Partie Introductive : Théorie de la décision en Incertitude

… Comment les agents économiques prennent-ils leurs décisions en univers incertain et comment se comportent-ils face au risque ?

Chapitre 1 : LE critère de maximisation de l'Utilité Espérée.

Chapitre 2 : Les comportements des agents face au risque.

Chapitre 3 : Les limites de l'UE

Chapitre 1 : Le critère de maximisation de l'Utilité Espérée.

1.1. Rappel sur la rationalité en univers certain et remarque sur la notion « d'incertitude ».

* Ensemble connu et exhaustif des actions possibles : A
* Évaluation des conséquences de chaque action a $\in$ A, selon un critère U(a) à valeur dans $\Re$.
* Choix de la meilleure décision a* selon la relation U(a*) > U(a)

Manifestation de l'incertitude :

* Au niveau de la réalisation des conséquences de chaque action $a \in A$:

Ex de la participation ou non à une loterie nationale :

- 2 actions possibles : participer (a_1) ou pas participer (a_2) .
- évaluations des conséquences :

$$U(a_2) = 0$$

$$U(a_1) = U\left[(p \cdot \text{Gain}) - \text{Ticket}\right],$$ avec p la proba de gagner.

* Origine de l'incertitude : la réalisation d'un **état de la Nature** (tirage au sort) ou les **choix des autres**, toujours inconnus au moment du choix.

L'individu face à la « nature » : son gain dépend de son action dans un certain état de la nature (Théorie de la décision en incertain).
Interaction entre des individus ; son gain dépend de son action et de l'action des autres (Théorie des Jeux).

Différence entre « risque » et « incertitude » :

* Distinction de **Knight** :
  - Univers **risqué** : tous les états futurs sont connus en probabilité (ex. du loto)
  - Univers **incertain** : les probabilités de réalisation des états futurs ne sont pas connus, voire tous les états futurs ne sont pas connus (ex de l'existence ou non des impacts du CO_2 n'était pas envisagé en 1979)

* Approche standard :
  - ramener les situations d'incertitude à un univers risqué, *via* les « probabilités subjectives » (Savage)

    Possibilité d'évaluer de façon subjective l'incertitude par des « pondérations » qui pourront être interprétées comme des probabilités subjectives.

Remarque sur la représentation des décisions en incertain :

Soit une action a (par ex. un investissement) dont les conséquences peuvent être représentées par un ensemble de gains $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Les réalisations de ces gains dépendent de l'état de la nature (par ex. des cash flows différents selon la conjoncture économique) et selon les probabilités $(p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$.

$\Leftrightarrow$ Jouer à une loterie (par ex. roue de la fortune) dont l'ensemble des gains est donné par $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ et selon des probabilités $(p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$.

On peut même parler d'un ensemble de loterie, à la place d'un ensemble d'actions, car chaque action possible sera caractérisée par une distribution de probabilité particulière sur l'ensemble des conséquences de l'action.

1.2. Introduction de l'incertitude dans la théorie de la décision : le critère de l'Espérance Mathématique et le paradoxe de St-Petersbourg (D. Bernoulli).

Le critère de l'Espérance Mathématique de Gain (EMG) ?

Ex. : Choix entre 2 loteries :

L1 {(1000€, 0.5) ; (-1000€, 0.5)} et L2 {(2€, 0.5) ; (1€, 0.5)}

Établir une hiérarchie des préférences à l'égard de la loterie qui assure l'EMG la plus élevée :

EMG(L2) > EMG(L1) donc choix de L2

Critère de décision : fonction attribuant une valeur **V(.)**

a* sera préférée à a si : $\underline{\mathbf{V(a^*)}} = \Sigma\, p_i{}^*x_i{}^* \geq \underline{\mathbf{V(a)}} = \Sigma\, p_i x_i$

Le paradoxe de St-Petersbourg :

Jeu d'une pièce équilibrée lancée jusqu'à l'obtention de l'événement «Face». Si « Face » sort au $n^{ième}$ jet, le joueur gagne 2^n euros.

$$EMG = \Sigma\, 2^{-n} 2^n = 1+1+1+\ldots = \infty$$

Paradoxe : personne n'est prêt à payer une somme infinie pour jouer à ce jeu. En effet, si V(J) = EMG alors je suis prêt à payer beaucoup pour y jouer.

Solution de Bernoulli (1738) :
Les joueurs maximisent l'espérance du logarithme du gain, d'où la valeur du jeu est donnée par :

$$V(J) = \Sigma\, 2^{-n} \mathrm{Log}(2^n) = 2\mathrm{Log}2$$

Généralisation de la solution :
Les joueurs ne maximisent pas les gains monétaires bruts mais l'utilité que leur procurent ces gains : on remplace la fonction Log par une fonction U(.) croissante concave qui représente l'utilité de la richesse :

$$V(J) = \Sigma\, 2^{-n}\, \mathbf{U}(2^n) \quad \text{avec } U'(.) > 0 \text{ et } U''(.) < 0.$$

1.3. Le critère ($\mu-\sigma$) et le problème de la dominance stochastique (Markowitz).

Problème de la prise en compte du risque :

Ex de 2 loteries avec le critère de l'EMG :

L1 {(1000€ , 0.5) ; (0 , 0.5)} et L2 {(3000€ , 0.5) ; (-2000€ , 0.5)}

Comme EMG(L1) = EMG (L2), il y a indifférence entre les 2 loteries.

Êtes-vous prêt à jouer avec moi à L2 *?!*

<u>Solution de Markowitz (1952)</u> :

Intégrer dans l'analyse le <u>*risque*</u> dont la représentation est la variance des gains. D'où un double critère : l'espérance de gains et la variance des gains.

A chaque action a est associé le couple (μ_a, σ_a^2) et sa valeur est définie comme une fonction à 2 variables :

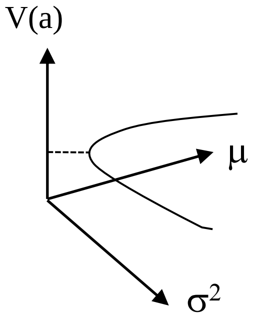
$$\mathbf{V(a) = F [\mu_a , \sigma_a^2]}$$

Exemple d’une fonction linéaire dans chaque argument :

$$V(a) = F[\mu_a , \sigma_a^2] = \alpha + \beta \mu_a - \gamma \sigma_a^2$$

Avec : * $F'_\mu > 0$

* $F'_{\sigma 2}$ mesure l’attitude face au risque.



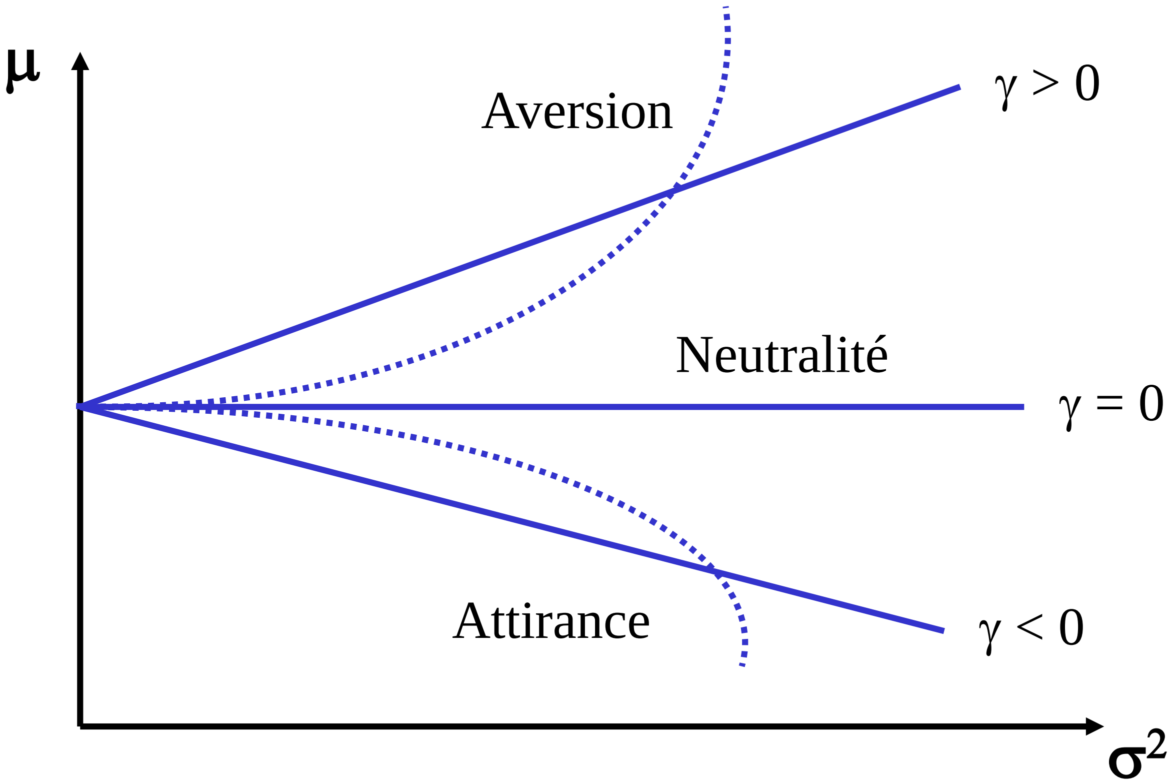
Courbes d’indifférence dans l’espace (μ, σ^2) :

$$dV = F'_\mu \, d\mu + F'_{\sigma 2} \, d\sigma = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad TMS_{\mu/\sigma} \equiv d\mu / d\sigma^2 = - F'_{\sigma 2} / F'_\mu = \gamma/\beta$$

La pente des courbes d’indifférence dépend donc du signe de γ : une constante qui mesure le degré d’aversion au risque.

