Contrôle Continu (Partiel)

- **Quand ? : lundi 13 mars 2023 de 8h30 à 9h30 (durée 1 heure)**
  - **+ tiers temps additionnel**
- **Où ? : Stendhal Hall Nord Amphi 3**
- **Comment ? :**
  - **Notes de cours et de TD autorisées**
  - **Aucun appareil électronique (traducteur, téléphone portable, calculatrice, montre connectée, etc.) autorisé**
  - **Copies de composition non fournies…**
- **Quoi ? : tout ce qui aura été vu en cours et en TD**

Automates à Pile

MIASHS L2

(d'après le cours de Julie Dugdale)

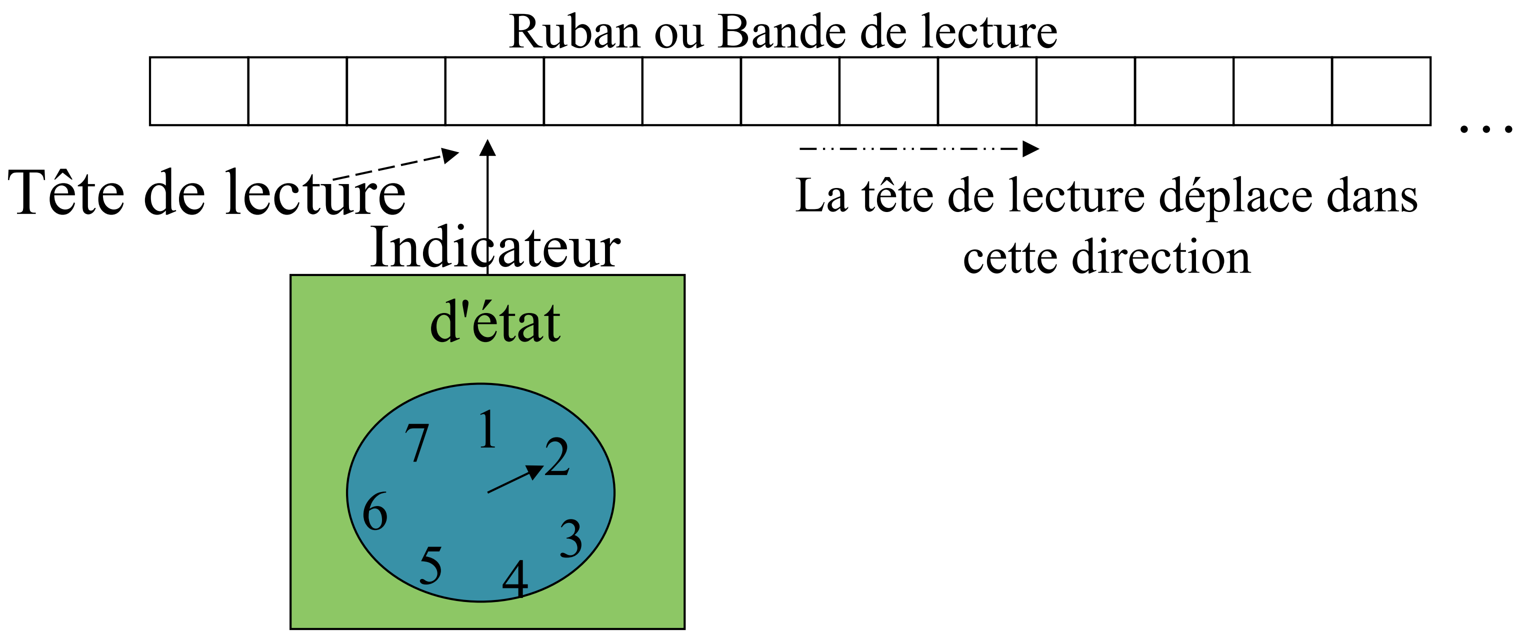
Jérôme GENSEL – Jerome.Gensel@univ-grenoble-alpes.fr
Prof. Université Grenoble Alpes
UFR SHS – Laboratoire d'Informatique de Grenoble

Sommaire

- Limitations des AEFD & AEFND
- Automates à pile
- Transitions dans les automates à pile (AAP)
- Définition
- Configurations
- Exemples
- Automates à pile et langages
- Grammaires hors-contexte
- Construire un AAP à partir d'une grammaire hors-contexte

Limitations des automates finis

- Les automates finis ne peuvent pas accepter certains langages – par exemple, le langage $\{x^n y^n \mid n \in N\}$.



Limitations des automates finis

- La raison pour laquelle les AF ne sont pas adaptés à la reconnaissance de certains langages est qu'ils n'ont pas de mémoire
- Ceci signifie qu'ils ne peuvent pas être utilisés pour analyser les langages, tels que les langages de programmation, qui peuvent avoir des structures emboitées sur une profondeur arbitraire (par exemple, des expressions arithmétiques avec des parenthèses ou des accolades...)

```
public class HelloWorld {
    public static void main(String[] args) {
        // Prints "Hello, World" to the terminal window.
        System.out.println("Hello, World");
    }
}
```

Limitations des automates finis

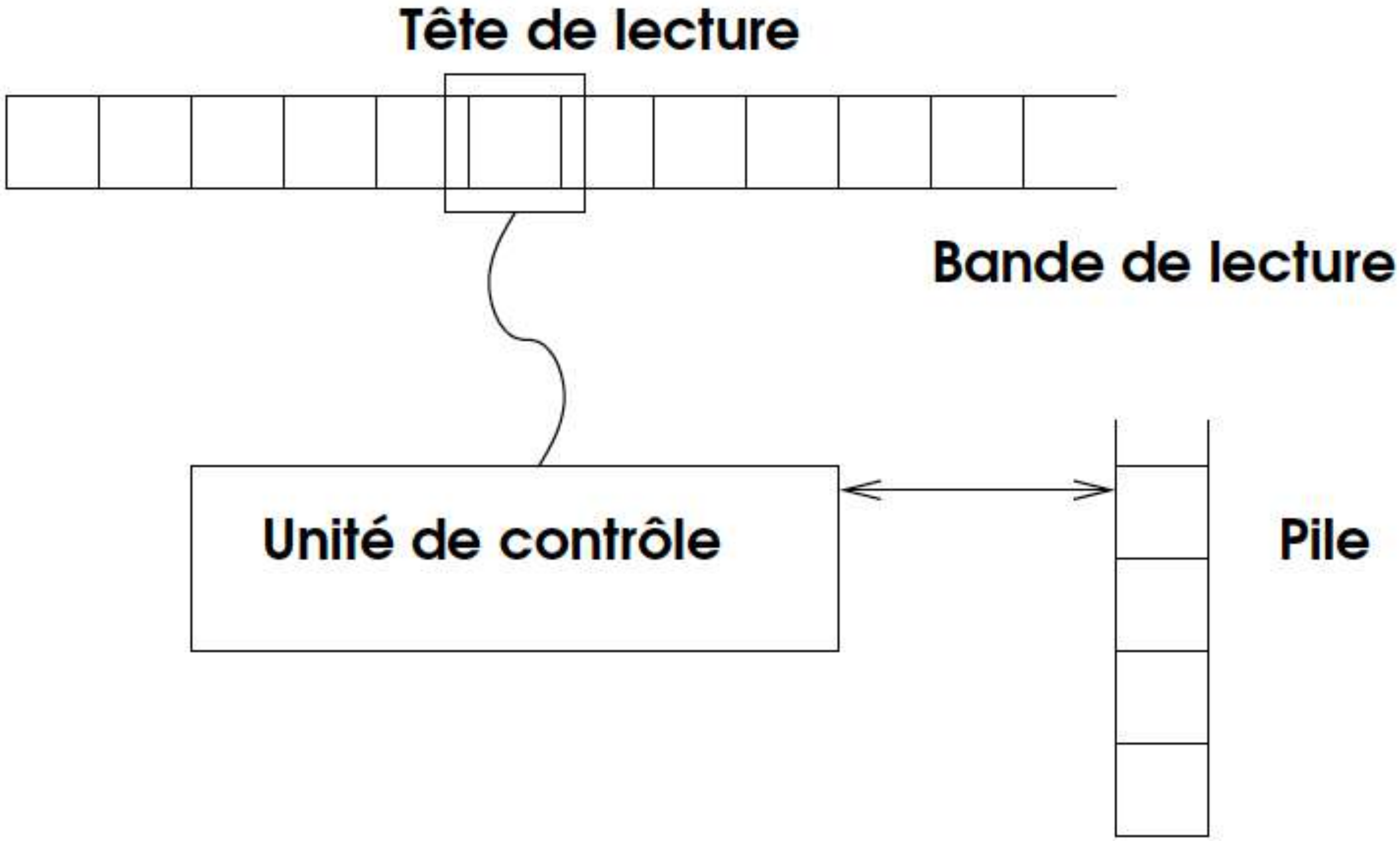
- Etant donnée une séquence de parenthèses ouvrantes (gauches), il n'y a donc aucun moyen de se souvenir de combien ont été observées pour pouvoir les faire correspondre aux parenthèses fermantes (droites)

- Pour surmonter les limitations des AEF, il semble opportun de construire une machine avec une forme de mémoire qui permettrait de « se souvenir » des parties de chaîne ou de mot déjà lues...

Automate à pile

- Un automate à pile (AAP) peut être vu comme un automate fini avec l'ajout d'une pile (ou '*stack*' en anglais) vers laquelle des symboles peuvent être :
  - « empilés » ('*pushed*' en anglais)
  - « dépilés » ('*popped*' en anglais).

