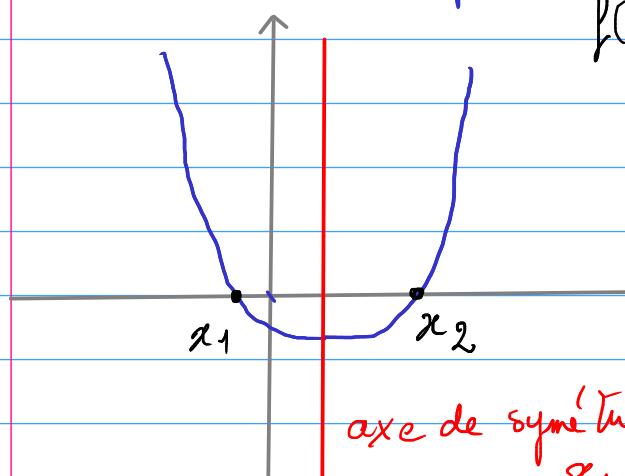


Complément Maths 1.

Méthode des complexes.



$$f(x) = 2x^2 - 3x - 2$$

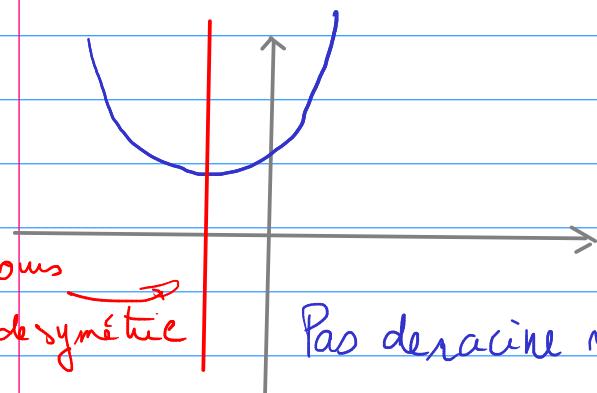
les racines :

$$\Delta = 9 - 4 \times 2 \times (-2)$$

$$= 25 \quad \sqrt{\Delta} = 5$$

$$x_1 = \frac{3 - 5}{4} = -\frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{3 + 5}{4} = \frac{8}{4}$$

axe de symétrie
en $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$



$$g(x) = x^2 + x + 1$$

$$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3$$

on a toujours
un axe de symétrie

Pas de racine réelle

On pose $i^2 = -1$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} ?$$

$$\Delta = (\sqrt{3}i)^2 = \sqrt{3} \sqrt{3} \times i \times i = 3 \times (-1)$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

Racines

$$x_1 = \frac{-b + \Delta^{1/2}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \Delta^{1/2}}{2a}$$

$$= \frac{1}{4} (-1 - \cancel{\sqrt{3}i} - 1 + \cancel{\sqrt{3}i})$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$= \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Part I

Élément généraux d'analyse

1 Les nombres complexes

Rappelons qu'il existe un ensemble, noté \mathbb{C} , d'éléments appelés nombres complexes, tels que :

- \mathbb{C} contient l'ensemble \mathbb{R} des réels ;
- \mathbb{C} est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles dans l'ensemble \mathbb{R} ;
- \mathbb{C} contient un élément i tel que $i^2 = -1$;

$$z = -1 + i$$

$$z = 8 - 5i$$

- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ où a et b sont deux réels. Cette écriture est appelée la forme algébrique de z .
 - On dit que le réel a est la partie réelle de z et on la note $a = \mathcal{R}e(z)$.
 - On dit que b est la partie imaginaire³ de z et on la note $b = \mathcal{I}m(z)$.
 - Tout nombre complexe de la forme $z = ib$ (b réel) est appelé imaginaire pur.

Proposition 1.1 *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :*

$$a + bi = a' + b'i \iff a = a' \text{ et } b = b'$$

En particulier :

$$a + bi = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0$$

- somme : $z + z' = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i.$
- produit : $zz' = (a + bi)(a' + b'i) = \cancel{aa'} + \cancel{ab'i} + \cancel{a'b'i} + \cancel{bb'i^2} = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$
- identités remarquables : elles restent valides dans \mathbb{C} , en particulier :

\bar{z} conjugue de z

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\begin{aligned} (a + bi)(a - bi) &= a^2 + b^2 \\ &= a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 \\ &= a^2 - b^2 (-1) \end{aligned}$$

même partie réelle
partie imaginaire opposée.



Definition 1.2 Soit $z = a + ib$ un complexe. Le conjugué de z est le complexe $\bar{z} = a - ib$.

- $z \in \mathbb{R}$ est donc équivalent à $\bar{z} = z$.
- Dire que z est imaginaire pur est équivalent à dire que $z + \bar{z} = 0$.

- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$

- $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ pour tout naturel n .

- Si $z' \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

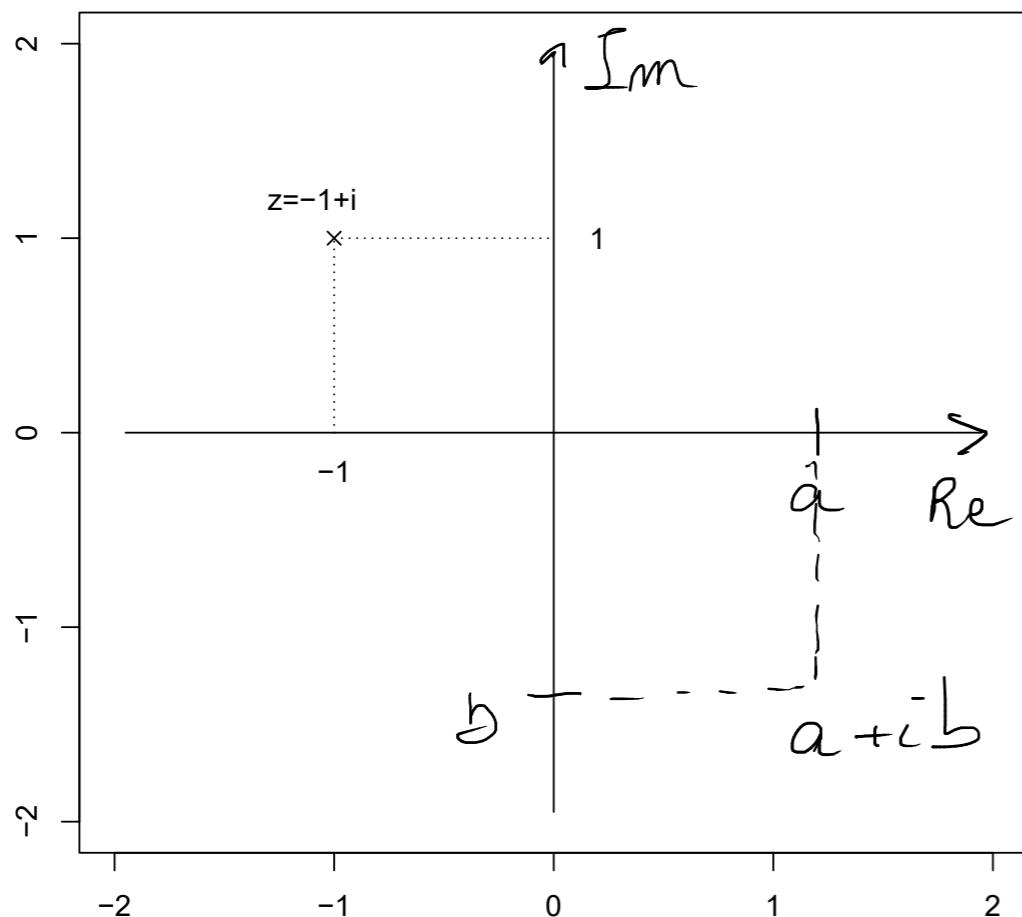


$$\begin{aligned}
 \overline{a+ib+a'+ib'} &= \overline{a+a'+(b+b')i} \\
 &= a+a' - (b+b')i \\
 &= a - ib + a' - ib' \\
 &= \overline{a+ib} + \overline{a'+ib'}
 \end{aligned}$$

Remarque 1.4 Pour tout complexe z on a $\bar{\bar{z}} = z$ et, si $z = a+ib$, $z\bar{z} = a^2 + b^2$

1.1 Forme algébrique

Nous avons vu qu'un nombre complexe z s'écrit sous sa forme algébrique $z = a + ib$, avec a et b des nombres réels. Les nombres a et b sont appelés respectivement partie réelle et partie imaginaire de z . Nous pouvons les utiliser comme abscisse et ordonnée pour repérer le nombre dans le plan dit complexe⁴.



