CHƯƠNG 2 : BIỂU DIỄN TÍN HIỆU THỜI GIAN RỜI RẠC.

* Miền thời gian liên tục

Biến $t(s)$ liên tục $\rightarrow$ Tín hiệu liên tục $x_a(t)$ (a : analog)

* Miền thời gian rời rạc

Biến $n(s)$ rời rạc $\rightarrow$ Tín hiệu rời rạc $x[n]$

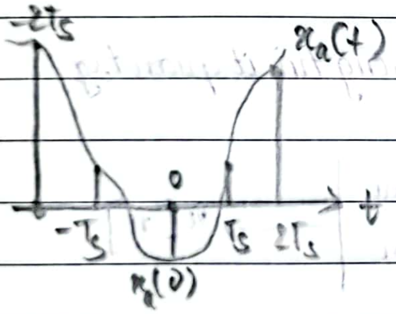
Note : Trong trường hợp này ta đã dùng biến nguyên n thay thế cho biến rời rạc t_n. $x[n]$ thay cho $x(t_n)$

Nghĩa là :

$t_n = nT$ với T là hằng số - khoảng cách rời rạc giữa 2 thời điểm nằm cạnh nhau.

(*) Quá trình chuyển từ $x_a(t) \rightarrow x[n]$: rời rạc hoá (trục t/gian)

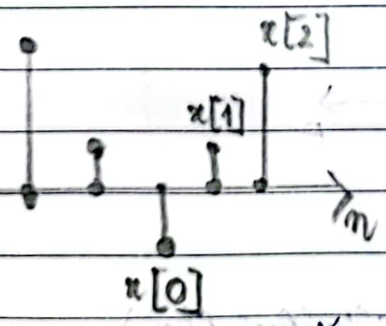
Tín hiệu: $x_a(t)$ —— lấy mẫu (sampling) $x_a(t)$ với chu kì lấy mẫu T_s



Mối liên hệ : $x_a(t)$ và $x[n]$

Ta có:

$$x[n] = x_a(t)\Big|_{t = nT_s} \quad \text{với } t \text{ : liên tục}$$



$\Leftrightarrow$ Mẫu thứ n của THiệu $x[n]$ có giá trị or biên độ bằng $x_n(nT_s)$

$\Leftrightarrow$ $x[n]$ là phiên bản rời rạc của $x_a(t)$ tại các thời điểm là bội số nguyên lần của chu kì lấy mẫu

$$x_a(t) \xrightarrow[T_{s1}]{\text{LMẫu}} x_1[n] \qquad x_a(t) \xrightarrow[T_{s2}]{\text{LMẫu}} x_2[n]$$

Câu hỏi : T_s = ? thì tối ưu ?

Ta có tiêu chuẩn tối ưu : hạn chế mất thông tin ít nhất cũng như dư thừa thông tin ít nhất - tối cho phí lưu trữ và xử lí ~~dữ~~ ~~liệu~~ tín hiệu.

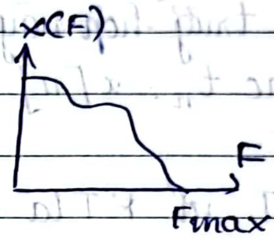
2.1 Định lí lấy mẫu Shannon:

Chỉ có thể khôi phục hoàn hảo tín hiệu liên tục $x_a(t)$ từ các mẫu rời rạc $x[n]$ của nó khi và chỉ khi tần số lấy mẫu

$F_s > 2F_{max}$ với $F_s = \frac{1}{T_s}$ (Hz) : số lần lấy mẫu trong 1s (bằng phần cứng) = số mẫu / 1s

Tần số giới hạn trên của $x_a(t)$

Tần số lấy mẫu



* Tần số giới hạn trên

$x_a(t) \xrightarrow[\text{phổ}]{\text{Phân tích}}$ Hàm phổ $X(F)$

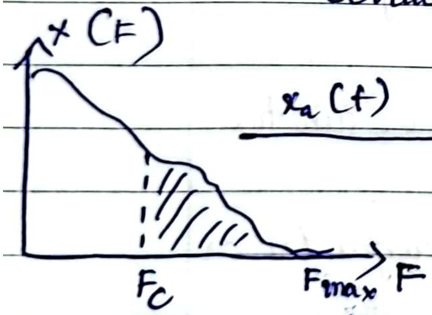
→ F_{max} là tần số cao nhất trong dải tần của $x_a(t)$

2.2 Lấy mẫu thực tế:

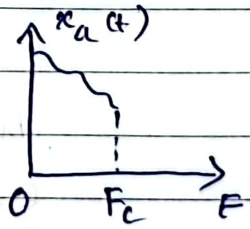
Pro $F_{max} \to +\infty$ (F_{max} >>) → F_s >>

Obs Tần số cao k° q.trọng bằng tần số thấp.

→ Solution: làm giảm F_{max} và chấp nhận 1 ít thông tin ít quan trọng (chứa tần số cao)



$x_a(t)$ → [Mạch lọc với tần số cắt F_c] → $x_a'(t)$ → [lấy mẫu với tần số $F_s = 2F_c$] → $x[n]$



Câu hỏi: F_c thấp bao nhiêu là chấp nhận được?

$F_c = \frac{F_s}{2}$: tần số Nyquist

(Tần số cao nhất mà hệ thống xử lí tín hiệu khôi phục được)

3. Khôi phục tín hiệu $x_a(t)$ từ $x[n]$

- phần cứng khôi phục THiệu (signal decoder) được điều khiển bởi

| T_s
| Hàm nội suy tín hiệu.

∘ phải chỉ ra $T_s = ?$ để khôi phục

∘ lấy mẫu (coder)

T_s ↗ ↖ N(bit)/sample

VD1:

Mô phỏng lấy mẫu tín hiệu hình sin liên tục

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F_0 t + \varphi_0)$$ với A, F_0, φ_0 là hằng số

F_0 ↓ Tần số duy nhất trong dải tg tần $\Rightarrow F_{max} = F_0$ (Hz)

Nếu hàm số lấy mẫu $F_{s_1} = 2F_{max} = 2F_0$

$$\rightarrow x_1[n] = x_a(t)\Big|_{t = nT_s = \frac{n}{F_{s_1}} = \frac{n}{2F_0}}$$

$$= A\cos(\pi n + \varphi_0)$$

Nếu hàm số lấy mẫu $F_{s_2} = 3F_{max} = 3F_0$

$$\rightarrow x_2[n] = x_a(t)\Big|_{t = n T_{s_2} = \frac{n}{3F_0}}$$

$$= A\cos\left(\frac{2}{3}\pi n + \varphi_0\right)$$

Dùng hàm số biểu diễn:

$$x[n] = \begin{cases} 2^n, & 1 \le n \le 3 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

giá trị của TH tại mỗi thời đ' đều là TH xác định

Dùng bảng

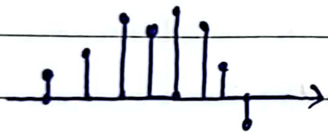
n	
$x[n]$	

Biểu diễn chuỗi: chỉ dùng với TH ngắn

$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{0}, 2, 4, 8\}$$

$n=0$

Biểu diễn = đồ thị:



Các phép toán trên tín hiệu: (TL: 45/1009)

Tín hiệu mũ:

$$x[n] = a^n$$

$x[n] \longrightarrow x[n-k]$

↳ phiên bản trễ t/gian của $x[n]$

$k > 0$: đồ thị dịch về ~~bar~~ bên phải

$k < 0$: đồ thị dịch về bên trái

- Các đồ thị trong tr/hợp này có đ~ bao biến đổi giống nhau (ng~ lượng giống nhau) và có chung trục thời gian (n)

phép dịch + phép đảo t/g   TL: Tr 47/1009

BTVN 1: bài 2: tr 97/1009: Tutorial problem:
có đáp án trong solution chương 2

* Note:
Các phép toán trên tín hiệu đều theo nguyên tắc "point-to-point" - thực hiện trên từng mẫu một.

BTVN 2: Slide chương 2: 28/70
Prob.1 : 29/70
Prob.2 : 30/70 Khai triển + vẽ đồ thị.

Bài tập lập trình:

Viết chương trình lấy mẫu lại 1 TH rời rạc (resampling)
Đã có TH rời rạc $x[n]$ thu được bằng cách lấy mẫu $x_a(t)$ với tần số lấy mẫu F_s. → 1 File audio nào đó

- Tăng tốc độ (tần số lấy mẫu) của $x[n]$ lên M lần bằng cách nội suy 2 mẫu liên tiếp của $x[n]$ (chèn các gtrị 0 / tuyến tính / cubic spline)
sd các hàm, thư viện hỗ trợ

$$\underset{F_s,\ L_x}{\xrightarrow{x[n]}} \boxed{\text{Up-Sampler } M\uparrow} \underset{MF_s,\ L_y = ML_x}{\xrightarrow{y[n]}}$$

- Giảm tốc độ mẫu của $x[n]$ đi M lần bằng cách cứ M mẫu liên tiếp của $x[n]$ thì chỉ giữ lại 1 mẫu trong $x[n]$ (bỏ đi M-1 mẫu còn lại)

$$\underset{F_s,\ L_x}{\xrightarrow{x[n]}} \boxed{\text{Down-Sample } M\downarrow} \underset{\frac{F_s}{M},\ L_y = \left\lceil \frac{L_x}{M} \right\rceil}{\xrightarrow{y[n]}}$$

- Phát ra loa để so sánh chất lượng $x[n]$ và $y[n]$ trong các TH hợp

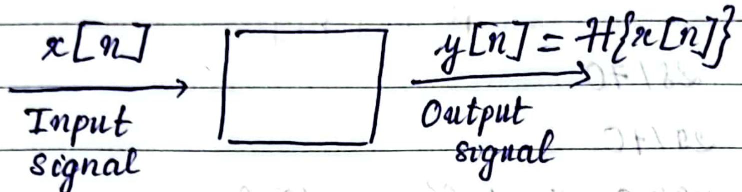
Chương 3:

TL: phần 2.3 Trg: 49 /1009

Về mặt toán học:

Hệ thống là 1 thực hiện 1 phép toán với 1 TH rời rạc.