Automate à pile – schéma général



Automate à pile - principes

- Par rapport à la pile, la machine peut seulement empiler des symboles sur le haut de la pile et les lire à partir du haut de la pile – c.à.d. elle n'a accès à aucune autre partie que le haut de la pile
- Donc, par exemple, pour atteindre le troisième symbole à partir du haut, les deux symboles du dessus doivent être dépilés d'abord

Automate à pile – côté pile

- Les symboles de la pile forment un ensemble fini de symboles qui peut inclure :
  - tout symbole de l'alphabet de la machine (c.à.d. les symboles qui peuvent apparaître sur la bande de lecture)
  - des symboles utilisés uniquement dans la pile – par exemple des marqueurs internes pour séparer différentes portions de la pile qui sont utilisées pour différents buts…
- Note : un symbole spécial peut être utilisé pour marquer le fond de la pile (quand il est dépilé, on sait alors que la pile est vide).
  - On adoptera le symbole $.

Transitions dans les automates à pile

- Comme nous l'avons vu, dans un Automate à Etats Finis (AEF), une transition dépend de :
  1. L'état actuel de la machine
  2. Le symbole lu sur la bande de lecture (ruban)

- À partir de ces **deux** éléments, un AEF se place dans un nouvel état :
  - Soit un ***unique*** nouvel état, si la machine est déterministe,
  - Soit ***un*** état ***parmi plusieurs*** états si elle est non-déterministe.

Transitions dans les automates à pile

- Les transitions dans les automates à piles sont plus complexes...

- Dans un AAP, une transition dépend :
  1. De l'état actuel de la machine
  2. Du symbole lu sur la bande de lecture
  3. Du symbole placé en haut de la pile

- À partir de ces **trois** éléments, un AAP se place dans un nouvel état **et** il empile un nouveau symbole sur le haut de la pile

Notes

- De la même manière que la tête de lecture ou la bande de lecture est supposée se déplacer après que le symbole courant a été lu, le symbole du haut de la pile est supposé être dépilé après qu'il a été lu.

- Sauf cas particulier, les AAP sont supposés non-déterministes

  c.à.d. pour chaque triplet (état courant, symbole en entrée, symbole de dessus de la pile), il peut y avoir plusieurs paires possibles (état suivant, symbole empilé)

Note

- Dans les AAP, le symbole empilé, le symbole dépilé, et le symbole lu sur la bande, peuvent être ε

- Ceci permet à la machine de changer d'état sans lire de symbole ou altérer sa pile

Automate à Pile (AAP) - Définition

- Un AAP est défini par la donnée de :
  - Q : un ensemble d'états
  - Σ : un alphabet ➔ ensemble de symboles (sur le ruban)
  - Γ : un (autre) alphabet ➔ ensemble de symboles (dans la pile)
  - $\$ \in \Gamma$: un symbole initial de pile
  - $q0 \in Q$: un état initial
  - $F \subseteq Q$: un ensemble d'états finaux
  - Δ : un ensemble de transitions (**quintuplets**)

Diagramme de transitions pour les AAP

- Comme pour les AEF, un diagramme de transitions pour les AAP est utilisé pour décrire le comportement de la machine

- Cependant, les diagrammes des AEF sont seulement étiquetés avec le symbole courant lu sur la bande de lecture

- La nature plus complexe des transitions dans les AAP fait que les arcs sont étiquetés de manière plus élaborée...

Diagramme de transitions pour les AAP

- Dans un diagrammes de transitions d'AAP, les arcs ont des étiquettes de la forme (**x, y ; z**) où :

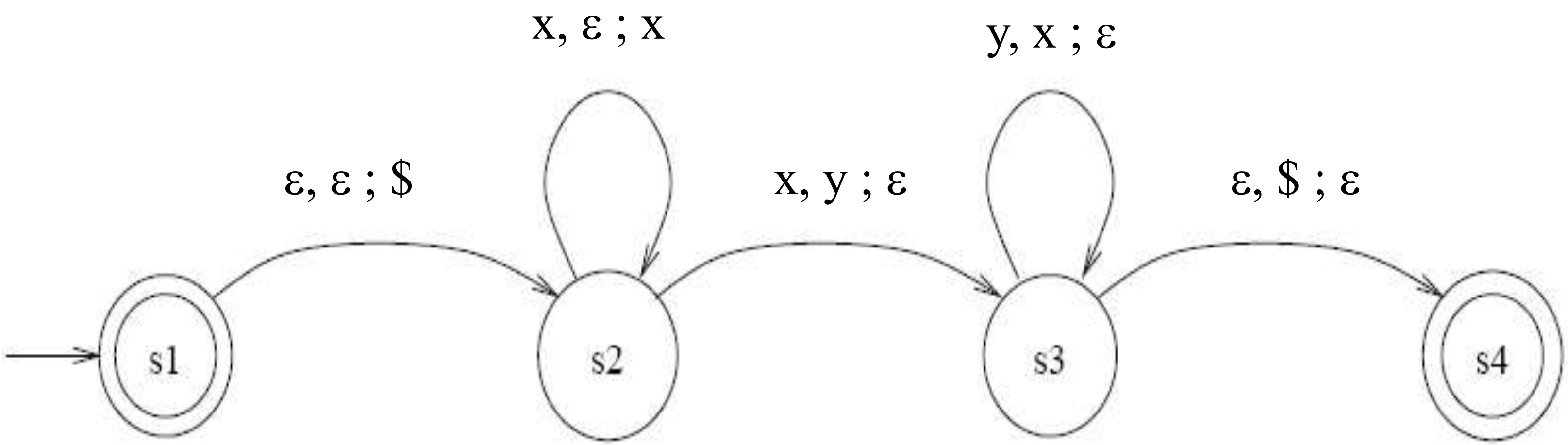
1. x est le symbole lu sur la bande de lecture
2. y est le symbole dépilé
3. z est le symbole empilé

➔ alors que (x, y) sont lus, z est écrit

Note : à la fois le symbole d'entrée **et** le symbole de la pile doivent être spécifiés sur l'arc pour que la transition ait lieu

Diagramme de transitions pour les AAP

- Voici un diagramme de transitions pour un AAP



- <u>Exemple</u>: Si la machine lit un x sur la bande de lecture alors qu'elle est dans l'état s2, elle empilera un x sur la pile et retournera dans l'état s2

AAP défini par :

- Q : ensemble d 'états
- Σ : alphabet (ruban)
- Γ : alphabet (pile)
- $\$ \in \Gamma$: symbole initial de pile
- $q0 \in Q$: état initial
- $F \subseteq Q$: ensemble d'états finaux
- Δ : ensemble de transitions (quintuplets)

Transition

- C'est un élément de Δ :
  - $(q, u, \alpha) \to (q', \beta)$

  $q, q' \in Q$; $u \in \Sigma^*$; $\alpha, \beta \in \Gamma^*$

- Se lit : si dans l'état q, l'automate lit le <u>mot</u> u sur le ruban (de gauche à droite) et si le mot α figure en haut de la pile (de haut en bas), alors l'automate passe dans l'état q' : le mot u a été lu et en haut de la pile, α est remplacé par β