Nous filerons l'exemple

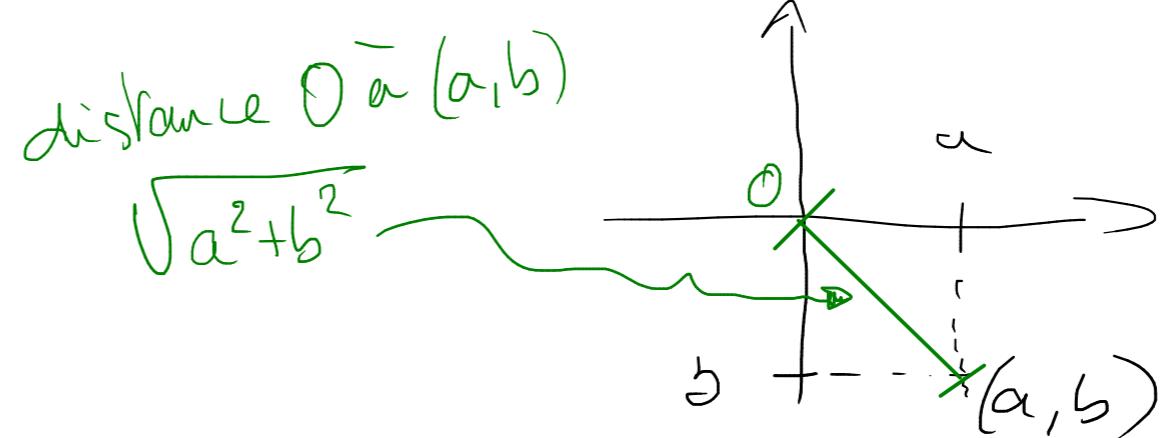
$$z = -1 + i$$

dans la suite des explications.

Ici, nous pouvons écrire

$$z = -1 + 1 \times i.$$

Ainsi, nous représenterons le nombre z par le point d'abscisse -1 et d'ordonnée 1 .



1.2 Module de z

Dans un plan, on rappelle que la distance d'un point de coordonnée (a, b) à l'origine est donnée par la formule

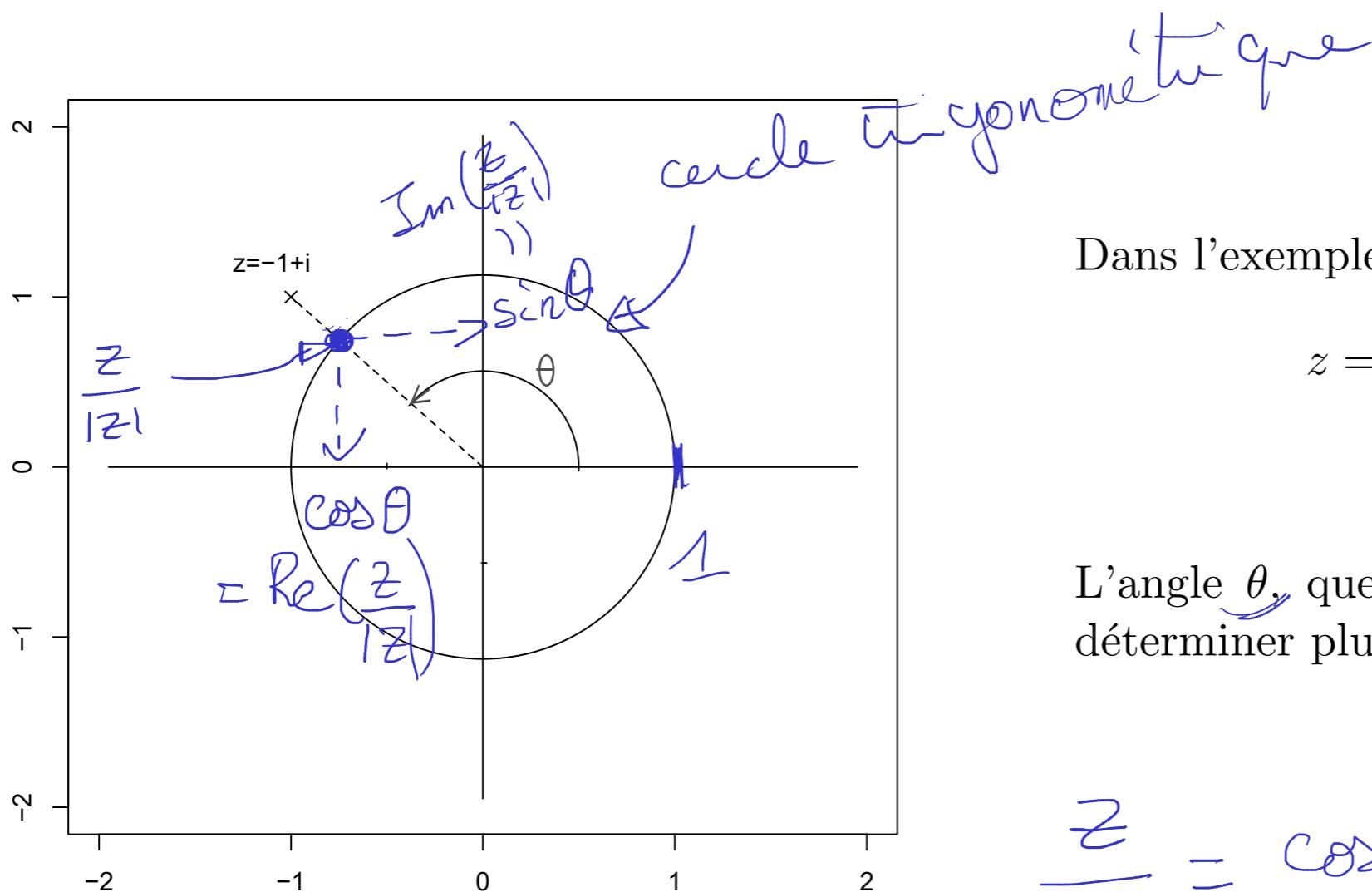
$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Par analogie, on pose la distance du point d'affixe $z = a + ib$ de coordonnées (a, b) , nommée module de z , notée $|z|$:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

1.3 Cercle trigonométrique

On rappelle que le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 centré sur l'origine servant de rapporteur. En effet, l'angle formé entre l'axe des abscisses ($x > 0$) et un segment d'extrémité l'origine est repéré par l'arc de cercle (du cercle trigonométrique) partant de l'axe des abscisses et s'arrêtant à l'intersection avec le segment. Notons cet arc (ou angle exprimé en radian) θ . Posons notre cercle trigonométrique sur notre dessin.



$$z = -1 + i = -1 + 1 \times i.$$

L'angle θ , que nous chercherons sans doute à déterminer plus tard, est l'argument de z .

$$\frac{z}{|z|} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

forme trigonométrique : $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$

En pratique : $z = -1+i$ et $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

forcer la
factorisation
par le module

$$z = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$$

L'angle θ est nommé **argument** de z . Rappelons que le point d'intersection entre le segment et le cercle trigonométrique a pour abscisse $\cos \theta$ et pour ordonnée $\sin \theta$. Dans notre exemple, on a

$$\tilde{z} = \frac{z}{|z|} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

1.6 Réciproquement, retrouver la forme algébrique

Il y a égalité entre les formes du nombre complexe z . À partir de la forme trigonométrique, il suffit de calculer les sinus et cosinus et d'effectuer des simplifications usuelles pour retrouver la forme algébrique :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \times \sin \frac{3\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = -1 + i \end{aligned}$$