Notation: $y[n] = T\{x[n]\}$



Ex1: $y[n] = \frac{1}{3}\{x[n] + x[n-1] + x[n-2]\}$ → Khử bớt nhiễu, làm trơn

$y[n] = 2\{x[n].x[n+1] - x[-n+3]\}$

$y[n] = 100\{x[n]\}$: Khuếch đại biên độ tín hiệu lên 100 l

Ví dụ:

$\underset{\text{BĐ của}}{y[n]} = \frac{1}{3}\{\underset{\text{tại chỉ số}}{x[n]} + x[n-1] + x[n-2]\}$

⇔ mẫu ~~thứ n~~ của TH ra bằng trung bình cộng của biên độ của 3 mẫu của TH vào tại các chỉ số n, n+1, n-2.

⇔ TH ra là Trung bình cộng của 3 tín hiệu: TH vào x[n], phiên bản trễ 1 đơn vị của TH vào, phiên bản trễ 2 đơn vị của TH vào

VD2:

$y[n] = 100\,x[n]$: mẫu thứ n của TH ra có biên độ = 100 l biên độ của TH vào ở mẫu thứ n

(Khuếch đại biên độ tín hiệu lên 100 l)

Tổng kết các tính chất của hệ thống: TL: bảng 2.2 (56/1009)

- Time-invariance: TH k° thay đổi theo thời gian
- Stability: (ổn định)
- Causality: (nhân quả): $x[n] = 0$ với $n \le n_0$ → TH chưa xh
  → Khi $n > n_0$ thì TH mới xh

Bài tập về nhà

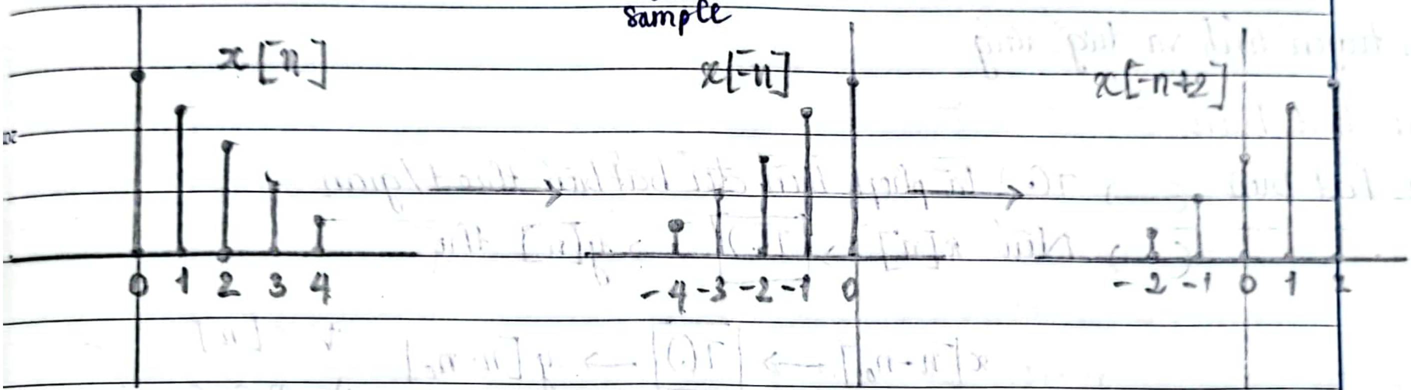
1. Let $x[n] = \{5, 4, 3, 2, 1\}$

a) Let $y_1[n]$ be obtained by first folding $x[n]$ and the shifting the result to the right by two sample

Theo đề ta có:

$$x[n] \xrightarrow{\text{fold}} x[-n] \xrightarrow[\text{to right two sample}]{\text{shift}} = x[-n+2]$$

$x[-(n-2)]$

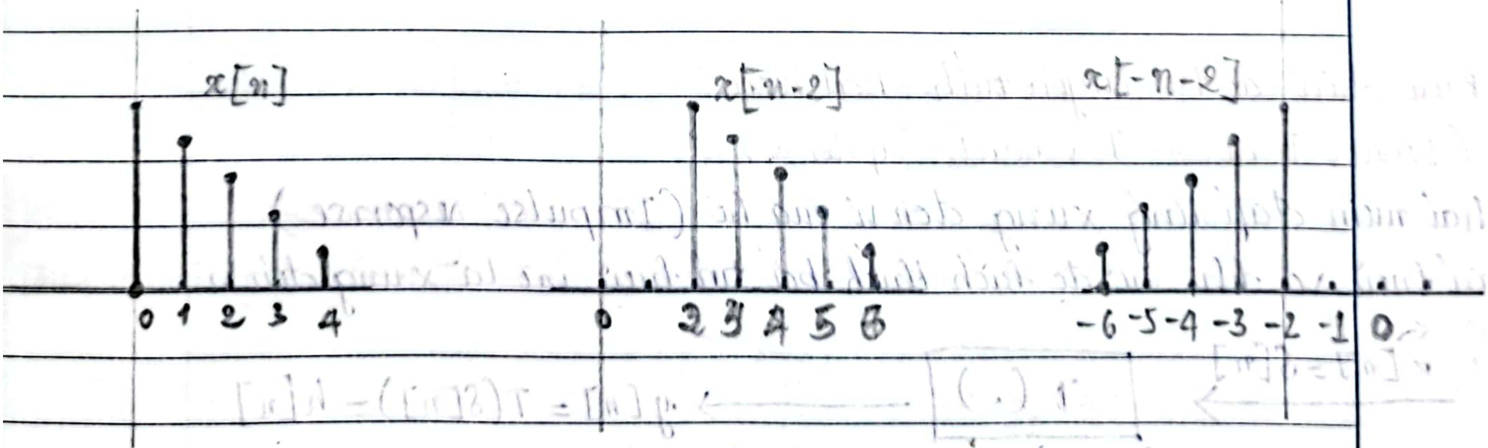


b) Let $y_2[n]$ be obtained by first shifting $x[n]$ to the right by two sample and then folding the result. Determine and plot $y_2[n]$

Theo đề bài:

$$x[n] \xrightarrow[\text{two sample}]{\text{shift to the right}} x[n-2] \xrightarrow{\text{folding}} x[-n-2]$$

$x[-n-2]$



Các tính chất của hệ thống : $\begin{cases} \text{table 2.2 / Text book} \\ \text{Examples in Section 2.3 / Textbook} \end{cases}$

a) Hệ tuyến tính

Hệ tuyến tính $\longleftrightarrow$ T(.) là phép biến đổi tuyến tính

$$\Leftrightarrow \quad x[n] = \sum_k c_k x_k[n] \longrightarrow \boxed{T(.)} \longrightarrow y(n) = T(x[n]) = \sum_k c_k y_k[n]$$

với $y_k[n] = T(x_k[n])$ $\forall x_k[n]$ $\forall c_k$

$\Leftrightarrow$ 1 tổ hợp tuyến tính của các TH vào qua hệ tuyến tính sẽ cho ra 1 tổ hợp tuyến tính ra tương ứng

b) Tính bất biến

Hệ bất biến $\longleftrightarrow$ T(.) là phép biến đổi bất biến theo t/gian

$\longleftrightarrow$ Nếu $x[n] \rightarrow \boxed{T(.)} \longrightarrow y[n]$ thì

$$x[n-n_0] \longrightarrow \boxed{T(.)} \longrightarrow y[n-n_0] \quad \forall x[n] \quad \forall n_0 \in \mathbb{Z}$$

$x[n-n_0]$: phiên bản của $x[n]$ bị dịch t/gian n_0 mẫu

$y[n-n_0]$: phiên bản của $y[n]$ ~~bịch~~ bị dịch t/gian n_0 mẫu

$\Rightarrow$ 2 tính chất này giúp đơn giản hoá việc biểu diễn các hệ thực tế

3. Biểu diễn các hệ tuyến tính - bất biến :

(Linear Time - Invariant Systems)

- Khái niệm đáp ứng xung đơn vị của hệ (Impulse response) là tín hiệu ra khi hệ được kích thích bởi tín hiệu vào là xung đơn vị

$$\xrightarrow[\text{có thể viết}]{x[n] = \delta[n]} \boxed{T(.)} \longrightarrow y[n] = T(\delta[n]) = h[n]$$

Kí hiệu : $h[n] = T(\delta[n])$: duy nhất đối với 1 hệ biến đổi bởi T(.)

↳ phép biến đổi duy nhất

$\delta[n]$ = TH xung đơn vị

Để biểu diễn hệ bất kì $\begin{cases} T(.) : \text{phép biến đổi duy nhất} \\ pt : \text{vào - ra} \end{cases}$

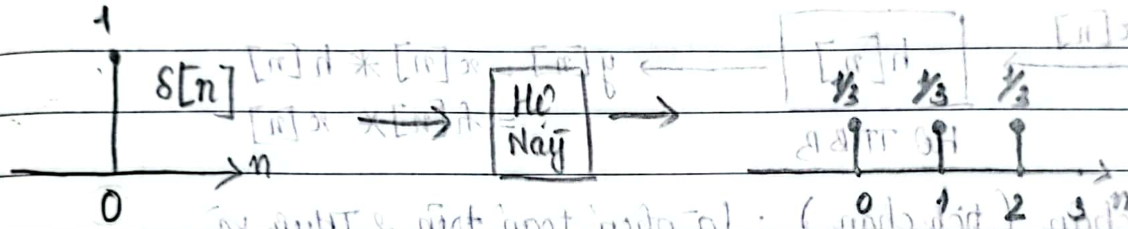
- Ví dụ: xét hệ có phương trình vào là

$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right)$$

- Chứng minh đc hệ này là Tuyến tính bất biến (Đại TL để CM)
- Đáp ứng Xung đơn vị của hệ là:

Thay $x[n] = \delta[n]$ vào pt vào ra:

$$h[n] = \frac{1}{3}\left(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]\right) = \begin{cases} \frac{1}{3} \ (\text{Khi } n = 0,1,2) \\ 0 \ (\text{Khi } n \neq 0,1,2) \end{cases}$$



- Xét hệ tuyến tính & bất biến: có đáp ứng XĐV là $h[n]$

Tính Tìm tín hiệu ra $y[n]$ của hệ này khi TH vào là $x[n]$ bất kỳ

Với $x[n]$ bất kỳ có thể biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của các XĐV:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].\delta[n-k] \rightarrow \text{C/m bằng đồ thị}$$