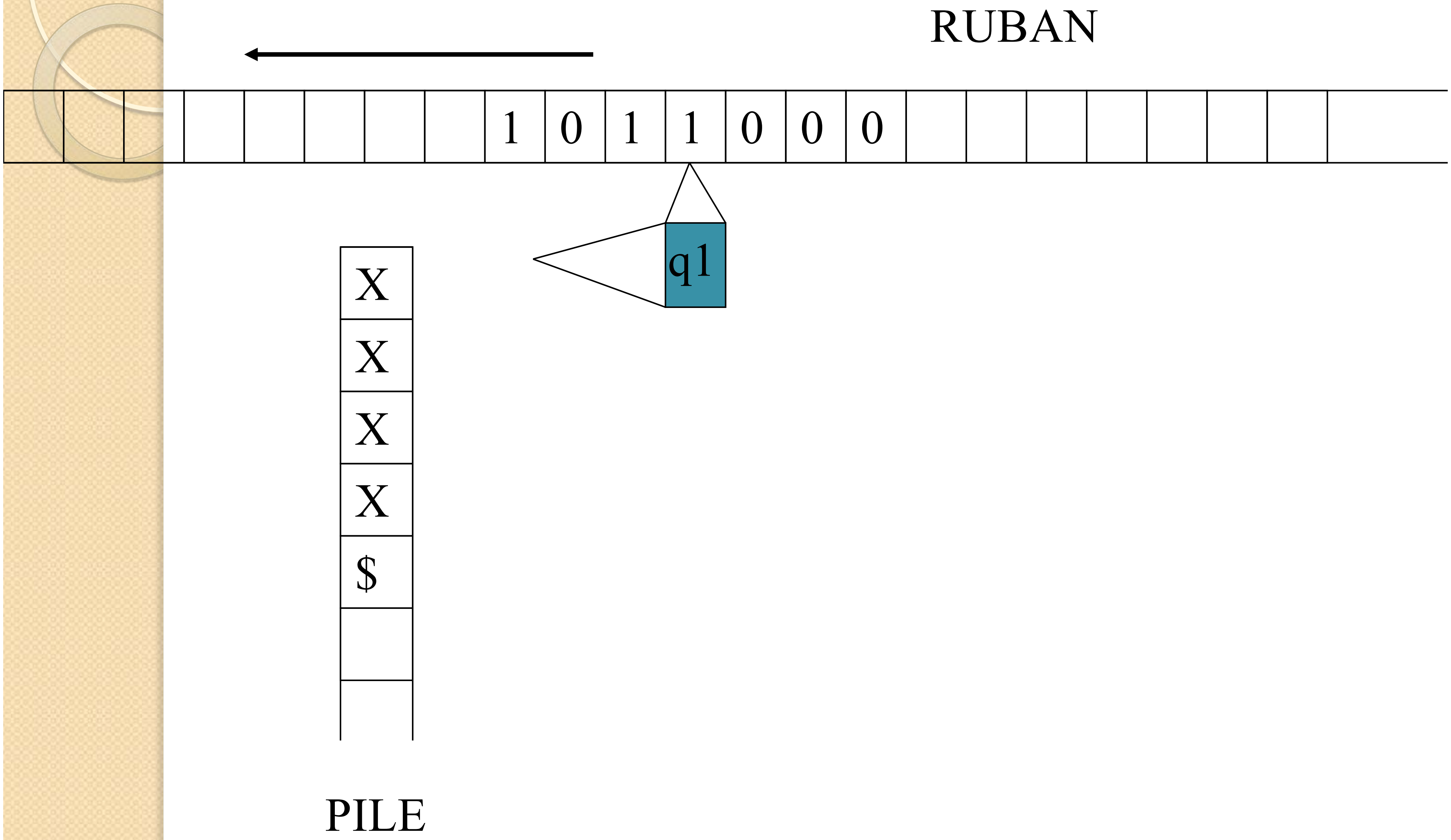
Transition

- Donnée de :
  - Q : ensemble d 'états
  - Σ : alphabet (ruban)
  - Γ : alphabet (pile)
  - $\$ \in \Gamma$: symbole initial de pile
  - $q0 \in Q$: état initial
  - $F \subseteq Q$: ensemble d'états finaux
  - Δ : ensemble de transitions (quintuplets)

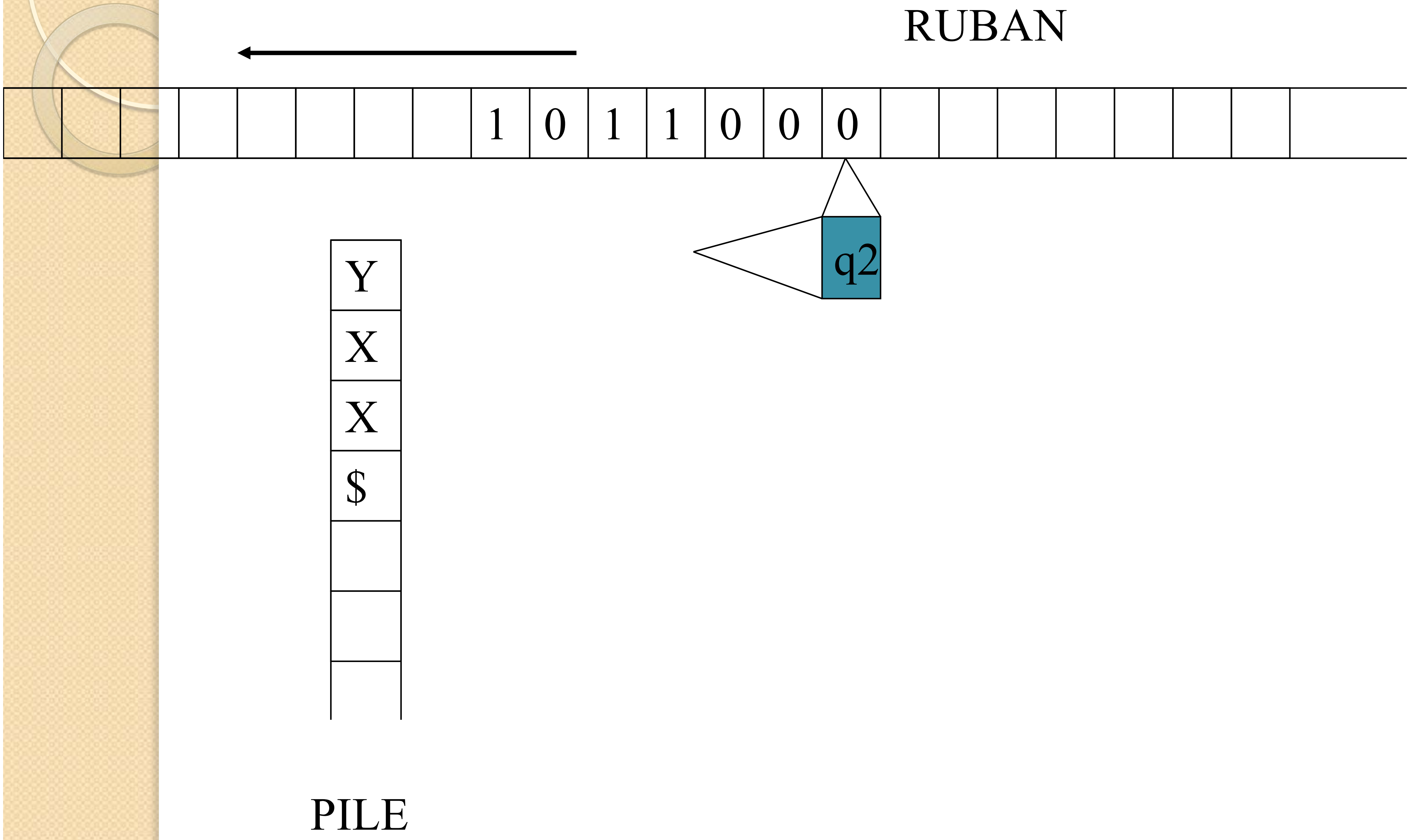
- C'est un élément de Δ :
  - $(q, u, \alpha) \rightarrow (q', \beta)$

  $q, q' \in Q$; $u \in \Sigma^*$; $\alpha, \beta \in \Gamma^*$
- Remarques
  - Si $\beta = \varepsilon$, la pile a été dépilée sauf si $\alpha = \varepsilon$
  - Si $u = \varepsilon$, le changement d'état et la modification de la pile se font sans mouvement de la tête ou du ruban
  - Si $\alpha = \varepsilon$, il s'agit d'une transition permise quel que soit le symbole sur la pile
  - Si $\beta = \varepsilon$ et $\alpha = \varepsilon$ alors la pile est inchangée

(q1, 100, XX) → (q2, Y) :



(q1, 100, XX) → (q2, Y) :



Cas particuliers

- $(q0, u, \varepsilon) \rightarrow (q1, \beta)$
  - EMPILER β (ε donc ne rien dépiler)
- $(q0, u, \alpha) \rightarrow (q1, \varepsilon)$
  - DEPILER α (ε donc ne rien empiler)

Configurations

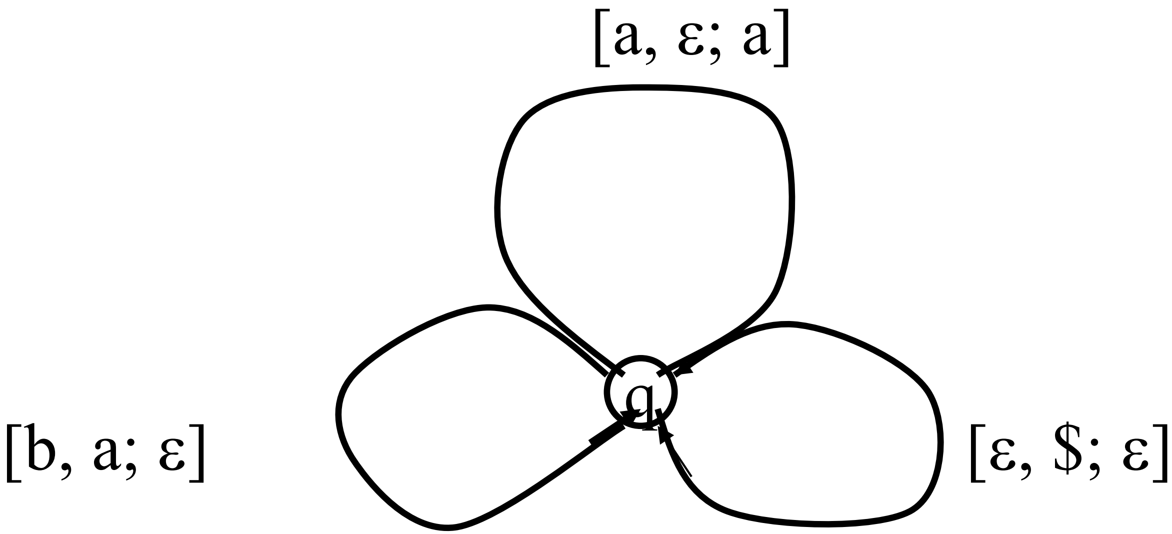
- Triplet (q, u, σ) où:
  - $q \in Q$; $u \in \Sigma^*$; $\sigma \in \Gamma^*$
  - q : état courant
  - u : mot restant à lire (de gauche à droite)
  - σ : contenu de la pile (de haut en bas)
- **configuration initiale**:
  - $(q0, w, \$)$
- **configuration terminale**:
  - (q, ε, β) où $q \in F$: automate acceptant sur état final
  - $(q, \varepsilon, \varepsilon)$: automate acceptant sur pile vide (équivalent à l'ε-transition des AEF)

Exemple

- Reconnaître $\{a^n b^n ; n \geq 1\}$ sur pile vide
- **Principe** : empiler des ‘a’ tant que l’automate lit des ‘a’, les dépiler quand il lit des ‘b’
- Conséquence : un automate à pile sait compter !