Forme exponentielle:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$
$$|z| e^{i\theta} = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = z$$
$$\theta = \arg(z)$$

1.7 Propriétés

Proposition 1.5 [Inégalité triangulaire] Soient z et z' deux complexes. On a

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

$$zz' = |z|e^{i\theta} |z'|e^{i\theta'}$$

$$= |z||z'| e^{i(\theta+\theta')} = |zz'| e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\arg(zz') = \arg z + \arg z'$$

Proposition 1.6 Soient z et z' deux complexes non nuls. On a

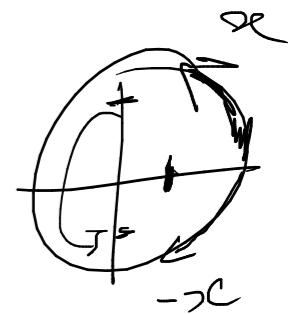
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$
- Pour tout entier n , $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \arg(z) \pmod{2\pi}$

$$\bullet \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \text{ et } \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \pmod{2\pi}.$$



$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|e^{i\theta}} = \frac{1}{|z|} e^{-i\theta} = \left| \frac{1}{z} \right| e^{-i\theta}$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$



1.8 Formules d'Euler

Puisque,

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x), \quad \text{et} \quad e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

on déduit les formules d'Euler pour définir les fonctions sinus et cosinus

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{\cancel{\cos x + i \sin x} + \cancel{\cos x - i \sin x}}{2} = \frac{2 \cos x}{2} = \cos x$$

$$\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{\cancel{\cos x + i \sin x} - (\cancel{\cos x - i \sin x})}{2i} = \frac{2i \sin x}{2i} = \sin x$$

Formules d'Euler:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Exemple On se sert des formules d'Euler pour linéariser $(\cos \theta)^n$ etc ... en utilisant le binôme de Newton.

$$\begin{aligned}\cos^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}}{4} \\ 2\cos(2x) &= \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} + 2}{4} = \frac{2\cos(2x) + 2}{4} \\ &\quad \leftarrow \frac{\cos(2x) + 1}{2}\end{aligned}$$

1.9 Racines de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul. Si $z^n = 1$, alors $z \neq 0$ et on peut donc écrire $z = re^{i\theta}$ de plus,

$$z^n = 1 \iff r = 1 \quad \text{et } \theta = \frac{2k\pi}{n}.$$

On a donc n racines de l'unité souvent notées

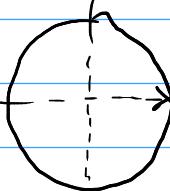
$$\xi_k = e^{\frac{2ki\pi}{n}}.$$

Si $z_0 \neq 0$, pour résoudre l'équation $z^n = z_0$, on utilisera la forme exponentielle.

cf l'exemple d'après

Il y a n racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

Cherchons les racines 3^{èmes} de l'unité. (1)


$$1 = e^0 = e^{2\pi i} = e^{-2\pi i}$$

3 représentations exponentielles de 1.

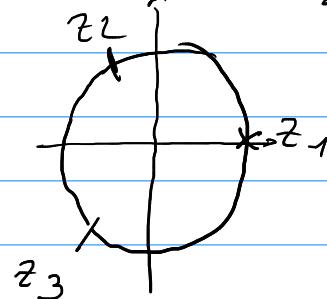
Soit z une racine 3^{ème} de l'unité:

$$z^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow z_1^3 = e^0 \quad z_2^3 = e^{2\pi i} \quad z_3^3 = e^{-2\pi i}$$

$$\Rightarrow z_1 = (z_1^3)^{1/3} = (e^0)^{1/3} \quad z_2 = (e^{2\pi i})^{1/3} \quad z_3 = (e^{-2\pi i})^{1/3}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = e^0 \quad z_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad z_3 = e^{\frac{-2\pi i}{3}}$$



1.10 Équation du second degré

c } exemple initial

Soient a , b et c des complexes avec $a \neq 0$. Comme

$$\begin{aligned} aX^2 + bX + c &= a \left(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(X + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left(X + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) \end{aligned}$$

résoudre l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ revient à chercher un complexe δ tel que $\delta^2 = b^2 - 4ac$. On obtient alors

$$X = \frac{-b \pm \delta}{2a}.$$

2 Espaces métriques

2.1 Topologie

On se place sur un ensemble E , par exemple, \mathbb{R}^n ou un espace de fonctions.

Definition 2.1

- L'application $x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}^+$ telle que

- (i) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},$
- (ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in E,$ (inégalité triangulaire),
- (iii) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0,$

est une norme.

- L'application $(x, y) \mapsto d(x, y) \in \mathbb{R}^+$ telle que
 - (i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
 - (ii) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in E$,
 - (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in E$ (inégalité triangulaire),

est une distance (appelée parfois métrique).

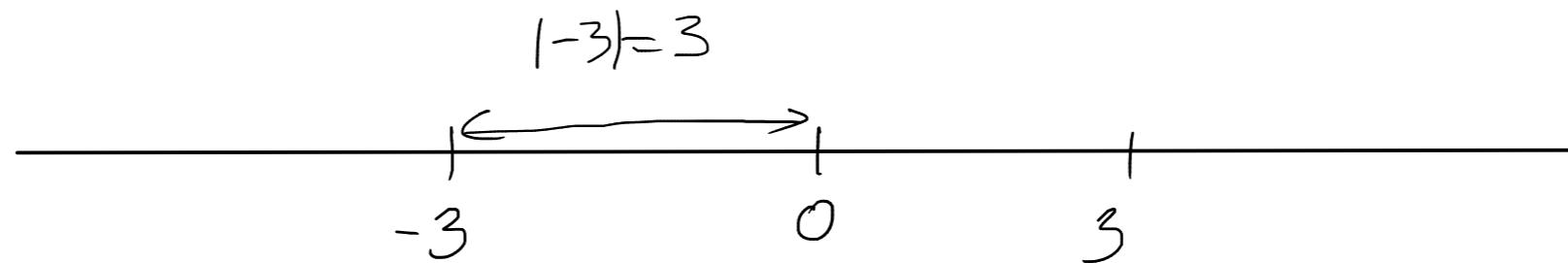
Un espace E muni d'une distance d est nommé espace métrique (E, d) . Tout espace muni d'une norme peut être considéré comme un espace métrique d'après la propriété suivante.

Proposition 2.2 *De toute norme $\|\cdot\|$, on peut définir la distance*

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Exemples fondamentaux de normes

- (i) La valeur absolue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto |x|$ est une norme sur \mathbb{R} . Par conséquent, l'application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $d(x, y) \mapsto |x - y|$ est une distance sur \mathbb{R} . De même, le module d'un complexe est une norme sur \mathbb{C} .



$|x|$ est bien une norme.

$$d(x, y) = |x - y|$$

$$\bullet |x| = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\bullet |\lambda x| = |\lambda| |x|$$

$$\bullet |x+y| \leq |x| + |y|$$

$$\begin{aligned} & \text{if } y > 0 \Rightarrow |x+y| = |x| + |y| \\ & \text{if } y \leq 0 \Rightarrow |x+y| = |x| + |y| \\ & \leq |x| + |y| \end{aligned}$$

(ii) Normes usuelles sur \mathbb{R}^n :

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \|x\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \\ \|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \\ \|x\|_\infty &= \max_i |x_i| \end{aligned}$$

(iii) Normes usuelles sur les suites :

Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ une suite de l'espace des suites à valeurs réelles noté souvent $\ell^0(\mathbb{R})$.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$$

(iv) Les normes usuelles sur les fonctions feront l'objet d'une section nommée *Espaces L^p* .

Definition 2.3 (Normes équivalentes)

Soit E un ensemble. On dit que deux normes N et N' sur E sont équivalentes s'il existe deux réels $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\underbrace{\alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)},$$

pour tout $x \in E$.

Naturellement, cette relation est symétrique, si N et N' sont équivalentes avec

$$\alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x),$$

pour tout $x \in E$, alors

$$\beta^{-1}N'(x) \leq N(x) \leq \alpha^{-1}N'(x).$$

Theorem 2.4 Toutes les normes sur \mathbb{R}^n sont équivalentes entre elles.