Si $\gamma > 0$: la pente est positive, la courbe est croissante, et V(a) diminue avec le risque ; l’agent présente une « aversion au risque ».
Si $\gamma < 0$: la pente est négative, la courbe est décroissante, et V(a) augmente avec le risque ; l’agent présente une « attirance au risque ».
Si $\gamma = 0$: la pente est nulle, la courbe est horizontale, et V(a) est indépendante du risque ; l’agent est « neutre au risque ».



Représentation de courbes d'indifférence selon l'attitude au risque (cas linéaire et non linéaire)

1.4. LE critère de l'Utilité Espérée (Von Neumann et Morgenstern, 1947).

Proposer une généralisation de la solution de Bernoulli sur la base d'un ensemble d'axiomes de comportements : théorie de l'Utilité Espérée (= l'espérance d'utilité)

Cadre général : les agents connaissent parfaitement ...

* l'ensemble des actions possibles $A = \{a_j\}$,

* l'ensemble des conséquences monétaires $X = \{x_i\}$ des actions possibles en fonction de la réalisation des états de la nature,

* l'ensemble convexe P des distributions de probabilités définies sur l'ensemble des conséquences X,

* et ils disposent d'une fonction d'utilité cardinale u(.) pour évaluer les conséquences possibles.

$$\begin{array}{|c|}\hline a_1 \\ \cdots \\ a_j \\ \cdots \\ a_m \\ \hline \end{array} \xrightarrow[\text{vecteur } p_j]{\text{Choix d'un}} \begin{pmatrix} p_j(x_1) \\ \cdots \\ p_j(x_i) \\ \cdots \\ p_j(x_n) \end{pmatrix}$$

avec $\Sigma_i \, p_j(x_i) = 1$ et $0 < p_j(x_i) < 1$

Choisir une action a_j revient à choisir un vecteur de proba particulier sur un ensemble donné de conséquences possibles.

Objectif : à partir d'une relation de préférence définie sur l'ensemble des actions, notée $\geq^{\#}$, construire un isomorphisme entre $[A, \geq^{\#}]$ et $[\Re, \geq]$ permettant aux agents, sur la base d'un critère, d'effectuer un choix en univers incertain.

Axiomes :
Soit une relation de préférence binaire sur A, notée $\geq^{\#}$, dont la version stricte est notée $>^{\#}$, et la version d'équivalence est notée $\sim^{\#}$.
Von Neumann et Morgenstern proposent les trois axiomes suivants :

A1 : *Préordre*

La relation est un préordre sur A, avec ;

i) Complétude :

Pour tout a_1 et $a_2 \in A$, on a :

soit $a_1 \geq^{\#} a_2$, soit $a_2 \geq^{\#} a_1$, soit $a_1 \sim^{\#} a_2$

ii) **Transitivité** :

Pour tout a_1 , a_2 et $a_3 \in A$, :

Si $a_1 \geq^{\#} a_2$ et $a_2 \geq^{\#} a_3$, alors $a_1 \geq^{\#} a_3$

Remarques :

* on peut exposer le même axiome en termes de vecteurs de probabilité, par exemple avec les vecteurs p, q et r.

* Ce premier axiome impose un préordre dans les préférences des agents « rationnels » : ils ne peuvent pas préférés à la fois a_1 à a_2 , et en même temps a_2 à a_1.

A2 : *Continuité*

Pour tout a_1 , a_2 et $a_3 \in A$, :

Si $a_1 \geq^{\#} a_2 \geq^{\#} a_3$, alors il existe un $\lambda \in [0,1]$ tel que :

$$a_2 \sim^{\#} [\lambda a_1 + (1- \lambda) a_3]$$

Remarque :

* cet axiome est surtout une hypothèse technique qui permet d'obtenir une représentation des préférences sur l'ensemble des actions qui préserve l'ordre.

* avec les axiomes A1 et A2, on obtient une représentation des préférences sur A ayant la propriété que :

$$a_1 \geq^{\#} a_2 \quad \text{si, et seulement si, } V(a_1) \geq V(a_2)$$

avec V(.) un indicateur de préférence (ou critère)

A3 : *Indépendance*

Pour tout a_1 , $a_2 \in A$:

$a_1 \geq^{\#} a_2$ si, et seulement si :

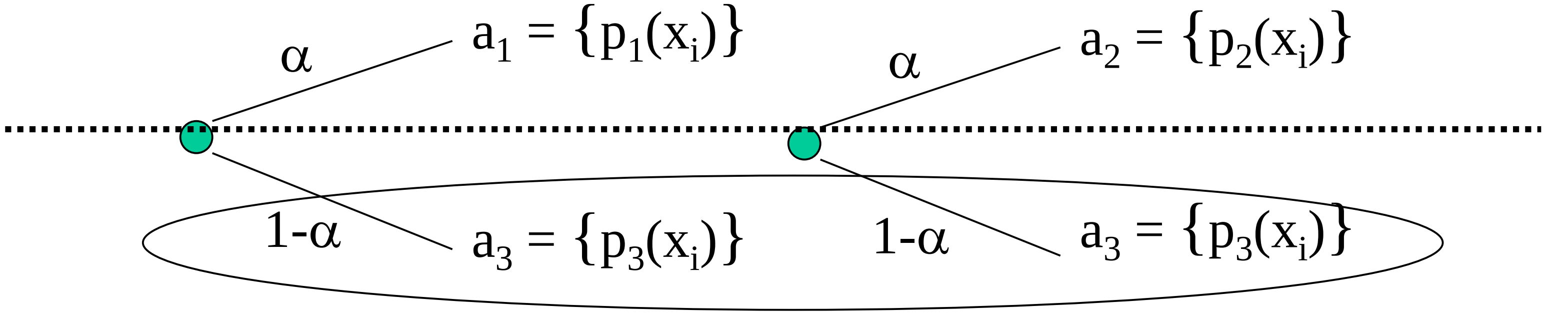
$$\alpha\, a_1 + (1-\alpha)\, a_3 \geq^{\#} \alpha\, a_2 + (1-\alpha)\, a_3$$

pour toute $a_3 \in A$ et tout $\alpha \in [0,1]$.

Remarques :

* ce dernier axiome est fondamental pour pourvoir prendre l'Utilité Espérée comme critère de décision, ou indicateur de préférence, en incertain.

* si l'agent déclare préférer a_1 à a_2 alors il préfère aussi une loterie composite avec laquelle il obtient a_1 avec une probabilité α et a_3 avec une probabilité $(1-\alpha)$ plutôt qu'une loterie composite où il obtiendrait a_2 et a_3 avec les mêmes probabilités α et $(1-\alpha)$.



Remarques suite ... :

* l'agent est donc capable d'isoler les conséquences afin de comparer les actions entre elles. De plus, comme a_3 est quelconque, il est indifférent à ce qui se produira si l'état de probabilité $(1-\alpha)$ se réalise.

* l'état $(1-\alpha)$ est non pertinent pour comparer les deux actions car il entraîne les mêmes conséquences indépendamment du choix de l'agent : il élimine de la comparaison tous les états pour lesquels les conséquences sont communes.

Théorème de VNM :

Si A1, A2 et A3 sont satisfaits, alors il existe une fonction d'utilité **u**(.) définie sur l'ensemble des conséquences X, à une transformation strictement affine croissante près, et une fonction V(.) définie sur A telles que :

$$a_1 \geq^{\#} a_2 \quad \textbf{ssi } V(a_1) = \Sigma_i \, p_1^{\,i}(x_i).\mathbf{u}(x_i) \geq \Sigma_i \, p_2^{\,i}(x_i)\mathbf{u}(x_i) = V(a_2)$$

Ainsi, la valeur d'une action risquée est l'espérance mathématique des utilités de ses résultats possibles (et non plus des gains) : l'individu rationnel prend ses décisions en maximisant son Utilité Espérée (UE).

1.5 D'autres critères de décision :

1) Le critère de « **sécurité d'abord** » (ou « sécurité avant tout »)

Soient deux actions possibles : $a_1 = \{(-5 ; 0{,}1)\ (5 ; 0{,}2)\ (10 ; 0{,}7)\}$

$a_2 = \{(-20 ; 0{,}01)\ (5 ; 0{,}29)\ (10 ; 0{,}7)\}$

Les espérances de gains et variances associées à ces deux actions sont :

$EMG(a_1) = 7{,}5$ et $EMG(a_2) = 8{,}25$

$\sigma^2\,(a_1) = 21{,}25$ et $\sigma^2\,(a_2) = 13{,}75$

Il est assez intuitif qu'aucun « riscophobe » ne choisira l'action a_1, et cela même avec une Markovitz linéaire. Donc on aura certainement $a_2 \geq^{\#} a_1$.

Mais supposons un individu très « angoissé » par la perte de 20€ dans a_2.
Il pourrait finalement être tenté par a_1 !