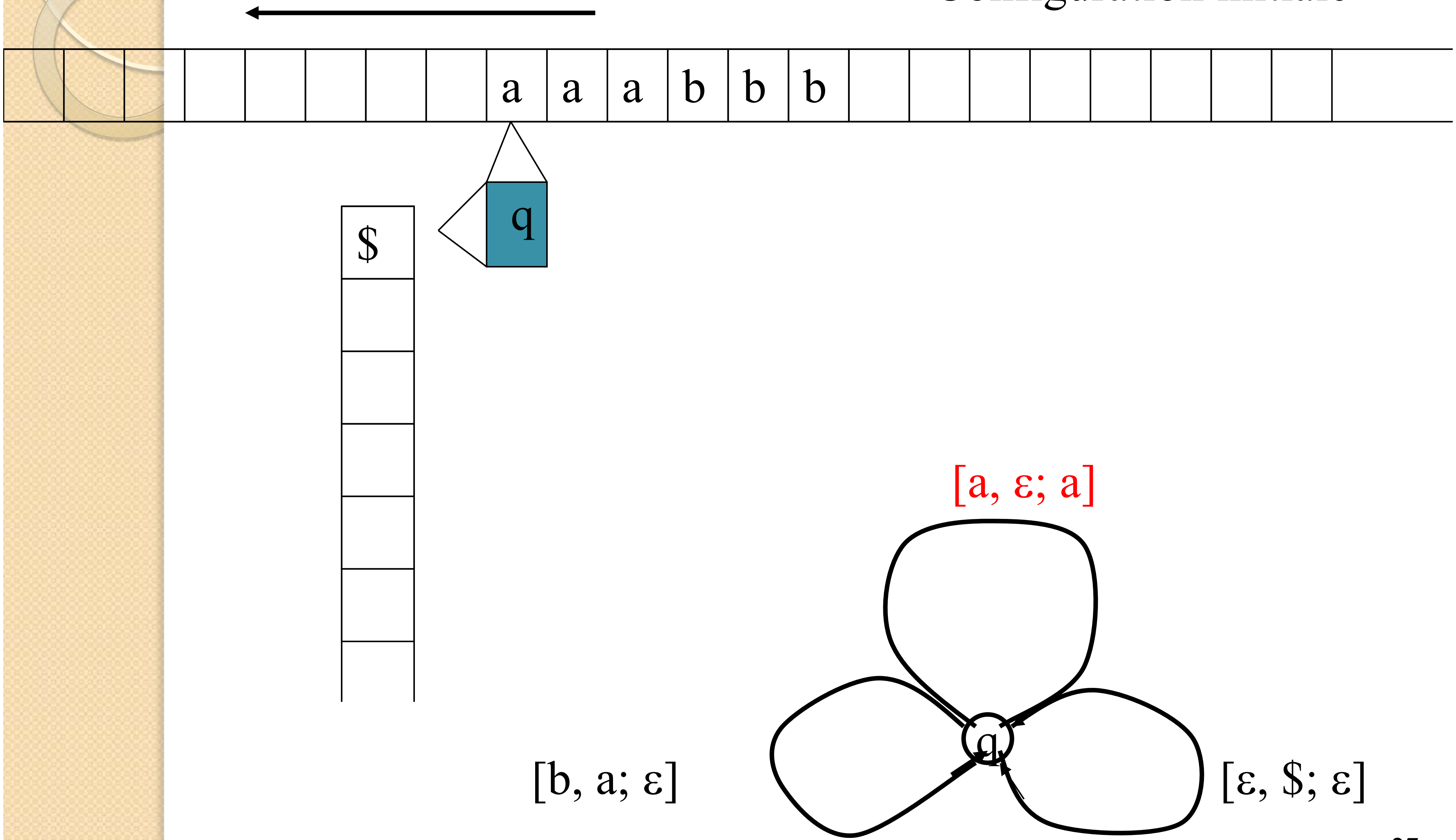
Exemple

- On a les transitions :
  - (q, a, ε) → (q, a)
  - (q, b, a) → (q, ε)
  - (q, ε, $) → (q, ε)