Theo tính chất của hệ tuyến tính: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[k]}_{\text{Hệ số } C_k} . \underbrace{\delta[n-k]}_{\text{TH } x_k[n]}$ → TH vào thứ k

$$\longrightarrow \boxed{\text{Hệ TT}}_{\text{Hệ tuyến tính}} \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[k]}_{C_k} . \underbrace{T(\delta[n-k])}_{\text{TH ra thứ k } y_k[n]}$$

Theo t/chất của hệ bất biến:

$$x_k[n] = \delta[n-k] \longrightarrow \boxed{\text{Hệ bất biến } T(\cdot)} \longrightarrow y_k[n] = T(\delta[n-k]) = ? \ H[n-$$

$$\text{Vì} \quad \delta[n] \longrightarrow \boxed{T(\cdot)} \longrightarrow T(\delta[n]) = h[n]$$

Đã cho trước

$$\Longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n-k] \triangleq x[n] * h[n] \quad (*)$$

phép tổng chập (convolution)

- Kết luận: công thức (*) cho phép xác định tín hiệu ra $y[n]$ tương ứng với TH vào $x[n]$ bất kỳ khi đi qua hệ TTBB (tuyến tính bất biến) có đáp ứng XĐV $h[n]$.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

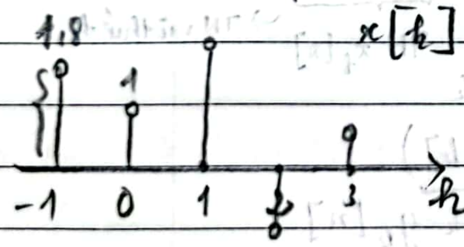
Hệ TTBB

- Phép tổng chập (tích chập): là phép toán trên 2 TH và cho ra kết quả là 1 tín hiệu
  + Cách tính 1: Cố định $n = n_0 \in Z$ nào đó:

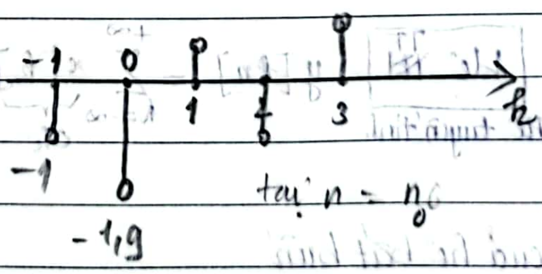
$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].h[n_0-k] = \sum \text{ của 2 tín hiệu theo biến } k: x[k] \ \& \ h[n_0-k]$$

gtrị của $y[n]$ tại $n = n_0$

$$y[n_0] = 1{,}8.(-1) + 1.(1{,}9) + \ldots$$



$h[n_0-k]$: p/bản đảo và dịch t/gian của $h[k]$



∘ Lặp lại với n_0 khác → số lần lặp $= L_y = L_x + L_h - 1$

→ Độ phức tạp thuật toán lớn $\approx N^2$

(N là chiều dài của $x[n]$ & $h[n]$)

+ Cách tính 2: $y[n] = \cancel{x[0]} \ldots + x[-1].h[n+1]$
$+ x[0].h[n]$
$+ x[1].h[n-1] + \ldots$

→ $y[n]$ là tổ hợp tuyến tính của các ~~TH~~ đáp ứng XĐ / ~~vi~~ $h[n]$ bị dịch thời gian với ~~các~~ hệ số ~~của~~ thứ k là gtrị của TH vào tại mẫu thứ k.

+ Cách tính 3: áp dụng tính giao hoán

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k].x[n-k]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k].x[n-k] = \ldots + h[-1].x[n+1] + h[0].x[n] + h[1].x[n-1] + \ldots$$

pt vào ra

→ $y[n]$ là tổ hợp tuyến tính của các bản sao bị dịch t/gian của TH vào $x[n]$ với các hệ số = giá trị của ĐƯXĐV

Hệ có pt vào - ra: $y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right)$

$$= \underbrace{\frac{1}{3}}_{h[0]}.x[n] + \underbrace{\frac{1}{3}}_{h[1]}x[n-1] + \underbrace{\frac{1}{3}}_{h[2]}x[n-2]$$

$$\Rightarrow h[n] = \begin{cases} \frac{1}{3} & (n = 0,1,2) \\ 0 & (n \text{ còn lại}) \end{cases}$$

Note
2.4 Trong TL (xem ví dụ) trang 44: in ~~đồ~~ bị sai → sửa lại
62 / 1009

2.7 tự đọc xử lí ảnh
Đọc FIR spatial Filters (77 / 1009)
ví dụ âm thanh 86 / 1009 Example 2.8

BTVN bài 6 trg 98/100g B 4.6 tr 104/100g
15 " 50 105/100g
16 99/100g 53 105
19 100/100g 54 106

Thi gK có phần bài tập đánh giá

4. Các tính chất của hệ tuyến tính bất biến suy ra từ tổng chập:

- Tính ổn định (98/100g)

Hệ TTBB ổn định $\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$ (Tổng giá trị tuyệt đối của ĐƯXĐV bị chặn) $n \sim k$

• Hệ FIR (Finite Impulse Respone - ĐƯXĐV có chuỗi dài hữu hạn) luôn ổn định

• Hệ IIR (Infinite " - ĐƯXĐV có chuỗi dài vô hạn) có thể ổn định hoặc không.

- Tính nhân quả

Hệ TTBB nhân quả $\Longleftrightarrow h[n] = 0 \ \forall n < 0$

VD: Xét tính nhân quả và ổn định của các hệ sau:

a) Hệ có $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

b) Hệ có $h[n] = 3^n u[n+1]$

c) Hệ có phương trình vào ra: $y[n] = x[n+1] - x[n]$ (hệ sai phân tới)

d) " : $y[n] = x[n] - x[n-1]$ (" lùi

a) $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases} \rightarrow h[n]$ có chuỗi dài vô hạn (hệ IIR)

do $u[n] = \begin{cases} 1 & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$

$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow$ hệ ổn định

$= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} < \infty$

$h[n] = 0 \ \forall n < 0 \rightarrow$ hệ nhân quả

b) $h[n] = 3^n . u[n+1] = \begin{cases} 3^n & (n \geq -1) \\ 0 & (n < -1) \end{cases}$

$\rightarrow S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=-1}^{+\infty} 3^n = +\infty$ hệ k° ổn định.

$h[-1] = 3^{-1} \neq 0 \Rightarrow$ hệ k° nhân quả

c) Hệ $y[n] = x[n+1] - x[n]$

$\rightarrow h[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$

$\rightarrow S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$ $\quad h[n] = \begin{cases} 1 & (n=-1) \\ -1 & (n=0) \\ 0 & (n \neq 0; -1) \end{cases}$

do $L_h = 2 \rightarrow$ hệ ổn định

$h[-1] = 1 \neq 0 \rightarrow$ hệ k° nhân quả

d) hệ $y[n] = x[n] - x[n-1]$ vừa ổn định, vừa nhân quả

5. Biểu diễn hệ TTBB bằng phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

Tổng quát, 1 hệ TTBB được biểu diễn bởi pt sai phân:

$$\sum_{k=0}^{M} a_k . y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_l . x[n-l]$$

$\Leftrightarrow a_0 . y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 [n-2] + \dots$

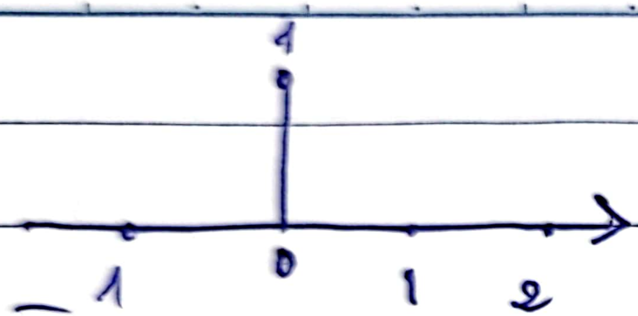
- M bậc của pt sai phân
- Nếu tồn tại $a_i \neq 0$ $(i \geq 1)$, hệ đệ quy

Trong Mathlab: cài đặt hệ (tính $y[n]$ khi biết $x[n]$ và PTSP của hệ)

$y = \text{filter}(a; b, x)$ với $a = \{a_0, a_1, \dots\}$ (đã chuẩn hoá $a_0 = 1$)

$b = \{b_0, b_1, \dots\}$

x là tín hiệu vào



$\rightarrow h = \text{filter}(a, b, [1])$

$y[n] = x[n] * h[n]$

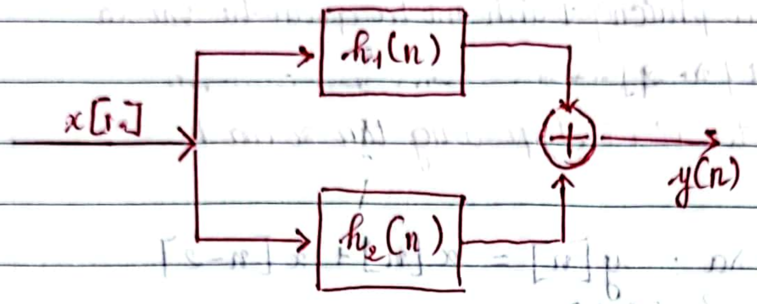
$\rightarrow y = \text{conv}(x, bh)$

vì kh dung

HW

PROB. 3

Cho 2 hệ tuyến tính bất biến ghép song song với nhau theo sơ đồ:



