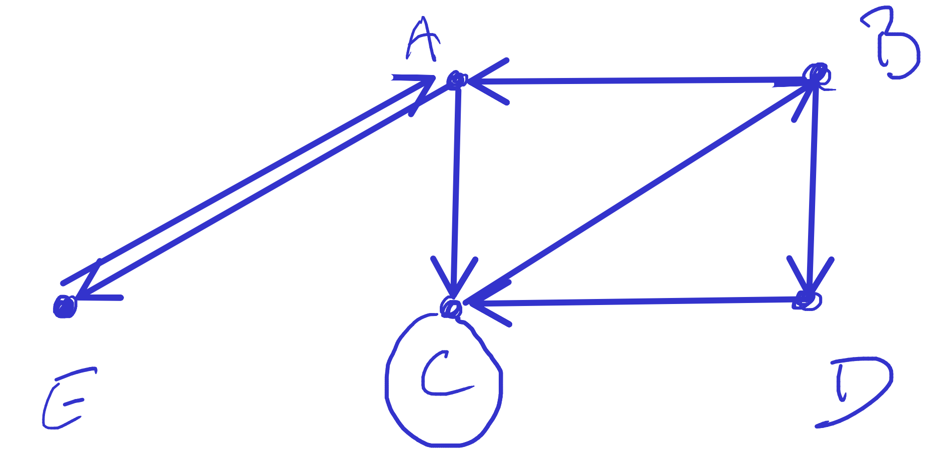
14 Dessin d'un graphe par niveaux

On appelle sommet de niveau 0 tout sommet qui n'a pas de prédécesseur. Si on note S_0 l'ensemble des sommets de niveau 0, alors on appelle sommet de niveau 1 tout sommet qui n'a pas de prédécesseur dans $S - S_0$ (ensemble S privé des éléments de S0). On définit ensuite les sommets de niveau 2 et ainsi de suite...



Dans notre exemple initial de matrice d'adjacence

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

→ Successeurs de A

↳ prédécesseurs de A

cherchons les sommets de niveau 0.

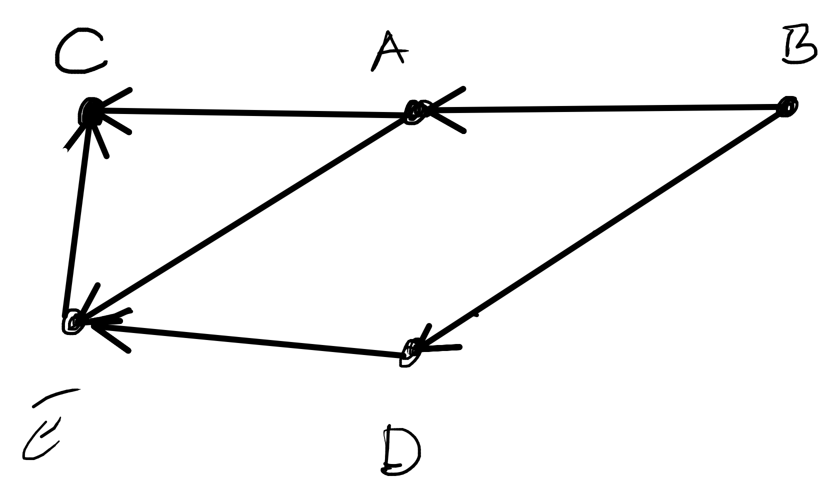
Changeons d'exemple !

sommet	A	B	C	D	E
prédécesseur	B	$\emptyset$	A,E	B	A,D

B est le seul sommet qui n'a pas de prédécesseur, il est donc le seul sommet de niveau 0.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphe sagittal



- Sommets de niveau 0 : pas de prédécesseurs

sommet	A	B	C	D	E
prédécesseur	B	$\emptyset$	A,E	B	A,D

B n'a pas de prédécesseur

$B \in S_0$.