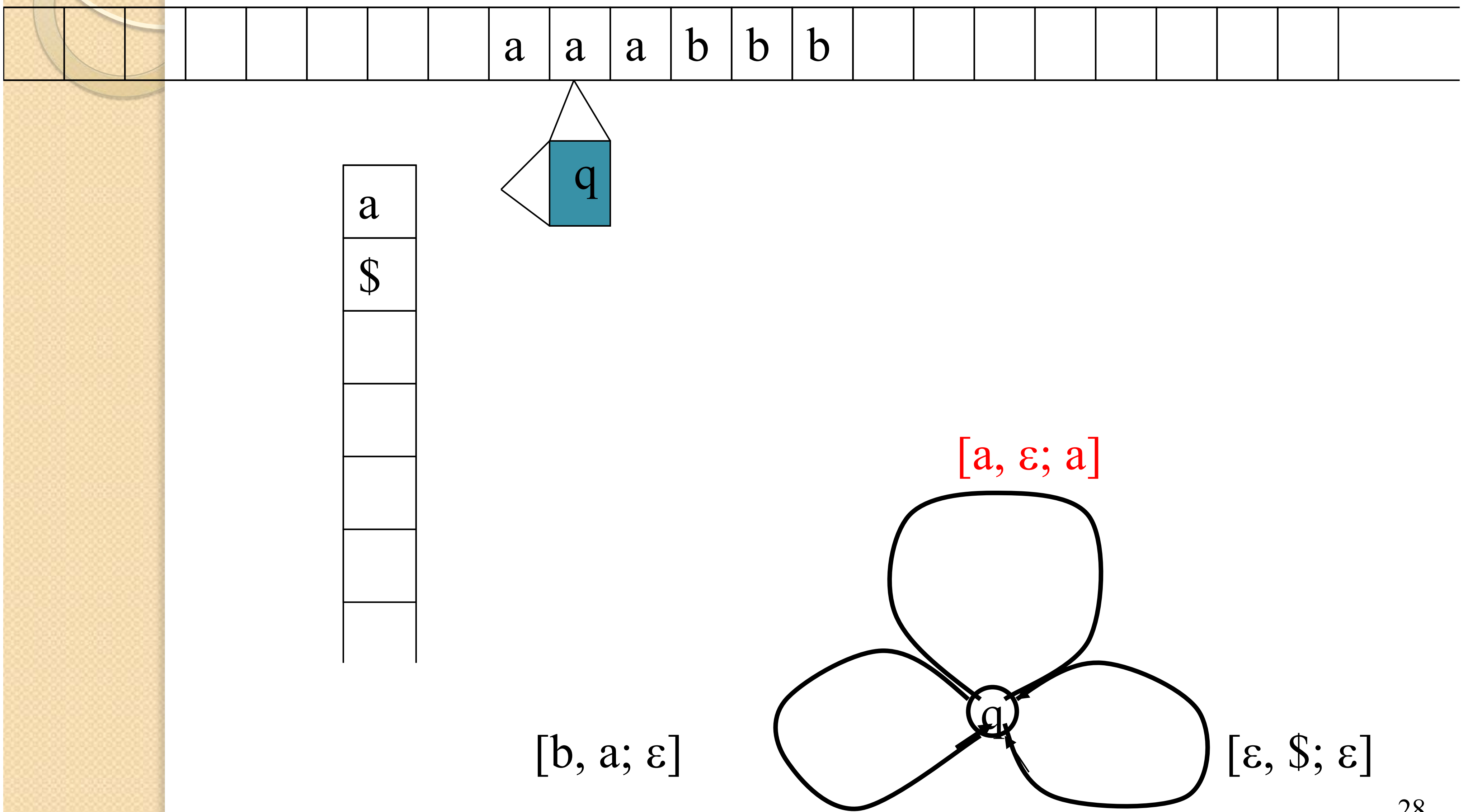


Exemple

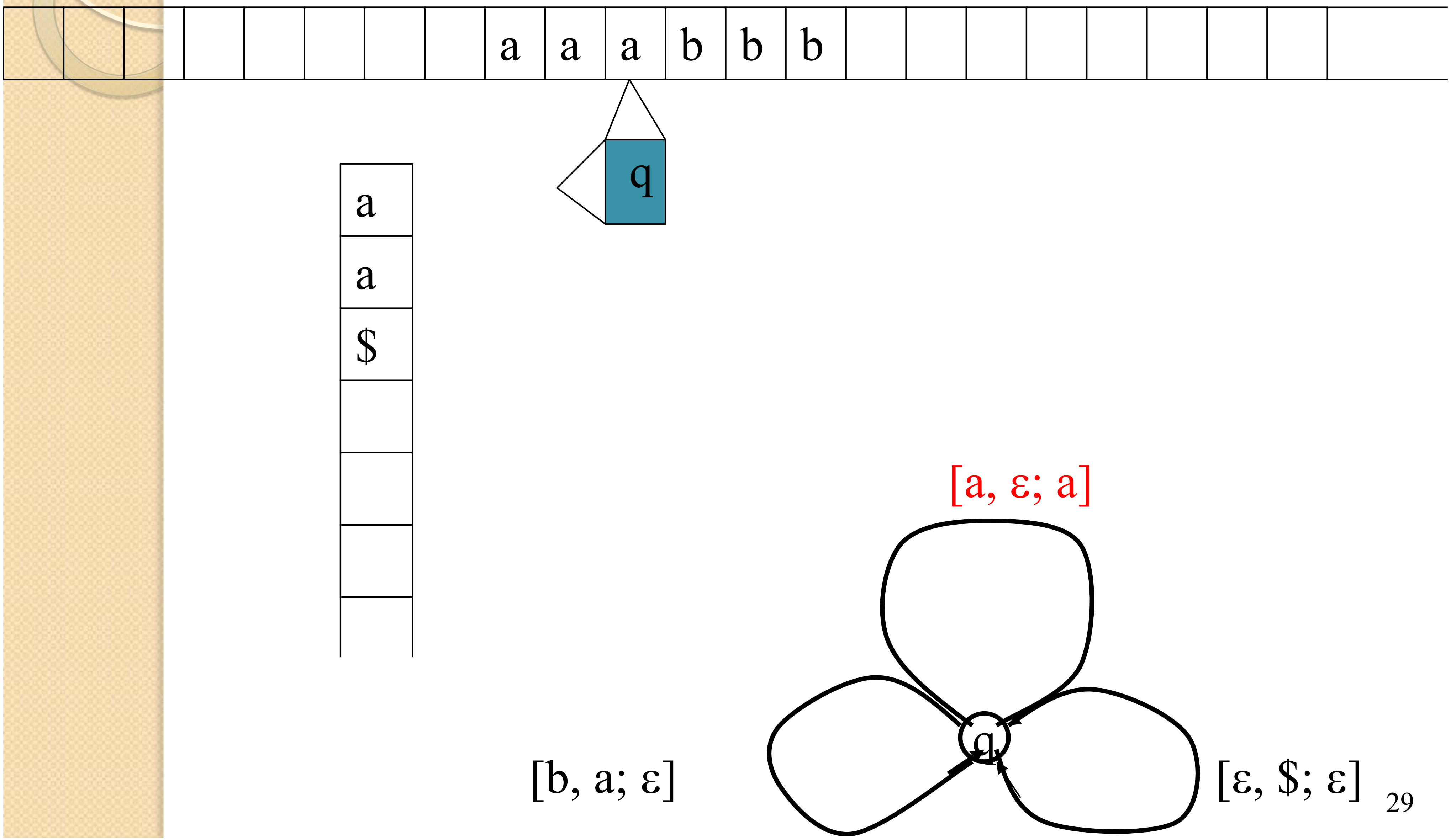
Configuration initiale



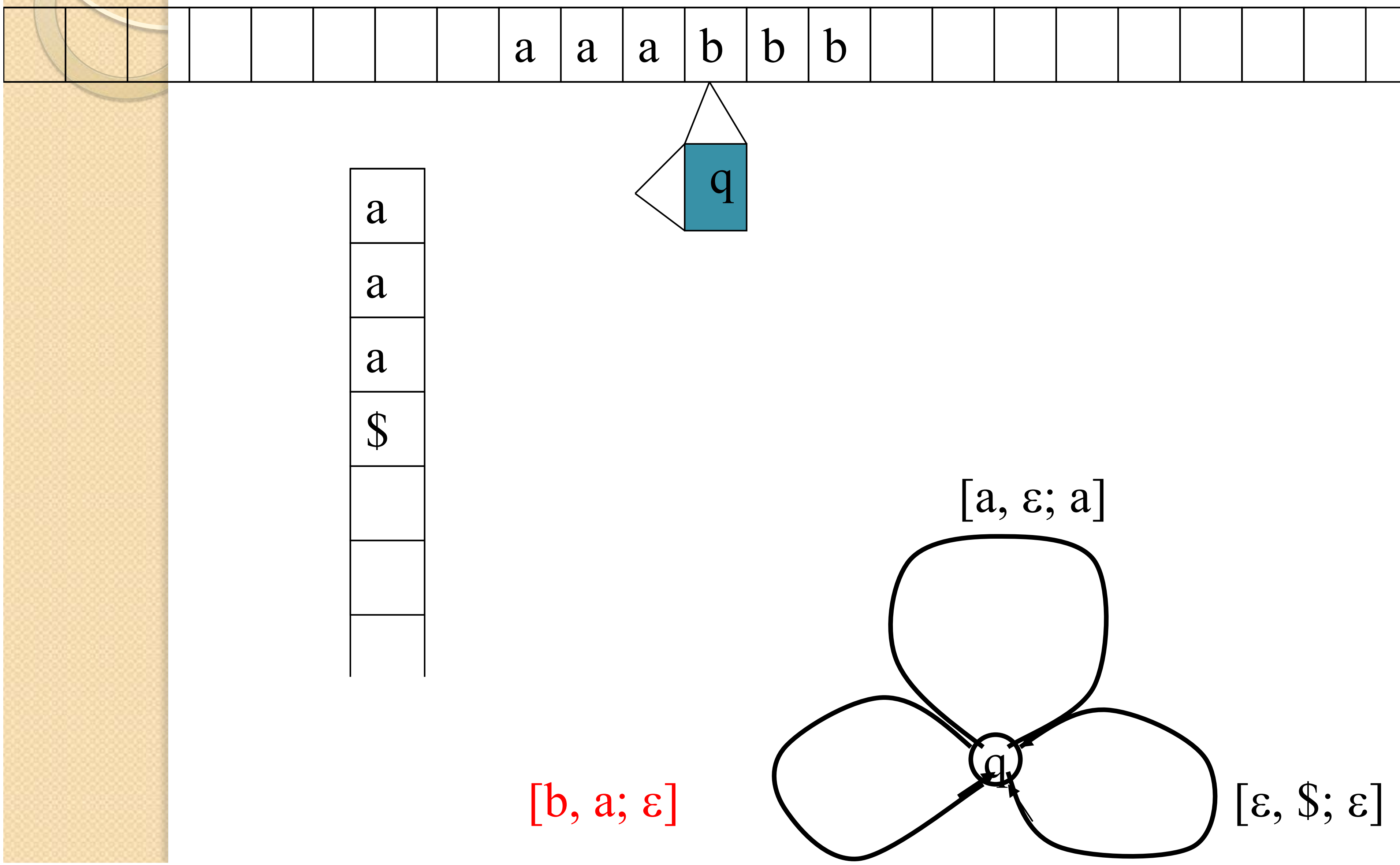
Exemple



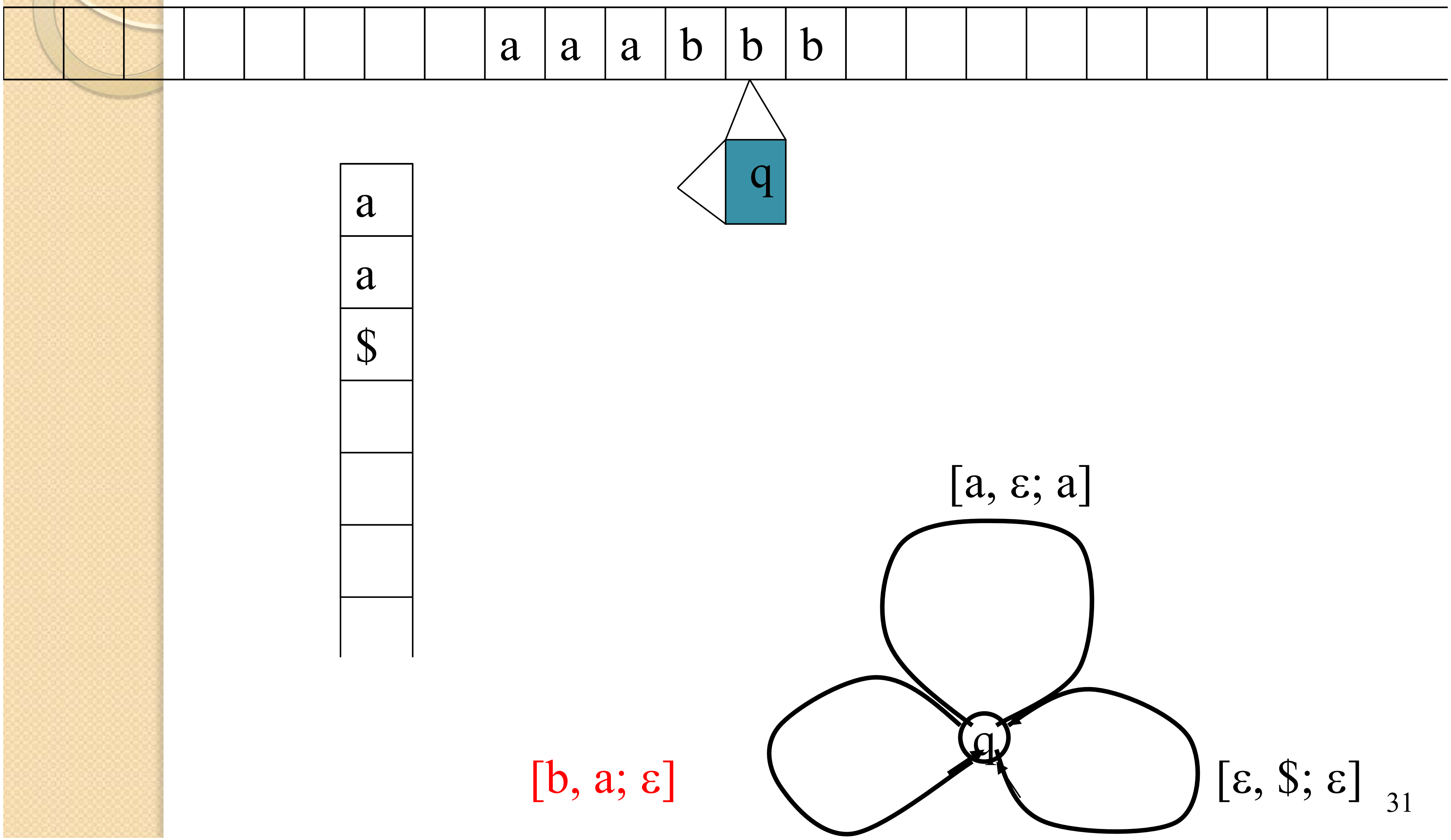
Exemple



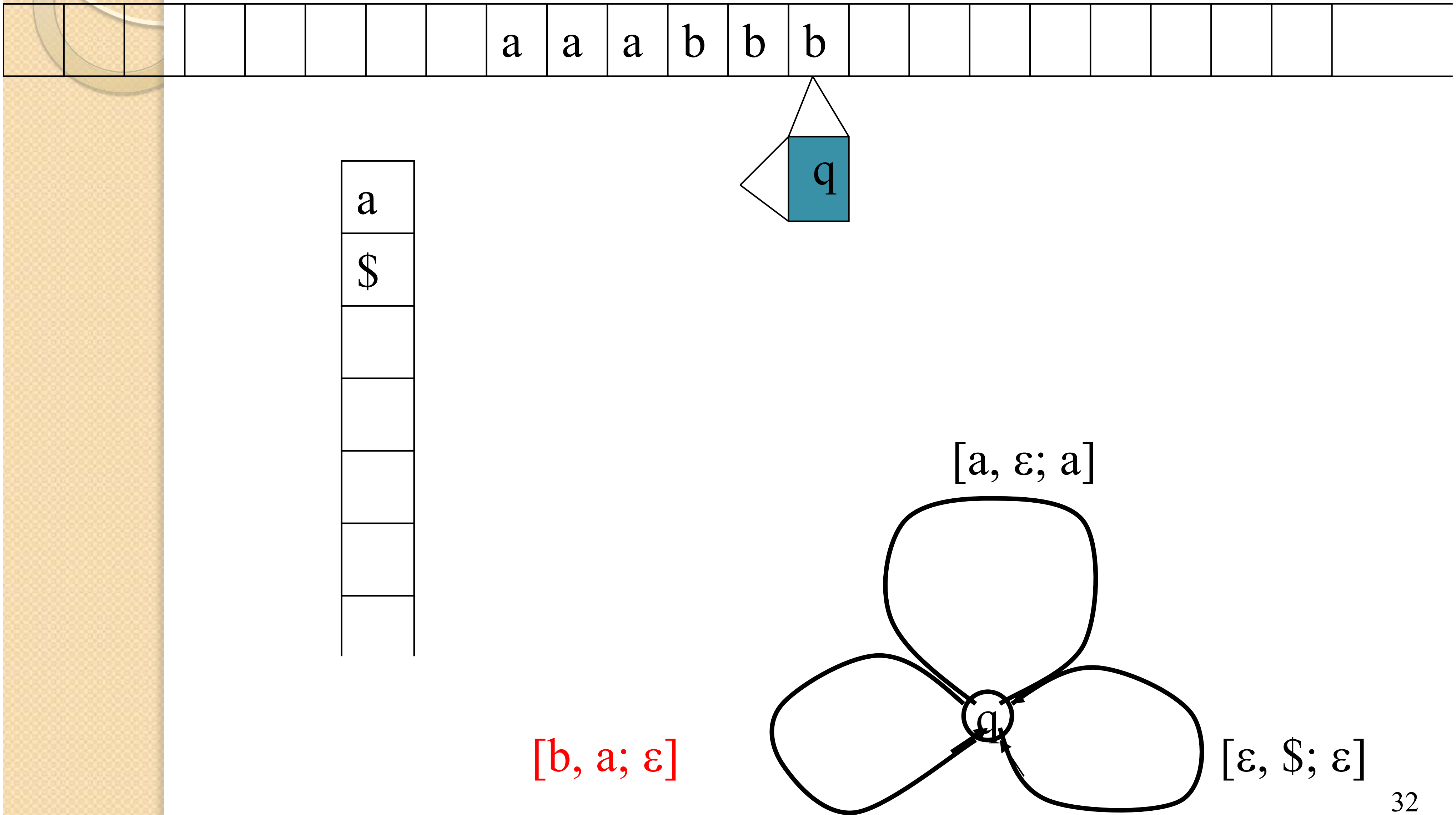
Exemple



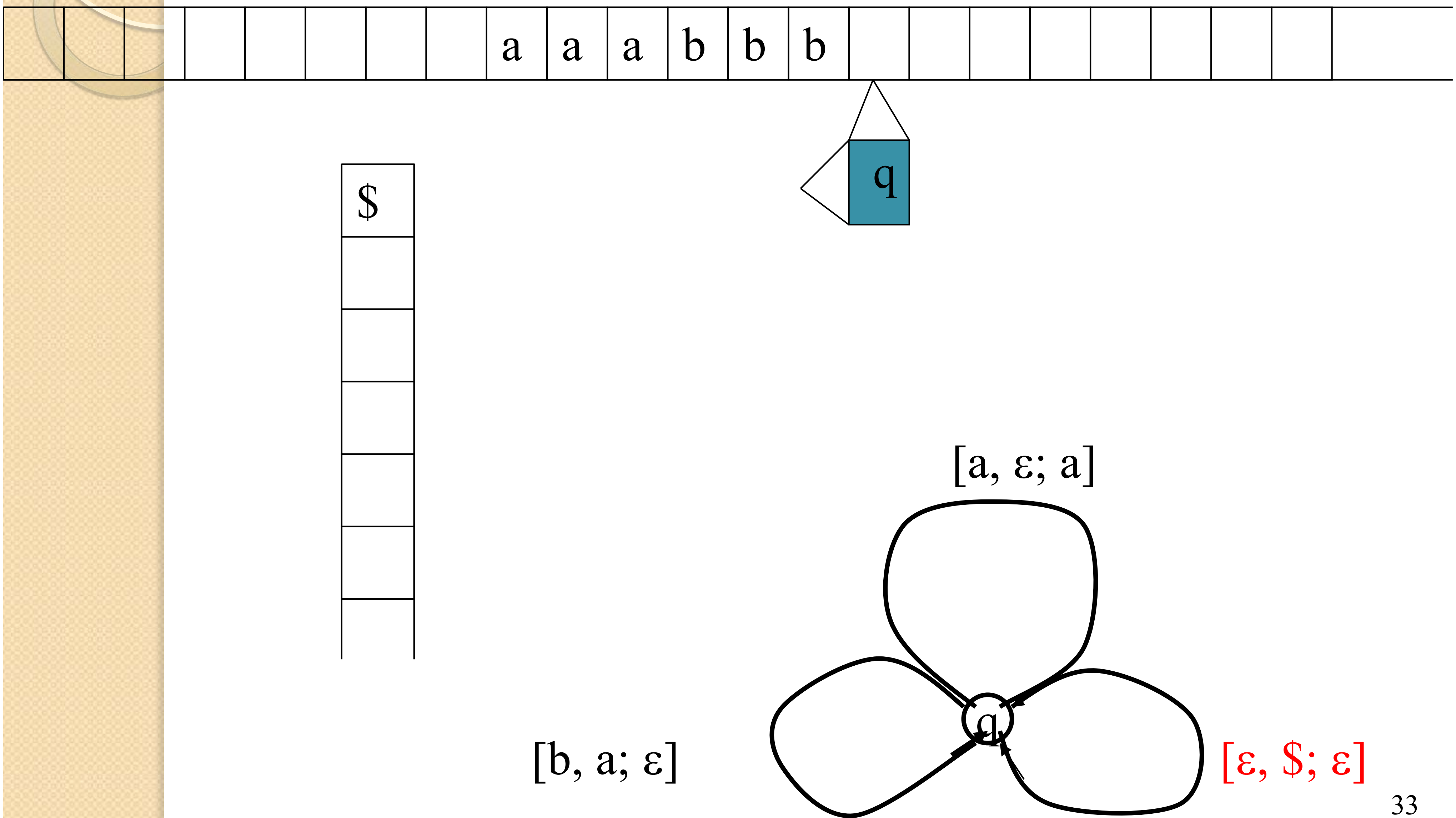
Exemple



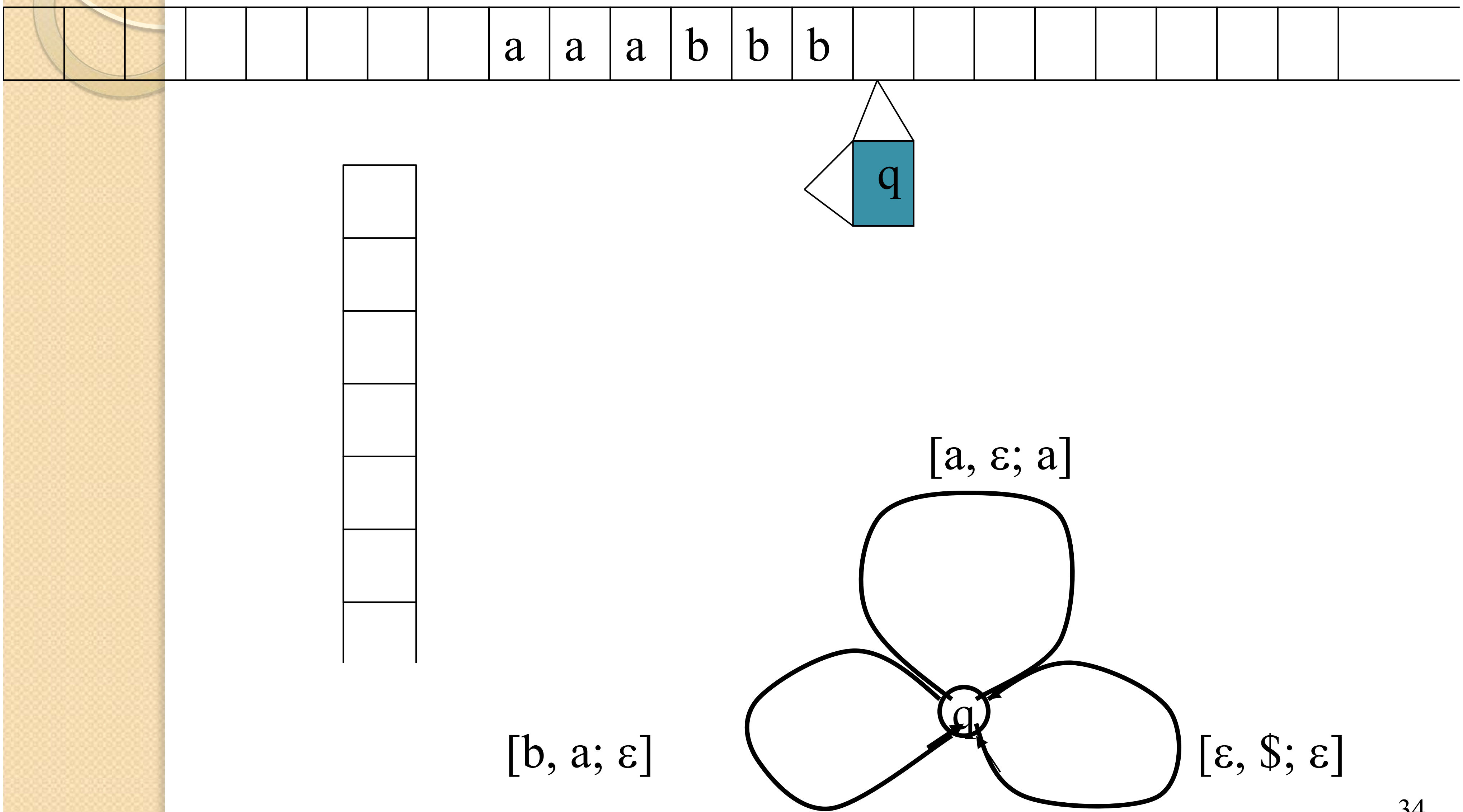
Exemple



Exemple



Exemple



AAP et langages

- On dit qu'un AAP **accepte** une chaine si...
  - avec la chaîne sur la bande de lecture,
  - et en commençant dans l'état initial,
  - avec la tête de lecture placée sur le premier caractère de la chaine

... la machine **peut** se déplacer (c.à.d. il y a une certaine séquence de transitions) vers un état d'acceptation après avoir lu la chaine entière

➔ fonctionnement identique aux AEF

AAP et langages

- Note : la machine peut ne pas être dans un état d'acceptation quand elle a lu le dernier symbole de la bande…

- … et exécuter encore un certain nombre de transitions avant d'atteindre un état d'acceptation
  – c.à.d. elle peut manipuler la pile et changer d'état à la suite de sa dernière lecture

AAP et langages

- Si M est un AAP alors le **langage accepté par** M, noté L(M), est l'ensemble des chaînes acceptées par M

- Si les transitions d’un AAP sont restreintes à celles de la forme :

  $(q, u, \varepsilon) \rightarrow (q', \varepsilon)$

  c.à.d. des transitions qui n’utilisent pas la pile, alors M simule un AEF !

AAP et langages

- En conséquence, les langages acceptés par les AEF – les langages réguliers – sont inclus dans les langages acceptés par les AAP

- Il y a des langages que les AEF ne peuvent pas reconnaître, mais que les AAP peuvent reconnaître – par exemple $\{x^n y^n \mid n \in N\}$

Exemple : AAP et langages

