9 Algèbre de Boole

Une algèbre de Boole est la donnée d'un triplet $(\Omega, 0, 1)$ et de

- une opération unaire $b \in \Omega \mapsto -b \in \Omega$, parfois noté $\bar{b}$,
- deux opérations binaires notées $\bullet$ et $+$ de $\Omega \times \Omega$ dans Ω

$\bullet$ = et

$+$ = ou

$-$ = non

a	b	$a+b$	ab	$-a$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1
		ou	et	non

vérifiant, pour tout $(a, b, c) \in \Omega$, les propriétés suivantes :

$$
\begin{array}{ll}
a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c & a + (b + c) = (a + b) + c \\
a \bullet b = b \bullet a & a + b = b + a \\
a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c) & a + (b \bullet c) = (a + b) \bullet (a + c) \\
a + 0 = a & a \bullet 1 = a \\
a \bullet (-a) = 0 & a + (-a) = \cancel{0}\ \underline{1}
\end{array}
$$

En utilisant ces axiomes, on voit que, pour tout $a \in \Omega$ on a $a + 0 = 0 + a = a$: on dit que 0 est élément neutre pour la loi $+$. On voit de même que $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$: 1 est neutre pour la loi $\bullet$.

Lois de Morgan

$$-(a+b) = (-a) \bullet (-b)$$

$$-ab = (-a) + (-b).$$

Notation : $\bar{a}$ $\bar{b}$

9.2 Tableau de Karnaugh

Les tableaux de Karnaugh permettent de représenter facilement des expressions booléennes.

9.2.1 Cas de deux variables

Le tableau de Karnaugh comprend quatre cases, correspondant aux quatre produits $ab, a\bar{b}, \bar{a}b, \bar{a}\bar{b}$.

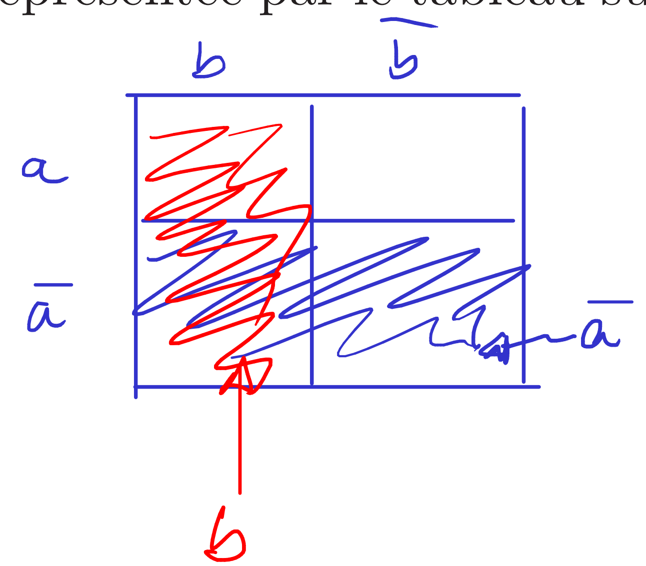
ab	$a\bar{b}$
$\bar{a}b$	$\bar{a}\,\bar{b}$

	b	$\bar{b}$
a		
$\bar{a}$		

La première ligne correspond à $ab + a\bar{b} = a(b + \bar{b}) = a\dot{1} = a$, la deuxième ligne correspond à $\bar{a}$. De même, la première colonne est b et la deuxième est $\bar{b}$. Pour représenter une expression dans un tableau de Karnaugh, on colore les cases concernées par l'expression.

Exemple.

L'expression $\bar{a}+b$ est représentée par le tableau suivant, dans lequel on colore la ligne $\bar{a}$ et la colonne b.



9.2.2 Cas de trois variables

Le tableau de Karnaugh comprend huit cases, correspondant aux huit produits : abc, $a\bar{b}c$, $ab\bar{c}$, $a\bar{b}\bar{c}$, $\bar{a}bc$, $\bar{a}\bar{b}c$, $\bar{a}b\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

b		$\bar{b}$	
abc	$ab\bar{c}$	$a\bar{b}\bar{c}$	$a\bar{b}c$
$\bar{a}bc$	$\bar{a}b\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}c$
c	$\bar{c}$		c

	bc	$b\bar{c}$	$\bar{b}\bar{c}$	$\bar{b}c$
a				
$\bar{a}$				

Exemple.