- Sommets de niveau 1 : ceux qui n'ont plus de prédécesseur dans $\underbrace{S}_{\text{sommets}} - \underbrace{S_0}_{=\{B\}}$.

sommet	A	~~B~~	C	D	E
prédécesseur	~~B~~	~~$\emptyset$~~	A,E	~~B~~	A,D

A et D n'ont plus de prédécesseur dans $S - S_0$.

Donc $S_1 = \{A, D\}$.

- Sommets de niveau 2 : ceux qui n'ont plus de prédécesseur dans $S - S_0 - S_1$

sommet	~~A~~	~~B~~	C	~~D~~	E
prédécesseur	~~B~~	~~$\emptyset$~~	~~A~~,E	~~B~~	~~A,D~~

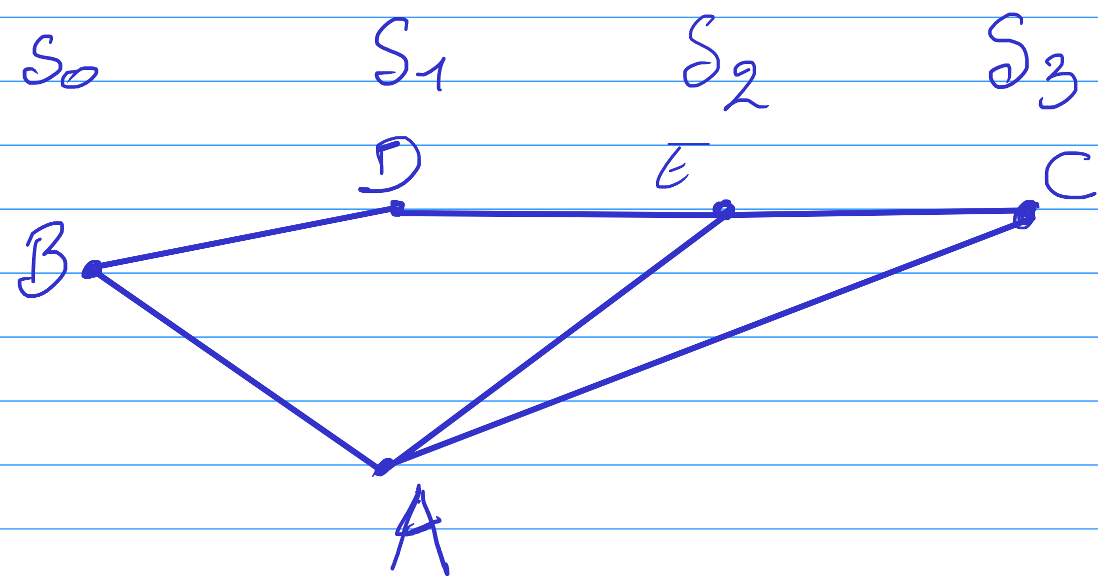
E n'a plus de prédécesseur.

$S_2 = \{E\}$

C est le sommet de niveau 3.

$$S_3 = \{C\}.$$

Graphe par niveau :



But de l'ordonnancement.

Parcourir toutes les tâches du graphe par niveau :

- Pour E, les tâche BDA doivent être faites.

...