- Soit l'AAP M acceptant le langage $L(M) = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ où ^{R} signifie « *reverse* » ou « inversée »
- Par exemple abcba est une chaîne de L(M)
- La pile est utilisée pour enregistrer la chaine w lorsqu'elle est analysée
- Les symboles de pile A et B représentent les symboles a et b

M :

$Q = \{q0, q1\}$

$\sum = \{a, b, c\}$

$\Gamma = \{A, B\}$

$F = \{q1\}$

$\delta(q0, a, \varepsilon) \rightarrow (q0, A)$

$\delta(q0, b, \varepsilon) \rightarrow (q0, B)$

$\delta(q0, c, \varepsilon) \rightarrow (q1, \varepsilon)$

$\delta(q1, a, A) \rightarrow (q1, \varepsilon)$

$\delta(q1, b, B) \rightarrow (q1, \varepsilon)$

Exercice

- Dessinez le diagramme de transitions associé à l’AAP M de l’exemple que l’on vient de présenter

Exemple (suite)

- Un traitement réussi enregistre la chaîne w sur la pile lorsqu'elle est analysée. Une fois que le c (après le w) est rencontré, on entre dans l'état d'acceptation q1 et la pile contient une chaîne représentant w^R
- Le traitement de M avec l'entrée abcba est :

  (q0, abcba, ε)

  ….

  ….

  ….

  À compléter

Notation configuration :

Triplet (q, u, σ) où :

$q \in Q$; $u \in \Sigma^*$; $\sigma \in \Gamma^*$

q : état courant

u : mot restant à lire (de gauche à droite)

σ : contenu de la pile (de haut en bas)

Exemple : AAP et langages

- Un traitement réussi enregistre la chaîne w sur la pile lorsqu'elle est analysée. Une fois que le c (après le w) est rencontré, on entre dans l'état d'acceptation q1 et la pile contient une chaîne représentant w^R
- Le traitement de M avec l'entrée abcba est :

$$
\begin{aligned}
& [q0, abcba, \varepsilon] \\
\vdash\ & [q0, bcba, A] \\
\vdash\ & [q0, cba, BA] \\
\vdash\ & [q1, ba, BA] \\
\vdash\ & [q1, a, A] \\
\vdash\ & [q1, \varepsilon, \varepsilon]
\end{aligned}
$$

Notez: notation configuration:

Triplet (q, u, σ) où:

$q \in Q$; $u \in \Sigma^*$; $\sigma \in \Gamma^*$