- L'expression c est représentée par le tableau suivant :

	bc	$b\bar{c}$	$\bar{b}\bar{c}$	$\bar{b}c$
a				
$\bar{a}$				

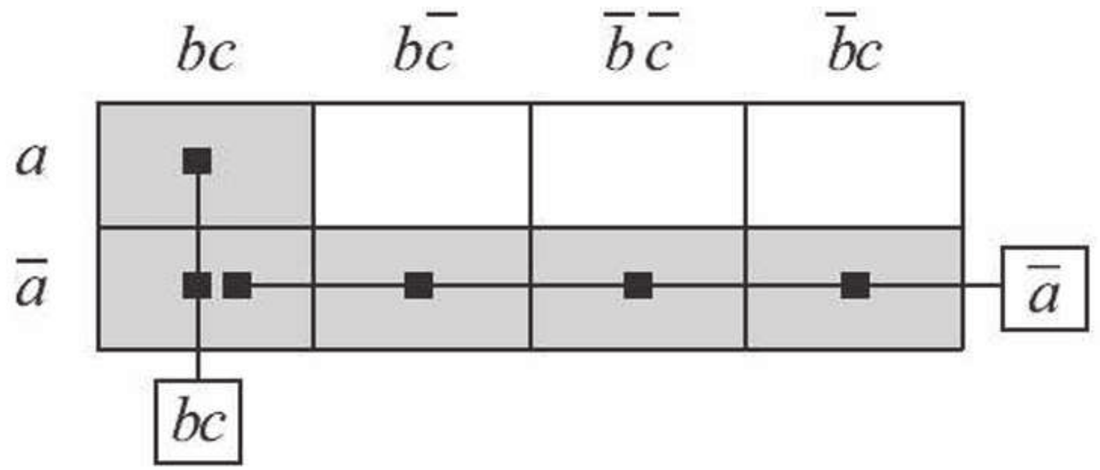
- Pour l'expression $\bar{a} + b$, on réunit la ligne $\bar{a}$ et les colonnes b (+ équivaut à OU et à réunion).

	bc	$b\bar{c}$	$\bar{b}\bar{c}$	$\bar{b}c$
a				
$\bar{a}$				

- Pour $\bar{a}c$, on prend l'intersection de la ligne $\bar{a}$ avec les colonnes c ($\bullet$ équivaut à ET et à intersection).

	bc	$b\bar{c}$	$\bar{b}\,\bar{c}$	$\bar{b}c$
a				
$\bar{a}$				

- Le tableau suivant

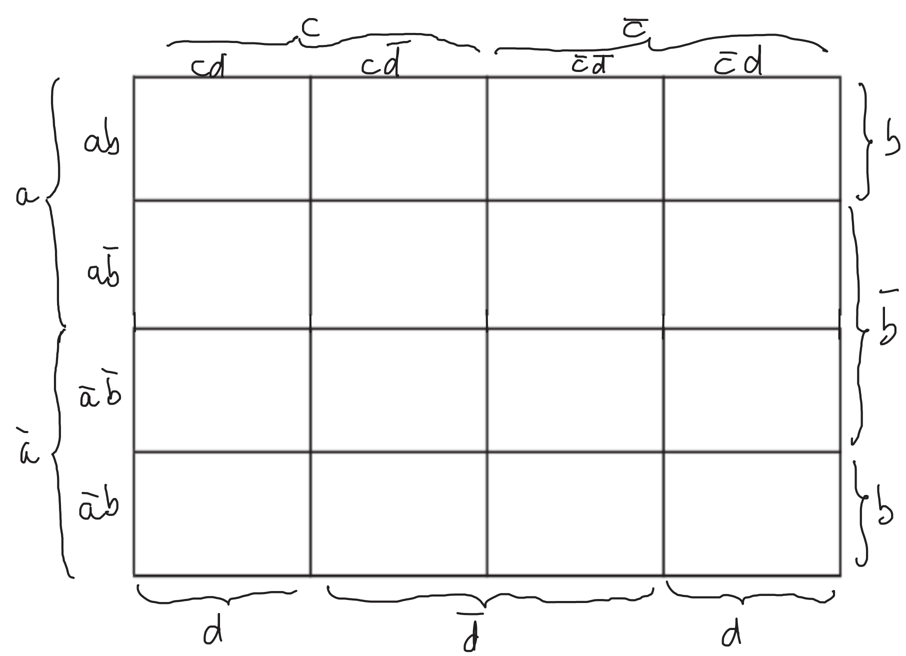


$\bar{a} + bc$

9.2.3 Cas de quatre variables

Le tableau de Karnaugh comprend alors seize cases, correspondant aux seize produits :

$$abcd, a\bar{b}cd, ab\bar{c}d, a\bar{b}\bar{c}d, \bar{a}bcd, \bar{a}\bar{b}cd, \bar{a}b\bar{c}d, \bar{a}\bar{b}\bar{c}d, abc\bar{d}, a\bar{b}c\bar{d}, ab\bar{c}\bar{d}, a\bar{b}\bar{c}\bar{d}, \bar{a}bc\bar{d}, \bar{a}\bar{b}c\bar{d}, \bar{a}b\bar{c}\bar{d}, \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}.$$



Prenons l'exemple de l'expression

$$\underbrace{abcd + \bar{a}bcd}_{} + \underbrace{\bar{b}cd}_{} + \underbrace{\bar{b}c\bar{d}}_{}.$$

$$= cd + \bar{b}c\bar{d}$$

de tableau de Karnaugh