Comportement rationnel si on ne mesure pas le risque par la variance mais par un autre indicateur, à savoir une « variance tronquée » qui ne prend en compte que les pertes possibles :

$$\underline{\sigma}^2\,(a) = \Sigma_i\, p_a(x_i)^2 \text{ si } x_i < 0$$

On obtient alors pour les deux actions :

$$\underline{\sigma}^2 (a_1) = (-5)^2\ 0{,}1 = 2{,}5$$

$$\underline{\sigma}^2 (a_2) = (-20)^2\ 0{,}01 = 4$$

En prenant une Markovitz linéaire on a :

$$\underline{V}(a_1) = 7{,}5 - \gamma\ 2{,}5$$

$$\underline{V}(a_2) = 8{,}25 - \gamma\ 4$$

Il suffit que $\gamma > 0{,}5$ pour que : $\underline{V}(a_1) > \underline{V}(a_2)$

2) Le critère de « **Maximin** » (ou critère de Wald)

Soient trois actions possibles :

$$a_1 = \{(1 ; 0{,}1)\ (20 ; 0{,}2)\ (30 ; 0{,}7)\}$$

$$a_2 = \{(2 ; 0{,}1)\ (3 ; 0{,}2)\ (4 ; 0{,}7)\}$$

$$a_3 = \{(-10 ; 0{,}1)\ (2 ; 0{,}2)\ (50 ; 0{,}7)\}$$

Si l'individu est caractérisé par un degrés de pessimisme très élevé, il va se focaliser que sur la valeur la plus faible dans chaque action.

Dès lors, il va choisir l'action qui assure le maximum du gain minimum !

$$\mathrm{Min}(a_1) = 1$$

$$\mathrm{Min}(a_2) = 2$$

$\mathrm{Min}(a_3) = -10$ d'où $\mathrm{Max}\{\mathrm{Min}(a_i)\} = 2$ donc a_2

On peut aussi imaginer qu'il est très optimiste d'où critère :

$\mathrm{Max}\{\mathrm{Max}(a_i)\} = 50$ donc a_3

3) Le critère de **Hurwicz**

Propose une pondération des valeurs Min et Max dans chaque action :

$V(a_i) = \alpha \text{ Min}(a_i) + (1 - \alpha) \text{ Max } (a_i)$

où α mesure le degrés de pessimisme de l'individu

4) Le critère des « **regrets** »

Soient trois actions possibles :

$a_1 = \{(1 ; 0,1) (20 ; 0,2) (30 ; 0,7)\}$

$a_2 = \{(2 ; 0,1) (3 ; 0,2) (4 ; 0,7)\}$

$a_3 = \{(-10 ; 0,1) (2 ; 0,2) (50 ; 0,7)\}$

Ce critère repose sur l'évaluation des regrets que peut avoir le décideur après son choix effectué : pour chaque action possible, on analyse ces regrets par rapport aux états de la nature e_i.

	Si e_1	**Si e_2**	**Si e_3**
a_1	1	**20**	30
a_2	**2**	3	4
a_3	-10	2	**50**

e1 = crise e2 = stagne e3 = reprise forte

Si e_1 se réalise, la meilleure action serait a_2 qui rapporte un gain de 2,
mais … s'il a choisit a1, il regrettera (2 – 1) = 1
s'il a choisit a3, il regrettera (2 – (-10)) = 12
s'il a choisit a2, il regrettera (2 – 2) = 0
Si e_2 se réalise, la meilleure action serait a_1 qui rapporte un gain de 20,
mais … etc.
On obtient ainsi la matrice des regrets :

	Si e_1	**Si e_2**	**Si e_3**	
a_1	(2 – 1) = 1	(20 – 20) = 0	(50 – 30) = 20	$\Sigma = 21$
a_2	(2 – 2) = 0	(20 – 3) = 17	(50 – 4) = 46	$\Sigma = 63$
a_3	(2 – (-10)) = 12	(20 – 2) = 18	(50 – 50) = 0	$\Sigma = 30$

Critère : l'action qui minimise la somme des regrets.
donc a_1 car $21 < 30$ (a_3) < 63 (a_2)

Chapitre 2 : Les comportements face au risque.

2.1 Une représentation de la fonction d'utilité VNM ...
… Espace des conséquences et attitude face au risque

Soit un agent caractérisé par une fonction d'utilité définie sur X, notée u(.), et par une dotation initiale w_0 .

Soit l'action a = $\{(x_1 , p) ; (x_2 , 1\text{-}p)\}$ avec $0<p<1$ et $x_1 < x_2$.

Après la réalisation de l'état de la nature, il sera donc détenteur :

- soit de la richesse $(w_0 + x_1)$, avec une probabilité p
- soit de la richesse $(w_0 + x_2)$, avec une probabilité (1-p)

avec $(w_0 + x_1) < (w_0 + x_2)$.

A ces deux conséquences possibles correspond deux niveaux d 'utilité :

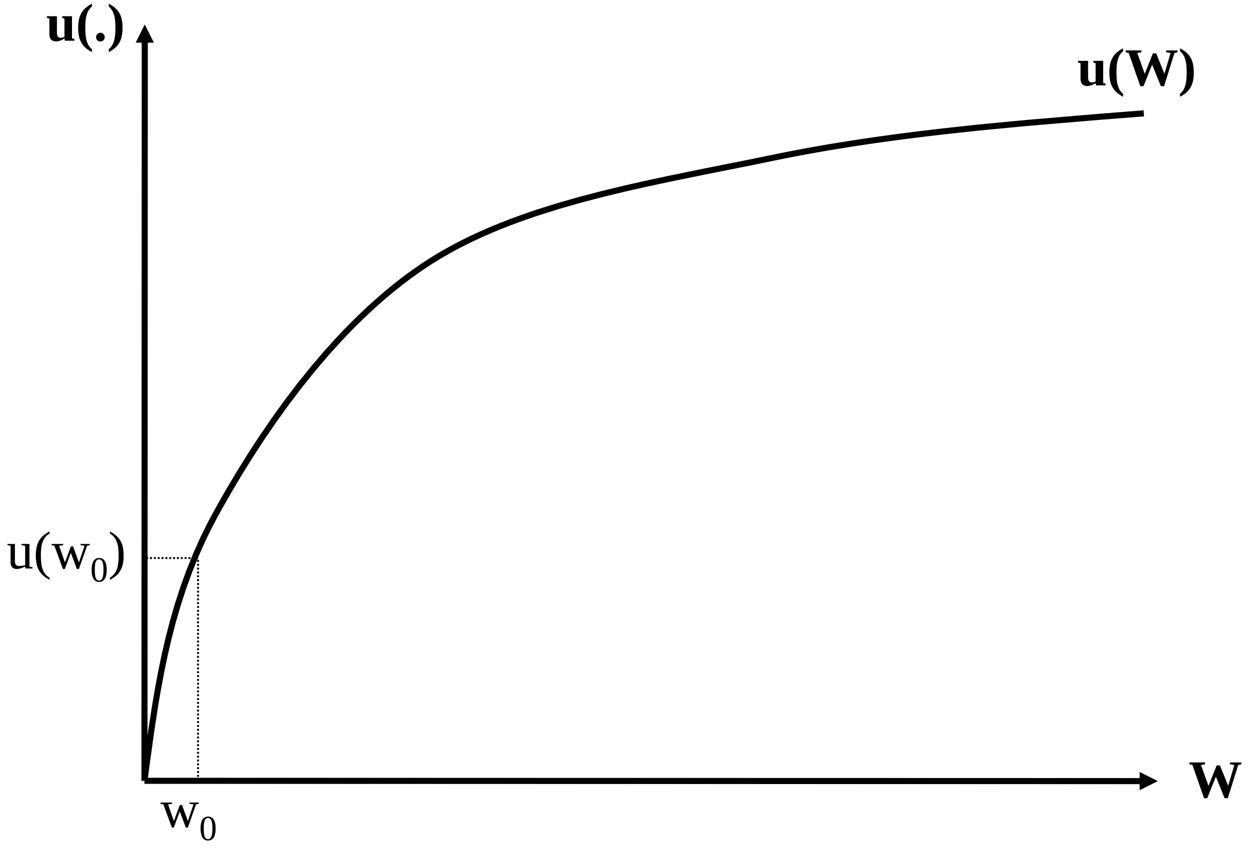
- soit $u(w_0 + x_1)$
- soit $u(w_0 + x_2)$.

