Recherche Opérationelle
Alternance

Moritz Mühlenthaler, Zoltán Szigeti

moritz.muehlenthaler@grenoble-inp.fr

G-SCOP (Sciences pour la Conception, l'Optimisation et la Production de Grenoble)
Équipe OC (Optimisation Combinatoire)

Couplages

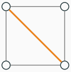
Couplages

Un couplage M dans un graphe G non-orienté est un ensemble d'arêtes deux-à-deux non-adjacentes.

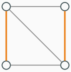
- Un sommet v est saturé par un couplage M, s'il existe une arête de M incidente à v.
- Couplage parfait : couplage qui sature tous les sommets
- Couplage maximal : couplage non-inclus dans un autre couplage
- Couplage maximum : couplage de cardinalité maximum. On note

$$\nu(G) := \max\{|M| \mid M \text{ est un couplage de } G\}$$

Couplages : maximal vs maximum

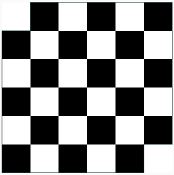


couplage maximal (non-inclus dans un autre couplage)



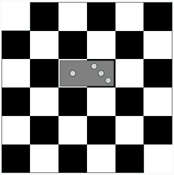
couplage maximum (et parfait)
$\nu(G) = 2$

Exemple 1 : Dominos sur un Échiquier



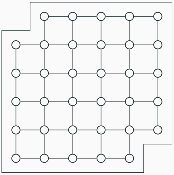
Est-il possible de couvrir tout l'échiquier avec des dominos ?

Exemple 1 : Dominos sur un Échiquier



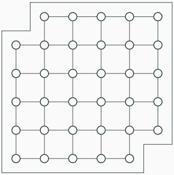
Est-il possible de couvrir tout l'échiquier avec des dominos ?

Exemple 1 : Dominos sur un Échiquier



Trouver un couplage parfait dans le graphe ci-dessus.

Exemple 1 : Dominos sur un Échiquier



Trouver un couplage parfait dans le graphe ci-dessus.
(un tel couplage n'existe pas car il manquent deux carrés blancs)

Chaînes Alternées

Considérones un graphe $G = (V, E)$ et un couplage M de G.

Une chaîne M-alternée est une chaîne simple, dont les arêtes sont alternativement dans M et $E \setminus M$. Une chaîne M-alternée est M-augmentante, si elle relie deux sommets insaturés.

Chaînes Alternées

Considérones un graphe $G = (V, E)$ et un couplage M de G.

Une chaîne M-alternée est une chaîne simple, dont les arêtes sont alternativement dans M et $E \setminus M$. Une chaîne M-alternée est M-augmentante, si elle relie deux sommets insaturés.

chaîne M-augmentante

Le Lemme de Berge

(Berge, 1957)
Un couplage M d'un graphe $G = (V, E)$ est maximum $\Leftrightarrow$ il n'y a pas de chaîne M-augmentante.

Le Lemme de Berge

(Berge, 1957)
Un couplage M d'un graphe $G = (V, E)$ est maximum $\Leftrightarrow$ il n'y a pas de chaîne M-augmentante.

Le lemme nous permet de trouver un couplage maximum en trouvant des chaînes augmentantes.

Chaînes Augmentantes dans des Graphes Bipartis

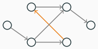
Étant donné un graphe biparti $G = (U, W, E)$ et un couplage M de G, on construit le graphe $D_M = (V, A)$ de la façon suivante :

$$V := U \cup W \cup \{s, t\}$$

$$A := \{su \mid u \in U,\ u\ M\text{-insaturé}\} \cup \{wt \mid w \in W,\ w\ M\text{-insaturé}\} \cup \{wu \mid uw \in M\} \cup \{uw \mid uw \in E \setminus M\}$$

G, M

D_M



Chaînes Augmentantes dans des Graphes Bipartis

Soit G un graphe biparti et M un couplage de G.
Alors G possède une chaîne M-augmentante $\Leftrightarrow$ D_M possède un s-t chemin.

Démonstration.