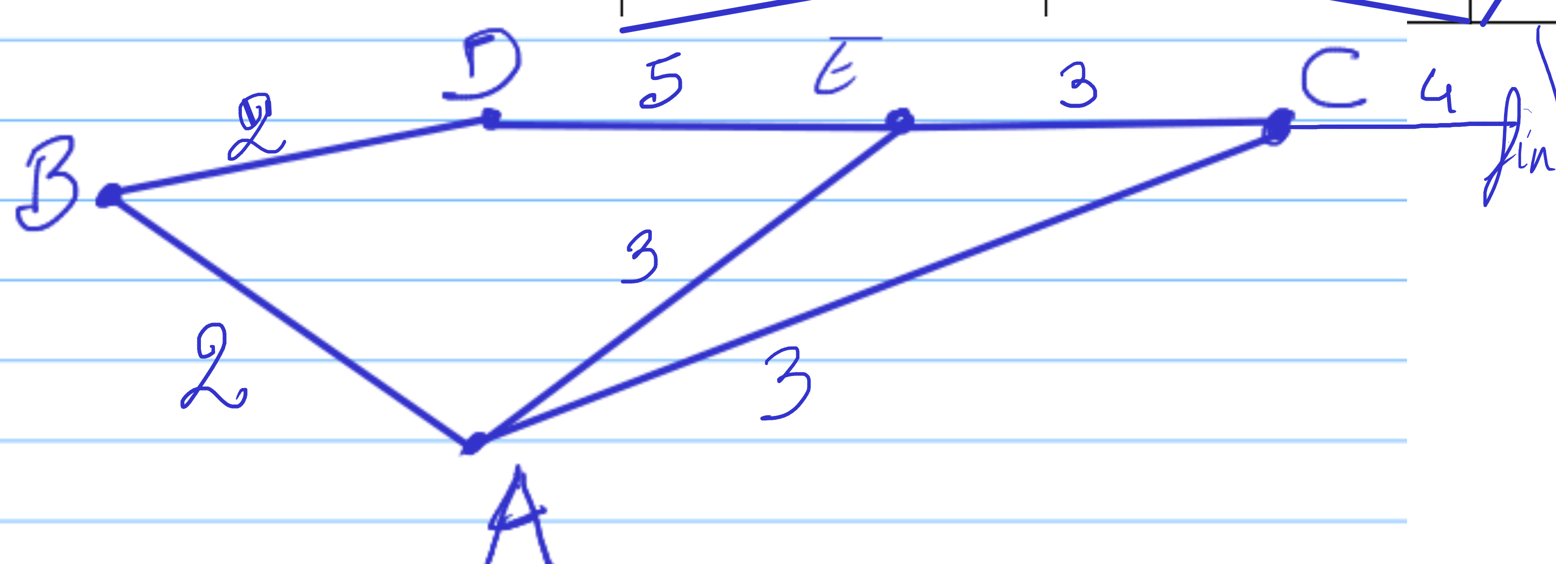
15 Ordonnancement

La réalisation d'un projet passe par l'exécution de différentes tâches, de durées souvent différentes. Si certaines tâches peuvent être réalisées simultanément, d'autres nécessitent que certaines tâches aient été réalisées antérieurement. Faire l'ordonnancement d'un projet consiste à organiser ce projet en respectant les contraintes d'antériorité des tâches tout en minimisant la durée totale de réalisation.

La méthode MPM (Méthode des potentiels metra) permet l'ordonnancement de projets, c'est la méthode que nous exposerons dans ce cours. Nous aurions pu choisir la méthode PERT, mais elle est plus complexe à mettre en oeuvre.

Exemple. Pour illustrer la méthode MPM, nous allons réaliser l'ordonnancement d'un projet fictif, comprenant des tâches que nous noterons A, B, C, D, E, F, G. Les contraintes d'antériorité et les durées de ces tâches sont consignées dans le tableau suivant.

Tâche	Durée (en jours)	Tâches antérieures
A	3	aucune
B	2	aucune
C	4	A
D	5	A, B
E	3	C
~~F~~	~~4~~	C, D
~~G~~	~~3~~	E, F

