativité du "$\wedge$"

$(A \wedge B) \wedge C$

$= A \wedge (B \wedge C)$

$= A \wedge B \wedge C$

Son application se fera par l'utilisation des règles de calcul précédentes. Notre attention devrait d'ailleurs se porter très fortement sur l'équivalence

$$(P \to Q) \Leftrightarrow \left(\overline{P} \vee Q\right).$$

Si nous prenons une clause conjonctive et qu'elle implique un littéral q,

$$\left(l_1 \wedge \cdots \wedge l_n\right) \Rightarrow q,$$

$$\Leftrightarrow \overline{l_1 \wedge \dots \wedge l_n} \vee q$$

Loi de Morgan $\Leftrightarrow \overline{l_1} \vee \dots \vee \overline{l_n} \vee q$ est une clause avec 1 littéral non négatif.

autrement dit,

$$\bar{l_1} \vee \cdots \vee \bar{l_n} \vee q.$$

Nous obtenons alors une nouvelle clause dont un seul littéral est positif. Il s'agit d'une clause de Horn qu'on définit ainsi.

Definition 7.6 *Une clause de Horn est une clause disjonctive avec au plus un littral positif (non négatif).*

Notons que cette définition n'exclue pas de n'avoir que des littéraux négatifs

$$\bar{l_1} \vee \cdots \vee \bar{l_n},$$

ce qui revient, par les loi de Morgan, à vérifier

$$l_1 \wedge \cdots \wedge l_n.$$

Ces considérations sont la base de la programmation en PROLOG.

Notons que cette définition n'exclue pas de n'avoir que des littéraux négatifs

$$\bar{l_1} \vee \cdots \vee \bar{l_n},$$

ce qui revient, par les loi de Morgan, à vérifier

$$l_1 \wedge \cdots \wedge l_n.$$

Ces considérations sont la base de la programmation en PROLOG.

7.4 Modus ponens – Principe de résolution de Robinson

La règle du modus ponens s'écrit

$\bar{p} \vee q$

$$\frac{p \qquad p \rightarrow q}{q},$$

et se lit : de p et de "p implique q", je déduis q. Puisque l'implication $p \Rightarrow q$ est équivalente à "non p ou q", la règle du modus ponens s'écrit

$$\frac{p \qquad (\neg p \vee q)}{q}.$$

On peut généraliser cette règle d'inférence logique aux clauses par le principe de résolution de Robinson qui suit. Partons d'une clause contenant p,

$$(p \vee l_1 \vee \ldots \vee l_n)$$ clause contenant p

et d'une implication de p,

p implique une autre clause

$$(p \Rightarrow m_1 \vee \ldots \vee m_k) \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg p \vee m_1 \vee \ldots \vee m_k),$$

alors on a $l_1 \vee \ldots \vee l_n$ ou si p, le modus ponens nous dit qu'alors on a $m_1 \vee \ldots \vee m_k$. Ainsi, on obtient $(l_1 \vee \ldots l_n \vee m_1 \vee \cdots \vee m_k)$. On peut résumer le principe de résolution de Robinson ainsi

$$\frac{(p \vee l_1 \vee \ldots l_n) \qquad (\neg p \vee m_1 \vee \cdots \vee m_k)}{(l_1 \vee \ldots l_n \vee m_1 \vee \cdots \vee m_k)}.$$