<u>Hypothèse sur u(.)</u> :

- la fonction d'utilité est croissante avec la richesse : $u'(.) > 0$
- l'utilité marginale est décroissante avec la richesse : $u''(.) < 0$

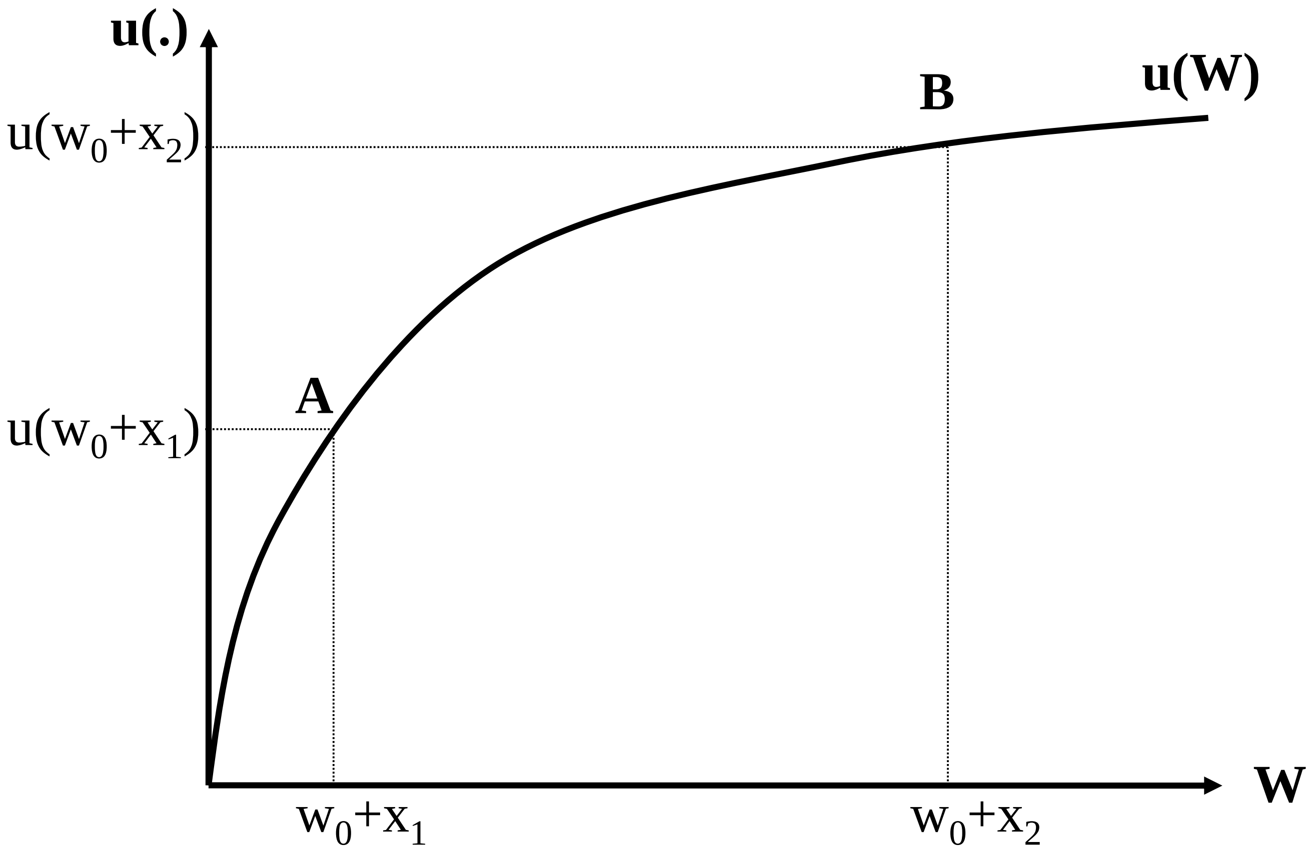
Une représentation de la fonction d’utilité :

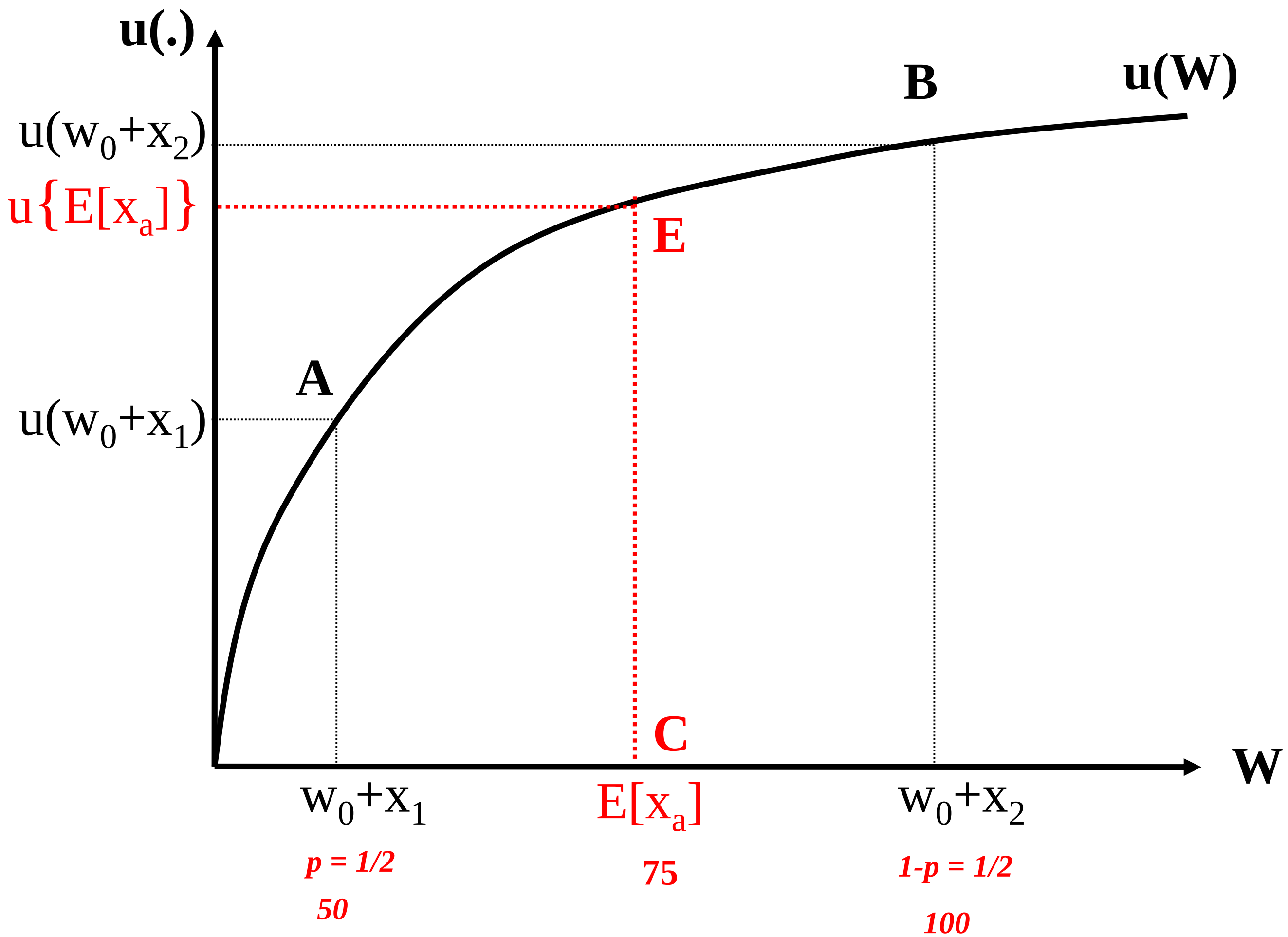
On peut représenter la fonction d’utilité VNM dans l’espace des conséquences $[W\ ; u(.)]$ par le graphique suivant :