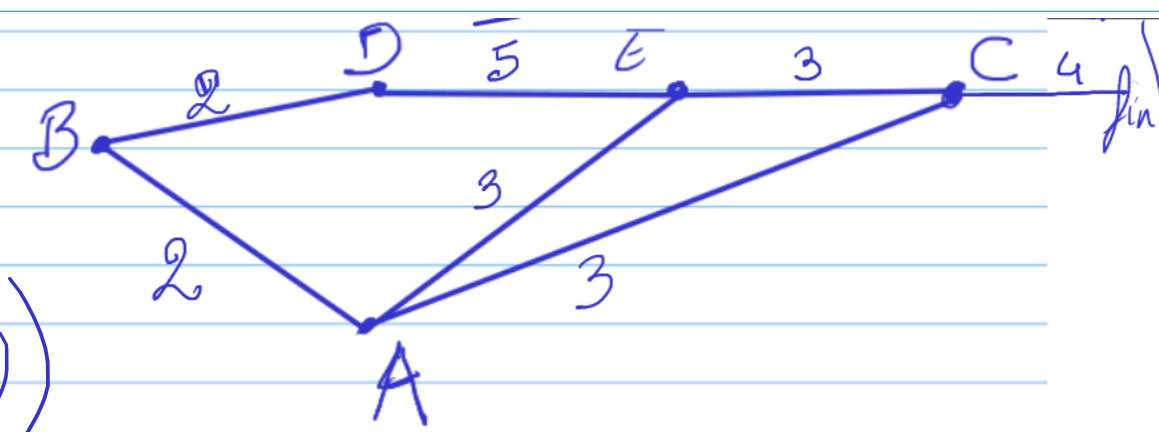


On pondère avec la durée de la tâche après.

Date au plus tôt : date à laquelle on peut démarrer une tâche sans en avoir raté (on ne peut pas commencer C au bout de 2 jours).

durée de B.

- $t(B) = 0$
- $\begin{cases} t(D) = t(B) + d(B) = 0+2 \\ t(A) = t(B) + d(B) = 2 \end{cases}$



- $t(E) = \max\left(t(D)+d(D) \,;\, t(A)+d(A)\right)$

car A et D doivent être réalisés.

$= \max(2+5 \,;\, 2+3)$

$= 7.$

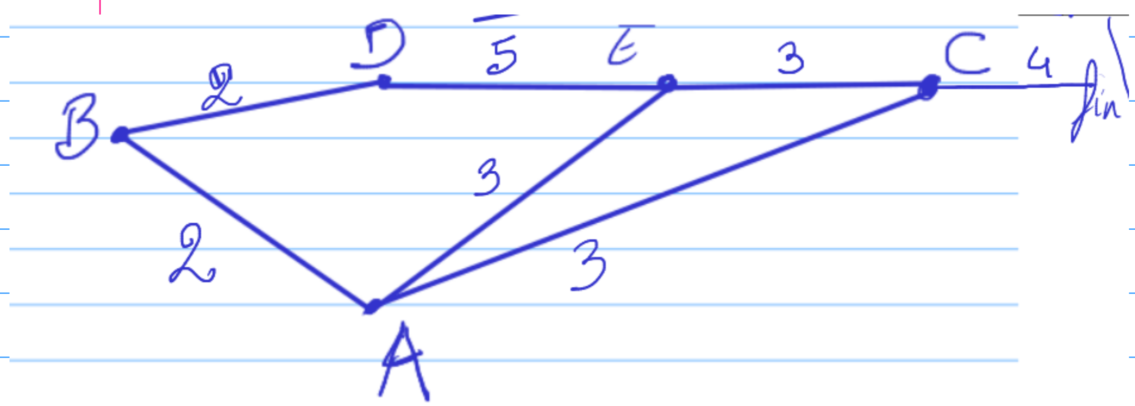
- $t(C) = \max\left(t(A)+d(A) \,;\, t(E)+d(E)\right)$

$= \max(2+3 \,;\, 7+3) = 10$

- $t(fin) = t(E)+d(E) = 10+4 = 14.$

$t(\text{fin}) = 14$. Le projet dure au mieux 14 jours.