Hệ 1 có pt sai phân: $y[n] = 3x[n-2] - x[n-1] + 2x[n]$

Hệ 2 có pt sai phân: $y[n] = x[n-1] - 2x[n]$

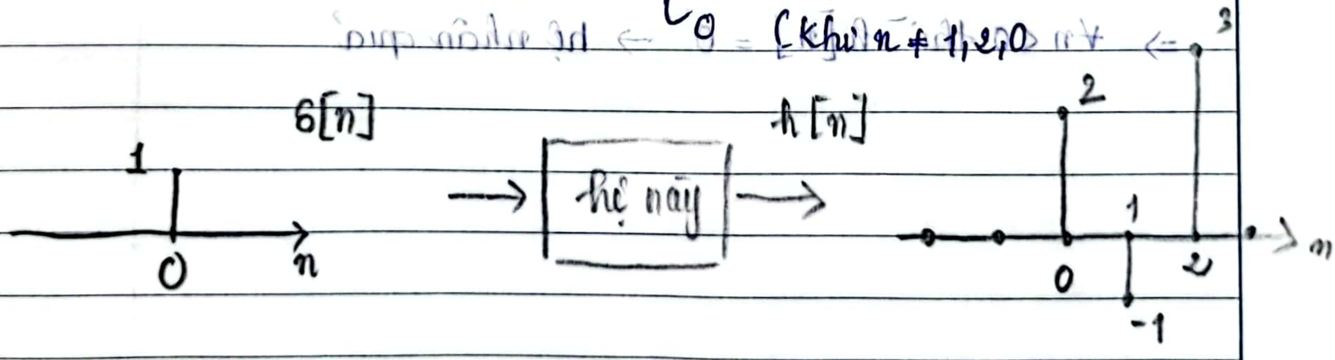
→ Tìm và vẽ đồ thị đáp ứng xung đơn vị $h_1[n]$, $h_2[n]$ của 2 hệ 1 và 2

Bài làm:

Hệ 1 có pt sai phân: $y_1[n] = 3x[n-2] - x[n-1] + 2x[n]$

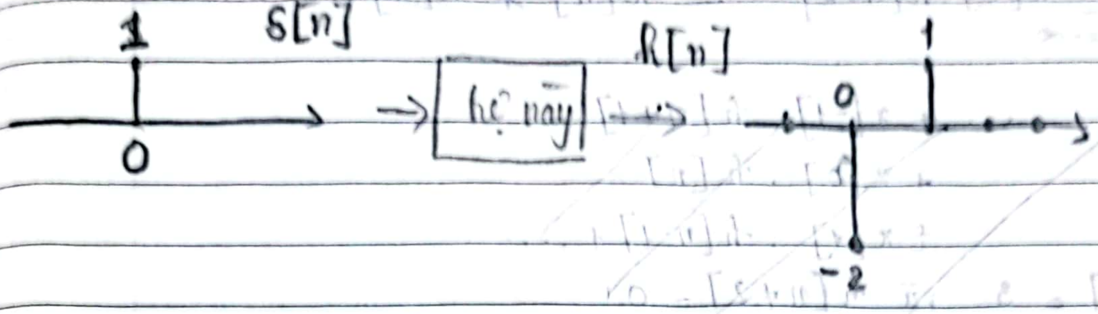
$$\Rightarrow h_1[n] = 3\delta[n-2] - \delta[n-1] + 2\delta[n]$$

$$= \begin{cases} 3 & (\text{Khi } n = 2) \\ -1 & (\text{Khi } n = 1) \\ 2 & (\text{Khi } n = 0) \\ 0 & (\text{Khi } n \neq 1, 2, 0) \end{cases}$$



Hệ 2 có pt sai phân: $y_2[n] = x[n-1] - 2x[n]$

$$\Rightarrow h_2[n] = \delta[n-1] - 2\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{với } n = 1 \\ -2 & \text{với } n = 0 \\ 0 & \text{với } n \neq 1, 0 \end{cases}$$



b) Chứng minh và kết luận tính nhân quả và ổn định của 2 hệ trên.

Bài làm:

(+) Hệ 1 có pt sai phân: $y_1[n] = 3x[n-2] - x[n-1] + 2x[n]$

$$\Rightarrow h_1[n] = 3\delta[n-2] - \delta[n-1] + 2\delta[n] = \begin{cases} 3 & (n=2) \\ -1 & (n=1) \\ 2 & (n=0) \\ 0 & (n \neq 1,0,2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \text{ or } L_h = 3 \rightarrow \text{hệ ổn định}$$

$h[n] = 0$ khi $n < 0$ → hệ nhân quả

(+) Hệ 2 có pt sai phân: $y_2[n] = x[n-1] - 2x[n]$

$$\Rightarrow h_2[n] = \delta[n-1] - 2\delta[n] = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ -2 & (n=0) \\ 0 & (n \neq 1,0) \end{cases}$$

$$\rightarrow S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \text{ or } L_h = 2 \rightarrow \text{hệ ổn định}$$

$h[n] = 0$ khi $n < 0$ → hệ nhân quả

c) Xác định và vẽ đồ thị của tín hiệu ra cuối cùng $y[n]$ của hệ tương đương với 2 hệ trên khi tín hiệu vào là $x[n] = u[n] - u[n-2]$ ($u[n]$ là ký hiệu của chuỗi nhảy bậc đơn vị)

Hệ số đáp ứng xung đơn vị của hệ tương đương là:

$h[n] = h_1[n] + h_2[n] = (3\delta[n-2] - \delta[n-1] + 2\delta[n]) + (\delta[n-1] - 2\delta[n$

$= 3\delta[n-2] \Rightarrow \begin{cases} 3 & (n=2) \\ 0 & (n \neq 2) \end{cases}$

T/có: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].h[n-k] \triangleq x[n] * h[n]$

Áp dụng tính giao hoán của tổng chập ta được

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].x[n-k]$$

Lại có: $h[n] = 3.\delta[n-2] \rightarrow h[k] = 3.\delta[k-2]$

$$x[n] = u[n] - u[n-2] \rightarrow x[n-k] = u[n-k] - u[n-k-2]$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 3\,\delta[k-2].(u[n-k] - u[n-k-2])$$

Với $k \neq 2$ thì $\delta[k-2] = 0$ ~~$\Rightarrow y[n] = 0$~~

Với $k = 2$ thì

$$y[n] = 3(u[n-2] - u[n-4])$$

ta có $u[n] \triangleq \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

	...	0		2	3	4	...
$u[n-2]$	0	0	0	1	1	1	1
$u[n-4]$	0	0	0	0	0	1	1
$3(u[n-2]-y[n-4])$	0	0	0	3	3	0	0 ...

KL: với ~~$k \neq 2$ thì $y[n] = 0 \ \forall n$~~

$$y[n] = \begin{cases} 3 \ (\text{với } n = 2,3) \\ 0 \ (n \neq 2,3) \end{cases}$$

Chứng minh hệ tuyến tính và không tuyến tính

- Hệ tuyến tính là hệ thoả mãn ngly xếp chồng

$$T[x_1[n]] = y_1[n] \text{ and } T[x_2[n]] = y_2[n]$$

$$\Rightarrow \quad T[ax_1[n] + bx_2[n]] = ay_1[n] + by_2[n]$$

- Hệ bất biến: khi tín hiệu vào bị dịch một khoảng t/gian thì tín hiệu ra cũng bị dịch đi cùng khoảng t/gian đó

$$T[x[n]] = y[n]$$

$$T[x[n-n_0]] = y[n-n_0]$$

Chứng minh: hệ sau là hệ tuyến tính, bất biến:

$$y[n] = 3x[n-2] - x[n-1] + 2x[n]$$

- Hệ tuyến tính:

$$y_1[n] = 3x_1[n-2] - x_1[n-1] + 2x_1[n]$$

$$y_2[n] = 3x_2[n-2] - x_2[n-1] + 2x_2[n]$$

$$x[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$$

$$\rightarrow y[n] = 3(a_1x_1[n-2] + a_2x_2[n-2]) - (a_1x_1[n-1] + a_2x_2[n-1]) + 2(a_1x_1[n] + a_2x_2[n])$$

$$y_3[n] = a_1y_1[n] + a_2y_2[n] = 3(a_1x_1[n-2] + a_2x_2[n-2]) - (a_1x_1[n-1] + a_2x_2[n-1]) + 2(a_1x_1[n] + a_2x_2[n])$$

$\Rightarrow \quad y_3[n] = y[n]$ với ~~$a_1, a_2 = 1$~~ $\Rightarrow$ hệ tuyến tính

- Hệ bất biến

Ta có: $x_1[n] = x[n] \rightarrow y_1[n] = 3x[n-2] - x[n-1] + 2x[n]$

$x_2[n] = x[n-n_0] \rightarrow y_2[n] = 3x[n-n_0-2] - x[n-n_0-1] + 2x[n-n_0]$

$$y_1[n-n_0] = 3x[n-n_0-2] - x[n-n_0-1] + 2x[n-n_0]$$

t/c $\quad y_1[n-n_0] = y_2[n] \rightarrow$ hệ bất biến

BÀI TẬP

7/trg 98 đáp ứng

Tính và vẽ đồ thị của hệ thống sau:

$$y[n] = \frac{n}{n+1}\, y[n-1] + x[n],\quad y[-1] = 0$$

Cho đầu vào $x[n] = \delta[n]$ and $x[n] = \delta[n-5]$ for $0 \le n \le 20$

Nhận xét Kq thu được

Bài làm

(+) với $x[n] = \delta[n]$

$$\cancel{\Rightarrow h[n] = \frac{n}{n+1} h[n-1] + \delta[n]}$$

T/c $y[n] = \dfrac{n}{n+1}\, y[n-1] + x[n]$

$$\cancel{\frac{1}{n+1}}\, h[n] = \frac{n}{n+1}\, h[n-1] + \delta[n]$$

Với $n = 0 \to h[0] = 1$

$n = 1 \to h[1] = \dfrac{1}{1+1} h[0] + \delta[1] = 0{,}5$

. . . . . .

Vẽ đc đồ thị với $0 \le n \le 20$

(+) với $x[n] = \delta[n-5]$

t/c $h[n] = \dfrac{n}{n+1}\, h[n-1] + \delta[n-5]$

Trong TH này ta chỉ tính từ $n = 5$ để có đáp ứng hệ thống

9/ Trang 98

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \text{ . for } |a|<1$$

C/m: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \ldots$ (1)

$a\sum_{n=0}^{\infty} a^n = a + a^2 + \ldots$ (2)

(1) − (2) vế theo vế

$$(1-a)\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + (a-a) + (a^2-a^2) + \ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a} \text{ với } a \neq 1$$

Ta có: $\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n - \sum_{n=N}^{\infty} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n - a^N \sum_{n=0}^{\infty} a^n$

$= (1-a^N) \cdot \frac{1}{1-a}$ (cmt)

10/ Trang 99

Cho TH vào $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 3, 2, -1\}$ được áp dụng cho hệ thống mô tả bằng đáp ứng xung $h[n] = 2.(0,8)^n$, $0 \le n \le 6$

Sd t phép tổng chập tính $y[3]$.