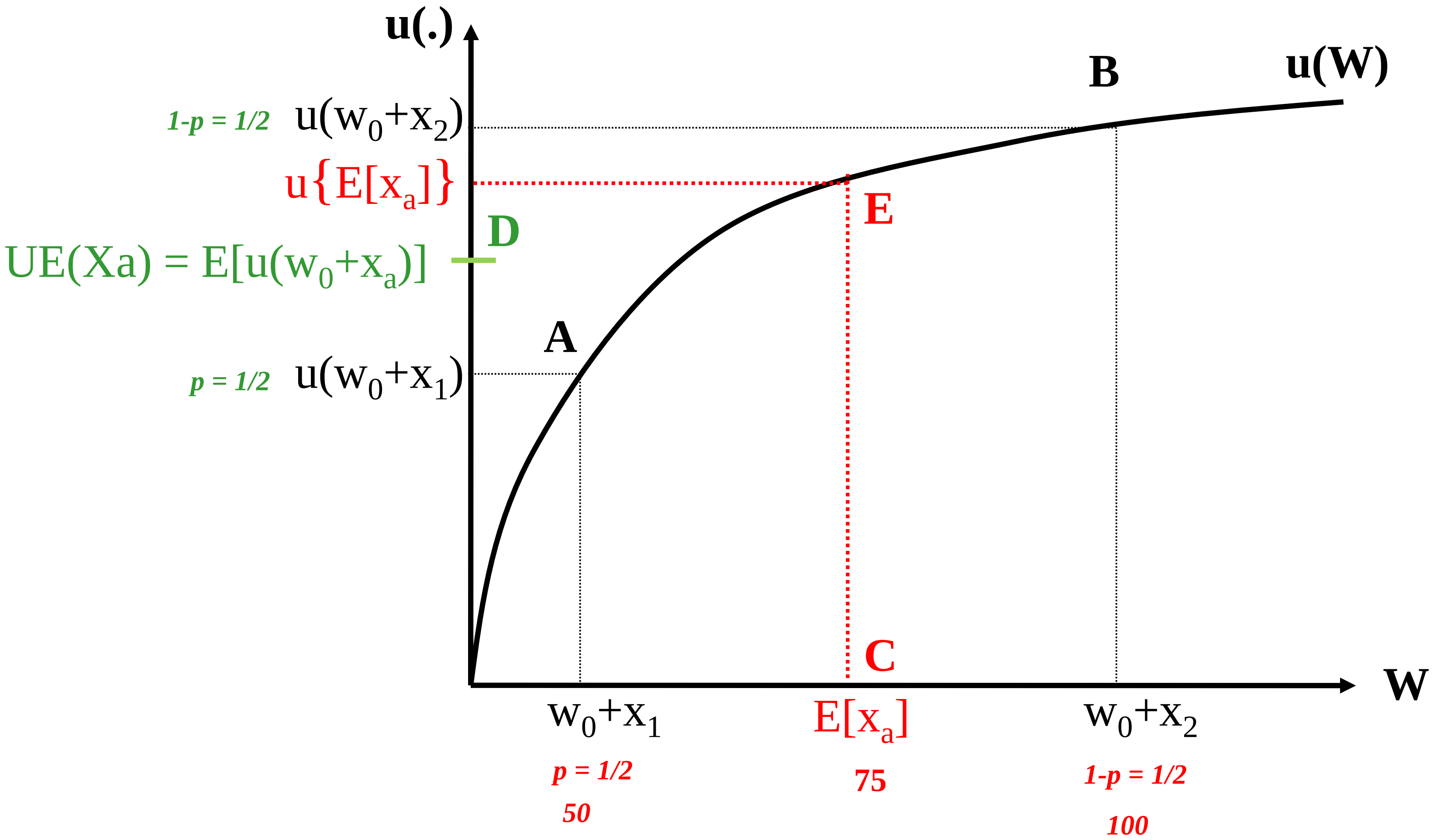


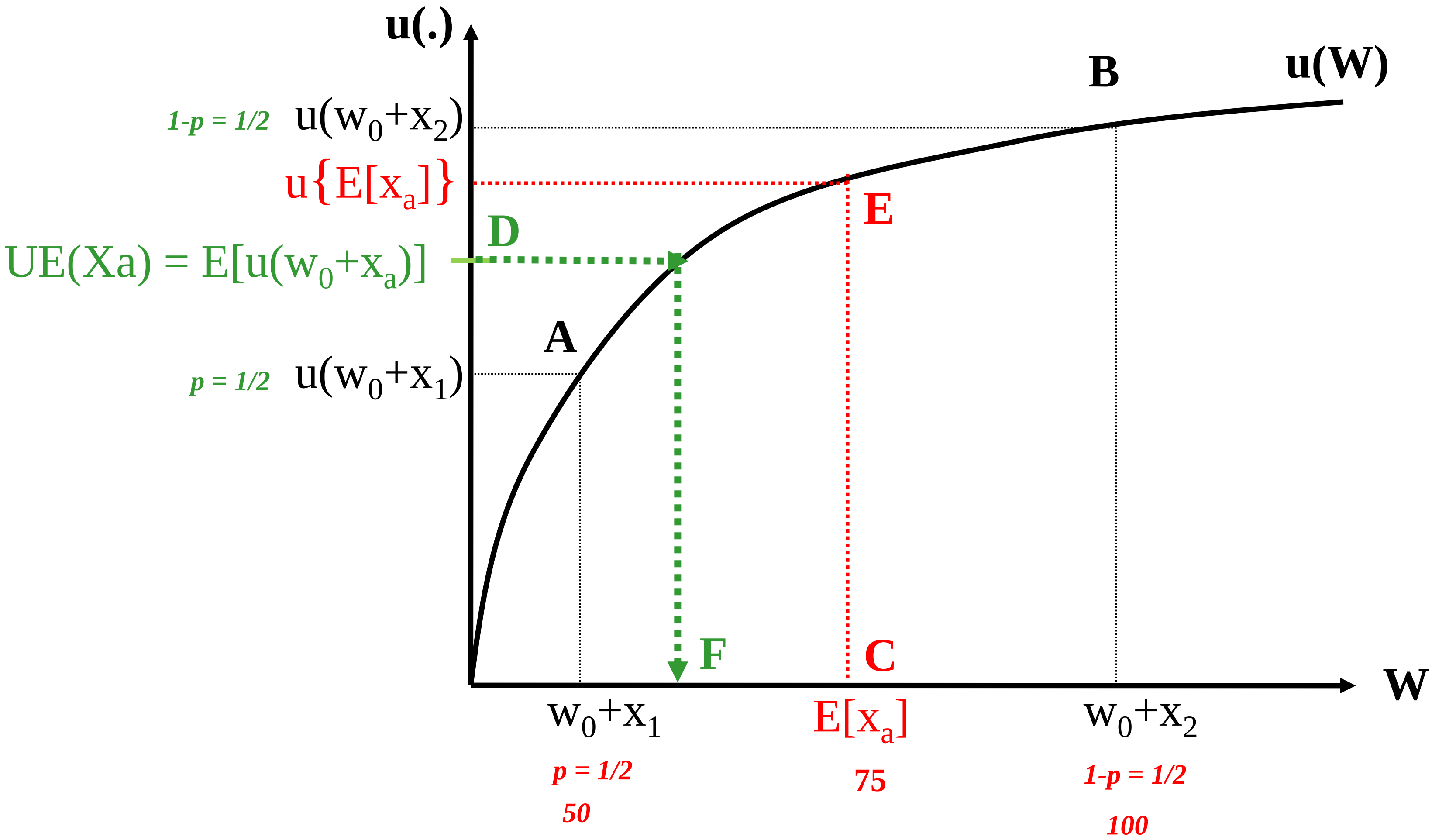
A ces deux conséquences possibles correspond deux niveaux d ’utilité :

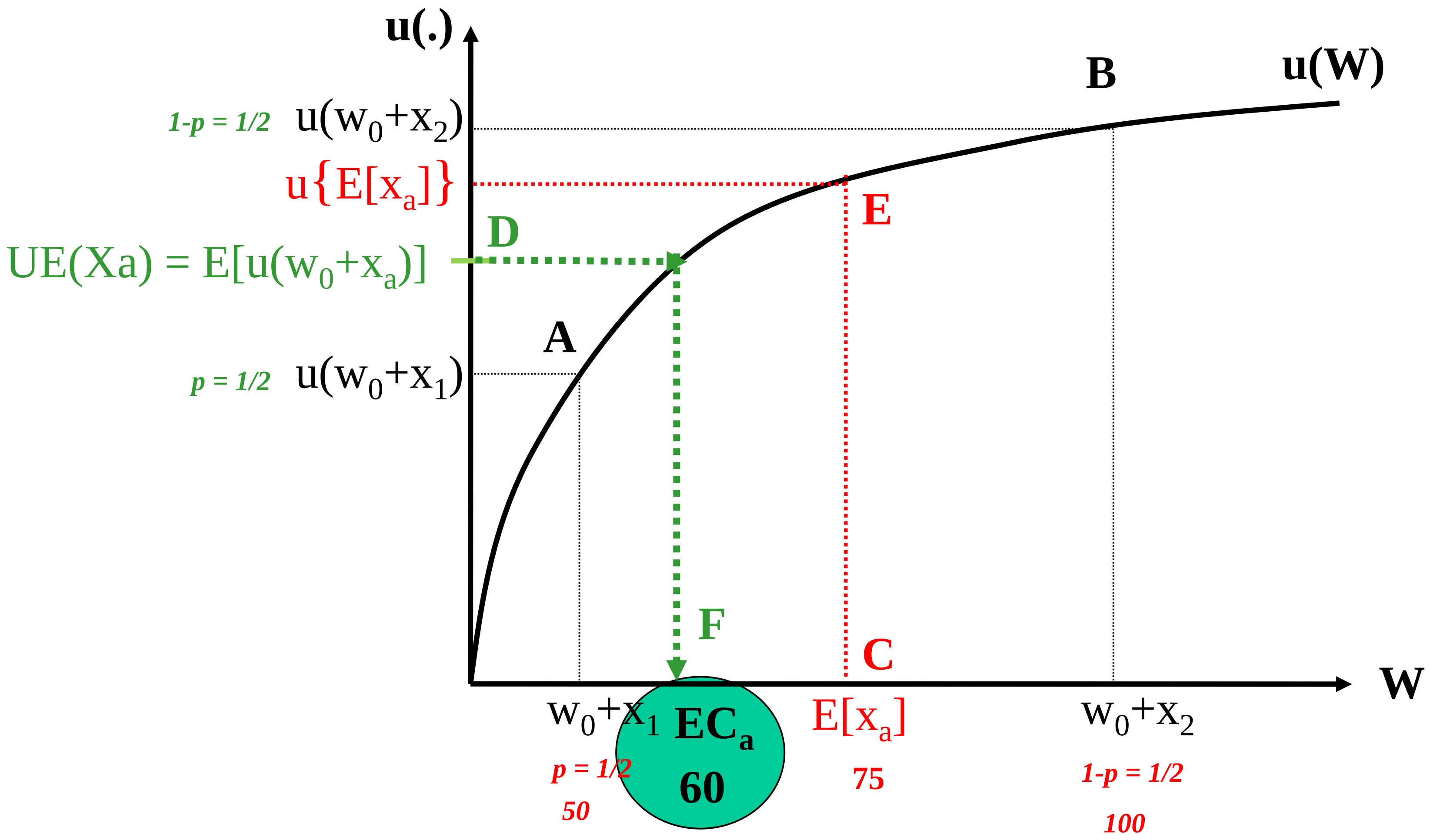
- soit $u(w_0 + x_1)$
- soit $u(w_0 + x_2)$.