Ce qui n'est pas le cas dans tout espace métrique, en particulier sur les espaces de fonctions.

Exemple: Suite $v_n = \frac{1}{n}$

$$\|v_n\|_1 = \sum_i \left| \frac{1}{n} \right| = \infty \text{ diverge}$$

$$\|v_n\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \quad \text{Or} \quad \sum_i \left(\frac{1}{n} \right)^2 = \frac{\pi^2}{6} < \infty \text{ converge}$$

$\|v_n\|_2$ est finie.

Les deux distances ne sont pas équivalentes

Definition: * Norme sur E : $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}^+$

- $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

* Distance sur E : $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$

- $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, c) + d(c, y)$

Soir $\|\cdot\|$ une norme, alors $\|x - y\|$, $x, y \in E$, est une distance

Sur \mathbb{R}^N :

$$\|u\|_1 = \sum_i |u_i|$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_i u_i^2} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

issue du produit scalaire

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

$$\|u\|_p = \left(\sum_i |u_i|^p \right)^{1/p}$$

$$\|u\|_\infty = \max(u_i)$$

(norme euclidienne).

Definition 2.5 (Boule ouverte et fermée)

Soit (E, d) un espace métrique, $x \in E$ et $r > 0$:

$$d(x, y) = \|x - y\|_2$$

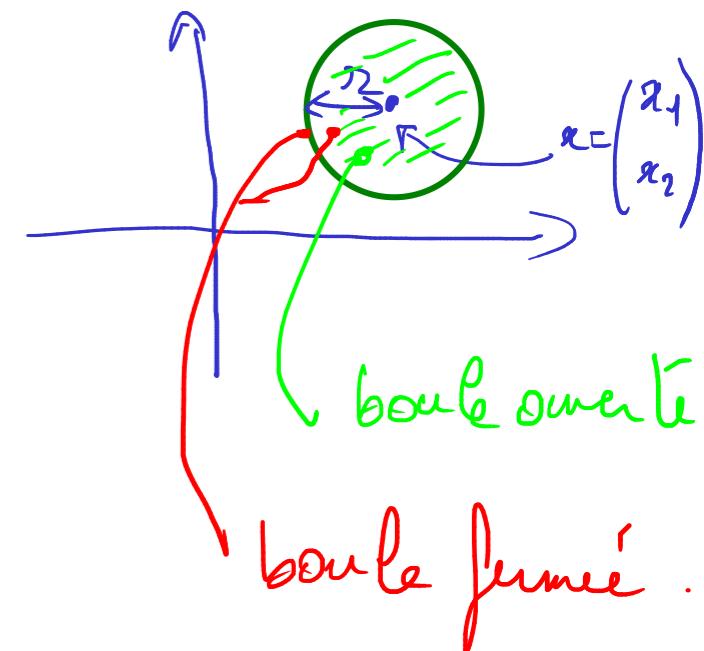
- on définit la boule ouverte de centre x et rayon r par

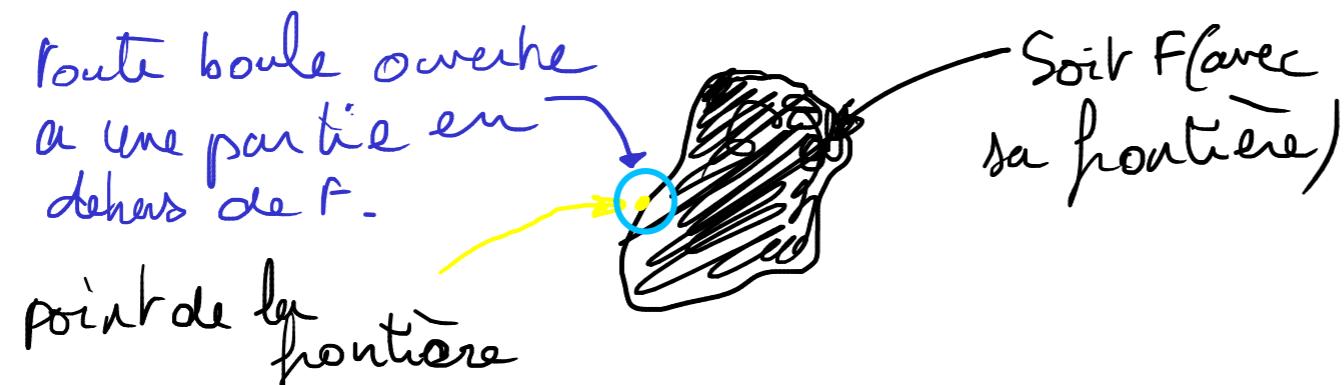
$$B(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) < r\};$$

- on définit la boule fermée de centre x et rayon r par

$$\bar{B}(x, r) = \{y \in E \mid d(x, y) \leq r\}.$$

On peut alors définir les ouverts et les fermés d'un espace métrique.





Definition 2.6

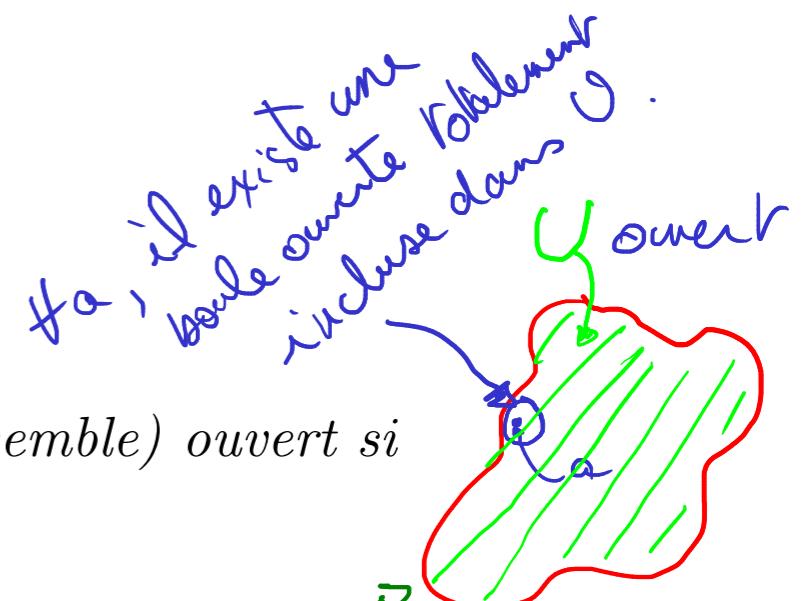
- On dit qu'une partie U de E est un (sous ensemble) ouvert si

$$\forall a \in U, \exists r > 0 : B(a, r) \subset U.$$

un ouvert n'a pas de frontière

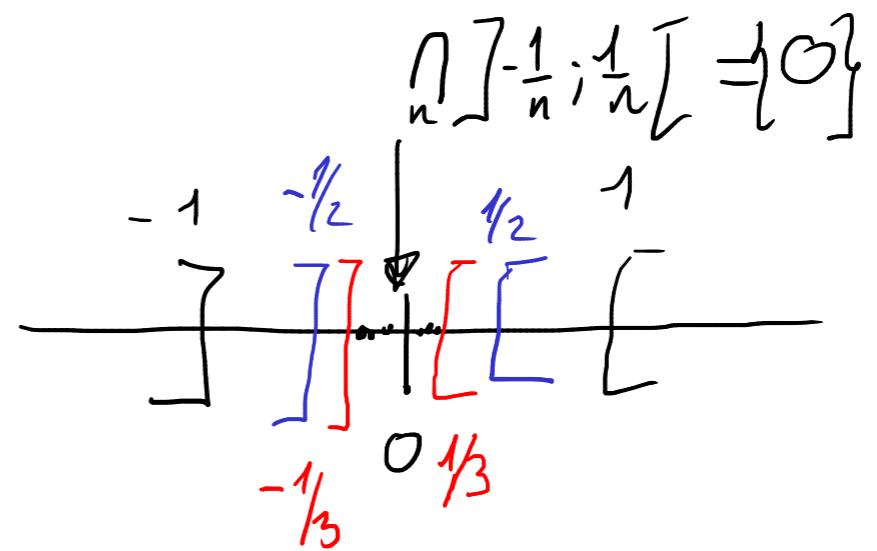
- On dit qu'une partie F de E est un (sous-ensemble) fermé si son complémentaire $F^c = E \setminus F$ est ouvert.