T/c: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k].h[n-k] \triangleq x[n] * h[n]$

Áp dụng tính giao hoán của tổng chập ta được

$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$

$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].x[n-k] \Rightarrow y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k].x[3-k]$

∘ $h[n] = 2(0,8)^n$ với $0 \leq n \leq 6 \Rightarrow h[k] = 2(0,8)^k$ với $0 \leq k \leq 6$

$\Rightarrow h[k] = \{\underset{\uparrow}{2}; 2.0,8^1; 2.0,8^2; 2.0,8^3; 2.0,8^4; 2.0,8^5; 2.0,8^6\}$

∘ $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 3, 2, -1\}$

$\Rightarrow x[k] = \{\underset{\uparrow}{1}, 3, 2, -1\} \Rightarrow x[-k] = \{-1, 2, 3, \underset{\uparrow}{1}\}$

$\Rightarrow x[3-k] = \{\underset{\uparrow}{-1}, 2, 3, 1\}$

$\Rightarrow y[3] = \sum_{k=0}^{3} h[k].x[3-k]$

$= h[0].x[3] + h[1].x[2] + h[2].x[1] + h[3].x[0]$

$= 2.(-1) + 2.0,8.2 + 2.0,8^2.3 + 2.0,8^3.1$

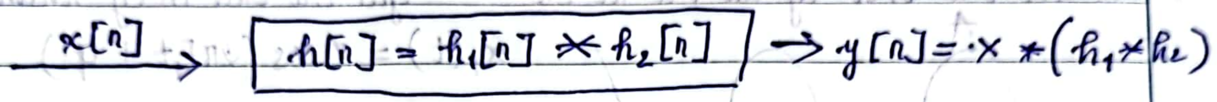
$= 6,064$

6. Các tính chất của các hệ TTBB dựa trên tổng chập:

a) Tính kết hợp của tổng chập

$$(x[n]*h_1[n])*h_2[n] = x[n]*(h_1[n]*h_2[n])$$

→ Hệ quả

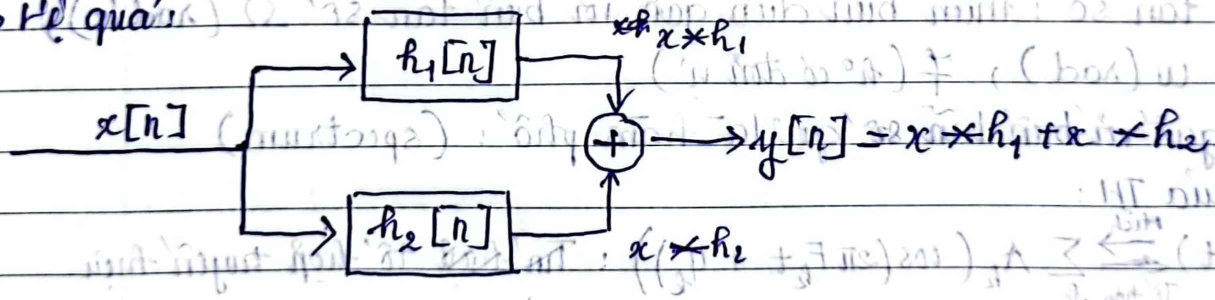


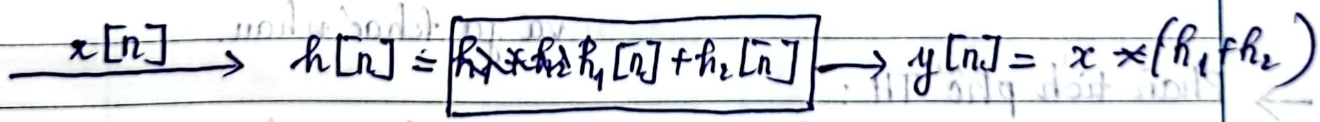
Nhiều hệ TTBB ghép nối tiếp thì tương đương với 1 hệ có ĐLXĐV bằng tổng chập của ĐLXĐV của các hệ con.

b) Tính phân phối của phép chập đối với phép cộng Tín Hiệu:

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n]) = x[n]*h_1[n] + x[n]*h_2[n]$$

→ Hệ quả:





Nh~ hệ TTBB ghép // thì ... 1 hệ có ĐLXĐV bằng tổng ĐLXĐV của các hệ con.

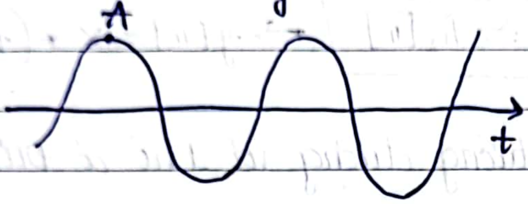
Chương 4: Biểu Diễn Tần Số Tín Hiệu trên Tần Số Liên Tục

1. Các khái niệm:

- Tần số: là số chu kì lặp lại (hay số chu kì) của TH điều hoà (TH hình sin) trong 1 đơn vị t/gian.

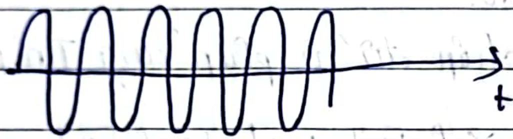
→ T/s là đặc trưng của TH hình sin.

→ TH sin thì t/số càng cao thì tốc độ ~> giá trị của TH càng nhanh



$x_1(t) = A\cos(2\pi F_1 t + \varphi)$

$(F_2 = 2F_1)$



$x_2(t) = A\cos(2\pi F_2 t + \varphi)$

- Miền tần số: miền biểu diễn gắn với biến tần số Ω (rad/s), F (Hz), ω (rad), f (ko có đơn vị)
- Hàm gắn với biến tần số gọi là hàm phổ: (spectrum)
- Phổ của TH:

$x(t) \underset{\text{Tổ hợp}}{\overset{\text{Ptích}}{\rightleftarrows}} \sum_k A_k(\cos(2\pi F_k t + \varphi_k))$: Tín hiệu tổ hợp tuyến tính của TH sin có t/s, biên độ và pha khác nhau.

→ Phân tích phổ TH:

Tìm $\{F_k, A_k, \varphi_k\}$ → TH $x(t)$ có tính chất gì trên miền tần số.

Chú. (*) ◦ Ω, F : 2 biến tần số của TH liên tục $x(t)$

ω, f : 2 biến tần số của TH rời rạc $x[n]$

2. Phổ của TH sin thực rời rạc : → biến t/gian rr (ko có đv)

Xét TH sin thực rời rạc $s[n] = A_0\cos(\omega_0 n + \varphi_0) = A_0\cos(2\pi f_0 n + \varphi_0)$

với: ω_0 : tần số góc (rad)

f_0 : tần số chuẩn hoá (ko có đv)

A_0 : Biên độ, φ_0 : pha

Nếu $s[n]$ là p/bản rr hoá với tần số lấy mẫu F_s của 1 t/hiệu sin liên tục $x_a(t)$ có tần số F_0 (Hz) thì $f_0 = \frac{F_0}{F_s}$

Lấy mẫu: $t = nT_s = \frac{n}{F_s}$

$$\rightarrow x_a(nF_s) = A_0\cos\left(2\pi F_0 \cdot \frac{n}{F_s} + \varphi_0\right)$$

$$\equiv$$

$$x[n] = A_0\cos(2\pi f_0 n + \varphi_0) \text{ với } f_0 = \frac{F_0}{F_s}$$

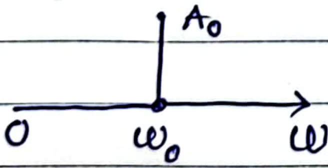
Mối quan hệ giữa biến tần số thực và biến tần số chuẩn hoá $f = \frac{F}{F_s}$

$$\rightarrow \omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot \frac{F}{F_s}$$

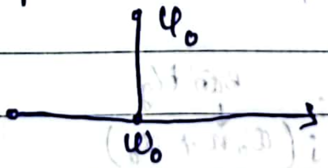
- TH này chỉ có 1 t/số duy nhất là ω_0

→ phổ thực của TH này là hàm chỉ có 1 gtrị $\neq 0$ duy nhất tại $\omega = \omega_0$

phổ biên độ:



phổ pha



phổ thực của TH sin thực R.rạc, tuần hoàn với chu kỳ 2π

3. Phổ phức của TH sin thực rời rạc:

1 TH sin thực có thể được biểu diễn bằng tổ hợp tuyến tính của 2 TH sin phức:

$$s[n] = A_0 \cos(\omega_0 n + \varphi_0)$$

$$= A_0 \cdot \frac{1}{2}\left[e^{j(\omega_0 n + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_0 n + \varphi_0)}\right]$$

Công thức Euler:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

$$e^{-jx} = \cos x - j \sin x$$

$\rightarrow$ Hệ quả: $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right)$

$$\sin x = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$$

Biến đổi: $s[n] = \frac{A_0}{2} \cdot e^{j(\omega_0 n + \varphi_0)} + \frac{A_0}{2} \cdot e^{j(-\omega_0 n - \varphi_0)}$

$$= s_+[n] + s_-[n]$$

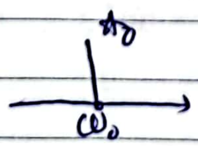
Với $s_+[n]$ là TH sin phức có t/s ω_0, biên độ $\frac{A_0}{2}$, pha φ_0 (Gs A_0:

$s_-[n]$ là TH sin phức có T/s $-\omega_0$, " , pha $-\varphi_0$

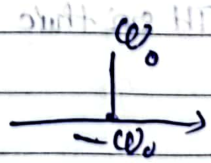
TH sin phức Tổng Quát:

$$s[n] = \underset{\text{BĐ}}{A_0} \cdot e^{j(\overset{\text{Biến t/g}}{\omega_0 n} + \varphi_0)}$$

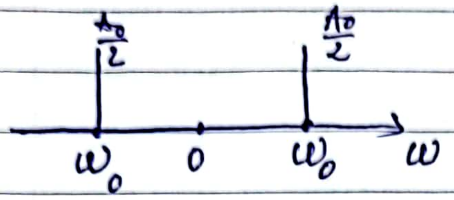
phổ BĐ

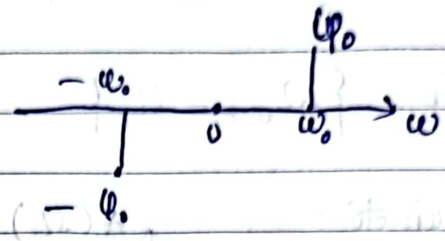


phổ pha:



→ phổ BĐ của S[n] phổ pha của S[n]





Note: Chương 4: Tài liệu
bảng 4.1: dùng cả thi cuối kỳ.