u(.)
B
u(W)
$u(w_0+x_2)$
$u\{E[x_a]\}$
E
A
$u(w_0+x_1)$
C
W
w_0+x_1
$E[x_a]$
w_0+x_2
p = 1/2
75
1-p = 1/2
50
100


u(.)
u(W)
B
1-p = 1/2
$u(w_0+x_2)$
$u\{E[x_a]\}$
E
D
$UE(Xa) = E[u(w_0+x_a)]$
A
p = 1/2
$u(w_0+x_1)$
C
W
w_0+x_1
$E[x_a]$
w_0+x_2
p = 1/2
50
75
1-p = 1/2
100


u(.)
u(W)
B
1-p = 1/2
$u(w_0+x_2)$
$u\{E[x_a]\}$
E
D
$UE(Xa) = E[u(w_0+x_a)]$
A
p = 1/2
$u(w_0+x_1)$
F
C
W
w_0+x_1
$E[x_a]$
w_0+x_2
p = 1/2
75
1-p = 1/2
50
100


u(.)
u(W)
B
1-p = 1/2
u(w0+x2)
u{E[xa]}
E
D
UE(Xa) = E[u(w0+xa)]
A
p = 1/2
u(w0+x1)
F
C
W
w0+x1
ECa
60
E[xa]
w0+x2
p = 1/2
50
75
1-p = 1/2
100

* L’espérance mathématique des gains est donnée par :

$$EMG(a) = p(w_0 + x_1) + (1\text{-}p)(w_0 + x_2) = E[x_a]$$

Pour faciliter la représentation on pose p = 1/2, et on obtient :

$$E[x_a] = \left[(w_0 + x_1) + (w_0 + x_2)\right] / 2$$

$$= w_0 + \{ [x_1 + x_2] / 2 \}$$ (c.f. point C)

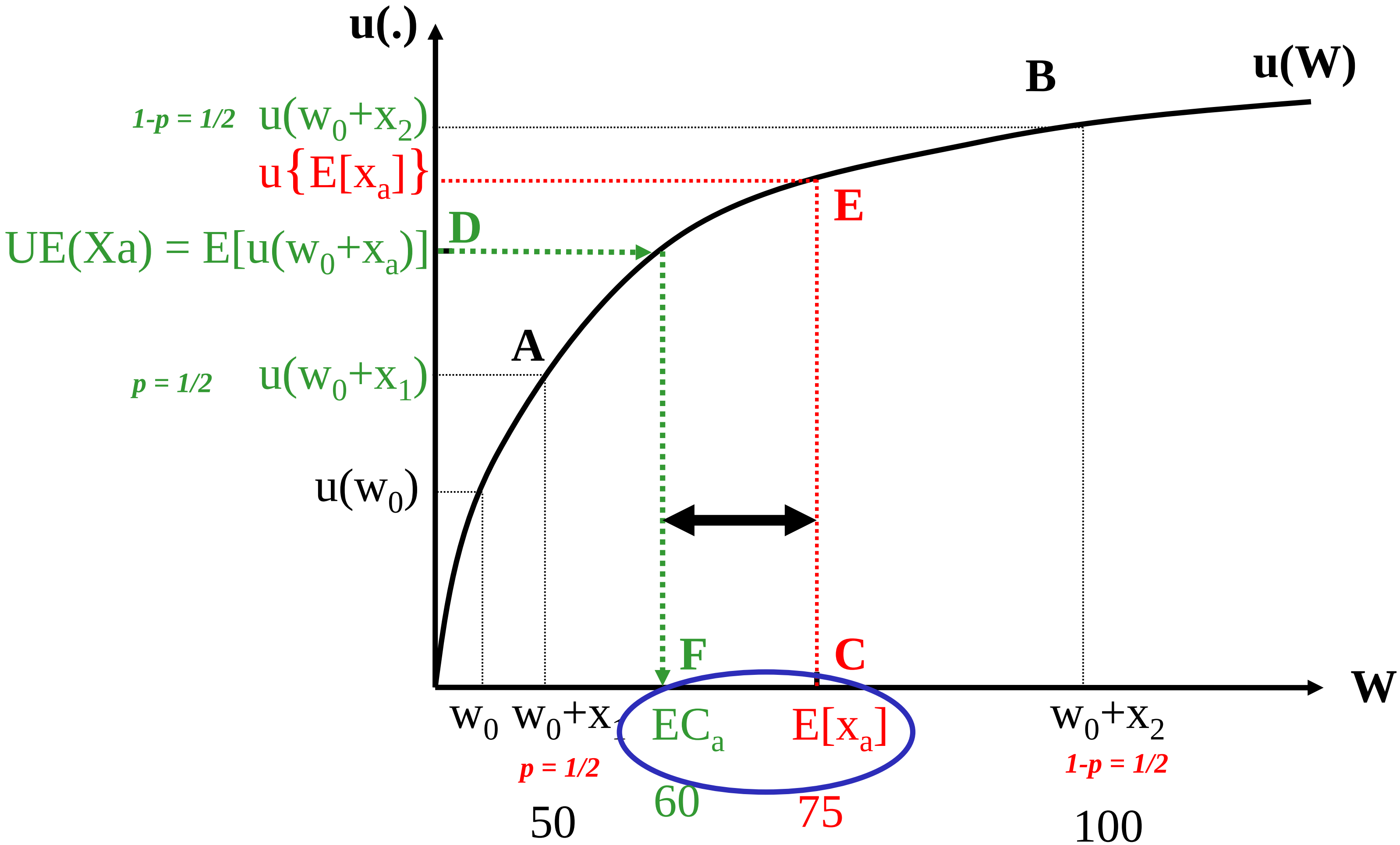
* À noter qu’à ce niveau de gain espéré correspond une utilité donnée par :

$$u\{E[x_a]\}$$ (cf. point E) :

* Cependant, l’utilité escomptée ne correspond pas à ce montant des gains espérés car l’agent maximise son Utilité Espérée, c-à-d l’espérance des utilités associées aux gains potentiels de l’action a :

$$E[u(w_0+x_a)] = p\, u(w_0 + x_1) + (1\text{-}p)\, u(w_0 + x_2)$$ (c.f. point D)

* Enfin, à ce niveau d’UE, associée à des conséquences aléatoires, on peut faire correspondre un niveau certain de richesse équivalent. Ce montant, qualifié d’Équivalent Certain, est donné par la fonction inverse de u(.) pour le niveau $E[u(w_0+x_a)]$: $EC_a\,(w_0\,;\,a) = u^{-1}\left[E[u(w_0+x_a)]\right]$ (c.f. point F)


u(.)
B
u(W)
1-p = 1/2
$u(w_0+x_2)$
$u\{E[x_a]\}$
E
D
$UE(Xa) = E[u(w_0+x_a)]$
A
p = 1/2
$u(w_0+x_1)$
$u(w_0)$
F
C
W
w_0
w_0+x_1
EC_a
$E[x_a]$
w_0+x_2
p = 1/2
1-p = 1/2
60
75
50
100

<u>Définitions des comportements face au risque</u> :

Si on considère que EC_a est la compensation minimale demandée par l'agent pour ne pas prendre l'action a (ou le prix maximum pour la prendre), on peut constater sur le graphique qu'elle est inférieure à l'espérance mathématique de gains : $EC_a < E[x_a]$.

Cet agent est caractérisé par une «aversion au risque » associé à l'action a.

Plus généralement, on obtient les définitions suivantes :

- **Aversion au risque :** $\mathbf{EC_a < E[x_a]}$
- **Neutralité au risque :** $\mathbf{EC_a = E[x_a]}$
- **Attirance pour le risque :** $\mathbf{EC_a > E[x_a]}$

Graphiquement on peut aussi constater que : $u\{E[x_a]\} > E[u(w_0+x_a)]$. Or cette inégalité implique la concavité de u(.). On a donc aussi les définitions suivantes :

- **Aversion au risque :** $\mathbf{u''(.) < 0}$
- **Neutralité au risque :** $\mathbf{u''(.) = 0}$
- **Attirance pour le risque :** $\mathbf{u''(.) > 0}$

Enfin, compte tenu de la définition de EC_a (la compensation minimale demandée par l'agent pour ne pas prendre l'action a ou le prix maximum pour la prendre), on peut définir une nouvelle notion permettant de caractériser le comportement de l'agent face au risque : la Prime de Risque.

Définition :
On appelle Prime de Risque de l'action a, la différence $\boldsymbol{\pi(w,a) = E[x_a] - EC_a}$, avec w la richesse initiale de l'agent.

Cette prime peut s'interpréter comme le montant maximum que l'agent est disposé à payer pour avoir $E[x_a]$ avec certitude plutôt que de prendre le risque correspondant à l'action a.

On obtient alors les définitions suivantes :

*** Aversion au risque :** $\boldsymbol{\pi(w,a) = E[x_a] - EC_a > 0}$
*** Neutralité au risque :** $\boldsymbol{\pi(w,a) = E[x_a] - EC_a = 0}$
*** Attirance pour le risque :** $\boldsymbol{\pi(w,a) = E[x_a] - EC_a < 0}$

2.2 De la nécessité de trouver une nouvelle définition du risque.

La variance est-elle toujours une bonne mesure du risque (comme c'est le cas chez Markovitz) avec *<u>le critère de l'Utilité Espérée</u> ?*

<u>Un contre-exemple :</u>

Soient 2 actions, a avec le vecteur de proba. (0, 0.99, 0, 0.01) et a* avec le vecteur de proba (0.8, 0, 0.2, 0), sur le même ensemble de conséquences X = (1, 10, 100, 1000).
On a : E(a*) = 20.8 et E(a) = 19.9
et **σ^2 (a*) = 1468 < σ^2 (a) = 9703.**
Donc a* domine a du point de vue du critère (μ-σ).