q : état courant

u : mot restant à lire (de gauche à droite)

σ : contenu de la pile (de haut en bas)

Grammaires hors-contexte (GHC)

Rappel:

- Dans une grammaire hors-contexte (GHC), la partie gauche d'une règle de grammaire est un non-terminal et la partie droite peut consister en tout nombre de terminaux ou non-terminaux, dans n'importe quel ordre.
- Type?
  - Grammaire de type 2
- Les GHC sont appelées **hors-contexte** parce que leurs règles de réécriture peuvent être appliquées sans rapport avec le contexte dans lequel elles apparaissent

Grammaires hors-contexte

- Comparons

$$A \to P$$

avec

$$xAy \to P.$$

- La première règle est une règle hors-contexte puisque A peut être réécrite en P dans n'importe quel contexte…
- La seconde n'est pas hors-contexte puisque A peut seulement être réécrite en P si elle apparaît entre un *x* et un *y*

➔ son application est dépendante du contexte

➔ de telles règles sont appelées **sensibles au contexte**

Construire un AAP à partir d'une GHC

- Un des résultats principaux de la théorie des automates est :

Les langages générés par les grammaires hors-contexte sont exactement les langages acceptés par les automates à piles

Construire un AAP à partir d'une GHC

- Le comportement de l'automate peut être décrit comme suit :

1. D'abord, il marque le fond de la pile avec $
2. Ensuite, il empile S, le symbole de départ de la grammaire, sur la pile et entre dans l'état q
3. Jusqu'à ce que $ revienne sur le dessus de la pile,
   1. (a) Soit l'automate dépile un non-terminal du haut de la pile et le remplace par la partie droite d'une règle de réécriture pour ce non-terminal
   2. (b) Soit l'automate dépile un terminal du haut de la pile pendant qu'il lit le même terminal sur l'entrée
4. Quand $ revient en haut de la pile, l'automate se déplace dans son état d'acceptation