Date au plus tard : date la plus tardive à laquelle je peux commencer une tâche sans retarder le projet.



$$T(\text{fin}) = t(\text{fin}) = 14.$$

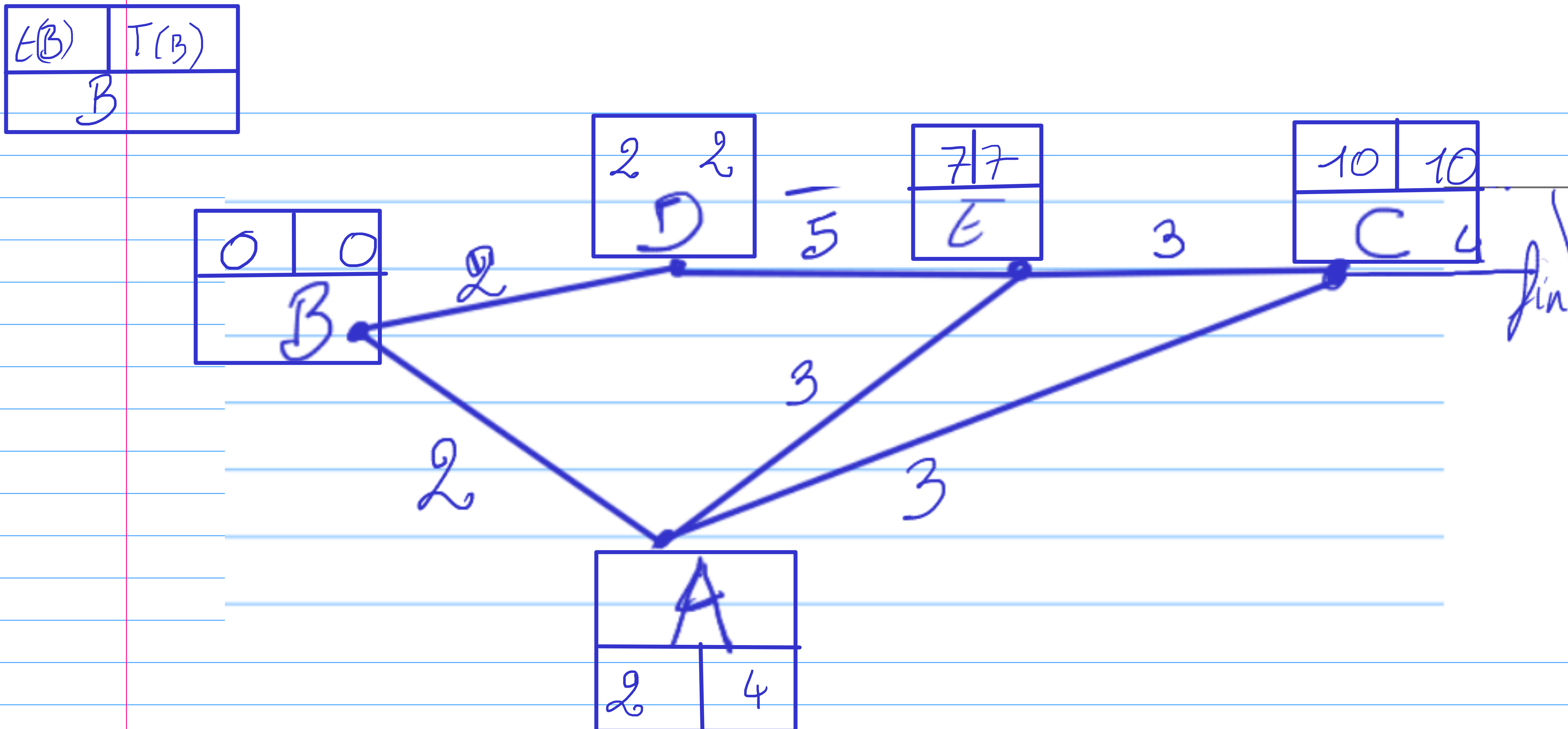
$$T(C) = T(\text{fin}) - d(C) = 14 - 4 = 10$$

$$T(E) = T(C) - d(E) = 10 - 3 = 7$$

$$T(A) = \min\{T(C) - d(A) \,;\, T(E) - d(A)\}$$
$$= \min(10 - 3 \,;\, 7 - 3) = 4$$

$$T(D) = T(E) - d(D) = 7 - 5 = 2$$

$$T(B) = \min(T(D) - d(B) \,;\, T(A) - d(B)) = \min(2 - 2 \,;\, 4 - 2)$$
$$= 0$$



Marge d'une tâche : $T(M) - t(M)$

Marge de E est 0

Marge de A est $4-2=2$.