4. Biểu diễn Fourier của tín hiệu:

CT cụ thể ∈ bản chất của tín hiệu:

	Liên tục	Rời rạc
Tuần hoàn	CTFS	DTFS
	CTFT	DTFT

CT : Continuous - Time (Ltục theo t/gian)
DT : Discrete - time (Rời rạc ")
FS : Fourier Series (Chuỗi F)
FT : " Transform (biến đổi F)

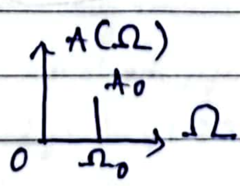
Bổ sung phần trước:

* Phổ thực của TH sin liên tục: (K° tuần hoàn)

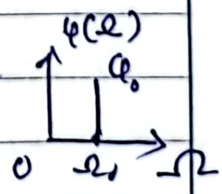
$S(t) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \varphi_0)$

↓ phổ thực ↑ t/s góc (rad/s)

- Dải tần: chỉ gồm Ω_0
- Phổ biên độ:



- phổ pha

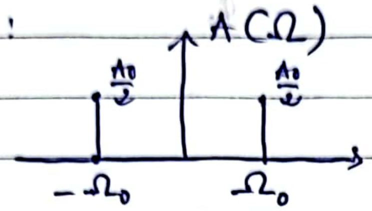


- phổ phức của TH sin liên tục: (K° tuần hoàn)

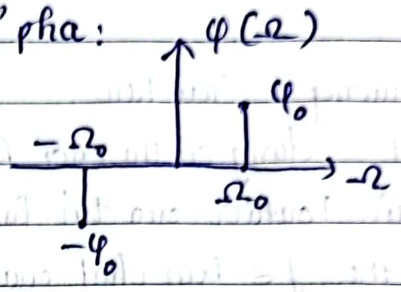
$$s(t) = \frac{A_0}{2} e^{j(\Omega_0 t+\varphi_0)} + \frac{A_0}{2} \cdot e^{j(\Omega_0 t - \varphi_0)}$$

Dải tần: $\{-\Omega_0 ; -\Omega_0\}$

Phổ biên độ:



Phổ pha:



∘ Harmonic (Hài)

- Các TH sin là hài của nhau (hay sóng hài)
- Xét 1 tập các tín hiệu sin phức:

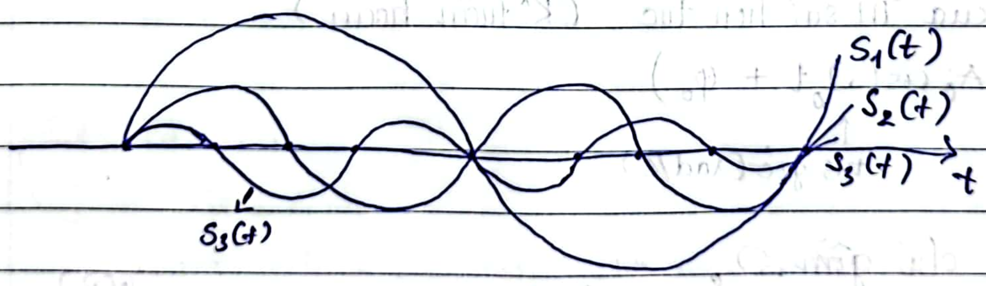
$$\{s_k(t)\} = \{e^{jk\Omega_0 t}\} \qquad k = \pm 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

với Ω_0 là 1 giá trị tần số góc cụ thể

→ Các TH sin này mang các tần số bằng bội số nguyên lần của Ω_0 ($k\Omega_0$, $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) nên ĐN:

+ Ω_0 : t/s cơ bản

+ $s(t)$: tín hiệu sin phức mang tần số $k\Omega_0$ = hài bậc k



4.1. Biểu diễn TH liên tục tuần hoàn bằng chuỗi (F) của TH liên tục (CT CTFS):

1 TH (tuần hoàn) liên tục : $\tilde{x}(t)$ tuần hoàn với chu kỳ cơ bản T_0 (hay tần số CB : $F_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\Omega_0}{2\pi}$) được biểu diễn bởi cặp CTFS sau : – pt tổng hợp : $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{jk\Omega_0 t} \left(= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| \cdot e^{j(k\Omega_0 t + \angle c_k)} \right)$

$\leftrightarrow$ $\tilde{x}(t)$ đc tạo nên từ 1 THTT các TH sin phức mang tần số $k\Omega_0$ ($k = \overline{-\infty; +\infty}$, $k \in Z$) (thay các thứ / phần hài của nó) với $\{c_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ là các hệ số của THTT (các giá trị phức)

Note : * 2 sin phức đối nhau cg lại ra 1 sin thực

VD: $x_1(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(e^{j2\pi F_0 t} + e^{-j2\pi F_0 t} \right) - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \left(e^{j2\pi 3F_0 t} + e^{-j2\pi 3F_0 t} \right)$

$k = \pm 1; \pm 2; \pm 5$

$$+ \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{2} \left(e^{j2\pi 5F_0 t} + e^{-j2\pi 5F_0 t} \right)$$

– Pt phân tích

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) \cdot e^{-jk\Omega_0 t} dt \qquad (k = \overline{-\infty; +\infty}, k \in Z)$$

$\hookrightarrow$ có độ dài T_0

tuỳ thuộc $\leftrightarrow$ hoàn toàn xác

$c[k]$

$\longleftrightarrow$ cho phép xác định hệ số c_k : chứa biên độ ($|c_k|$) (modul) và ($\angle c_k$) (momen) của sóng hài bậc k (TH sin mg tần số $k\Omega_0$)

– $\{c_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ các hệ số chuỗi F. mg thông tin về phổ của $\tilde{x}(t)$ và cho biết :

→ phổ vạch, gồm các vạch cách đều, k/cách = tần số cbản

- Dải tần của $\tilde{x}(t)$: $\{k\Omega_0 \mid |c_k| > 0\}$ ($k = \overline{-\infty; +\infty}$, $k \in Z$)
- phổ Biên độ của $\tilde{x}(t)$: $|c_k| \equiv$ ~~$|c(kF_0)|$~~ $|c(k\Omega_0)|$
- phổ pha của $\tilde{x}(t)$: $\angle c_k \equiv \angle c(k\Omega_0)$

* phổ công suất: $|c_k|^2 = |c(k\Omega_0)|^2$

Ví dụ: p/tích phổ của chuỗi xung chữ nhật tuần hoàn với chu kỳ cơ bản $T_0 = 5s$, độ rộng xung $\tau = 1s$, biên độ xung $A = 1$ (V).

Note:

$$\tilde{x} \underset{\text{ICTFS}}{\overset{\text{CTFS}}{\rightleftarrows}} c_k$$

ICTFS (I=Inverse)

Áp dụng phương trình phân tích (CTFS) đối với TH $\tilde{x}(t)$ để xđ các hệ số chuỗi F:

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}(t).e^{-jk\Omega_0 t}\,dt \quad \left(\text{với } \Omega_0 = 2\pi F_0 = \frac{2\pi}{T_0}\right)$$

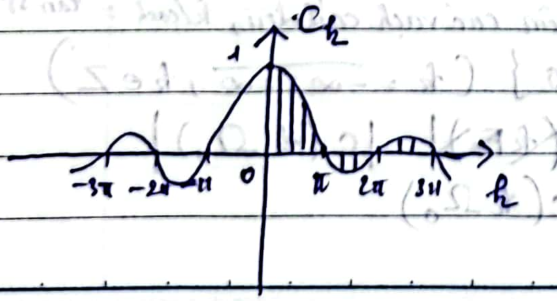
$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A.e^{-jk.2\pi F_0 t}\,dt = \frac{A}{T_0}.\frac{1}{-jk2\pi F_0}.e^{-jk2\pi F_0 t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$= \frac{A}{-jk2\pi}\underbrace{\left(e^{-jk\pi F_0\tau} - e^{jkF\tau}\right)}_{-2j\sin(k\pi F\tau)} = \frac{A}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{5}\right) \in R \qquad \left(\begin{array}{l}\tau = 1s\\ F_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{5}\\ A = 1\\ T_0.F_0 = 1\end{array}\right)$$

$(k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

→ ~~phổ biên độ~~:

$$c_k = \frac{1}{k\pi}.\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right) = \frac{1}{5}.\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{\frac{k\pi}{5}} = \frac{1}{5}.\mathrm{sin}\left(\frac{k\pi}{5}\right) = \begin{cases}\frac{1}{5} & (k=0)\\ 0 & (k = \pm 5, \pm 10, \dots)\\ \to 0 & \text{khi } k \to \pm\infty\end{cases}$$



với $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \begin{cases}1 & (x = 0)\\ 0 & (x = n\pi)\\ \to 0 & (x \to \pm\infty)\end{cases}$

giảm về 0

- phổ BĐ luôn là hàm chẵn
- phổ pha lẻ

Nhận xét về phổ:

- Dải tần: $\{kF_0\}$ $k \in \overline{-\infty;+\infty}$ trừ $k = \pm 5, \pm 10, \ldots = 5l$ $(l \in \mathbb{Z}, l \neq 0)$
  với $F_0 = 0,2 Hz$
- phổ biên độ: $\rightarrow$ hai bậc thấp có đóng góp nhiều vào công suất của TH hơn các hai bậc cao