Mais si on pose une fonction d'utilité de type u(.) = Log (.), on obtient :
E[u(a*)] = 0.4 < E[u(a)] = 1.2

Une définition du risque compatible avec l'UE (Rothschild & Stiglitz, 1970) :

Objectif : Ordonner partiellement les actions possibles en termes de risques.

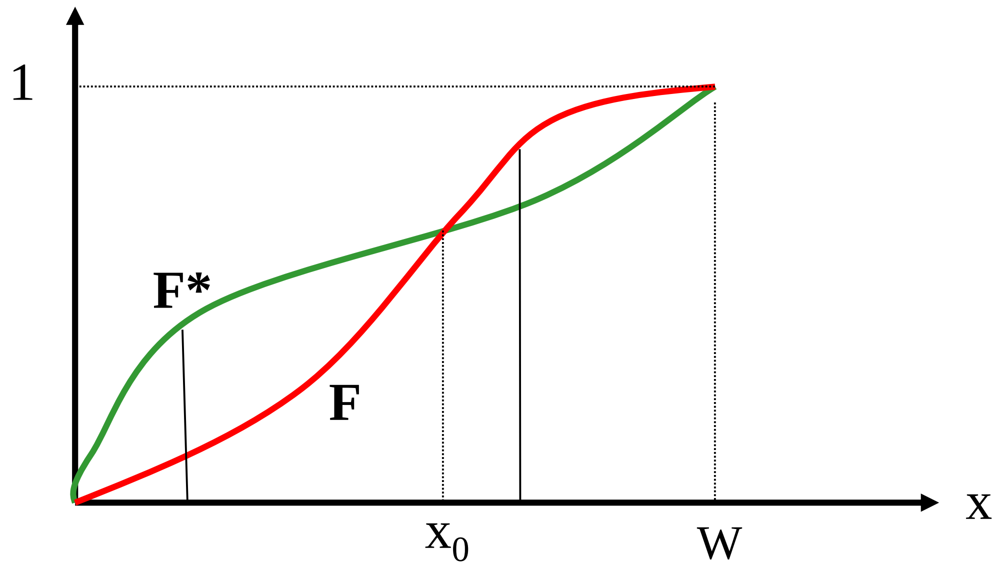
Définition : Changement de Risque à Moyenne Constante (CRMC).

Soient 2 distributions de probabilité F et F* de deux variables aléatoires a et a*, définies sur un intervalle [0,W].

F* est un CRMC de F si, et seulement si :

1) F* et F ont même espérance

2) $F^*(x) \geq F(x)$ pour $x \leq x_0$ et $F^*(x) \leq F(x)$ pour $x \geq x_0$.



Théorème :
Si F* est un CRMC de F, alors F* est « plus risquée » que F au sens de Rotschild-Stiglitz.
Cette définition est équivalente à :

a) $\int_0^x [F^*(x) - F(x)]dx \geq 0$ pour tout x

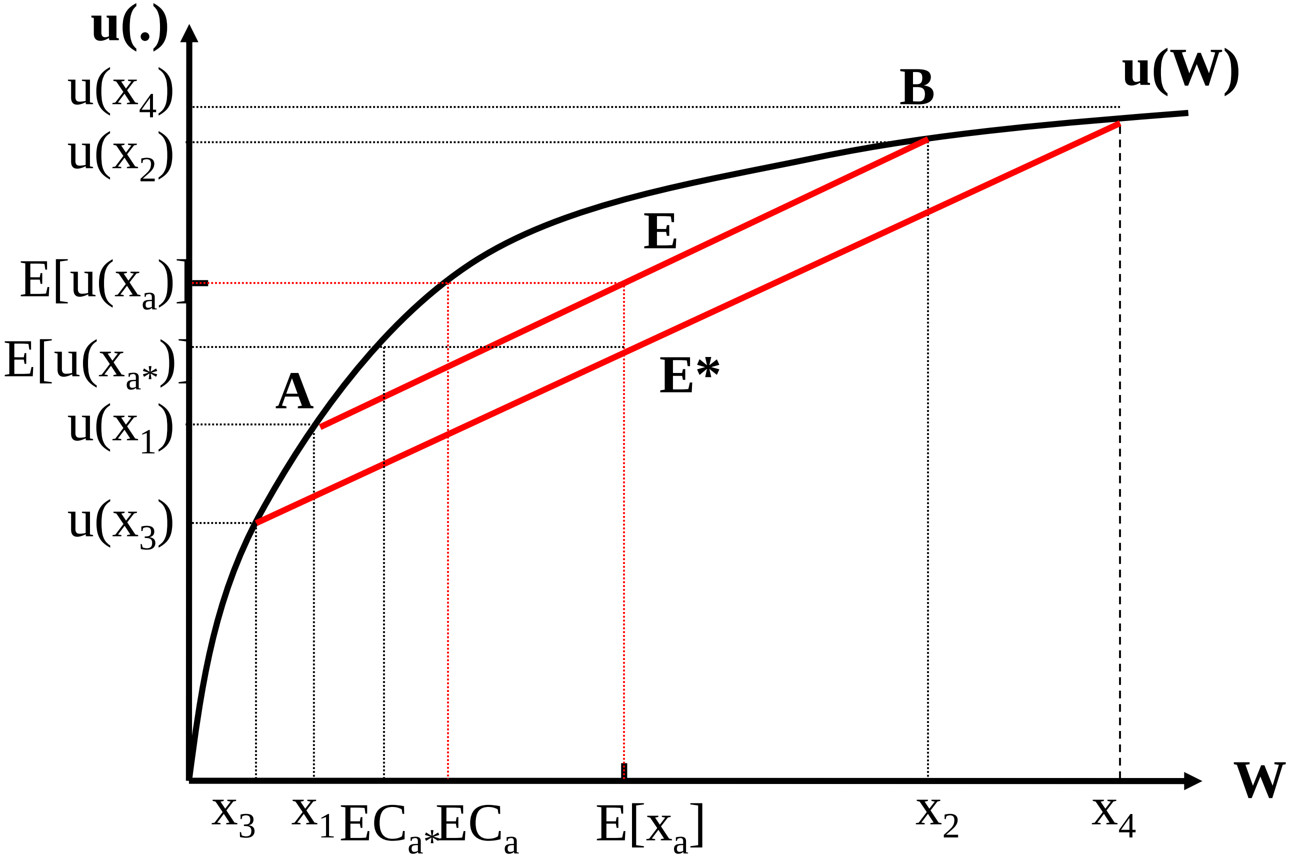
b) F*et F ont même espérance et : $\int_0^x u(x)dF^*(x) \leq \int_0^x u(x)dF(x)$
pour toute fonction u(.) croissante et concave.

Propriétés :

* Un plus grand risque (au sens de R&S) implique toujours une plus grande variance, mais pas l'inverse.
* Cette définition du risque est en relation avec la notion de Dominance Stochastique de **second ordre** (DS2) :

F* est DS2 à F ssi : $[F^*(x) - F(x)]dx \geq 0$ pour tout x

Soient 2 actions : a = (x_1,p_1 ; x_2,p_2) et a* = (x_3,p_3 ; x_4,p_4), qui ont la même espérance mathématique : $E[x_a] = E[x_{a*}]$



* L'action a* est un CRMC de a, et l'accroissement de risque implique une baisse de l'UE mesurée par la distance entre E et E*.

* Cette dégradation de l'UE est due à la concavité de u(.).

2.3 Indicateurs d’aversion au risque et comparaisons.

Quand peut-on dire qu’un agent a une plus forte aversion au risque qu’un autre agent ?

Le signe de u’’(.) ne donne que le comportement globale de l’agent face au risque, mais ne « mesure » pas le niveau d’aversion ou d’attirance.

a) L’indicateur d’aversion absolue au risque (Arrow & Pratt).

Proposent un indicateur local d’aversion au risque mesuré au niveau de la richesse w de l’agent :

$$\mathbf{r(w) \equiv - u''(w) / u'(w)}$$

Et ils obtiennent les définitions suivantes :

Si r’(w) > 0, l’aversion absolue au risque est croissante avec w
Si r’(w) = 0, l’aversion absolue au risque est constante avec w
Si r’(w) < 0, l’aversion absolue au risque est décroissante avec w

b) L'indicateur d'aversion relative au risque (Arrow & Pratt).

Si le risque est **multiplicatif** (gains et pertes en % de sa richesse initiale), on doit mesurer l'aversion relative au risque par l'indicateur suivant :

$$\mathbf{r^*(w) = - w \, [u''(w) / u'(w)] = w \, r(w)}$$

Et on obtient les définitions suivantes :

Si $r^{*\prime}(w) > 0$, l'aversion relative au risque est croissante avec w
Si $r^{*\prime}(w) = 0$, l'aversion relative au risque est constante avec w
Si $r^{*\prime}(w) < 0$, l'aversion relative au risque est décroissante avec w

c) Le Théorème de Pratt - Arrow :

Soient u_i les fonctions d'utilité des agents i (i=1,2), trois définitions équivalentes de la comparaison de l'aversion au risque peuvent être proposées :

D1 : u_1 est plus risque-adverse que u_2 si : $r_1(w) \geq r_2(w)$ pour tout $w \in X$.

D2 : u_1 est plus risque-adverse que u_2 si : $\pi_1(w,a) \geq \pi_2(w,a)$ pour tout $a \in A$.

D3 : u_1 est plus risque-adverse que u_2 s'il existe une fonction f(.) concave telle que $u_1(w) = f\,[u_2(w)] = f \circ u_2(w)$.

