1100548O9 易頡

9. a) $3^{302} = (3^4)^{75} \cdot 3^2 \equiv 1^{75} \cdot 9 = 9 \equiv 4 \pmod 5$ 　　$81 \bmod 5 = 1$

b) $3^{302} = (3^6)^{50} \cdot 3^2 \equiv 1^{50} \cdot 9 = 9 \equiv 2 \pmod 7$ 　　$729 \bmod 7 = 1$

c) $3^{302} = (3^{10})^{30} \cdot 3^2 \equiv 1^{30} \cdot 9 = 9 \equiv 9 \pmod{11}$

d) Let $m = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$

$M_1 = \frac{385}{5} = 77$ 　$y_1 = 3$ is an inverse of $M_1 = 77 \bmod 5$ since $77 \cdot 3 \equiv 1 \pmod 5$

$M_2 = \frac{385}{7} = 55$ 　$y_2 = 6$ is an inverse of $M_2 = 55 \bmod 7$ since $55 \cdot 6 = 330 \equiv 1 \pmod 7$

$M_3 = \frac{385}{11} = 35$ 　$y_3 = 6$ is an inverse of $M_3 = 35 \bmod 11$ since $35 \cdot 6 = 210 \equiv 1 \pmod{11}$

Hence, $x = 4 \cdot 77 \cdot 3 + 2 \cdot 55 \cdot 6 + 9 \cdot 35 \cdot 6 = 3474 \equiv 9 \pmod{385}$

10. 用歐幾里德演算法，先算出 $\gcd(34, 89) = 1$

$89 = 2 \cdot 34 + 21$
$34 = 1 \cdot 21 + 13$
$21 = 1 \cdot 13 + 8$
$13 = 1 \cdot 8 + 5$
$8 = 1 \cdot 5 + 3$
$5 = 1 \cdot 3 + 2$
$3 = 1 \cdot 2 + 1$

反轉步驟，算出結果是1的線性組合

$1 = 3 - 2$
$= 3 - (5-3) = 2 \cdot 3 - 5$
$= 2 \cdot (8-5) - 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5$
$= 2 \cdot 8 - 3(13-8) = 5 \cdot 8 - 3 \cdot 13$
$= 5 \cdot (21-13) - 3 \cdot 13 = 5 \cdot 21 - 8 \cdot 13$
$= 5 \cdot 21 - 8(34-21) = 13 \cdot 21 - 8 \cdot 34$
$= 13 \cdot (89 - 2 \cdot 34) - 8 \cdot 34 = 13 \cdot 89 - 34 \cdot 34$

因此 $s = -34$，34 mod 89 的其中一個數論倒數為 -34，也可寫為 55

11. 用歐幾里德演算法，先算出 $\gcd(144, 233) = 1$

$233 = 1 \cdot 144 + 89$
$144 = 1 \cdot 89 + 55$
$89 = 1 \cdot 55 + 34$
$55 = 1 \cdot 34 + 21$
$34 = 1 \cdot 21 + 13$
$21 = 1 \cdot 13 + 8$
$13 = 1 \cdot 8 + 5$
$8 = 1 \cdot 5 + 3$
$5 = 1 \cdot 3 + 2$
$3 = 1 \cdot 2 + 1$

反轉步驟，算出結果是1的線性組合

$1 = 3 - 2$
$= 3 - (5-3) = 2 \cdot 3 - 5$
$= 2 \cdot (8-5) - 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5$
$= 2 \cdot 8 - 3(13-8) = 5 \cdot 8 - 3 \cdot 13$
$= 5 \cdot 21 - 8(34-21) = 13 \cdot 21 - 8 \cdot 34$
$= 13(55-34) - 8 \cdot 34 = 13 \cdot 55 - 21 \cdot 34$
$= 13 \cdot 55 - 21(89-55) = 34 \cdot 55 - 21 \cdot 89$
$= 34(144-89) - 21 \cdot 89 = 34 \cdot 144 - 55 \cdot 89$
$= 34 \cdot 144 - 55(233-144)$
$= 89 \cdot 144 - 55 \cdot 233$

因此 $s = 89$，144 mod 233 其中一個數論倒數為 89