Chương 3: slide 22:

CTFT $\approx$ CTFS khi $T \to \infty$

4.2 Biểu diễn TH liên tục không tuần hoàn bằng biến đổi Fourier (CTFT)

Mối liên hệ giữa CTFT và CTFS

Xét 1 tín hiệu k° tuần hoàn $x(t)$. Có thể xem $x(t)$ là TH tuần hoàn $\tilde{x}(t)$ có chu kỳ cơ bản $T_0 \to \infty$ (hay tần số CB $F_0 = \frac{1}{T_0} \to \infty$) khi đó phổ $x(t)$ là phổ của $\tilde{x}(t)$ với $F_0 \to 0 \Rightarrow$ phổ của $x(t)$ là hàm liên tục theo biến tần số F (là đường bao của CTFS của $\tilde{x}(t)$)

- Một TH $x(t)$ không tuần hoàn thỏa mãn đk khả tích tuyệt đối:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

(tương đương với $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \leftrightarrow x(t)$ có năng lượng hữu hạn)

Note: ◦ Loại có ng lượng hữu hạn dùng CTFT để biểu diễn

◦ vô hạn chưa có công cụ toán học để biểu diễn

Khi đó $x(t)$ có thể biểu diễn bởi cặp pt CTFT:

◦ pt tổng hợp: (ICTFT) $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t}\, d\Omega$ (tích phân Fourier)

$x(t)$ được tạo nên từ vô số TH sin mang tần số Ω liên tục $\in (-\infty; +\infty)$ với $X(\Omega)$ là biên độ phức của tín hiệu sin mang tần số Ω nào đó.

Note: Trong 1 vài TL

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\, d\Omega$$

$\hookrightarrow$ để thể hiện rõ hơn về số ảo

- PT phân tích (CTFT) $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$

↔ Cho phép xác định phổ hay hàm phổ $X(j\Omega)$ của $x(t)$

Phổ Biên Độ : $|X(j\Omega)|$: cho ph biết biên độ thực của TH sin mang t/số Ω

Phổ pha : $\angle X(j\Omega)$: cho biết pha của TH sin tần số Ω

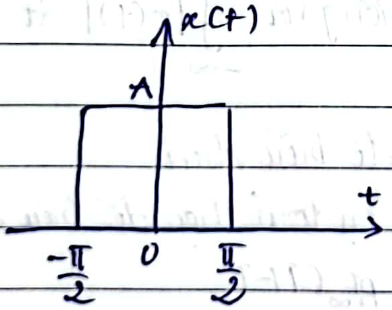
phổ mật độ năng lượng : $|X(j\Omega)|^2$: cho biết ng~ mức độ tập trung ng~ lượng của tín hiệu $x(t)$ quanh t/s Ω

Kí Hiệu:

$$x(t) \underset{\text{ICTFT}}{\overset{\text{CTFT}}{\rightleftarrows}} X(j\Omega)$$

Ví dụ:

Phân tích phổ của TH xung chữ nhật có độ rộng xung $\tau = 1s$ biên độ xung $A = 2(V)$ có đồ thị như sau:



Lập luận :

- Đây là TH có chiều dài hữu hạn

$\Rightarrow \int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty$: hữu hạn

→ có ng~ lượng hữu hạn.

Cách khác:

Xét : $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\, dt = A\tau < \infty$

→ CTFT của $x(t)$ tồn tại.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = A^2 \cdot \tau < \infty$$

Phổ của x(t) là:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A.e^{-j\Omega t}.dt = A.\frac{1}{-j\Omega}\, e^{-j\Omega t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$= A.\frac{1}{-j\Omega}\underbrace{\left(e^{-j\Omega.\frac{\tau}{2}} - e^{+j\Omega\frac{\tau}{2}}\right)}_{-2j\sin(\Omega.\frac{\tau}{2})} = \frac{2A}{\Omega}.\sin\left(\Omega.\frac{\tau}{2}\right) \quad (\Omega = 2\pi F)$$

$$= \frac{A}{\pi F}.\sin(\pi.F.\tau) \quad \left(= X(F)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi F}.\sin(\pi F) = 2\,\mathrm{sinc}(\pi F)$$

=> phổ BĐ của x(t):

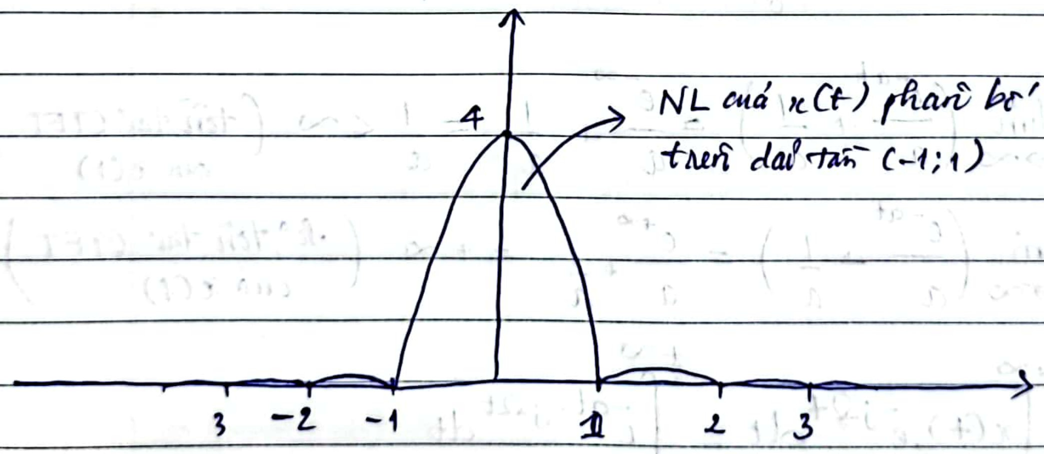
$$|X(F)| = 2\,|\mathrm{sinc}(\pi F)|$$

$$= \begin{cases} 2 & (F=0) \\ 0 & (K=k,\ k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0) \\ \to 0 \text{ giảm về 0} & (F\to\pm\infty) \end{cases}$$

- phổ pha của x(t):

$$\angle\{X(t)\} = \begin{cases} 0 & (X(F)>0) \\ \pm\pi & (X(F)<0) \\ \text{bất kỳ} & (X(F)=0) \end{cases}$$

- phổ mật độ năng lượng: $|X(F)|^2$



Kết luận:

- Dải tần $F\in[0;+\infty)$
- Hầu hết ng^c lượng của TH tập trung hầu hết trong dải tần thuộc $\in[0,1)$

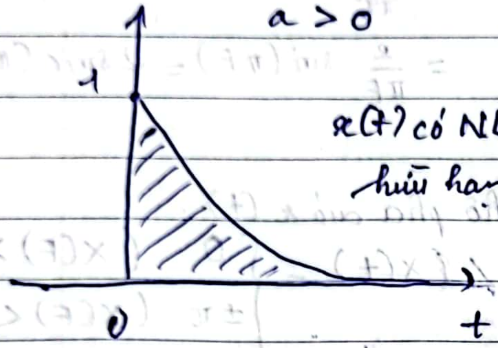
Bổ sung:

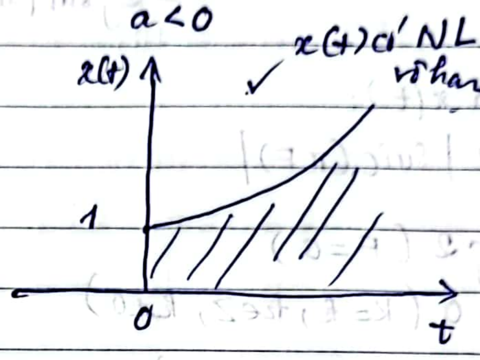
Ví dụ 2:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

~~Xét~~

Cách 1:





Cách 2:

Xét $S = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}\,dt = -\frac{e^{-at}}{a}\Big|_0^{+\infty}$ $(a \in \mathbb{R})$

Nếu:

$a > 0$: $S = \lim_{t \to \infty}\left(\frac{e^{-at}}{a} + \frac{1}{a}\right) = \frac{e^{-\infty}}{a} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a} < \infty$ (tồn tại CTFT của $x(t)$)

$a < 0$: $S = \lim_{t \to \infty}\left(\frac{e^{-at}}{a} + \frac{1}{a}\right) = \frac{e^{+\infty}}{a} + \frac{1}{a} = +\infty$ (k° tồn tại CTFT của $x(t)$)

Phổ của $x(t)$ là

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j\Omega t}\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at-j\Omega t}\,dt$$

$$= \frac{1}{-(j\Omega + a)} . e^{-(j\Omega + a)t}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{j\Omega + a}$$

⇒ Phổ Biên độ của x(t):

$$|X(\Omega)| = \left|\frac{1}{j\Omega+a}\right| = \frac{|1|}{|j\Omega+a|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\Omega^2}}$$

Phổ pha:

$$\angle X(\Omega) = \angle 1 - \angle(j\Omega + a)$$
$$= 0 - \operatorname{arctg}\frac{\Omega}{a}$$

TH sin liên tục $s(t)$ $\xrightarrow{\text{lấy mẫu}}$ TH sin rời rạc $x[n]$

	$s(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$ $= A\cos(2\pi F t + \varphi)$	$s[n] = A\cos(\omega n + \varphi)$ $= A\cos(2\pi f n + \varphi)$
Tuần hoàn về th/gian	T/hoàn $\forall \Omega_0 \in R$ (Hay $\forall F_0 \in R$)	T/hoàn $\Leftrightarrow \omega_* = 2\pi f_* = 2\pi\frac{K}{N}$ $(K, N \in Z^+)$
Chu kì CB	$T_0(s) \Leftrightarrow s(t) = s(t + T_0 . m)$ $\forall m \in Z$ $t \in R$	N (mẫu) $\Leftrightarrow s[n] = s[n + mN]$ $\forall m \in Z$ $n \in Z$
Tần số CB	$\Omega_0 = 2\pi F_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ (rad/s)	$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi . \frac{1}{N}$ (rad)
Tần Tuần hoàn về T/số	Không có vì mỗi tần số Ω xác định 1 TH sin!	Chu kỳ 2π vì $s_m[n] = A\cos[(\omega_* + m2\pi)n + \varphi]$ $(m \in Z)$ $\parallel$ $s_n[n] = A\cos(\omega_* n + \varphi)$
Dải tần quan tâm	$\Omega \in (-\infty; +\infty)$ hay $F \in (-\infty; +\infty)$	$\omega \in (-\pi; \pi]$ hoặc $(0; 2\pi]$ hay $f \in (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ hoặc $(0; 1]$
t/s cao và thấp	$-\infty$ (cao nhất) — 0 (thấp nhất) — $+\infty$ (cao nhất) $\to \Omega$ (TH k° dao động)	-2π (Thấp nhất), $-\pi$ (cao nhất), 0 (Thấp nhất), π (cao nhất), 2π (Thấp Nhất) $\to \omega$ (Thấp nhất ở $k2\pi$)