Une tâche dont la marge est zéro est dite critique.

Chemin critique : chemin ne contenant que des tâches critiques.

BDEC est un chemin critique.

Le chemin critique doit servir de référence pour l'organisation du projet. Aucune tâche ne peut être retardée sans impliquer un retard de fin du projet.

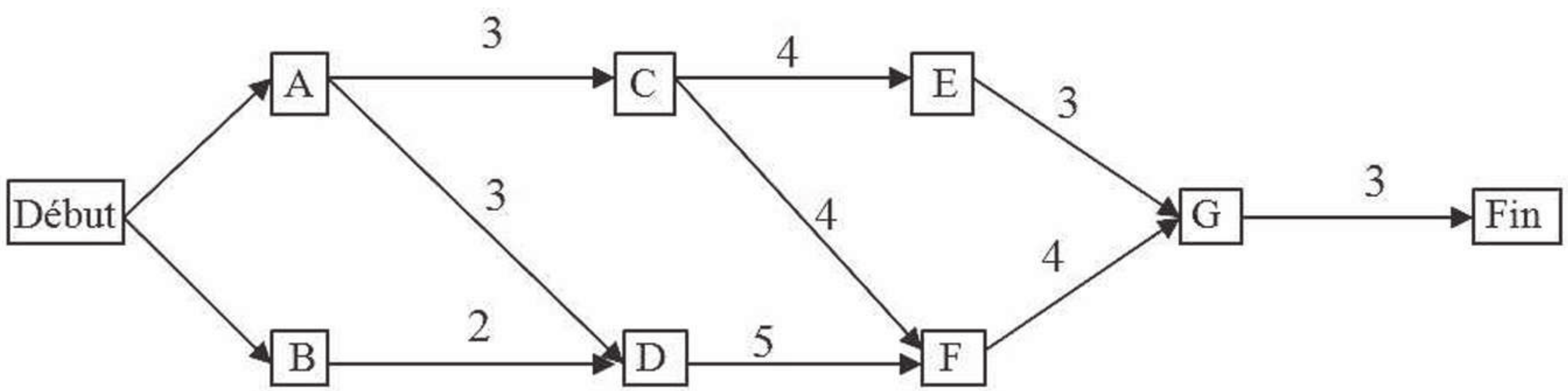
Autre exemple :

Exemple. Pour illustrer la méthode MPM, nous allons réaliser l'ordonnancement d'un projet fictif, comprenant des tâches que nous noterons A, B, C, D, E, F, G. Les contraintes d'antériorité et les durées de ces tâches sont consignées dans le tableau suivant.

Tâche	**Durée (en jours)**	**Tâches antérieures**
A	3	aucune
B	2	aucune
C	4	A
D	5	A, B
E	3	C
F	4	C, D
G	3	E, F

La première chose à faire est de définir le niveau de chaque tâche. Il est simple de voir que A et B sont de niveau 0, C et D de niveau 1, E et F de niveau 2 et G de niveau 3.