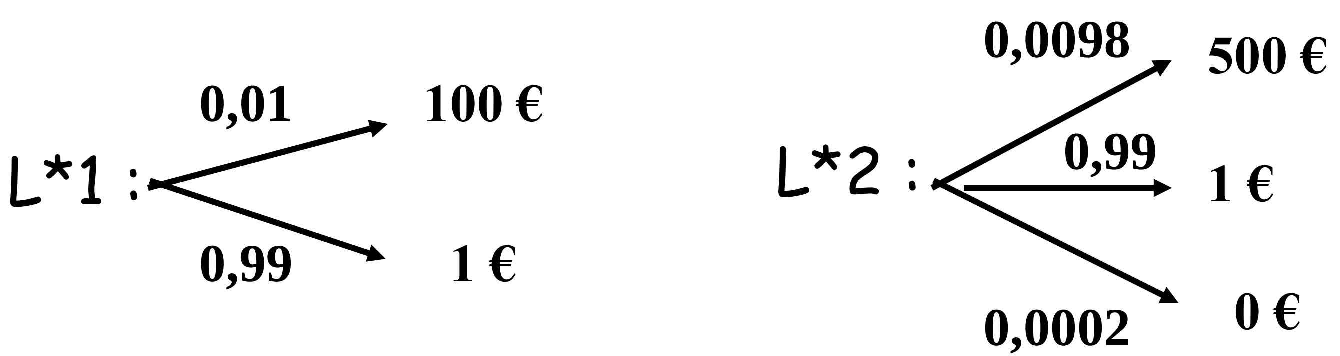
Chapitre 3 : Les limites de l'UE

a) L'effet de « rapport commun » (Allais, 1953)

Nombreuses expériences qui montrent la violation de l'axiome d'indépendance de la théorie de l'UE (axiome 3 de VNM).

Situation 1 : choisir entre les 2 loteries suivantes

Situation 2 : choisir entre les 2 loteries suivantes



Soit une loterie R particulière qui assure un gain d'un Euro avec une probabilité de 1 : R = {(1, 1)}, alors on peut écrire :

$$L^*1 = \lambda\, L1 + (1 - \lambda)\, R = 0.01 L1 + 0.99 R$$

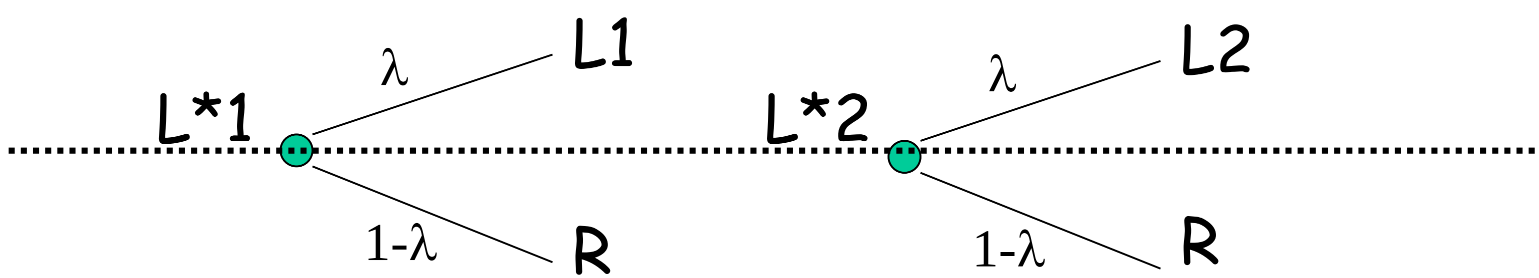
et

$$L^*2 = \lambda\, L2 + (1 - \lambda)\, R = 0.01 L2 + 0.99 R$$

Et si les agents respectent l'axiome d'indépendance de VNM, alors on a :

$$L1 >^{\#} L2 \quad \Leftrightarrow \quad L^*1 >^{\#} L^*2$$

Or, la majorité des sujets préfèrent L^*2 à L^*1, alors qu'ils ont préféré $L1$ à $L2$. Et cela malgré le « rapport constant des probabilités de gains pour les deux situations : 0,98 / 1 = 0,0098 / 0,01 = 0,98



Interprétations des résultats expérimentaux :

* la préférence entre L^*2 à L^*1 n'est pas indépendante de R. La combinaison des options n'est donc pas neutre et elle modifie les préférences entre les loteries.

* les agents affichent une préférence pour les options certaines par rapport aux options probables (Kahneman & Tversky, 1979) : paradoxe attribué à « l'effet de certitude ».

* ce paradoxe dépend en grande partie de la nature de la loterie R et de la taille de λ (Fishburn, 1988) : plus λ est proche de 0, plus l'axiome d'indépendance est violé par les sujets, et plus le gain dans la loterie R est élevé, plus l'axiome est respecté.

* l 'axiome d'indépendance implique la « neutralité » des préférences par rapport à l'information (Willinger, 1988). L'information sur la nature de la combinaison est sans importance dans la prise de décision selon cet axiome.

b) L'effet des « conséquences communes » (Allais, 1953)

Nombreuses expériences qui montrent la violation du 2ième postulat de « certitude » de Savage, rendant ainsi impossible d'indépendance des évènements mutuellement exclusifs.

		E1	E2	E3
Problème 1	a1	100$	100$	100$
	a2	0	500$	100$
Problème 2	a'1	100$	100$	0
	a'2	0	500$	0

Si l'agent respecte le 2ième postulat alors on a :

$$a_1(s) \geq° a_2(s) \Leftrightarrow \quad a_1'(s) \geq° a_2'(s)$$

⇨ *Même Savage a préféré a_2' à a_1' , alors qu'il préférait a_1 à a_2 .*

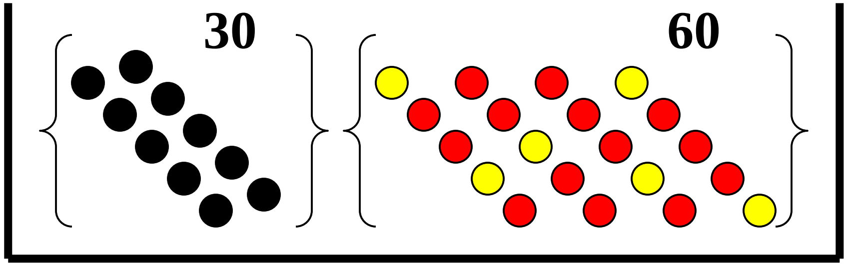
Interprétations des résultats expérimentaux :

* l'importance monétaire des conséquences communes (E3) n'est pas négligeable pour les sujets :
- plus celles-ci sont importantes (100$ dans le problème n°1), plus les sujets auront tendance à choisir l'action la moins risquée dans $E1 \cup E2$ (donc a_1) afin d'avoir une plus grande sécurité si E3 ne se produisait pas,
- et si les conséquences dans E3 sont faibles, les agents auront tendance à prendre des risques pour des gains importants dans le cas où E3 ne se produirait pas.
* le postulat de Savage implique une indifférence de l'agent par rapport à l'information et / ou le temps (Willinger, 1988).
* les agents ont une plus grande aversion au risque dans l'éventualité de la perte d'une opportunité que dans l'éventualité du gain d'une opportunité (Machina, 1987).

c) Le paradoxe des croyances de nature probabiliste (Ellsberg, 1961)

Expérience qui met en évidence la contradiction du résultat de Savage impliquant que les pondérations des utilités sont des croyances de nature probabiliste..

Une urne de 90 boules =



Pari *i* : gain en $ si la première boule tirée est de couleur X.

	Rouge	Noire	Jaune
Pari 1	100$	0	0
Pari 2	0	100$	0
Pari 3	100$	0	100$
Pari 4	0	100$	100$

D'après Savage, si l'agent respecte le 2ième postulat alors on a :

$$P_1 \geq° P_2 \quad \Leftrightarrow \quad P_3 \geq° P_4$$

<u>Résultats expérimentaux</u> : $P_1 \geq° P_2$ et $P_4 \geq° P_3$

<u>Contradiction théorique de ces résultats</u> :

* Si pour un agent on a $P_1 \geq° P_2$, cela signifie que pour lui :

$$p[\text{Rouge}] > p[\text{Noire}]=1/3$$

* Si pour un agent on a $P_4 \geq° P_3$, cela signifie que pour lui :

$$p[\text{Noire}] + p[\text{Jaune}] > p[\text{Rouge}] + p[\text{Jaune}]=2/3$$

$$\Leftrightarrow \quad p[\text{Noire}] > p[\text{Rouge}]$$

en contradiction avec son premier choix !

<u>Interprétations des résultats expérimentaux</u> :

* comportements observés ne sont pas conformes aux règles de calcul des probabilités additives,
* croyances ont tendance à « altérer » les probabilités subjectives compte tenu de leur aversion à l'ambiguïté issue de l'ignorance des proportions de boules rouges et jaunes dans l'urne.

3.3. Conclusion :

Constat :
Il existe peu de critères qui puissent (pour l'instant !) remplir les conditions d'efficacité analytique et être en même temps pertinents par rapport aux comportements réels des individus.
L'Utilité Espérée reste la base de toute modélisation du comportement des agents économiques en situation risquée ou incertaine. Notamment dans les cas d'asymétrie d'information.

L'Utilité Espérée : un outil qui a ses limites …

… mais un instrument méthodologique puissant, donc

... à utiliser avec précaution