	$\tilde{x}(t)$ biểu diễn TH liên tục tuần hoàn	$\tilde{x}[n]$ biểu diễn TH rời rạc tuần hoàn.
T/s CB	$\Omega_0 = 2\pi F_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ T_0 : chu kỳ CB	$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{N}$ (N chu kỳ cơ bản)
Sóng hài	Có vô số hài ; biên độ phức $S_k(t) = A_k . e^{jk\Omega_0 t}$ $(k \in \overline{-\infty ; +\infty})$	Có N hài : $S_k[n] = A_k . e^{jk\omega_0 n}$ $(k \in \overline{0 ; N-1})$
PT tổng hợp	ICTFS : $\tilde{X}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k . e^{jk\Omega_0 t}$	IDTFS : $\tilde{X}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k . e^{jk\omega_0 n}$
PT phân tích	CTFS : $c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) . e^{-jk\Omega_0 t} dt$ $k \in (-\infty ; +\infty)$ - K° tuần hoàn theo biến k	DTFS : $c_k = \frac{1}{N} . \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] . e^{-jk\omega_0 n}$ $(k \in \overline{0, N-1})$ - Tuần hoàn theo k : $c_k = c_{k+m.N}$ $(m \in \mathbb{Z})$
Phổ BĐ phổ pha	$\lvert c_k \rvert = \lvert c(k.\Omega_0) \rvert$ $\angle c_k = \angle c(k.\Omega_0)$	$\lvert c_k \rvert \equiv \lvert c(k.\omega_0) \rvert$ $\angle c_k = \angle c(k.\omega_0)$
phổ công suất	$\lvert c_k \rvert^2 = \lvert c(k.\Omega_0) \rvert^2$ $(k \in -\infty ; +\infty)$	$\lvert c_k \rvert^2 \equiv \lvert c(k\omega_0) \rvert^2$ $k \in \overline{0, N-1}$
	phổ vạch gồm vô số hài	phổ vạch gồm N hài (hàm tuần hoàn)

	TH $x(t)$ k° tuần hoàn	TH $x[n]$ k° tuần hoàn
Pt tổng hợp	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega).e^{j\Omega t}.d\Omega$	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega}).e^{j\omega n}.d\omega$
Pt phân tích	CTFT: $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j\Omega t}dt$	DTFT $X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n].e^{-j\omega n}$
Phổ	$X(j\Omega)$: hàm phức biến Ω $(\equiv X(\Omega))$ k° tuần hoàn	$X(e^{j\omega})$ hàm phức biến ω $(\equiv X(\omega))$ tuần hoàn chu kì 2π
Phổ BĐ, Phổ pha	$\lvert X(j\Omega)\rvert$, $\angle X(j\Omega)$	$\lvert X(e^{j\omega})\rvert$, $\angle X(e^{j\omega})$
Phổ mật độ NL	$\lvert X(j\Omega)\rvert^2$	$\lvert X(e^{j\omega})\rvert^2$
Điều kiện tồn tại biến đổi F	$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert dt < \infty$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lvert x[n]\rvert < \infty$ (NL hữu hạn)

BTVN : Vd slide chương 4 : 7, 11, 12 (+hang)

2. Tìm qh giữa DTFT của $x[n]$ và CTFT của $x(t)$ với g/s là $x[n]$ là phiên bản rời rạc của $x(t)$ với tần số lấy mẫu là Fs

No. . . Ngày

Thứ

Bài 1: find DTFT of $x(n)$ where:
$$x[n] = a^n u[n]$$

Bài làm

Xét $S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a^n . u[n]|$

T/có: $u[n] = \begin{cases} 0 & \forall n < 0 \\ 1 & \forall n \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow S = \sum_{n=0}^{+\infty} |a^n| = \frac{1}{1-|a|} < \infty \quad \forall |a| < 1$

Vậy: Nếu $|a| \geq 1$ DTFT k° tồn tại

Với $|a| < 1$ ta có:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n . u[n] . e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n . e^{-j\omega n} \quad \left(\text{vì } u[n] = \begin{cases} 1 & \forall n \geq 0 \\ 0 & \forall n < 0 \end{cases} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (a . e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{a}{e^{j\omega}}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a}$$

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a} \right| = \frac{|e^{j\omega}|}{|e^{j\omega} - a|} = \frac{|\cos\omega + i\sin(\omega)|}{|\cos(\omega) - a + i\sin\omega|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{[\cos(\omega) - a]^2 + \sin^2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}}$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = \angle \cos(\omega) + i\sin(\omega) - \angle \cos\omega - a + i\sin\omega$$

$$= \omega - \arctan\left(\frac{\sin(\omega)}{\cos\omega - a} \right)$$

$\arctan \frac{\sin(\omega)}{\cos\omega}$

Bài 2 : find $x(n)$ from its DTFT

~~$X(e^{j\omega}) = \cos^2(e^{j\omega})$~~ $X(\Omega) = \cos^2(\Omega) \Rightarrow X(\omega) = \cos^2(\omega)$

Theo công thức euler

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\cancel{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(e^{j\omega}) \cdot e^{jn\omega} d\omega}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\omega) \cdot e^{jn\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)^2 \cdot e^{jn\omega} \, d\omega$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big[\underbrace{e^{j(n+2)\omega}}_{I_1} + \underbrace{e^{j(n-2)\omega}}_{I_2} + \underbrace{2e^{jn\omega}}_{I_3}\Big] d\omega$$

$$I_1 = \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(n+2)\omega} d\omega = \begin{cases} 0 & n \neq -2 \\ \frac{1}{4} & n = -2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{4}\delta[n+2]$$

$$I_2 = \frac{1}{4}\delta[n-2]$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\delta[n]$$

$$\Rightarrow x[n] = \frac{1}{4}\delta[n+2] + \frac{1}{4}\delta[n-2] + \frac{1}{2}\delta[n]$$

Chương 5: DFT và phân tích phổ ứng dụng

1. ĐN biến đổi fourier rời rạc (Discrete transform - DFT)

Xét TH rời rạc có độ dài hữu hạn N (mẫu) x_N (giả sử chỉ $\neq 0$ khi $n \in [0, N-1]$)

TH này để biểu diễn bởi cặp pt DFT:

- Pt tổng hợp: $x_N[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k].e^{jk\omega_0 n}$ với $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ ≠ T/s cơ bản

Biên độ phức; TH sin phức

→ $x_N[n]$ đc tạo nên từ N tín hiệu sin có chiều dài hữu hạn (N), mỗi TH sin mang tần số rời rạc $k\omega_0 = k\frac{2\pi}{N}$ $(k = \overline{0, N-1})$

- pt phân tích $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_N[n].e^{-jk\omega_0 n}$ $(k = \overline{0, N-1})$

→ Cho phép tính N hệ số phổ $X[k]$ của TH $x_N[n]$

Kí hiệu:

$$x_N[n] \underset{IDFT}{\overset{DFT}{\rightleftarrows}} X[k]$$

- DTFS của $\tilde{x}[n]$ tuần hoàn có chu kỳ cơ bản N (mẫu)

$c_k = \frac{1}{N}\sum_0^{N-1} \tilde{x}[n].e^{-jk\omega_0 n}$ với ω_0 là tần số góc chuẩn hoá (tần số cơ bản của TH tuần hoàn)

ĐN DFT của $x[n]$ có chiều dài N (mẫu)

$$X[K] = \sum_{k=0}^{N-1} x_N[n].e^{-jk\omega_0 n} \quad \text{với } \omega_0 = \frac{2\pi}{N};\ K = \overline{0; N-1} \quad (1)$$

→ $\underbrace{X[k]}_{\text{DFT N điểm của } x_N[n]} = N.c_k$ với điều kiện: $x_N[n]$ là chu kì của $\tilde{x}[n]$

Hệ số DTFS của $\tilde{x}_N[n]$

DTFT của $x_N[n]$ không tuần hoàn

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x_N[n].e^{-j\omega n} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $X[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega = k\omega_0}$ $(k = \overline{0, N-1})$

$X[k]$ là phiên bản rời rạc hoá của $X(e^{j\omega})$ tại N t/s cách đều nhau $\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ (K' p.t/s cơ bản) → lấy mẫu trên miền tần số

Chu kì lấy mẫu trên (độ phân giải tần số) của biểu diễn phổ miền tần số rời rạc — DFT $x_N[n]$)

$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N} \rightarrow \Delta F = F_S . \Delta f = F_S . \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{F_S}{N}$ (Hz)

Chú ý: số điểm tần số rời rạc của DFT (N_DFT) k' nhất thiết phải bằng chiều dài N của $x_N[n]$

Nếu N_DFT $\geq$ N : ~~thì~~ $\hat{X}_{DFT}[k]$ là xấp xỉ đầy đủ của ~~FDD~~ DTFT $X(e^{j\omega})$

Nếu N_DFT < N : DFT $X[k]$ k' phải là xấp xỉ đầy đủ của DTFT $X(e^{j\omega})$

Thực tế: dùng các thuật toán FFT để tính nhanh DFT với N_DFT $= 2^m$, N_FFT

2. Phân tích phổ ứng dụng:

phải giới hạn chiều dài của tín hiệu muốn phân tích để nắm bắt sự thay đổi theo t/gian của các đặc trưng (trong đó có phổ)

VD: TH tiếng nói có tốc độ sự kiện (phát âm) trung bình 10-30ms / âm

→ phải phân khung TH (windowing / framing)