On a que $P = v_0, v_1 \ldots, v_k$ est une chaîne M-augmentante si et seulement si $P' = s, v_0, \ldots v_k, t$ est un s-t chemin de D_M (grace à la construction du graphe D_M). ■

Couplages Maximums dans des Graphes Bipartis

Algorithme 1 : Trouve Couplage Maximum

Entrée : Graphe biparti $G(U, W, E)$
Sortie : Couplage maximum M de G.

$M \leftarrow \emptyset$
tant que *il existe un s-t chemin P dans D_M* **faire**
    $M := (M \setminus E(P)) \cup (E(P - s - t) \setminus M)$
fin.

Remarque : $E(P)$ désigne l'ensemble arêtes d'un chemin P.

Couplages et Transversals

- Un ensemble T de sommets est un transversal, si $G - T$ est sans arête.

Couplages et Transversals

- Un ensemble T de sommets est un transversal, si $G - T$ est sans arête.

- La taille min d'un transversal d'un graphe G est noté

$$\tau(G) := \min\{|T| \mid T \text{ est un transversal de } G\}$$

Couplages et Transversals

- Un ensemble T de sommets est un transversal, si $G - T$ est sans arête.

- La taille min d'un transversal d'un graphe G est noté

$$\tau(G) := \min\{|T| \mid T \text{ est un transversal de } G\}$$

- Soit M un couplage de G et T un transversal de G. Alors $|M| \leq |T|$: au moins une extrémité de chaque arête de M apparaît dans T car les arêtes de M sont deux à deux non-adjacentes.
- En particulier on a $\nu(G) \leq \tau(G)$.

Couplages et Transversals

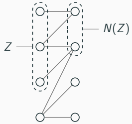
(Kőnig, 1931.) Soit $G = (U, W, E)$ un graphe biparti. Alors $\nu(G) = \tau(G)$.

Démonstration.
Soit M un couplage maximum de G. Alors il n'existe pas un s-t chemin dans D_M. Soit S l'ensemble de sommets atteignables depuis s dans D_M. Soit $T := (U \setminus S) \cup (W \cap S)$.

Puisqu'il n'y a pas d'arc sortant de S dans D_M, l'ensemble T est un transversal de G. De plus, puisque tous les sommets de $U \setminus S$ et de $W \cap S$ sont saturés, on a $|T| \leq |M|$. Alors $\tau(G) \leq |T| \leq |M| \leq \nu(G) \leq \tau(G)$. ■

Couplages Parfaits dans un Graphe Biparti

Certificat Kőnig-Hall : $Z \subseteq U$, tel que $|N(Z)| < |Z|$
une structure simple qui certifie qu'un graphe biparti n'admet pas un couplage parfait



Remarque : Soit S l'ensemble sommets atteignable de s dans D_M à la fin de l'algo. Alors $S \cap U$ est un certificat Kőnig-Hall.

Couplages Parfaits d'un Graphe Biparti

(Hall, 1935.) Un graphe biparti $G = (U, W, E)$ admet un couplage parfait $\Leftrightarrow$

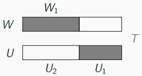
1. $|U| = |W|$, et
2. $\forall X \subseteq U : |X| \leq |N(X)|$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Si G admet un couplage parfait M, chaque sommet $v \in U$ a un voisin unique $w \in W$, tel que $vw \in M$, et l'inverse. Alors $|U| = |W|$ et $\forall X \subseteq U : |X| \leq |N(X)|$.

Couplages Parfaits d'un Graphe Biparti

$\Leftarrow$ Puisque $\nu(G) = \tau(G)$, il existe un transversal T de G, tel que $|T| = |M|$. Soient $U_1 := T \cap U$, $U_2 := U \setminus U_1$, $W_1 := T \cap W$.



Comme T est un transversal, $N(U_2) \subseteq W_1$, et alors $|W_1| \geq |N(U_2)| \overset{2.}{\geq} |U_2|$. On obtient

$|M| = |T| = |U_1| + |W_1| \geq |U_1| + |U_2| = |U| \overset{1.}{=} |W|$

Par conséquent, M est un couplage parfait. ■