Un ensemble peut être ni ouvert, ni fermé : $\bar{[a, b]}$



- Proposition 2.7**
- (i) Toute boule ouverte est un ouvert.
 - (ii) Toute boule fermée est un fermé.
 - (iii) \emptyset et E sont à la fois ouverts et fermés.
 - (iv) Toute réunion d'ouverts est un ouvert. ←
 - (v) Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert. ← *complémentaire*
 - (vi) Toute intersection de fermés est un fermé. ←
 - (vii) Toute réunion finie de fermés est un fermé. ←
 - (viii) Un ouvert (resp. un fermé) est un ouvert (resp. fermé) pour toute norme équivalente.





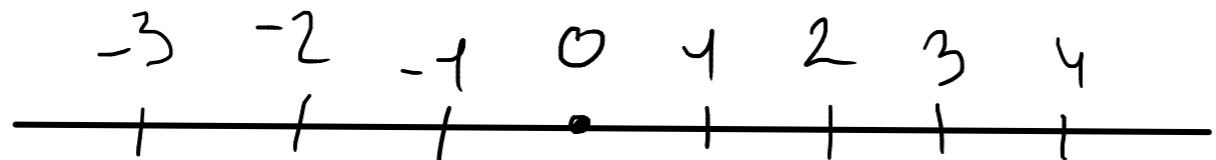
Notons qu'une intersection infinie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert. Prenons par exemple la suite d'intervalles ouverts $]-1/n; 1/n[$ de \mathbb{R} , l'intersection

$$\bigcap \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\},$$

est un fermé.

Note. Un fermé n'est pas nécessairement borné:

Dans \mathbb{R} :



\mathbb{Z} est un fermé de \mathbb{R}

(en effet, $\mathbb{Z}^c = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}}]i, i+1[$ est une union d'ouverts $\Rightarrow \mathbb{Z}^c$ est ouvert et \mathbb{Z} est fermé).

Note. Dans \mathbb{R}^n un ensemble fermé et borné (admettant un élément dont la norme est maximale) est un ensemble compact.

Theorem 2.8 Soit (E, d) un espace métrique. Tout sous-ensemble A de E , muni de la restriction d_A de la distance d sur $A \times A$:

$$d_A(x, y) = d(x; y), \quad \forall x, y \in A,$$

est un espace métrique.

2.2 Suites et topologie

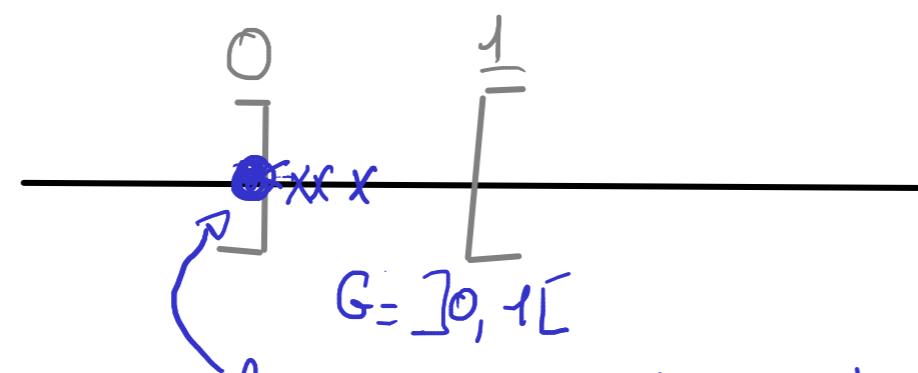
De manière générale, la convergence d'une suite d'éléments d'un espace métrique dépend du choix de la distance. En effet, si deux distances ne sont pas équivalentes, une suite convergente pour une métrique ne l'est pas forcément pour l'autre.

Definition 2.9 Soit (E, d) un espace métrique et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On dit que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $a \in E$, et on note $x_k \rightarrow a$, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq n_0$, on ait $d(a, x_k) < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \quad \forall k > n_0 \quad d(x_k, a) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \quad \forall k > n_0 \quad x_k \in B(a, \varepsilon)$$

Proposition 2.10 Un ensemble F de E est fermé si et seulement si, pour toute suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers une limite l , on a $l \in F$.



$$(v_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 2}$$

$$\lim v_n = 0.$$

la limite de la suite convergente $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas dans G . Donc G n'est pas un ferme'.

2.3 Continuité et fonctions lipschitziennes

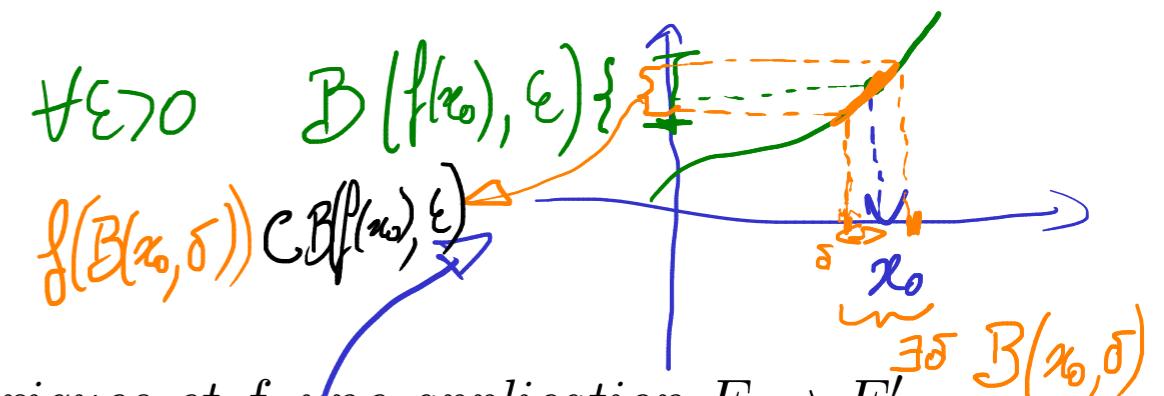
Definition 2.11 Soit (E, d) , (E', d') deux espaces métriques et f une application $E \rightarrow E'$.

(i) On dit que f est continue en un point $x_0 \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon).$$

(ii) Si A est un sous-ensemble de E , on dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point de A .

Thm: f est continue en $a \Leftrightarrow \forall x_n \rightarrow a \text{ on a}$
 $f(x_n) \rightarrow f(a)$.



Fonction Lipschitzienne :

Definition 2.13 Soit (E, d) , (E', d') deux espaces métriques et f une application $E \rightarrow E'$. On dit que f est L -lipschitzienne, où L est un réel strictement positif, si pour tout $x, y \in E$ on a

$$d'(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y).$$

Si L est le plus petit réel strictement positif vérifiant l'inégalité, on dit que L est la constante de Lipschitz de f .

Une fonction Lipschitzienne est continue:

Soit $x_n \rightarrow a$.

f Lipschitz de constante L .

$$d'(f(x_n), f(a)) \leq L d(x_n, a) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow d'(f(x_n), f(a)) \rightarrow 0.$$

Donc, pour toute suite convergente, les images convergent. Donc f est continue.

Montreons que $f(x) = x^2$ n'est pas Lpz (Lipschitzienne).

Soit $\varepsilon > 0$. On regarde x et $x + \varepsilon$.

