

1. 設 $P(n)$ 為 $2^n < n!$

基礎步驟: $P(4)$ 為真, 因為 $2^4 = 16 < 4! = 24$

歸納步驟: 假設 $P(k)$ 為真, 當 k 為任意大於等於 4 的固定整數
證明 $P(k+1)$ 為真,

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$$

$$< 2 \cdot k! \quad (\text{根據歸納假設})$$

$$< (k+1)k!$$

$$= (k+1)! \quad \text{這樣便完成了歸納步驟}$$

因此, $2^n < n!$ 成立, 當 n 為任意大於等於 4 的固定整數

2. a) 基礎步驟

b) $P(2)$ 成立, 因為 $2! = 2 < 2^2 = 4$

c) 歸納步驟: 假設 $P(k)$ 為真, $k! < k^k$, 當 k 為任意大於 1 的固定整數

d) 證明 $P(k+1)$ 為真

$$e) (k+1)! = (k+1)k!$$

$$< (k+1)k^k \quad (\text{根據歸納假設})$$

$$< (k+1)(k+1)^k$$

$$= (k+1)^{k+1}$$

f) 因此, $n! < n^n$ 成立, 當 n 為任意大於 1 的固定整數

$$3. a) 644 = 2 \cdot 322 + 0$$

$$322 = 2 \cdot 161 + 0$$

$$161 = 2 \cdot 80 + 1$$

$$80 = 2 \cdot 40 + 0$$

$$40 = 2 \cdot 20 + 0$$

$$20 = 2 \cdot 10 + 0$$

$$10 = 2 \cdot 5 + 0$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

$$(644)_{10} = (10 \ 1000 \ 0100)_2$$