Construire un AAP à partir d'une GHC - Exemple

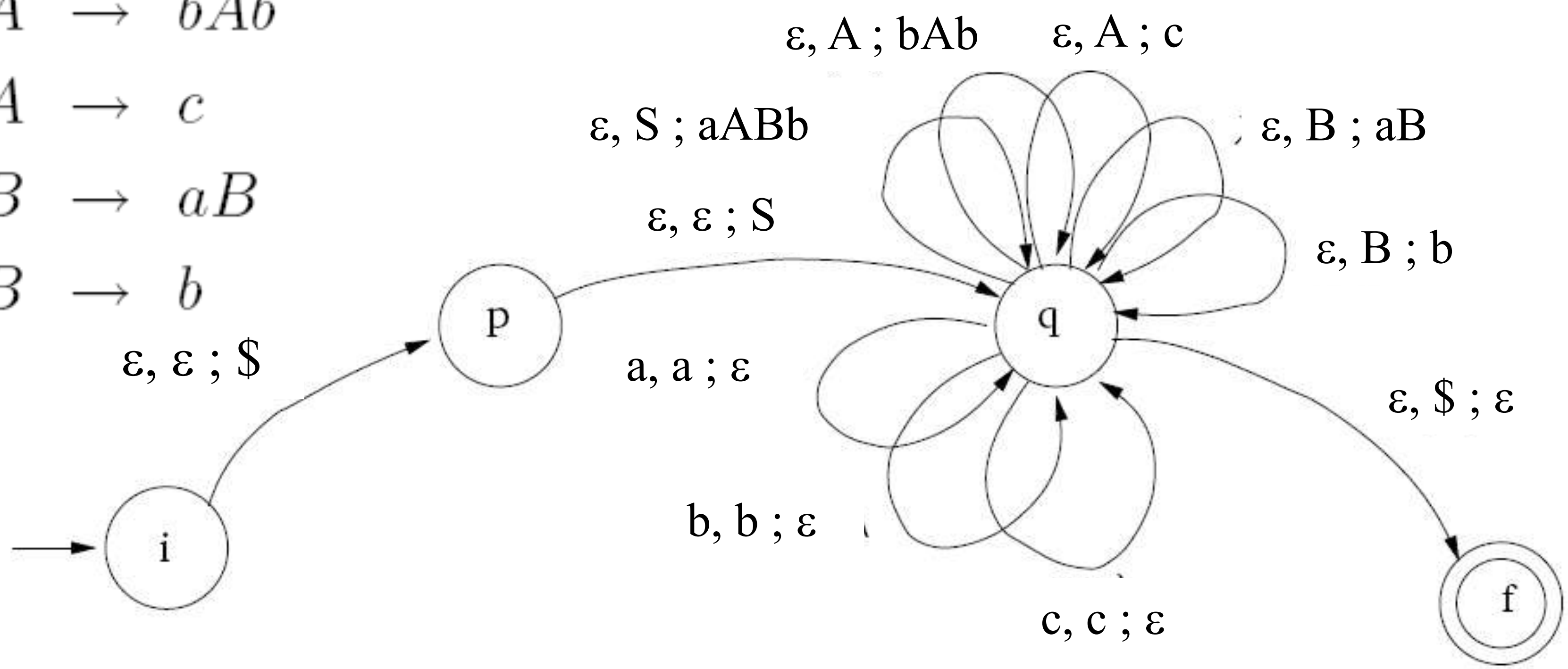
- Reprenons la grammaire :

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow aABb \\
A &\rightarrow bAb \\
A &\rightarrow c \\
B &\rightarrow aB \\
B &\rightarrow b
\end{aligned}
$$

Construire un AAP à partir d'une GHC

- Un automate construit selon la procédure définie auparavant ressemble à

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow aABb \\
A &\rightarrow bAb \\
A &\rightarrow c \\
B &\rightarrow aB \\
B &\rightarrow b
\end{aligned}
$$



Construire un AAP à partir d'une GHC

- Le comportement de l'automate peut être décrit comme suit :

1. D'abord, il marque le fond de la pile avec $
2. Ensuite il empile S, le symbole de départ de la grammaire, sur la pile et entre dans l'état q
3. Jusqu'à ce que $ revienne sur le dessus de la pile,
    1. (a) Soit l'automate <u>dépile</u> un non-terminal du haut de la pile et le remplace par la partie droite d'une règle de réécriture pour ce non-terminal
    2. (b) Soit l'automate <u>dépile</u> un terminal du haut de la pile pendant qu'il lit le même terminal sur l’entrée
4. Quand $ revient en haut de la pile, l'automate se déplace dans son état d'acceptation

Transformation d'une grammaire hors-contexte en un automate à pile

- Soit $G = <V_T, V_N, S, R>$ une grammaire hors-contexte (type 2)
- Comment définir P, automate à pile, qui reconnaît exactement le langage engendré par G ?

Transformation d'une grammaire hors-contexte en un automate à pile

- P est défini par
  - $Q = \{p, q, r\}$
  - $\Sigma = V_T$
  - $\Gamma = V_N \cup V_T \cup \{\$\}$ $(\$ \notin V_N \cup V_T)$
  - $\$ \in \Gamma$: symbole initial de pile
  - p = état initial
  - {r} = ensemble d'états finaux
  - Δ : ensemble de transitions (quintuplets)

Transformation d'une grammaire hors-contexte en un automate à pile

- Empiler l'axiome
  ➔ soit la transition : $(p, \varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (q, S)$
- Pour chaque règle $A \rightarrow \varphi$
  ➔ ajouter la transition : $(q, \varepsilon, A) \rightarrow (q, \varphi)$
- Pour chaque symbole terminal x
  ➔ ajouter la transition : $(q, x, x) \rightarrow (q, \varepsilon)$
- Terminer
  ➔ ajouter la transition $(q, \varepsilon, \$) \rightarrow (r, \varepsilon)$

$Q = \{p, q, r\}$

$\Sigma = V_T$

$\Gamma = V_N \cup V_T \cup \{\$\}$ $(\$ \notin V_N \cup V_T)$

$\$ \in \Gamma$: symbole initial de pile

p = état initial

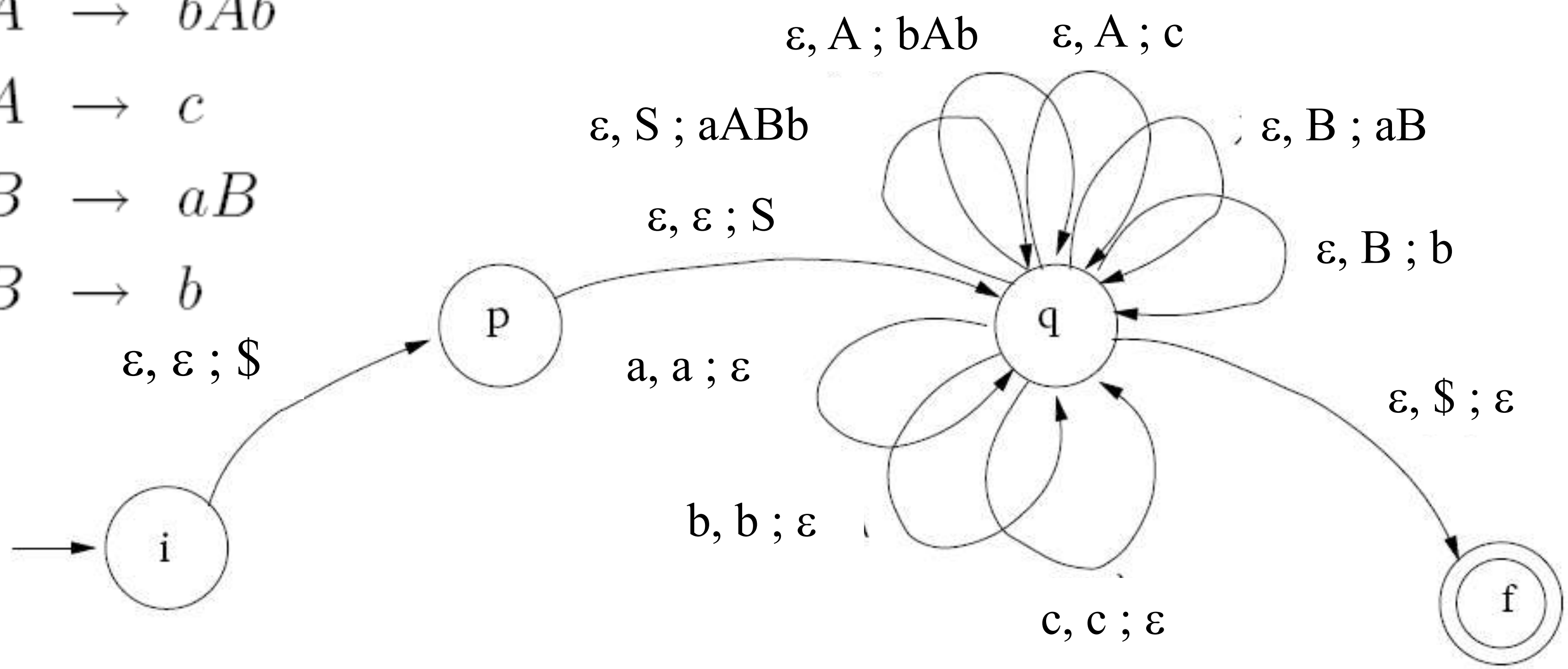
$\{r\}$ = ensemble d'états finaux

Δ : ensemble de transitions (quintuplets)

Construire un AAP à partir d'une GHC

- Un automate construit selon la procédure définie auparavant ressemble à

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aABb \\ A &\rightarrow bAb \\ A &\rightarrow c \\ B &\rightarrow aB \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$



Contrôle Continu (Partiel)

- **Quand ? : lundi 13 mars 2023 de 8h30 à 9h30 (durée 1 heure)**
  - **+ tiers temps additionnel**
- **Où ? : Stendhal Hall Nord Amphi 3**
- **Comment ? :**
  - **Notes de cours et de TD autorisées**
  - **Aucun appareil électronique (traducteur, téléphone portable, calculatrice, montre connectée, etc.) autorisé**
  - **Copies de composition non fournies…**
- **Quoi ? : tout ce qui aura été vu en cours et en TD**