Si f est Lpz. $\exists L \quad \forall \varepsilon > 0 \quad |f(x+\varepsilon) - f(x)| \leq L |(x+\varepsilon) - x|$

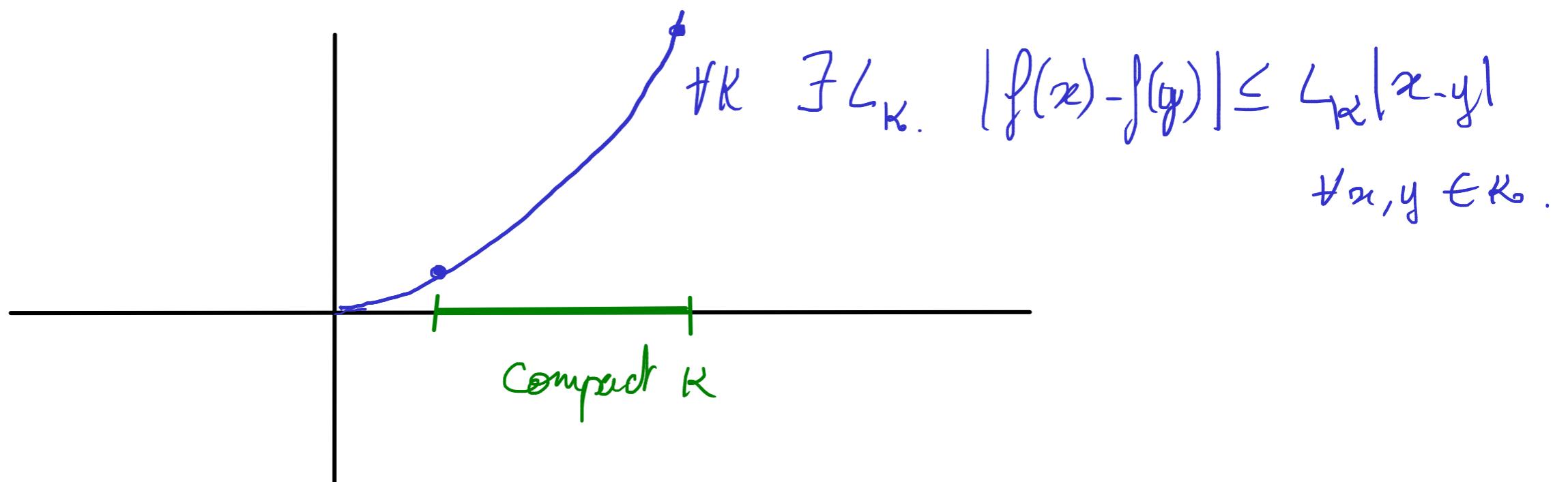
$$\Leftrightarrow |f(x+\varepsilon) - f(x)| \leq L\varepsilon.$$

$$\text{Or } |f(x+\varepsilon) - f(x)| = |(x+\varepsilon)^2 - x^2| = |2x\varepsilon + \varepsilon^2| = |\varepsilon||2x + \varepsilon|$$

$$\text{Donc } |f(x+\varepsilon) - f(x)| = |\varepsilon||2x + \varepsilon| \leq L\varepsilon \Leftrightarrow |2x + \varepsilon| \leq L \quad \begin{array}{l} \text{absurde} \\ \text{lorsque } x \rightarrow \infty. \end{array}$$

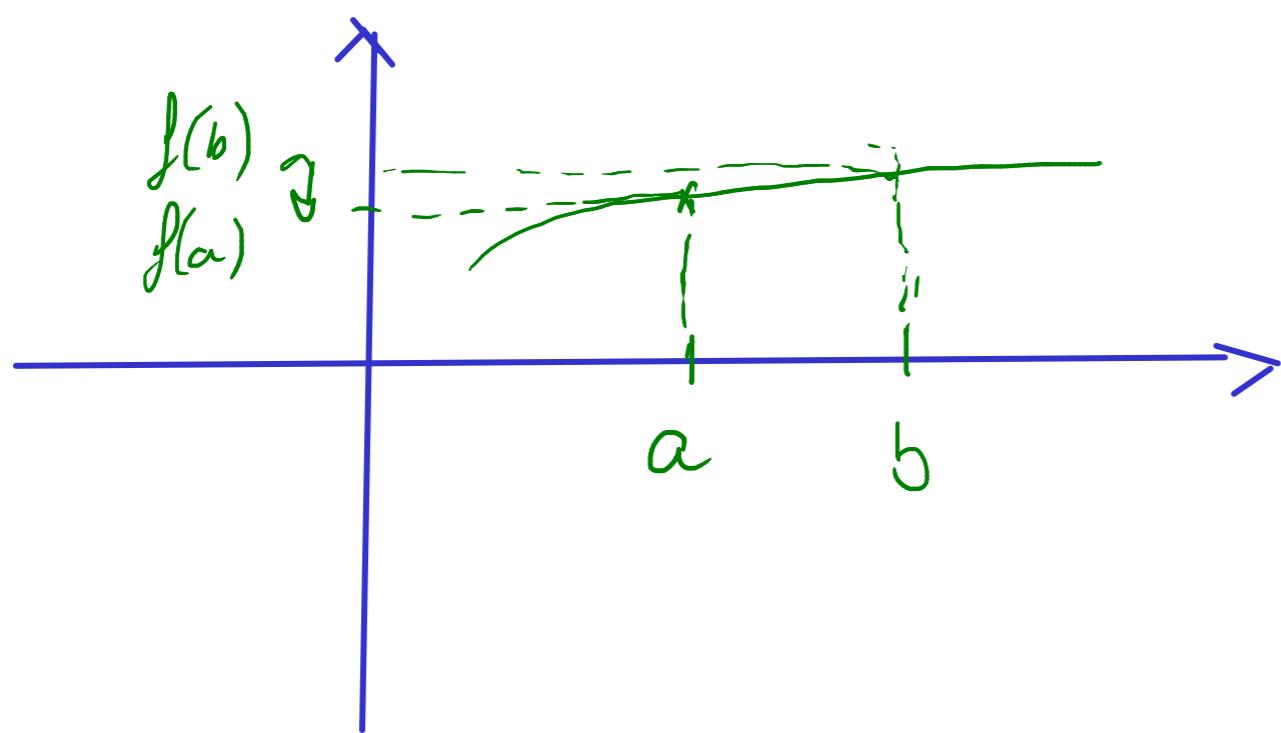
La réciproque n'est pas vrai. Prenons $f(x) = x^2$, et posons $c > 0$, bien que $d(x, x+c) \leq c$ pour tout x ,

Definition 2.14 Soit (E, d) , (E', d') deux espaces métriques et f une application $E \rightarrow E'$. Si, sur tout compact de E , la fonction f est lipschitzienne, on dite que f est localement lipschitzienne sur E .



On peut voir que la fonction $f(x) = x^2$ est localement lipschitzienne.

Definition 2.15 Une application K -lipschitzienne ayant une constante $K < 1$ est dite contractante.



$$|f(b) - f(a)| \leq K|b - a|$$

\uparrow
 $K < 1$

alors f est contractante.

Tous nos espaces sont complets
 (toute suite de Cauchy converge
 $\hookrightarrow |x_{n+1} - x_n| \rightarrow 0$)

Theorem 2.16 Soit E un espace métrique complet⁵ et f une application contractante de constante $k < 1$ de E dans E . Il existe un point fixe unique x^* de f (c'est-à-dire un x^* dans E tel que $f(x^*) = x^*$). De plus, toute suite d'éléments de E vérifiant la récurrence

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

vérifie la majoration

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1),$$

donc converge vers x^* .

Exemple, $f(x) = \frac{1}{2}x$ est contractante : $|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right| \leq \frac{1}{2}|x-y|$

f admet le point fixe 0 : $f(0) = 0$.

$U_{n+1} = f(U_n) = \frac{1}{2}U_n \longrightarrow 0$ par ce théorème.

Or $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. On sait qu'elle converge vers 0.

D'après

Complexes..

3 Espaces hilbertiens et hermitiens

3.1 Le cas réel : produit scalaire ("puisque rappel")

Cette première partie nous renvoie à des rappels d'algèbre 3.

Definition 3.1 Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Une application

$$(x, y) \in E^2 \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$$

est un produit scalaire sur E si elle vérifie les propriétés suivantes :

- symétrique : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- linéaire sur chaque argument (bilineaire)
 $\langle \lambda v + w, x \rangle = \lambda \langle v, x \rangle + \langle w, x \rangle ; \langle y, \lambda v + w \rangle = \lambda \langle y, v \rangle + \langle y, w \rangle$
- définie positive $\langle x, x \rangle > 0$. $\forall x \neq 0$.