Le graphe ordonné est le suivant



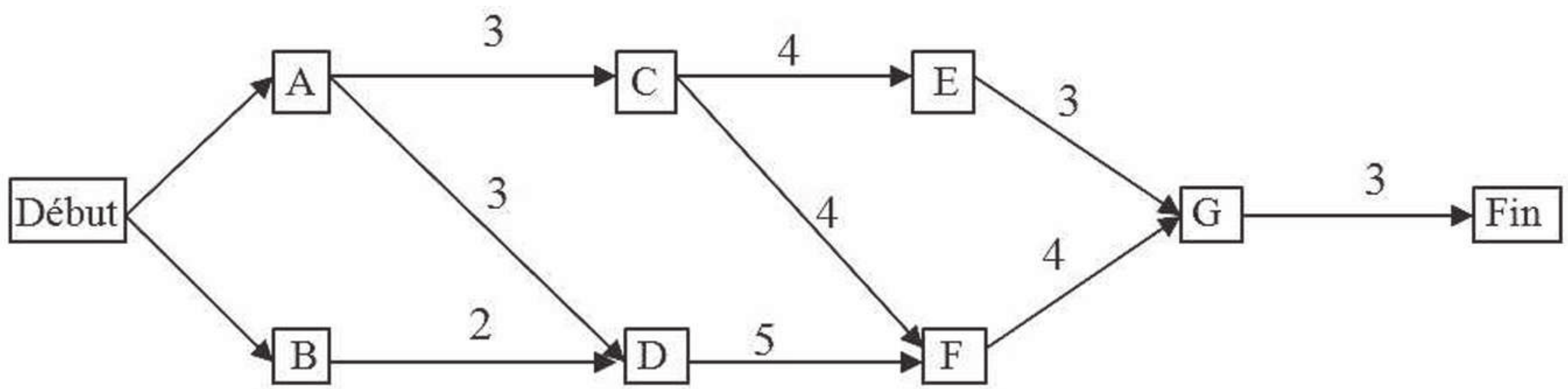
- À quel moment peut-on commencer une tâche ?
- Est-ce qu'on peut retarder le moment de démarrer certaines tâches sans que cela ait d'impact sur la durée minimale du projet ?

15.1 Date au plus tôt

La date au plus tôt d'une tâche est la date minimale à laquelle on peut commencer la tâche, car toutes les tâches antérieures sont terminées.

Notation. Ces notions utilisent les durées des tâches. Pour la tâche x_j, nous la noterons $d(x_j)$. Nous noterons $t(x_j)$ la date au plus tôt d'une tâche x_j. $t(x_j)$ est le plus grand des nombres $t(x_i) + d(x_i)$ où x_i est une des tâches qui précèdent immédiatement la tâche x_j.

Reprenons notre dernier exemple.



Calculons les dates au plus tôt des tâches du projet :

- $t(A) = t(B) = 0$
- $t(C) = t(A) + d(A) = 0 + 3 = 3$

- Pour G, on calcule

    (i) $t(E) + d(E) = 7 + 3 = 10$,

    (ii) $t(F) + d(F) = 8 + 4 = 12$,

    et donc t(G) = 1 2.

- Pour finir, $t(Fin) = t(G) + d(G) = 12 + 3 = 15$.

On a ainsi calculé la date au plus tôt de la fin du projet qui est de 15 jours.

Note. Cette date au plus tôt de fin de projet ne correspond pas au chemin le plus court par l'algorithme de Dijsktra. En effet, dans un chemin le plus court, on ne se soucie pas d'avoir laissé le temps à chaque tâche (étape) d'avoir été faite.

15.2 Date au plus tard

La date au plus tard d'une tâche est la date maximale à laquelle on peut commencer la tâche sans que cela ne repousse la date de fin du projet.

Notation. Nous noterons $T(x_j)$ la date au plus tard d'une tâche x_j. $T(x_j)$ est le plus petit des nombres $T(x_k) - d(x_j)$ où x_k est une des tâches qui suit immédiatement la tâche x_j.

Pour poursuivre notre exemple, calculons les dates au plus tard des tâches du projet : on doit commencer par la fin puisqu'à chaque fois, on doit considérer les successeurs.

- On a bien sûr $T(Fin) = t(Fin) = 15$.
- $T(G) = T(Fin) - d(G) = 15 - 3 = 12$.

- A a deux successeurs : C et D. On calcule

  (i) $T(C) - d(A) = 4 - 3 = 1$,

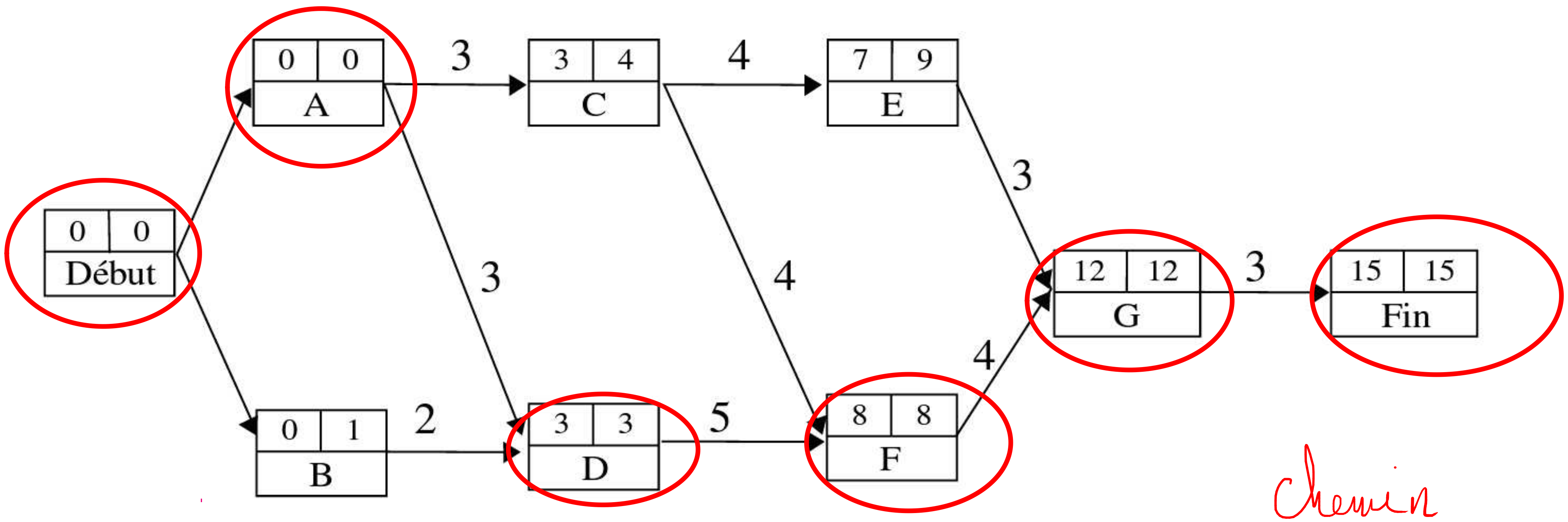
  (ii) $T(D) - d(A) = 3 - 3 = 0$.

  Donc $T(A) = 0$.

<table>
<tr><td>$t(x_j)$</td><td>$T(x_j)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">x_j</td></tr>
</table>

Par exemple, pour
la tâche E :

<table>
<tr><td>7</td><td>9</td></tr>
<tr><td colspan="2">E</td></tr>
</table>



Chemin critique.

Une tâche critique est une tâche dont les dates au plus tôt et au plus tard sont égales. Donc x_j est critique si et seulement si $t(x_j) = T(x_j)$. Un chemin critique est un chemin reliant le début à la fin et qui n'est constitué que de tâches critiques.

15.3 Marge totale d'une tâche

Definition 15.1 *La marge totale d'une tâche c'est le retard maximum que l'on peut accepter sur la date de début de la tâche sans que cela ne retarde la date de fin du projet.*

La marge totale d'une tâche x_j *se note* $MT(x_j)$ *et elle vaut* $MT(x_j) = T(x_j) - t(x_j)$.

La marge totale d'une tâche critique est nulle.