Exemple.

- Sur \mathbb{R}^n , en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, l'application

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

définit un produit scalaire.

- Sur l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n ,

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

définit un produit scalaire.

Proposition 3.2 *Un produit scalaire permet de définir une norme en posant*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

distance: $d(x, y) = \|x - y\|$

Definition 3.3 *Un espace vectoriel muni de la norme issue d'un produit scalaire et nommé espace hilbertien (ou espace de Hilbert).*

Proposition 3.4 *Soit E un espace hilbertien muni d'un produit scalaire. Nous avons les deux inégalités suivantes pour tout $(x, y) \in E^2$:*

- [inégalité de Schwarz :] $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

On rappellera que l'égalité est vérifiée si et seulement si x et y sont colinéaires.

- [Inégalité de Minkowski :] $\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \|x\| + \|y\|$.

Il s'agit, en réalité, d'une version de l'inégalité triangulaire dans le cadre du produit scalaire.

$$\|x + y\|$$

3.2 Le cas complexe : produit hermitien

Definition 3.5 Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel. Un produit hermitien sur E est une application de $E \times E$ dans \mathbb{C} telle que

- $\times E$ dans \mathbb{C} telle que $\quad \text{---} \quad$

 - $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable,
 - $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ (ou \bar{z} est le conjugué de z), $\langle y, x \rangle$ est le conjugué complexe
de $\langle x, y \rangle$.
 - $\langle x, x \rangle \geq 0$, pour tout $x \in E$,
 - $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Exemple.

- Sur \mathbb{C}^n , en notant $x = (z_1, \dots, z_n)$ et $y = (z'_1, \dots, z'_n)$, l'application

$$\langle x, y \rangle = z_1 \bar{z}'_1 + z_2 \bar{z}'_2 + \dots + z_n \bar{z}'_n$$

définit un produit hermitien.

- Sur l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients complexes,

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) \bar{Q}(t) dt$$

définit un produit hermitien.

Proposition 3.6 *Un produit hermitien permet de définir une norme en posant*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Definition 3.7 *Un espace vectoriel complexe muni de la norme issue d'un produit hermitien est nommé espace hermitien (ou espace de Hermite).*

Les propriétés d'un produit scalaire s'étendent sans restriction au produit hermitien.

Note, dans \mathbb{C}^n

$$\langle z, z \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \bar{z}_i = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \geq 0 \quad (\text{et r'el})$$

$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ a du sens.

Proposition 3.8 Soit E un espace hermitien muni d'un produit hermitien. Nous avons les deux inégalités suivantes pour tout $(x, y) \in E^2$:

- [inégalité de Schwarz :] $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

On rappellera que l'égalité est vérifiées si et seulement si x et y sont colinéaires.

- [Inégalité de Minkowski :] $\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \|x\| + \|y\|$.

3.3 Orthogonalité

Definition 3.9 Soit x et y deux vecteurs. On dit que x est orthogonal à y si $\langle x, y \rangle = 0$.

Rappelons le si familier théorème de Pythagore.

Theorem 3.10 (Théorème de Pythagore) Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si et seulement si

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Le sens direct du théorème de Pythagore se généralise par une récurrence immédiate. Nous ne parlerons pas de sa réciproque.

Theorem 3.11 Si la famille de vecteurs (x_1, \dots, x_k) est orthogonale, c'est à dire avec $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ si $i \neq j$, alors

$$\|x_1 + \dots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_k\|^2.$$

On peut alors définir l'orthogonal d'un sous espace vectoriel F de E comme l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à ceux de F .

Definition 3.12 Soit F un sous espace vectoriel de E . L'orthogonal de F , noté F^\perp est le sous espace vectoriel

$$F^\perp = \{y \in E : \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall x \in F\}.$$

Notons que $(F^\perp)^\perp = F$. On pourra vérifier que, dans \mathbb{R}^n , si $F = \text{vect}\{u\}$ où $u = (a_1, \dots, a_n)$, alors

$$\begin{aligned} F^\perp &= \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = 0, \quad \forall x \in F\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \lambda u, y \rangle = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : \lambda \langle u, y \rangle = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : \langle u, y \rangle = 0\} \\ &= \{y = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0\}. \end{aligned}$$

Proposition 3.13 On a la somme directe

$$E = F \oplus F^\perp.$$

3.4 Base orthonormées

Dans la suite de cette section, on se place dans E , un espace hilbertien ou hermitien, sans restriction.

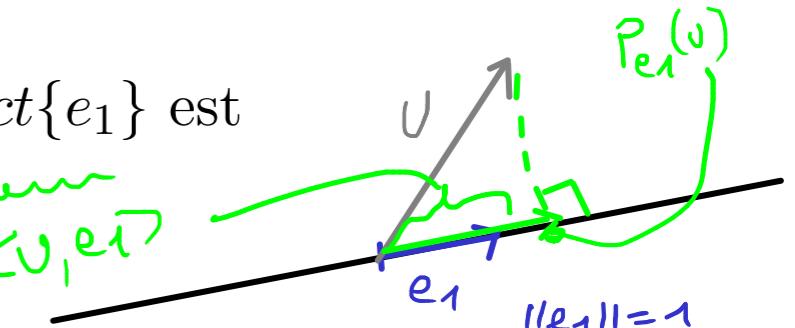
Definition 3.14 Soit (e_1, \dots, e_n, \dots) une base de E . On dit qu'elle est orthonormée si

- (i) pour tout $i \in 1, \dots, n$, $\|e_i\| = 1$,
- (ii) ses éléments sont deux à deux orthogonaux :

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0, \quad i \neq j.$$

Notons que sur un vecteur e_1 de norme 1, le projeté de u sur $F = \text{Vect}\{e_1\}$ est

$$p_F(u) = \langle u, e_1 \rangle e_1. \quad \text{de longueur } |\langle u, e_1 \rangle|$$



Pour bien comprendre, $|\langle u, e_1 \rangle|$ est la longueur du projeté orthogonal, et e_1 , de norme 1, dirige le projeté.

Il suit que si (e_1, \dots, e_n, \dots) est une base orthonormée, un vecteur $u \in E$ s'écrit

$$u = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle u, e_n \rangle e_n + \dots,$$

i.e. le vecteur u est la somme de ses projets dans les directions de chaque vecteur de la base orthonormée.

On observe que les coefficients $\langle u, e_i \rangle$ sont les coordonnées de u dans la base orthonormée, et le théorème de Pythagore nous dit

$$\|u\|^2 = \langle u, e_1 \rangle^2 + \dots + \langle u, e_n \rangle^2 + \dots.$$

Note. Il est fondamental que $\|e_i\|$ soit de norme 1, sans quoi, en posant $F = Vect\{v\}$, avec v un vecteur quelconque,

$$p_F(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$

Theorem 3.15 Soit E un espace hilbertien ou hermitien. Il existe dans E des bases orthonormées.

La preuve réside dans la construction algorithmique suivante d'une base orthonormée à partir d'une base quelconque, appelé procédé de Gram–Schmidt. Soit (e_1, \dots, e_n, \dots) une base de E . On initialise la construction,

$$u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}.$$

Le k ième vecteur est la normalisation du vecteur e_k auquel on a retiré les projets sur les espaces vectoriels engendrés par les vecteurs précédents,

$$\tilde{u}_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, u_i \rangle, \quad u_k = \frac{\tilde{u}_k}{\|\tilde{u}_k\|}.$$

Alors (u_1, \dots, u_n, \dots) ainsi définis forment une base orthonormée de E .

3.5 Projection orthogonale

Sur l'espace hilbertien ou hermitien E , on considère le sous espace F de base orthonormée (e_1, \dots, e_p, \dots) et F^\perp de base orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots)$.

Theorem 3.16 *Le projeté orthogonal de x sur F est donné par*

$$p_F(x) = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_p \rangle e_p + \dots.$$

On peut rappeler le théorème de Pythagore dans notre cas,

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2,$$

l'ensemble des fonctions forme un espace vectoriel

$$\begin{aligned} 0 &: 0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ + &: f+g: (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ \cdot &: f; \lambda \in \mathbb{R}: (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \end{aligned}$$

4 Espaces de fonctions

Nos fonctions usuellement utilisées définies sur un espace ou un sous-ensemble E à valeur dans un espace F peuvent être regroupées dans un ensemble noté $L^0(E, F)$ ou juste $L^0(E)$ si F est implicite. Nous proposons de donner un catalogue des ensembles de fonctions qui pourront nous intéresser.

(i) Les classes de régularité :

$$f: J \rightarrow \mathbb{R}$$

C^k : fonctions dérivables à
dérivée continue.

- $C^0(J, \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions continues de J vers \mathbb{R} ;
- $C^k(J, \mathbb{R})$: le sous-ensemble de $L^0(J, \mathbb{R})$ constitué des fonctions dont la k-ième dérivée est continue ;
- $C^\infty(J, \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions indéfiniment dérивables (c'est-à-dire n fois dérивables pour tout entier n de J vers \mathbb{R} , aussi appelées fonctions lisses ou régulières).
- $L^\infty(J, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions bornées sur J .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fonction } \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ \frac{1}{x} \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ e^{-x^2} \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \end{array} \right.$$

On peut munir ces espaces de la norme

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in J} |f(x)|.$$

Il suit que

$$L^{\infty} = \{f \in L^0, \|f\|_{\infty} < \infty\}.$$

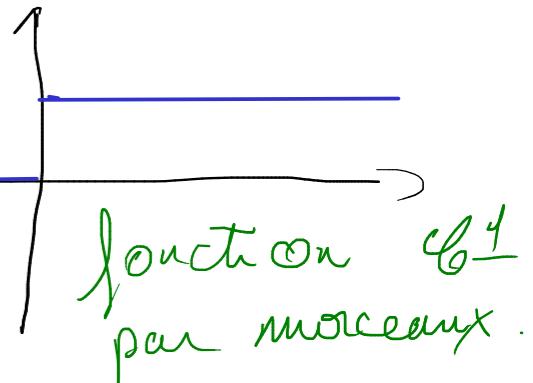
¶ L^{∞} est l'ensemble des fonctions dont la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ est finie. (fonctions bornées).

D'après l'exemple $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, elle est donc continue et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty]$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+})'(x) = 0$$

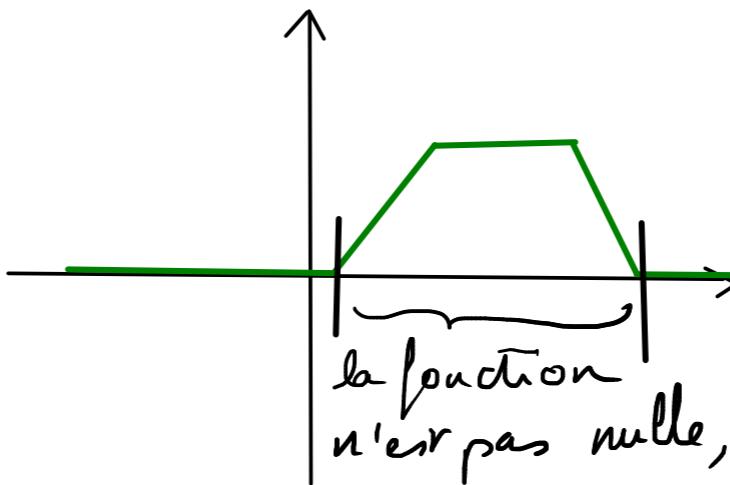
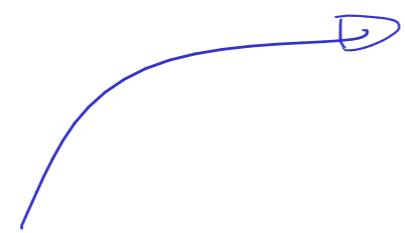
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+})'(x) = 0.$$

limites finies de la dérivée aux bornes.



fonction \mathcal{C}^1
par morceaux.

- (ii) Posons a_0, \dots, a_n d'une subdivision de $J = [a_0, a_n] = \bigcup_{i=0}^n [a_i, a_{i+1}]$. On peut définir les \mathcal{C}^k par morceaux, c'est à dire que la propriété de régularité est vérifiée sur les intervalles ouverts $]a_i, a_{i+1}[$ et la dérivée k ème prolongeable par continuité sur l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$. Par exemple, les fonctions $\mathcal{C}^1(J)$ sont dérивables et continues sur $]a_i, a_{i+1}[$ et admettent une dérivée à gauche de a_{i+1} (finie) et à droite de a_i (finie).



- (iii) Le support d'une fonction est l'ensemble des valeurs de J pour lesquelles l'image par la fonction n'est pas nulle. On pourra définir l'ensemble des fonctions à support compact. Notons le résultat suivant.

Theorem 4.1 *Une fonction continue à support compact est bornée et atteint ses bornes.*

Rappel : sur \mathbb{R}^n

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

(iv) Les espaces L^p (pour $p \geq 1$).

Notons que, pour tout $p \geq 1$,

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

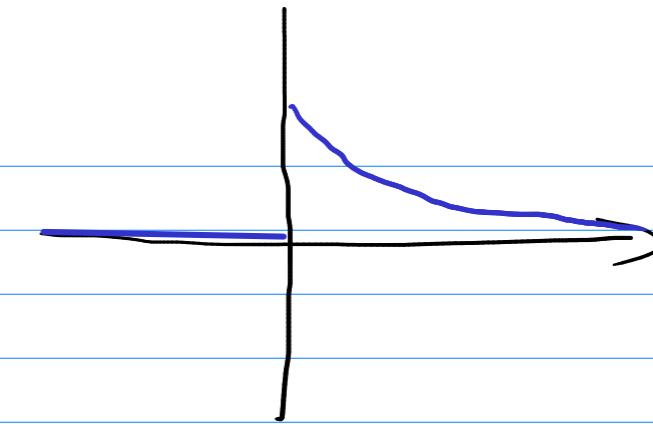
est une norme. On note, pour $p \geq 1$

$$L^p = \{f \in L^0 : \|f\|_p < \infty\}.$$

Ainsi, L^1 est l'ensemble des fonctions intégrables, L^2 est l'ensemble des fonctions dont le carré est intégrable ...

↪ contient les densités de proba

Exemple: $g(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$.



$$\begin{aligned} \int_R |g(x)|^p dx &= \int_R (e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+})^p dx = \int_0^{+\infty} (e^{-x})^p dx = \int_0^{+\infty} e^{-px} dx \\ &= \left[\frac{e^{-px}}{-p} \right]_0^{+\infty} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-px}}{-p} - \frac{e^{-p \cdot 0}}{-p} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

$$\|g\|_p = \left(\int_R |g(x)|^p dx \right)^{1/p} = \frac{1}{p^{1/p}} < \infty \Rightarrow g \in L^p \text{ si } p \geq 1.$$

$$\|g\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{[1, +\infty]}$$

$$\|f\|_1 = +\infty .$$

$$\|f\|_2 < \infty .$$

Sur les espaces de fonctions, les normes p ne sont pas équivalentes.

- $\langle \lambda f + g, h \rangle = \int (\lambda f + g)(x) h(x) dx = \lambda \int f(x) h(x) dx + \int g(x) h(x) dx$ linéarité de l'intégrale.
- parallèle à droite.
- $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$.
- $\langle f, f \rangle = \int f^2(x) dx > 0$ sauf si $f = 0$.

Theorem 4.2 L'ensemble L^2 muni de sa norme $\|\cdot\|_2$ est un espace hilbertien (resp. hermitien) dont la norme découle du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int f(u)g(u)du \quad (\text{resp. } \langle f, g \rangle = \int f(u)\bar{g}(u)du).$$

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int f^2(u)du} = \|f\|_2.$$

norme
issue
du
produit
scalaire

$\|\cdot\|_2$ est une norme issue d'un produit scalaire (ou hermitien).

prod' scalaire
orthogonalité
familles orthonormées

)) projections orthogonales.